מתמטיקה למדעי הנתונים



תוכן העניינים

1. ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון 1
2. העתקות ליניאריות 26
3. מטריצות והעתקות לינאריות 36
4. מרחבי מכפלה פנימית 48
5. קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט 60
6. פירוקים של מטריצה (פירוק UL, פירוק DVS, פירוק RQ) 68
7. טורי פורייה 79
8. יישומים של טורי פורייה 103
9. התמרת פורייה 108

מתמטיקה למדעי הנתונים

פרק 1 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

1. לכסון מטריצות - תרגילי חישוב 1
2. לכסון מטריצות – תרגילי תיאוריה 5
3. חקירת הלכסינות של מטריצה עם פרמטרים 17
4. דמיון מטריצות 21

לכסון מטריצות – תרגילי חישוב

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **1-4**:

א. מצאו מטריצה אופיינית.

ב. מצאו פולינום אופייני.

ג. מצאו ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.

ד. מצאו מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ה. מצאו וקטורים עצמיים.

ו. קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון.

ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש-$P^{-1}AP=D$, באשר D מטריצה אלכסונית.

ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשבו A^{2009}.

ט. מצאו את הפולינום המינימלי.

י. קבעו האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
במידה והמטריצה הפיכה, בטאו את A^{-1} בעזרת A ו-I בלבד,
תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

1) $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **5-6** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.
במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש-$P^{-1}AP=D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.
פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

5) $A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-1\end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **7-11** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

7) $A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix}1&-1&4\\3&2&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$

9) $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$

10) $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}$

11) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

12) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3.

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=6, \lambda_2=2, \lambda_3=-4$.

מצאו את המטריצה A.

13) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3,

בעלת וקטורים עצמיים $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$,

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)^2$ ג. $x=0,\ x=1$,

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. ריבוב גיאומטרי: $V_{x=1}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – 1.

ריבוב גיאומטרי: $V_{x=0}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – 1.

ה. $\langle 1,1,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=x(x-1)^2$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. לא הפיכה.

2) א. $\begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-1)^2(x-2)$ ג. $x=1,\ x=2$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. ריבוב גיאומטרי: $V_{x=1}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – 1.

ריבוב גיאומטרי: $V_{x=2}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=(x-1)^2(x-2)$ – הפולינום האופייני הוא גם המינימלי.

י. הפיכה.

3) א. $\begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)(x-2)$ ג. $x=0,\ x=1,\ x=2$

$x=0$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=1$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. ריבוב גיאומטרי: $V_{x=0}=sp\{\langle -1,0,1\rangle\}$ – 1.

ריבוב גיאומטרי: $V_{x=1}=sp\{\langle 0,1,0\rangle\}$ – 1.

ה. $\langle 0,1,0\rangle, \langle 1,0,1\rangle, \langle -1,0,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ח. $\begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=x(x-1)(x-2)$ י. לא הפיכה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) א. $\begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

ג. $x=6,\ x=2,\ x=-4$

$x=-4$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=6$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=6}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=-4}=sp\{\langle -1,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle -1,1,0\rangle,\ \langle 1,1,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ח. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^{2017}+(-4)^{2017} & 2^{2017}-(-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017}-(-4)^{2017} & 2^{2017}+(-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017}+2^{2017} & -6^{2017}+2^{2017} & 2\cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$

ט. $m(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$ י. הפיכה.

5) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{C}$: $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i,2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i,2\rangle$,

$$A=\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

6) ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1,1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

7) ערכים עצמיים: $x_1=2,\ x_{2,3}=3$,

וקטורים עצמיים: $V_{x=2}=(1,1,1),\ v^{(1)}_{x=3}=(1,0,1),\ v^{(2)}_{x=3}=(1,1,0)$

8) $x=1,\ x=3,\ x=-2$, $v_{x=1}=(-1,4,1)$, $v_{x=3}=(1,2,1)$, $v_{x=-2}=(-1,1,1)$

9) $x=1,\ x=4,\ x=-1$, $v_{x=1}=(1,-2,1)$, $v_{x=4}=(1,1,1)$, $v_{x=-1}=(-1,0,1)$

10) $x=-1,\ x=3$, $v_{x=1}=(-1,2)$, $v_{x=3}=(1,2)$

11) $x=1, x=1\pm\sqrt{3}i$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3i}}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right)$,

$$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3i}}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$$

12) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

13) אין כזו מטריצה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

לכסון מטריצות – תרגילי תיאוריה

שאלות

1) נתונה מטריצה ריבועית A.
הוכיחו או הפריכו:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A, אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם A הפיכה ו-λ ע"ע של A, אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}.

ג. ל-A ול-A^T יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל-A ול-A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ, אז λ הוא ע"ע של A.

ו. אם $A^{-1}=A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=\pm 1$.

ז. אם $A^2=A$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=0$ או $\lambda=1$.

2) פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. ידוע שלמטריצה A יש וקטור עצמי v השייך לערך העצמי 4.
נתונה המטריצה $B=A^4-2A^2+10A-4I$.
הוכיחו ש-v וקטור עצמי גם של המטריצה B וחשבו את הערך העצמי המתאים לו.

ב. נתון ש-v וקטור עצמי של מטריצה A השייך לערך עצמי λ.
יהי $p(x)$ פולינום.
הוכיחו ש-v ו"ע של המטריצה $p(A)$ השייך לערך עצמי $p(\lambda)$.

3) פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר 2.

1. הוכיחו כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל-
$p(x)=x^2-\text{tr}(A)x+|A|$.

2. נתון כי $\text{tr}(A)=4$. חשבו את $|A|$, אם ידוע בנוסף שלמטריצה יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n.
נניח כי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0$ הפולינום האופייני של A.
הוכיחו כי $a_{n-1}=-\text{tr}(A)$, $a_0=(-1)^n|A|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) נתונה מטריצה A מסדר n.
הוכיחו:

א. λ ע"ע של $A \Leftrightarrow rank(A-\lambda I)<n$.

ב. הריבוי הגיאומטרי של ע"ע λ שווה ל-$n-rank(A-\lambda I)$.

ג. אם $rank(A)=k<n$ אז 0 ע"ע של המטריצה A מריבוי גיאומטרי $n-k$.
מה ניתן לומר על הריבוי האלגברי במקרה זה.

5) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר 4. ידוע כי $rank(B)=1$.
הוכיחו:

א. 0 ע"ע של המטריצה B.

ב. הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 0 הוא 3.

ג. הריבוי האלגברי של הע"ע 0 הוא 3 או 4.

ד. למטריצה B לכל היותר 2 ערכים עצמיים.

ה. אם למטריצה B ע"ע פרט ל-0 אז הוא שווה ל-$tr(B)$.

6) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$.
ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי $\lambda=k\neq 0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

7) תהיינה A ו-B מטריצות מסדר n המקיימות $AB=BA$.
נניח כי $rankA=n-1$ ו-v וקטור עצמי השייך לערך העצמי 0 של המטריצה.
הוכיחו כי v הוא וקטור עצמי של המטריצה B.

8) תהי A מטריצה מסדר 3 המקיימת $0<rank(A-10I)<rank(A-4I)<3$.

א. מצאו את הפולינום האופייני של המטריצה A.

ב. מצאו את הערכים העצמיים של A ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע.

ג. קבעו האם A ניתנת ללכסון. אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

ד. קבעו האם A הפיכה?

ה. הוכיחו כי $(A-10I)^2(A-4I)=0$. האם ייתכן ש-$A=4I$ או $A=10I$?

9) תהי A מטריצה מסדר 5×5, כך ש-$\det A=12$ וגם $\rho(I+A)=\rho(2I-A)=3$.
הוכיחו ש-A לכסינה, ורשמו מטריצה אלכסונית דומה לה.

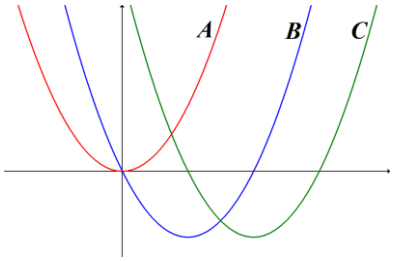
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$ (מטריצה עם שורה אחת).
מצאו את הערכים העצמיים של המטריצה A^TA (הניחו $n>1$).

11) תהי A מטריצה מסדר 3×3, כך ש- $A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\-4\end{pmatrix}$, וכן $\rho(2I+A)<\rho(4I-A)$.
הוכיחו ש- A לכסינה.

12) תהי A מטריצה מסדר 3×3 המקיימת $\rho(2I-A)>\rho(5I+A)$.
ידוע גם ש- $span\{(3,1,-1)\}$ הוא מרחב הפתרונות של המערכת $A\underline{x}=2\underline{x}$.
הוכיחו ש- A לכסינה, ורשמו את כל המטריצות האלכסוניות הדומות ל- A.

13) באיור שלפניך הגרפים של הפולינום האופייני של 3 מטריצות A, B ו- C מסדר 2.
ידוע שהמטריצה A ניתנת ללכסון.
מצאו את הדרגה של כל אחת מהמטריצות והוכיחו שגם המטריצות B ו- C ניתנות ללכסון.



14) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3.
נתון כי $\det(A)=tr(A)=0$ וכי $\lambda=1$ ערך עצמי של המטריצה.
הוכיחו כי המטריצה ניתנת ללכסון ומצאו את כל הערכים העצמיים שלה.

15) יהיו $A,B\in M_2[\mathbb{R}]$.
ידוע כי $A=AB-BA$.
הוכיחו כי $A^2=0$.

16) תהי A מטריצה ממשית לא הפיכה מסדר 2 כך ש- $tr(A)\neq-1$.

א. הוכיחו כי $(I+A)^{-1}=I-\frac{1}{1+tr(A)}A$.

ב. בעזרת סעיף א מצאו את $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n.
ויהיו $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ הערכים העצמיים של המטריצה.
הוכיחו:

א. $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

ב. $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

הערה:
הערכים העצמיים של המטריצה מתקבלים ממציאת השורשים של הפולינום האופייני מעל $\mathbb{C}$. בנוסף, הערכים העצמיים לא בהכרח שונים זה מזה.

18) נתונה מטריצה ממשית A מסדר 2.

א. אם $tr(A)=3,\ tr(A^2)=5$. מצאו את $|A|$.

ב. אם וקטורי העמודה של A מקבילים ואם $tr(A)=5$ מצאו את $tr(A^2)$.

ג. אם $|A|=5$ ואם ל-A ע"ע שהם מספרים שלמים וחיוביים מהו $tr(A)$.

19) תהי A מטריצה מסדר 3 שמקיימת $|A|=1$.

א. אם $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ הוא ערך עצמי של A מצאו את כל הע"ע של A.

ב. ידוע כי $A^{100}=aA^2+bA+cI$.
מצאו את a,b,c.

20) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הפולינום האופייני של מטריצה A הוא $p_A(x)=x^2+bx+c$.
מצאו את הפולינום האופייני $p_{4A}(x)$ של המטריצה $4A$.

ב. מטריצה $A\in M_2[R]$ מקיימת $|A|<0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

21) תהי A מטריצה ריבועית עם פולינום אופייני $p(t)=(t-2)^2(t+1)^2(t-5)^8(t+3)^7$.

א. מה הדרגה של A?

ב. ידוע שקיימת מטריצה P הפיכה כך ש-$AP=PD$, כאשר D אלכסונית.
חשבו את הדרגה של $A-5I$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

22) תהי $A=\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית.

א. נסמן את העי"ע של A על ידי α ו- β.
הוכיחו שהם ממשיים.

ב. הניחו ש- $\alpha=\beta$, והוכיחו ש- $A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

23) תהי A מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{C}$, שהפולינום האופייני שלה $p(t)=t^4+2it^3+3t^2$.

הוכיחו שהמטריצה A^2-3A+I לכסינה מעל $\mathbb{C}$, ורשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

24) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{R}$, בעלת פולינום אופייני $p(t)=t^3-2t+5$.
הוכיחו שלכל $b\in R^3$ יש למערכת $A\mathbf{x}=b$ פתרון יחיד ומצאו את $|A|$ ו- $tr(A)$.

ב. תהי A מטריצה ממשית, כאשר $A\neq I$, ובעלת פולינום אופייני $p(t)=(t-1)^3$.
הוכיחו ש- A הפיכה, וחשבו את $\mathrm{tr}(A-2I)$.

25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו ש- λ ע"ע של A אם ורק אם $A-\lambda I$ לא הפיכה.

ב. תהי A מטריצה ריבועית, עם פולינום אופייני $p(t)=(t-1)(t+2)^{n-1}$,
כאשר $n\geq 2$.
הוכיחו שהמטריצה $C=A^2+A-2I$ לא הפיכה, ושהמטריצה $D=A^2-2I$ הפיכה.

26) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.

ב. הוכיחו שכל הערכים העצמיים של מטריצה נילפוטנטית הם אפס.

ג. האם הטענה ההפוכה לטענה בסעיף ב נכונה? הוכיחו או הפריכו.

ד. הוכיחו שאם A מטריצה נילפוטנטית מסדר n אז $A^n=0$.

ה. תהי A מטריצה נילפוטנטית מסדר n, ותהי $B=A-I$.
מצאו את $|B|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) צטטו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום מינימלי של מטריצת בלוקים.
בעזרת המשפט לעיל חשב את הפולינום המינימלי של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

28) תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\begin{cases} ij & i\neq j \\ 1+ij & i=j \end{cases}$.
חשבו את $|A|$.

29) נסחו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום אופייני של מטריצת בלוקים.
א. בעזרת המשפט לעיל חשבו את הפולינום האופייני של המטריצה הבאה:

$$M=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

ב. הוכיחו את המשפט מסעיף א.

30) נתונות שתי מטריצות ריבועיות, A ו-B, מסדר n. הוכיחו או הפריכו:
א. ל-AB ו-BA אותם ערכים עצמיים.
ב. נניח ש-v וקטור עצמי, שונה מאפס, של A ו-B,
אז v גם הוא וקטור עצמי של המטריצה $4A+10B$.

31) תהי A מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.
א. הוכיחו כי לכל סקלר k, המטריצה $A+kI$ ניתנת ללכסון.
ב. אם 4 הוא ערך עצמי של המטריצה A, מצאו את הערך העצמי של המטריצה $A+kI$.

32) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3. ידוע כי v_1,v_2 הם ו"ע של A, שונים מאפס, המתאימים לע"ע $\lambda=1$, וכי v_3 הוא ו"ע, שונה מאפס, המתאים לע"ע $\lambda=-1$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:
א. אם הווקטורים v_1,v_2 בת"ל, אז $A^{2018}=I$.
ב. A ניתנת ללכסון.
ג. v_3 הוא צרוף לינארי של הווקטורים v_1,v_2.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

33) הוכיחו או הפריכו:

א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.

ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.

ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix}4\\1\\10\end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

34) נתונות שתי מטריצות מסדר n: מטריצה B הניתנת ללכסון ומטריצה Q הפיכה. הוכיחו או הפריכו:

א. המטריצה $Q^{-1}BQ$ אלכסונית.

ב. המטריצה $Q^{-1}BQ$ ניתנת ללכסון.

35) נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות מסדר n, שעבורן v הוא ו"ע.

א. הוכיחו כי W תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר n.

ב. עבור $n=2$, $v=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, מצאו בסיס ל- W.

36) תהי $A=\begin{pmatrix}1 & a\\4 & 1\end{pmatrix}$, כאשר a קבוע ממשי.

א. עבור $a=3$, תנו דוגמה לזוג $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ שאינו וקטור עצמי של A.

ב. עבור איזה ערך של a, הזוג $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A?

ג. יהי $0\neq u\in\mathbb{R}^2$ וקטור שאינו ו"ע של A.
הוכיחו כי הקבוצה $\{u,Au\}$, מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.

37) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית, אם $A^2=A$.
תהי A מטריצה אידמפוטנטית.

א. הוכיחו כי הערכים העצמיים של A הם 0 או 1 בלבד.

ב. רשמו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A.

ג. הוכיחו כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים.

ד. הוכיחו כי A ניתנת ללכסון.

ה. הוכיחו כי $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{rank}(A)$ (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

38) תהי A מטריצה ממשית מסדר 5. הוכיחו או הפריכו:

א. קיים תת מרחב $W_\alpha=\{u\mid Au=\alpha u\}$ של R^5, כך ש-$\dim W_\alpha\geq 1$.

ב. אם u_1,u_2 ו"ע של A, אז גם הווקטור u_1+u_2 ו"ע של A.

ג. אם המטריצה B שקולת שורות למטריצה A, אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.

ד. אם A לכסינה מעל R, אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.

ה. אם כל הערכים העצמיים של A שונים זה מזה, אז המטריצה A לכסינה מעל R.

39) תהי A מטריצה ממשית מסדר 4, שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים.
ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2,
והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4.
מכאן נובע ש:

א. $\operatorname{rank}(A)=4$

ב. A לכסינה.

ג. $\operatorname{tr}(A)>10$

ד. $|A|\leq 127$

ה. קיים וקטור עצמי v של A, כך ש-$A^2v=2v$.

40) תהי A מטריצה ריבועית ויהי n מספר טבעי.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם v וקטור עצמי של A, אז v וקטור עצמי גם של A^n.

ב. אם v וקטור עצמי של A^n, אז v וקטור עצמי גם של A.

ג. אם A לכסינה, אז A^n לכסינה.

ד. אם A^n לכסינה, אז A לכסינה.

41) נתונה מטריצה A, שהפולינום המינימלי שלה הוא $m(x)=(x-1)^2$.
הוכיחו כי המטריצה $A^2+4A+3I$ הפיכה.

42) הוכיחו שהערכים העצמיים של מטריצה סימטרית ממשית הם בהכרח ממשיים.

43) נתונה מטריצה סימטרית ממשית A.
הוכיחו שווקטורים עצמיים של A המתאימים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

44) תהי A מטריצה ממשית מסדר n.
נתון: (1) A ניתנת ללכסון. (2) קיים k טבעי כך ש- $A^k = I$.
צריך להוכיח: $A^2 = I$.

45) ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי A מטריצה מסדר $n\times n$, לכסינה ובעלת דרגה 1.
הוכיחו שהעקבה שלה שונה מ- 0.
ב. תהי A מטריצה ריבועית נילפוטנטית מסדר n.
הוכיחו ש- 0 ע"ע של A, ושהוא הע"ע היחיד שלה.

46) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{pmatrix}$.
א. הוכיחו ש-A לכסינה.
ב. האם המטריצה $B=4A^{111}-10A+20I$ הפיכה?

47) תהי $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית ממשית שמקיימת $A^2+I=0$.
הוכיחו את הטענות בסעיפים א'-ד':
א. A הפיכה.
ב. A לא ניתנת ללכסון.
ג. A לא סימטרית.
ד. n זוגי.
ה. האם הטענה בסעיף ד' נשארת נכונה גם אם המטריצה A מרוכבת?

48) תהי A מטריצה מסדר n ויהי c קבוע.
ידוע ש- λ ע"ע של המטריצה A עם וקטור עצמי v.
א. הוכיחו כי $\lambda+c$ הוא ערך עצמי של המטריצה $A+cI$ עם וקטור עצמי v.
ב. הוכיחו שהריבוי האלגברי של הע"ע λ של המטריצה A שווה לריבוי האלגברי של הע"ע $\lambda+c$ של המטריצה $A+cI$.
ג. הוכיחו שהריבוי הגיאומטרי של הע"ע λ של המטריצה A שווה לריבוי הגיאומטרי של הע"ע $\lambda+c$ של המטריצה $A+cI$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

49) נתונה מטריצה A על ידי $a_{ij}=\begin{cases}b & i=j\\ a & i\neq j\end{cases}$ כאשר $1\le i,j\le n$.

חשבו את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של המטריצה A.
קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון, אם כן, לכסנו אותה.
בעזרת התוצאות שקיבלת חשבו גם את $|A|$.
הערה: ניתן לפתור ללא חישוב של הפולינום האופייני.

50) תהי A מטריצה ממשית מסדר n.
הוכיחו:

א. אם n אי-זוגי אז למטריצה לפחות ע"ע ממשי אחד.

ב. אם λ ע"ע של A אז גם הצמוד המרוכב שלו $\bar{\lambda}$ הוא ע"ע של A.

51) תהי A מטריצה מסדר n.
הוכיחו:

א. אם A ניתנת ללכסון ואם הערכים העצמיים שלה הם 1 או 1-אז $A^2=I$.

ב. אם כל הערכים העצמיים של A ממשיים וקטנים מ-1 אז $|I-A|>0$.

52) תהי A מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.
הוכיחו שכל ערך עצמי של A הוא מספר מדומה.
תזכורת: מספר מדומה הוא מספר מהצורה bi כאשר b ממשי.

53) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדר את המושגים מטריצה צמודה, מטריצה נורמלית ומטריצה אוניטרית.
צטט משפט מפורסם הנוגע ללכסינות מטריצות נורמליות.
תהי A מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.

ב. הוכיחו שהמטריצה A נורמלית.

ג. הוכיחו שהדרגה של A היא זוגית.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מספרים מרוכבים.

54) סדרה (a_n) מוגדרת רקורסיבית על ידי: $a_0=a_1=1$ $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$.
מצאו ביטוי סגור עבור a_n (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).

55) סדרה (a_n) מוגדרת רקורסיבית על ידי: $a_0=a_1=2,\ a_2=4$ $a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}-2a_{n-3}$.
מצאו ביטוי סגור עבור a_n (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה.

לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il.

1) שאלת הוכחה.

2) א. הערך העצמי הוא 260.

3) א.2. $|A|=4$

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) $D=diag(0,0,k)$

7) שאלת הוכחה.

8) א. $p(\lambda)=(\lambda-10)^2(\lambda-4)$

ב. ע"ע 4 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 1. ע"ע 10 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 2.

ג. $D=diag(10,10,4)$ ד. כן. ה. לא.

9) $\text{diag}(-1,-1,2,2,3)$

10) 0 ו- $tr(A)$.

11) שאלת הוכחה.

12) $diag(2,-5,-5),\ diag(-5,2,-5),\ diag(-5,-5,2)$

13) $rank(A)=0,\ rank(B)=1,\ rank(C)=2$

14) $0,1,-1$

15) שאלת הוכחה.

16) ב. $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

17) שאלת הוכחה.

18) א. $|A|=2$ ב. $tr(A^2)=25$ ג. $tr(A)=6$

19) א. $1,\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ב. $a=0,\ b=1,\ c=0$

20) א. $p_{4A}(x)=x^2+4bx+16c$

21) א. 19 ב. 11

22) שאלת הוכחה.

23) $\text{diag}(1,1,-3i,-8+9i)$

24) א. $|A|=-5$ ו- $tr(A)=0$ ב. $\text{tr}(A-2I)=-3$

25) שאלת הוכחה.

26) ה. $|B|=(-1)^n$

27) $|A|=-384$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) $m_M(x)=(x-2)^2(x-7)$

29) א. $p_M(x)=(x-5)^2(x-6)(x-7)$

30) שאלת הוכחה.

31) ב. $4+k$

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) ב. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

36) א. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

37) ב. $p(x)=x,\ p(x)=x-1,\ p(x)=x(x-1)$

38) שאלת הוכחה.

39) שאלת הוכחה.

40) שאלת הוכחה.

41) שאלת הוכחה.

42) שאלת הוכחה.

43) שאלת הוכחה.

44) שאלת הוכחה.

45) שאלת הוכחה.

46) שאלת הוכחה.

47) שאלת הוכחה.

48) שאלת הוכחה.

49) $|A|=(b-a)^{n-1}\left[a(n-1)+b\right]$

50) שאלת הוכחה.

51) שאלת הוכחה.

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) $a_n=2^{n+1}-3^n$

55) $a_n=\frac{1}{3}\left(3+(-1)^n+2^{n+1}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת הלכסינות של מטריצה

שאלות

1) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\1&k&0\\1&0&k\end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי.

א. לאיזה ערכים של k המטריצה לכסינה?

ב. במקרים בהם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

2) נתון $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\1&k&0\\1&1&k\end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי.

לאיזה ערכים של k (אם בכלל) המטריצה לכסינה?

3) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&a^2\\1&a^2&0\end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

א. מצאו את כל ערכי a, כך ש-A לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

ב. במקרה בו A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

4) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{pmatrix}$, כאשר $m\in\mathbb{R}$.

עבור אילו ערכים של m, המטריצה A לכסינה?
כאשר היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

5) נתון $A=\begin{pmatrix}k-2&2k&k+1\\k-1&-1&2\\-k&0&-6\end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי חיובי.

א. לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A?
עבור ערך ה-k שמצאת בסעיף א:

ב. מצאו את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 2.

ג. הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתונה המטריצה הממשית $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

א. מצאו את ערכי a ו- b עבורם הערכים העצמיים של A יהיו 1 ו-1- **בלבד**.

ב. עבור ערכי a ו- b שמצאתם בסעיף א' קבעו האם המטריצה לכסינה.

7) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a-2 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{R}$.

א. מצאו את כל הערכים של a, עבורם A לכסינה.

ב. במקרים בהם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית D הדומה ל-A.

8) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & a \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

א. עבור כל ערך של a, מצאו את הערכים העצמיים של A.

ב. עבור אילו ערכי a, המטריצה A לכסינה?

בכל אחד מהמקרים, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

9) נתונה המטריצה הבאה מעל $\mathbb{R}$: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$,

כאשר a,b,c מספרים ממשיים המקיימים $a-b+c=-1$.

א. הוכיחו כי -1 הוא ערך עצמי של A ומצאו את הריבוי הגיאומטרי שלו.

ב. נתון כי $a=b>1$.

הוכיחו כי המטריצה ניתנת ללכסון ומצאו את כל ערכיה העצמיים.

ג. ידוע כי $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+a<0$.

הוכיחו שהמטריצה לא ניתנת ללכסון.

10) מצאו את כל הערכים של המספרים הממשיים a,b, כך שהמטריצה $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b-a \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ לכסינה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

א. עבור אילו ערכי a,b A לכסינה? נמקו.

ב. בכל אחד מהמקרים ש-A לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית ש-A דומה לה.

12) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & a & 0 & b\end{pmatrix}$, כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.

מצאו את כל הערכים של a ו-b, כך ש-A לכסינה.
בכל מקרה בו היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

13) נתונה מטריצה ממשית $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & a\\ 3 & -5 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$, כאשר a פרמטר ממשי.

ידוע ש-$\lambda=-2$ הוא ערך עצמי שלה, עם ריבוב גיאומטרי 2.

א. מהו ערכו של a?

ב. האם המטריצה לכסינה?

14) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & a\\ a & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

האם קיימים ערכי a, כך ש-A לכסינה מעל $\mathbb{R}$? מעל $\mathbb{C}$?
אם כן, עבור כל ערך כזה של a, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

15) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -a & 2a\\ a & -a & a\end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{R}$.

מצאו את כל ערכי a עבורם A לכסינה:

א. מעל $\mathbb{R}$.

ב. מעל $\mathbb{C}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $k \neq 4$ ב. $D = diag(4,k,k)$

2) המטריצה A לא ניתנת ללכסון לכל ערך של k.

3) א. A לכסינה אם ורק אם $a \neq \pm 1$. ב. $D = diag\left(1,-a^2,a^2\right)$

4) A לכסינה לכל m ודומה למשל ל- $D = diag(m-1,m-1,m+2)$

5) א. $k = 3$ ב. ר"א = 1. ר"ג = 1. ג. $D = diag(2,-3,-5)$

6) א. $a = 3,\ b = -4$ או $a = 1,\ b = 0$ ב. המטריצה לא לכסינה.

7) א. A לכסינה עבור כל a. ב. דומה למטריצה אלכסונית $D = diag(a,1,2)$.

8) א. אם $a \neq 0,2,-1$, אז יש שלושה ע"ע שונים $a^2, 2a, a+2$.

אם $a = 0$, הע"ע הם 0 ו- 2.

אם $a = -1$, הע"ע הם 1 ו- -2.

אם $a = 2$, יש ע"ע אחד והוא 4.

ב. A לכסינה אם ורק אם $a \neq 2,-1$.

במקרה זה היא דומה למטריצה $D = diag\left(a^2,2a,a+2\right)$.

9) שאלת הוכחה.

10) אם $a = b = 0$, או אם $a \neq 0$ ו- $b = 0$, אז A לכסינה.

11) א+ב. A לכסינה בשלושה מקרים:

כאשר $a \neq 0,1$ ואז דומה ל- $D = diag(1,0,a)$

או כאשר $a = 0$ וגם $b = 0$ ואז דומה ל- $D = diag(0,0,1)$

או כאשר $a = 1$ וגם $b = -\frac{1}{2}$ ואז דומה ל- $D = diag(0,1,1)$

12) A לכסינה אם ורק אם:

1. $b \neq 2,3$ ואז $D = diag(3,2,2,b)$.

או 2. $b = 2$ וגם $a = 0$ ואז $D = diag(3,2,2,2)$.

או 3. $b = 3$ וגם $a = 0$ ואז $D = diag(3,3,2,2)$.

13) א. $a = 3$ ב. כן.

14) מעל $\mathbb{R}$: לכסינה אם $a = 0$ ודומה ל- $D = diag(0,0,0,0)$.

מעל $\mathbb{C}$: לכסינה לכל a דומה ל- $D = diag(a,-a,ai,-ai)$.

15) א. A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אם ורק אם $a = 0$. ב. A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ לכל a.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

דמיון מטריצות

שאלות

1) ידוע ש-A ו-B מטריצות דומות. הוכיחו כי:

א. $|A|=|B|$

ב. $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$

ג. ל-A ו-B אותו פולינום אופייני.

2) הוכיחו באינדוקציה: אם $P^{-1}AP=B$, אז $A^n=PB^nP^{-1}$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי A מטריצה ממשית מסדר n וידוע כי A דומה למטריצה $4A$.
הוכיחו כי A מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות $4A=\begin{pmatrix}0&4\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ דומות.

4) נתונות שתי מטריצות ממשיות: $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&7&0\\9&-17&6\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\-1&3&2\\2&-8&-5\end{pmatrix}$.
האם קיימים קבועים ממשיים a,b, כך שהמטריצה A דומה למטריצה B?

5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר n: A,B,C. הוכיחו כי:

א. A דומה לעצמה.

ב. אם A דומה ל-B, אז B דומה ל-A.

ג. אם A דומה ל-B ו-B דומה ל-C, אז A דומה ל-C.

ד. אם A דומה ל-B ושתיהן הפיכות, אז A^{-1} דומה ל-B^{-1}.

ה. אם A דומה ל-B, אז A^k דומה ל-B^k, לכל k טבעי.

ו. אם A דומה ל-B ו-$q(x)$ פולינום, אז $q(A)$ דומה ל-$q(B)$.

ז. אם A דומה ל-B, אז A^T דומה ל-B^T.

ח. אם A דומה ל-B, אז $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$.

ט. אם A דומה ל-B, אז $\mathrm{Nullity}(A)=\mathrm{Nullity}(B)$.

הערה – $\mathrm{Nullity}(A)$ = מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) הוכיחו או הפריכו:

א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.

ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.

ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

7) ידוע שלמטריצה ריבועית A מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2.
חשבו כל אחד מהבאים או הסבירו מדוע לא ניתן לעשות זאת:

א. $\operatorname{rank}(A)$

ב. $\dim \operatorname{Ker}(A)$

ג. $\operatorname{tr}(A)$

ד. $\left|A^TA\right|$

ה. ע"ע עבור A^TA.

ו. ע"ע עבור $\left(4A^2+10A+I\right)^{-1}$.

הערה – $\dim \operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Nullity}(A)$

8) הוכיחו כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

9) ענו על הסעיפים הבאים:

א. A ו-B שתי מטריצות הדומות למטריצה C.
הוכיחו כי A דומה ל-B.

ב. הוכיחו שהמטריצות הבאות דומות: $B=\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$.

10) עבור אילו ערכים של x המטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\-2&1&1\\2&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&x&0\\0&1&0\\-1&x&2\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) הוכיחו שכל אחת מהמטריצות הבאות אינה דומה לאף אחת מהאחרות:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

12) נתונות שתי מטריצות $A,B\in M_n[\mathbb{R}]$.

נתון כי A ניתנת ללכסון.

הוכיחו:

B דומה ל-A אם ורק אם B ניתנת ללכסון והיא בעלת אותם ע"ע כמו של A.

13) נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ ו-$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$, כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.

עבור אילו ערכים של a ו-b המטריצות A ו-B דומות?

14) נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&3&0\\a&0&1\end{pmatrix}$ ו-$B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

קבעו האם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש-$P^{-1}AP=B$.

15) נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&0\\0&2&\dots&0&0\\0&0&\dots&n-1&0\\0&0&\dots&0&n\end{pmatrix}$ ו-$B=\begin{pmatrix}n&0&\dots&0&0\\0&n-1&\dots&0&0\\0&0&\dots&2&0\\0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}$.

קבעו האם המטריצות דומות. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש-$P^{-1}AP=B$.

16) תהיינה A,B מטריצות ב-$M_n(\mathbb{R})$, בעלות דרגה 1, וכן $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)=k$, כאשר k מספר ממשי שונה מ-0.

א. מצאו את הפולינום האופייני של A ו-B.

ב. הוכיחו ש-A ו-B דומות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) תהי A מטריצה מסדר 3×3 עם פולינום אופייני $p(t)=(t-1)(t+4)^2$, ונתון כי $\rho(4I+A)=1$.

א. רשמו את הפולינום האופייני של A^2 .

ב. הוכיחו שהמטריצה $A^4-10A+9I$ לא הפיכה, ומצאו את ממד מרחב הפתרונות של המערכת $\left(A^4-10A+9I\right)\underline{x}=\underline{0}$.

18) נתון כי $A,B,C,D\in M_n[\mathbb{R}]$ כך ש-A דומה ל-B ו-C דומה ל-D .
הוכיחו או הפריכו:

א. $A+C$ דומה ל-$B+D$.

ב. AC דומה ל-BD .

19) הוכיחו או הפריכו:

א. אם שתי מטריצות שקולות שורה אז הן דומות.

ב. אם שתי מטריצות הן דומות אז הן שקולות שורה.

20) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו: אם A דומה ל-B אז $A-kI$ דומה ל- $B-kI$.

ב. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ג. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&5\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7&0\\0&2&7\\0&0&2\end{pmatrix}$$

21) נתון כי A ו-B מטריצות דומות.
הוכיחו של-A ו-B אותם ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי זהה.

22) תהי A מטריצה ממשית מסדר 7×7 , בעלת דרגה 4 .
נתון שהפולינום $q(t)=t^4-7t^2+10$ מחלק את הפולינום האופייני $p(t)$ של A .
מצאו את הפולינום האופייני של A .

א. הוכיחו ש-A לכסינה ומצאו מטריצה אלכסונית שדומה לה.

ב. מצאו את $tr\left(A^2\right)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

23) נתונות שתי מטריצות $A,B\in M_n(R)$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $B+I$ דומה ל- $I-A$ אז A^2 דומה ל- B^2.

ב. אם ל- A ול- B אותה דרגה, אותו פולינום אופייני, אותה דטרמיננטה ואותו סכום איברי אלכסון (trace) אז הן בהכרח דומות.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) לא.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו. $1,\frac{1}{15},\frac{1}{37}$

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) $x=0$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) $b=-2$ ו- $a=0$

14) כן, עבור $a=\pm 2$

15) המטריצות דומות ו- P מטריצה שהאלכסון המשני שלה 1 ושאר האיברים 0.

16) א. $p_A(t)=p_B(t)=t^n-kt^{n-1}$ ב. שאלת הוכחה.

17) א. $p(x)=(x-1)(x-16)^2$. ב. ממד מרחב הפתרונות הוא 1.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) א. שאלת הוכחה. ב. לא דומות. ג. לא דומות.

21) שאלת הוכחה.

22) א. $D=diag\left(0,0,0,\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{5},-\sqrt{5}\right)$ ב. $tr\left(A^2\right)=14$

23) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה למדעי הנתונים

פרק 2 - העתקות ליניאריות

תוכן העניינים

1. העתקות ליניאריות 26
2. גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות 28
3. העתקות לינאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם 31
4. פעולות עם העתקות ליניאריות 35

העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות **1-15**, קבעו, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה לינארית:

1 $T(x,y)=(x+y,x-y)\;;\quad T:R^2\to R^2$

2 $T(x,y,z)=(x+y-2z,x+2y+z,2x+2y-3z)\;;\quad T:R^3\to R^3$

3 $T(x,y,z)=(2x+z,|y|)\;;\quad T:R^3\to R^2$

4 $T(x,y)=(xy,y,z)\;;\quad T:R^2\to R^3$

5 $T(x,y,z)=(x+1,x+y,y+z)\;;\quad T:R^3\to R^3$

6 $T:M_n[R]\to M_n[R]\quad T(A)=BA+AB\quad (B\in M_n[R])$

7 $T:M_n[R]\to M_n[R]\quad T(A)=A+A^T\;;$

8 $T:M_n[R]\to M_n[R]\quad T(A)=|A|\cdot I\;;$

9 $T:M_n[R]\to M_n[R]\quad T(A)=A\cdot A^T\;;$

10 $T:M_n[R]\to M_n[R]\quad T(A)=A^{-1}\;;$

11 $T:P_3[R]\to P_2[R]\quad T(a+bx+cx^2+dx^3)=a+bx+cx^2\;;$

12 $T:P_n[R]\to P_n[R]\quad T\big(p(x)\big)=p(x+1)\;;$

13 $T:P_n[R]\to P_n[R]\quad T\big(p(x)\big)=p'(x)+p''(x)\;;$

14 $T:P_n[R]\to P_{2n}[R]\quad T\big(p(x)\big)=p^2(x)\;;$

15 $T:C[F]\to C[F]\quad T(z)=\bar{z}\quad (F=C,F=R)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה לינארית:
$T:R^2\to R^2 \quad ; \quad T(x,y)=\left(m^2x^{2m},y^{2m}+x\right)$?

בשאלות **17-20**, קבעו האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון.
אם כן, מצאו את ההעתקה וקבעו האם היא יחידה. אם לא, נמקו מדוע.

17) $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(7,8,9),\ T(0,1,1)=(4,5,6),\ T(1,1,0)=(1,2,3)$.

18) $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(0,1,1)\ ,\ T(0,1,1)=(1,2,1),\ T(1,0,1)=(1,1,0)$.

19) $T:R^4\to R^3$ כך ש-
$T(1,2,-1,0)=(0,1,-1),T(-1,0,1,1)=(1,0,0),T(0,4,0,2)=(2,2,-2)$.

20) $T:P_2[R]\to P_2[R]$ כך ש- $T(1)=4,T\left(4x+x^2\right)=x,T\left(1-x\right)=x^2+1$.

21) נתונה העתקה לינארית $T:R^3\to R^3$, המקיימת:
$T(1,0,0)=(a_1,a_2,a_3)$
$T(0,1,0)=(b_1,b_2,b_3)$.
$T(0,0,1)=(c_1,c_2,c_3)$

א. הוכיחו שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

ב. נסחו והוכיחו טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור $T:R^n\to R^m$.

22) נתונה העתקה לינארית $T:V\to V$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל.

ב. אם $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל.

תשובות סופיות

1) כן	**2)** כן	**3)** לא	**4)** לא	**5)** לא
6) כן	**7)** כן	**8)** לא	**9)** לא	**10)** לא
11) כן	**12)** כן	**13)** כן	**14)** לא	**15)** לא
16) כן	**17)** כן	**18)** כן	**19)** כן	**20)** כן

21) שאלת הוכחה. **22)** שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרעין ותמונה של העתקות לינאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-6**, מצאו:

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

1) $T(x,y,z,t)=(x+y,y-4z+t,4x+y+4z-t)$, $T:R^4\to R^3$

2) $T(x,y,z)=(x-4y-z,x+y,y-z,x+4z)$, $T:R^3\to R^4$

3) $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\2&6&10&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$, $T:R^4\to R^3$

4) $T(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot A$, $T:M_2[R]\to M_2[R]$

5) $T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)$, $T:P_2[R]\to P_2[R]$

6) $D\left(p(x)\right)=p'(x)$, $D:P_3[R]\to P_3[R]$

7) מצאו העתקה לינארית $T:R^3\to R^3$,
אשר תמונתה נפרשת על ידי: $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

8) מצאו העתקה לינארית $T:R^4\to R^3$,
אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

נתונה העתקה לינארית $T:V\to U$.

9) הוכיחו כי אם $\dim\operatorname{Im}(T)=\dim\operatorname{Ker}(T)$ אז הממד של V זוגי.

10) הוכיחו או הפריכו:

א. קיימת העתקה לינארית $T:R^5\to R^5$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.

ב. קיימת העתקה לינארית $T:R^4\to R^4$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ידוע שהעתקה לינארית $T:V\to W$,
מקיימת: $\dim W=4$, $\dim \operatorname{Im}(T)=\dim \operatorname{Ker}(T)$.
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של V?

א. 10
ב. 9
ג. 7
ד. 6
ה. כל התשובות לא נכונות.

12) הוכיחו או הפריכו:

א. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ מתקיים $\operatorname{Im}(T^2)\subseteq \operatorname{Im}(T)$.

ב. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ שמקיימת:
$\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Ker}(T^2)$, $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Im}(T^2)$, מתקיים $T=T^2$.

ג. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$, המקיימת $\operatorname{Im}(T)\subseteq \operatorname{Ker}(T)$,
אז בהכרח $T\neq 0$.

13) מטריצה $A_{m\times n}$ מגדירה העתקה $T:R^n\to R^m$; $T(x)=Ax$,
ואילו $A^T_{n\times m}$ מגדירה העתקה $S:R^m\to R^n$; $S(y)=A^Ty$.
הראו כי $\operatorname{Im}(T)=\left(\operatorname{Ker}(S)\right)^{\perp}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) גרעין – בסיס: $\{(0,0,1,4)\}$, מימד: 1. תמונה – כל בסיס של $\mathbb{R}^3$, מימד: 3.

2) גרעין – בסיס: $\{(0,0,0)\}$, מימד: 0.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,0,1),(0,5,1,4),(0,0,-6,21)\}$, מימד: 3.

3) גרעין – בסיס: $\{(-7,3,0,1),(1,-2,1,0)\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,2),(0,1,2)\}$, מימד: 2.

4) גרעין – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

5) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=1 \quad , \quad p(x)=2x+5\}$, מימד: 2.

6) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=1, \quad p(x)=x, \quad p(x)=x^2\}$, מימד: 3.

7) $T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

8) $T(x,y,z,t)=(-x-y+z,-2x-y+t,0)$

9) שאלת הוכחה.

10) לא.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

העתקות לינאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-4**, קבעו האם היא חח"ע,[1] האם היא על,
האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.
כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצאו אותה.

1) $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

2) $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

3) $T:P_2[R]\to R^3$, $T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

4) $T:M_2[R]\to P_3[R]$, $T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

5) האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4\to R^3$?

6) נתונה העתקה לינארית $T:U\to V$.
הוכיחו:

א. אם $\dim(U)<\dim(V)$, אז T לא על.

ב. אם $\dim(U)>\dim(V)$, אז T לא חח"ע.

ג. אם $\dim(U)=\dim(V)$, אז T חח"ע $\Leftrightarrow$ T על.

7) נתונה העתקה לינארית $T:V\to W$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)\neq 0$, אז ההעתקה T אינה על.

ב. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V)\le\dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.

ג. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V)\ge\dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.

ד. אם $\dim(V)<\dim(W)$, אז ההעתקה T חח"ע.

[1] הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונה העתקה לינארית $T:V\to W$; $\{v_1,...,v_n\}$ בסיס של V.
הוכח או הפרך:

א. אם $\dim(V)>\dim(W)$ ואם $T(v_1)=0$, אז ייתכן מקרה שבו T חח"ע.

ב. אם $\dim(V)>\dim(W)$, הקבוצה $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בת"ל.

9) נתונה העתקה לינארית $T:V\to W$.
$\{v_1,v_2...,v_n\}$ קבוצה בת"ל ב- V.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם T חח"ע, אז הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת"ל ב- W.

ב. אם הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת"ל ב- W, אז T חח"ע.

10) נתונה העתקה לינארית $T:R^n\to R^m$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם T היא איזומורפיזם אז $m=n$.

ב. אם $m>n$, אז T חח"ע.

ג. אם $T(v)=Av$ לכל v, אז למטריצה A יש n שורות ו- m עמודות.

11) נתונה העתקה לינארית $T:V\to V$, המקיימת $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Ker}(T)$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם T על, אז בהכרח $V=\{0\}$.

ב. אם T חח"ע, אז בהכרח $V=\{0\}$.

ג. T היא איזומורפיזם.

ד. T היא העתקת האפס.

12) נתונה העתקה לינארית $T:R^n\to R^m$, ונתונה מטריצה $A_{m\times n}$,
כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $v\in\mathrm{Ker}(T)$, אז $v\in\mathrm{rowsp}(A)$.

ב. אם $v\in\mathrm{rowsp}(A)$, אז $v\in\mathrm{Ker}(T)$.

ג. אם $v\in\mathrm{colsp}(A)$, אז $v\in\mathrm{Im}(T)$.

ד. אם $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$, אז $n<m$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) נתונה העתקה לינארית $T:R^n\to R^n$, ונתונה מטריצה A, כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.
הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $\text{rank}(A)=n$, אז T חח"ע.

ב. אם $\text{rank}(A)=n$, אז T על.

ג. אם $T^2(v)=0$, אז $\text{Im}(T)\subseteq\text{Ker}(T)$.

ד. אם $T^2(v)=0$, אז $\text{rank}(A)\le\frac{n}{2}$.

14) נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R]\to R$, המוגדרת על ידי $T(p(x))=p(1)$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. ענו על הסעיפים הקודמים עבור $T:P_n[R]\to R$.

15) נתונה העתקה לינארית $T:M_n[R]\to M_n[R]$, המוגדרת על ידי $T(A)=A^T$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. מצאו את ההעתקה ההפוכה של T.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}(x+y-2z),\frac{1}{3}(2y-z-x),\frac{1}{3}(z+x+y)\right)$$

2) לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

3) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a,b,c)=0.4a+0.6b+0.2c+(-0.4a+0.4b+0.2c)x+(-0.4c-0.2b+0.2a)x^2$$

4) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix}b+c-d & -a+b+c-d\\ b-d & d\end{pmatrix}$$

5) לא.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) א. $\operatorname{Ker}(T)=span\left\{-1+x,-1+x^2,-1+x^3\right\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=3$

$$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$$

ב. לא חח"ע, כן על.

ג. $\operatorname{Ker}(T)=span\left\{-1+x,-1+x^2,...,-1+x^n\right\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=n$

$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$

לא חח"ע, כן על.

15) א. $\operatorname{Ker}(T)=\left\{\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}\right\},\ \operatorname{Im}(T)=M_n[R]$

ב. חח"ע ועל. ג. $T^{-1}(A)=A^T$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פעולות עם העתקות לינאריות

שאלות

בשאלות **1-9**, תהיינה $S:R^3\to R^2$ ו- $T:R^3\to R^3$ העתקות לינאריות המוגדרות על ידי: $S(x,y,z)=(x-z,y)$, $T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$.

מצאו נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

1) $S+T$ **2)** $4S$ **3)** $4S-10T$ **4)** TS **5)** ST

6) T^2 **7)** T^{-1} **8)** T^{-2} **9)** S^2

תשובות סופיות

1) לא ניתן להגדיר.

2) $4S=4(x-z,y)$

3) לא ניתן להגדיר.

4) לא ניתן להגדיר.

5) $ST:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$; $St(x,y,z)=(z-4y,4x-y)$

6) $T^2(x,y,z)=(x,y,16x-8y+z)$

7) $T^{-1}(x,y,z)=(x,4x,-y,17x-4y-z)$

8) $T^{-2}(x,y,z)=(x,y,-16x+8y+z)$

9) לא ניתן להגדיר.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה למדעי הנתונים

פרק 3 - מטריצות והעתקות לינאריות

תוכן העניינים

1. מטריצה שמייצגת העתקה 36
2. מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס 42
3. ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה 45

מטריצה שמייצגת העתקה

הערה:
כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס
ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס (סוף הפרק מרחבים וקטורים).
לפיכך, השאלה הראשונה עוסקת בכך.

שאלות

1) נתונים שני בסיסים של R^3:

$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}$, $B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2.
סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1.
סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_2}^{B_1}$.

ה. אשרו את הטענות הבאות:

1. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$
2. $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$
3. $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

2) נתונה העתקה לינארית: $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$.

נתונים שני בסיסים של R^3:

$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}$, $B_2=\{(1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\}$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_1.

סמנו מטריצה זו ב- $[T]_{B_1}$.

ב. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_2.

סמנו מטריצה זו ב- $[T]_{B_2}$.

ג. אשרו את הטענות הבאות:

1. $[T]_{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[T(v)]_{B_1}$

2. $[T]_{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[T(v)]_{B_2}$

3. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[T]_{B_1}\cdot[M]_{B_1}^{B_2}=[T]_{B_2}$

ד. האם ההעתקה הפיכה?

ה. חשבו את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

ו. מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

ז. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

3) נתונה העתקה ליניארית $T:R^3\to R^3$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס $B=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$,

היא $[T]_B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\-2&-2&0\end{pmatrix}$.

מהי נוסחת ההעתקה? פתרו בשתי דרכים שונות.

4) יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של המרחב R^3, ויהי T אופרטור לינארי על R^3.

נתון כי: $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}-1&-9&6\\1&6&-4\\1&5&-2\end{pmatrix}$ ו- $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}-29&-45&6\\20&31&-4\\13&19&-1\end{pmatrix}$.

חשבו את $[M]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה:

$$T:M_2[R]\to M_2[R] \quad , \quad T(A)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}A,$$

לפי הבסיס: $B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

6) מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D:P_4[R]\to P_3[R],\ D\left(p(x)\right)=p'(x)$,
לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

7) נתונה העתקה לינארית $T:M_2[R]\to M_2[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי
היא: $[T]_E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
מצאו את נוסחת ההעתקה.

8) נתונה העתקה לינארית $T:P_2[R]\to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס הסטנדרטי,
היא: $[T]_E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
מצאו את נוסחת ההעתקה.

9) נתונה העתקה לינארית $T:P_2[R]\to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס $B=\left\{1,1-x,x+x^2\right\}$,
היא: $[T]_B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

א. מצאו את נוסחת ההעתקה. כלומר, מצאו את $T\left(p(x)\right)$.
* פתרו בשתי דרכים שונות.
ב. מצאו את $T^2\left(p(x)\right)$.

10) תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה לינארית, ותהי A מטריצה ממשית,
כך שמתקיים $T\left(v\right)=Av$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$.
נתון כי B בסיס ל-$\mathbb{R}^n$ ו-$\operatorname{rank}\left(A\right)=n$.
הוכיחו כי $[T]_B$ הפיכה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R]\to P_3[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי
היא $[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. מצאו את נוסחת ההעתקה.

12) נתונה העתקה לינארית $T:M_2[R]\to M_2[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה, בבסיס הסטנדרטי,
היא $[T]_E=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\4&5&6&0\\7&8&9&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. חשבו את העקבה, הדטרמיננטה והדרגה של ההעתקה.

ג. מצאו את נוסחת ההעתקה.

13) נתונה העתקה לינארית: $T:P_2[R]\to P_2[R]$; $T(a+bx+cx^2)=b+cx$.
הוכיחו ש- T העתקה נילפוטנטית.

14) יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה מעל $\mathbb{R}$.
נתון הבסיס $B=\{1,x,x^2\}$, ונתונה ההעתקה הלינארית
$T:V\to V$; $T\left(p(x)\right)=xp''(x)-p'(x)$.

א. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B$.

ב. מצאו בסיס וממד עבור $\mathrm{Im}(T),\mathrm{Ker}(T)$.

הערה: בפתרון סעיף זה לא נשתמש במטריצה המייצגת למציאת הגרעין והתמונה, היות ונוסחת ההעתקה כבר נתונה בתרגיל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) נתונות שתי העתקות לינאריות $S,T:V\to V$.

יהי $B=\{u,v,w\}$ בסיס ל- V.

נתון כי: $\begin{cases}T(u)=u-v\\T(v)=v-w\\T(w)=w-u\end{cases}$, $\begin{cases}S(u)=u+v\\S(v)=v+w\\S(w)=w+u\end{cases}$.

א. הוכיחו כי: $\mathrm{Ker}(S)=\{0\}$, $\mathrm{Ker}(T)\neq\{0\}$.

ב. עבור כל אחת מההעתקות קבע האם היא חח"ע ו/או על.

ג. קבעו האם $\{T(u),T(v),T(w)\}$ פורשת את V.

ד. קבעו האם $\{S(u),S(v),S(w)\}$ פורשת את V.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $(x, y-x-z, z)$ ב. $(x, y, z-x-y)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ד. $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$ ה. שאלת הוכחה.

2) א. $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ ב. $[T]_{B_2}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\-2&-2&0\end{pmatrix}$ ג. הוכחה.

ד. לא. ה. הדטרמיננטה: 0, העקבה: 3.

ו. 0 ע"ע יחיד; הו"ע שלו: $(1,-1,1)$. ז. לא.

3) $T(x, y, z)=(x+y, y+z, z-x)$

4) $[T]_{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0.5&-0.5&1\\-0.75&2.75&0.5\end{pmatrix}$, $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}2&3&0\\-0.5&-1&0.5\\-0.25&-1&0.75\end{pmatrix}$

5) $[T]_B=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&-1&0&2\\3&5&4&-2\\0&-2&0&6\end{pmatrix}$

6) $[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

7) $T\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$

8) $T:P_2[R]\to P_2[R]$; $T(p(x))=p(x+1)$

9) א. $T(a+bx+cx^2)=(a+2b-2c)+(2a+4c)x+(2a+b+2c)x^2$

ב. $T^2(a+bx+cx^2)=(a+2c)1+(10a+8b+4c)x+(8a+6b+4c)x^2$

10) שאלת הוכחה.

11) א. $\mathrm{Ker}(T)=sp\{-x+x^3,-1+x^2\}$, $\mathrm{Im}(T)=sp\{1+x^2,x+x^3\}$

ב. $T(a+bx+cx^2+dx^3)=(b+d)(1)+(a+c)x+(b+d)x^2+(a+c)x^3$

12) א. $\mathrm{Ker}(T)=sp\left\{\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{Im}(T)=sp\left\{\begin{pmatrix}1&4\\7&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\mathrm{tr}(T)=15$, $\det(T)=0$, $\mathrm{rank}(T)=2$

13) שאלת הוכחה.

14) א. $[T]_B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ב. $B_{\mathrm{Im}(T)}=\{1\}$, $\dim(\mathrm{Im}(T))=1$

$B_{\mathrm{Ker}(T)}=\{1,x^2\}$, $\dim(\mathrm{Ker}(T))=2$

15) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס

שאלות

1) מצאו את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הלינאריות הבאות, ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של R^n :

א. $T:R^2\to R^3$, $T(x,y)=(x+y,y,-x)$

ב. $T:R^4\to R^2$, $T(x,y,z,t)=(4x-y-z+t,x+y+4z+t)$

2) נתונה העתקה לינארית $T:R^4\to R^2$; $T(x,y,z,t)=(x+y,z+t)$
מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מהבסיס הסטנדרטי של R^4 לבסיס הסטנדרטי של R^2 .

3) תהי $T:R^3\to R^2$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי :
$T(x,y,z)=(4x+y-z,x-y+z)$
חשבו את המטריצה המייצגת את ההעתקה T מהבסיס $B_1=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ של R^3 , לבסיס $B_2=\{(1,4),(1,5)\}$ של R^2 .
כלומר, את $[T]_{B_1}^{B_2}$.

4) עבור העתקה לינארית $T:R^3\to R^2$ מתקיים : $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$,
כאשר : $B_2=\{(1,0),\ (0,1)\}$, $B_1=\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$
מצאו את נוסחת ההעתקה.

5) עבור העתקה לינארית $T:R^3\to R^2$ מתקיים : $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$
כאשר $B_2=\{(1,1),\ (1,2)\}$, $B_1=\{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (0,0,1)\}$.
מצאו את נוסחת ההעתקה.

6) נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R]\to P_2[R]$.
המטריצה שמייצגת את ההעתקה T , מהבסיס הסטנדרטי של $P_3[R]$ לבסיס הסטנדרטי של $P_2[R]$, נתונה על ידי : $[T]=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\0&0&2&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.
מצאו את נוסחת ההעתקה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה העתקה לינארית $T:P_2[R]\to R^3$, אשר המטריצה המייצגת אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

מצאו את נוסחת ההעתקה.

8) נתונה העתקה לינארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, שהמטריצה המייצגת אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

מצאו את נוסחת ההעתקה.

9) תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, כך ש- $\dim(V)=n$, ויהיו B_1,B_2 בסיסים סדורים של V. הוכיחו או הפריכו:

א. $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$

ב. אם T העתקת זהות, אז בהכרח $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$.

ג. אם T העתקת זהות, אז בהכרח $[T]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_1}^{B_2}=I_n$.

10) נתונה העתקה לינארית $T:P_2[R]\to R^3$ המוגדרת על ידי:

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=(a+b,b+c,c)$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס סטנדרטים.

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את $T^{-1}(a,b,c)$.

ג. חשבו את $T^4\left(a+bx+cx^2\right)$.

11) נתונה העתקה לינארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, המוגדרת על ידי:

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a-b)+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס סטנדרטים.

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את $T^{-1}\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)$.

12) חשבו את ST ואת TS, עבור ההעתקות:

$$S:R^2\to R^3 \quad ; \quad S(x,y)=(x-y,x+y,y)$$
$$T:P_2[R]\to R^2 \quad ; \quad T(a+bx+cx^2)=(a+b,b-c)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $[T]=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ ב. $[T]=\begin{pmatrix}4&-1&-1&1\\1&1&4&1\end{pmatrix}$

2) $[T]=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

3) $[T]=\begin{pmatrix}25&0&-6\\-20&0&5\end{pmatrix}$

4) $T(x,y,z)=(x+2y+3z,4x+5y+6z)$

5) $T(x,y,z)=(x+y,y+z)$

6) $T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=(b+2c)1+(2c+6d)x+(3d)x^2$

7) $T\left(a+bx+cx^2\right)=(a+b,b+c,c)$

8) $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a-b)+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

9) שאלת הוכחה.

10) א. $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ ב. $T^{-1}(a,b,c)=(a-b+c)1+(b-c)x+cx^2$

ג. לא ניתן.

11) א. $\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

ב. $T^{-1}(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix}b+c-d&-a+b+c-d\\b-d&d\end{pmatrix}$

12) $ST\left(a+bx+cx^2\right)=(a+c,a+2b-c,b-c)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה

שאלות

1) נתונה העתקה לינארית, $T:M_2[R]\to M_2[R]$; $T(X)=PX$,
כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 2.
נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות P, שעבורן המטריצה $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
היא וקטור עצמי של ההעתקה.
א. מצאו את W.
ב. הוכיחו כי W היא תת-מרחב של $M_2[R]$, ומצאו לה בסיס.

2) נתונה העתקה לינארית, $T:M_{10}[R]\to M_{10}[R]$; $T(X)=PX$,
כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 10.
ידוע כי A היא מטריצה הפיכה, שמהווה וקטור עצמי של ההעתקה – המתאים לערך העצמי 4.
חשבו את $|P|$.

3) מצאו העתקה לינארית T, שעבורה המטריצה $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$,
היא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 4.

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נתונה העתקה לינארית $T(x,y,z)=(4x-y-z,x+2y-z,x-y+2z)$
מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ב. נתונה העתקה לינארית: $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$.
מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

5) נתונה העתקה לינארית $T(x,y,z)=(x+z,y,x+z)$.
א. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
ב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ג. במידה וכן, חשבו $T^{2009}(x,y,z)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתונה העתקה לינארית:

$$T:M_2[R]\to M_2[R] \quad ; \quad T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.

ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

ד. במידה והתשובה לסעיף ג' חיובית, חשבו את $T^{10}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

7) נתונה העתקה לינארית: $T:P_2[R]\to P_2[R] \quad ; \quad T\big(p(x)\big)=p(x+1)$

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.

ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

8) יהי V מרחב וקטורי מממד n.
תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית.

א. הוכיחו ש-T הפיכה אמ"ם כל הערכים העצמיים של T שונים מאפס.

ב. הוכיחו כי אם T הפיכה, אז ל-T ול-T^{-1} יש את אותם וקטורים עצמיים.
מה ניתן לומר על הקשר בין הערכים העצמיים של T ושל T^{-1}?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $W=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\;\middle|\;\lambda\in R\right\}$ ב. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

2) $4^{10}=|P|$

3) $T:M_{2x3}(R)\to M_{2x3}(R)\quad T(X)=4X$

4) א. $v^{(1)}_{\lambda=3}=(1,1,0)$, $v^{(2)}_{\lambda=3}=(1,0,1)$, $v_{\lambda=2}=(1,1,1)$, ניתנת ללכסון.

ב. ערך עצמי: $x=0$, וקטור עצמי: $v_{x=0}=(1,-1,1)$, לא.

5) $v_{\lambda=0}=(-1,0,1)$, $v_{\lambda=1}=(0,1,0)$, $v_{\lambda=2}=(1,0,1)$ ב. ניתנת ללכסון.

ג. $T^{2009}(x,y,z)=\left(2^{2008}x+2^{2008}z,y,2^{2008}x+2^{2008}z\right)$

6) א. $[T]_E=A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

ב. $v^{(1)}_{x=2}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $v^{(2)}_{x=2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $v^{(1)}_{x=0}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $v^{(2)}_{x=0}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

ג. כן. ד. $T^{10}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^9x+2^9z & 2^9y+2^9t\\ 2^9x+2^9z & 2^9y+2^9t\end{pmatrix}$

7) א. $[T]_E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ב. $v_{\lambda=1}=1$ ג. לא ניתנת ללכסון.

8) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה למדעי הנתונים

פרק 4 - מרחבי מכפלה פנימית

תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית 48
2. הנורמה והמרחק 50
3. אי שוויון קושי-שוורץ, זווית בין וקטורים 52
4. אורתוגונליות 55
5. משלים אורתוגונלי 58

מרחבי מכפלה פנימית

שאלות

1) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+4x_2y_2 .$$

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

2) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+kx_2y_2 .$$

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

3) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2,x_3)$, $v=(y_1,y_2,y_3)$ ב- $\mathbb{R}^3$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1+kx_1y_3+x_2y_2+kx_3y_1+x_3y_3 .$$

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$?

4) לכל שני וקטורים $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$ ב- $\mathbb{R}^n$,

נגדיר: $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_iu_iv_i$, כאשר $k_1,\ldots,k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.

הראו כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$.

מהי המכפלה המתקבלת אם $k_i=1$, לכל $1\le i\le n$?

5) לכל שתי מטריצות A,B ב- $M_{mxn}[R]$, נגדיר: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.

tr מייצג את המילה trace (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

6) לכל שתי פונקציות f, g ב- $C[a,b]$, נגדיר: $\langle f,g\rangle=\int_a^b f\cdot g\,dx$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה מכפלה פנימית על R^3, שעבורה הקבוצה $B=\{(1,1,0),(1,1,0),(1,0,0)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי.
חשבו את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle$.

תשובות סופיות

1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.

2) $k>9$

3) $-1<k<1$

4) עבור $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$, נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב-$M_{mxn}[R]$.

6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב-$C[a,b]$.

7) $$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הנורמה והמרחק

שאלות

1) נתונים שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$: $u=(1,-2,2),\ v=(3,-2,6),\ w=(5,3,-2)$.

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- $\mathbb{R}^3$, חשבו:

א. $\langle u,v\rangle$ ב. $\langle u,w\rangle$ ג. $\langle v,w\rangle$ ד. $\langle u+v,w\rangle$

ה. $\|u\|$ ו. $\|v\|$ ז. $\|u+v\|$ ח. $d(u,v)$

ט. $\hat{u}$ י. $\hat{v}$

2) נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2\times3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10&9&8\\7&6&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}.$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$ ב- $M_{2\times3}[R]$,

חשבו:

א. $\langle A,B\rangle$ ב. $\langle A,C\rangle$ ג. $\langle A,B+C\rangle$

ד. $\langle B,C\rangle$ ה. $\langle 4A+10B,11C\rangle$ ו. $\|A\|$

ז. $\|B\|$ ח. $d(A,B)$ ט. $\hat{A}$

3) נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3,\ q(x)=3x+1,\ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)\,dx$:

חשבו:

א. $\langle p,q\rangle$ ב. $\langle p,r\rangle$ ג. $\langle p,q+r\rangle$

ד. $\|p\|$ ה. $d(p,q)$ ו. $\hat{r}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) הוכיחו: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

5) הוכיחו: $\|u-v\|^2=\|u\|^2-2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

6) הוכיחו: $\langle u-v,u+v\rangle=\|u\|^2-\|v\|^2$.

7) הוכיחו: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=+2\|u\|^2+2\|v\|^2$.

8) הוכיחו: $\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\langle u,v\rangle$.

9) יהי V ממ"פ ויהיו $u,v\in V$ וקטורים המקיימים: $\|u\|=a,\ \|u+v\|=b,\ \|u-v\|=c$.
מצאו את $\|v\|$ ואת $\langle u,v\rangle$.

תשובות סופיות

1) א. 19 ב. -5 ג. -3 ד. -8
ה. 3 ו. 7 ז. $\sqrt{96}$ ח. $\sqrt{20}$
ט. $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ י. $\left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$

2) א. 185 ב. -12 ג. 173 ד. -24 ה. -3168
ו. $\sqrt{355}$ ז. $\sqrt{139}$ ח. $\sqrt{124}$ ט. $\frac{1}{\sqrt{355}}\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}$

3) א. 9 ב. -9.5833 ג. -0.5833 ד. $\sqrt{\frac{37}{3}}$
ה. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ו. $\frac{x^2-4x-1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) $\langle u,v\rangle=\frac{b^2-c^2}{4}$, $\|v\|=\sqrt{\frac{b^2+c^2-2a^2}{2}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

שאלות

1) הוכיחו כי אם u,v תלויים לינארית, אז $\left|\langle u,v\rangle\right|=\|u\|\cdot\|v\|$.

2) יהיו $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ו- $y_1,y_2,\ldots,y_n$ מספרים ממשיים.
הוכיחו כי $\left(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\right)^2\le\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right)$.

3) יהיו f,g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.
הוכיחו כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\right)\left(\int_a^b g^2(x)\right)$.

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נניח כי $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$ שני וקטורי יחידה ב- R^n.
הוכיחו כי $\left|u_1v_1+\ldots+u_nv_n\right|\le 1$.
ב. נניח ש- $u=(u_1,\ldots,u_n)\in R^n$.
הוכיחו כי $\left(u_1+\ldots+u_n\right)^n\le n\left(u_1^2+\ldots+u_n^2\right)$.

5) נניח ש- $a_1,a_2,\ldots,a_n$ מספרים חיוביים כך ש- $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$.
הוכיחו כי $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}\le\sqrt{n}$.

6) הוכיחו את אי השוויון $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\le\sqrt{\frac{n^2+n}{2}}$.

7) נתון כי $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$.
הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\ge\frac{1}{2}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

ב. נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$.

9) נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i - b_i)^2}{a_i + b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)}$.

ב. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}$.

11) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u = (1,2,2),\ v = (-2,1,2)$,
ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$.

12) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u = (3,4),\ v = (1,2)$,
ביחס למכפלה הפנימית $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2) \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$ ב- $\mathbb{R}^2$.

13) מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $p(x) = 2x - 1$ ו- $q(x) = x^2$,
בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle p,q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x)\,dx$ שב- $C[0,1]$.

14) מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,
בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B \rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2\times 2}[R]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) $\theta=63.61°$
12) $\theta=9.44°$
13) $\cos\theta=0.173°$
14) $\cos\theta=0.00036°$
15) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אורתוגונליות

שאלות

1) הוכיחו כי הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(4,7,-6)$ אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצאו את ערכו של הקבוע k, עבורו הווקטורים $u=(1,k,3),\ \ v=(4,7,-6)$ יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

3) מצאו וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(2,5,7)$ ב- $\mathbb{R}^3$.

4) הוכיחו כי הפולינומים $p(x)=2x-1,\ \ q(x)=6x^2-6x+1$
אורתוגונליים בקטע $[0,1]$ (ביחס למכפלה הפנימית $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$).

5) במרחב $P_n[R]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $n\geq$ מעל $\mathbb{R}$), נגדיר מכפלה פנימית:

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{k=0}^{n}p(k)q(k)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+\ldots+p(n)q(n).$$

הראו כי הפולינומים:

$$p(x)=x(x-2)(x-4)(x-6),\ \ q(x)=x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[R]$, עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.

6) נתונות שתי מטריצות: $B=\begin{pmatrix}4&-1\\2&3\end{pmatrix},\ \ A=\begin{pmatrix}k&1\\3&-1\end{pmatrix}$.

בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$ ב- $M_{2\times2}[R]$,
מצאו את הערך של הקבוע k, עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

7) הוכיחו כי: $u\perp v\Leftrightarrow\|u+v\|=\|u-v\|$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$?

8) הוכיחו כי: $u\perp v\Leftrightarrow\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) הוכיחו כי : $\|u\|=\|v\| \Leftarrow (u-v)\perp(u+v)$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

10) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו- $(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

11) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם α היא הזווית בין a ל- b, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

12) יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1.
מהו המרחק של v מ- w_1?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) $k=2$

3) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) $k=0.5$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) $v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ or\ v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

11) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

12) $\frac{5}{4}k$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משלים אורתוגונלי

שאלות

1) יהי $W = span\{(1,2,-1,1),(2,5,3,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

2) יהי $w = span\{(1,1,1)\}$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

3) יהי $W = span\{x\} \subseteq P_2[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

4) יהי $W = span\{x, x^2\} \subseteq P_2[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

5) יהי $W = span\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_{2\times 2}[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$
ב- $M_{2\times 2}[R]$.

6) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

7) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A\cdot \underline{x} = 0$.
יהי U מרחב הפתרונות של המערכת.
תנו פירוש אפשרי ל- U בעזרת המושג משלים אורתוגונלי,
והמושג מרחב השורות של המטריצה A.

9) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכיחו כי: $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

11) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכיחו כי: $W = W^{\perp\perp}$ (אם V מממד סופי).

12) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

13) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

תשובות סופיות

1) $W^{\perp} = span\{(-3,1,0,1),(11,-5,1,0)\}$

2) $W^{\perp} = span\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$

3) $W^{\perp} = span\left\{\left(-\frac{2}{3}+x\right),\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)\right\}$

4) $W^{\perp} = span\{(1.5x^2-6x+5)\}$

5) $W^{\perp} = span\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

6) $$B_W = \left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}$$

7) $B_{W^{\perp}} = \left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$

8) הסבר בווידאו.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה למדעי הנתונים

פרק 5 - קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט

תוכן העניינים

1. בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל 60
2. ההיטל של וקטור 64
3. תהליך גרם-שמידט 67

בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל

שאלות

1) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

א. הראו שהקבוצה S אורתוגונלית.

ב. נרמלו את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.

ג. ללא חישוב, הוכיחו שהקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

2) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשמו את הווקטור $(13,-1,7)$, כצירוף לינארי של איברי S.

3) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

רשמו את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו $v=(a,b,c)$ ב- $\mathbb{R}^3$, ביחס לבסיס S.

4) נניח ש- $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- V.

הוכיחו שלכל $v\in V$, אז $v=\frac{\langle v,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1+\frac{\langle v,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2+\ldots+\frac{\langle v,u_n\rangle}{\langle u_n,u_n\rangle}u_n$.

הערה: הקבוע $a_i=\frac{\langle v,u_i\rangle}{\langle u_i,u_i\rangle}$ נקרא מקדם פורייה של v ביחס ל- u_i, או הרכיב של v ביחס ל- u_i.

5) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\ldots\}$ ב- $V=C[0,\pi]$.

האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית,
נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

6) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots\}$ ב- $V=C[0,2\pi]$.

האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.
האם הקבוצה מהווה בסיס?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה קבוצה $S=\{(2,4,4),(4,-1,-1),(0,2,-2)\}$ ב-$\mathbb{R}^3$.

בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.

8) נתונה קבוצה $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ ב-$P_3[R]$.

בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב-$[0,1]$)

9) נתונה קבוצה $S=\{1,2x-1,6x^2-6x+1\}$ ב-$P_2[R]$.

בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב-$[0,1]$)

10) נתונה הקבוצה $S=\left\{\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}\subseteq M_3[R]$.

בדקו: האם הקבוצה S אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי?
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
ענו ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות.

11) נסחו והוכיחו את שוויון פרסבל.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של R^2.

אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^2$.

ב. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),(0,0,1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של R^3.

אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^3$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) יהי $D=\left\{A_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},A_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},A_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$.

א. הוכיחו ש- D מהווה בסיס אורתונורמלי של $M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=tr\left(B^TA\right)$.

ב. כתבו את שוויון פרסבל עבור מטריצה כללית $A\in M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית לעיל.

14) במרחב $C([-\pi,\pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1(x)=\cos x,\ f_2(x)=\sin x\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

אמתו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x & x\geq 0\\0 & x<0\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.

15) במרחב $C([-\pi,\pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1=\sin x,f_2=\sin(2x),...,f_{60}=\sin(60x)\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

כתבו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\0 & x=0\\1 & 0<x<\pi\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. $S\left\{\frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}},\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}},\frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}}\right\}$

ג. שאלת הוכחה.

2) $(13,-1,7)=\frac{-1}{7}(2,1,4)+3(1,2,1)+\frac{24}{7}(3,-2,1)$

3) $\frac{2a+b-4c}{21}(2,1,4)+\frac{a+2b+c}{6}(1,2,1)+\frac{3a-2b+c}{14}(3,-2,1)$

4) שאלת הוכחה.

5) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}},\ldots\right\}$$

6) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ldots\right\}$$

7) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{36}}(2,4,4),\frac{1}{\sqrt{8}}(4,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{18}}(0,2,-2)\right\}$

8) הקבוצה לא אורתוגונלית.

9) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,

$$S=\left\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\right\}$$

10) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{80}}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) $2\geq\frac{16}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{59^2}\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

ההיטל של וקטור

שאלות

1) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,2,2)$ לאורך $w=(0,1,-1)$, ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,-2,2,0)$ לאורך $w=(0,2,-1,2)$, ב- $\mathbb{R}^4$.
מקובל לסמן גם $\text{proj}(v,w)$.

3) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $p(x)=2x-1$ לאורך $q(x)=x^2$,
במרחב הפולינומים עם המכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$.

4) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ לאורך $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,
במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

5) יהי $V=R^3$ ויהי $W=span\{w_1=(1,2,1),w_2=(1,-11)\}$ תת מרחב של V.
מצאו את ההיטל של הווקטור $v=(-2,2,2)$ על תת המרחב W לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $V=R^3$.
בנוסף, רשמו את v כסכום $v=v_{\parallel}+v_{\perp}$, כאשר $v_{\parallel}\in W,\ v_{\perp}\in W^{\perp}$.

6) יהי $V=R^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
ויהי $W=span\{w_1=(1,1,0,-1),w_2=(1,0,11),w_3=(0,-1,1,-1)\}$ תת מרחב של V.
מצאו את הווקטור הקרוב ביותר לווקטור $v=(3,4,5,6)$ בתת המרחב W.
בנוסף, כתבו את v כסכום של וקטור מ- W ווקטור מ- $W^{\perp}$.

7) יהי $V=C([0,1])$ מרחב הפונקציות הרציפות על הקטע $[0,1]$.
ויהי $W=span\left\{w_1=1,w_2=x-\frac{1}{2}\right\}$ תת מרחב של V.
מצאו את ההיטל של $v=4x^2-4$ על W עם המכפלה הפנימית האינטגרלית הסטנדרטית. בנוסף, כתבו את v כסכום של וקטור מ- W ווקטור מ- $W^{\perp}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון המרחב $C([-1,1])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-1,1])$: $W=sp\{f_1=|x|+x, f_2=|x|-x\}$.

מצאו את ההיטל של $f(x)=x^2$ על W.

9) נתון המרחב $C([-\pi,\pi])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-\pi,\pi])$:

$W=sp\{f_1=\sin x, f_2=\sin(2x),...,f_{60}=\sin(60x)\}$.

ידוע שהקבוצה $\{f_i\}_{i=1}^{60}$ היא קבוצה אורתונורמלית.

מצאו את ההיטל של $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$ על W.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $\text{proj}(v,w)=cw=0,\quad c=0$

2 $\text{proj}(v,w)=cw=-\frac{2}{3}(0,2,-1,2),\quad c=\frac{-2}{3}$

3 $\text{proj}(p,q)=c\cdot q(x)=\frac{5}{6}x^2,\quad c=\frac{5}{6}$

4 $\text{proj}(A,B)=cB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad c=\frac{1}{6}$

5 $v=v_{\parallel}+v_{\perp}=(0,2,0)+(-2,0,2)\ ,\pi(v)=(0,2,0)$

6 $(3,4,5,6)=v_{\parallel}+v_{\perp}=(5,2,3,6)+(-2,2,2,0)\ ,\pi(v)=(5,2,3,6)$

7 $v=v_{\parallel}+v_{\perp}=\left(-\frac{14}{3}+4x\right)+\left(4x^2-4x+\frac{2}{3}\right)\ ,\pi(v)=-\frac{14}{3}+4x$

8 $proj_W f=\frac{3}{4}|x|$

9 $proj_W f=\frac{4\sin(x)}{\pi}+\frac{4\sin(3x)}{3\pi}+\frac{4\sin(5x)}{5\pi}+\ldots+\frac{4\sin(59x)}{59\pi}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תהליך גרם-שמידט

שאלות

1) נתון: $U = span\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U.

2) נתון: $U = span\{(2,2,2,2),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U.

3) נתון: $U = span\{4,x,x^2,x^3\} \subseteq P_3[x]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U,
בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[-1,1]$.

4) נתון: $U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U,
בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

תשובות סופיות

1) $$B_{orthonormal} = \left\{\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3),\frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,2)\right\}$$

2) $$B_{orthonormal} = \left\{w_1 = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1,-1,0,2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1,3,-6,2)}{\sqrt{50}}\right\}$$

3) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}}\right\}$$

4) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}}{\sqrt{30}}, \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix}7 & 14\\ -9 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{330}}, \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{33}}\right\}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה למדעי הנתונים

פרק 6 - פירוקים של מטריצה (פירוק LU, פירוק SVD, פירוק QR)

תוכן העניינים

1. פירוק LU 68
2. פירוק SVD 69
3. פירוק QR 73

פירוק LU

שאלות

1) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}$.

2) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}$.

3) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

1)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{U}$$

2)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&-1&1&0\\3&-2&2&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&2&-4\\0&0&0&3\end{pmatrix}}_{U}$$

3)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\\frac{3}{2}&-2&1&0&0\\-3&2&0&1&0\\4&-3&0&0&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\0&-7&5\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{U}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פירוק SVD

שאלות

1) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים השמאליים והימניים של המטריצה.

2) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **הימניים** של המטריצה.

3) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

4) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ \sqrt{2} & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

5) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

6) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

8) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

9) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ \sqrt{2} & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

10) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$.

11) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\sigma_1=5,\ \sigma_2=3\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\ ;\ v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ v_2=\frac{1}{\sqrt{18}}\begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix},\ v_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$

2) $\sigma_1=\sqrt{3},\ \sigma_2=1\ ;\ v_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\ v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ v_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

3) $\sigma_1=\sqrt{3},\ \sigma_2=1\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

4) $\sigma_1=\sqrt{8},\ \sigma_2=\sqrt{2}\ \ ;\ \ u_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\ u_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

5) $\sigma_1=3,\ \sigma_2=2\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{1.25}}\begin{bmatrix}-0.5\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

6) $\sigma_1=2\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$

7)
$$\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

8)
$$\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

9)
$$\begin{bmatrix}0&1&1\\\sqrt{2}&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{8}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{6}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&0&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$ **(10**

$$\begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$ **(11**

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פירוק QR

שאלות

בשאלות **1-4** הפעילו את תהליך גרם-שמידט על הקבוצה הנתונה, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך וסמנו קבוצה זו ב- W.

1) $U=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(0,1,1),\ u_3=(1,0,1)\}$

2) $U=\{u_1=(1,0,1),\ u_2=(2,1,0),\ u_3=(0,1,1)\}$

3) $U=\{u_1=(1,3),\ u_2=(2,4)\}$

4) $U=\{u_1=(2,2,2,2),\ u_2=(1,1,2,4),\ u_3=(1,2,-4,-3)\}$

בשאלות **5-7**:

א. הפעילו את תהליך גרם-שמידט על הקבוצה הנתונה, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך, וסמנו קבוצה זו ב- W.

ב. השלימו את הקבוצה W מסעיף א' לקבוצה אורתונורמלית של 3 וקטורים.

5) $U=\{u_1=(1,1,1),\ u_2=(2,2,2),\ u_3=(2,3,4)\}$

6) $U=\{u_1=(1,2,3),\ u_2=(4,5,6),\ u_3=(7,8,9)\}$

7) $U=\{u_1=(1,1,1),\ u_2=(2,2,2),\ u_3=(3,3,3)\}$

8) א. הפעילו את גרם-שמידט על הקבוצה $U=\{u_1=(2,3),\ u_2=(4,6)\}$, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך, וסמנו קבוצה זו ב- W.

ב. השלימו את הקבוצה W מסעיף א' לקבוצה אורתונורמלית של 2 וקטורים.

9) א. הפעילו את גרם-שמידט על הקבוצה

$U=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(0,1,1),\ u_3=(1,2,1),\ u_4=(1,3,2)\}$, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך, וסמנו קבוצה זו ב- W.

ב. השלימו את הקבוצה W מסעיף א' לקבוצה אורתונורמלית של 2 וקטורים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) הפעילו את תהליך גרם-שמידט על הקבוצה:

$U=\{u_1=(1-i,1+i),\ u_2=(1+2i,1-2i)\}$.

נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך וסמנו קבוצה זו ב-W.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מספרים מרוכבים.

11) א. מצאו פירוק QR למטריצה: $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$.

ב. בעזרת הפירוק מסעיף א' פתרו את המערכת: $\begin{cases}x+2y=3\\y+z=-1\\x+z=-1\end{cases}$.

12) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$.

13) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\2&1&2\\2&2&-4\\2&4&-3\end{bmatrix}$.

14) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}$.

15) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$.

16) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&2&2&0\\1&3&4&0\\0&4&4&1\end{bmatrix}$.

17) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}2&4\\3&6\end{bmatrix}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

19) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1-i & 1+2i\\ 1+i & 1-2i\end{bmatrix}$.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד על מטריצות אוניטריות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\}$

2) $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)\right\}$

3) $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1)\right\}$

4) $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{4}(2,2,2,2)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,0,2),\ \hat{w}_3=\frac{1}{5\sqrt{2}}(1,3,-6,2)\right\}$

5) א. $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,01)\right\}$

ב. $\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}$

6) א. $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3),\hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{21}}(4,1,-2)\right\}$

ב. $\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{21}}(4,1,-2),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}$

7) א. $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$

ב. $\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}$

8) א. $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{13}}(2,3)\right\}$ ב. $\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{13}}(2,3),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{13}}(-3,2)\right\}$

9) א. $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\right\}$

ב. $\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\}$

10) $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{2}(1-i,1+i),\ \frac{1}{2}(1+i,1-i)\right\}$

11) א. $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{\frac{3}{2}}\end{bmatrix}$ ב. $(x,y,z)=(1,1,-2)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{10} & \frac{14}{\sqrt{10}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}}\end{bmatrix} \quad \textbf{(12}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -4\\ 2 & 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{50}}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{50}}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-6}{\sqrt{50}}\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{50}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 4 & -2\\ 0 & \sqrt{6} & \frac{-9}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \quad \textbf{(13}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{14}{\sqrt{14}} & \frac{32}{\sqrt{14}} & \frac{50}{\sqrt{14}}\\ 0 & \frac{9}{\sqrt{21}} & \frac{18}{\sqrt{21}}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \textbf{(14}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{3}} & \frac{9}{\sqrt{3}}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \textbf{(15}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{7\sqrt{2}} & \frac{-8}{7\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\\ 0 & \frac{4}{7\sqrt{2}} & \frac{-22}{7\sqrt{13}} & \frac{-1}{\sqrt{13}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{7\sqrt{2}} & \frac{8}{7\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}}\\ 0 & \frac{8}{7\sqrt{2}} & \frac{5}{7\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{11}{7\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{13}}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \textbf{(16}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}}\\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{13} & 2\sqrt{13}\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad \textbf{(17}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&2&3\\0&1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{3}{\sqrt{2}}&\frac{4}{\sqrt{2}}\\0&\frac{3}{\sqrt{6}}&\frac{3}{\sqrt{6}}&\sqrt{6}\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad \textbf{(18}$$

$$\begin{bmatrix}1-i&1+2i\\1+i&1-2i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\\\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i&\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\end{bmatrix} \quad \textbf{(19}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה למדעי הנתונים

פרק 7 - טורי פורייה

תוכן העניינים

1. הקדמה ..... (ללא ספר)
2. טור פורייה ממשי 79
3. טור פורייה מרוכב 80
4. משפט פרסבל 81
5. רימן לבג 84
6. משפט דיריכלה 85
7. המשכה זוגית ואי זוגית 87
8. גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה 88
9. התכנסות במידה שווה של טורי פורייה 91
10. טור פורייה בקטע כללי 92
11. משפט הקונבולוציה 94
12. גרעין דיריכלה 96
13. גרעין פייר וממוצעי סזארו 98
14. גרעין פוואסון 100
15. תרגילים מסכמים 101

טור פורייה ממשי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\sin(|x|)$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\sum_{n=1}^{20}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

2) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$

3) $\sin(|x|)\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}\cos(2kx)$

4) $f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 2x & 0\le x<\pi\end{cases}$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ \sin(x) & 0\le x<\pi\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$

2) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}-\frac{1}{2\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{in}+\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}e^{inx}$

3) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-3(-1)^n\frac{\pi}{in}\right]e^{inx}$

4) $f(x)\sim-\frac{1}{2}-\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{3}{\pi i(2k-1)}e^{i(2k-1)x}$

5) $f(x)\sim\frac{1}{4i}e^{ix}-\frac{1}{4i}e^{-ix}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}e^{i[2k]x}$

משפט פרסבל:

שאלות:

1) באמצעות טור הפורייה $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$, חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

2) נתון כי טור הפורייה הממשי של $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הינו $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin\left((2k-1)x\right)$. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le\pi\\ x+\pi & -\pi\le x<0\end{cases}$ ו- $g(x)=x$.

מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

4) מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x\le\pi\\ 0 & -\pi<x\le 0\end{cases}$ ובאמצעותו חשבו את הסכום $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

5) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le\pi\\ e^{x^2} & -\pi\le x<0\end{cases}$ ו- $g(x)=\begin{cases}0 & 1<x\le\pi\\ \frac{1}{x^2+1} & 0\le x\le 1\\ 0 & -\pi\le x<0\end{cases}$.

נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- $g\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}g_ne^{inx}$, $f\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_ne^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_n\cdot\overline{g_n}=\frac{1}{8}$.

6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π:

$$f(x)=\sinh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\quad,\quad -\pi\le x<\pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi<x<3\pi$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+n^2\right)^2}$.

7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi,\pi]$ על ידי הנוסחה: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}}e^{inx}$.

חשבו $\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x+\pi)-f(x)\right|^2dx$.

8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $p\neq 0$

כדי להוכיח את הזהות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$.

9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}h^2 & h\le x\le\pi\\ 0 & -\pi\le x\le h\end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$

כאשר $0\neq h\in[-\pi,\pi]$ ובשוויון פרסבל כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos(2n)}{n^2}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{32}$.

ג. הסיקו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi^2}{6}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) $\frac{\pi^2}{4}$

5) הוכחה.

6) א. ראו סרטון. ב. $\sinh(x)\sim-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}\frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi}\sin(nx)$

ג. ≈ 0.769

7) 8π

8) הוכחה.

9) $\frac{\pi^2-4}{4}$

10) א. $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi\left(1-4n^2\right)}e^{inx}$ ב. הוכחה.

ג. ראו סרטון.

רימן לבג:

שאלות:

1) חשבו $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x}\cos\left(\sqrt{|x|}\right)\sin(nx)\,dx$.

2) חשבו $\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2+1}e^{i\cdot n^2 t}\,dt$.

3) הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(n\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{x}\frac{se^{s^2}\,ds}{\sqrt{s^2+2017}}e^{inx}\,dx\right)=0$.

תשובות סופיות:

1) 0
2) 0
3) הוכחה.

משפט דיריכלה:

שאלות:

1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$ לטור פורייה ממשי $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$.

היעזרו בפיתוח זה כדי להוכיח $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$.

רמז: הציבו $x=\frac{\pi}{2}$.

2) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π: $f(x)=\begin{cases}2+\frac{2x}{\pi} & -\pi<x<0\\ 2 & 0<x<\pi\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) במרחב הפונקציות $L^2_{PC}[-\pi,\pi]$ נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$.

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $f(x)$.

ב. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

ד. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\cos(ax)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר a אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

א. $\frac{1}{\sin(\pi a)}=\frac{1}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{\pi a+\pi n}+\frac{1}{\pi a-\pi n}\right]$

ב. $\cot(\pi\alpha)=\frac{1}{\pi\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\alpha+\pi n}+\frac{1}{\pi\alpha-\pi n}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. ראו סרטון.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi n}\sin(nx)$ ג. הוכחה. $f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$

3) א. $x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$ ב. $\frac{\pi^4}{90}$ ג. $\frac{\pi^2}{-12}$ ד. $\frac{\pi^2}{6}$

4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0<x<\pi$

מתקיים $x=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=1$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ והוכיחו כי:

א. לכל $0<x<\pi$ מתקיים $1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}=-\frac{\pi}{4}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$
ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח $f'(x)\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$).

נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ אזי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ מתכנס בהחלט.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x(\pi-x)$ בקטע $[0,\pi]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?
שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$.

ד. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x)=\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ בקטע $[0,\pi]$.

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$. רמז: הציבו $x=0$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x^2}$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

נסמן $f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}\left|c_ne^{inx}\right|$ פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|$ מתכנס?

ב. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|$ מתכנס?

ג. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$ מתכנס?

4) נתבונן בטור הפורייה $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{in(x+i)}$.

כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}$ בקטע $(0,2\pi)$.

ב. נסמן $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ באופן מפורש (ללא טור) בקטע $(0,2\pi)$.

6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi,\pi]$, גזירה ברציפות למקוטעין k פעמים כך שמתקיים $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$ לכל $j=0,1,...k-1$. נסמן $f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}(n^kc_n)=0$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f(x)\in L^2{}_{PC}[-\pi,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$ ו-$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$. הראו כי מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx\le\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx$.

ב. תהי $f(x)\in L^2{}_{PC}[0,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0)=f(\pi)=0$.

הראו כי מתקיים $\int_{0}^{\pi}|f(x)|^2dx\le\int_{0}^{\pi}|f'(x)|^2dx$.

8) נגדיר $f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}e^{in^2x}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

9) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}\sin(n^{2.5}x)$

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

10) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{1.4}}+\frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$.

א. האם f רציפה?

ב. האם f גזירה ברציפות?

11) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^4}$. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

12) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3.1}+i\cdot n^{2.2}}\cdot e^{inx}$. הוכיחו כי f גזירה ברציפות פעמיים.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. $[0,\pi]$ $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin([2k-1]x)$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

ה. $[0,\pi]$ $\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\sim\frac{\pi^3}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi(2k-1)^4}\cos([2k-1]x)$ ו. הוכחה.

3) א. $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\cdot nc_n\right|\le\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2<\infty$ ב. $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|<\infty$

ג. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$

4) ראו סרטון.

5) א. הוכחה. ב. $-\frac{\pi}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+\frac{\pi^2}{6}x$

6) הוכחה.

7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

10) א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{.4}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2.8}}<\infty$ ב. נניח בשלילה כי f גזירה ברציפות.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי הפונקציה $g(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ \pi-x & 0\le x<\pi\end{cases}$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $g(x)$.

ב. עבור $-\pi\le x\le\pi$ נגדיר את הפונקציה $h(x)=a\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\int_{-\pi}^{x}g(t)\,dt$

כאשר $g(x)$ מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של a מתכנס טור פורייה של $h(x)$ במידה שווה ל-$h(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) נגדיר פונקציה $f(x)=|\sin(x)|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב-$f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של f ושל f'.

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחישבתם?

שרטטו את הגרפים של פונקציות אלו בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f' במידה שווה?

תשובות סופיות:

1) א. $g(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(2k\cdot x)$ ב. $a=-\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $f(x)\sim\left(\frac{2}{\pi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{-4}{(2k+1)(2k-1)}\right]\cos(2k\cdot x)$,

$f'(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{8k}{(2k+1)(2k-1)}\right]\sin(2k\cdot x)$ ב. $f'(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$

ג. $f(x)$ פונקציה רציפה, מחזורית-2π, הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של $f'(x)$ יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו: $[\pi n+\delta,\pi(n+1)-\delta]$

לכל $0<\delta<\pi$ ולכל n שלם.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[0,2\pi]$.

2) תהי הפונקציה $f(x)=\min\{1,|x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2,2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0,2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2}$.

4) פתחו את $f(x)=|x|$ לטור פורייה בקטע $[-1,1]$.

5) פתחו את $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ 2-x & 1<x<2\end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0,2]$.

6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x)=f(x+2)$ ובנוסף $-1\le x<1$ $f(x)=2-|x|$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$.

ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1,1]$?

7) מצאו טור קוסינוסים $f(x)=x$ בקטע $[0,3]$.

8) פתחו את $f(x)=\cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0,\pi]$.

תשובות סופיות:

1) $0 \le x \le 2\pi$ $\quad x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx$

2) א. $b_n = 0 \quad , \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & else \end{cases}$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

3) א. $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1|\, 4n^2\pi^2} e^{in\pi x}$ ב. ראו סרטון. ג. $\frac{3-e}{4(e-1)}$

4) $|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\pi [2k-1] x\right)$

5) $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi [2k-1] x}{2}\right)$

6) א. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos\left([2k-1]\pi x\right)$ ב. $\frac{\pi^4}{96}$ ג. $\frac{\pi^2}{8}$

ד. אם f רציפה בקטע $[a,b]$, $f(a) = f(b)$ ו-f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל-f בקטע $[a,b]$.

7) $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3} x\right)$

8) $\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2} \sin\left([2k-1]x\right)$

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות-2π אז $(f*g)_{(x)}$ מחזוריות-2π.

2) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין, מחזוריות-2π ופונקציות זוגיות אז $(f*g)_{(x)}$ זוגית.

3) נתונה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית-2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=\sqrt{2\pi}\cdot\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x)$.

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$.

הערה: $\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

4) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות-2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=x^2$, $g(x)=\cos(x)$.

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

5) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות-2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=x$, $g(x)=\chi_{[0,1]}(x)$.

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) $\pi - x$

4) לכל $-\pi \le x \le \pi$, $(f*g)_{(x)} = -2\cos(x)$

5) $$(f*g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(x^2 - (x-1)^2\right) & -\pi+1 \le x \le \pi \\ \frac{1}{4\pi}\left[x^2 - \left(x+(2\pi-1)\right)^2\right] & -\pi \le x \le -\pi+1 \end{cases}$$

גרעין דיריכלה:

שאלות:

1) נגדיר $D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}$ (גרעין דיריכלה).

א. הוכיחו כי $D_n(x)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$.

ב. הוכיחו כי $D_n(x)=\dfrac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ עבור $x\neq 2\pi m$.

2) חשבו לכל ערך של n שלם את ערכו של הביטוי $I(n)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\dfrac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin(100x)\,dx$.

3) הוכיחו כי $I=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\left[\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\right]}{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}dx=2(n+1)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

4) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$. נסמן $S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}$ טור פורייה חלקי.

הוכיחו כי $(f*D_n)_x=S_n(x)$.

5) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{arctg(x-1)\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{e^{(x-1)^2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}dx$.

6) נגדיר $S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{2001}{2}t}{\sin t}2\cos\frac{t}{2}\cos^{17}\left(e^{\sqrt{|x-t|}}\right)dt$.

יהיו a_n , b_n מקדמי פורייה הממשיים ו- c_n מקדמי פורייה המרוכבים, של הפונקציה $S(x)$.

חשבו את b_{500} , c_{1001}.

רמז: $S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)\,f(x-t)dt$ כאשר $D_N(t)$ גרעין דיריכלה מסדר N ו- S_N טור פורייה החלקי ה- N -י של f.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

2) 0

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) $-\frac{\pi^2}{2e}$

6) $b_{500}=0$, $c_{1001}=0$

גרעין פייר וממוצעי סזארו:

שאלות:

1) נסמן $D_n(x)$ גרעין דיריכלה. נגדיר את גרעין פייר כך: $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)$.

א. הראו כי לכל $x\neq 2\pi m$ $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

ב. הראו כי $K_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikx}$.

2) הוכיחו כי $K_n(x)\geq 0$ לכל x כאשר $K_n(x)$ גרעין פייר.

3) הוכיחו כי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)dx=1$

4) הוכיחו כי לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|x|<\pi}K_n(x)dx=0$.

5) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין, מחזורית-2π וכי $m\leq f(x)\leq M$ לכל x ממשי.
הוכיחו כי $m\leq\sigma_n(x)\leq M$ לכל n טבעי ולכל x ממשי כאשר $\sigma_n(x)$ סדרת ממוצעי סזארו של הפונקציה $f(x)$.

6) תהי $\varphi(x)$ רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ ונניח כי:

i. $\varphi(x)\geq 0$.

ii. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=1$.

iii. קיים $0<\delta_0<\pi$ כך שלכל $|x|>\delta_0$ מתקיים $\varphi(x)=0$.

נגדיר $F_n(x)=n\varphi(nx)$ ונרחיב אותה באופן מחזורי.
הוכיחו כי $F_n(x)$ מהווה גרעין חיובי.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

גרעין פוואסון:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי לכל $0<r<1$ מתקיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{inx}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$.

ב. גרעין פוואסון נתון על ידי $P_r(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π וטור פורייה שלה נתון על ידי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הראו כי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}$.

ג. הוכיחו את התכונות הבאות של גרעין פוואסון:

i. $P_r(x)\geq 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to 1-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$ מתקיים.

ד. תהי $f(x)$ רציפה ומחזורית 2π ועם טור פורייה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}\xrightarrow{r\to 1-}f(x)$ במידה שווה.

הערה: ניתן להיעזר במשפט הבא: אם סדרת פונקציות $P_r(x)$ מקיימת את התכונות הבאות:

i. $P_r(x)\geq 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to 1-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$ מתקיים.

אזי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt\xrightarrow{r\to 1-}f(x)$ במידה שווה.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה $f(t)=e^{i\alpha t}$ בתחום $-\pi \le t \le \pi$ כאשר α הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\alpha}{\left[\alpha^2-n^2\right]}=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}-\frac{1}{\alpha}$.

ג. הראו שמתקיים $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{\left[\alpha-n\right]^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$.

ד. הראו שמתקיים $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left((2n+1)^2-\alpha^2\right)}=\frac{\pi}{4\alpha^2}\left(\frac{1}{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}-1\right)$.

2) נגדיר $f(x)=|x|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב-$f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של f.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום $(-\infty,\infty)$?

$$\sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{1}{7}\sin(7x)+\ldots$$

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$.

3) תהי $f\in L^2_{PC}([-\pi,\pi])$.

נסמן ב-c_n את מקדמי פורייה (המרוכבים) של f.

נסמן $d_n=\mathrm{Re}\{c_n\}$ ובנוסף נתון כי:

- f ממשית.
- f מתאפסת על הקטע $[-\pi,0]$.
- מתקיים השיוויון $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}d_n e^{inx}=x^2e^{|x|}\cos(x)$.

מצאו את f.

4) תהי f פונקציה זוגית בעלת מחזור 2π המקיימת $f(x)=\cos(2x)$ בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ ו-$f(x)=-1$ בתחום $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.

מצאו את טור פורייה הממשי של f וחשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$.

האם טור פורייה של f מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

5) נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית 2π.

נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_n e^{inx}$ ויהי $h>0$ פרמטר כלשהו.

מצאו את מקדמי פורייה של $h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(t+x)dt$ כתלות ב-f_n.

תשובות סופיות:

1) א. $e^{i\alpha t}\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\sin(\pi\alpha)}{[\alpha-n]\pi}\cdot e^{in\cdot t}$ ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

2) א. $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos([2k+1]x)$

ב. $\begin{cases}\frac{\pi}{4} & \pi k<x<\pi(k+1)\\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1)<x<\pi k\\ 0 & x=\pi k\end{cases}$, כאשר k מספר שלם. ג. $\frac{\pi^2}{8}$.

3) $f(x)=\begin{cases}2x^2e^{|x|}\cos(x) & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x\le 0\end{cases}$

4) התכנסות במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$- אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ ו-$f'\in E[-\pi,\pi]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל-f בקטע $[-\pi,\pi]$.

5) f_0

מתמטיקה למדעי הנתונים

פרק 8 - יישומים של טורי פורייה

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל 103
2. משוואת החום 105
3. משוואת הגלים 107

בעיות שטורם ליוביל:

שאלות:

1) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \quad 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$.

3) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \quad 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

4) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \quad 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}$.

5) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \quad 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$.

6) $\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0 & , \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

תרגילים מסכמים:

1) מצאו פונקציות עצמיות וערכים עצמיים עבור בעיית שטורם ליוביל הבאה:

$\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0 & , \quad 0<x<L \\ y(0)=y(L)=0 \end{cases}$.

2) מצאו פונקציות עצמיות וערכים עצמיים עבור בעיית שטורם ליוביל הבאה:

$$\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0 & , \quad 0<x<L \\ y'(0)=y'(L)=0 \end{cases}.$$

תשובות סופיות:

1) פונקציות עצמיות של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x)$.

ערכים עצמיים של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

2) $y=0$

3) $y=0$

4) פונקציות עצמיות של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\varphi_n(x)=\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2\ell}x\right)$.

ערכים עצמיים של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left((2n+1)\frac{\pi}{2\ell}\right)^2$.

5) פונקציות עצמיות של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x$.

ערכים עצמיים של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$.

6) פונקציות עצמיות של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x$.

ערכים עצמיים של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

תרגילים מסכמים-תשובות סופיות:

1) $y_n(x)=\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$ n=1,2,3,...

$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$

2) $y_n(x)=\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$ $n=0,1,2,3,\ldots$

$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$

משוואת החום:

שאלות:

1) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<\pi\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=\sin(x) \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}.$$

2) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<\pi\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=\frac{1}{2}+3\sin^2(x) \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}.$$

3) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = 16u & 0<x<3\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(3,t)=0 \end{cases}.$$

4) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} & 0<x<2\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=6+4\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) \\ u_x(0,t)=u_x(2,t)=0 \end{cases}.$$

5) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} & 0<x<2\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(2,t)=0 \end{cases}.$$

תשובות סופיות:

1) $u(x,t)=e^{-t}\sin(x)$

2) $u(x,t)=2-\frac{3}{2}e^{-4t}\cos(2x)$

3) $u(x,t)=\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-12}{\pi^2(2k-1)^2}e^{-\left(\frac{4\pi(2k-1)}{3}\right)^2 t}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right)$

4) $u(x,t)=6+4e^{-\frac{81\pi^2}{4}t}\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$

5) $u(x,t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi^2(2k-1)^2}e^{-\left(\frac{3\pi(2k-1)}{2}\right)^2 t}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}x\right)$

משוואת הגלים:

שאלות:

1) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=\frac{1}{2}\sin(\pi x)-7\sin(5\pi x) \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

2) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=1 \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

3) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx} & 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=-2x-1 \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

תשובות סופיות:

1) $u(x,t)=\frac{1}{2}\cos(\pi t)\sin(n\pi x)-7\cos(5\pi t)\sin(5\pi x)$

2) $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)}\cos(\pi(2k-1)t)\sin(\pi(2k-1)x)$

3) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{3(-1)^n-1}{\pi n}\cos(2\pi nt)\sin(\pi nx)$

מתמטיקה למדעי הנתונים

פרק 9 - התמרת פורייה

תוכן העניינים

1. מבוא כללי 108
2. נוסחת כיווץ והזזה 110
3. נוסחת הנגזרת 112
4. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה 113
5. נוסחת המומנט 115
6. נוסחת ההתמרה ההפוכה 117
7. נוסחת התמרה כפולה ..... (ללא ספר)
8. משפט פלנשראל 118
9. משפט הקונבולוציה 119
10. תרגילים מסכמים 123

מבוא כללי:

שאלות:

1) חשבו את התמרת פורייה של $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$.

2) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$.

3) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & else\end{cases}$.

4) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 2 & 1<|x|<2\\ 0 & else\end{cases}$.

5) הוכיחו כי התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & x>0\\ e^{bx} & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים הינה
$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{b-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\right]$.

6) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

7) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 2 & 1\le x<2\\ 0 & else\end{cases}$.

8) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & 0\le x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

9) הוכיחו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{2ix} & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$ הינה $f(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$.

10) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

11) חשבו את התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}x & |x|<a\\ 0 & else\end{cases}$ עבור $a>0$.

12) האם קיימת $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\begin{cases}1-|\omega| & |\omega|\le\frac{1}{2}\\ 0 & |\omega|>\frac{1}{2}\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\frac{1-\cos(\omega)}{\pi\omega^2}$

3) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi(1+i\omega)}$

4) $f(\omega)=\frac{2\sin(2\omega)-\sin(\omega)}{\pi\omega}$

5) הוכחה.

6) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\omega)+i\left[\cos(\omega)-1\right]}{\omega}$

7) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{1+e^{-i\omega}-2e^{-i2\omega}}{i\omega}$

8) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1-i\omega}$

9) הוכחה.

10) $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sin([1-\omega])}{1\quad\omega}-\frac{\sin([1+\omega])}{1\,|\,\omega}\right\}$

11) $f(\omega)=-\frac{1}{\pi}i\frac{\sin(\omega a)-\omega a\cos(\omega a)}{\omega^2}$

12) לא. אינה רציפה בנקודות $\omega=\pm\frac{1}{2}$.

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-r,r]\\ 0 & else\end{cases}$ כאשר $r>0$.

2) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה

כי $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) נתונה פונקציה $g(x)\in G(R)$ בעלת התמרת פורייה $g(\omega)$.

מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב-$g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

4) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-ax^2}$ כאשר $a>0$.

רמז: $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\cos(4\pi\omega)\cdot\frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.

רמז: $F\left\{\chi_{[-1,1]}(x)\right\}=\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\frac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{16}}$

3) $f(x)=\frac{g(x+1)+g(x-1)}{2}$

4) $f(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}}$

5) $f(x)=\frac{\pi}{2}\begin{cases}1 & 4\pi-2\le x\le 4\pi+2 \ \ or \ \ -4\pi-2\le x\le -4\pi+2 \\ 0 & else\end{cases}$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

1) נניח כי $f(x)\in G$ גזירה, מקיימת $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$, $f'(x)\in G$ ו- $f(\omega)=\frac{\omega}{1+\omega^{30}}$.
מצאו התמרת פורייה של $f'(x)\cos(2x)$.

2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $F\left\{\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}\right\}_\omega=\left(-\frac{1}{2}\right)(i\omega)\frac{1}{2|a|}e^{-|\omega a|}$.

3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\omega^2e^{-|\omega|}$.
רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{i\cdot\frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}}+i\cdot\frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2}$

2) הוכחה.

3) $f(x)=(-2)\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

1) הוכיחו כי התמרת פורייה של $F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)}=\frac{1}{\pi i}\frac{2c\cdot\omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$.

2) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1}-\frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$.

3) הוכיחו כי התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases}\sin(ax)e^{-bx} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים,
הינה $g(\omega)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{bi-(\omega-a)}-\frac{1}{bi-(\omega+a)}\right]$.

4) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\cos(2x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה
כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\sin^2(3x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה
ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

6) נניח כי $f(x)\in G(R)$ ונגדיר $g(x)=f(3x-2)\cdot\cos(x)$. בטאו את $g(\omega)$ על ידי $f(\omega)$.

7) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=e^{3i\omega}\cdot e^{-|\omega-2|}$. רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

8) תהי $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$.
חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

א. $H(x)e^{-ax}$ כאשר $a>0$.

ב. $H(x)e^{-ax}\cos(bx)$ כאשר $a,b>0$.

ג. $H(x)e^{-ax}\sin(bx)$ כאשר $a,b>0$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $f(x)=2\pi i\cdot\chi_{[-1,1]}(x)\cdot\sin(x)$

3) הוכחה.

4) $$F\left\{e^{-|x|}\cos(2x)\right\}=\frac{1}{2\pi\left(1+\left[\omega+2\right]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+\left[\omega-2\right]^2\right)}$$

5) $$g(\omega)=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}-\left[\frac{1}{2\pi\left(1+\left[\omega+6\right]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+\left[\omega-6\right]^2\right)}\right]$$

6) $$g(\omega)=\frac{1}{6}\left[e^{-i\frac{2}{3}(\omega+1)}f\left(\frac{\omega+1}{3}\right)+e^{-i\frac{2}{3}(\omega-1)}f\left(\frac{\omega-1}{3}\right)\right]$$

7) $$F\left\{e^{2i[x+3]}\frac{2}{1+\left[x+3\right]^2}\right\}$$

8) א. $$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)}$$

ב. $$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a+i\left[\omega-b\right]}+\frac{1}{a+i\left[\omega+b\right]}\right)$$

ג. $$\frac{1}{4\pi i}\left(\frac{1}{a+i\left[\omega-b\right]}+\frac{1}{a+i\left[\omega+b\right]}\right)$$

נוסחת המומנט:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases}x & x\in(-1,1)\\ 0 & else\end{cases}$ על ידי שימוש בנוסחה $F\{x\cdot f(x)\}=i\frac{d}{d\omega}f(\omega)$.

2) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x^2e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x\cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}$.

4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x)=e^{-x^2}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=8x^3e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$.

6) תהי $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^5} & x\geq 1\\ 0 & x<1\end{cases}$.

הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

7) נתון כי התמרת פורייה של $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega)=\frac{1}{1+|\omega|}$.

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}|x\cdot f(x)|dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

1) $i\cdot\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\pi\omega^2}$

2) $F\left\{x^2e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{\omega^2}{2}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

3) $F\left\{x\cdot e^{-|x|}\right\}=-\frac{i}{\pi}\frac{2\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$

4) $f\left(\omega\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) $f\left(\omega\right)=\frac{1}{256}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\left(27i\omega^3+216\omega^2-792i\omega-1088\right)e^{i\omega-\frac{3\omega^2}{16}-\frac{5}{3}}$

6) הוכחה.

7) הוכחה.

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)}d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

2) חשבו $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{\sin(\omega)\cos(\omega x)}{\pi\omega}d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

1) ראו סרטון.

2)
$$\begin{cases}0 & |x|>1\\ 1 & |x|<1\\ \frac{1}{2} & x=1\ ,\ x=-1\end{cases}$$

משפט פלנשראל:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x)=\chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a>0$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\frac{\sin(bx)}{x}dx$ עבור $a,b>0$.

2) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

3) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)}dx=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})\cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=\frac{\sin(\omega a)}{\pi\omega}$ ב. $\pi\cdot\min\{a,b\}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)}$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & else \end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים.

2) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים $x > 0$ ו- $x \le 0$.

3) מצאו פונקציה $f \in G$ כך ש- $f(\omega) = \left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2$.

4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$

המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$.

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t) \in E$ מתקיים השוויון.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t) - f''(t)\right) g(x-t)\, dt = 2f(x)$$

5) נגדיר $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.

תזכורת: $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$.

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t)\, dt = e^{-|x|} + |x| e^{-|x|}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}dx=\frac{\pi}{3}$.

8) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[1,2]}(x)$.

9) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,2]}(x)$.

10) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}$.

11) חשבו את הקונבולוציה $\left(e^{-x^2}*e^{-x^2}\right)_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f(x-t)dt=e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$.

13) נניח כי $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy\equiv 0$ הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$.

תשובות סופיות:

1) $\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x\in[-2,0] \\ 2-x & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$

2) $(f*f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x\in[-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$

4) $g(x) = e^{-|x|}$

5) $\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{x^2+9}$

6) א. $\frac{2}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$ ב. $f(x) = e^{-|x|}$

7) א. $(f*f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>2 \\ 2-x & 1<x<2 \\ x & 0<x<1 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ ב. הוכחה.

8) $(f*f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>4 \\ 4-x & 3<x<4 \\ x-2 & 2<x<3 \\ 0 & x<2 \end{cases}$

9) $$(f*f)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>4\\ 4-x & 2<x<4\\ x & 0<x<2\\ 0 & x<0\end{cases}$$

10) $$\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>3\\ 3-x & 2<x<3\\ x-1 & 1<x<2\\ 0 & x<1\end{cases}$$

11) א. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$

12) $$f(x)=\sqrt[4]{\frac{6}{\pi}}e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

13) הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $g(x)=\begin{cases}\cos(x) & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ג. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)\sin(x)}{(1-x^2)}dx$.

ד. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^2}\sin^2(\pi x)dx$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x)=x\cdot e^{-|x|}$.

ב. מצאו את כל הפונקציות $h(y)$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} h'(y)e^{-|x-y|}dy = x\cdot e^{-|x|}$.

3) יהי $A>0$ קבוע. נגדיר $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le A\\ 0 & else\end{cases}$.

ידוע כי ישנה פונקציה $g(x)\in G$ המקיימת $g(\omega)=f(\omega)f(-\omega)$.

מצאו במפורש את $g(x)$.

4) נניח כי $f(x)\in C^2(-\infty,\infty)$ כך ש-$f'(x), x\cdot f'(x), f''(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$

ומתקיים $f''(x)+x\cdot f'(x)+f(x)=0$ לכל x ממשי.

א. הוכיחו כי $f(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$.

ב. חשבו את $f(\omega)$ אם נתון כי $f(0)=1$.

ג. מצאו את $f(x)$.

5) תהי $f(x)=\begin{cases}2 & |x|\le 1\\ 4 & 1\le|x|\le 2\\ 0 & else\end{cases}$.

א. חשבו את $f(\omega)$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\left[2\sin(2t)-\sin(t)\right]^2}{t^2}dt$.

ג. חשבו את האינטגרל $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{2\sin(2t)-\sin(t)}{\pi t}\cos(t)\,dt$.

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x^2}{\pi^2} & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ב. חשבו את האינטגרלים: $\int_0^\infty\left(\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\right)^2dx$

ו- $\int_0^\infty\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\cos(x)\,dx$.

7) נגדיר $\phi(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. הוכיחו כי המערכת $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורותונורמלית ב- $L^2_{PC}(-\infty,\infty)$.

8) תהי $f\in G$ פונקציה כך ש- $f'\in G$ פונקציה רציפה. מצאו פונקציה $g\in G$ המקיימת את המשוואה $g(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{u-t}g(u)\,du+f'(t)$.

9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{1}{\left(1+\omega^2\right)^2}$.

10) פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+b^2}dt=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}$.

11) נגדיר $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(\omega-t)\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(t)e^{i\omega x}dtd\omega$.

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור $f(x)$.

תזכורת: $\chi_{[a,b]}(t)=\begin{cases}1 & t\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

12) השתמשו במשפט פלנשראל על מנת לחשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)\left(x^2+b^2\right)}dx$

כאשר $a,b>0$.

13) מצאו את התמרת הפורייה של $f(x)=e^{-\left(x^2+2x+5\right)}$.

14) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos(bx)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$ לכל $a,b>0$ קבועים.

15) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(x)\cos(x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8e}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$.

16) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\sin^3(x)xe^{-x}dx=\frac{9}{25}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\sin(\omega\pi)\cdot\frac{2}{1-\omega^2}$ ב. $g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\omega\sin(\omega\pi)}{1-\omega^2}$

ג. $\frac{\pi}{2}\sin(1)$ ד. $\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $-\frac{2i\omega}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$ ב. $h(y)=-e^{-|y|}$, $-h(y)=e^{-|y|}$

3) $$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(A+x)^3}{3}-\frac{(A+x)^2}{2}x\right) & -A<x<0\\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{A^3}{3}-\frac{A^2}{2}x+\frac{x^3}{6}\right) & 0<x<A\\ 0 & else\end{cases}$$

4) א. הוכחה. ב. $e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ ג. $\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

5) א. $\frac{4\cdot\sin(2\omega)-2\cdot\sin(\omega)}{\pi\omega}$ ב. $\frac{5\pi}{2}$ ג. $\frac{3\pi}{2}$

6) א. $2\frac{\sin(\pi\omega)-\pi\omega\cos(\pi\omega)}{\pi^3\omega^3}$ ב. $\frac{1}{15}$ ו- $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)$

7) הוכחה.

8) $g(t)=f(t)+f'(t)$

9) $$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}e^{x}(1-x) & x<0\\ \frac{\pi}{2}e^{-x}(1+x) & x>0\end{cases}$$

10) $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{b}{a}\frac{(a-b)x}{\left(x^2+(a-b)^2\right)^2}$

11) $f(x)=4\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2}$

12) $\frac{\pi}{a+b}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\frac{\omega}{b^2+\omega^2}d\omega$

13) $f(\omega)=\frac{1}{e^4}\cdot e^{i\omega}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

14) הוכחה.

15) הוכחה.

16) הוכחה.