

מתמטיקה למדעי המחשב



תוכן העניינים

1. שיטות ספירה וייצוג מספרים (ללא ספר) 1
2. לוגיקה 15
3. תורת הקבוצות 29
4. מטריצות (ללא ספר)
5. הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות (ללא ספר)

מתמטיקה למדעי המחשב

פרק 1 - שיטות ספירה וייצוג מספרים

תוכן העניינים

1. ייצוג מספרים בבסיסים שונים (ללא ספר)
2. פעולות אריתמטיות עם מספרים בינאריים חיוביים (ללא ספר)
3. המרות מספרים בין בסיסים (ללא ספר)
4. מספרים משלימים (ללא ספר)
5. חיסור מספרים עם שיטות המשלים (ללא ספר)
6. פעולות אריתמטיות עם מספרים בינאריים מכוונים (ללא ספר)

מתמטיקה למדעי המחשב

פרק 2 - לוגיקה

תוכן העניינים

1. מבוא 1
2. הקשרים (ללא ספר) 2
3. טאוטולוגיה, סתירה ומושגים נוספים 2
4. צורות נורמליות 7
5. קבוצת קשרים שלמה 8
6. חוקי דה מורגן (ללא ספר) 8
7. תחשיב הפרדיקטים 9
8. תרגול בשיטות ההוכחה השונות 13

מבוא

שאלות

- 1) קבעו בכל אחד מהסעיפים האם נכון או לא נכון:
- הביטוי "בני ישראל הלכו במדבר ארבעים שנה" הוא פסוק.
 - הביטוי "ארבעים שנה" הוא פסוק.
 - שלילת הפסוק "האריה טרף את הצבי" היא "הצבי טרף את האריה".
 - הפסוק " $1+1=2$ או $2=3$ " הוא פסוק אמת.
 - הפסוק " $1+1=2$ וגם $2=3$ " הוא פסוק אמת.
 - הפסוק "אם $1+1=2$ אז $2=3$ " הוא פסוק אמת.
 - הפסוק "אם $2=3$ אז $1+1=2$ " הוא פסוק אמת.
 - הפסוק "אם $2=3$ אז $1+1 \neq 2$ " הוא פסוק אמת.
 - שלילת הפסוק " $a \neq 4$ וגם $b \neq 3$ " היא " $a+b=7$ או $ab=12$ ".
 - שלילת הפסוק " $a \neq 4$ או $b \neq 3$ " היא " $a+b=7$ וגם $ab=12$ ".
 - שלילת הפסוק " $a \notin \{3,4\}$ או $b \notin \{3,4\}$ " היא " $a+b=7$ וגם $ab=12$ ".

- 2) רשמו את טבלאות האמת של הפסוקים הבאים:

א. $(p \wedge q) \vee \neg r$

ב. $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg r)$

ג. $(p \wedge \neg q) \vee r$

ד. $(p \vee q) \rightarrow (q \rightarrow r)$

- 3) בטאו את שלילת הפסוקים הבאים (בלי קשר לנכונותם):

א. דוד יפה או ראובן מכוער.

ב. האוכל חם וטעים.

ג. לכל x קיים y , שהוא השורש הריבועי של x .

ד. כל תרנגולת כחולה עוזבת את הלול כדי להטיל ביצים.

ה. כל פנתר שהוא ורוד משחק בסרטים מצוירים.

ו. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי או שהוא משחק בסרטים מצוירים.

ז. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי וגם הוא משחק בסרטים מצוירים.

ח. לכל נגר קיים אדם שכל רהיטיו יוצרו בידי נגר זה.

ט. אם יהיה יום יפה וגם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

י. אם יהיה יום יפה אז אם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

טאוטולוגיה, סתירה ומושגים נוספים

שאלות

1) בדקו אילו מזוגות הפסוקים הבאים שקולים לוגית. במקרה שהתשובה חיובית, הראו זאת הן בעזרת טבלת אמת והן בעזרת עץ שקר.

$$\text{א. } \neg(p \rightarrow q) \quad p \wedge (\neg q)$$

$$\text{ב. } (\neg p) \rightarrow q \quad p \vee (\neg q)$$

$$\text{ג. } p \rightarrow (\neg q) \quad \neg(p \wedge q)$$

$$\text{ד. } (p \vee q) \wedge (\neg q) \quad p \wedge (\neg q)$$

$$\text{ה. } p \leftrightarrow q \quad (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$$

$$\text{ו. } (s \rightarrow (p \wedge (\neg r))) \wedge ((p \rightarrow (r \vee q)) \wedge s) \quad p \vee u$$

ז. הראו כי $\neg(r \wedge (p \vee q)) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$, בעזרת זהויות יסוד.

2) יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ הפסוקים:

$$\alpha_1: (A \vee B) \rightarrow (D \rightarrow C)$$

$$\alpha_2: B \rightarrow \neg(C \wedge A)$$

$$\alpha_3: C \leftrightarrow (A \wedge D)$$

$$\beta: D \vee (B \wedge C)$$

בדקו אלו מהטענות הבאות נכונות והוכיחו:

$$\text{א. } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \Rightarrow \beta$$

ב. β אינה נובעת טאוטולוגית מהפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, אך מתיישבת אתם.

ג. β אינה מתיישבת עם הפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, כלומר סותרת אתם.

3 הוכיחו כי הפסוקים הבאים הינם טאוטולוגיות, ללא שימוש בטבלת אמת:

א. $p \vee (\neg p)$

ב. $p \vee (p \rightarrow q)$

ג. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$

ד. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

ה. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

ו. $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$

ז. $(q \vee p \vee r) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow ((q \vee r) \wedge (\neg p)))$

ח. $((B \rightarrow (C \wedge (\sim A))) \wedge ((\sim B) \vee C) \rightarrow D) \wedge (E \rightarrow (\sim D)) \rightarrow (A \rightarrow \sim E)$

ט. הוכיחו בעזרת טבלת אמת ש- $(u \rightarrow v) \leftrightarrow ((\neg v) \rightarrow (\neg u))$ טאוטולוגיה.

י. הוכיחו כי הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה (מותר להסתמך על סעיף ט):

$$((u \rightarrow v) \leftrightarrow ((\neg v) \rightarrow (\neg u))) \rightarrow (((p \rightarrow r) \wedge ((\neg q) \rightarrow p) \wedge (\neg r)) \rightarrow q)$$

4 בארץ חלם מתקיימת שביתת רופאים במטרה להגדיל את תקציב הבריאות. להלן ניתוח המצב:

* אם הרופאים לא יסיימו את השביתה אז הנהלות בתי החולים יתערבו.

* אם לא תיפגע בריאותם של החולים אז הממשלה לא תגדיל את הקציב.

* אם הנהלות בתי החולים יתערבו אז לא תפגע בריאותם של החולים או שבית המשפט יתערב.

* בית המשפט לא יתערב וגם הממשלה לא תגדיל את התקציב.

מסקנה: הרופאים יסיימו את השביתה.

נסמן: D – הרופאים יסיימו את השביתה, H – הנהלות בתי החולים יתערבו,

P – בית המשפט יתערב, C – לא תפגע בריאותם של החולים, M – הממשלה

תגדיל את התקציב.

א. הצרינו את הטיעון לשפת תחשיב הפסוקים בעזרת המשתנים המוצעים.

ב. בדקו, ללא שימוש בטבלת אמת, אם הטיעון תקף.

- 5) בארץ חלם מתקיימות בחירות. זרובבל, כתבנו לענייני מפלגות, מנתח את המצב:
- * אם אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב את דני יפרוש.
 - * אם שמעון יציע לדני תפקיד אז דני יפרוש.
 - * אם בני ייבחר לראשות מפלגת פיתה אז שמעון יציע לדני תפקיד או שאבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב.
 - * בני יבחר לראשות מפלגת פיתה.
 - לכן, כתבנו מסיק שדני יפרוש.
- נסמן: A – אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב, B – בני יבחר לראשות מפלגת פיתה, C – שמעון יציע לדני תפקיד, D – דני יפרוש. הצרינו את הטענה לשפת תחשיב הפסוקים והוכיחו כי המסקנה תקפה.
- 6) בפרס העתיקה מחליט היזם וייזתא לבנות תיאטרון. אם נרצה שהתיאטרון נגיש לתושבים אז נצטרך להקימו בלב העיר. אם נרצה שהתיאטרון יהיה רווחי, אז הוא יצטרך להיות גדול ומרווח כדי שיכיל הרבה אנשים. אבל אם התיאטרון יהיה גדול ומרווח ויבנה בלב העיר, אז הוא יעלה 10 מיליון זוזים פרסיים. אבל לויזתא היזם אין 10 מיליון זוזים פרסיים. לכן, וייזתא היזם מסיק כי התיאטרון יוקם במקום לא נגיש לתושבים או שלא יהיה גדול ומרווח.
- א. תרגמו את ניתוח המצב לשפת הפסוקים, תוך שימוש בסימונים הבאים:
- N – נגיש לתושבים, L – בלב העיר, Y – יכיל הרבה אנשים, G – גדול ומרווח, M – מחירו יעלה על..., R – רווחי.
- ב. הצרינו את ההנחות והמסקנה לשפת הפסוקים ובדקו האם המסקנה תקפה, ללא שימוש בטבלת אמת.
- 7) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות (כאשר p, q, r פסוקים אטומים):
- א. $(p \vee q) \Rightarrow p$
 - ב. $(p \vee q) \Rightarrow q$
 - ג. $(p \rightarrow q) \Rightarrow q$
 - ד. $p, p \rightarrow q \Rightarrow q$
 - ה. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r$
 - ו. $r \Rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge p$
 - ז. $A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow (A \vee C), D \Rightarrow B$
 - ח. $(A \vee B \rightarrow D), D \rightarrow (C \vee P), P \rightarrow Q, (\neg C) \wedge (\neg Q) \Rightarrow \neg A$
 - ט. $(B \rightarrow (C \wedge (\sim A))), (((\sim B) \vee C) \rightarrow D), (E \rightarrow (\sim D)) \models (A \rightarrow \sim E)$

8 נתון כי α, β, γ פסוקים לאו דווקא אטומים.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם α סתירה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $\beta \Rightarrow \neg \gamma$.

ב. אם α טאוטולוגיה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $\neg \beta \Rightarrow \gamma$.

ג. אם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$.

ד. אם $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$, אז $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$.

ה. אם $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$, אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$.

ו. אם $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$, אז $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$.

ז. אם $\alpha \Rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$, אז $(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma$.

ח. אם $(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma$, אז $\alpha \Rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$.

ט. אם $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$, אז $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$.

י. אם $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$, אז $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$.

יא. אם $\alpha \models \beta \rightarrow \gamma$, אז $\alpha, \beta \models \gamma$.

יב. אם $\alpha \models \beta \rightarrow \gamma$, אז $\alpha \vee \beta \models \gamma$.

9 עבור α , פסוק אטומי או מורכב, נגדיר את הקבוצה $F_\alpha = \{\gamma \mid \alpha \Rightarrow \gamma\}$.

כלומר, F_α היא קבוצת כל הפסוקים שנובעים טאוטולוגית מהפסוק α .

הוכיחו כי $\alpha \equiv \beta$ אם ורק אם $F_\alpha = F_\beta$.

10 הוכיחו כי ההנחה A גוררת טאוטולוגית את המסקנה $\neg(\neg A)$,

בעזרת כללי ההיסק הבאים:

$$1. \Rightarrow p \rightarrow p$$

$$2. p \Rightarrow q \rightarrow p$$

$$3. p \rightarrow q, p \rightarrow (\neg q) \Rightarrow \neg p$$

11) הוכיחו שההנחות הבאות גוררות טאוטולוגית את המסקנה A

$$B \vee D$$

$$C \rightarrow B$$

$$D \rightarrow (A \vee C)$$

$$\neg B$$

מותר להשתמש רק בכללי ההיסק הבאים:

$$P \Rightarrow Q \vee P$$

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

$$P \wedge Q \Rightarrow Q$$

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$$

$$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$$

$$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$$

$$P \Rightarrow \neg \neg P$$

$$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

צורות נורמליות

שאלות

1) בסעיפים הבאים רשמו צורה דיסיונקטיבית-נורמלית (DNF) וצורה קוניונקטיבית-נורמלית (CNF) של הפסוקים:

א. $p \rightarrow q$

ב. $(p \vee q) \wedge \neg r$

ג. $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \neg q)$

קבוצת קשרים שלמה

שאלות

1) הביעו את הקשרים הבאים:

- א. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$.
- ב. קשר ה- \vee בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$.
- ג. קשר ה- \oplus (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$.
- ד. קשר ה- \leftrightarrow בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$.
- ה. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$.
- ו. הקשר \wedge בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$.
- ז. קשר ה- \oplus (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$.
- ח. קשר ה- \leftrightarrow בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$.
- ט. הוכיחו כי הקבוצה $\{\downarrow\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.
- י. נתון f קשר טרינארי המוגדר כך: $f(x, y, z) = x \rightarrow \neg(y \rightarrow z)$. הוכיחו כי $\{f\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.
- יא. הביעו את הקשר $f(x, y, z) = x \rightarrow \neg(y \rightarrow z)$ באמצעות \downarrow בלבד.
- יב. הביעו את הקשר \downarrow באמצעות $f(x, y, z) = x \rightarrow \neg(y \rightarrow z)$ בלבד.

תחשיב הפרדיקטים

שאלות

1) לכל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה ורשמו את שלילתה ללא שימוש בקשר השלילה. במקרה שהטענה נכונה נמקו זאת, ובמקרה שהטענה אינה נכונה הביאו דוגמה נגדית.

$$א. \forall x \in \mathbb{N} (\exists y \in \mathbb{N} (x < y))$$

$$ב. \forall x \in \mathbb{N} (\exists y \in \mathbb{N} (x > y))$$

$$ג. \forall x, y \in \mathbb{R} (x > y) \rightarrow \exists z \in \mathbb{R} (x > y + z)$$

$$ד. \forall x \in \mathbb{R} (x > 0) \rightarrow (\exists n \in \mathbb{N} (x > \frac{1}{n}))$$

$$ה. \forall x \in \mathbb{R} (x \neq 0 \rightarrow \forall y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{R} (xz = y))$$

$$ו. \forall x \in \mathbb{N} (x \geq 1 \rightarrow \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N} (xz = y))$$

$$ז. \forall x \in \mathbb{R} (x > 0 \rightarrow \exists y \in \mathbb{N} (xy > 1))$$

$$ח. \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (xy = x \wedge x + y < 5) \rightarrow y < 4\frac{1}{2}$$

$$ט. \forall x \in \mathbb{R} ((x > 0) \rightarrow \forall y \in \mathbb{R} (\exists n \in \mathbb{N} (nx > y)))$$

2) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות, ורשמו את השלילה של כל טענה, כאשר הקשר \neg מופיע רק לצד פרדיקטים. במקרה של הפרכה הדגימו עולם דיון מתאים עבורו הטענה לא מתקיימת, והסבירו מדוע הטענה לא מתקיימת.

$$א. \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$$

$$ב. \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$$

$$ג. (\forall x (P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$$

$$ד. (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \wedge Q(x)))$$

$$ה. (\forall x (P(x) \vee Q(x))) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$$

$$ו. (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \vee Q(x)))$$

$$ז. (\exists x (P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$$

$$ח. (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \rightarrow (\exists x (P(x) \wedge Q(x)))$$

$$ט. (\exists x (P(x) \vee Q(x))) \rightarrow (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$$

$$י. (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \rightarrow (\exists x (P(x) \vee Q(x)))$$

$$P(x): x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$Q(x): x \text{ is odd}$$

$$R(x): x > 0$$

$$L(x): x^2 + 2x + 2 = 0$$

(3) בעולם הדין \mathbb{Z} , נסמן

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$

ב. $\forall x [Q(x) \rightarrow P(x)]$

ג. $\exists x [P(x) \rightarrow Q(x)]$

ד. $\exists x [Q(x) \rightarrow P(x)]$

ה. $\forall x [L(x) \rightarrow Q(x)]$

ו. $\exists x [L(x) \rightarrow Q(x)]$

ז. $\exists x [R(x) \rightarrow P(x)]$

ח. $\forall x (\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$

ט. $\forall x [(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x)]$

י. $\exists x [P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))]$

יא. $\forall x [P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))]$

נפנה עתה למספר שאלות בהצרנות. מותר להשתמש בסימני המשתנים x, y, z , סימני הקבוצה $A, B, C, \dots, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, סוגריים, קשרים, כמתים, הפרדיקטים $(, \exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, <, >$, וכן סימנים נוספים הנתונים בגף השאלה.

שימו לב: אסור להשתמש בקשר השלילה ואין להשתמש בסימן \notin .

4) הצרינו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. לכל מספר ממשי אין עוקב מידי (כלומר, שאין מספר ראשון מיד אחריו).
- ב. אין קבוצה שמכילה את כל הקבוצות (מותר להשתמש בסימן \notin).
- ג. לכל מספר שאינו ראשוני יש לפחות שני מחלקים שונים.
(מותר להשתמש ב- P עבור קבוצת המספרים הראשוניים וב- \notin)
- ד. למספר הטבעי הכי גדול אין מחלקים (ברור שאין, אבל צריך להצריך).
- ה. לא כל מספר טבעי הוא ראשוני.
- ו. כל קבוצה אינה שקולה לקבוצת החזקה שלה.
- ז. לכל שני מספרים טבעיים שונים יש מחלק משותף.
- ח. בכל קבוצה בת לפחות שלושה איברים שונים אין איבר מקסימלי.
- ט. לא בכל תת קבוצה של ממשיים יש איבר מינימלי.
- י. תהי פונקציה $f: X \rightarrow Y$.

נגדיר את הפונקציה $G: P(X) \rightarrow P(Y)$ כך: $G(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

הצרינו את הטענה: אם f על אז G ח.ח.ע.

השתמשו רק בסימנים הבאים:

סימני המשתנים x, y, B, C , סימני הקבוצות X, Y , סימן הפונקציה f , סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים.
שימו לב: אסור להשתמש בסימנים G ו- P . יש להשתמש בהגדרותיהם כדי להחליפם בסימנים אחרים.

יא. לכל מספר ממשי יש לכל היותר שני מספרים ממשיים שונים זה מזה שריבועם שווה לו.

יב. הצרינו את הטענה: לכל פונקציה $f: A \rightarrow B$ ולכל פונקציה $g: B \rightarrow A$, אם $g \circ f = Id_A$, אז f היא על.

מותר להשתמש בסימנים הבאים ורק בהם: סימני המשתנים x_1, x_2, \dots ,

קשרים $\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$, והסימנים $\exists, \forall, (,), \in, A^B, B^A, f, g$.

למען הסר ספק: אסור להשתמש ב- d_A וב- \circ .

יג. מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מאחד שמחלקיו היחידים הם הוא עצמו ו-1. הצרינו את הטענה הבאה:

לכל מספר טבעי, בתחום שבין המספר עצמו לפעמיים המספר (כולל קצוות) יש לפחות מספר ראשוני אחד.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x_1, x_2, \dots ,

הקשרים $\leftrightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee$ והסימנים $\exists, \forall, (,), \in, \mathbb{N}, \leq, 1, 2, 3, \dots, =, |$ הסימן | פירושו מחלק.

יז. הצרינו את הטענה הבאה: בקבוצה A יש לכל היותר שני מספרים טבעיים.

השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x, y, z , סימני הקבוצות A, \mathbb{N} וכן סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים.

טו. הצרינו את הטענה: לא תמיד נכון שאם $A \subseteq B$ אז $A \sim B$. מותר להשתמש רק בסימנים הבאים: סימני הקבוצות A, B (מותר לצרף אותם לקבוצה בחזקת קבוצה), סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים. אין להשתמש בקשר השלילה.

טז. הצרינו את הטענה הבאה: קבוצת הפונקציות החח"ע מהממשיים לטבעיים אינה ריקה.

השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x, y , סימני הקבוצות \mathbb{R}, \mathbb{N} (וצירופי חזקות שלהן), סימני הפונקציות f, g , סוגריים, קשרים, וכמתים: $\exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \{, \}, \in, \neq, =$.

יז. הצרינו את כלל הכפל של אי-שוויון ממשי (קטן או שווה) במספר ממשי שונה מאפס.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x_1, x_2, \dots , הקשרים $\leftrightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee$ והסימנים $\forall, (,), \in, \mathbb{R}, \leq, 0$.

דוגמה לכלל הזה היא: מאי השוויון $3.14 \leq \pi$ (על ידי כפל במינוס חצי) לקבל את אי השוויון $-0.5\pi \leq -1.57$.

$$(5) \quad \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \left[(y \in \{t \in \mathbb{N} \mid t > 3\}) \rightarrow (y > x) \right]\}$$

כתבו אותה בצורה $\{x \in \mathbb{R} \mid \dots\}$, כך שבאגף ימין לא יופיע אף משתנה חוץ מ- x .

(6) תארו במדויק את הקבוצה:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{N} (x = y^2) \rightarrow (x > 2)\} - \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$$

תרגול בשיטות ההוכחה השונות

שאלות

(1) הוכיחו:

- אם $m, n \in \mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז $m+n$ אי-זוגי.
 - אם $m, n \in \mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז mn זוגי.
 - אם $m, n \in \mathbb{Z}$ מספרים אי-זוגיים, אז $m+n$ זוגי.
 - אם $n \in \mathbb{N}$ אי-זוגי, אז קיימים $m, k \in \mathbb{N}$ כך ש- $m^2 - k^2 = n$.
- רמז: חפשו $m, k \in \mathbb{N}$ עוקבים.
- אם $a, b, c \in \mathbb{N}$ וגם $a|b$ וגם $a|c$ אז $a|b+c$.

(2) הוכיחו:

- קיימים אינסוף מספרים ראשוניים (נסו בצורה ישירה ועל דרך השלילה).
 - קיימים $x, y \notin \mathbb{Q}$ כך ש- $x^y \in \mathbb{Q}$.
 - יש אינסוף שלשות פיתגוריות.
- כלומר, יש אינסוף פתרונות בשלמים למשוואה $x^2 + y^2 = z^2$.
- לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים רצף של n מספרים טבעיים עוקבים, שאף אחד מהם אינו ראשוני.

(3) הוכיחו בדרך השלילה:

- שלא קיים טבעי הכי גדול.
- שלכל מספר טבעי קיים מספר טבעי גדול ממנו.
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- שלא קיימים $p, t \in \mathbb{Q}$ כך ש- $p-t \notin \mathbb{Q}$.
- שלא קיימים $p \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ כך ש- $p+r \in \mathbb{Q}$.
- שלא קיים $q \in \{x | 0 < x \in \mathbb{Q}\}$ כך ש- $q = \min \{x | 0 < x \in \mathbb{Q}\}$.
- שלכל $q \in \{x | 0 < x \in \mathbb{Q}\}$ מתקיים $q \neq \min \{x | 0 < x \in \mathbb{Q}\}$.

4 הוכיחו בקונטרה-פוזיציה :

- א. אם $n \in \mathbb{N}$, כך ש- n^2 זוגי, אז n זוגי.
 ב. אם $m, n \in \mathbb{Z}$ מספרים, כך ש- m זוגי, אז n זוגי או m זוגי.
 ג. אם $m, n \in \mathbb{Z}$ מספרים, כך ש- m אי-זוגי, אז n אי-זוגי וגם m אי-זוגי.
 ד. אם $x, y \in \mathbb{R}$, כך ש- $x+y$ אי-רציונלי, אז לפחות אחד מהמספרים x, y הוא אי-רציונלי.
 ה. אם A, B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x \in A \cap B$, אז $x \in A$ או $x \in B$.
 ו. אם A, B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x \in A \cup B$, אז $x \in A$ וגם $x \in B$.
 ז. אם A, B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x \in A$, אז $x \in A \cap B$.
 ח. אם $A - (B - C) \subseteq (A - B) - C$, אז $A \cap C = \emptyset$.
 ט. אם $(A \cup B) - C \subseteq A - B$, אז $A(-C) \cap B = \emptyset$.
 י. אם $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$, אז $(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$.

5 ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו, תוך הפרדה למקרים, שאם $z \in \mathbb{Z}$, כך ש- z לא מתחלק ב-3, אז $z^2 = 1 \pmod{3}$.
 ב. הוכיחו או הפריכו:
 אם $z \in \mathbb{Z}$, כך ש- z לא מתחלק ב-4, אז z^2 לא מתחלק ב-4.

6 הוכיחו בדרך השלילה :

- א. אם $n \in \mathbb{N}$, כך ש- $n \pmod{3} = 2$, אז n הוא לא ריבוע של אף מספר טבעי.
 ב. אם $(A - C) \cup (C - B) \subseteq A \cap B$, אז $A \subseteq B$.
 ג. אם $(C - A) \cup (B - C) \subseteq A - B$, אז $B \subseteq A$.

מתמטיקה למדעי המחשב

פרק 3 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

15	1. מבוא לתורת הקבוצות
16	2. פעולות על קבוצות
18	3. דיאגרמת ון
20	4. שאלות הוכחה
22	5. קריאת קבוצות
24	6. דרך השלילה
25	7. קבוצת חזקה
27	8. מכפלה קרטזית

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) לגבי כל אחד מהממדים הבאים רשמו ב-□ את הסימן המתאים, $\in, \notin, \subseteq, \subset, \supseteq, \supset, \neq$. שימו לב שתיתכן יותר מתשובה אחת. אם התשובה היא \neq , נמקו.

א. $1 \square \{1, \{1\}\}$ ב. $\{1\} \square \{1, \{1\}\}$ ג. $\{8, \emptyset\} \square \{1, 2, 8\}$

ד. $\emptyset \square \{1, 2\}$ ה. $\emptyset \square \{\emptyset, 1, 2\}$

ו. $\{2\} \square \{\{1, \{2\}\}\}$ ז. $\{2\} \square \{2, \{2, \{2\}\}\}$

ח. $\{2\} \square \{2, \{2\}, \{\{2\}\}\}$ ט. $\{2\} \square \{2, \{2, \{2\}\}, \{2\}\}$

י. $\{\{2, \emptyset\}\} \square \{2, \{2\}, \{\{2\}\}\}$ יא. $\emptyset \square \{1, \{\emptyset\}\}$

יב. $\{\emptyset\} \square \{1, \{\emptyset\}\}$ יג. $\{1, 2\} \square \{1, \{2\}\}$

יד. $1 \square \mathbb{N}$ טו. $\{1\} \square \mathbb{N}$

טז. $1 \square \{\mathbb{N}\}$ יז. $\{1\} \square \{\mathbb{N}\}$

תשובות סופיות

1) א. \in ב. \in, \subseteq, \subset ג. \notin, \supseteq ד. \in, \subseteq, \subset ה. \in, \subseteq, \subset
 ו. \notin, \supseteq ז. \in, \subseteq, \subset ח. \in, \subseteq, \subset ט. \in, \subseteq, \subset י. \notin, \supseteq
 יא. \in, \subseteq, \subset יב. \in, \supseteq יג. \notin, \supseteq יד. \in, \notin טו. \in, \subseteq, \subset
 טז. \notin יז. \notin, \supseteq

פעולות על קבוצות

שאלות

(1) עבור $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{1, 4, 6\}$ חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $(A \cup C) \setminus B$

ב. $(A \cap B) \cup C$

ג. $A \cap (B \cup C)$

ד. $P(A)$

ה. $C \setminus A$

(2) עבור $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{1, 4, 6\}$

א. האם $B \subseteq C$?

ב. האם $\{1\} \subseteq B$?

ג. האם $\{1\} \subseteq A$?

ד. האם $\{1\} \in P(A)$?

ה. האם $\{1\} \subseteq P(A)$?

ו. האם $\{\{1\}\} \subseteq P(A)$?

ז. האם $\{\{1\}, \emptyset\} \subseteq P(A)$?

(3) עבור $A = \{1, \{3, *\}, \emptyset\}, B = \{4, \emptyset\}$ חשבו:

א. $A \cup B$

ב. $A \cap B$

ג. $A - B$

ד. $B - A$

ה. $A \oplus B$

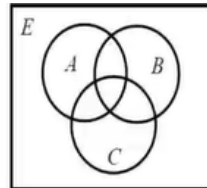
תשובות סופיות

- (1) א. $\{1, 2, 6\}$ ב. $\{1, 3, 4, 6\}$ ג. $\{1, 3\}$ ד. $2 \notin P(A)$
- (2) א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.
- ה. לא. ו. כן. ז. כן.
- (3) א. $\{1, \{3, *\}, \emptyset, 4\}$ ב. $\{\emptyset\}$ ג. $\{1, \{3, *\}\}$ ד. $\{4\}$
- ה. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

דיאגרמת ון

שאלות

1) באיור שלהלן דיאגרמת ון.

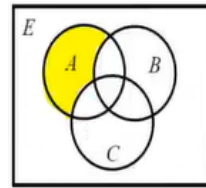


קווקוו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:

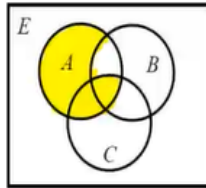
- | | |
|------------------------|-------------------------------------|
| א. $(A - B) - C$ | ב. $A - (B - C)$ |
| ג. $A \cap B^c$ | ד. $(A \cap B^c) \cup (C \cap A^c)$ |
| ה. $(A \cap B) \cap C$ | ו. $A \cap (B \cap C)$ |
| ז. $(A \cup B) \cup C$ | ח. $A \cup (B \cup C)$ |

תשובות סופיות

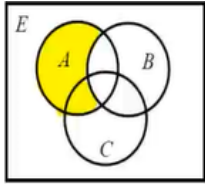
1 א.



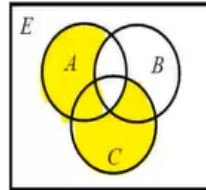
ב.



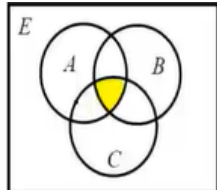
ג.



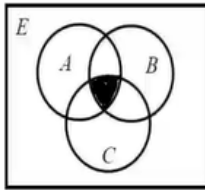
ד.



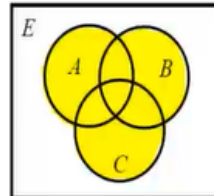
ה.



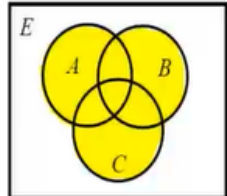
ו.



ז.



ח.



שאלות הוכחה

שאלות

בכל אחת משאלות הפרק יש לפעול כפי שמתואר בשאלה 1.

(1) תהיינה A, B קבוצות.

אם הטענה נכונה, ציינו זאת ותנו נימוק קצר מדוע.
 אם הטענה אינה נכונה, ציינו זאת, ותנו דוגמה נגדית.
 יש ערך רב יותר לדוגמה מינימלית; בדקו האם בדוגמה הנגדית יש פרטים מיותרים והסירו אותם.
 אם טענות יב-כא נכונות, נסו להוכיחן, ובמיוחד את טענה יב, שבה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x \notin A$, אז $x \notin A \cup B$.

ב. אם $x \notin A \cup B$, אז $x \notin A$.

ג. אם $x \notin A$, אז $x \notin A \cap B$.

ד. אם $x \notin A \cap B$, אז $x \notin A$.

ה. אם $x \notin A$, אז $x \notin A - B$.

ו. אם $x \notin A - B$, אז $x \notin A$.

ז. אם $x \in B$, אז $x \notin A - B$.

ח. אם $x \notin A - B$, אז $x \in B$.

ט. $x \notin A \Leftrightarrow x \notin A - B$

י. $x \in B \Leftrightarrow x \notin A - B$

יא. השלימו: $x \notin A - B \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$.

יב. $(A \subseteq B \wedge A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cap C$

יג. $(A \subseteq B \vee A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C$

יד. אם $A = A \cup B$, אז $A \subseteq B$.

טו. אם $A = A \cup B$, אז $B \subseteq A$.

טז. אם $A = A \cap B$, אז $A \subseteq B$.

יז. אם $A = A \cap B$, אז $B \subseteq A$.

יח. אם $A \subseteq B$, אז $A = A \cup B$.

יט. אם $B \subseteq A$, אז $A = A \cup B$.

כ. אם $A \subseteq B$, אז $A = A \cap B$.

כא. אם $B \subseteq A$, אז $A = A \cap B$.

(2) תהיינה A, B, C קבוצות.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $A = A - B$, אז $B = \emptyset$.

ב. אם $A = A - B$, אז $A \cap B = \emptyset$.

ג. אם $A = A \cup B$, אז $A \cap B = B$.

ד. אם $B = A \cup B$, אז $A \cap B = B$.

ה. אם $A \cap B = A$, אז $A = A \cup B$.

ו. אם $A \cap B = B$, אז $A = A \cup B$.

ז. אם $A \cup B = A \cup C$ וגם $A \cap B = A \cap C$ אז $B = C$.

ח. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.

ט. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cap C)$.

י. $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.

יא. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

יב. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

יג. $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$.

יד. להלן שתי טענות. הוכיחו את הנכונה והפריכו את השגויה:

1. $A \cap B \cap C \subseteq A \oplus B \oplus C$

2. $A \oplus B \oplus C \subseteq A \cap B \cap C$

תשובות סופיות

- (1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x \in B \vee x \notin A$ יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.
- (2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד. 1. נכונה. 2. לא נכונה.

קריאת קבוצות

שאלות

(1) עבור $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, רשמו בשתי דרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים, $\mathbb{N}_{odd} = \{1, 3, 5, \dots\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי, $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי,

$B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, \dots\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים,

$C = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2,

$D = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots\} = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$.

(2) עבור $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $C = \{3n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ב. $K = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 2 \rightarrow x^2 > 41\}$.

ג. $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 7 \rightarrow x < 20\}$.

ד. $C = \{3n - 1 \mid n \in \mathbb{N} \wedge \sqrt{n} \in \mathbb{N}\} = \{3n - 1 \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}$.

ה. $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 8 \rightarrow x^2 < 67\}$.

תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. דרך 1: } \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{n+1}{2} \in \mathbb{N} \right\}, \text{ דרך 2: } \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\text{ב. דרך 1: } \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}, \text{ דרך 2: } \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\text{ג. דרך 1: } \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} \notin \mathbb{N}\}, \text{ דרך 2: } \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall k \in \mathbb{N} n \neq k^2\}.$$

$$\text{ד. דרך 2: } \{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\text{ה. דרך 1: } \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} n = 2^k\}, \text{ דרך 2: } \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$(2) \text{ א. } C = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots\}$$

$$\text{ב. } \mathbb{Z} - \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \dots\}$$

$$\text{ג. } \mathbb{Z} - \{20, 21, 22, 23, \dots\}$$

$$\text{ד. } \{2, 11, 26, 74, 107, 146, \dots\}$$

$$\text{ה. } \mathbb{Z} - \{9, 10, 11, 12, \dots\}$$

דרך השלילה

שאלות

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם α , אז β , נוכיח אם $\neg\beta$, אז $\neg\alpha$.

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

$$(1) \text{ אם } A \cap C = \emptyset, \text{ אז } A - (B - C) \subseteq (A - B) - C$$

$$(2) \text{ אם } A \subseteq B, \text{ אז } (A - C) \cup (C - B) \subseteq A \cap B$$

$$(3) \text{ אם } (A - C) \cap B = \emptyset, \text{ אז } (A \cup B) - C \subseteq A - B$$

$$(4) \text{ אם } B \subseteq A, \text{ אז } (C - A) \cup (B - C) \subseteq A - B$$

$$(5) \text{ אם } A \subseteq A \Delta B \text{ וגם } B - C = B \Delta C, \text{ אז } A \cap C = \emptyset$$

$$(6) \text{ אם } A \subseteq A \oplus B \text{ וגם } B - C = B \oplus C, \text{ אז } A \cap C = \emptyset$$

תשובות סופיות

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

קבוצת חזקה

שאלות

(1) עבור $A = \{3, \{\emptyset\}\}$, $B = \{\{3\}, \{4, \emptyset\}\}$, $C = \{3, \{3\}, \{\emptyset, 3\}\}$

רשמו את הקבוצות הבאות:

א. את $P(C)$, $P(B)$ ואת $P(A)$.

ב. $P(A) \cap B$, $P(A) \cap A$, $P(C) \cap C$ ואת $C - P(C)$.

(2) עבור הקבוצות $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $B = \{1, \emptyset\}$

א. רשמו את $P(A)$ ואת $P(B)$.

ב. רשמו את $P(A) - P(B)$ ואת $P(B) - P(A)$.

ג. $P(A) - A$ ואת $P(A) - \{A\}$.

(3) רשמו את $P(\emptyset)$, את $P(P(\emptyset))$ ואת $P(P(P(\emptyset)))$.

(4) תהיינה A, B שתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:

א. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

ב. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

ג. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

ד. $P(A) \cap A \neq \emptyset$

ה. $P(A) \cap A = \emptyset$

ו. תנו דוגמה לקבוצה A שמקיימת $A \cap P(A) \cap P(P(A)) \neq \emptyset$.

ז. אם $\{A\} \subseteq P(B)$, אז $P(A) \subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכיחו בדרך השלילה:

ח. אם $P(A) \subseteq P(A - B)$, אז $A \cap B = \emptyset$.

ט. אם $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$, אז $(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$ (שאלה קשה).

(5) תהיינה A, B, C קבוצות כלשהן, ונתון $P(B) - P(A) = P(B) - \{\emptyset\}$.

הוכיחו כי $B - A = B$.

תשובות סופיות

- (1) א. $P(B) = \{\emptyset, \{\{3\}\}, \{\{4, \emptyset\}\}, \{\{3, \{4, \emptyset\}\}\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{\{\emptyset\}\}, \{3, \{\emptyset\}\}$
 . $P(C) = \{\emptyset, \{3\}, \{\{3\}\}, \{\{\emptyset, 3\}\}, \{3, \{3\}\}, \{3, \{\emptyset, 3\}\}, \{\{3\}, \{\emptyset, 3\}\}, \{3, \{3\}, \{\emptyset, 3\}\}$
 ב. $C - P(C) = \{3, \{\emptyset, 3\}\}$, $P(C) \cap C = \{\{3\}\}$, $P(A) \cap A = \emptyset$, $P(A) \cap B = \{\{3\}\}$
- (2) א. $P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset\}, \{1, \emptyset\}\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
 ב. $P(B) - P(A) = \{\{1\}, \{1, \emptyset\}\}$, $P(A) - P(B) = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
 ג. $P(A) - \{A\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, $P(A) - A = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- (3) . $P(P(P(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- (4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
 ו. ראו סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.
- (5) הוכחה.

מכפלה קרטזית

שאלות

(1) תהיינה A, B, C קבוצות. הוכיחו:

א. $(A = B) \Leftrightarrow (A \times A = B \times B)$

ב. $((B = \emptyset) \vee (A = \emptyset) \vee (A = B)) \Leftrightarrow (A \times B = B \times A)$

ג. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A, B, C, D מתקיים

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

ד. אם $((A \times A) \cup (B \times B) = (C \times C))$, אז

$$(((B \subseteq A) \vee (A \subseteq B)) \wedge (A \cup B \subseteq C))$$

ה. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A, B, C, D מתקיים

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

(2) הוכיחו או הפריכו:

תהיינה A, B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S \subseteq A \times B$.

אז קיימות $C \subseteq A$ ו- $D \subseteq B$, כך ש- $S = C \times D$.

(3) הוכיחו או הפריכו:

קיימות שתי קבוצות A, B , כך ש- $|A \times B| = 24$ וגם $|A \cap B| = 5$ (סימן $||$ על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

(4) הוכיחו או הפריכו:

לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים $A \times (B \oplus C) = (A \times B) \oplus (A \times C)$.

(5) הדגימו שלוש קבוצות A, B, C , כך ש- $(A \times (B \times C)) \cap ((A \times B) \times C) \neq \emptyset$.

תשובות סופיות

- (1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
- (2) לא נכונה.
- (3) לא נכונה.
- (4) נכונה.
- (5) ראו סרטון.

מתמטיקה למדעי המחשב

פרק 4 - מטריצות

תוכן העניינים

29	1. מטריצות
34	2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות
35	3. המטריצה ההופכית
42	4. דרגה של מטריצה
46	5. בחזרה למערכת משוואות ליניארית
53	6. מטריצה אלמנטרית
55	7. פירוק LU
56	8. שיטת הריבועים הפחותים - רגרסיה ליניארית

מטריצות

שאלות

1 נתונות המטריצות הבאות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

- א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$
ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. $E^T B$
ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

2 מצאו את x, y, z , אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3 א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4 $2tr(D^2 - 2E)$

5 א. $4C^T + A$ ב. $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

6 $I_2 BC$

7 $tr(C^T C)$

8 $DABC$

- (9) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n .
נתון כי $(A-I)(A+I) = 0$.
הוכיחו או הפריכו: $A = I$ או $A = -I$.

(10) אפיינו את כל המטריצות $A_{2 \times 2}$ שמקימות $A^2 = -4I$.

(11) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

- (12) שתי מטריצות A ו- B יקראו מתחלפות אם $AB = BA$.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות A ו- B מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז המטריצות

A ו- B מתחלפות.

ב. אם המטריצה A מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז $A^T = -A$.

- (13) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n .
נתון כי $AA^T = 0$. הוכיחו כי $A = 0$.

האם הטענה נשארת נכונה אם איברי A מרוכבים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

- (14) יהיו A ו- B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB = BA$ (מטריצות מתחלפות).
א. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $AB^k = B^k A$.
ב. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $(AB)^k = A^k B^k$.

(15) לפי נוסחת הבינום של ניוטון $(A+B)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$, כאשר

$$A, B \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$$

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם A ו- B מטריצות ריבועיות מסדר ℓ ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות A ו- B , על מנת שנוסחת הבינום תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של $(A+I)^n$ ו- $(A-I)^n$, כאשר A ו- I ריבועיות מסדר ℓ .

16 א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
 ב. נניח ש- A ו- B מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.
 הוכיחו שגם המטריצות AB ו- $A+B$ נילפוטנטיות.

17 תהי $A_{n \times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = \min\{i, j\}$.
 תהי $B_{n \times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = n + 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

א. כתבו את המטריצות A ו- B בצורה מפורשת.
 ב. המטריצה C מקיימת $C = A \cdot B$.
 חשבו את C ומצאו נוסחה עבור c_{ij} לכל $1 \leq i, j \leq n$.

18 מצאו מטריצה ממשית A , כך שיתקיים $A - \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \right)^T = A - A^T$.

תשובות סופיות

- (1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא. ו. 6×6
 ז. 6×2 ח. לא

(2) $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(9) שאלת הוכחה.

(10) $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) א+ב. שאלת הוכחה.

$$(A+I)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1} + \binom{n}{2}A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}A^1 + \binom{n}{n}I$$

$$(A-I)^n = \binom{n}{0}A^n - \binom{n}{1}A^{n-1} + \binom{n}{2}A^{n-2} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n-1}A^1 + (-1)^n \binom{n}{n}I$$

(16) שאלת הוכחה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א. (17)}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \dots & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & \dots & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } c_{ij} = \min\{i, n+1-j\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(18)}$$

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

(1) ידוע ש- A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):

1. AA^T סימטרית.
2. $A + A^T$ סימטרית.
3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.

(2) ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:

1. $BABABA$ אנטי-סימטרית.
2. $A^2 - B^2$ סימטרית.
3. $A^2 + B$ סימטרית.

(3) ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$.
מי מבין הבאים נכון:

1. AB^3 אנטי-סימטרית.
2. AB^2 סימטרית.
3. $(A - B)^2$ סימטרית.

(4) ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.
הוכיחו:

1. AB אנטי-סימטרית.
2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.

(5) נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר.

הוכיחו כי $A^4 B^4 = B^4 A^4$.

תשובות סופיות

- (1) 1,2,3
- (2) 2
- (3) 1,2,3
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות 1-9 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה. בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(1)} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(4)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(7)} \end{array}$$

(10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ הפיכה?

(11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ איננה הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר n , וחלצו את X :

(12) א. $AXC = D$ ב. $A^{-1}XC = A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^T P = A$

(13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$ ב. $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

(14) $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

(15) נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

חשבו את X , אם ידוע כי $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$.

(16) נתון $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשבו את Y , אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1} + B$.

(17) נתון $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

חשבו את B , אם נתון בנוסף כי: $5A^T B(I+2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

(18) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2 - 5A - 2I = 0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I .

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I) = 0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I .

(19) נתון כי $p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

א. חשבו את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- A הפיכה, ובטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

(20) נתון כי A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4 = 0$.

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה $I - A$ הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

(21) נתון כי $\begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$.

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה D , כך ש- $D^{-1}AD = C$.

* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכיחו: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C , אז A דומה ל- C .

(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

(22) תהיינה A, B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n \geq 2$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. $AB = BA$.
 ב. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח B הפיכה.
 ג. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח A הפיכה.
 ד. אם $(AB)^{100} = I$, אז בהכרח $(BA)^{100} = I$.
 ה. אם $(AB)^{100} = 0$, אז בהכרח $(BA)^{101} = 0$.

(23) תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, עבורן $A^2 + AB = I$.

- א. הוכיחו ש- $AB = BA$.
 ב. אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$ היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

(24) תהיינה A, B מטריצות כלשהן.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. אם $AB = I$ אז $B = A^{-1}$.
 ב. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
 ג. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
 ד. המכפלה AB לא הפיכה.
 ה. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.

(25) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2 = A$. הוכיחו:

- א. למעט המקרה בו $A = I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.
 ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.
 ג. אם A מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2, אז $\text{tr}(A) = 1$ או ש- A מטריצה אלכסונית.
 ד. A אידמפוטנטית $\Leftrightarrow A^n = A$, לכל n טבעי.

$$(26) \text{ נתונה } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

מצאו תנאי על הקבועים a, b, c, d כך ש- M תהיה הפיכה ומצאו את M^{-1} במקרה זה.

$$(27) \text{ נתון כי } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \text{ הפיכה.}$$

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \alpha_{13}$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \alpha_{23} \quad \text{א.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y = \alpha_{33}$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + w = 0$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z - 4w = 1 \quad \text{ב.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + 3w = -4$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z = 3$$

$$\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z = 1$$

(28) תהינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$.

הוכיחו:

א. אם $BA = I - A^2$ וגם $B^2 = -AB$, אז $B = 0$.

ב. אם $A^2 = 2I$, אז $A + I$ ו- $A - I$ הפיכות.

(29) תהינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, כך ש- $B^2A = -2B^3$ וגם

$$(2) \quad B^3 + AB^2 = 3I$$

הוכיחו ש- A ו- B הפיכות, ובטאו את A^{-1} ו- B^{-1} באמצעות B .

(30) תהינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, כך ש- $BA + 2I = B$.

א. הוכיחו ש- B הפיכה.

ב. ידוע ש- B סימטרית.

הוכיחו כי A סימטרית.

(31) תהי A מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים n טבעי כך ש- $A^n = 0$).

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי $I - A$ ו- $I + A$ הפיכות.

ג. נגדיר: $e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$

הוכיחו: אם $e^A = I$ אז $A = 0$.

(32) נתונות שתי מטריצות, A ו- B , מסדר n .
סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

- א. ל- A ול- A^T יש אותה צורה מדורגת קנונית.
- ב. אם A, B מדורגות קנונית, אז $A+B$ מדורגת קנונית.
- ג. אם A, B מדורגות קנונית, אז $A-B$ מדורגת קנונית.
- ד. אם בצורה המדורגת קנונית של B יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של AB יש שורת אפסים.

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \text{ג.} \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1}A \quad \text{ג.} \quad A \quad \text{ב.} \quad CD^2 - A \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad \text{ג.} \quad A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ג.} \quad B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ב.} \quad (19)$$

$$f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ג.} \quad (I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{א.} \quad (20)$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{א.} \quad (20)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (21)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (22)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (23)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (24)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (25)$$

$$((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)) \quad M^{-1} = \frac{1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)} M^T \quad (26)$$

- 27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.
28) שאלת הוכחה.
29) שאלת הוכחה.
30) שאלת הוכחה.
31) שאלת הוכחה.
32) ד

דרגה של מטריצה

שאלות

(1) אמתו את המשפט $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{על המטריצה}$$

(2) אמתו את המשפט $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{עבור}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix} \quad \text{(3) נתונה המטריצה}$$

חשבו את $\text{rank}(A)$.

(4) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר $n > 1$. הוכיחו או הפריכו:

א. $\text{rank}(A) = n-1 \Rightarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

ב. $\text{rank}(A) = n-1 \Leftarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

(5) נתון כי A, B מטריצות ריבועיות מסדר $n > 1$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\text{rank}(A) = \text{rank}(AB)$, אז בהכרח B הפיכה.

ב. ייתכן ש- $\text{rank}(A) < \text{rank}(AB)$.

ג. אם $\text{rank}(A) > \text{rank}(B)$, אז $\text{rank}(AB) > \text{rank}(B)$.

$$(6) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את $\text{rank}(A)$, $\text{rank}(B)$.

ב. חשבו את $\text{rank}(B^{10}A^{14})$.

(7) נניח כי A, B שתי מטריצות ריבועיות מסדר n .

הוכיחו כי $\text{rank} \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \leq 2\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

(8) תהי $A_{8 \times 7}$ מטריצה, כך ש- $\text{rank}(A) = 3$.

הוכיחו כי קיימות 3 מטריצות A_1, A_2, A_3 , שלכל אחת מהן דרגה 1,

כך ש- $A = A_1 + A_2 + A_3$.

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר $m \times n$ שדרגתה k .

(9) נתונות שתי מטריצות $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$.

ב. $\text{rank}(AB) \neq \text{rank}(BA)$.

ג. המטריצה BA לא הפיכה.

(10) תהי A מטריצה מסדר $m \times n$, ותהי B מטריצה מסדר $n \times m$. הוכיחו:

א. אם $AB = I_m$ אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = m$.

ב. אם $BA = I_n$ אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$.

ג. אם $AB = I_m$ וגם $BA = I_n$ אז בהכרח $m = n$.

ד. אם A לא ריבועית אז לא ייתכן שגם $AA^T = I_m$ וגם $A^T A = I_n$.

(11) בשדה F נתונים a_1, a_2, \dots, a_m איברים, שלא כולם אפס, ו- b_1, b_2, \dots, b_n איברים, שלא כולם אפס.

קבעו מהי דרגתה של המטריצה $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, כאשר $m_{ij} = a_i b_j$.

12 תהי $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = b_i^2 - b_j^2$,

כאשר b_1, b_2, \dots, b_n מספרים ממשיים שונים ו- $n \geq 3$.

א. הוכיחו שהמטריצה לא הפיכה.

ב. האם הטענה תישאר נכונה אם נשנה את הנתון ל- $n \geq 2$?

הוכיחו או הפריכו.

13 תהיינה A, B מטריצות מעל \mathbb{R} , מסדר $m \times n$, כך שלכל $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$,

מתקיים $A\underline{x} \neq B\underline{x}$.

מה הדרגה של המטריצה $A - B$?

14 תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$.

א. נתון שכל פתרון של המערכת $(AB)\underline{x} = \underline{0}$, הוא פתרון של המערכת

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

הוכיחו שהדרגה של AB שווה לדרגה של A .

ב. הוכיחו: אם A הפיכה, אז $\rho(AB) = \rho(A)$.

ג. הוכיחו שאם $\rho(AB) < \rho(A)$, אז A לא הפיכה.

15 תהי A מטריצה מסדר $n \times n$.

א. הוכיחו כי $P(A) \subseteq P(A^2)$.

ב. נתון כי $\rho(A^2) < \rho(A)$.

הוכיחו שקיים $v \in \mathbb{R}^n$, כך ש- $Av \neq 0$ וגם $A^2v = 0$.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) אם $k=1$, אז $\text{rank}(A)=2$. אם $k=4, k=10$, אז $\text{rank}(A)=3$.
- אם $\text{rank}(A)=4$ $k \neq 1, 4, 10$.
- (4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
- (5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה. ג. הטענה אינה נכונה.
- (6) א. $\text{rank}(A)=2$, $\text{rank}(B)=3$. ב. $\text{rank}(B^{10}A^{14})=2$.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) 1
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) n
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.

בחזרה למערכת משוואות ליניארית

שאלות

1) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות A , \underline{x} ו- \underline{b} , המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x} = \underline{b}$:

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4 \quad \text{ב.}$$

$$y + z + t = 1$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x + y - z = 3$$

$$\text{א. } x + 2y - 4z = 5$$

$$6x + 4y + z = 2$$

בשאלות 2-6 נתון כי $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

בטאו כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות ליניאריות:

$$A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (4)$$

$$A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (3)$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad (2)$$

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (6)$$

$$A\underline{x} = \underline{x} \quad (5)$$

$$2x - y + z = 3$$

7) פתרו את מערכת המשוואות $3x - 2y + 2z = 5$,

$$5x - 3y + 4z = 11$$

בעזרת המטריצה ההפוכה.

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

8) פתרו את מערכת המשוואות

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

בעזרת המטריצה ההפוכה.

9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$$(x, y, z) = (-1, 4, -2), \quad (x, y, z) = (2, -8, 4)$$

הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

10 למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים :
 $(x, y, z) = (2, 3, 4)$, $(x, y, z) = (-1, 4, -2)$
 מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(11) \text{ נתונה המערכת } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע k , למערכת :
 א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

$$(12) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

ידוע כי $\text{rank}(A) = 3$, וידוע כי למערכת $Ax = b$ יש פתרון.
 מצאו את הקבועים k, m .

13 נתונה מטריצה ריבועית A , המקיימת את התכונה הבאה :
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה 0.
 הוכיחו ש- A מטריצה לא הפיכה.

14 נתונה מטריצה ריבועית הפיכה A , המקיימת את התכונה הבאה :
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה k .
 הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.
 בטאו קבוע זה בעזרת k .

$$(15) \text{ מטריצה } A \text{ מקיימת } A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

הוכיחו כי הווקטור $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

- 16** יהיו A, B מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$. עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.
- א. אם למערכת $(AB)x = 0$ קיימים שני פתרונות שונים, אז בהכרח A לא הפיכה.
- ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת $(AB)x = 0$, אז למערכת $(BA)x = 0$ קיים פתרון שונה מ-0.
- ג. אם למערכת $Ax = 0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$.
- ד. אם למערכת $(A^t A)x = 0$ קיים פתרון יחיד, אז A לא הפיכה.
- ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x = 0$, אז למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ קיים פתרון שונה מ-0.

- 17** נתונה מערכת משוואות מעל \mathbb{R} : $Ax = d$ ($d \neq 0$). נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת $rank(A) = 2$. ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
- $$u = (x_1, x_2, 6, 7), \quad v = (y_1, y_2, 1, 2), \quad w = (z_1, z_2, 4, 3)$$
- מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
- א. $x = au + bv + cw$
- ב. $x = (a + b + 1)u - av - bw$
- ג. $x = au + bv + w$
- ד. $x = (a - b)u + (b - c)v + (c - a)w$
- ה. $x = (a + b)u - (av + bw + u)$, כאשר $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- הערה:** בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:
- בהינתן מערכת הומוגנית $Ax = 0$:
- אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
 - מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות. בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

- 18** נתונה מערכת $A_{m \times n} \cdot x = b$. הוכיחו או הפריכו:
- א. אם u וגם λu ($\lambda \neq 1$) פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.
- ב. אם u ו- v וגם $\alpha u + \beta v$ ($\alpha, \beta \neq 0$) פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.
- ג. אם הווקטורים $(1, 2, \dots, n)$, $(n, \dots, 2, 1)$ פותרים את המערכת והווקטור $(n+1, \dots, n+1)$ לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.

(19) תהי A מטריצה כך שלמערכת $Ax=0$ פתרון יחיד. הוכיחו או הפריכו:

- A הפיכה.
- למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^T פתרון יחיד.
- לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.

(20) תהי $A_{m \times n}$ מטריצה ממשית כך ש- $m < n$. הוכיחו או הפריכו:

- ממד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$ הוא $n-m$.
- למערכת $(A^T A)x=0$ יש אינסוף פתרונות.
- ייתכן מצב בו למערכת $(A^T A)x=0$ יש פתרון יחיד.
- ייתכן מצב בו למערכת $(AA^T)x=0$ יש פתרון יחיד.

(21) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n , כך שלכל מטריצה ריבועית $B \neq 0$ מסדר n , מתקיים $AB \neq 0$. הוכיחו ש- $\text{rank}(A) = n$.

(22) תהי A מטריצה ממשית מסדר $m \times n$.

לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.

- אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$, אז בהכרח למערכת $A^T x=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$.
- עבור $m=n$, אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$, אז בהכרח למערכת $A^T x=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$.
- אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m < n$.
- ייתכן ש- $A^T A = I_n$ וגם $AA^T = I_m$.
- אם $m \neq n$ ואם למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

(23) תהא $A \in M_{4 \times 4}(R)$ ויהי $b \in R^4$.

ידוע כי u ו- v פתרונות של המערכת הלא הומוגנית $Ax=b$.

- נגדיר $w = \alpha u + \beta v$. הוכיחו כי אם גם w פתרון של המערכת $Ax=b$, אז $\alpha + \beta = 1$.
- נניח בנוסף כי $w = -u + 2v$ הוא פתרון של המערכת $A^2 x = b$. הוכיחו כי $A-I$ לא הפיכה.

$$(24) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 3 & -8 & -8 \end{pmatrix}, \text{ ויהי } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

א. הראו כי $v = (2, -1, 1, -1, 1)^T$ הוא פתרון של המערכת $Ax = b$.

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

ג. מצאו $C, D \in M_{5 \times 2}(\mathbb{R})$, כך ש- $C \neq D$ ו- $AC = AD = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{א. (1)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$4x - 2y + 4z = 1$$

$$x - y + z = 2 \quad \text{(2)}$$

$$x - 6y + 3z = 3$$

$$-2y + 4z = 1$$

$$x - 5y + z = 2 \quad \text{(3)}$$

$$x - 6y - z = 3$$

$$(4+k)x - 2y + 4z = 1$$

$$x + (k-1)y + z = 2 \quad \text{(4)}$$

$$x - 6y + (3+k)z = 3$$

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{(5)}$$

$$x - 6y + 2z = 0$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-2x - 3y - 6z = 6 \quad \text{(6)}$$

$$4x + y + z = 9$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad \text{(7)}$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad \text{(8)}$$

(9) שאלת הוכחה.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{(10)}$$

(11) אם $k \neq 2$ או $k \neq -1$, אז יש פתרון אחד.

אם $k = 2$, אז יש אינסוף פתרונות.

אם $k = -1$, אז אין פתרונות.

$$m = 5, k = 9 \quad \text{(12)}$$

(13) שאלת הוכחה.

14) סכום האיברים בכל שורה של A^{-1} הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) א. שאלת הוכחה. ב. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t, -2s, s, -t, -t, t)$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (t=s=0) \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (t=s=1) \text{ ג.}$$

מטריצה אלמנטרית

שאלות

(1) רשמו את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(2) רשמו את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(3) הוכיחו או הפריכו כל אחד מסעיפים א-ד.
נתון כי A מטריצה ריבועית, ו- B מתקבלת מ- A ע"י סדרת פעולות דירוג.
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א. A^2 מ- B^2 .

ב. BA מ- A^2 .

ג. BA מ- B^2 .

ד. AB מ- B^2 .

(4) תהי $A \in M_3[R]$, כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.

נגדיר את המטריצות האלמנטריות $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה $E_2 E_1 A$?

פתרו בשתי דרכים:

דרך א' – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.

דרך ב' – בעזרת כפל מטריצות.

תשובות סופיות

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{e_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \quad (1)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \bullet \quad (2)$$

$$\bullet \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_5} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_6} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_7} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{e_8} = A$$

(3) שאלת הוכחה.

(4) -3

פירוק LU

שאלות

$$(1) \text{ רשמו את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ רשמו את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{ רשמו את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

תשובות סופיות

$$(1) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_U$$

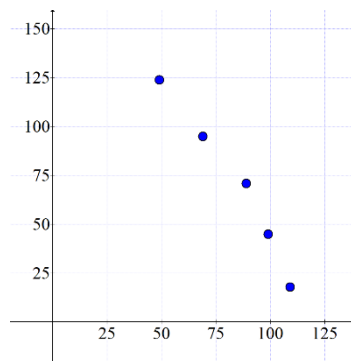
$$(2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_U$$

$$(3) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$$

שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה לינארית

שאלות

- (1) נתונות חמש נקודות במישור: $(-4, -1)$, $(-2, 0)$, $(2, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$. מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.
- (2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.



$price(x)$	$Demand / sales(y)$
49\$	124
69\$	95
89\$	71
99\$	45
109\$	18

- א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.
- ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54\$.
- ג. מה משמעות השיפוע של הישר?
- ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ"ל.

תשובות סופיות

- (1) $f(x) = 0.8x + 2$
- (2) א. $f(x) = -1.7x + 211$ ב. 119.2 יחידות. ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1\$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש. ד. 14.41

מתמטיקה למדעי המחשב

פרק 5 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית..... (ללא ספר)