# מתמטיקה למדעים

# תוכן העניינים

1. מבוא לאלגברה ..... 1
2. משוואות אלגבריות ..... 47
3. אי שוויונים אלגבריים ..... 69
4. חקירת משוואה ממעלה ראשונה ..... 85
5. חקירת משוואה ממעלה שנייה ..... 97
6. נוסחאות וייטה ..... 111
7. בעיות מילוליות ..... 113
8. סדרות ..... 137
9. אינדוקציה מתמטית ..... 161
10. סימן הסכימה (סיגמה) ..... 175
11. הבינום של ניוטון ..... 178
12. מבוא לגאומטריה של המישור ..... 182
13. גיאומטריה אוקלידית - משולשים ..... 190
14. גיאומטריה אוקלידית - מרובעים ..... 211
15. גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים ..... 235
16. גיאומטריה אוקלידית - המעגל ..... 249
17. גיאומטריה אוקלידית - פרופורציה ודמיון ..... 274
18. טריגונומטריה במשולש ישר זווית ..... 298
19. זהויות טריגונומטריות ..... 303
20. משוואות טריגונומטריות ..... 324
21. טריגונומטריה במישור ..... 345
22. גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר ..... 378
23. גיאומטריה אנליטית - המעגל ..... 403

# תוכן העניינים


24. טריגונומטריה במרחב - התיבה והקובייה ..... 422
25. טריגונומטריה במרחב - המנסרה ..... 435
26. טריגונומטריה במרחב - הפירמידה ..... 440
27. טריגונומטריה במרחב - גליל חרוט וכדור ..... 455
28. וקטורים גיאומטריים ..... 462
29. וקטורים אלגבריים ..... 476
30. מספרים מרוכבים ..... 518
31. חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים ..... 534
32. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום ..... 549
33. חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת (ללא ספר) .....
34. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש ..... 562
35. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות ..... 600
36. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות ..... 618
37. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות ..... 634
38. חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון ..... 650
39. חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי ..... 672
40. חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים ..... 679
41. חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה ..... 707

# מתמטיקה למדעים

## פרק 1 - מבוא לאלגברה

### תוכן העניינים


1. מספרים מכוונים ..... 1
2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים ..... 5
3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים ..... 7
4. שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים ..... 8
5. כפל וחילוק שברים ..... 14
6. חיבור וחיסור שברים ..... 16
7. בעיות יסודיות באחוזים ..... 20
8. חזרה על תבניות מספר ..... 22
9. כינוס איברים ..... 24
10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים ..... 26
11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר ..... 28
12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים ..... 30
13. פירוק הטרינום ..... 33
14. שברים אלגברים ..... 35
15. כפל וחילוק של שברים אלגברים ..... 39
16. חיבור וחיסור של שברים אלגברים ..... 41
17. שברים כפולים ..... 45

# מספרים מכוונים:

## סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2- ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

**כללים:**

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שוני סימן - התוצאה תהיה שלילית.

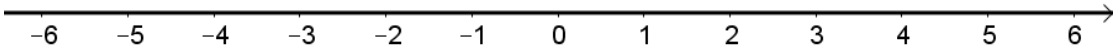
**הערה:**

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

## שאלות:

**1)** סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ -5\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -2$$




**2)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3+2$

ב. $-3-2$

ג. $3-2$

ד. $-3+2$

ה. $-1-4$

ו. $7+10$

ז. $-6+5$

ח. $-7+3$

**3)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $5+7-23+1$

ב. $5-8-12+17$

ג. $3-14+2+6$

ד. $-4-11+2+9$

ה. $6-21+3-7$

ו. $-7-13+5-3$

**4)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $4\cdot 9$

ב. $4\cdot(-7)$

ג. $(-6)\cdot(-5)$

ד. $(-5)\cdot(-3)$

ה. $(-2)\cdot 8$

ו. $(-8)\cdot 5$

ז. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)$

ח. $2\cdot 3\cdot 3$

ט. $(-2)\cdot 3\cdot(-3)$

י. $(-2)\cdot(-3)\cdot 3$

יא. $2\cdot 3\cdot(-3)$

יב. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)$

יג. $(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

יד. $1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

**5)** מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה:

א. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot(-4)\cdot(-2)$

ב. $(-5)\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ג. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ד. $5\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

**6)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-5):(-25)$

ב. $(-30):3$

ג. $40:(-10)$

ד. $(-32):(-4)$

ה. $(-6):18$

ו. $4:(-16)$

**7)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{-60}{12}$

ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

**8)** מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות:

א. $0:5$

ב. $(-2)\cdot 0$

ג. $0\cdot(-3)\cdot 4$

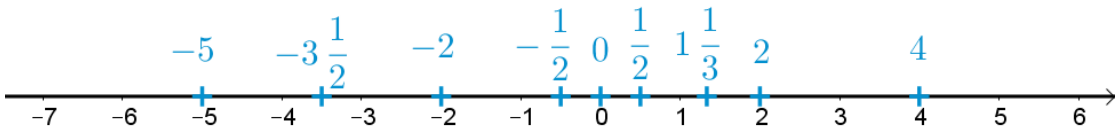
ד. $6:0$

ה. $0+4$

ו. $0-4$

## תשובות סופיות:

**1)** להלן מערכת הצירים:




**2)** א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5
ו. 17 ז. -1 ח. -4.

**3)** א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18.

**4)** א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16
ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18
יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16.

**5)** א. + ב. + ג. - ד. -.

**6)** א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$.

**7)** א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4.

**8)** א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4.

# חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

כאשר $a$ נקרא הבסיס ו- $n$ נקראת החזקה.

**הערות:**

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

**הגדרה:**

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר $a$ נקרא הבסיס ו- $n$ נקרא סדר השורש.

**הערות:**

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3^2$
ב. $3^3$
ג. $(-3)^3$
ד. $(-2)^3$
ה. $4^3$
ו. $3^4$
ז. $(-5)^3$
ח. $10^4$
ט. $-(-3)^4$
י. $-5^4$
יא. $-4^3$
יב. $-(-2)^6$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt[3]{-27}$
ב. $\sqrt[4]{625}$
ג. $\sqrt[4]{-16}$
ד. $\sqrt[5]{-32}$
ה. $-\sqrt[4]{81}$
ו. $-\sqrt[3]{1000}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. 9 ב. 27 ג. -27 ד. -8 ה. 64 ו. 81
ז. -125 ח. 10000 ט. -81 י. -625 יא. -64 יב. -64

**2)** א. -3 ב. 5 ג. לא מוגדר ד. -2 ה. -3 ו. -10

# סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

## סיכום כללי:

**סדר פעולות חשבון:**

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

## שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

**1)** $\sqrt{81}+3\cdot 2^3-40:8$

**2)** $(-3)^2:9-2\cdot\left(-4^2\right)$

**3)** $\sqrt{144}-20:4+3\cdot(-2)^2$

**4)** $3+4\cdot\left[-3+4\cdot(-2)\right]+\sqrt{10+6}$

**5)** $(-3)^4:(-9)-5\cdot(-2)^3$

**6)** $-\sqrt{9}+5^2:(-4-1)-24:12\cdot 3$

**7)** $-2^5:(-8)+4^2-3\cdot 5$

**8)** $\sqrt[3]{-27}+4\cdot 3^2-2\cdot 3^3$

**9)** $\left[6\cdot(-1)^4-10\cdot(-1)^3\right]\cdot(-1)^5$

**10)** $\left(8-\sqrt[3]{64}\right)\cdot\left(2\cdot(-4)-\sqrt[5]{243}\right)$

**11)** $\dfrac{3^2\cdot(8-2\cdot 3)^3}{\left(5^2\cdot 3-72\right)\cdot(-4)}+2\cdot\left\{15-20:(4+3\cdot 2)\right\}$

## תשובות סופיות:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1)** 28 | **2)** 33 | **3)** 19 | **4)** -37 |
| **5)** 31 | **6)** -14 | **7)** 5 | **8)** -21 |
| **9)** -16 | **10)** -44 | **11)** 20 | |

# שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

## סיכום כללי:

**הגדרה כללית:**

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

**ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:**

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

**שבר עשרוני:**

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ...
שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{X\,X}_{\text{שלמים}}.\underbrace{Y\,Y\,Y}_{\text{שברים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

**אחוזים - הגדרה:**

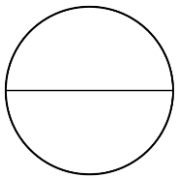
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45% , והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

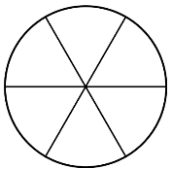
## שאלות:

**1)** צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

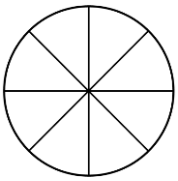
א. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגול



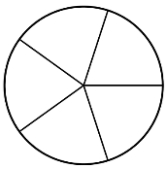
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגול



ג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

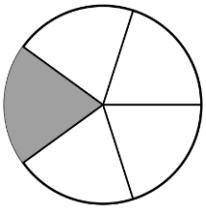


ד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגול

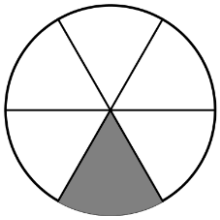


**2)** כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

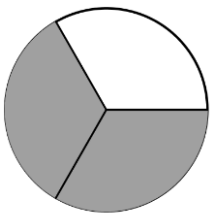
א. שבר:



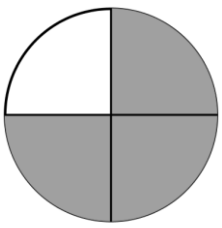
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



**3)** הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

**4)** צמצם את השברים הבאים ככל הניתן:

א. $\frac{25}{30}$ ב. $\frac{10}{30}$ ג. $\frac{6}{24}$ ד. $\frac{4}{20}$

ה. $\frac{35}{56}$ ו. $\frac{24}{42}$ ז. $\frac{36}{48}$ ח. $\frac{33}{121}$

**5)** המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים:

א. $-\frac{20}{3}$ ב. $\frac{19}{4}$ ג. $\frac{12}{5}$ ד. $\frac{22}{5}$

ה. $-\frac{34}{6}$ ו. $-\frac{50}{7}$ ז. $\frac{47}{8}$ ח. $\frac{60}{9}$

**6)** המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים:

א. $1\frac{2}{3}$ ב. $3\frac{5}{6}$ ג. $4\frac{1}{2}$ ד. $6\frac{1}{4}$

ה. $11\frac{3}{4}$ ו. $-2\frac{5}{8}$ ז. $-6\frac{2}{7}$ ח. $12\frac{7}{9}$

**7)** קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $\frac{3}{10}$ או $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{8}$ או $\frac{7}{6}$

ג. $\frac{2}{3}$ או $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{5}{18}$ או $\frac{7}{12}$

**8)** המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים:

א. 0.7 ב. 0.07 ג. 0.007 ד. 0.34

ה. 0.304 ו. 0.65 ז. 1.2 ח. 1.02

ט. 1.42 י. 3.5 יא. 6.03 יב. 5.125

**9)** המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$ ב. $\frac{3}{100}$ ג. $\frac{3}{1000}$ ד. $\frac{23}{1000}$

ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{3}{4}$ ז. $\frac{2}{5}$ ח. $\frac{4}{25}$

ט. $\frac{7}{50}$ י. $\frac{3}{20}$ יא. $\frac{7}{8}$ יב. $\frac{9}{16}$

יג. $9\frac{1}{10}$ יד. $3\frac{1}{5}$ טו. $4\frac{7}{8}$ טז. $-4\frac{1}{16}$

**10)** כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית
(היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$ ב. $\frac{5}{6}$ ג. $\frac{3}{7}$ ד. $\frac{2}{11}$

**11)** המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25% ב. 32% ג. 64% ד. 80%

ה. 120% ו. 5% ז. 300% ח. 150%

**12)** המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{4}{5}$ ד. $\frac{7}{20}$

ה. $\frac{11}{40}$ ו. $\frac{70}{125}$ ז. $\frac{5}{6}$ ח. $\frac{4}{9}$

## תשובות סופיות:

**1)** תשובה מודגמת בסרטון.

**2)** א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$

**3)** א. $\frac{40}{80},\frac{18}{36},\frac{4}{8}$ ב. $\frac{180}{300},\frac{75}{125},\frac{30}{50}$ ג. $\frac{440}{700},\frac{160}{256},\frac{80}{128}$

**4)** א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$
ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$

**5)** א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$
ז. $5\frac{7}{8}$ ח. $6\frac{2}{3}$

**6)** א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$
ז. $-\frac{44}{7}$ ח. $\frac{115}{9}$

**7)** א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$

**8)** א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$
ז. $1\frac{1}{5}$ ח. $1\frac{1}{50}$ ט. $1\frac{21}{50}$ י. $3\frac{1}{2}$ יא. $6\frac{3}{100}$ יב. $5\frac{1}{8}$

**9)** א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75
ז. 0.4 ח. 0.16 ט. 0.14 י. 0.15 יא. 0.875
יב. 0.5625 יג. 9.1 יד. 3.2 טו. 4.875 טז. -4.0625

**10)** א. $0.\overline{6}$ ב. $0.8\overline{3}$ ג. 0.428 ד. $0.\overline{18}$

**11)** א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$
ז. 3 ח. $1\frac{1}{2}$

**12)** א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

# כפל וחילוק שברים:

## סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$ ב. $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$ ג. $\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{10}$

ד. $3\cdot\frac{4}{5}$ ה. $6\cdot\frac{2}{3}$ ו. $\frac{12}{25}\cdot 5$

ז. $1\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{4}$ ח. $3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{2}{5}$ ט. $3\frac{3}{7}\cdot 2\frac{2}{5}$

י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ יא. $\frac{4}{5^3}$ יב. $\frac{4^3}{5}$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5}:\frac{4}{9}$ ב. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ ג. $\frac{3}{25}:\frac{7}{10}$

ד. $8:\frac{2}{9}$ ה. $10:\frac{2}{3}$ ו. $\frac{5}{6}:3$

ז. $\frac{2}{5}:5$ ח. $3\frac{3}{4}:5\frac{5}{8}$ ט. $2\frac{2}{5}:1\frac{3}{15}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. $4$ ו. $2\frac{2}{5}$

ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$

**2)** א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. $36$ ה. $15$ ו. $\frac{5}{18}$

ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. $2$

# חיבור וחיסור שברים:

## סיכום כללי:

**כפולה משותפת מינימלית:**

בהינתן זוג מספרים $a$ ו- $b$, המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

**הערות:**

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

**כללי החיבור והחיסור של שברים:**

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.

  דוגמא: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$ , $\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2-3}{7}=\frac{-1}{7}$.

- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.

  דוגמא: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$ , $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{3-10}{12}=-\frac{7}{12}$.

- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.

  דוגמא: $3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$.

  חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.

  דוגמא: $3-\frac{1}{4}=2\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$.

  דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

דוגמא: $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{6}=\frac{17}{5}+\frac{13}{6}=\frac{17\cdot 6}{30}+\frac{13\cdot 5}{30}=\frac{102+65}{30}=\frac{167}{30}=5\frac{17}{30}$.

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

דוגמא: $2\frac{3}{4}-5\frac{1}{3}=(2-5)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=-3+\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=-3+\frac{5}{12}=-2\frac{7}{12}$.

## שאלות:

**1)** מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3 ב. 2 ו-4 ג. 3 ו-5 ד. 6 ו-10

ה. 4 ו-10 ו. 4 ו-6 ז. 3, 5 ו-10 ח. 2, 3 ו-8

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$ ב. $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$

ג. $\frac{4}{13}+\frac{9}{13}$ ד. $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$

ה. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$ ו. $\frac{8}{9}-\frac{7}{9}$

ז. $\frac{2}{12}-\frac{5}{12}$ ח. $\frac{2}{5}-\frac{6}{5}$

ט. $\frac{2}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}$ י. $\frac{7}{15}+\frac{8}{15}-\frac{6}{15}$

**3)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6}-\frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6}-\frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+\frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{3}{5}$

**4)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2+\frac{5}{6}$

ב. $2-\frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3}+4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8}-6\frac{1}{2}$

ז. $2+\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+\frac{8}{20}$

**5)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14}:\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11}\cdot 2\frac{3}{4}-6:\frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5}:\frac{9}{10}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{4}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. 6 ב. 4 ג. 15 ד. 30 ה. 20 ו. 12
ז. 30 ח. 24

**2)** א. $\frac{4}{5}$ ב. $\frac{7}{9}$ ג. 1 ד. $1\frac{3}{4}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{1}{9}$
ז. $-\frac{1}{4}$ ח. $-\frac{4}{5}$ ט. $1\frac{5}{8}$ י. $\frac{3}{5}$

**3)** א. $1\frac{5}{6}$ ב. $\frac{7}{10}$ ג. $\frac{7}{12}$ ד. $-\frac{1}{8}$ ה. 5 ו. $3\frac{5}{6}$
ז. $\frac{19}{21}$ ח. $-\frac{1}{10}$

**4)** א. $2\frac{5}{6}$ ב. $1\frac{1}{6}$ ג. $3\frac{1}{12}$ ד. $1\frac{5}{12}$ ה. $7\frac{11}{12}$ ו. $-\frac{5}{8}$
ז. $2\frac{13}{18}$ ח. $-\frac{1}{20}$

**5)** א. $2\frac{11}{24}$ ב. $1\frac{1}{10}$ ג. $-13\frac{3}{4}$ ד. $2\frac{5}{6}$ ה. $3\frac{5}{18}$

# בעיות יסודיות באחוזים:

## סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $\frac{40}{100}\cdot 120 = 48$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48**.

## שאלות:

**1)** בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
א. כמה בנות בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

**2)** בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
א. כמה תלמידים בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

**3)** מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
א. מהו מחירו בסוף העונה?
ב. מה גודל ההנחה?

**4)** מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
א. מה מחירו הסופי?
ב. מה גודל ההתייקרות?

**5)** מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

**6)** מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

**7)** ענה על השאלות הבאות:

א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.
מה אחוז הבנים בקהל?

ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.
מה אחוז הבנות בכיתה?

ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

## תשובות סופיות:

**1)** א. 18 בנות. ב. 12 בנים.

**2)** א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.

**3)** א. 240 ₪ ב. 60 ₪

**4)** א. 540 ₪ ב. 40 ₪

**5)** 4.9755 ₪

**6)** 400 ₪

**7)** א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

# חזרה על תבניות מספר:

## סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).
ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של $x$ פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3\cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה-$x$ הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$

ב. $x^2+3x$ כאשר $x=2$

ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$

ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$

ה. $x^3+1$ כאשר $x=-2$

ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$

ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$

ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

**2)** חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה-$x$ הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$.

ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$.

**3)** הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

א. $a^2+2ab+b^2$ עבור: $a=3\ ,\ b=-5$.

ב. $(x-3)^2+3x^2b$ עבור: $x=5\ ,\ b=-1$.

ג. $-x^3-2xy+y^4$ עבור: $x=-2\ ,\ y=-1$.

ד. $\frac{(a-2c)^4}{a}-a^2$ עבור: $a=2\ ,\ c=-2$.

ה. $\frac{4a^2-3b}{c}$ עבור: $a=-1\ ,\ b=2\ ,\ c=-4$.

ו. $\sqrt{c-3a}$ עבור: $a=-1\ ,\ c=13$ ועבור: $a=\frac{1}{3}\ ,\ c=82$.

ז. $\frac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ עבור: $m=3\ ,\ q=48\ ,\ p=-5$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 11 ב. 10 ג. -12 ד. -65 ה. -7 ו. 5

ז. -10 ח. 45

**2)** א. $\frac{10}{27}$ ב. $5\frac{22}{27}$

**3)** א. 4 ב. -71 ג. 5 ד. 644 ה. $\frac{1}{2}$

ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שניה: 9 ז. -37

# כינוס איברים:

## סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x+6x-5x=(3+6-5)x=4x$.

איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.

כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים $x$ ו- $x^2$ הם שונים.

## שאלות:

כנס איברים דומים:

**1)** $5x+7x-4x$

**2)** $9x^2-2x^2-3x^2-2x^2$

**3)** $-10xy+15xy+xy-2yx$

**4)** $x^2y-3yx^2+x^2y$

**5)** $8a^2+10a-5a^2-11a+a^2$

**6)** $2x^2-3m^2-x^2+3m^2$

**7)** $3xy+y-30y+6yx-7y$

**8)** $mn^2+4m^2n+6n^2m-10nm^2+mn^2$

**9)** $-6+x^3+4-3x^3+17x^3-17$

**10)** $y^2+x^2-5x^2+5y^2+4x^2-6y^2$

**11)** $7x^2-3x-4x+2$

**12)** $5xy+2x-3yx-x+1$

**13)** $3-x-x^2+4x+5x^2-12$

**14)** $x+xy+y-6yx-6y-6x$

**15)** $mn+n-5m+5nm-14n+3m$

**16)** $ab^2+6ba^2-6b+16a^2b+3b-6b^2a$

**17)** $z^3-4z^2+7-z^3-8+8z^2$

**18)** $4x^2z+6xz^2-6-xz^2+12+10zx^2$

**19)** $2-x^3-3-4x^2+2x+x^3+x^2-2$

**20)** $x^3-3x-4x^2+2x+x^3+x^2-2x^3$

**21)** $2a^2b+3x^2y+5a^2b+10x^2y$

**22)** $12x^2y^3+13a^2-20x^2y^3+2a^2$

**23)** $2y^2-4x^3y^2-10y^2-x^3y^2$

**24)** $-2x^3y+5x^2-4yx^3-6x^2$

**25)** $2a^2b+2b+3a^2+5b$

**26)** $5a^2b-8ab^2+20a^2b-14ab^2$

**27)** $-12x^2+2y^2+3x^2y+14xy^2-5xy^2-6y^2+2xy+11x^2+x^2y-9xy$

**28)** $21x^3y^3+x^2y^2-3xy^3+x^3y-15x^2y^2-7x^3y+12x^3y^3-4xy^3+4xy^3-6x^3y$

## תשובות סופיות:

**(1)** $8x$

**(2)** $2x^2$

**(3)** $4xy$

**(4)** $-x^2y$

**(5)** $4a^2-a$

**(6)** $x^2$

**(7)** $9xy-36y$

**(8)** $8mn^2-6nm^2$

**(9)** $15x^3-19$

**(10)** 0

**(11)** $7x^2-7x+2$

**(12)** $2xy+x+1$

**(13)** $4x^2+3x-9$

**(14)** $-5x-5y-5xy$

**(15)** $-13n-2m+6mn$

**(16)** $-5ab^2+22a^2b-3b$

**(17)** $4z^2-1$

**(18)** $14x^2z+5xz^2+6$

**(19)** $-3x^2+2x-3$

**(20)** $-3x^2-x$

**(21)** $7a^2b+13x^2y$

**(22)** $-8x^2y^3+15a^2$

**(23)** $-8y^2-5x^3y^2$

**(24)** $-6x^3y-x^2$

**(25)** $2a^2b+3a^2+7b$

**(26)** $25a^2b-22ab^2$

**(27)** $-x^2-4y^2+4x^2y+9xy^2-7xy$

**(28)** $33x^3y^3-14x^2y^2-3xy^3-12x^3y$

# פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

## סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

- $a(b+c)=ab+ac$.
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x\cdot 3x$ ב. $-4x\cdot(-7x)$ ג. $-2x\cdot(-4x)\cdot(-3)$

ד. $8m^2\cdot 4m^3$ ה. $3a^3\cdot(-2a^2)$ ו. $-b\cdot 4b^2\cdot\frac{b^2}{2}$

ז. $a\cdot 3b$ ח. $4a^2\cdot 7b^2$ ט. $ab\cdot(-2a^2b)$

**2)** פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$ ב. $2(-3x^2+5x-1)$

ג. $(7x-2)4$ ד. $(1-2x)(-2)$

ה. $a(3a-1)$ ו. $b(b^2-3b+4)$

ז. $2x(5x+3)$ ח. $5x(x^2+2x-3)$

ט. $3t^2(4t-t^2+6)$ י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

**3)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$ ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$

ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$ ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

ה. $(3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$

ו. $3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7$

**4)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+2)$ ב. $(x+3)(x-7)$

ג. $(3-x)(x+4)$ ד. $(3x+4)(5x+1)$

ה. $3(4x+1)(2x-3)$ ו. $-2(3x-1)(5-2x)$

**5)** פשט את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+3)+2(3-x)$

ב. $(a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$

ג. $(2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6)$

ד. $-x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2)$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $6x^2$ ב. $28x^2$ ג. $-24x^2$ ד. $32m^5$ ה. $-6a^5$ ו. $-2b^5$

ז. $3ab$ ח. $28a^2b^2$ ט. $-2a^3b^2$

**2)** א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$

ה. $3a^2-a$ ו. $b^3-3b^2+4b$ ז. $10x^2+6x$ ח. $5x^3+10x^2-15x$

ט. $12t^3-3t^4+18t^2$ י. $10d^5-7.5d^2$

**3)** א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$

ו. $10y^2+32y-27$

**4)** א. $x^2+x-2$ ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$

ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$

**5)** א. $x^2+3$ ב. $7$ ג. $18m^2-6m-39$ ד. $-3x^5y^3+3x^4y^2$

# פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

## סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$ ב. $(x+2)^2$ ג. $(4x+5)^2$

ד. $(6x+2)^2$ ה. $(7x+y)^2$ ו. $(5x+2y)^2$

ז. $(x^2+7)^2$ ח. $(x^2+y^2)^2$ ט. $(x^3+2y^2x)^2$

**2)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$ ב. $(x-2)^2$ ג. $(5-x)^2$

ד. $(6x-1)^2$ ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$ ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$

ז. $(3m-2n)^2$ ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ ט. $\left(x^2y^2-7\right)^2$

**3)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$ ב. $(3+x)(x-3)$

ג. $(3x-1)(3x+1)$ ד. $(5-7x)(7x+5)$

ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$

ז. $(x^2+y)(x^2-y)$ ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

**4)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$

ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$

ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$

ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$

ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$

ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x^2+10x+25$ ב. $x^2+4x+4$ ג. $16x^2+40x+25$

ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$

ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$

**2)** א. $x^2-12x+36$ ב. $x^2-4x+4$ ג. $25-10x+x^2$

ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$

ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$

**3)** א. $x^2-25$ ב. $x^2-9$ ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$

ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. $x^4-y^2$ ח. $9a^4b^6-16$

**4)** א. $x^2+2$ ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$

ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

# פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

## סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:
  - הוצאת מספר משותף: $2x-8=2(x-4)$.
  - הוצאת אות משותפת: $x^2-12x=x(x-12)$.
  - הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2-21x=3x(x-7)$.
- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:
  - נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
  - נוסחה להפרש ריבועים: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x-12$ ב. $6y-4$

ג. $20-8a$ ד. $4a^3+8b$

ה. $75m^2+25m+15$ ו. $40a^2-8b^2+64c^2$

**2)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $y^2+5y$ ב. $3x-11x^3$

ג. $6y^2+5y^3+4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7-\frac{1}{4}a^5+a^3$

**3)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $2x^2-8x$

ב. $3t^2+12t$

ג. $5n^3-20n^2+50n$

ד. $8y^2+6y^3-2y^4$

ה. $4x^2y^2+16x^2y-20xy^2$

ו. $27mn-3n^2m+9n^3m$

**4)** פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $x^2+10x+25$

ב. $x^2+12x+36$

ג. $y^2-18y+81$

ד. $y^2-22y+121$

ה. $4x^2+4x+1$

ו. $16y^2-8y+1$

ז. $9x^2-24x+16$

ח. $25x^2+70x+49$

**5)** פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $r^2-25$

ב. $x^2-81$

ג. $25y^2-49$

ד. $121x^2-1$

ה. $x^2y^2-4$

ו. $9y^4-169x^4$

**6)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר:

א. $y-y^3$

ב. $x^3-10x^2+25x$

ג. $m^4-1$

ד. $196x^4-140x^3+25x^2$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$

ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$

**2)** א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$

ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$

**3)** א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$

ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$

**4)** א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$

ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$

**5)** א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$

ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$

**6)** א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$

ד. $x^2(14x-5)^2$ .

# פירוק הטרינום:

## סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: $ax^2+bx+c$ כאשר $a$, $b$ ו-$c$ הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר $bx$ לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, $m_1$ ו-$m_2$, שמקיימים: $m_1\cdot m_2=ac$ ו-$m_1+m_2=b$.

לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2+bx+c=ax^2+m_1x+m_2x+c$.

השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2+m_1x}+\underbrace{m_2x+c}$.

**הערה:**

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים $m_1$ ו-$m_2$ באופן הבא: $m_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ , $m_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום כמכפלה: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)\left(x-m_2\right)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד אז $m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$ נכתוב: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

## שאלות:

**1)** פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. $x^2+5x+4$ ב. $x^2-8x+15$ ג. $x^2-33x+62$

ד. $2x^2+7x-15$ ה. $3x^2-11x+6$ ו. $6x^2+5x+1$

ז. $2x^2+x-6$ ח. $x^2-18x+81$ ט. $x^2+2x+8$

**2)** פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

**הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.**

א. $6x^2+5x+1$ ב. $x^2+5x+4$

ג. $4x^2+20x+25$ ד. $3x^2-x+20$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$

ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$

ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.

**2)** א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

# שברים אלגבריים:

## סיכום כללי:

### הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

דוגמא לשברים אלגבריים: $\frac{4}{x-x^3}$ , $\frac{3x}{x^2+1}$ , $\frac{x+1}{x+2}$.

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: $\frac{3x+5}{4}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

### תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

דוגמא: השבר $\frac{1}{x+4}$ לא מוגדר כאשר $x=-4$ מכיוון שמתקבל: $\frac{1}{0}$.

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x\neq -4$ ומשמעו היא ש-$x$ יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט 4-, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

### כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים.
במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

- צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: $\frac{2x+8}{x+4}=\frac{2\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=\frac{2\cdot 1}{1}=2$.
- צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: $\frac{3x-15}{x^2-10x+25}=\frac{3\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}}}=\frac{3\cdot 1}{x-5}=\frac{3}{x-5}$.
- צמצום ע"י פירוק טרינום: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$.

## שאלות:

**1)** מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$

ב. $\frac{5}{x-6}$

ג. $\frac{x+7}{2x-8}$

ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$

ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$

ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$

ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$

ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

**2)** צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$

ב. $\frac{a-x}{a}$

ג. $\frac{a-ax}{a}$

ד. $\frac{x+1}{y+1}$

ה. $\frac{x}{x+y}$

ו. $\frac{6x}{6y}$

ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$

ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

ט. $\frac{4x^2y}{xy}$

י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

**3)** צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$

ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$

ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$

ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$

ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$

ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$

ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$

ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

**4)** צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2+10x+25}{2x+10}$

ב. $\frac{8n-n^2}{n^2-16n+64}$

ג. $\frac{z^3-4z^2}{2z^2-16z+32}$

ד. $\frac{4m^2+20m+25}{4m^2+10m}$

ה. $\frac{18y^2-24y+8}{2y-3y^2}$

ו. $\frac{a^3+4a^2b+4ab^2}{3ab+6b^2}$

**5)** צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$

ב. $\frac{m^2-12m+32}{m-4}$

ג. $\frac{4y-10}{2y^2+y-15}$

ד. $\frac{3z^2+26z+16}{3z+2}$

ה. $\frac{x^2+5x-36}{x^3+9x^2}$

ו. $\frac{9n^2-12n}{4+5n-6n^2}$

ז. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

ח. $\frac{x^2-14x+49}{x^2+x-56}$

ט. $\frac{3a^2b-10ab^2+3b^3}{-3a^3b+11a^2b^2-6ab^3}$

י. $\frac{m^3n-m^2n^2-m^2+mn}{2m^2n^3+mn^2-3n}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x\neq -3$ ב. $x\neq 6$ ג. $x\neq 4$ ד. $x\neq 0\ ,\ x\neq 4$

ה. $x\neq -1$ ו. $x\neq 2\ ,\ x\neq -2$ ז. $y\neq 0\ ,\ y\neq -1\ ,\ y\neq 1$

ח. $x\neq 0\ ,\ x\neq 1\ ,\ x\neq 4$

**2)** א. $x$ ב. לא ניתן לצמצם ג. $1-x$

ד. לא ניתן לצמצם ה. לא ניתן לצמצם ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$

ח. לא ניתן לצמצם ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם

**3)** א. $3\ ,\ x\neq -4$ ב. $\frac{m}{4}\ ,\ m\neq -4$ ג. $\frac{2}{a}\ ,\ a\neq 0,6$

ד. $-\frac{x}{3}\ ,\ x\neq 5$ ה. $-3\ ,\ y\neq \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ ו. $\frac{2x^2}{3}\ ,\ x\neq \frac{1}{2}$

ז. $\frac{3}{y(y-3)}\ ,\ y\neq 0,3$ ח. $\frac{3z^2-12z+4}{z+5}\ ,\ z\neq 0,-5$

**4)** א. $\frac{x+5}{2}\ ,\ x\neq -5$ ב. $\frac{n}{8-n}\ ,\ n\neq 8$ ג. $\frac{z^2}{2(z-4)}\ ,\ z\neq 4$

ד. $\frac{2m+5}{2m}\ ,\ m\neq 0,-\frac{5}{2}$ ה. $\frac{2(2-3y)}{y}\ ,\ y\neq 0,\frac{2}{3}$ ו. $\frac{a(a+2b)}{3b}\ ,\ b\neq 0,\ a\neq -2b$

**5)** א. $\frac{1}{x-5}\ ,\ x\neq 5,-2$ ב. $m-8\ ,\ m\neq 4$ ג. $\frac{2}{y+3}\ ,\ x\neq -3,\frac{5}{2}$

ד. $z+8\ ,\ z\neq -\frac{2}{3}$ ה. $\frac{x-4}{x^2}\ ,\ x\neq 0,-9$ ו. $\frac{-3n}{2n+1}\ ,\ n\neq -\frac{1}{2},\frac{4}{3}$

ז. $\frac{x+2}{x+3}\ ,\ x\neq -2,-3$ ח. $\frac{x-7}{x+8}\ ,\ x\neq 7,-8$

ט. $\frac{3a-b}{a(2b-3a)}\ ,\ a\neq 0\ ,\ b\neq 0,\ a\neq 3b\ ,\ 2b\neq 3a$ י. $\frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}\ ,\ mn\neq 1,-\frac{3}{2},n\neq 0$

# כפל וחילוק של שברים אלגברים:

## סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.

חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3x+3}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3(x+1)}=\frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{3x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}}=\frac{1}{3x}$.

- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y}:\frac{12}{y^2+y}=\frac{4x}{y}\cdot\frac{y^2+y}{12}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}x}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}(y+1)}{\underset{3}{\cancel{12}}}=\frac{x(y+1)}{3}$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{8}$

ב. $\frac{x}{3}\cdot\frac{9}{x^2}$

ג. $7y\cdot\frac{5}{y^2}$

ד. $6x^2\cdot\frac{3}{40x}$

ה. $\left(x^2+3x\right)\cdot\frac{2}{3x+9}$

ו. $\left(a^2-25\right)\cdot\frac{20}{5a+25}$

ז. $\frac{w^2-9}{w}\cdot\frac{w^2}{2w+6}$

ח. $\frac{y+4}{y^2+16}\cdot\frac{y^2-16}{2y+8}$

ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90}\cdot\frac{12}{2z-10}$

י. $\frac{5n^2}{n^2-121}\cdot\frac{2n^2+44n+242}{n+2}\cdot\frac{n^2+4n+4}{n}$

**2)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8}:\frac{x}{6}$

ב. $\frac{y}{25}:\frac{5}{y}$

ג. $a^2:\frac{1}{6a}$

ד. $\frac{5}{6a}:a^2$

ה. $\left(d^2-3d\right):\frac{5d-15}{5d}$

ו. $\frac{t}{t+4}:\frac{3t}{t+4}$

ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2}:\frac{y^2-16}{7y^2}$

ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36}:\frac{a+8}{a+6}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$ ה. $\frac{2x}{3}$

ו. $4\left(a-5\right)$ ז. $\frac{w\left(w-3\right)}{2}$ ח. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$ ט. $\frac{z+15}{z-5}$ י. $\frac{10n\left(n+11\right)\left(n+2\right)}{n-11}$

**2)** א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{y^2}{125}$ ג. $6a^3$ ד. $\frac{5}{6a^3}$ ה. $d^2$ ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{7\left(y+4\right)}{8\left(y-4\right)}$ ח. $\frac{a-8}{a-6}$

# חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

## סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים.

נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים.

כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף.
לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת.

דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x}=\frac{1+(x+1)}{x}=\frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)+3}{x+2}=\frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x(x+1)}=\frac{x+x+1}{x(x+1)}=\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-3x}=\frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{3}{(x-3)^2}-\frac{2}{(x-3)(x+3)}=\frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}=\frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6}+\frac{a-5}{6}$

ב. $\frac{5}{x}+\frac{4x+3}{x}$

ג. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3+4x}{x+1}$

ד. $\frac{7z}{2z-3}-\frac{4z}{2z-3}-\frac{z+3}{2z-3}$

**2)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab}-\frac{5}{bc}$

ב. $\frac{1}{xy}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xz}$

ג. $\frac{c}{ab}-\frac{ad}{bc}+\frac{2b}{cd}$

ד. $-\frac{5}{x}+\frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)}-\frac{2}{z(z-2)}$

**3)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $1-\frac{2}{x}$

ב. $1+\frac{3}{y^2}$

ג. $2+\frac{2}{x+1}$

ד. $3-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}$

ה. $\frac{a+1}{a^2}-\frac{3-a}{4a}-3$

ו. $\frac{x}{9yz}+\frac{z}{3y^2x}+\frac{3-y}{12xz}-3\frac{1}{2}$

**4)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x}$

ב. $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y}$

ג. $\frac{a+1}{a+2}+\frac{3}{a}$

ד. $\frac{1}{z+3}+\frac{2}{3z}-\frac{3}{z}$

**5)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{24}{a^2-9}+\frac{4}{a+3}$

ב. $\frac{3}{x^2-16}+\frac{2}{(x+4)^2}$

ג. $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{3y}{4-y^2}$

ד. $\frac{3z}{z^2+4z+3}-\frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$

ה. $\frac{x-1}{x^2+3x-40}+\frac{2}{-x^2+8x-15}$

ו. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7}+\frac{a+3}{a^2+14a+49}$

ז. $\frac{x}{x-3}+\frac{9-x}{x^2-8x+15}$

ח. $\frac{1}{a-b}+\frac{2}{a+2b}-\frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

**6)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{4}{x}\cdot\frac{x^2}{8}+\frac{9}{x+1}\cdot\frac{x+1}{18}$

ב. $\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot\frac{x^2}{7x+14}$

ג. $\frac{7}{y^2}:\frac{6}{y^3}-\frac{y-4}{63}\cdot\frac{3y-4}{y^2-8y+16}$

ד. $\left(3x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right):\frac{6x^3+2x-4}{x^2}$

ה. $\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3}-\frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right):\frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1

**2)** א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d-a^2d^2+2ab^2}{abcd}$

ד. $\frac{-5y^2+x+1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$

**3)** א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$

ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2+a+4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z}$

**4)** א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$

ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$

**5)** א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$

ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$

ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$

**6)** א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

# שברים כפולים:

## סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

## שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

1) $\frac{\frac{4x}{12}}{x}$

2) $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5}$

3) $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2}$

4) $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54}$

5) $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{\frac{y^2}{3-y}}$

6) $\frac{\frac{4x}{x+1}}{\frac{8}{x^2+2x+1}}$

7) $\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{\frac{40}{15c+15}}$

8) $\frac{\frac{t^2-t-20}{16t+8}}{\frac{25-t^2}{2t+1}}$

9) $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}}$

## תשובות סופיות:

1) $\frac{x^2}{3}$

2) $2.5$

3) $\frac{1}{6t^3}$

4) $\frac{t-9}{54t^2}$

5) $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$

6) $\frac{x(x+1)}{2}$

7) $\frac{c}{c-4}$

8) $\frac{t+4}{-8(t+5)}$

9) $\frac{5}{x}$

# מתמטיקה למדעים

## פרק 2 - משוואות אלגבריות

### תוכן העניינים

1. משוואות ממעלה ראשונה ..... 47
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה ..... 49
3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון ..... 52
4. משוואה ממעלה שנייה ..... 53
5. משוואות דו-ריבועיות ..... 55
6. משוואות עם פרמטרים ..... 57
7. משוואות עם שורשים ..... 59
8. משוואות עם ערך מוחלט ..... 61
9. מערכת משוואות ממעלה שנייה ..... 62
10. משוואות מתקדמות מסכמות ..... 64
11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית ..... 67

# משוואה ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $6x+2=8$

ב. $7-2x=7$

ג. $2x+x=24$

ד. $2x+6=8+x$

ה. $-7x+5+2x=4x-13$

ו. $6x-3+5-7x=x-5x-7$

ז. $2-5x+7=-3x+8$

ח. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

**2)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$

ב. $7x-4(3-4x)=-x$

ג. $6(4-x)-(6-x)=3x$

ד. $5x-(3x-7)4=21$

ה. $x(x-5)=x^2-7x+8$

ו. $(7-x)(1-x)-(x-3)^2=0$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1$

ג. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ד. $\frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1$

ה. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

ו. $5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0$

ב. $\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0$

ג. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ד. $\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2}$

ה. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ו. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

**5)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$

ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$.

**2)** א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$.

**3)** א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$.

**4)** א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$.

**5)** א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6$ , $x\neq 3$.

# מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר $a_1$ , $b_1$ , $c_1$ ו- $a_2$ , $b_2$ , $c_2$ הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ , $\begin{cases} y=3x-1 \\ \frac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

**פתרון של מערכת משוואות:**

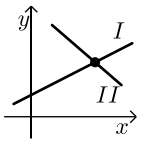
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

**הצגה גרפית של מערכת משוואות:**

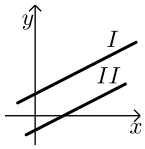
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

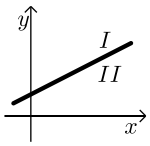
- הישרים נחתכים:
במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.




- הישרים מקבילים:
במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.




- הישרים מתלכדים:
במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



**פתרון אלגברי של מערכת משוואות:**

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

**הערה:**

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}3x+y=11\\y=5\end{cases}$ ב. $\begin{cases}y=x-3\\y=2x+4\end{cases}$ ג. $\begin{cases}-3x+2y=-16\\x=5y+14\end{cases}$

ד. $\begin{cases}5x-2y=-2\\x+4y=4\end{cases}$ ה. $\begin{cases}-5x+7y=-26\\x+3y=-8\end{cases}$ ו. $\begin{cases}2x+3y=5\\5x+7y=11\end{cases}$

**2)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+3y=5\\x-3y=3\end{cases}$ ב. $\begin{cases}5x+2y=14\\5x+3y=23\end{cases}$

ג. $\begin{cases}5y=2x\\4x=5y+8\end{cases}$ ד. $\begin{cases}4x=3y-29\\5y=9-13x\end{cases}$

**3)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+2y=1\\4x+8y=5\end{cases}$ ב. $\begin{cases}2(x-y)+4y=1+x\\2-7y+x=3(x-y)\end{cases}$.

**4)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases}$.

**5)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases}$

**6)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $(2,5)$ ב. $(-7,-10)$ ג. $(4,-2)$ ד. $(0,1)$ ה. $(1,-3)$ ו. $(-2,3)$.

**2)** א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$.

**3)** א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

**4)** א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$ ג. $(7,2)$.

**5)** א. $(1,1)$ ב. $(-3,1)$ ג. $(1,1)$.

**6)** א. $(-1,-3)$ ב. $(2,10)$ ג. $(-2,4)$.

# משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

## סיכום כללי:

**משוואה ממעלה ראשונה:**

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0\cdot x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של $x$ המקיים אותה.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

**1)** $x+4=6+x$

**2)** $3x+6-x=4+2x+2$

**3)** $6(x-2)=2x+5+4x$

**4)** $5x-3+x=4x+2x-3$

**5)** נתונה המשוואה: $\square+5x=3-2(x+2)$.

א. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

## תשובות סופיות:

**1)** אף פתרון.

**2)** אינסוף פתרונות.

**3)** אין פתרון.

**4)** אינסוף פתרונות.

**5)** א. -8 ב. -1 ג. $-7x-1$

ד. $-7x+k$ כאשר $k$ הוא מספר כלשהו השונה מ- -1.

# משוואה ממעלה שנייה:

## סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$ , $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.

פתרונות המשוואה יסומנו ב- $x_1$ ו- $x_2$ ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.

2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.

3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$ ב. $-x^2+10x-16=0$

ג. $25x^2-20x+4=0$ ד. $2x^2-6x+5=0$

**2)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $4x^2-5x+7=4-x^2+13$ ב. $-x(x-5)=(1-3x)(1-x)+4$

ג. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$ ד. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת $b$):

א. $x^2-36=0$ ב. $32x^2-18=0$

ג. $4x-x(x+2)=3(x-1)-x-6$ ד. $(2x-1)^2+(2x+1)^2=10$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת $c$):

א. $-7x^2-14x=0$ ב. $5x^2-x=0$

ג. $6x(x-2)-1=4x-3(x+1)+2$ ד. $(5x-2)^2=(x-2)(x+3)+10$

**5)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$ ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$ ד. $\frac{x}{2x^2-72}+\frac{2}{x^2+12x+36}=\frac{8x-15}{24-4x}+2$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x_1=2\ ,\ x_2=8$ ג. $x=\frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.

**2)** א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1$ ב. $x_1=1\ ,\ x_2=1\frac{1}{4}$ ג. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$

ד. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$.

**3)** א. $x=\pm 6$ ב. $x=\pm\frac{3}{4}$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=\pm 1$

**4)** א. $x_1=0\ ,\ x_2=-2$ ב. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=2\frac{1}{6}$

ד. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{7}{8}$.

**5)** א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq -3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$

ד. $x_1=-7.6\ ,\ x_2=-4\frac{2}{7}$.

# משוואות דו-ריבועיות:

## סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא $x$.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t\rightarrow at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי $x$.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת $x$.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

**1)** $5x^4+3x^2-8=0$

**2)** $x^4-3x^2+2=0$

**3)** $13x^2\left(3x^2-1\right)-2=3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

**4)** $x^2\left(x^2+1\right)=10\left(3x^2-10\right)$

**5)** $x^6+x^3=56$

**6)** $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

**7)** $x-9\sqrt{x}+14=0$

**8)** $x^8-4x^4-50=31x^4-84$

**9)** $125x^6-1=124\left(x^6+x^3+1\right)$

**10)** $\left(2x^2-x\right)^2-4\left(2x^2-x\right)+3=0$

**11)** $\left(x^2+2x\right)^2+7x^2+14x=-6$

**12)** $\frac{21}{x^2-4x+10}=6+x^2-4x$

**13)** $\frac{12}{x^2+2x-8}=1+\frac{7.5}{x^2+2x-3}$

**14)** $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

**15)** $\frac{3}{3x^2-15}+\frac{1}{x^2+5}=\frac{10}{x^4-25}$

**16)** $\frac{x^2-1}{4x^2-28}+2=\frac{9}{x^4-8x^2+7}+\frac{x^2}{2x^2-2}$

**17)** $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^2+35=12\left(2x+\frac{3}{x}\right)$

**18)** $\frac{3x^4}{\left(x+2\right)^2}+\frac{3x^2}{x+2}=6$

**19)** $\left(2x-x^2+3\right)\left(2x-x^2-2\right)=0$

**20)** $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x-8\right)=-24$

## תשובות סופיות:

1) $x=\pm 1$
2) $x=\pm 1,\pm\sqrt{2}$
3) $x=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3}$
4) $x=\pm 2,\pm 5$
5) $x_1=\sqrt[3]{7}\ ,\ x_2=-2$
6) $x=-2,\sqrt[3]{4}$
7) $x_1=4\ ,\ x_2=49$
8) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{34}\ ,\ x_{3,4}=\pm 1$
9) $x=5,-1$
10) $x_1=1.5\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=1\ ,\ x_4=-\frac{1}{2}$
11) $x=-1$
12) $x_{1,2}=1,3$
13) $x_1=0\ ,\ x_2=-2\ ,\ x_3=3.06\ ,\ x_4=-5.06$
14) $x_1=0\ ,\ x_2=-2$
15) אין פתרונות.
16) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$
17) $x=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},3$
18) $x=-1,2$
19) $x=3,-1$
20) $x=\pm 1,4,6$

# משוואות עם פרמטרים:

## סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים.
את המשתנים מקובל לסמן באותיות $x$ , $y$ , $z$ ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות.
פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר $x$ הוא הנעלם ו- $m$ הוא פרמטר) הוא $x=\frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצאות הפרמטר $m$.

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m\neq 0$.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{1}{3}(a-3x)=\frac{1}{a}(ax-3)$

ג. $(x-2a)(x-2b)=x^2-2(a^2+b^2)$

ד. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

ה. $\frac{x}{a^2-a}-\frac{1}{2a}=\frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a}-\frac{2}{a^3-2a^2+a}$

**2)** פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+my=1\\x+y=m\end{cases}$

ב. $\begin{cases}ax+y=2\\x+ay=4\end{cases}$

ג. $\begin{cases}\frac{x}{m}+y=m\\x-m^2y=1\end{cases}$

ד. $\begin{cases}(m-1)x-(2m+3)y=5\\(m+2)x-(2m-1)y=10m\end{cases}$

ה. $\begin{cases}(2a+b)x-(2a-b)y=8ab\\(2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2\end{cases}$

**3)** פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2-2x+4a=a^2+3$

ג. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

ד. $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}=0$

ה. $(m^2+1)x^2-m^2x-1=0$

ו. $\frac{a}{x}+\frac{1}{b}=\frac{x}{a}+b$

ז. $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=\frac{b-6}{2-b}\ ,\ b\neq 2$ ב. $x=\frac{a^2+9}{6a}\ ,\ a\neq 0$ ג. $x=a+b$ ד. $x=-m$ ה. $x=a+1$

**2)** א. $m\neq 1\ ,\ (m+1,-1)$ ב. $a\neq\pm 1\ ,\ \left(\frac{2a-4}{a^2-1},\frac{4a-2}{a^2-1}\right)$

ג. $m\neq 0-1\ ,\ \left(m^2-m+1,\frac{m-1}{m}\right)$ ד. $m\neq 1,-2\ ,\ (2m+1,m-2)$

ה. $b\neq\pm 2a\ ,\ (2a+b,2a-b)$

**3)** א. $x=m+1,\mathrm{m}-1$ ב. $x=a-1,3-a$ ג. $x=m-5,-2m$

ד. $a\neq 0\ ,\ x\neq\pm a\ ,\ x=\pm a\sqrt{3}$ ה. $x=1,-\frac{1}{m^2+1}$

ו. $a,b\neq 0\ ,\ x=\frac{a}{b},-ab$ ז. $a\neq\pm b\ ,\ x=\frac{a+b}{a-b},\frac{a-b}{a+b}$.

# משוואות עם שורשים:

## סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x}=a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x=a^2 \rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=\left(a\right)^2$.

**הערות:**

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$ שבה $a<0$ אין פתרון.
3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$
2) $\sqrt{x+2}=x$
3) $\sqrt{3x+1}+x=13$
4) $\sqrt{2x+7}+4=x$
5) $\sqrt{x-1}+3=x$
6) $\sqrt{10x+6}+9=x$
7) $\sqrt{x+6}-2=2x$
8) $\sqrt{24-x}+3=2x$
9) $\sqrt{x+16}+4=2x$
10) $2x=16-3\sqrt{x-1}$
11) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$
12) $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$
13) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-5}=\sqrt{11-x^2}$
14) $\sqrt{2x-1}+3=\sqrt{7x+1}$
15) $\sqrt{9x-8}-3\sqrt{x+4}=-2$
16) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$
17) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$
18) $\sqrt{2x-2}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x-2}$
19) $3\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}$

## תשובות סופיות:

1) $x=22$
2) $x=2$
3) $x=8$
4) $x=9$
5) $x=5$
6) $x=25$
7) $x=0.25$
8) $x=3.75$
9) $x=4.25$
10) $x=5$
11) $x=6$
12) $x=4,-3$
13) $x=3$
14) $x=5$
15) $x=12$
16) $x=2,2\frac{8}{9}$
17) $x=6$
18) $x=1$
19) $x=2$

# משוואות עם ערך מוחלט:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

**משוואה עם ערך מוחלט:**

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x|=a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

**1)** $|3x+14|=7$

**2)** $|3x-24|=x$

**3)** $|12-x|=3x$

**4)** $2x-|8-x|=10$

**5)** $|4x-5|=|2x+13|$

**6)** $|14-3x|=2|x+5|$

**7)** $|x|+7=|2x|$

**8)** $|x+2|+6=|2x-4|$

**9)** $|x+2|+|2x-6|=|4x+8|$

**10)** $|10-3x|-|x+4|=|2x-6|$

## תשובות סופיות:

**1)** $x=-\frac{7}{3},\ -7$

**2)** $x=6,12$

**3)** $x=3$

**4)** $x=6$

**5)** $x=9,-1\frac{1}{3}$

**6)** $x=24,\frac{4}{5}$

**7)** $x=\pm 7$

**8)** $x=12,-1\frac{1}{3}$

**9)** $x=0,-12$

**10)** $x=0$

# מערכת משוואות ממעלה שנייה:

## סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

## שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

**1)** $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

**2)** $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ x^2+3y=10 \end{cases}$

**3)** $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

**4)** $\begin{cases} x^2-2y^2=17 \\ xy=-10 \end{cases}$

**5)** $\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 \\ x+6y=1 \end{cases}$

**6)** $\begin{cases} x^2-2xy+8y^2=8 \\ 3xy-2y^2=4 \end{cases}$

**7)** $\begin{cases} x^2-y^2=33 \\ x+y=11 \end{cases}$

**8)** $\begin{cases} 16x^2-y^2=391 \\ 4x-y=23 \end{cases}$

**9)** $\begin{cases} 4xy+x=-15 \\ \frac{3}{y}-2x=16 \end{cases}$

**10)** $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{4}{y}-\frac{1}{x}=-19 \end{cases}$

**11)** $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=21 \\ \frac{8}{x}-\frac{1}{y}=13 \end{cases}$

**12)** $\begin{cases} xy=24 \\ (y-x)^2-7(y-x)+10=0 \end{cases}$

**13)** $\begin{cases} x^2y-xy^2=84 \\ x^2-2xy+y^2+5x-5y=24 \end{cases}$

**14)** $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3} \\ x^2+y^2=9xy+25 \end{cases}$

## תשובות סופיות:

1) $(2,4),(4,2)$

2) $(\pm 4,-2)$

3) $(\pm 2,\pm 1)$

4) $(5,-2),(-5,2)$

5) $\left(-2,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{11},\frac{1}{11}\right)$

6) $\left(3,\frac{1}{2}\right),\left(-3,-\frac{1}{2}\right),(2,1),(-2,-1)$

7) $(7,4)$

8) $(5,-3)$

9) $\left(-5,\frac{1}{2}\right)$ , $\left(-24,-\frac{3}{32}\right)$

10) $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

11) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

12) $(4,6)$ , $(-6,-4)$ , $(3,8)$ , $(-8,-3)$

13) $(-1.65,6.35)$ , $(-6.35,1.65)$ , $(7,4)$ , $(-4,-7)$

14) $(5,45)$ , $(-5,-45)$ , $(45,5)$ , $(-45,-5)$

# משוואות מסכמות מתקדמות:

## סיכום כללי:

**תזכורת מהירה:**

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.

- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.

- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.

- משוואה עם פרמטר/ים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטר/ים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטר/ים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+\sqrt{x+6}-6=0$

2) $x^2+5x-\sqrt{x^2+5x}-30=0$

3) $4x^2+16x-4\sqrt{x^2+4x}-3=0$

4) $2x^2+6x-\sqrt{x^2+3x+5}=5$

5) $x^2-\sqrt{16x^2+48}+7=0$

6) $x^2-\sqrt{6x^2-15}=1$

7) $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

8) $\frac{\sqrt{x^2+4x-12}}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+5}=\frac{7}{\sqrt{x-1}}$

9) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$

10) $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$

11) $\sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}}-\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}=2$

12) $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}$

פתור את המשוואות הבאות עבור $a>0$:

13) $x^2+ax-2a\sqrt{x^2+ax-a^2}=0$

14) $x^2+ax-2a\sqrt{3x^2+3ax-9a^2}=0$

פתור את המשוואות הבאות:

15) $\left|3-\left|2-x\right|+\left|x\right|\right|=1$

16) $\left|4-\left|5-x\right|\right|=\left|x+3\right|$

17) $\left|\frac{x+\left|3-x\right|}{x+2}\right|=18$

18) $\sqrt{25+\left|16x^2-25\right|}=4+4\left|x+1\right|$

19) $\frac{x^3-5x}{\sqrt{2x^2-4x-1}-\left|x\right|+2}=0$

20) הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה: $\frac{\left|x+2\right|}{\left|x\right|+2}=\left|2-x\right|+2$.

## תשובות סופיות:

1) $x=3$
2) $x_1=4\ ,\ x_2=-9$
3) $x_1=0.5\ ,\ x_2=-4.5$
4) $x_1=1\ ,\ x_2=-4$
5) $x_{1,2}=\pm 1$
6) $x_{1,2}=\pm 2$
7) $x=1$.
8) $x=3$.
9) $x=2$.
10) $3.5\le x\le 7$.
11) $x=4$.
12) $x=1\ ,\ x=\frac{9}{16}$.
13) $x_1=-2a\ ,\ x_2=a$
14) $x_1=-2a\ ,\ x_2=3a$
15) $x\le 0$.
16) $x=-1$.
17) $x=-\frac{39}{18},-\frac{33}{18}$.
18) $x=-\frac{1}{4}\ ,\ x\le\frac{5}{4}$.
19) $x=-\sqrt{5}$.
20) שאלת הוכחה.

# ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

## סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

## שאלות:

### פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

**1)** $(x-3)^3$

**2)** $(2y+5)^3$

**3)** $8x^3-1$

**4)** $8y^3+343$

**5)** $a^6-27$

**6)** $x^3y^6z^9-1$

**7)** $11+88x^{12}$

**8)** $64mn^4-8m^4n^7$

**9)** $\dfrac{x^2+4x+4}{x^3+6x^2+12x+8}$

**10)** $\dfrac{x^3+64}{x^2+4x}$

### משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

**11)** $x^3-12x^2+48x-64=0$

**12)** $125x^3=1-15x+75x^2$

**13)** $x^3+x-30=0$

**14)** $x^3-7x-6=0$

### משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

**15)** $2x^3-7x^2+7x-2=0$

**16)** $2x^3+5x^2-2x-5=0$

**מערכת משוואות:**

**17)** פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x^3+y^3=243 \\ x+y=9 \end{cases}$.

**18)** פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x^3-y^3=91 \\ x^2y-xy^2=30 \end{cases}$.

## תשובות סופיות:

**1)** $x^3-9x+27x-27$

**2)** $(2x-1)(4x^2+2x+1)$

**3)** $(a^2-3)(a^4+3a^2+9)$

**4)** $8(1+2x^4)(1-2x^4+4x^8)$

**5)** $\frac{1}{x+2}$

**6)** $x=4$

**7)** $x=3$

**8)** $x_{1,2,3}=\frac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ 2$

**9)** $(3,6)\ ,\ (6,3)$

**10)** $8y^3+60y^2+150y+125$

**11)** $(2y+7)(4y^2-17y+49)$

**12)** $(xy^2z^3-1)(x^2y^4z^6+xy^2z^3+1)$

**13)** $8mn^4(2-mn)(4+2mn+m^2n^2)$

**14)** $\frac{x^2-4x+16}{x}$

**15)** $x=\frac{1}{-}$

**16)** $x_{1,2,3}=-2\ ,\ -1\ ,\ 3$

**17)** $x_{1,2,3}=-2.5\ ,\ -1\ ,\ 1$

**18)** $(-5,-6)\ ,\ (6,5)$

# מתמטיקה למדעים

## פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

### תוכן העניינים

1. אי שוויונים ממעלה ראשונה ..... 69
2. אי שוויונים ממעלה שנייה ..... 71
3. אי שוויונים ממעלה שלישית ..... 72
4. אי שוויונים עם מנה ..... 73
5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו ..... 75
6. שאלות מסכמות ..... 76
7. מציאת תחום הגדרה ..... 78
8. אי שוויונים עם ערך מוחלט ..... 80
9. אי שוויונים עם שורשים ..... 83

# אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

**פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:**

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

**פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:**

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $45x-26>109$

**2)** $6x>2(3x-1)$

**3)** $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

**4)** $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

**5)** $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

**6)** $4(6x-8)<8(3x-4)$

**7)** $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\geq 12-x$

**8)** $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

## תשובות סופיות:

1) $x>3$
2) כל $x$
3) אף $x$
4) $x>-2$
5) $x<5$
6) אף $x$
7) $x\geq 12$
8) $x>-13$

# אי-שוויונים ממעלה שנייה:

## סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2+bx+c \begin{matrix}>\\<\end{matrix} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $x^2<144$

**2)** $x^2-12x>-32$

**3)** $(x+2)(x+5)<0$

**4)** $(x+2)(x+4)<35$

**5)** $-x^2+13x+30<0$

**6)** $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

**7)** $(x-5)^2+x(x+2)<89$

**8)** $(5x+6)^2\leq 4(x-3)^2$

**9)** $-3x^2+12x>0$

**10)** $x^2-10x+25>0$

**11)** $(x-3)^2>(x-1)(x+6)-x^2-3x$

**12)** $2x^2+2x+24\geq 0$

## תשובות סופיות:

**1)** $-12<x<12$

**2)** $x<4\ ,\ x>8$

**3)** $-5<x<-2$

**4)** $-9<x<3$

**5)** $x<-2\ ,\ x>15$

**6)** $x\leq 7\ ,\ x\geq 11$

**7)** $-4<x<8$

**8)** $-4\leq x\leq 0$

**9)** $0<x<4$

**10)** $x>5\ ,\ x<5$

**11)** $x<3\ ,\ x>5$

**12)** כל $x$

# אי-שוויונים ממעלה שלישית:

## סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3-4x^2+4x+1>0$ , $x^4+2x^2+1<0$ וכו'.

בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.

לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

**2)** $x(x^2+x+1)>0$

**3)** $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

**4)** $x^3-25x\ge 0$

**5)** $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

**6)** $(x^2+8x+20)(3x-5)\le 0$

**7)** $(x^2-x-6)(x-1)<0$

**8)** $x^3-6x^2+9x\le 0$

**9)** $(x^2+6)(x+3)>0$

**10)** $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

## תשובות סופיות:

**1)** $1<x<2$ , $x>3$

**2)** $x>0$

**3)** $-2\le x\le -1$ , $x\ge \frac{1}{2}$

**4)** $-5\le x\le 0$ , $x\ge 5$

**5)** $x>2$

**6)** $x\le 1\frac{2}{3}$

**7)** $x<-2$ , $1<x<3$

**8)** $x\le 0$ , $x=3$

**9)** $x>-3$

**10)** $x<1$ , $2<x<4$

# אי-שוויונים עם מנה:

## סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (או $\frac{f(x)}{g(x)}<0$) נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$ ו-$g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4}<0$ בו: $f(x)=2x+4$ ו-$g(x)=x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

**הערות:**

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

**2)** $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

**3)** $\frac{1}{x^2-16}>0$

**4)** $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

**5)** $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

**6)** $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

**7)** $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

**8)** $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

**9)** $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

**10)** $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

## תשובות סופיות:

1) $-3<x<1\ ,\ x>3$

2) $x<-\frac{2}{3}\ ,\ x\geq-\frac{1}{2}$

3) $x<-4\ ,\ x>4$

4) $2<x<3\ ,\ x>3$

5) $\frac{1}{2}\leq x<5$

6) $x>1$

7) $x>-2$

8) $2<x<3$

9) $1\leq x\leq 6$

10) $x<2\ ,\ x>6$

# אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

## סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שיווינים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a<b$ וגם $b<c$, ניתן לכתוב: $a<b<c$.

מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שיווינים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $3<x+1<5$

**2)** $0<\frac{1}{x+4}<2$

**3)** $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

**4)** $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

**5)** $6x-38\le x-3\le 5x+7$

**6)** $6<\frac{2x+10}{3}\le\frac{7x-20}{5}$

**7)** $-1\le\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

**8)** $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

## תשובות סופיות:

**1)** $2<x<4$

**2)** $x>-3\frac{1}{2}$

**3)** $x>0$

**4)** $x<2\frac{2}{5}\ ,\ x>2\frac{2}{3}$

**5)** $-2.5\le x\le 7$

**6)** $x\ge 10$

**7)** $1\le x<13$

**8)** $\phi$

# שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $x \le -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \le 5 \cup 0 < x < 8\}$

**2)** $x(x+5)-3x+15 \le 2x-1-x(4-x)$

**3)** $\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \le 0$

**4)** $\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$

**5)** $\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \ge 0$

**6)** $x(x+3)(2x-5) < 0$

**7)** $\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$

**8)** $\frac{5-2x}{(x-8)^2} \le 0$

**9)** $\frac{x-3}{x^2+2} > 0$

**10)** $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$

**11)** $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$

**12)** $\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$

**13)** $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$

**14)** $\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \ge \frac{x}{x-4}-\frac{x}{x-2}$

**15)** $6 < 5x-x^2 \cap x^2 > 3x+10$

**16)** $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$

**17)** $1 < \frac{x-1}{x-4} \le 2$

**18)** לאלו ערכי $x$ נמצאת הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה $g(x)=\frac{x+1}{x+3}$?

## תשובות סופיות:

1) $-2 < x \le -\frac{3}{4}$

2) $x \le -4$

3) $-4 \le x < 2 \ , \ 3 \le x$

4) $x < -7 \ , \ -\frac{1}{3} < x < 2 \ , \ x > 5$

5) $-1 < x \le 1.5 \ , \ 4 < x \le 12$

6) $x < -3 \ , \ 0 < x < 2.5$

7) $x < -1 \ , \ 2 < x < 6 \ , \ x > 6$

8) $2.5 \le x < 8 \ , \ x > 8$

9) $x > 3$

10) $x < -3 \ , \ 0 < x < 1 \ , \ x > 4$

11) $-1 < x < 0 \ , \ 1 < x < 3 \ , \ x > 3$

12) $x > 7$

13) $x < -2 \ , \ 2 < x < 4$

14) $x \le 0 \ , \ 1 \le x < 2 \ , \ x > 4$

15) אף $x$

16) $x \ne 1$

17) $x \ge 7$

18) $-3 < x < -\frac{3}{5} \ , \ x > 3$

# תחום הגדרה:

## שאלות:

**1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-4}$

ב. $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

ג. $f(x)=\sqrt{12x-x^2-x^3}$

ד. $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$

ה. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$

ו. $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

**2)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

**3)** תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1\le x\le 4$.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$.

**4)** תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x>2\ ,\ x\le -2$.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$.

**5)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+6}-a}$ , ($a$ פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות $a$ את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.
ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים.
מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר $a$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1 \, , \, x \geq 6$ ג. $x \leq -4 \, , \, 0 \leq x \leq 3$

ד. $-5 \leq x < -2 \, , \, x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2 \, , \, x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3} \, , \, 1 \leq x < \frac{3}{2} \, , \, x > \frac{3}{2}$

**2)** א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2} \, , \, x \geq 1$

ד. $-2 \leq x \neq 1 \, , \, x \leq -3$.

**3)** $a = 5$.

**4)** $a = 2$.

**5)** א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$.

# אי שוויונים עם ערך מוחלט:

## סיכום כללי:

**כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:**

| מקרה | $\lvert x\rvert < a$ | $\lvert x\rvert > a$ |
|---|---|---|
| פתרון | $-a < x < a$ | $x < -a \cap x > a$ |

**כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:**

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

## שאלות:

**1)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\lvert x+2\rvert < 3$

ב. $\lvert 2x+1\rvert > 7$

ג. $\lvert 6-2x\rvert < x$

ד. $\lvert 2x+1\rvert - 3x > 4$

**2)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1 < \lvert 4-3x\rvert < 7$

ב. $\lvert 2x+3\rvert < 8 < \lvert 5-x\rvert$

**3)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\lvert x^2+6x-4\rvert < 12$

ב. $\lvert x^2+x-10\rvert > 3x-2$

ג. $\lvert x^2-3x\rvert < 4$

ד. $\lvert 6x^2-7x-4\rvert > 1$

ה. $x^2-6\lvert x\rvert+5 \le 0$

ו. $x^2-6\lvert x+1\rvert-1 > 0$

**4)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x-3|+|2x+2|>7$

ב. $|x+8|<11-|1-3x|$

ג. $|3-2x|-11>4-|6+x|$

ד. $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

ה. $|5+4x|-|3-x|+\left|4-\frac{1}{2}x\right|\le 22$

ו. $|x+3|+|x^2-5x+4|<19$

**5)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\ge 3$

ב. $1\le\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\le 2$

ג. $\frac{|x-6|+8x}{x-12}\le 12$

ד. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|>5$

**6)** פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

א. $\sqrt{x^2-|x-12|}<x$

ב. $2-\sqrt{1-x}\le|x+2|-3$

ג. $\sqrt{|2x+1|-x-1}\le 4-|3x|$

ד. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $-5<x<1$ ב. $3<x$ או $x<-4$

ג. $2<x<6$ ד. $x<-1$.

**2)** א. $1\frac{2}{3}<x<3\frac{2}{3}$ או $-1<x<1$ ב. $-5\frac{1}{2}<x<-3$

**3)** א. $-2<x<2$ או $-8<x<-4$ ב. $4<x$ או $x<2$

ג. $-1<x<4$ ד. $x<-\frac{1}{2}$ , $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$ , $x>\frac{5}{3}$

ה. $1\le x\le 5$ או $-5\le x\le -1$ ו. $x<-5$ , $x>7$

**4)** א. $2<x$ או $x<-2$ ב. $-1<x<1$

ג. $4<x$ או $x<-6$ ד. $4<x$ או $x<-1$

ה. $-7\frac{3}{7}\le x\le 4$ ו. $-2<x<6$.

**5)** א. $2<x$ , $\frac{7}{6}\le x<2$ ב. $x\ge 6$ , $0\le x\le\frac{2}{3}$

ג. $46\le x$ , $x<12$ ד. $2<x\le 4$ , $1<x<2$ , $\frac{1}{2}<x<1$

**6)** א. $x=-1$ , $x\ge 3$ , $x\ne 12$ ב. $x\le\frac{-15+\sqrt{33}}{2}$

ג. $-1\le x\le -\frac{2}{3}$ , $0\le x\le 1$ ד. $-1<x<\sqrt[3]{4}$

# אי שוויונים עם שורשים:

## סיכום כללי:

**מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:**

| מקרה | אי השוויון | פתרון |
|---|---|---|
| $a\geq 0$ | $\sqrt{f(x)}<a$ | $0\leq f(x)<a^2$ |
| $a<0$ | $\sqrt{f(x)}<a$ | אין פתרון |
| | $\sqrt{f(x)}>a$ | כל $x$ בת.ה. של $f(x)$ |

## שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

**1)** $\sqrt{x+3}<7$

**2)** $\sqrt{2x-5}\geq 1$

**3)** $\sqrt{2x^2+5x-6}>2-x$

**4)** $\sqrt{x^2+x-6}<x-3$

**5)** $\sqrt{x^2+3x+2}-1<\sqrt{x^2-x+1}$

**6)** $\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x^2-x+1}<1$

**7)** $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>\frac{3}{2}$

**8)** $\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$

**9)** $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$

**10)** $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x}$

**11)** $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$

**12)** $\sqrt{1+\frac{9}{x}}+5\sqrt{\frac{x}{x+9}}\geq 4$

## תשובות סופיות:

1) $-3 \le x < 46$.
2) $x \ge 3$.
3) $x > 1 \ , \ x < -10$.
4) $\varnothing$.
5) $-1 \le x < \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \ , \ x \le -2$.
6) $-2 \le x < \frac{-13+\sqrt{73}}{16} \ , \ x \le -3$.
7) $\frac{12}{25} < x \le \frac{1}{2}$.
8) $x < 2\sqrt{5} - 4$.
9) $1 < x \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.
10) $-\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \le 1$ שזה: $-2.618 < x \le 1$.
11) $2.5 \le x < 3$.
12) $x > 0 \ , \ x < -9$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 4 - חקירת משוואה ממעלה ראשונה

### תוכן העניינים

1. פתרון משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטר ..... 85
2. חקירת משוואות ממעלה ראשונה ..... 86
3. חקירה של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה ..... 89
4. חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם שורשים ..... 94
5. חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם ערך מוחלט ..... 95

# פתרון משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטר:

## סיכום כללי:

**שלבי עבודה:**

- נפתור את המשוואה.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למשוואה על ידי הצבתו במשוואה המקורית.

## שאלות:

**1)** פתרו את המשוואה: $kx+6k=2x+3k^2$.

**2)** פתרו את המשוואה: $a^2(x-1)=3ax+4(x-a)$.

**3)** פתרו את מערכת המשוואות: $\begin{cases}2kx+5y=2k^2\\2x-y=-10\end{cases}$.

**4)** פתרו את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}bx-(1-2b)y=1\\(2b+1)x+3(by-1)=0\end{cases}$

## תשובות סופיות:

**1)** $x=3k \quad (k\neq 2)$.

**2)** $x=\frac{a}{a+1}$.

**3)** $(k-5,2k)$.

**4)** $\left(\frac{2-b}{b(b+1)},\frac{1}{b+1}\right)$ , $b\neq 0$ , $\pm 1$

# חקירה של משוואה ממעלה ראשונה:

## שאלות:

**1)** נתונה המשוואה הבאה: $m^2(2x-1)=9(x-1)-x(6+5m)$.

מצאו לאילו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ומצאו אותו).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

**2)** נתונה המשוואה: $k^2(5-2x)=3(15-2kx)$.

א. מצאו לאלו ערכי $k$ למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אף פתרון.

iii. אינסוף פתרונות.

ב. מצאו לאלו ערכי $k$ פתרון המשוואה:

i. חיובי.

ii. מקיים את אי-השוויון: $2x-3>x$.

**3)** נתונה המשוואה: $\frac{mx}{m-2}=\frac{2m}{m-5}-\frac{6x}{m^2-7m+10}$.

מצאו לאלו ערכי $m$ למשוואה:

א. פתרון יחיד.

ב. אף פתרון.

ג. אינסוף פתרונות.

**4)** לפניכם המשוואה: $m\cdot\frac{x-1}{x}-\frac{m+6}{m}=\frac{-3}{x}$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. האם עבור ערכי ה-$m$ הנותנים אינסוף פתרונות, כל $x$ יהיה פתרון של המשוואה?

ד. עבור אלו ערכי $m$ יהיה פתרון המשוואה גדול מ-2?

**5)** נתונה המשוואה: $x\left(m^2-9\right)=2\left(m\left(3x+1\right)+1-x\right)$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. חקרו את המשוואה ומצא עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. עבור איזה ערך של $m$ פתרון המשוואה יהיה: $x=2$?

**6)** נתונה המשוואה: $\frac{5}{k-4}-\frac{kx}{3k+15}=\frac{k^2+29}{k^2+k-20}$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. האם קיים ערך של $k$ עבורו יש למשוואה אינסוף פתרונות?

ג. עבור איזה ערך של $k$ פתרון המשוואה הוא: 4-?

**7)** לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{m^2x}{m-5}+\frac{2mx-m^2+1}{m-5}=1$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

**8)** לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{\left(m^2+1\right)x-4}{x-2}=m+1$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

**9)** לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{5m-2}{mx-1}=-3$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

**10)** לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{x}{x+m+2}=\frac{x+1}{x-m+1}$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $m\neq -3\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{m-3}{2m-1}$ ב. $m=-3$ ג. $m=\frac{1}{2}$

**2)** א. 1. $k\neq 0,3$ 2. $k=0$ 3. $k=3$.

ב. 1. $k>0$ או $k<-3$ וגם $k\neq 3$ 2. $0<k<15$ וגם $k\neq 3$.

**3)** א. $m\neq 2\ ,\ 3\ ,\ 5$ ב. $m=2\ ,\ 3\ ,\ 5$ ג. אף $m$.

**4)** א. $m\neq 3\ ,\ x=\frac{1}{m+2}$ ב. פתרון יחיד: $m\neq 0,-2,3$, אף פתרון: $m=0,-2$, אינסוף פתרונות: $m=3$.

ג. לא, רק: $x\neq 0$.

ד. $-2<m<-1.5$.

**5)** א. $m\neq 7,-1\ ,\ x=\frac{1}{m-7}$ ב. פתרון יחיד: $m\neq 7,-1$, אף פתרון: $m=7$,

אינסוף פתרונות: $m=-1$.

**6)** א. $k\neq 0,4,-5\ ,\ x=\frac{3}{k}-3$ ב. אף $k$ ג. $k=-3$.

**7)** א. $m\neq 0\ ,\ -2\ ,\ 5$ ב. אף $m$ ג. $m=0\ ,\ -2\ ,\ 5$

**8)** א. $m\neq 0\ ,\ \pm 1$ ב. $m=1$ ג. $m=0\ ,\ -1$

**9)** א. $m\neq 0\ ,\ \frac{2}{5}$ ב. אף $m$ ג. $m=\frac{2}{5}\ ,\ 0$

**10)** א. $m\neq 0\ ,\ -1\ ,\ -2\ ,\ -\frac{1}{2}$ ב. אף $m$ ג. $m=0\ ,\ -1\ ,\ -2\ ,\ -\frac{1}{2}$

# חקירה של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

**שלבי עבודה:**

- נפתור את מערכת המשוואות.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למערכת על ידי הצבתו.

**המשמעות הגרפית של חקירת מערכת משוואות ממעלה ראשונה:**

בהינתן מערכת שתי משוואות מהצורה: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ נאמר כי:

אם: $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ אז הישרים נחתכים (כלומר למערכת פתרון יחיד).

אם: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ אז הישרים מקבילים (כלומר למערכת אף פתרון).

אם: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ אז הישרים מתלכדים (כלומר למערכת אינסוף פתרונות).

## שאלות:

**1)** נתונה מערכת המשוואות: $\begin{cases} x+3ay=a \\ ax+3y=4a-3 \end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי $a$ למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אף פתרון.

iii. אינסוף פתרונות.

ב. מצאו לאלו ערכי $a$ נקודת החיתוך בין הישרים (המיוצגים על ידי המשוואות) נמצאת ברביע השלישי.

**2)** נתונות מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}(m+4)x+5y=m+8\\x+my=m+2\end{cases}$.

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למערכת:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. פתרון המערכת מייצג נקודה במערכת צירים.
הוכיחו כי נקודה זו נמצאת על הישר: $y(m-1)=2(m-1)x+4-m$.

ד. עבור אלו ערכי $m$ פתרון המערכת:

i. יהיה ברביע השני.

ii. יהיה מתחת לציר ה-$x$.

iii. יהיה מימין לציר ה-$y$.

**3)** לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-2x+3y=\left(k-\frac{x}{2}\right)^2+4\\x-10=k(1-y)\end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי $k$ יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

**4)** לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}k(x-1)=1-2y\\\frac{2x+3}{k}=3-y\end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי $k$ יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

**5)** לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} k^2(1-x)=k+9x+12y \\ x=1-\dfrac{2(y+1)}{k} \end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי $k$ יש למערכת המשוואות:
   i. פתרון יחיד.
   ii. אינסוף פתרונות.
   iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

**6)** נתונה מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} (2-k)x-y=k \\ 3x+ky=-1 \end{cases}$.

א. מצאו את הערך של $k$ עבורו $(2,7)$ הוא פתרון של מערכת המשוואות.

ב. האם יש למשוואה פתרונות נוספים עבור הערך של $k$ שמצאת בסעיף הקודם?

ג. האם קיים ערך של $k$ עבורו למערכת המשוואות לא יהיו פתרונות כלל?
אם כן מצאו אותו.

**7)** לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} ax+b^2y=a^2 \\ 3x+by=9b \end{cases}$.

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. הראו שכאשר $a=3b$ יש למערכת אינסוף פתרונות.

ג. עבור אלו ערכי $a$ ו- $b$ הפתרון היחיד של המערכת יהיה $(4,3)$?

**8)** לפניך מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} amx+y=m^2 \\ bx+my=-9m \end{cases}$.

א. מצאו ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ אם ידוע כי כאשר $m=4$ פתרון המשוואה הוא $(4,0)$.

ב. הוכיחו את הטענות הבאות:
   i. לכל ערך של $m$ יש למערכת פתרון ממשי.
   ii. פתרון המערכת תמיד יהיה $(m,0)$.

ג. העזרו בסעיף הקודם וקבע איזו משוואה מבין שלושת המשוואות הבאות לא תכיל את הפתרון היחיד הנ"ל:
   i. $7y+2m=2x$.
   ii. $my=2x-m$.
   iii. $m(y-mx)=2x-m(m^2+2)$.

**9)** לפניך הישרים הבאים: $\begin{cases} x+(k-9)y=8 \\ x-\dfrac{14y}{k}=1 \end{cases}$.

א. עבור אלו ערכי $k$ הישרים הללו מקבילים?

ב. הביעו באמצעות $k$ את נקודת החיתוך של הישרים.

ג. עבור איזה ערך של $k$ נקודת החיתוך של הישרים תהיה על הישר: $y=x-8$?

**10)** לפניכם שני הישרים: $\begin{cases} (k^2+6)x+ay=15 \\ kx+ay=3 \end{cases}$, $a,k$ פרמטרים, $a\neq 0$.

א. הוכיחו כי לכל ערך של $k$ הישרים הללו נחתכים.

ב. מצאו את $a$ אם ידוע כי כאשר $k=6$ נקודת החיתוך היא $\left(\frac{1}{3},1\right)$.

ג. עבור איזה ערך של $k$ נקודת החיתוך תהיה $(2,1)$?

ד. הראו כי נקודת החיתוך של הישרים נמצאת על גרף הפונקציה: $\frac{4y}{x}=k^2-5k+6$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. i. $a\neq\pm1$ ii. $a=-1$ iii. $a=1$ ב. $-1<a<0$

**2)** א. $\left(\frac{m-2}{m-1},\frac{m}{m-1}\right)$ , $m\neq1,-5$

ב. פתרון יחיד: $m\neq1,-5$ , אינסוף פתרונות: $m=-5$ , אף פתרון: $m=1$.

ג. הוכחה.

ד. i. $1<m<2$ ii. $0<m<1$ iii. $m\neq-5$ , $m<1$ , $m>2$.

**3)** א. i. $k\neq3,-1$ ii. $k=3$ iii. $k=-1$ ב. $\left(\frac{k^2+3k+10}{k+1},\frac{8}{k+1}\right)$.

**4)** א. i. $k\neq0,\pm2$ ii. $k=2$ iii. $k=0,-2$ ב. $\left(\frac{k-3}{k+2},\frac{3k+1}{k+2}\right)$.

**5)** א. i. $k\neq0,3$ ii. $k=3$ iii. $k=0$ ב. $\left(\frac{k-4}{k-3},\frac{6-k}{2k-6}\right)$.

**6)** א. $k=-1$ ב. כן. ג. $k=3$.

**7)** א. $\left(a+3b,-\frac{3a}{b}\right)$ ג. $b=2$ , $a=-2$.

**8)** א. $a=1$ , $b=-9$ ג. ii

**9)** א. $k=2,7$ ב. $\left(\frac{k^2-9k+112}{k^2-9k+14},\frac{7k}{k^2-9k+14}\right)$ ג. $k=8$

**10)** א. הוכחה. ב. $a=1$ ג. $k=1$.

# חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם שורשים:

## שאלות:

**1)** לפניכם המשוואה: $(m-1)x=\sqrt{m-1}$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

**2)** לפניכם המשוואה: $\frac{x-m}{\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x-2}=\frac{mx}{\sqrt{3x-2}}$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

## תשובות סופיות:

**1)** א. פתרון יחיד: $m>1$ והוא: $x=\frac{1}{\sqrt{m-1}}$ ב. $m=1$ ג. $m<1$.

**2)** א. פתרון יחיד: $\frac{6}{5}<m<4$ והוא: $x=\frac{m+2}{4-m}$. ב. אינסוף: $\varnothing$. ג. אף פתרון: $m\geq 4$ , $m\leq\frac{6}{5}$.

# חקירה של משוואות ממעלה ראשונה עם ערך מוחלט:

## סיכום כללי:

הגדרת ערך מוחלט: $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

- משוואה מהצורה: $|A|=|B|$ תפוצל לשתי משוואות: $A=B$ או: $A=-B$.
  יש לחקור כל מקרה בנפרד ולאחד פתרונות.
- עבור משוואות המכילות ביטויים עם ערכים מוחלטים יש להפריד עבור כל מקרה לפי הגדרת הערך המוחלט. לבסוף יש לאחד פתרונות.
- למשוואה מהצורה: $|x|=k$ (כאשר $x$ הוא המשתנה ו- $k$ הוא פרמטר) יתכנו:
  - שני פתרונות אם $k>0$.
  - פתרון אחד (והוא $x=0$) אם $k=0$.
  - אף פתרון אם $k<0$.

## שאלות:

**1)** חקור את המשוואה הבאה: $|x-2m|=|x+1|$.

**2)** חקור את המשוואה הבאה: $|mx-3x|=|x-m|$.

**3)** חקור את המשוואה הבאה: $\frac{mx^2}{|x|-1}-m|x|=2m+1$.

**4)** נתונה מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}y+|x-2|=3\\ |x+y|=m\end{cases}$.

מצא עבור אלו ערכי $m$ יש למערכת:

א. פתרון אחד בלבד.

ב. שני פתרונות שונים.

ג. אינסוף פתרונות.

## תשובות סופיות:

**1)** פתרון יחיד: $m \neq -\frac{1}{2}$. אף פתרון: $\varnothing$. אינסוף: $m = -\frac{1}{2}$.

**2)** פתרון יחיד: $m = 0$ והוא $x = 0$. אף פתרון: $\varnothing$.

שני פתרונות: $m \neq 0$ והם: $x_{1,2} = -\frac{2m}{3}, \frac{12m}{5}$.

**3)** עבור: $m = -\frac{1}{2}$ יש פתרון יחיד: $x = 0$.

עבור: $m > 0$ , $-\frac{1}{2} < m < 0$ , $m < -1$ יש שני פתרונות.

עבור: $m = 0$ , $-1 < m < -0.5$ אין פתרון כלל.

**4)** א. $m = 0, m > 5$ ב. $0 < m < 5$ ג. $m = 5$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 5 - חקירת משוואה ממעלה שנייה

### תוכן העניינים

1. פתרון משוואות ממעלה שנייה עם פרמטר ..... 97
2. חקירה של משוואה ממעלה שנייה ..... 98
3. חקירות עם קדקוד פרבולה ..... 107

# פתרון משוואות ממעלה שנייה עם פרמטר:

## סיכום כללי:

משוואות מהצורה: $ax^2+bx+c=0$ המכילות פרמטר כלשהו, $m$, המגולם בתוך הביטויים של המקדמים $a$, $b$ ו-$c$ נקראות משוואות עם פרמטר.

פתרון של משוואה עם פרמטר יתבצע באופן רגיל, אך יכול להכיל את הפרמטר.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואה: $x^2+mx-12m^2=0$.

**2)** פתור את המשוואה: $2x^2+5m^2=(11m+1)x-5m$.

## תשובות סופיות:

**1)** $x_1=3m$ , $x_2=-4m$.

**2)** $x_1=5m$ , $x_2=\frac{m+1}{2}$.

# חקירה של משוואה ממעלה שנייה:

## סיכום כללי:

### המשוואה הריבועית:

תהא המשוואה הריבועית: $ax^2+bx+c=0$ כאשר $a\neq 0$.
נגדיר: $\Delta=b^2-4ac$ ונאמר כי:

- למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים אם: $\Delta>0$.
- למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד אם: $\Delta=0$.
- למשוואה לא יהיו שני פתרונות ממשיים כלל אם: $\Delta<0$.

אם $a=0$ תתקבל משוואה ליניארית מהצורה: $bx+c=0$.

- למשוואה זו יהיה פתרון ממשי אחד אם $b\neq 0$.
- למשוואה לא יהיו פתרונות כלל אם: $b=0$ ו-$c\neq 0$.

אם $b=0$ וגם $c=0$ למשוואה יהיו אינסוף פתרונות ממשיים.

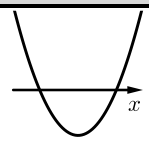
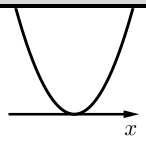
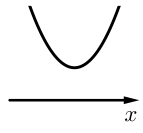
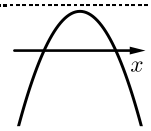
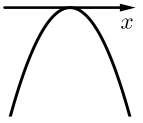
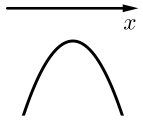
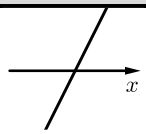
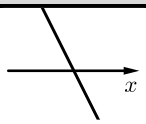
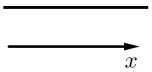
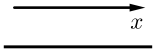
### הפונקציה הריבועית:

תהא הפונקציה הריבועית: $y=ax^2+bx+c$ כאשר $a\neq 0$.
נגדיר: $\Delta=b^2-4ac$ ונאמר כי לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה-$x$ באופן הבא:

- אם $a>0$ תתקבל פרבולה ישרה (מחייכת):
  - עבור $\Delta>0$ הפרבולה תחתוך את ציר ה-$x$ בשתי נקודות שונות.
  - עבור $\Delta=0$ הפרבולה תשיק לציר ה-$x$ (חיתוך בנקודה אחת).
  - עבור $\Delta<0$ הפרבולה תהיה מרחפת (ללא חיתוך עם ציר ה-$x$ כלל).
- אם $a>0$ תתקבל פרבולה הפוכה (עצובה):
  - עבור $\Delta>0$ הפרבולה תחתוך את ציר ה-$x$ בשתי נקודות שונות.
  - עבור $\Delta=0$ הפרבולה תשיק לציר ה-$x$ (חיתוך בנקודה אחת).
  - עבור $\Delta<0$ הפרבולה תהיה מרחפת (ללא חיתוך עם ציר ה-$x$ כלל).

- אם $a=0$ תתקבל פונקציה ליניארית: $y=bx+c$ ולה:
  - עבור $b>0$ יתקבל ישר עולה החותך את ציר ה-$x$ ב-$\left(-\frac{c}{b},0\right)$.
  - עבור $b<0$ יתקבל יורד עולה החותך את ציר ה-$x$ ב-$\left(-\frac{c}{b},0\right)$.
- אם $b=0$ יתקבל ישר $y=c$ וכעת:
  - אם $c>0$ הישר כולו מעל לציר ה-$x$ ומקביל לו.
  - אם $c<0$ הישר כולו מתחת לציר ה-$x$ ומקביל לו.
  - אם $c=0$ הישר מתלכד עם ציר ה-$x$.

ניתן לסכם את כל המקרים באופן הבא:

| פירוט מילולי | תנאים | $\Delta>0$ | $\Delta=0$ | $\Delta<0$ |
|---|---|---|---|---|
| תיאור גרפי של $y=ax^2+bx+c$ עבור $a\neq 0$ | $a>0$ |  |  |  |
| | $a<0$ |  |  |  |
| | | $b>0$ | $b<0$ | |
| תיאור גרפי של $y=bx+c$ כאשר $a=0$ ו-$b\neq 0$ | $a=0$ $b\neq 0$ |  |  | |
| | | $c>0$ | $c<0$ | $c=0$ |
| תיאור גרפי של $y=c$ כאשר $a=0$ ו-$b=0$ | $a=0$ $b=0$ |  |  |  |

## שאלות:

**1)** נתונה המשוואה: $(3-m)x^2+4mx-2m=0$ , $(m\neq 3)$.

מצא לאלו ערכי $m$ למשוואה:

א. שני פתרונות ממשיים שונים.

ב. פתרון ממשי אחד.

ג. אין פתרונות ממשיים כלל.

**2)** נתונה הפונקציה: $y=2mx^2+mx-1$.

מצא לאלו ערכי $m$ הפונקציה אינה חותכת את ציר ה-$x$.

**3)** נתונה הפונקציה: $y=(m^2-9)x^2+(m+3)x+4$ , $(m\neq\pm 3)$.

מצא לאלו ערכי $m$ הפונקציה נמצאת מעל ציר ה-$x$ לכל ערך של $x$.

**4)** נתון אי השוויון: $mx^2>(m+4)(x-1)-x^2$.

מצא לאלו ערכי $m$ אי השוויון מתקיים לכל ערך של $x$.

**5)** נתונה המשוואה הבאה: $-m(x-1)^2+2(m+16)=x(6-x(2m-3))+1$.

א. מצא עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

i. שני פתרונות ממשיים שונים.

ii. פתרון ממשי אחד.

iii. אף פתרון ממשי.

ב. מצא את הפתרון היחיד עבור ערכי ה-$m$ המתאימים במידה והוא קיים.

**6)** נתונה המשוואה הבאה: $m^2x(9x+1)+1=0$.

א. מצא עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

i. שני פתרונות ממשיים שונים.

ii. פתרון ממשי אחד.

iii. אף פתרון ממשי.

ב. מצא את הפתרון היחיד עבור ערכי ה-$m$ המתאימים במידה והוא קיים.

**7)** נתונה המשוואה: $mx^2-(9m+4)x+20m+16=0$.

א. הראה שעבור כל ערך של $m$ יש למשוואה לפחות פתרון ממשי אחד.

ב. פתור את משוואה והראה כי אחד השורשים הוא מספר קבוע שאינו תלוי ב-$m$.

**8)** לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=(m^2-m-2)x^2+2(m-2)x+4$.

ענה על השאלות הבאות:

א. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$x$ בשתי נקודות שונות?

ב. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$x$ בנקודת אחת בלבד?

ג. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה לא חותך את ציר ה-$x$ כלל?

ד. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה חיובי לכל ערך של $x$?

ה. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה שלילי לכל ערך של $x$?

**9)** נתונה הפונקציה: $f(x)=kx^2-5kx+6k+1$.

א. עבור אלו ערכי $k$ גרף הפונקציה יהיה כולו מעל לציר ה-$x$?

ב. עבור איזה ערך של $k$ יתקבל גרף פרבולה הנוגעת בציר ה-$x$?

**10)** עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה: $f(x)=(k^2-5k-6)x^2+(2-3k)x+2$ הוא אי-שלילי לכל ערך של $x$?

**11)** נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2+4x+2m+2$ ו-$g(x)=(1-m)x^2-3mx-1.5$.

א. מצא עבור אלו ערכי $m$ נחתכים הגרפים של הפונקציות:

i. בשתי נקודות שונות.

ii. בנקודה אחת בלבד.

iii. באף נקודה.

ב. מצא לאלו ערכי $m$ יהיה גרף הפונקציה $f(x)$ כולו מתחת לגרף הפונקציה $g(x)$.

**12)** נתונה הפונקציה: $f(x)=2kx^2+6kx+8k+2$.

א. עבור איזה ערך של $k$ גרף הפונקציה יהיה ישר העובר ברביעים הראשון והשני בלבד?

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=kx^2-6x-10$.

ב. האם קיימים ערכי $k$ עבורם גרף הפונקציה $f(x)$ הוא מעל גרף הפונקציה $g(x)$ לכל $x$? הראה חישוב מתאים.

ג. הוכח כי קיים ערך של $k$ עבורו גרפים של שתי הפונקציות משיקים זה לזה ומצא אותו.

**13)** נתונה הפונקציה הריבועית: $f(x)=2x^2-(5m+7)x+3m^2+8m+5$.

א. הראה כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$x$ לפחות פעם אחת לכל ערך של $m$.

ב. מצא את שורשי הפונקציה.

ג. עבור אלו ערכי $m$ סכום השורשים גדול מ-3.5.

ד. מהם שורשי הפונקציה כאשר: $m=0$?

**14)** נתונה המשוואה הבאה: $(k+1)x^2+(k^2-4k-5)x-54=0$.

א. ענה על שני החלקים הבאים:

i. עבור אלו ערכי $k$ יהיו פתרונות המשוואה שני מספרים נגדיים?

ii. מהם פתרונות המשוואה עבור ערכי ה-$k$ שמצאת?

ב. הראה כי לא קיים ערך של $k$ עבורו פתרונות המשוואה:

$(k-4)x^2+(6k-k^2-8)x+5k-10=0$ הם מספרים נגדיים.

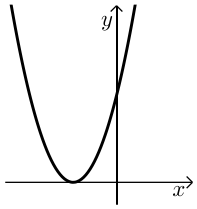
**15)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=mx^2+(m-2)x+m^2+3m-10$.

א. מצא עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ב. מצא את נקודות החיתוך שבין הגרפים המתקבלים עבור כל ערכי ה-$m$ שמצאת בסעיף א'.

**16)** מצא עבור אלו ערכי $m$ למשוואה: $(4-m)x^2+(m+2)x+m^2-12m-28=0$ יהיו שני פתרונות ממשיים שונים שאחד מהם הוא אפס.

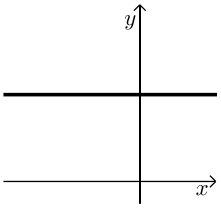
**17)** נתונה משפחת הפרבולות הבאה: $f(x)=2x^2+(m+1)x+m^2+2m-2.5$.




א. מצא ערך של $m$ עבורו גרף הפרבולה השייכת למשפחת הפונקציות הנ"ל היא מהצורה:

ב. עבור ערך ה-$m$ שמצאת בסעיף הקודם מצא את התחום של $k$ עבורו יהיה לגרף הפרבולה ולישר $y=kx-4$ שתי נקודות חיתוך.

**18)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=(m^2-5m+4)x^2+(2m-2)x+1$.



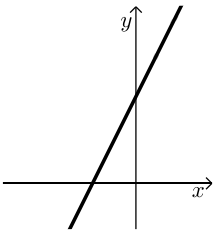

א. עבור אלו ערכים של $m$ הפונקציה תחתוך את ציר ה-$x$ בשתי נקודות שונות?

ב. מצא ערך של $m$ עבורו גרף הפונקציה השייך למשפחת הפונקציות הנ"ל יהיה מהצורה שבצד, וכתוב את משוואת הישר המתקבלת במקרה זה.

ג. הגרף שאת משוואתו מצאת בסעיף הקודם חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות שונות. הראה כי אחת מהן אינה תלויה ב-$m$.

ד. עבור אלו ערכי $m$ נקודת החיתוך שתלויה ב-$m$ תהיה מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם?

**19)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4x(mx+2)+4-m}{4}$, $m$ פרמטר חיובי.




א. הראה כי לכל הגרפים המייצגים את משפחת הפונקציות הנ"ל יש נקודת חיתוך עם ציר ה-$x$ שאינה תלויה ב-$m$ ומצא את נקודה זו.

ב. עבור איזה ערך של $m$ גרף הפונקציה יהיה מיוצג ע"י ישר מהצורה:

ג. הראה כי קיים תחום של $x$ אשר לא תלוי ב-$m$ ובו גרף הפונקציה נמצא תמיד מתחת לישר שמצאת בסעיף הקודם ומצא את תחום זה.

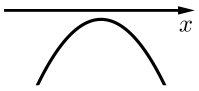
**20)** נתונה הפונקציה: $f(x)=3m^2x^2+4mx+2$.

א. הוכח כי הפונקציה נמצאת תמיד מעל לציר ה-$x$ עבור כל ערך של $m$.

ב. מגדירים פונקציה חדשה באופן הבא: $y=\frac{mx^2+2x(m+2)+m}{3m^2x^2+4mx+2}$.

מצא עבור אלו ערכי $m$ הפונקציה $y$ היא שלילית.

**21)** נתונה הפונקציה: $f(x)=mx^2+(2m+1)x-\frac{1}{4}$.




א. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה השייך למשפחת הפונקציות הנ"ל יהיה מהצורה:

ב. מגדירים פונקציה חדשה באופן הבא: $y=\frac{(m^2-9)x^2+(m+3)x-1}{mx^2+(2m+1)x-\frac{1}{4}}$.

הראה כי הפונקציה $y$ חיובית בתחום שמצאת בסעיף הקודם.

ג. דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $y$ עם ציר ה-$y$ מעבירים ישר המקביל לציר ה-$x$.

i. כתוב את משוואת ישר זה.

ii. מצא עבור אלו ערכים של $m$ גרף הפונקציה חותך את הישר בנקודה שבה: $x=-9$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $m>0$ או $m<-3$ וגם $m\neq 3$ ב. $m=0\ ,\ -3$ ג. $-3<m<0$.

**2)** $-8<m\leq 0$.

**3)** $m>3\frac{2}{5}$ או $m<-3$.

**4)** $m>0$.

**5)** א. i. $m>3$ ii. אף $m$ iii. $m<3$.

ב. לא קיים מקרה בו יש למשוואה פתרון יחיד.

**6)** א. i. $m<-6\ ,\ m>6$ ii. $m=\pm 6$ iii. $m\neq 0\ ,\ -6<m<6$

ב. בשני המקרים יתקבל: $x=-\frac{1}{18}$.

**7)** א. מתקבל: $\Delta=(m+4)^2$ שתמיד אי-שלילי ובמקרה הלא-ריבועי מתקבלת משוואה עם פתרון אחד.

ב. $\frac{5m+4}{m}$, $m_{1,2}=4$.

**8)** א. $-2<m<2\ ,\ m\neq -1$ ב. $m=-1,-2$ ג. $m<-2\ ,\ m\geq 2$

ד. $-2<m<-1\ ,\ m=2$. ה. אף $m$.

**9)** א. $0\leq k<4$ ב. $k=4$.

**10)** $-26\leq k\leq -2$.

**11)** א. i. $m<-8\ ,\ m>-2\ ,\ m\neq 0$ ii. $m=0,-2,-8$ iii. $-8<m<-2$.

ב. $-8<m<-2$.

**12)** א. $k=0$ ב. לא. אין פתרון לאי-שוויון: $f(x)>g(x)$.

ג. עבור אי-השוויון של סעיף ב' מתקבל: $\Delta=4(k+3)^2$ ולכן כאשר $k=-3$ הגרפים נוגעים זה בזה בנקודה אחת.

**13)** א. הוכחה. ב. $x_{1,2}=m+1\ ,\ 1.5m+2.5$

ג. $m>0$ ד. $x_{1,2}=1\ ,\ 2.5$.

**14)** א. i. $k=5$ ii. $x=\pm 3$ ב. הוכחה.

**15)** א. $m=2,-5$ ב. $(-1,2)\ ,\ (0,0)$.

**16)** $m=14$.

**17)** א. $m=1$. כאשר: $m=-3$ נקבל גרף: $y=2x^2-2x+0.5$ המשיק לציר $x$ מימין לראשית ולכן נפסל.

ב. $k<-4\ ,\ k>8$.

**18)** א. $m>1\ ,\ m\neq 4$ ב. $m=1\ ,\ f(x)=1$ ג. הנקודה היא: $(0,1)$

ד. $m<4\ ,\ m\neq 1$.

**19)** א. הנקודה היא: $(-0.5,0)$ ב. $m=0$ ג. $-0.5<x<0.5$.

**20)** א. מתקבל: $\Delta = -8m^2$ ולכן לגרף הפרבולה אין חיתוכים כלל ומכיוון ש-A אי-שלילי הרי שמדובר בפרבולה מרחפת חיובית. במקרה הישר מתקבל ישר המקביל לציר ה-$x$ שגם כן כולו חיובי.
ב. מאחר והמכנה תמיד חיובי (ממקודם) יש לדרוש תנאים שיקיימו מונה שלילי ($a<0$ , $\Delta<0$ - עבור המונה) נקבל: $m<-1$.

**21)** א. $-1<m<-\frac{1}{4}$ ב. הוכחה. ג. i. $y=4$

ii. $m=5$ , $-1\frac{7}{9}$.

# חקירות עם קדקוד פרבולה:

## סיכום כללי:

תהא הפונקציה הריבועית: $y=ax^2+bx+c$ כאשר $a\neq 0$. נגדיר: $\Delta=b^2-4ac$.

התיאור הגרפי של הפונקציה הריבועית הוא פרבולה.

עבור $a\neq 0$ נקבל כי קדקוד הפרבולה הוא: $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

- שאלות העוסקות בקדקוד חיובי/שלילי נדרוש: $-\frac{\Delta}{4a}>0$ או $-\frac{\Delta}{4a}<0$ בהתאמה.
- שאלות העוסקות בקדקוד הנמצא מימין/משמאל לציר ה-$y$ נדרוש $-\frac{b}{2a}>0$ או $-\frac{b}{2a}<0$ בהתאמה.
- שאלות העוסקות בקדקוד שנמצא מעל/מתחת לישר $y=n$ או מימין/משמאל לישר $x=k$ נדרוש $-\frac{\Delta}{4a}\gtrless n$ ו-$-\frac{b}{2a}\gtrless k$ בהתאמה.
- שאלות העוסקות בקדקוד שבאחד הרביעים נדרוש $-\frac{b}{2a}\gtrless 0$ ו-$-\frac{\Delta}{4a}\gtrless 0$ לפי הרביע המבוקש.

## שאלות:

**1)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(m+3)x^2+(3m+14)x+2m+7$.

א. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה הוא פרבולה החותכת את ציר ה-$x$ בשתי נקודות?

ב. הבע באמצעות $m$ את שיעורי קדקוד הפרבולה של גרף הפונקציה הנתונה.

ג. עבור אלו ערכי $m$ קדקוד הפרבולה יהיה וודאי מתחת לישר: $y=-4$?

ד. עבור אלו ערכי $m$ מתקיימים התנאים של סעיף א' ו-ג' יחד?

**2)** נתונה הפרבולה הבאה: $f(x)=x^2-3(m-2)x+2m^2-8m+7$.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. גרף הפרבולה חותך את ציר ה-$x$ בשתי נקודות עבור כל ערך של $m$.

ii. קדקודי כל הפרבולות המיוצגות ע"י תבנית הפונקציה הנתונה נמצאים מתחת לציר ה-$x$.

ב. עבור איזה ערך של $m$ גרף הפרבולה יחתוך את ציר ה-$x$ בשתי נקודות הנמצאות באותו מרחק מראשית הצירים?

ג. עבור ערך ה-$m$ שמצאת בסעיף הקודם מצא את נקודות החיתוך על ציר ה-$x$.

ד. הראה כי קדקוד הפרבולה המתקבלת בעת הצבת ערך ה-$m$ הנ"ל נמצא על ציר ה-$y$.

**3)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\left(m^2-2m-3\right)x^2+8x+0.5$.

א. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה הוא פרבולה?

ב. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה הוא פרבולה החותכת את ציר ה-$x$ בשתי נקודות?

ג. הבע באמצעות $m$ את שיעורי קדקוד הפרבולה.

ד. הוכח כי קדקודי כל הפרבולות נמצאים על הישר: $2y=8x+1$ עבור כל ערך של $m$ עבורו מתקבלת פרבולה.

**4)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\left(k^2-2k+15\right)x^2+kx+12$.

א. הוכח כי עבור כל ערך של $k$ גרף הפונקציה לא נוגע בציר ה-$x$ כלל.

ב. הוכח כי קדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י התבנית הנ"ל תמיד מעל לציר ה-$x$.

ג. עבור איזה ערך של $k$ קדקוד הפרבולה יהיה על ציר ה-$y$?

ד. מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה במקרה זה.

**5)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\left(k^2-9\right)x^2+(k+3)x-1$.

א. עבור אלו ערכי $k$ גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה-$x$?

ב. הבע באמצעות $k$ את שיעורי קדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י התבנית של $f(x)$.

ג. מצא עבור אלו ערכי $k$ קדקוד הפרבולה יהיה ברביע הראשון.

ד. האם קיים ערך של $k$ עבורו קדקוד הפרבולה נמצא על ציר ה-$y$? נמק את תשובתך.

**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(m^2-4)x^2+5mx+6$.

א. הראה כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$ לפחות פעם אחת עבור כל ערך של $m$.

ב. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה הוא פרבולת מינימום?

ג. הראה כי קדקוד הפרבולה המתקבל עבור ערכי ה-$m$ שמצאת בסעיף הקודם נמצא תמיד מתחת לציר ה-$x$.

**7)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(m^2-8m+12)x^2+(m-2)x+2$.

א. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה יהיה כולו מעל לציר ה-$x$?

ב. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה הוא פרבולה מרחפת חיובית שקדקודה משמאל לישר: $x=-\frac{1}{2}$.

ג. האם ייתכן כי גרף הפונקציה יכול להיות פרבולת מקסימום שקדקודה הוא משמאל לישר: $x=-\frac{1}{2}$? נמק והראה חישוב מתאים.

**8)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=(m^2-4)x^2+2x+1$ , $g(x)=(m+2)x^2+(5-m)x+3$.

א. ענה על השאלות הבאות:

i. מצא ערך של $m$ עבורו הגרפים משיקים זה לזה.

ii. מצא ערך של $m$ עבורו הגרפים חותכים זה את זה בנקודה אחת בלבד.

iii. הסבר מדוע בכל מקרה התקבל ערך $m$ שונה.

ב. עבור אלו ערכי $m$ הגרפים של הפונקציות הם פרבולות מינימום המקיימות שקדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י הפונקציה $f(x)$ נמצא מימין לקדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י $g(x)$?

**9)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=(m^2-9)x^2+7x+5$ , $g(x)=(m-3)x^2+(4m-3)x+1$.

א. עבור אלו ערכי $m$ הגרפים נחתכים בשתי נקודות שונות?

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. עבור איזה ערך של $m$ הגרפים הם פרבולות נוגעות זו בזו?

ii. עבור איזה ערך של $m$ הגרפים חותכים זה את זה בנקודה אחת בלבד.

iii. הסבר את ההבדל בין הערכים של $m$ שהתקבלו בחלק i ובחלק ii.

ג. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ד. עבור אלו ערכי $m$ הסכום של שיעורי ה-$x$ של נקודות קדקודי הפרבולות של שתי הפונקציות יהיה קטן מ-1?

## תשובות סופיות:

**1)** א. $m\neq -3\ ,\ m>-4\ ,\ m<-28$ ב. $\left(\frac{-3m-14}{2m+6},\frac{-m^2-32m-112}{4m+12}\right)$

ג. $m>-3$ ד. $m>-3$.

**2)** א. i. מתקבל: $\Delta=m^2-4m+8$ שחיובי תמיד.

ii שיעור ה-$y$ של הקדקוד הוא: $-\frac{\Delta}{4}$ אשר שלילי תמיד. ב. $m=2$

ג. $(\pm 1,0)$ ד. הקדקוד: $(0,-1)$.

**3)** א. $m\neq -1,3$ ב. $-5<m<7\ ,\ m\neq -1,3$ ג. $\left(\frac{-4}{m^2-2m-3},\frac{m^2-2m-35}{2\left(m^2-2m-3\right)}\right)$

ד. יש להציב את הקדקוד בישר ולקבל שוויון אמת.

**4)** א. המקדם $a$ תמיד חיובי ומתקבל: $\Delta=-47k^2+96k-720$ שתמיד שלילי.

מכאן שמדובר בפרבולה מרחפת עבור כל $k$. ג. $k=0$ ד. $(0,12)$

**5)** א. $-3\le k<1.8$ ב. $\left(\frac{1}{2(3-k)},\frac{9-5k}{4(k-3)}\right)$ ג. $1.8<k<3$.

ד. לא. מכיוון שלא קיים ערך של $k$ עבורו שיעור ה-$x$ של קדקוד הפרבולה יהיה אפס.

**6)** א. מתקבל: $\Delta=m^2+96$ המעיד כי תמיד יש לפונקציה שני חיתוכים וכאשר $m=\pm 2$ מתקבלים שני ישרים החותכים את ציר ה-$x$. ב. $m<-2\ ,\ m>2$.

**7)** א. $m\le 2\ ,\ m>6\frac{4}{7}$. ב. $6\frac{4}{7}<m<7$. ג. לא.

**8)** א. i. $m=-1\frac{4}{9}$ ii. $m=-2$ iii. במקרה i מדובר בפרבולות אשר

יכולות להשיק ובמקרה ii מדובר בשני ישרים אשר רק נחתכים. ב. $3<m<4$.

**9)** א. $m\neq 3,-2\ ,\ m<3\frac{1}{16}$ ב. i. $m=3\frac{1}{16}$ ii. $m=3,-2$

iii. במקרה i מדובר במשוואה ריבועית ובנקודת השקה, ובמקרה ii מדובר במשוואה ליניארית ובנקודת חיתוך.

ג. עבור $m=-2$ מתקבלת: $\left(-\frac{2}{9},3\frac{16}{81}\right)$, עבור: $m=3$ מתקבלת: $(2,19)$.

ד. $m<-3\ ,\ -2.72<m<1.22\ ,\ m>3$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 6 - נוסחאות וייטה

### תוכן העניינים

1. הגדרת נוסחאות וייטה וחישובים יסודיים ..... 111
2. חקירת משוואות עם נוסחאות וייטה ..... (ללא ספר)

# הגדרת נוסחאות וייטה וחישובים יסודיים:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

נתונה הפונקציה הריבועית: $y=ax^2+bx+c$, כאשר: $\Delta>0$ , $a\neq 0$.

אם $x_1$ ו- $x_2$ הם שורשי המשוואה: $ax^2+bx+c=0$ אז מתקיים: $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ , $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$.

לקשרים אלו קוראים בשם **נוסחאות וייטה** והם תקפים רק במשוואה ריבועית שבה $\Delta>0$.

## שאלות:

**1)** לפניך משוואות ריבועיות. מבלי לפתור, מצא את הסכום ואת מכפלת השורשים שלהם:

א. $x^2+5x-8=0$.

ב. $3x^2-7x+4=0$.

ג. $x^2+9x-14=0$.

ד. $13x-6x^2+7=0$.

**2)** נתונה משוואה ריבועית: $ax^2+3x+5=0$. מצא את $a$ אם ידוע כי למשוואה שני שורשים ממשיים שונים אשר סכומם הוא 3.

**3)** נתונה משוואה ריבועית: $\alpha x^2+(\beta-\alpha)x-16=0$ , ($\alpha$ , $\beta$ פרמטרים).
מצא את ערכי הפרמטרים $\alpha$ ו- $\beta$ אם ידוע כי למשוואה שני שורשים ממשיים שונים אשר סכומם הוא 2- ומכפלתם היא 16-.

**4)** כתוב משוואה ריבועית אשר לה שני שורשים ממשיים שונים, $x_1$ ו- $x_2$ שמקיימים: $x_1+x_2=5$ ו- $x_1\cdot x_2=-2$.
כמה משוואות כאלה תיתכנה? נמק.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x_1+x_2=-5\ ,\ x_1x_2=-8$ ב. $x_1+x_2=2\frac{1}{3}\ ,\ x_1x_2=1\frac{1}{3}$

ג. $x_1+x_2=-9\ ,\ x_1x_2=-14$ ד. $x_1+x_2=\frac{6}{13}\ ,\ x_1x_2=\frac{7}{13}$.

**2)** $a=-1$.

**3)** $\alpha=1\ ,\ \beta=3$.

**4)** אם $a=1$ אז: $x^2-5x-2=0$.

יש אינסוף משוואות מהצורה: $ax^2-5ax-2a=0$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 7 - בעיות מילוליות

### תוכן העניינים

1. הקדמה כללית ..... 113
2. בעיות תנועה בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים ..... 115
3. בעיות תנועה עם אחוזים ..... 118
4. בעיות תנועה עם משפט פיתגורס ..... 119
5. בעיות תנועה - מהירות מושפעת מזרמים ..... 120
6. בעיות תנועה - מהירות ממוצעת ..... 121
7. בעיות תנועה שונות ..... 122
8. בעיות הספק ..... 125
9. שאלות שונות ..... 127
10. בעיות תערובת ..... 135

# הקדמה כללית:

| | |
|---|---|
| **הגדרה:** | אחוז אחד הוא מאית השלם. |
| **בעיית תנועה:** | זמן × מהירות = דרך. |
| **בעיית הספק:** | הספק × זמן = עבודה. |

**הערות:**

- אם לא צוין אחרת, המהירויות בכל שאלה קבועות.
- אם לא צוין אחרת, ההספקים בכל שאלה קבועים.

## שאלות:

**1)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. כמה הם 20% מ-300?

ב. כמה הם 120% מ-300?

ג. מהו המספר הגדול מ-300 ב-20%?

**2)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. חולצה עלתה 240 ₪ והתייקרה ב-30%. מה מחירה כעת?

ב. נעליים עלו 450 ₪ והוזלו ב-40%. מה מחירם כעת?

**3)** מכונית נסעה במהירות 80 קמ"ש ואז הורידה את מהירותה ב-20%.
מה מהירותה כעת?

**4)** אופנוע נסע במהירות $x$ והעלה את מהירותו ב-30%.
בטא באמצעות $x$ את מהירותו כעת.

**5)** צינור מילא בריכה בקצב של $x$ ליטר בשעה.
לאחר מכן ירד הספק המילוי שלו ב-20% ולבסוף עלה הספק המילוי שלו ב-30%.
בטא באמצעות $x$ את הספק המילוי שלו כעת.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 60 ב. 360 ג. 360

**2)** א. 312 ₪ ב. 270 ₪

**3)** 64 קמ"ש.

**4)** $1.3x$

**5)** $1.04x$

# בעיות תנועה בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים:

## שאלות:

**1)** מכונית נוסעת מ-A ל-B במהירות של 90 קמ״ש. בדרך חזרה נסעה המכונית במהירות של 60 קמ״ש. בסה״כ נמשכה הנסיעה הלוך וחזור 20 שעות.

א. כמה שעות נסעה המכונית לכל כיוון?

ב. מהי הדרך שעברה המכונית?

**2)** אוטובוס ומשאית יוצאים בו זמנית משני יישובים A ו-B בהתאמה. מהירות האוטובוס היא 60 קמ״ש ומהירות המשאית היא 80 קמ״ש. האוטובוס הגיע ליישוב B שעה ו-40 דקות מאוחר יותר מהזמן שלקח למשאית להגיע ליישוב A.

א. כמה זמן נסע האוטובוס וכמה זמן נסעה המשאית?

ב. מהו המרחק בין שתי הערים?

**3)** הולכת רגל יצאה לטיול במהירות מסוימת. לאחר שעה וחצי יצא בעקבותיה מאותו מקום הולך רגל נוסף במהירות הגדולה ממהירותה ב-4.5 קמ״ש. הולך הרגל השיג את הולכת הרגל שעה לאחר שיצא לדרכו.

א. מהי מהירות ההליכה של הולכת הרגל?

ב. מהו המרחק שעברו עד שנפגשו?

**4)** שני רוכבי אופניים יוצאים בו זמנית מעיר א׳ לעיר ב׳. הרוכב הראשון נוסע במהירות קבועה ומגיע לעיר ב׳ לאחר 5 שעות. הרוכב השני נוסע במשך השעתיים הראשונות במהירות הקטנה ב-2 קמ״ש ממהירות הרוכב הראשון. לאחר מכן הוא מגביר את מהירותו ב-14 קמ״ש ומגיע לעיר ב׳ שעה ו-20 דקות לפני הרוכב הראשון.

א. באיזו מהירות נסע הרוכב הראשון?

ב. איזו דרך עבר הרוכב השני בכל חלק?

**5)** משאית נוסעת מרחק של 245 ק״מ בכל יום במהירות קבועה.
יום אחד נסעה המשאית במשך שעתיים וחצי במהירות הרגילה, לאחר מכן עצרה לתדלוק במשך 24 דקות ואז המשיכה בנסיעה במהירות הגדולה ב-70 קמ״ש ממהירותה הקודמת. המשאית הגיעה ליעדה שעה לפני השעה שהיא מגיעה בכל יום.

א. באיזו מהירות נוסעת המשאית בכל יום?

ב. כמה זמן לוקח למשאית להגיע ליעדה בכל יום?

**6)** רוכב אופניים יצא בשעה 06:00 לרכיבה במהירות 24 קמ"ש. בשעה 07:00 יצא מאותו מקום רוכב אופנוע באותו כיוון ובמהירות של 40 קמ"ש.
באיזו שעה ובאיזה מרחק מנקודת היציאה ישיג רוכב האופנוע את רוכב האופניים?

**7)** אוטובוס נוסע מעיר א' לעיר ב' הרחוקה ממנה ב-800 ק"מ. לאחר שעבר האוטובוס 135 ק"מ במהירות קבועה הוא עצר להתרעננות במשך חצי שעה.
לאחר מכן המשיך האוטובוס את נסיעתו במהירות הגדולה ב-43 קמ"ש ממהירותו הקודמת עד לעיר ב'. סך כל הזמן שהיה האוטובוס בדרך הוא 7 שעות.

א. מה הייתה המהירות ההתחלתית של האוטובוס?

ב. מה היה המרחק שעבר האוטובוס אחרי ההתרעננות עד לעיר ב'?

**8)** המרחק בין ת"א לנצרת הוא 103 ק"מ. בשעה 08:00 יצאה מכונית מנצרת לת"א במהירות 90 קמ"ש. בשעה 08:20 יצאה משאית מת"א לנצרת במהירות 56 קמ"ש. באיזו שעה ייפגשו המכונית והמשאית?

**9)** משאית נסעה מדימונה לאילת, מרחק של 200 ק"מ. 50 דקות אחריה יצאה מכונית מדימונה לאילת במהירות הגבוהה ב-30 קמ"ש והגיעה לאילת 40 דקות לפני המשאית. מצא את מהירות המכונית.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 8 שעות הלוך ו-12 שעות חזור ב. 720 ק״מ.

**2)** א. אוטובוס – 6 שעות ו-40 דקות, משאית – 5 שעות. ב. 400 ק״מ.

**3)** א. 3 קמ״ש ב. 7.5 ק״מ.

**4)** א. 12 קמ״ש ב. 20 ק״מ ו-40 ק״מ.

**5)** א. 50 קמ״ש ב. 4 שעות ו-54 דקות.

**6)** 8:30, 60 ק״מ.

**7)** א. 90 קמ״ש ב. 665 ק״מ.

**8)** 8:50.

**9)** 80 קמ״ש.

## בעיות תנועה עם אחוזים:

### שאלות:

**10)** מכונית נסעה במהירות מסוימת במשך שעתיים. אחר כך העלתה את מהירותה ב-25% ונסעה עוד שעה וחצי. בסך הכול עברה המכונית 310 ק״מ. מה הייתה מהירותה ההתחלתית של המכונית?

**11)** מכונית נוסעת מעיר א׳ לעיר ב׳ מרחק של 480 ק״מ במהירות קבועה. בדרכה חזרה נסעה המכונית במשך שעה במהירות הקבועה. לאחר מכן עצרה להתרעננות של 36 דקות ואז הגבירה את מהירותה ב-25% ממהירותה הקודמת והגיעה בחזרה לעיר א׳ 24 דקות פחות מהזמן שלקח לה להגיע לעיר ב׳. באיזו מהירות נסעה המכונית מעיר א׳ לעיר ב׳?

**12)** רכבת משא ורכבת נוסעים יוצאות מעיר א׳ לעיר ב׳ מרחק של 360 ק״מ. מהירות רכבת הנוסעים גדולה ב-20% ממהירות רכבת המשא. רכבת הנוסעים התעכבה 40 דקות בתחנה, ולכן יצאה באיחור מהתחנה של עיר א׳. עם זאת היא הגיעה לעיר ב׳ 20 דקות לפני רכבת המשא.

א. מה הן המהירויות של שתי הרכבות?

ב. כמה זמן נסעה רכבת הנוסעים מעיר א׳ לעיר ב׳?

**13)** מכונית ומונית נוסעות מנקודה A לנקודה B. המכונית נוסעת במהירות קבועה ומגיעה לנקודה B כעבור 4 שעות. המונית נוסעת במשך 3 שעות המהירות הקטנה ב-10 קמ״ש ממהירות המכונית ולאחר מכן מגבירה את מהירותה ב-50% ומגיעה לנקודה B יחד עם המכונית.

א. מהי מהירות המכונית?

ב. מהו המרחק בין נקודה A לנקודה B?

### תשובות סופיות:

**10)** 80 קמ״ש.

**11)** 80 קמ״ש.

**12)** א. 60 קמ״ש, 72 קמ״ש. ב. 5 שעות.

**13)** א. 90 קמ״ש. ב. 360 ק״מ.

# בעיות תנועה עם משפט פיתגורס:

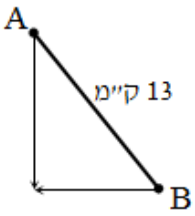
## שאלות:

**14)** שתי מכוניות יצאו מהעיר, האחת לכיוון מזרח והשנייה לכיוון צפון.
לאחר שלוש שעות המרחק בין שתי המכוניות היה 300 ק"מ.
מהירות מכונית אחת גדולה ב-20 קמ"ש ממהירות המכונית השנייה.

א. מהן המהירויות של שתי המכוניות?

ב. מה היה המרחק של כל מכונית מהעיר לאחר שלוש שעות?

**15)** שני הולכי רגל יוצאים משני יישובים A ו-B המרוחקים זה מזה 13 ק"מ. היישוב A ממוקם בצפון מערב ביחס ליישוב B כמתואר באיור ממול.




הולך הרגל מיישוב A הולך דרומה והולך הרגל מיישוב B הולך מערבה. הולך הרגל מיישוב A יוצא שעתיים לפני הולך הרגל השני. לאחר שלוש שעות מיציאתו נפגשו שני הולכי הרגל.
מהירות הולך הרגל מיישוב B גדולה ב-25% ממהירות הולך הרגל השני.
באיזו מהירות הלך כל אחד משני הולכי הרגל?

**16)** רוכב אופנוע יצא מביתו מזרחה במהירות מסוימת ונסע במשך חצי שעה.
לאחר מכן, פנה צפונה, הגדיל את מהירותו ב-20% ונסע כך שעה נוספת.
לאחר שעה זו פנה חזרה לכיוון ביתו, העלה את מהירותו ל-65 קמ"ש ונסע (בקו ישר) עד שהגיע חזרה לביתו.

א. מצא את מהירותו של רוכב האופנוע ביציאה מביתו אם ידוע שעבר בסך הכול 150 ק"מ.

ב. מה הייתה מהירותו הממוצעת של רוכב האופנוע (בכל חלקי הדרך)?

## תשובות סופיות:

**14)** א. 60 קמ"ש ו-80 קמ"ש. ב. 180 ק"מ ו-240 ק"מ.

**15)** 4 קמ"ש ו-5 קמ"ש.

**16)** א. 50 קמ"ש. ב. 60 קמ"ש.

# בעיות תנועה – מהירות מושפעת מזרמים:

## שאלות:

**17)** סירה שטה בנהר שבו מהירות הזרם היא 3 קמ״ש עם כיוון זרם המים.
לאחר חצי שעה החליטו אנשי הסירה לשנות את כיוונם וחזרו במשך שעתיים לנקודת המוצא שלהם.
מהירות הסירה במים עומדים קבועה במשך כל השייט.

א. מצא את מהירות הסירה.

ב. מהו המרחק הכולל ששטה הסירה?

## תשובות סופיות:

**17)** א. 5 קמ״ש ב. 8 ק״מ.

# בעיות תנועה – מהירות ממוצעת:

## שאלות:

**18)** מכונית נוסעת 3 שעות במהירות קבועה של 140 קמ״ש ולאחר מכן במשך שעתיים נוספות במהירות קבועה של 100 קמ״ש.

א. מה סך הדרך שעברה המכונית?

ב. מהי המהירות הממוצעת של המכונית?

**19)** מכונית נוסעת 4 שעות במהירות של 130 קמ״ש ולאחר מכן מספר שעות נוספות במהירות של 70 קמ״ש. ידוע כי מהירותה הממוצעת היא 110 קמ״ש. כמה שעות נסעה המכונית במהירות של 70 קמ״ש?

**20)** אופנוע עובר מרחק של 200 ק״מ במהירות מסוימת. לאחר מכן מאיץ האופנוע ומגדיל את מהירותו ב-40%. הוא נוסע במהירות זו ועובר מרחק של 280 ק״מ. המהירות הממוצעת של האופנוע היא 96 קמ״ש.

א. כמה זמן נסע האופנוע?

ב. באיזו מהירות התחיל האופנוע את נסיעתו?

## תשובות סופיות:

**18)** א. 620 ק״מ. ב. 124 קמ״ש.

**19)** שעתיים.

**20)** א. 5 שעות. ב. 80 קמ״ש.

## בעיות תנועה שונות:

### שאלות:

**21)** המרחק בין ת״א לקריית שמונה הוא 180 ק״מ. שני רוכבי אופנוע יצאו בו זמנית, האחד מת״א לקריית שמונה והשני מקריית שמונה לת״א. כעבור 45 דקות הרוכבים עדיין לא נפגשו והמרחק ביניהם היה 52.5 ק״מ. רוכב האופנוע שיצא מת״א הגיע ליעדו 15 דקות לפני שהרוכב השני הגיע ליעדו.
מצא את מהירויות רוכבי האופנוע.

**22)** רכבת נוסעת בקו ת״א – ב״ש במשך שעה ורבע.
יום אחד, לאחר חצי שעת נסיעה, הייתה תקלה ברכבת והיא נאלצה לעצור ל-10 דקות עד שהתקלה תוקנה. כדי לנסות ולהגיע ליעדה בזמן העלתה את מהירותה ב-10 קמ״ש בהמשך הדרך והגיעה ליעדה באיחור קל של 5 דקות בלבד. מצא את מהירות הרכבת.

**23)** אדם הולך ברגל מביתו למקום העבודה שלו במהירות מסוימת.
יום אחד יצא מביתו מאוחר מאוד ולכן נאלץ להגביר את מהירות ההליכה שלו ב-3 קמ״ש. הוא הגיע לעבודה בזמן והדרך ארכה מחצית מהזמן שבדרך כלל היא אורכת. מצא את מהירות ההליכה של האדם (בשגרה).

**24)** שני הולכי רגל הולכים זה לקראת זה, האחד מנקודה A לנקודה B והשני מנקודה B לנקודה A הם נפגשים כעבור חצי שעה וממשיכים ליעדם.
הולך הרגל הראשון הגיע לנקודה B 25 דקות לפני שהולך הרגל השני הגיע לנקודה A. מצא את היחס בין מהירויות הולכי הרגל.

**25)** היישובים A ו-B נמצאים על גדת נהר בעל זרם קבוע.
יום אחד, יצאה ספינה מיישוב A ליישוב B במהירות מסוימת.
שעה לאחר מכן יצאה ספינה שנייה מיישוב B ליישוב A וכעבור שעתיים פגשה את הספינה הראשונה. הספינות המשיכו ליעדן וחזרו חזרה ליישוב המוצא באותו יום. למחרת, שוב יצאה הספינה מיישוב A ליישוב B אך במהירות כפולה מביום הקודם. הספינה מיישוב B יצאה גם היא במהירות כפולה לכיוון היישוב A אך הפעם רק חצי שעה אחרי שיצאה הספינה הראשונה. כעבור שעה עוד לא פגשה את הספינה הראשונה אך הייתה במרחק של שני ק״מ ממנה.
מצא את עוצמת הזרם אם ידוע שכיוונו מיישוב A ליישוב B.

**26)** שלושה רוכבי אופנוע יצאו מירושלים לאילת ונסעו דרך עין גדי.
המרחק בין עין גדי לאילת הוא 240 ק"מ. שלושת הרוכבים יצאו מירושלים בהפרשי זמן קבועים והגיעו לעין גדי באותו זמן. הרוכב שיצא ראשון הגיע לאילת שעה אחרי שהגיע לשם הרוכב שיצא שני. הרוכב שיצא שלישי הגיע לאילת ומיד פנה חזרה ופגש את הרוכב שיצא ראשון במרחק 80 ק"מ מאילת.
מצא את מהירויות רוכבי האופנוע.

**27)** מכונית ואופנוע יצאו באותו זמן מנקודה A לנקודה B.
כשהאופנוע היה באמצע הדרך הייתה המכונית במרחק 16 ק"מ מנקודה B.
כשהאופנוע היה במרחק 6 ק"מ מנקודה B המכונית הייתה במרחק 12 ק"מ מנקודה B.

א. מצא את המרחק בין הנקודה A לנקודה B.

ב. פי כמה גדולה מהירות האופנוע ממהירות המכונית?

**28)** דן ורן עורכים מרוץ לאורך מסלול של 10 ק"מ. מהירותו של דן גדולה ב-5 קמ"ש ממהירותו של רן. שניהם יצאו למרוץ באותו זמן ודן הגיע לקו הסיום יותר מ-20 דקות לפני רן. מהו תחום המספרים בו נמצאת מהירותו של רן?

**29)** רכבת נוסעת בקו ת"א – ב"ש במשך שעה ורבע. יום אחד, לאחר חצי שעת נסיעה, הייתה תקלה ברכבת והיא נאלצה לעצור ל-10 דקות עד שהתקלה תוקנה. כדי לנסות ולהגיע ליעדה בזמן העלתה את מהירותה ב-10 קמ"ש בהמשך הדרך והגיעה ליעדה באיחור קל שלא עלה על 5 דקות (שים לב – הרכבת הגיעה <u>באיחור</u>, אך איחור זה לא עלה על 5 דקות).
מצא את תחום המספרים בו נמצאת מהירות הרכבת.

**30)** שלושה חברים הלכו מבית הספר לספורטק בהליכה מהירה.
מהירותו של הראשון הייתה גדולה ב-8 קמ"ש ממהירותו של השני וב-$m$ קמ"ש ממהירותו של השלישי, לכן, הגיע הראשון $m$ שעות לפני השני ושעתיים לפני השלישי.

א. הבע באמצעות $m$ את מהירותו וזמן הליכתו של החבר הראשון.

ב. לאלו ערכים של $m$ יש לבעיה פתרון?

## תשובות סופיות:

**21)** 90 קמ"ש, 80 קמ"ש.

**22)** 80 קמ"ש.

**23)** 3 קמ"ש.

**24)** 1.5.

**25)** 4 קמ"ש.

**26)** 60 קמ"ש, 80 קמ"ש, 120 קמ"ש.

**27)** א. 24 ק"מ ב. 1.5.

**28)** 10 קמ"ש $< x <$ 0 קמ"ש.

**29)** 80 קמ"ש $> x >$ 35 קמ"ש.

**30)** א. $v = \frac{8m(m-2)}{m^2-16}$ , $t = \frac{2m(8-m)}{m^2-16}$ ב. $4 < m < 8$.

# בעיות הספק:

## שאלות:

**1)** טבח הכין פנקייקים בקצב קבוע במשך שעתיים. אחר כך העלה את קצב עבודתו ב-25% והכין פנקייקים עוד שעה וחצי בקצב החדש.
בסך הכול הכין הטבח 310 פנקייקים.
כמה פנקייקים בשעה הכין הטבח בשעתיים הראשונות לעבודתו?

**2)** צינור ממלא בריכה בקצב קבוע. לאחר שעתיים נפתח צינור נוסף הממלא את הבריכה בקצב של 25% מהצינור הראשון. לאחר עוד שעה וחצי התמלאה הבריכה לאחר שנכנסו אליה בסה"כ 310 ליטר מים.
כמה ליטרים לשעה מכניס הצינור הראשון לבריכה?

**3)** צינור א' ממלא בריכה בשלוש שעות.
צינור ב' ממלא את אותה בריכה בשעתיים.
שני הצינורות נפתחו יחדיו בשעה 10:00. באיזו שעה תהיה הבריכה מלאה?

**4)** קבוצת פועלים סללה כביש. את השליש הראשון של הכביש סללו בקצב של 10 מטר ביום. את השליש השני של הכביש סללו בקצב הגדול ב-15 מטר ביום מהקצב בו סללו את השליש השלישי של הכביש. זמן סלילת השליש הראשון היה שווה לזמן סלילת שאר הכביש. מצא את קצב סלילת השליש האחרון של הכביש.

**5)** למיכל שני ברזים, ברז א' ממלא אותו וברז ב' מרוקן אותו. יום אחד כאשר במיכל היו 20% מנפח הקיבול שלו, פתחו בטעות את שני הברזים בו זמנית והמיכל התרוקן תוך 6 דקות. מצא בכמה זמן ממלא ברז א' לבדו את המיכל כשהוא ריק אם ידוע שזמן זה ארוך ב-5 דקות מהזמן הדרוש לברז ב' לרוקן את המיכל כשהוא מלא.

**6)** שתי קבוצות של חקלאים אספו מלונים משדה. תחילה, עבדה רק הקבוצה המהירה יותר ואספה מלונים משליש מהשדה. אחר כך, עבדה רק הקבוצה האיטית יותר ואספה מלונים מעוד שישית מהשדה. לבסוף, הצטרפה הקבוצה המהירה לעבודה ויחד אספו מלונים במשך 9 ימים נוספים. מתחילת איסוף המלונים ועד סיומו עברו 29 ימים. מצא בכמה ימים יכולה הייתה הקבוצה המהירה לאסוף את המלונים מכל השדה לו עבדה לבדה.

**7)** מורה שברשותו היו מבחני המתמטיקה של כל השכבה, 224 במספר, תכנן לבדוק אותם תוך מספר ימים מסוים. הוא התחיל בעבודתו ואחרי 6 ימי עבודה, קיבל לידיו עוד 7 מבחנים שנשכחו בבית הספר וקיבל הודעה כי עליו להחזיר את הבחינות 3 ימים לפני המועד שתכנן. הוא חישב וגילה שכדי לעמוד ביעד עליו לבדוק עוד 11 מבחנים בכל יום.
בכמה ימים תכנן המורה לסיים את בדיקת המבחנים?

**8)** למיכל שנפחו 300 ליטר יש שני ברזים: ברז אחד למילוי והשני להרקה. מילוי המיכל (כשהוא ריק) אורך 8 דקות יותר מריקון המיכל (כשהוא מלא). יום אחד, כשהמיכל היה מלא, פתחו בטעות את שני הברזים והמיכל התרוקן בפחות מחצי שעה. באיזה תחום מספרי נמצאת כמות המים הנכנסת למיכל בדקה מברז המילוי?

**9)** שני פועלים תכננו לבצע עבודה מסוימת כך שהראשון יעבוד 8 ימים ואחריו השני יעבוד 6 ימים. אולם, 4 ימים אחרי תחילת העבודה חלה הפועל הראשון והפסיק לעבוד והפועל השני נאלץ לעבוד $m$ ימים לבדו וגם אז הסתיימה רק 75% מהעבודה.

א. הבע באמצעות $m$ את הזמן שבו כל פועל היה מסיים את העבודה לו עבד לבדו.

ב. לאלו ערכים של $m$ יש לבעיה פתרון?

## תשובות סופיות:

**1)** 80 פנקייקים.

**2)** 80 ליטרים בשעה.

**3)** 11:12

**4)** 15 מטרים ליום.

**5)** 15 דקות.

**6)** 24 ימים.

**7)** 14 ימים.

**8)** בין 15 ליטרים ל-37.5 ליטרים.

**9)** א. $4m-12$ , $\frac{16(m-3)}{2m-9}$ ב. $m>3$

# שאלות שונות:

## שאלות:

**בעיות תנועה:**

**1)** בשעה 8:00 בבוקר יצא הולך רגל מקיבוץ לכיוון חיפה. באותה שעה יצא רוכב קטנוע מחיפה לאותו הקיבוץ. שניהם נעו באותו כביש ומהירויותיהם לא השתנו בזמן התנועה. מהירות רוכב הקטנוע הייתה גדולה ב-12 קמ"ש מזו של הולך הרגל. 50 דקות לאחר השעה 8:00 הולך הרגל ורוכב הקטנוע טרם נפגשו וידוע כי המרחק ביניהם היה 16 ק"מ. 30 דקות לאחר פגישתם הגיע רוכב הקטנוע לקיבוץ. מצא את מהירות הולך הרגל ואת המרחק בין הקיבוץ לעיר חיפה.

**2)** סירת מנוע נעה בין שתי נקודות ציון. הסירה עוברת את המרחק שבין הנקודות הלוך ושוב במשך 14 שעות. המרחק בין שתי נקודות הציון הוא 48 ק"מ. ידוע כי באותו הזמן שעוברת הסירה מרחק של 4 ק"מ עם הזרם היא עוברת רק 3 ק"מ נגד הזרם. מהי מהירות זרם המים בנהר ומהי מהירות הסירה במים עומדים?

**3)** אוטובוס יוצר לדרך שאורכה 500 ק"מ, ומהירותו קבועה. אחרי נסיעה של שעתיים, הקטין נהג האוטובוס את המהירות, ולכן איחר בשעה אחת בדיוק. לו היה נוסע הנהג במהירות הנמוכה לאורך כל הדרך היה מאחר ליעדו בשעה וארבעים דקות. מצא את מהירותו הרגילה של האוטובוס.

**4)** שני רוכבי אופניים יצאו בבת אחת זה לקראת זה ממקומות A ו-B, האחד מ-A ל-B והשני מ-B ל-A. הם נפגשו בדרך וכל אחד מהם המשיך לנוע ליעד בלי להתעכב. רוכב האופניים מ-A הגיע ל-B 4 שעות לאחר הפגישה, ואילו רוכב האופניים מ-B הגיע ל-A 9 שעות לאחר הפגישה. מהירויות רוכבי האופניים לא השתנו בשעות התנועה. בכמה שעות עבר כל אחד מרוכבי האופניים את המרחק בין המקומות A ו-B.

**5)** במגרש ספורט מדדו שני ספורטאים את אורכו של מסלול ריצה. כשהם יוצאים משני קצותיו, זה לקראת זה. לאחר שצעדו כל אחד 50 צעדים, נשאר ביניהם מרחק של 17 מטרים. כל צעד של הספורטאי הראשון היה קצר ב-10 ס"מ מצעדו של הספורטאי השני. את המסלול כולו עובר הספורטאי הראשון ב-24 צעדים יותר מאשר הספורטאי השני. הצעדים של כל אחד מהספורטאים לא השתנו באורכם במשך המדידה. מהו אורך מסלול הריצה?

**6)** המרחק מקיבוץ לחיפה הוא 40 ק״מ. בשעה 7 בבוקר יצא טנדר ובו דברי דואר מן הקיבוץ לחיפה. כעבור 20 דקות יצאה אחריו מכונית מן הקיבוץ במהירות של 45 קמ״ש כדי להוסיף את החבילה על דברי הדואר. היא הדביקה את הטנדר וחזרה מיד לקיבוץ. ברגע שעברה את מחצית הדרך ממקום הפגישה עם הטנדר לקיבוץ, הגיע הטנדר לחיפה. מהירות הטנדר ומהירות המכונית לא השתנו בזמן הנסיעה. מצא את מהירות הטנדר.

**7)** שני תיירים יצאו ביחד מ-A ל-B. התייר הראשון לא התעכב בדרכו והגיע ל-B לאחר $2\frac{1}{4}$ שעות. התייר השני, לאחר שעבר $\frac{1}{6}$ מהדרך, חזר ל-A שהה שם 15 דקות ואחר-כך הלך ל-B. שני התיירים הגיעו ל-B באותו זמן. התייר השני עבר כל קילומטר 4 דקות פחות מהתייר הראשון. מהירות ההליכה של שני התיירים לא השתנתה בעת ההליכה. מצא את מהירותו (בקמ״ש) של כל אחד מהתיירים.

**8)** על שפת הנהר נמצאות שלוש תחנות של ספינות דיג: A, B ו-C.
התחנה B נמצאת בין A ל- C, במרחק 12 ק״מ מ- C. כיוון זרם המים בנהר הוא מ- A ל-C. ספינת דיג שלה מנוע קטן עוברת את הדרך מ- A ל- C ב-4 שעות ואת הדרך מ-C ל-A ב-6 שעות. ספינת הדיג שלה מנוע גדול, שמהירותה גדולה פי 3 ממהירות הספינה עם המנוע הקטן, עוברת את הדרך מ-B ל- C ב-45 דקות.
מצא את מהירות זרם המים בנהר.

**9)** שלושה כלי רכב יצאו זה אחר זה בבוקר אחד מתל אביב לאילת. אופנוע יצא בשעה 7:00, מכונית משא ב-8:00 ומונית ב-8:24 (24 דקות אחרי השעה 8:00). מהירויותיהם היו קבועות והן היו סדרה חשבונית. המונית הדביקה את רוכב האופנוע חצי שעה לאחר שהדביקה את מכונית המשא, ומכונית המשא הדביקה את רוכב האופנוע במרחק 180 ק״מ מתל אביב.
שלושת כלי הרכב נעו כולם באותו מסלול. מצא את מהירויות כלי הרכב.

**10)** משאית יצאה מתל אביב למחנה צבאי בדרום. אחריה יצא אוטובוס במהירות הגדולה ב-12 קמ״ש ממהירותה, והוא הגיע למחנה באותו הזמן שהיא הגיעה. שעתיים וחצי לפני שהגיעו למחנה, וכשהאוטובוס היה כבר בנסיעה, יצא לקראתם מן המחנה רוכב אופנוע שמהירותו גדולה פי 2 ממהירות המשאית. הוא פגש את המשאית 10 דקות לפני שפגש את האוטובוס. כל כלי הרכב נסעו באותו כביש, ומהירויותיהם לא השתנו בזמן הנסיעה. מצא את מהירותה של המשאית.

**11)** המרחק בין עיר A לעיר B הוא 300 ק"מ. משאית יצאה מעיר A ונסעה במהירות קבוע של V קמ"ש לכיוון עיר B. בדרכה חזרה הגדילה המשאית את מהירותה ב- U קמ"ש, כלומר נסעה במהירות של U+V קמ"ש. ידוע שהמהירות הממוצעת של המשאית **בכל** דרכה (הלוך וחזור), הייתה 60 קמ"ש. אילו המשאית הייתה חוזרת מעיר B לעיר A במהירות $V-U$ קמ"ש, אזי המהירות הממוצעת בכל הדרך (הלוך וחזור) הייתה רק $\frac{100}{3}$ קמ"ש.

חשב את המהירויות V ו- U.

**12)** המרחק בין הנקודות A ו- B הוא 64 ק"מ. רוכב אופניים יצא מנקודה A לכיוון נקודה B ונסע במהירות קבועה.40 דקות לאחר שיצא לדרכו, יצא מנקודה A לכיוון נקודה B רוכב קטנוע שנסע במהירות קבועה של 36 קמ"ש.
רוכב הקטנוע הדביק את רוכב האופניים בנקודה C ומיד הסתובב וחזר על עקבותיו באותה מהירות לנקודה A. רוכב האופניים שהמשיך בנסיעתו בלי עיכובים, הגיע לנקודה B ברגע שהקטנוע עבר את מחצית הדרך מ- C ל- A.
מצא את מהירות רוכב האופניים.

**13)** הזמן הדרוש לגוף ראשון לעבור 160 ק"מ ארוך ב- 5 שעות מן הזמן הדרוש לגוף שני לעבור 90 ק"מ. מהירות הגוף הראשון גדולה ב-$m$ קמ"ש ממהירות הגוף השני ($m>0$).

א. בטא באמצעות $m$ את מהירות הגוף השני.

ב. מצא לאלו ערכים של $m$ יקבלו מהירויות הגופים ערכים חיוביים בלבד.

**14)** שני כלי רכב יצאו מנקודה A בו זמנית בשעה 07:00 בבוקר ונסעו לנקודה B, לפגישה שתוכננה להתקיים בשעה 10:00 בבוקר. הרכב הראשון הגיע לפגישה בזמן והרכב השני שנסע במהירות הקטנה ב-16 קמ"ש ממהירות הרכב הראשון הגיע לפגישה 48 דקות מאוחר יותר. מצא את המרחק בין הנקודות A ו-B וחשב את המהירות של כל אחד מכלי הרכב.

**15)** המרחק בין A ל- B הוא 360 ק"מ. נהג משאית תכנן לעבור את כל הדרך מ-A ל- B במהירות קבועה של $x$ קמ"ש. לאחר שעבר $\frac{1}{4}$ מהדרך הגביר הנהג את מהירותו ל-$(x+15)$ קמ"ש, ולכן הגיע לנקודה B שעה וחצי לפני המועד המתוכנן. חשב את $x$.

**16)** המרחק בין הנקודות A ל- B בנהר הוא $x$ ק"מ. הנהר זורם מ-A ל- B במהירות של 6 קמ"ש. אדם שט מ-A ל- B וחוזר חזרה מ- B ל- A. סך כל הזמן שארך השיט היה 8 שעות. אלו לא היה זרם בנהר, האדם היה שט את הדרך הלוך ושוב בזמן של 6 שעות. מה המרחק בין שתי הנקודות A ו-B $(x=?)$, ומה הייתה מהירותו בלי מהירות זרם הנהר?

**17)** המרחק בין שתי ערים הוא 450 ק"מ. משאית יצאה לדרכה מעיר אחת לשנייה. לאחר שנסעה במהירות קבועה במשך שעתיים, נאלצה להתעכב במשך 40 דקות בגלל תקלה. לאחר תיקון התקלה המשיכה המשאית מיד בדרכה, אך במהירות קבועה הגדולה ב-5 ק"מ לשעה ממהירותה הקודמת. המשאית הגיעה לעיר השנייה 25 דקות לאחר הזמן שתוכנן מראש. מה הייתה מהירות המשאית לפני התקלה?

**18)** רכבת משא נוסעת מידי יום במהירות קבועה מתחנה A לתחנה B. המרחק בין A ל- B הוא 180 ק"מ. יום אחד, אחרי שעברה $\frac{1}{3}$ מהדרך, עצרה הרכבת עצירה לא מתוכננת מראש למשך 30 דקות. כדי שהרכבת תספיק להגיע ל- B על פי לוח הזמנים הרגיל, היה צריך להגביר את מהירותה לאחר העצירה ב-20 קמ"ש. מצא את המהירות הרגילה של הרכבת.

**19)** בין הנקודות A ו-B מובילות שתי דרכים. הדרך הראשונה אורכה 60 ק"מ, והדרך השנייה ארוכה ממנה ב-20%. רוכב קטנוע נסע מ- A ל- B בדרך הקצרה במהירות קבועה, וחזר בדרך הארוכה במהירות קבועה, הגדולה ב-6 קמ"ש ממהירותו הראשונה. זמן הנסיעה בחזרה (מ- B ל- A) היה ארוך ב-5 דקות מזמן הנסיעה מ- A ל- B. מצא את המהירות שבה נסע רוכב הקטנוע בכל כיוון ואת זמן הנסיעה (הלוך ושוב).

**20)** רוכב אופניים עובר בדרך כלל את המרחק בין A ל- B במהירות קבועה במשך 5 שעות ו-20 דקות. באחד הימים יצא רוכב האופניים מ-A ועבר $\frac{3}{4}$ של הדרך במהירות הגדולה ב-10 קמ"ש ממהירותו הרגילה, ולכך התעייף ואת שאר הדרך עבר במהירות קטנה ב-15 קמ"ש ממהירותו הרגילה.
ביום זה הוא הגיע ל-B לאחר 5 שעות ו-40 דקות לאחר שיצא מ- A.

א. מהי מהירותו הרגילה של רוכב האופניים?

ב. מהו המרחק בין A ל- B?

**21)** המרחק בין שתי ערים א' ו-ב' הוא 126 ק"מ. שני רוכבי אופניים, שיצאו בו זמנית, האחד מעיר א' והשני מעיר ב', ונסעו זה לקראת זה במהירויות קבועות, נפגשו אחרי שלוש שעות. הרוכב שיצא מעיר א' עבר את כל הדרך עד לעיר ב' בשעה ו-45 דקות פחות מהרוכב שיצא מעיר ב' לעיר א'.
מצא את המהירות של כל אחד מרוכבים האופניים.

**22)** מ-A ל- C יש שתי דרכים. הדרך הראשונה היא הדרך המישורית AC, שאורכה 24 ק"מ. הדרך השנייה מתחילה בעלייה AB של 8 ק"מ, ואח"כ ירידה BC של 18 ק"מ. מהירותו של רוכב אופניים במישור היא $x$ קמ"ש, בעלייה מהירותו $(x-4)$ קמ"ש, ובירידה מהירותו $(x+6)$ קמ"ש. ידוע שאם רוכב האופניים יבחר לנסוע מ- A ל- C בדרך הראשונה או בדרך השנייה, זמן הנסיעה יהיה זהה. חשב את $x$ (כמה פתרונות לבעיה?).

**23)** מונית נסעה מעיר א' לעיר ב' בכביש ראשי במהירות קבועה. בדרך חזרה נסעה המונית בדרך עפר הקצרה ב-40% מהכביש, אך מהירותה פחתה ב-20%.

א. בכמה אחוזים התקצר או התארך זמן הנסיעה בדרך חזרה (לעומת הנסיעה בכיוון הראשון)?

ב. מה הייתה מהירות המונית בכיוון השעון, אם ידוע שאורך הכביש היה 360 ק"מ, וזמן הנסיעה בחזרה התקצר בשעה?

**בעיות הספק:**

**24)** כתב יד נמסר להדפסה לשתי כתבניות. הכתבנית השנייה ניגשה לעבודה שעתיים אחרי הראשונה.6 שעות לאחר שהכתבנית הראשונה ניגשה לעבודה סיימו שתיהן יחד את ההדפסה של $60\%$ מכתב היד. הן המשיכו בהדפסה וסיימו אותה יחד. לאחר סיום העבודה התברר שהכתבנית הראשונה ביצעה $\frac{3}{10}$ מן העבודה. קצב העבודה של הכתבניות לא השתנה במשך העבודה.
בכמה שעות הייתה כל אחת מהכתבניות יכולה לבצע את העבודה לבדה?

**25)** בבריכה שני פתחים: פתח אחד גדול ופתח שני קטן יותר. אם מכניסים לבריכה הריקה מים רק דרך הפתח הקטן במשך 6 שעות, ולאחר מכן במשך שעה ו-12 דקות מכניסים מים דרך שני הפתחים יחד, הבריכה מתמלאת כולה. כמו כן ידוע, שאם מכניסים לבריכה הריקה מים רק דרך הפתח הגדול במשך 3 שעות ולאחר מכן ממשיכים להכניס מים דרך פתח זה במשך 9 שעות, אך בו בזמן מוציאים מים דרך הפתח הקטן, הבריכה כולה מתמלאת במים.
מצא בכמה שעות תתמלא הבריכה, אם יכניסו מים רק דרך הפתח הקטן.

**26)** שני פועלים קיבלו על עצמם לבצע עבודה מסוימת. ביום הראשון התחיל הפועל הראשון לעבוד לבדו. הפועל הראשון עבד במשך 3 שעות, ואז הצטרף אליו הפועל השני. כעבור 6 שעות נוספות של עבודה משותפת של שני הפועלים, התברר שהם סיימו 55% מהעבודה. ביום השני עבדו הפועלים יחדיו עד שסיימו את כל העבודה. לאחר סיום העבודה, התברר שכל אחד מהפועלים ביצע בדיוק מחצית מהעבודה. בכמה שעות היו שני הפועלים מסיימים את על העבודה אלו עבדו כל הזמן ביחד?

**27)** שני צינורות ממלאים מיכל כשהם פתוחים ביחד במשך 6 שעות.
יום אחד, כשהמיכל היה ריק, פתחו רק את הצינור הראשון למשך הזמן שלוקח לצינור השני למלא מחצית מיכל. סגרו את הצינור הראשון ופתחו רק את הצינור השני למשך הזמן שלוקח לצינור הראשון למלא שליש מיכל.
כתוצאה מכך התמלאו בסך הכול $\frac{5}{6}$ מיכל.
מצא בכמה שעות יכול כל אחד מהצינורות למלא לבד מיכל ריק.

**28)** על שתי קבוצות פועלים הוטל לסלול כביש בין הערים A ו- B.
במשך 36 הימים הראשונים עבדו הקבוצות בנפרד. תחילה עבדה רק הקבוצה הראשונה וסללה $\frac{1}{4}$ מהכביש. לאחר מכן הפסיקה הקבוצה הראשונה את עבודתה, ורק הקבוצה השנייה עבדה. קבוצה זו סללה $\frac{1}{3}$, עד לגמר היום ה-36, מהכביש. ביום ה-37 החלו שתי הקבוצות לעבוד במשותף, וסיימו את סלילת הכביש תוך 12 ימים. הספק הקבוצות לא השתנה במשך כל ימי עבודתן. בכמה ימים הייתה יכולה כל קבוצה לסלול את הכביש לבדה? כמה פתרונות לבעיה?

**29)** שתי קבוצות פועלים עבדו בסלילת כביש משני קצותיו. הקבוצה השנייה סללה בכל יום 5 מטר יותר מאשר הקבוצה הראשונה, ועבדה בסך הכול 2 ימים יותר מהקבוצה הראשונה. ידוע שהקבוצה הראשונה סללה $16a$ מטרים בעוד שהקבוצה השנייה סללה $36a$ מטרים ($a$ פרמטר חיובי). קצב העבודה של שתי הקבוצות נשאר קבוע בכל זמן הסלילה. סמן ב-$x$ את מספר המטרים שסללה הקבוצה הראשונה בכל יום, ומצא לאלו ערכים של הפרמטר $a$ יקבל $x$ ערכים חיוביים בלבד.

## תשובות סופיות:

**1)** מהירות הולך הרגל היא 6 קמ"ש.
המרחק בין הקיבוץ לעיר חיפה הוא 36 ק"מ.

**2)** מהירות הזרם היא 1 קמ"ש. מהירות הסירה במים עומדים היא 7 קמ"ש.

**3)** 100 קמ"ש.

**4)** הרוכב הראשון ב-10 שעות והרוכב השני ב-15 שעות.

**5)** 72 מטרים.

**6)** 30 קמ"ש.

**7)** מהירות התייר הראשון : 5 קמ"ש, מהירות התייר השני : 7.5 קמ"ש.

**8)** 1 קמ"ש.

**9)** 45 קמ"ש, 60 קמ"ש, 75 קמ"ש.

**10)** 36 קמ"ש.

**11)** 25 קמ"ש $=U$ , 50 קמ"ש $=U$ .

**12)** 24 קמ"ש.

**13)** א. $\frac{14-m\pm\sqrt{m^2-100m+196}}{2}$ ב. $0<m\le 2$ .

**14)** 228 ק"מ, 76 קמ"ש, 60 קמ"ש.

**15)** 45 קמ"ש.

**16)** 36 ק"מ, 12 קמ"ש.

**17)** 75 קמ"ש.

**18)** 1 קמ"ש.

**19)** הלוך 90 קמ"ש וחזור 96 קמ"ש. זמן כולל 85 דקות.
או : הלוך : 48 קמ"ש וחזור 54 קמ"ש. זמן כולל 155 דקות.

**20)** א. 30 קמ"ש. ב. 160 ק"מ

**21)** 24 קמ"ש, 18 קמ"ש.

**22)** 24 או 12 קמ"ש.

**23)** א. 25%. ב. 90 קמ"ש.

**24)** הכתבנית הראשונה ב-30 שעות, הכתבנית השנייה ב-10 שעות.

**25)** 9 שעות.

**26)** $13\frac{1}{3}$ שעות.

**27)** הצינור הראשון ב-15 שעות והצינור השני ב-10 שעות
או הצינור הראשון ב-12 שעות והצינור השני ב-12 שעות.

**28)** הקבוצה הראשונה: 48 ימים והקבוצה השנייה: 72 ימים
או הקבוצה הראשונה: 86.4 והקבוצה השנייה: 43.2 ימים.

**29)** $a \geq 2.5$.

# בעיות תערובת:

## סיכום כללי:

**ריכוז:**

החלק היחסי של נפח הנוזל בתמיסה מסוימת מתוך סך נפח הנוזלים.

למשל, תמיסה של 50 ליטרים, המכילה כוהל בריכוז של 70% מורכבת מ:

- 70% כוהל שהם: 35 ליטרים $\frac{70}{100}\cdot 50=$.
- 30% מים שהם: 15 ליטרים $\frac{30}{100}\cdot 50=$.

אופן הפתרון של שאלה מילולית בתערובת זהה לשל שאלות מילוליות כלליות:

- קוראים את השאלה.
- מגדירים את הנעלם (או נעלמים).
- מחברים משוואה (או משוואות) על בסיס נתוני השאלה.
- פותרים את המשוואות ובודקים את נכונות הפתרון.
- רושמים תשובה מילולית סופית.

## שאלות:

**1)** מי הים באילת מכילים 4% מלחים, ואילו מי ים המלח מכילים 24% מלחים.
מערבבים מי ים אילת עם מי ים-המלח, מוסיפים עוד 30 ליטר מים מזוקקים, ומקבלים 80 ליטר תערובת, המכילה 5% מלחים.
כמה ליטרים מים מכל אחד מהימים הנ"ל נמצא בתערובת?

**2)** כמות מסוימת של חומצת מלח בריכוז של 90% עורבבה בכמות חומצת מלח הקטנה ממנה ב- 20 ליטר ובריכוז 30%. לאחר מכן אויידו מהתערובת 15 ליטרים של מים טהורים ונתקבלה חומצת מלח בריכוז של 72%.
כמה ליטרים חומצת מלח בריכוז של 72% נתקבלו?

**3)** כמות מסוימת של כוהל בריכוז של 30% עורבבה בכמות כוהל, הגדולה ממנה ב-50 ליטרים ובריכוז של 50%. לתערובת הוסיפו 112.5 ליטרים של כוהל נקי, ואז ריכוז הכוהל בתערובת היה 60%. כמה ליטרים כוהל לקחו מהכמות הראשונה?

**4)** בחבית אחת 6 ליטרים כוהל ו- 10 ליטרים מים. בחבית שנייה 4.5 ליטרים כוהל ו-2 ליטרים מים. כמה ליטרים נוזל יש לצקת מהחבית הראשונה לשנייה, כדי שבחבית השנייה תהיה כמות שווה של כוהל ושל מים?

**5)** בחבית 100 ליטרים מים. מהחבית הוציאו $x$ ליטרים של מים והכניסו חזרה $x$ ליטרים כוהל נקי. אחר הוציאו פעם נוספת $x$ ליטרים מהחבית, והכניסו חזרה $x$ ליטרים כוהל נקי. לבסוף היה ריכוז הכוהל בחבית 36%.
כמה ליטרים הוציאו מהחבית בכל פעם?

## תשובות סופיות:

**1)** 40 ליטרים לקחו מהים באילת. 10 ליטרים לקחו מים-המלח.
**2)** 125 ליטרים.
**3)** 100 ליטרים.
**4)** 10 ליטרים.
**5)** 20 ליטרים.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 8 - סדרות

### תוכן העניינים

1. הקדמה כללית ..... (ללא ספר)
2. סדרה חשבונית ..... 137
3. סדרה הנדסית ..... 144
4. סדרות מעורבות ..... 149
5. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת ..... 151
6. סדרת נסיגה ..... 157

# סדרה חשבונית:

## סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר $a_1$ והפרשה הוא $d$

נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: $n$ הוא מיקום האיבר שערכו $a_n$ בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה חשבונית:**

כלל נסיגה של סדרה חשבונית $a_n$ שהפרשה הוא $d$ ואיברה הראשון הוא $a_1$

נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

- **נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:**

סכום $n$ האיברים הראשונים של סדרה חשבונית $a_n$ שהפרשה הוא $d$ ואיברה הראשון הוא $a_1$ נתון ע"י: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים: $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$.

## שאלות:

**1)** נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7...$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.

**2)** בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.

**3)** מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, ..., 49.5$.

**4)** בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24.
מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.

**5)** תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?

**6)** כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?

**7)** כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $82,85,88,91,...$.

**8)** מצא את ערכו של $x$ אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3,3x-4,x^2-1$.

**9)** נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+3 \\ a_1=5 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

**10)** בסדרה חשבונית $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.

א. הוכח: $a_5=0$.

ב. נתון: $a_3-a_{11}=24$. מצא את $a_1$ ואת $d$.

ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה $b_n$ המקיימת: $b_n=2a_n-3$.
מצא את ערך האיבר השלילי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.

**11)** מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3,2,7,12,...$.

**12)** נתונה הסדרה החשבונית: $5,-1,-7,-13,\ldots$.
כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?

**13)** תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?

**14)** נתונה הסדרה החשבונית: $-63,-67,-71,\ldots$.
כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?

**15)** נתונה הסדרה החשבונית: $31,22,13,4,\ldots$.
בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.

**16)** נתונה הסדרה החשבונית: $599,\ldots,19,14,9,4$.
מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.

**17)** סכום $n$ האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב- 1024 מסכום $n$ האיברים הראשונים שבה.

א. בטא את $n$ באמצעות הפרש הסדרה, $d$.

ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?

**18)** נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.

א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

**19)** בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5 , ה-7 וה- 16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.

ב. מצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה.

ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

**20)** נתונים שני טורים חשבוניים: $\begin{cases}150,144,138,...\\90,93,96,...\end{cases}$.

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

ב. מחברים את $n$ האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם $n$ האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את $n$ אם ידוע שהוא קטן מ-20.

**21)** נתונות שתי סדרות חשבוניות הבאות: $a_n$ שהפרשה הוא $d_1$ ו- $b_n$ שהפרשה הוא $d_2$. ידוע כי: $d_1=-2d_2$.

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה $a_n$ גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה $b_n$.

א. מצא את הפרש הסדרה $a_n$ - $d_1$.

ב. ידוע כי האיבר $a_{10}$ קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר $b_{50}$.

מצא את $a_1$ ואת $b_1$.

**22)** נתונה הסדרה החשבונית: $-13,-17,-21,...$.

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

**23)** בסדרה חשבונית שהפרשה $d$ ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.

הוכח כי $nd=60$.

**24)** בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

**25)** לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$ , $x-16$ , $2x+23$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את $x$.

ii. מצא את הפרש הסדרה.

ב. ידוע כי: $a_{12}=0$. מצא את $a_1$.

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=308$.

מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

**26)** בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6.
האיבר הראשון אינו אפס.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. $a_1=-4d$.

ii. $S_9=0$.

ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.
מצא את $a_1$ ואת $d$.

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

**27)** בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח כי $nd=66$.

ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות $a_1$ את סכום $n$ האיברים הראשונים.

ג. סכום $n$ האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

**28)** אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.
ההצעה הראשונה:
לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.
ההצעה השנייה:
לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.
ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.

א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.

ב. מה מחיר הרכב?

## תשובות סופיות:

1) $a_{43}=-235$.

2) $a_1=-5$, $d=4$.

3) 20 איברים.

4) 48 איברים.

5) 15 קפיצות.

6) 58 מספרים.

7) 31 איברים חיוביים.

8) $x=1$, $x=4$.

9) $a_{19}=59$.

10) א. הוכחה. ב. $a_1=12$, $d=-3$. ג. $b_5=-3$.

11) $S_{14}=413$.

12) 21 איברים.

13) 16 דקות.

14) 37 איברים.

15) 3647.

16) 23920.

17) א. $n=\sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.

18) א. $a_1=6$, $a_2=10$, $a_3=14$ ב. $d=4$.

19) א. $a_1=50$, $d=-6$ ב. $a_{10}=-4$ ג. $n=6$.

20) א. $n=81$ ב. $n=16$.

21) א. $d_1=4$ ב. $a_1=-52$, $b_1=95$.

22) אי-זוגיים: $S=99$ זוגיים: $S=135$.

23) שאלת הוכחה.

24) 29 איברים.

25) א. i. $x=-50$ ii. $d=11$ ב. $a_1=-121$ ג. $S=2156$.

26) א. הוכחה. ב. $a_1=-8$, $d=2$ ג. $n=36$.

27) א. הוכחה. ב. $S=22a_1+693$ ג. $a_9=1$.

28) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 ₪.

# סדרה הנדסית:

## סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר $a_1$ ומנתה היא $q$ נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: $n$ הוא מיקום האיבר שערכו $a_n$ בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה הנדסית:**

כלל נסיגה של סדרה הנדסית $a_n$ שמנתה היא $q$ ואיברה הראשון הוא $a_1$ נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:**

סכום $n$ האיברים הראשונים של סדרה הנדסית $a_n$ שמנתה היא $q$ ואיברה הראשון הוא $a_1$ נתון ע"י: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$.

## שאלות:

**1)** נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

**2)** מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{64}{81}$.

**3)** בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

**4)** בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

**5)** בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

**6)** תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?

**7)** מצא את ערכו של $x$ אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית: $x-6,\ x+4,\ 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.

**8)** נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n \\ a_1=3 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.

**9)** מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: $5,\ 10,\ 20,\ 40,\ldots$.

**10)** תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?

**11)** סכום $n$ האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום $n$ האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?

**12)** בסדרה הנדסית עולה שבה $n$ איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.

**13)** סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב- 120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

**14)** המספרים: $2x-3\ ,\ x-9\ ,\ x-13$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

א. מצא את $x$.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.

ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.

ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=5^{11}$.
מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

**15)** נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_{n+1}$ ,....., $36\ ,\ 12\ ,\ 4$. מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה $b_n$ באופן הבא:

$$b_1=a_1+\frac{a_2}{6}\ \ ,\ \ b_2=a_2+\frac{a_3}{6}\ \ ,\ \ b_3=a_3+\frac{a_4}{6}\ \ ,\ .....\ ,\ \ b_n=a_n+\frac{a_{n+1}}{6}.$$

א. הוכח כי הסדרה $b_n$ היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. הראה כי היחס בין סכום $n$ האיברים הראשונים של הסדרה $a_n$
ובין סכום $n$ האיברים הראשונים של הסדרה $b_n$ הוא $\frac{2}{3}$.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה $b_n$ שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ-$a_8$.

**16)** נתונה הסדרה ההנדסית: $7,14,28,...$.
בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

**17)** בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

**18)** נתונה סדרה הנדסית שמנתה $q$ ובה מספר זוגי של איברים.
בטא באמצעות $q$ את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

**19)** בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום $n$ האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום $n$ האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

**20)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.

בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.

ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

**21)** בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

**22)** באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה:

תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת,
כנגד השנייה - שתי אבנים,
כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...
המלך הסכים להצעה.

א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?

ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.

ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית $2^n$ אבנים, כאשר $n$ הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

## תשובות סופיות:

**1)** $a_9 = 729$.

**2)** $n = 7$.

**3)** $a_1 = \pm\frac{1}{4}, q = \pm 2$.

**4)** $a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3$.

**5)** $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5$.

**6)** 5 דקות.

**7)** $x = 11 \to q = 3$ , $x = -\frac{2}{3} \to q = -\frac{1}{2}$.

**8)** $a_8 = 384$.

**9)** $S_9 = 2555$.

**10)** 5 דקות.

**11)** $n = 4$, יש 12 איברים בסדרה.

**12)** $q = 2$.

**13)** $n = 6$.

**14)** א. $x = 14$ ב.i. $a_n = 5^{n-1}$ ב.ii. $a_7$ , $a_6$ ג. $S_7^* = 61,034,375$.

**15)** א. $q = 3$. ג. $b_6$ , $b_5$

**16)** אי-זוגיים: $S = 595$ , זוגיים: $S = 1190$.

**17)** $q = 4$.

**18)** $\frac{q+1}{q}$.

**19)** $a_1 = \frac{3}{8}$.

**20)** א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$ ב. $a_n = 3^{n-1}$ ג. $a_6$ , $a_5$.

**21)** א. $q = 2$ ב. $a_1 = 1$ ג. $S_{6(p)} = 2730$.

**22)** א. $a_{25} = 16,777,216$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו לו 20,000,000 אבנים.

ג. $4,16,64,...,2^{24}$ , $S_n = 22,369,620$.

# סדרות מעורבות:

## שאלות:

**1)** נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 3.
אם נכפול את המספר הראשון ב-3, נוסיף למספר השני 4 ונחסיר מהמספר השלישי 4 תתקבל סדרה חשבונית. מצא את המספרים.

**2)** נתונות שתי סדרות שמתחילות במספר 2 ובשתיהן 3 איברים.
סדרה אחת היא חשבונית והשנייה הנדסית. האיבר השלישי בשתי הסדרות זהה והאיבר השני בסדרה ההנדסית קטן ב-4 מהאיבר השני בסדרה החשבונית.
מצא את מנת הסדרה ההנדסית.

**3)** נתונים ארבעה מספרים בעלי התכונות הבאות:
הראשון, השני והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 2.
הראשון, השלישי והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית וסכומם $22\frac{1}{2}$. מצא את ארבעת המספרים.

**4)** ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה.
האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.

א. מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.

ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום 60.

ג. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.

**5)** נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 , ....$
וסדרה הנדסית: $b_1 , b_2 , b_3 , ...$. ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.

א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.

ב. נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.

ג. בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212-. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

## תשובות סופיות:

**1)** המספרים הם: 18, 6, 2.

**2)** $q=-1$ או $q=3$.

**3)** המספרים הם: 12 , 7.5 , 6 , 3.

**4)** א. 8 ,10 ,12 ב. 5 ג. 6.

**5)** א. $q=-2$ ג. $a_1=2$.

# סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

## סיכום כללי:

- **הגדרה:**

סדרה הנדסית $a_n$ המקיימת: $|q|<1$ , $(q\neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת $a_n$ ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

מתקבל הכלל הבא: $S=\frac{a_1}{1-q}$.

- **סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של $n$ איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה: $S_n=\frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של $n$ איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר $a_k$ יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה באופן הבא: $S_n=\frac{a_k\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

## שאלות:

**1)** מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ \ldots$

**2)** סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32.
מצא את האיבר הראשון בסדרה.

**3)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

**4)** האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

***הערה: שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.**

**5)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת $a_n$ שמנתה $q$ , $\left(q\neq 0\ ,\ |q|<1\right)$
מגדירים שלוש סדרות חדשות: $b_n$ , $c_n$ ו- $d_n$ באופן הבא:

| הסדרה: | $b_n$ | $c_n$ | $d_n$ |
|---|---|---|---|
| הכלל: | $b_1=a_1$<br>$b_2=a_1+a_2$<br>$b_3=a_1+a_2+a_3$<br>$\vdots$<br>$b_n=a_1+a_2+a_3+..+a_n=S_{a(n)}$ | $c_1=a_2^2-a_1^2$<br>$c_2=a_3^2-a_2^2$<br>$c_3=a_4^2-a_3^2$<br>$\vdots$<br>$c_n=a_{n+1}^2-a_n^2$ | $d_1=S_a+a_1$<br>$d_2=S_a+a_2$<br>$d_3=S_a+a_3$<br>$\vdots$<br>$d_n=S_a+a_n$ |

הסכום $S_a$ הוא סכום הסדרה $a_n$ , והסכום: $S_{a(n)}$ הוא סכום $n$ האיברים הראשונים של הסדרה $a_n$.

א. קבע אלו מבין הסדרות $b_n$ , $c_n$ ו- $d_n$ הן הנדסיות והבע את מנתן ע"י $q$.

ב. הבע באמצעות $a_1$ בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.

ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א' ב- $S_{(S)}$. הוכח כי לא קיים ערך של $q$ עבורו סכום ריבועי האיברים $S_{(S)}$, שווה לסכום הסדרה הנ"ל בריבוע.

**6)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: $a_n$ שמנתה $q$.
מגדירים סדרה חדשה $b_n$ באופן הבא:

$$\ldots, b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q} \ldots, b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q} , b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q} , b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q}$$

כאשר: $S_n^*$ מייצג את סכום הסדרה $a_n$ החל מהאיבר $a_n$ (ועד אינסוף).

א. הוכח כי הסדרה $b_n$ היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות $a_1$ ו- $q$.

ב. ידוע כי סכום הסדרה $b_n$ הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה $a_n$ גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה $b_n$. מצא את $a_1$ ו- $q$.

ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים: $b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots = 42$.

ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה $b_n$.

ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה $b_n$.

ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה $b_n$ כך שנוצרת הסדרה: $b_n^*$. חשב את סכום הסדרה $b_n^*$.

ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה $b_n$ כך שנוצרת הסדרה: $b_n^{**}$. חשב את סכום הסדרה $b_n^{**}$.

ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה $b_n$. מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(S)}$ (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית $b_n$ ב- $S_b$.
הראה כי: $S_b^2 \neq S_{(S)}$.

ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה $a_n$ וסכום איברי הסדרה $b_n$ הוא $\frac{2}{3}$.

**7)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, a_4+a_5, \ldots$.

א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.

ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.
מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

**8)** בסדרה הנדסית אינסופית יורדת $a_n$ ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

מחברים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה $b_n$.

ב. הוכח כי הסדרה $b_n$ גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.

ג. הראה כי סכום הסדרה $b_n$ שווה לסכום הסדרה $a_n$.

ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה $a_n$.

**9)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \ldots$ שמנתה היא $q$, $(0<q<1)$.
נגדיר את הסכומים הבאים: $V=a_3+a_7+a_{11}+\ldots$, $T=a_1+a_2+a_5+a_6+a_9+a_{10}+\ldots$.
נתון כי: $T=6V$.

א. מצא את מנת הסדרה $q$.

ב. פי כמה קטן $V$ מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?

ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.

**10)** נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ שמנתה היא $q$.
בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_{2n}^2$.

א. הוכח כי היחס בין סכום $n$ האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.
בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ב. מצא את מנת הסדרה.

ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר $a_n$ כלשהו.
ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר $a_n$.

**11)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית ..... $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ שמנתה היא $q$ , $(q \neq 0 \ , \ |q|<1)$.

נגדיר את הסכומים הבאים: $V = a_2 + a_7 + a_{12} + ...$ , .. , $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13}$ .

נתון כי: $V = 0.3T$.

א. מצא את מנת הסדרה $q$.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.

ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.

ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

## תשובות סופיות:

**1)** $S=18$.

**2)** $a_1=24$.

**3)** $a_1=50\ ,\ q=\frac{1}{5}$ או $a_1=12\frac{1}{2}\ ,\ q=\frac{4}{5}$.

**4)** $S=18\frac{2}{3}$.

**5)** א. הסדרה $b_n$: $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{q-1}}{\frac{a_n\left(q^n-1\right)}{q-1}}=\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{a_n\left(q^n-1\right)}=q\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q^n-1}$

היות והיא תלויה ב-$n$ היא אינה הנדסית.

הסדרה $c_n$ הנדסית: $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{n+2}^2-a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^4-a_n^2q^2}{a_n^2q^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^2\left(q^2-1\right)}{a_n^2\left(q^2-1\right)}=q^2$.

הסדרה $d_n$: $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S+a_{n+1}}{S+a_n}=\frac{\frac{a_1}{1-q}+a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q}+a_n}=\frac{a_1+(1-q)a_{n+1}}{a_1+(1-q)a_n}=\frac{a_1\left(1+(1-q)q^n\right)}{a_1\left(1+(1-q)q^{n-1}\right)}=\frac{q^n-q^{n+1}+1}{q^{n-1}-q^n+1}$

היות והיא תלויה ב-$n$ היא אינה הנדסית. ב. $-a_1^2$. $S_{(c_n)}=\frac{c_1}{1-q_c}=\frac{a_2^2-a_1^2}{1-q^2}=\frac{a_1^2\left(q^2-1\right)}{1-q^2}$.

ג. מההשוואה: $S_{(s)}=S^2$ מקבלים כי פתרון המשוואה הוא: $q=0,\pm1$.
כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה $a_n$ היא שבר.
עבור $|q|>1$ הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של $q$ עבורו השוויון יתקיים. מש"ל.

**6)** א. $b_n=\frac{a_1}{1-q}q^{n-1}$ ב. $a_1=56\ ,\ q=\frac{1}{3}$ ג. הוכחה. ד. 31.5
ה. 94.5 ו. -63 ז. 63 ח. 7938
ט. הסכום: $S^2$ משמעו: $\left(b_1+b_2+...+b_n+..\right)^2$.
הסכום: $S_{(s)}$ משמעו: $b_1^2+b_2^2+...+b_n^2+..$. ברור כי הביטויים אינם שווים.

**7)** א. הוכחה. ב. $a_1=16\ ,\ q=\frac{1}{3}$.

**8)** א. $q=0.6$ ב. $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n-1}+a_{2n}}=q^2$ ד. $a_1=200$

**9)** א. $q=\frac{1}{2}$ ב. פי 5 ג. $a_1=1024$

**10)** א. הוכחה. ב. $q=0.5$ ג. $a_5=20$.

**11)** א. $q=\frac{1}{3}$ ב. $a_1=-16$ ג. $S=288$.

# סדרת נסיגה:

## שאלות:

**1)** נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2n-11 \\ a_1=-6 \end{cases}$.

א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.

ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את $a_{14}$ ו- $a_{12}$.

ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא $k$.
הבע באמצעות $k$ את $a_{32}$ ו- $a_{30}$.

ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 133.

ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

**2)** נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2n \\ a_1=0 \end{cases}$.

נתון כי $a_k=72$. הבע באמצעות $k$ את $a_{k+2}$.

**3)** נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+n^2-31 \\ a_7=t \end{cases}$

מצא את ערכו של $t$ שבעבורו האיברים $a_7, a_8, a_9$ הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

**4)** סדרה שהאיבר הכללי בה הוא $a_n$ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=a_n+6n-2$
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא $b_n$ באופן הבא: $b_n=a_{n+1}-a_n$.

א. הוכח שהסדרה $b_n$ היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את $b_1$.

**5)** סדרה שהאיבר הכללי בה הוא $a_n$ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=3a_n+4$.
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא $b_n$ באופן הבא: $b_n=a_n+2$.

א. הוכח שהסדרה $b_n$ היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון: $b_5=162$. חשב את $a_1$.

**6)** סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_1=3\ ,\ a_{n+1}=3a_n+10n-5$.
מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל $n$ טבעי: $b_n=a_n+5n$.

א. הוכח כי הסדרה $b_n$ היא סדרה הנדסית.

ב. חשב את האיבר $b_5$.

ג. חשב את הסכום: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{12}$.

**7)** סדרה מוגדרת לכל $n$ טבעי ע"י הנוסחה: $a_1=k\ ,\ a_{n+1}=8n-a_n+3$.

א. הבע באמצעות $k$ את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.

ג. חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

**8)** סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1=2\ ,\ a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+3}$.

מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n=\dfrac{4-7a_n}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה $b_n$ היא חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את הסכום הבא: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{22}$.

**9)** סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1=1\ ,\ a_{n+1}=3n-a_n-7$.

א. חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.

ב. הוכח כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $a_{n+2}=a_n+3$.

ג. כתוב נוסחה לסכום $n$ האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ד. חשב את הסכום הבא: $a_1+a_3+a_5+.....+a_{17}$.

**10)** סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=a_n+2\cdot 3^n+2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע את $a_{n+2}$ באמצעות $a_n$.

ii. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.

ב. הנוסחה לסכום $n$ האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא: $S_n=1.5\cdot 3^n+n^2+n-1.5$.

חשב את הסכום הבא: $a_6+a_7+a_8+....+a_{11}$.

ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

**11)** סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה: $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+5}$ , $a_1=6$.

מגדירים סדרה חדשה $b_n$ המקיימת לכל $n$ טבעי: $b_n=\frac{a_n+3}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה $b_n$ היא הנדסית ומצא את מנתה.

ב. כתוב נוסחה ל- $b_n$ באמצעות $n$ בלבד.

ג. חשב את הסכום הבא: $b_1-b_2+b_3-b_4+.....-b_{10}$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $a_3=-22$ ב. $a_{14}=33\ ,\ a_{12}=5$ ג. $a_{32}=k+51\ ,\ a_{30}=k-49$

ד. $a_{62}, a_{63}$

**2)** $a_{k+2}=74+4k$

**3)** $t=-33$

**4)** א. $d=6$ ב. $b_1=4$

**5)** א. $q=3$ ב. $a_1=0$

**6)** א. $b_{n+1}=3b_n$ ב. $b_5=648$ ג. $S=1594320$

**7)** א. $a_1=k\ ,\ a_2=11-k\ ,\ a_3=k+8\ ,\ a_4=19-k$ ב. 8

ג. 830

**8)** ב. $S_{11(p)}=267\frac{2}{3}$

**9)** א. $a_1=1\ ,\ a_2=-5\ ,\ a_3=4\ ,\ a_4=-2\ ,\ a_5=7$ ג. $S_{n(o)}=1.5n^2-0.5n$

ד. $S_{9(o)}=117$

**10)** א. i. $a_{n+2}=a_n+8\cdot 3^n+4$ ii. $a_4$

ב. $S_{6-11}=265458$ ג. $a_1=5$.

**11)** א. $q=2.5$ ב. $b_n=1.5\cdot 2.5^{n-1}$ ג. $S_{10}^{*}=-4086.74$

# מתמטיקה למדעים

## פרק 9 - אינדוקציה מתמטית

### תוכן העניינים

1. שאלות העוסקות בתכונות התחלקות ..... 161
2. סדרות ..... 164
3. עצרת ..... 166
4. שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים ..... 167
5. שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים ..... 168
6. שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה ..... 169
7. שאלות כוללות ומסכמות ..... 171
8. מושג הסכימה וכתיבה מקוצרת של אינדוקציות ..... 173

# שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

## סיכום כללי:

**מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:**

**בדיקה:**

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור $n=1$ (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור $n=2,3$).

**הנחת האינדוקציה:**

נניח כי עבור $n=k$ ($k$ טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

**הוכחת האינדוקציה:**

נוכיח כי עבור $n=k+1$ טענת האינדוקציה מתקיימת.

**סיכום:**

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל $n$ טבעי.

## שאלות:

**1)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8^n-3^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**2)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $11^n-4^n$ מתחלק ב-7 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**3)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8\cdot 7^n+4^{n+2}$ מתחלק ב-24 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**4)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5\cdot 3^{2n}-5^{n+1}$ מתחלק ב-20 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**5)** $a_n$ הוא האיבר במקום ה-$n$ בסדרה החשבונית: $1,3,5,7,\ldots$ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $2^{a_n}+4$ מתחלק ב-12 ללא שארית לכל $n$ טבעי הגדול מ-1.

**6)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^2+n$ מתחלק ב-2 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**7)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^3+5n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**8)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $3^n-2n-1$ מתחלק ב-4 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**9)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9\left(9^n-1\right)-40n$ מתחלק ב-32 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**10)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n+5^n-2^n\left(2^n+1\right)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**11)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n+2^{2n}$ מתחלק ב-11 ללא שארית לכל $n$ טבעי אי זוגי.

**12)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $a^n-b^n$ מתחלק ב-$(a+b)$ ללא שארית לכל $n$ טבעי זוגי.

**13)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^{n+2}+1$ מותיר שארית 2 בחלוקתו ב- 3 לכל $n$ טבעי.

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

# סדרות:

## סיכום כללי:

**תזכורת:**

- סדרה היא אוסף מספרים: $a_1, a_2, ...., a_n$, כאשר $n$ הוא מיקום האיבר בסדרה ו- $a_n$ הוא ערך האיבר העומד במקום ה- $n$-י בסדרה.
  - סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.
  - סכום $n$ האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- $S_n$ והוא מקיים: $S_n = a_1 + ... + a_n$.

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 + d(n-1)$ כאשר $d$ הפרש הסדרה.
  - סכום $n$ האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$.

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 q^{n-1}$ כאשר $q$ היא מנת הסדרה.
  - סכום $n$ האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$.

## שאלות:

**14)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $1+2+3+4+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$.

**15)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $4+7+10+13+...+(3n+1)=\frac{n}{2}(3n+5)$.

**16)** נתונה סדרה שבה: $a_n=n(n+2)$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $S_n=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$.

**17)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:
$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

**18)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:
$$\frac{6}{1\cdot3\cdot5}+\frac{6}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

**19)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:
$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+...+n\cdot3^{n-1}=\frac{1}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right].$$

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

# עצרת:

## סיכום כללי:

**תזכורת – מושג העצרת:**

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$.

מגדירים: $0!=1$ ותמיד מתקיימים השוויונות: $n!=n\cdot(n-1)!$ , $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$.

## שאלות:

**20)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

**21)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{4}+\frac{3\cdot 4!}{8}+...+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$

**22)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$p!+\frac{(p+1)!}{1!}+\frac{(p+2)!}{2!}+...+\frac{(p+n-1)!}{(n-1)!}=\frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

**23)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)...\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{n!}$$

**24)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1\cdot 4}-\frac{11}{4\cdot 7}+\frac{17}{7\cdot 10}-...+\frac{(-1)^{n-1}(6n-1)}{(3n-2)(3n+1)}=1+\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

### שאלות:

**25)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+...+2n=n(2n+1)$$

**26)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

**27)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+...+3n\cdot 2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

### שאלות:

**28)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=2n(2n+1)$$

**29)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

**30)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+3}\right)...\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

**31)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$$

**32)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

### שאלות:

**33)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{n}{n+1}$$

**34)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 2-\frac{1}{n}$$

**35)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$$

**36)** נתונה סדרה שבה: $a_n=n^n$. נגדיר: $T_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $T_n\le n^{\frac{n}{2}(n+1)}$.

**37)** נתון אי-השוויון: $2^n>n^2$. מצא את ה-$n$ המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי החל מה-$n$ שמצאת.

**38)** נתון אי-השוויון: $4^n>5n^2+1$. מצא את ה-$n$ המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי החל מה-$n$ שמצאת.

**39)** נתון אי-השוויון: $n^3-n<5^{n-1}$. מצא את ה-$n$ המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי החל מה-$n$ שמצאת.

**40)** נתון אי-השוויון: $3^n+4^n+5^n<6^n$. מצא את ה-$n$ המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי החל מה-$n$ שמצאת.

**41)** נתון אי-השוויון: $n^n \geq n!$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

**42)** נתון אי-השוויון: $a^n + b^n < (a+b)^n$ , $(a,b>0)$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי הגדול מ-1.

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

# שאלות כוללות ומסכמות:

## שאלות:

**43)** נתון השוויון: $4+7+10+13+...=\frac{n}{2}(3n+5)$.

א. מצא את האיבר במקום ה-$n$.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

ג. חשב את הסכום: $37+40+43+...+85$.

**44)** נתון השוויון: $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+...=2-\frac{2n+2}{3^n}$. מצא את האיבר במקום ה-$n$.

**45)** נתון השוויון: $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots=\frac{n}{4n+1}$.

א. מצא את האיבר במקום ה-$n$.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

ג. חשב את הסכום: $\frac{1}{25\cdot29}+\frac{1}{29\cdot33}+\frac{1}{33\cdot37}+\cdots+\frac{1}{89\cdot93}$.

**46)** נתון השוויון: $(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום: $26^2+27^2+28^2+...+48^2$.

**47)** נתון השוויון: $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

ב. הבע באמצעות $n$ את הסכום: $4^2+6^2+8^2+\cdots+(4n)^2$.

**48)** נתונים השוויונים הבאים:

א. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7}{3}(n^2+3n-1)$.

ב. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=n^2+11n-5$.

ג. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7n}{2}(n+1)$.

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל $n$ טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

**49)** נתון השוויון: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=an(2n+b)$.

א. נתון כי השוויון נכון עבור $n=1$ ו- $n=2$. מצא את ערכי $a$ ו- $b$.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

**50)** נתון אי-השוויון: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי הגדול מ-2.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{18}>\frac{1}{2}$.

**51)** נתון אי-השוויון: $n^2<2^n$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי הגדול מ-4.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $5^2\cdot 6^2\cdot 7^2\cdot 8^2\cdot\ldots\cdot 20^2<2^{200}$.

**52)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום $9+27+81+\cdots+3^{3n+1}$ מתחלק ב-117 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**53)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^3+5n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

ב. נתון כי $a+b$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
הוכח כי $a^3+b^3$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

**54)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח את הטענה: אם ל-$n$ טבעי מסוים $3^n+5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם $3^{n+2}+5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.

ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי $3^n+5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל $n$ טבעי אי-זוגי?

ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $3^n+5^n$ מתחלק ב-8 ללא שארית לכל $n$ טבעי אי-זוגי.

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

# מושג הסכימה וכתיבה מקוצרת של אינדוקציות:

## סיכום כללי:

סימון הסכימה (קרי: סיגמה) מוגדר באופן הבא: $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

מקור הסימון נובע מהמילה Sum ומשמעו הוא סכימה של איברים המתחילים בערך המצוין בתחתית הסימון $\left(\sum_{\boxed{k=1}}^{n}\right)$ עד לערך המצוין בחלקו העליון $\left(\sum_{k=1}^{\boxed{n}}\right)$.

### דוגמאות:

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n$.
- $\sum_{k=3}^{12} k^2 = 3^2+4^2+...+12^2$.
- $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{5}+\frac{1}{9}+....+\frac{1}{4n+1}$.

## שאלות:

**1)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

**2)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

**3)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

**4)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n-1)$.

**5)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4^{k-1}}=4-\frac{1}{4^{n-1}}$.

**6)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{3n}k=1\frac{1}{2}n(3n+1)$.

**7)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{3n}(4k-1)=3n(6n+1)$.

**8)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\frac{n}{2}(3n+1)$.

**9)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}3^{n+k}=\frac{3^{n+1}(3^n-1)}{2}$.

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 10 - סימן הסכימה (סיגמה)

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 175

# סימן הסכימה (סיגמה):

## שאלות:

**1)** כתוב בפירוט את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$ ב. $\sum_{k=1}^{4} 2k$ ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$

ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$ ה. $\sum_{t=1}^{8} tx^t$ ו. $\sum_{k=4}^{10} na_k$

ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$ ח. $\sum_{k=-1}^{3} \left(k^2+1\right)$ ט. $\sum_{l=1}^{3} \left(l^2 - x_l - 4\right)$

**2)** כתוב את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$

ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$

ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

ד. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8$

ה. $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+...+44\cdot 45$

ו. $3\cdot 2+6\cdot 3+9\cdot 4+12\cdot 5+15\cdot 6+18\cdot 7+21\cdot 8$

ז. $5^2+7^2+...+27^2$

ח. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{10\cdot 11}$

ט. $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\frac{18}{243}$

י. $4+\frac{8}{5}+\frac{12}{25}+\frac{16}{125}+\frac{20}{625}$

**3)** חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$ ב. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k+4k^2\right)$ ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$

ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3-k}{k+1}$ ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$ ו. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k^2+1\right)(k-2)$

* תוכל להיעזר בנוסחאות הבאות: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ , $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

**4)** חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{20}\frac{5\cdot 4^k+8^k}{2^k}$ ב. $\sum_{k=1}^{11}\frac{2\cdot 4^{k+2}+10^k}{0.4^k}$ ג. $\sum_{k=10}^{20}2^{2k+10}$

* תוכל להיעזר בנוסחה הבאה: $\sum_{k=1}^{n}a^k=\frac{a\left(a^n-1\right)}{a-1}\quad(a\neq 1)$.

**5)** חשב את הסכומים הבאים:

א. $1^2+2^2+3^2+...+20^2$ ב. $4^2+5^2+6^2+...+24^2$

ג. $2^2+4^2+6^2+...+22^2$ ד. $1^2+3^2+5^2+...+17^2$

**6)** הוכח כי:

א. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k+4}}{k+2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{2k+6}}{k+3}$

ב. $\sum_{k=4}^{n-3}\frac{4k+17+2^{2k}}{k+1}=\sum_{k=8}^{n+1}\frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$

**7)** חשב את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

א. $\sum_{4}^{11}k^2$ ב. $\sum_{10}^{20}4^{2k}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $4^0+4^1+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+4^8+4^9+4^{10}$

ב. $2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4$

ג. $4a_4+4a_5+4a_6+4a_7+4a_8+4a_9+4a_{10}$

ד. $4\cdot7^2a_7+4\cdot8^2a_8+4\cdot9^2a_9+4\cdot10^2a_{10}+4\cdot11^2a_{11}+4\cdot7^2a_7$

ה. $1x^1+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+7x^7+8x^8$

ו. $na_5+na_6+na_7+na_8+na_9+na_{10}+na_{11}$

ז. $4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n$

ח. $\left((-1)^2+1\right)+\left(0^2+1\right)+\left(1^2+1\right)+\left(2^2+1\right)+\left(3^2+1\right)$

ט. $\left(1^2-x_2-4\right)+\left(2^2-x_4-4\right)+\left(3^2-x_6-4\right)$

**2)** א. $\sum_{k=0}^{7}2^k$ ב. $\sum_{k=1}^{10}2k$ ג. $\sum_{k=0}^{9}(2k+1)$ ד. $\sum_{k=1}^{7}k(k+1)$

ה. $\sum_{k=1}^{22}(2k-1)2k$ ו. $\sum_{k=1}^{7}3k(k+1)$ ז. $\sum_{n=3}^{14}(2n-1)^2$

ח. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$ ט. $\sum_{k=1}^{5}\frac{4k-2}{3^k}$ י. $\sum_{k=1}^{4}\frac{4k}{5^{k-1}}$

**3)** א. 220 ב. 1650 ג. 255 ד. 9160 ה. 28 ו. 4545

**4)** א. $5\cdot\left(2^{21}-2\right)+\frac{4}{3}\left(4^{20}-1\right)$ ב. $32\cdot\frac{10\left(10^{11}-1\right)}{10-1}+\frac{25\left(25^{11}-1\right)}{25-1}$

ג. $2^{10}\left[\frac{4\left(4^{20}-1\right)}{4-1}-\frac{4\left(4^9-1\right)}{4-1}\right]$

**5)** א. 2870 ב. 2856 ג. 2024 ד. 969

**6)** הוכחה.

**7)** א. $9\cdot8+6\cdot\frac{8(8+1)}{2}+\frac{8(8+1)(2\cdot8+1)}{6}$ ב. $4^{18}\cdot\frac{16\left(16^{11}-1\right)}{16-1}$

# מתמטיקה למדעים

## פרק 11 - הבינום של ניוטון

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 178

# הבינום של ניוטון:

## סיכום כללי:

### מושג העצרת:

מסמנים: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot .....\cdot n$ כאשר $n$ מספר טבעי.
מגדירים: $0!=1$.

### המקדם הבינומי:

הביטוי $\binom{n}{k}$ נקרא המקדם הבינומי ומוגדר ע"י: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ לכל $n,k$ טבעיים כאשר $0\le k\le n$.

### הבינום של ניוטון:

נוסחת הבינום של ניוטון ניתנת לכתיבה באופן הבא: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

לכל $n$ טבעי.

ניתן לחשב את האיבר העומד במקום ה-$k$ ע"י: $T_k=\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k-1}$.

### משולש פסקל:

משולש מספרים שבו כל מספר בשורה מסוימת שווה לסכום המספרים שבשורה שמעליו באופן המתואר:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & \\
\iddots & & & \vdots & & & & \ddots &
\end{array}$$

## שאלות:

**1)** חשב, ללא מחשבון:

א. $\frac{4!\cdot 7!}{0!\cdot 10!}$.

ב. $\frac{14!\cdot 20!}{10!\cdot 17!}$.

**2)** הוכח את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!\left(n^2-n\right)=n!$

ב. $(n-1)!n^2+n!=(n+1)!$

ג. $\frac{1}{(n-1)!}=\frac{(n+2)^2}{(n+2)!}+\frac{n^2-2}{(n+1)!}$

**3)** חשב:

א. $\binom{5}{3}$ ב. $\binom{4}{1}$ ג. $\binom{10}{0}$ ד. $\binom{14}{11}$

**4)** הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$.

ב. $\frac{k}{n}\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}$.

ג. $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$.

**5)** הוכח באינדוקציה שלכל $n\geq 2$ טבעי מתקיים: $\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-2}=\binom{n}{2}$.

**6)** רשום את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $(a+b)^4$ ב. $(x+2)^5$ ג. $(x-4)^3$

**7)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח $\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$ לכל $0\le k\le n$ , $k,n\in\mathbb{N}$.

ב. נסח והוכח (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

**8)** הוכח שלכל $n\ge 1$ טבעי מתקיים:

א. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$.

ב. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$.

ג. $\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+9\binom{n}{2}-\ldots+3^n\binom{n}{n}=4^n$.

**9)** מצא את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום $\left(\frac{1}{2a}+2a^2\right)^{10}$.

**10)** בפיתוח של $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{a}\right)^{12}$, ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא $a^7$.
מצא את מקום האיבר ואת ערכו.

**11)** מצא, בפיתוח של $\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)^{10}$, איבר שאינו מכיל את $x$, וחשב את ערכו.

**12)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא, בפיתוח של $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a}+\frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$, את המקדם של $\frac{1}{x}$.

ב. חשב את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם $a=b=1$.

**13)** המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום $(a+b)^n$, הוא 15.
מצא את $n$.

## תשובות סופיות:

1) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{1001}{285}$.

2) הוכחה.

3) א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 364.

4) הוכחה.

5) הוכחה.

6) א. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

ב. $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$.

ג. $(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

7) הוכחה.

8) הוכחה.

9) $T_4 = \frac{15}{2a}$.

10) $T_7 = 924a^7$.

11) $T_9 = 45$.

12) א. $\frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6}$ ב. $2^{18}$.

13) $n = 6$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 12 - מבוא לגאומטריה של המישור

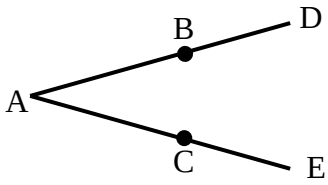
### תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות ..... (ללא ספר)
2. חיבור וחיסור קטעים ..... 182
3. חישובי זוויות וחיבור וחיסור זוויות ..... 183
4. זוויות קדקודיות וזוויות צמודות ..... 185
5. זוויות בין ישרים מקבילים ..... 187

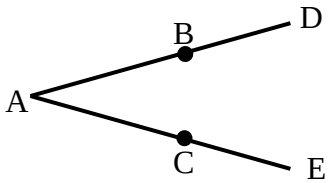
# חיבור וחיסור קטעים:

## שאלות:

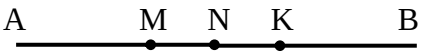
**1)** באיור שלפניך נתון: $AB = AC \ , \ BD = CE$.
הוכח: $AD=AE$.



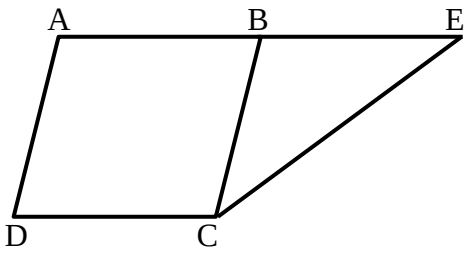

**2)** באיור שלפניך נתון: $AD = AE \ , \ AB = AC$.
הוכח: $BD = CE$.




**3)** הנקודות A, M, N, K, B נמצאות על ישר אחד.
נתון כי: $AM = KB \ , \ MN = NK$.
הוכח: $AN = BN$.




**4)** בסרטוט שלפניך נתון כי: $BC = AB \ , \ BE + BC = 2AB$.
הוכח: $AB = BE$.




## תשובות סופיות:

**1)** שאלת הוכחה.

**2)** שאלת הוכחה.

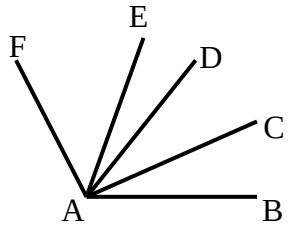
**3)** שאלת הוכחה.

**4)** שאלת הוכחה.

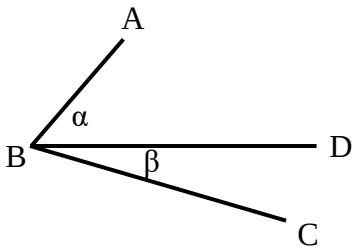
## חישובי זוויות וחיבור וחיסור זוויות:

### שאלות:

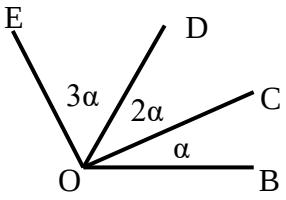
**5)** נתון: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAC$ , $\sphericalangle FAE = 2\cdot\sphericalangle EAD$ .
וכן: $\sphericalangle FAD = 60°$ , $\sphericalangle EAB = 80°$ .
חשב את הזויות הבאות:
$\sphericalangle CAB$ , $\sphericalangle EAC$ , $\sphericalangle FAB$ .



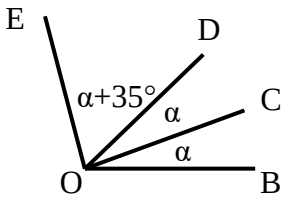

**6)** באיור שלפניך נתון: $\sphericalangle ABC = 69°$ .
נתון כי: $\alpha = 2\beta$ (זוויות סמוכות).
מצא את $\alpha$ ואת $\beta$ .



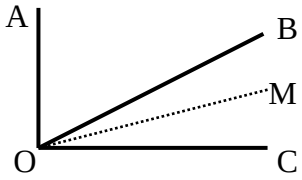

**7)** באיור שלפניך מספר קרניים היוצאים מהנקודה O.
הנתונים הם: $\sphericalangle EOB = 138°$ .
חשב את הזוויות הבאות:
$\sphericalangle COB$ , $\sphericalangle DOC$ , $\sphericalangle EOD$ .



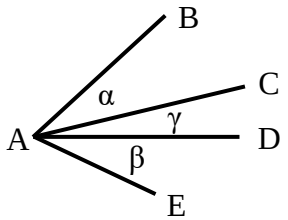

**8)** באיור שלפניך נתון: $\sphericalangle EOB = 110°$ .
שאר הנתונים מופיעים בתרשים.
חשב את הזוויות הבאות:
$\sphericalangle DOC$ , $\sphericalangle EOC$ .




**9)** נתון האיור הבא ובו: $\sphericalangle AOC = 90°$ .
OM חוצה את זווית BOC.
מתקיים: $\sphericalangle AOB = 3\sphericalangle MOC$ .
חשב את: $\sphericalangle BOM$ , $\sphericalangle AOM$ .




**10)** בסרטוט שלפניך נתון: $\alpha = \beta$ .
הוכח כי: $\sphericalangle EAC = \sphericalangle BAD$ .



## תשובות סופיות:

**5)** $\sphericalangle CAB = 30^\circ$ , $\sphericalangle EAC = 50^\circ$ , $\sphericalangle FAB = 120^\circ$.

**6)** $\alpha = 46^\circ$ , $\beta = 23^\circ$.

**7)** $\sphericalangle DOE = 69^\circ$ , $\sphericalangle COD = 46^\circ$ , $\sphericalangle BOC = 23^\circ$.

**8)** $\sphericalangle DOC = 25^\circ$ , $\sphericalangle EOC = 85^\circ$.

**9)** $\sphericalangle BOM = 18^\circ$ , $\sphericalangle AOM = 72^\circ$.

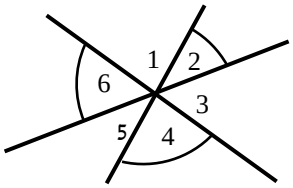
**10)** שאלת הוכחה.

# זוויות קדקודיות וזוויות צמודות:

## שאלות:

**11)** חשב את סכום הזויות הבאות (נמק):

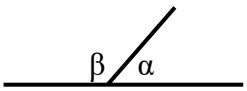
$\sphericalangle 2+\sphericalangle 4+\sphericalangle 6$




**12)** באיור שלפניך הזוויות $\alpha$ ו- $\beta$ הן זוויות צמודות.

ידוע כי: $\alpha=63°$ .

מצא את זווית $\beta$ .

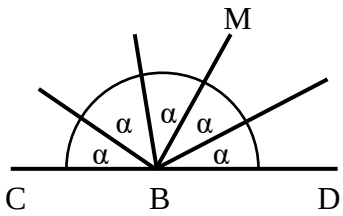



**13)** באיור שלפניך הזווית CBD היא שטוחה.

כל הזוויות שוות ל- $\alpha$ .

א. חשב את $\alpha$ .

ב. חשב את זווית CBM.

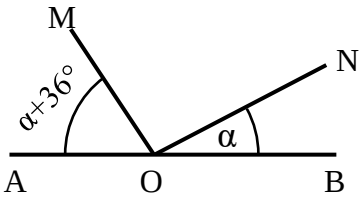



**14)** בסרטוט שלפניך ידוע:

הזווית AOB היא שטוחה.

נתון: $\alpha=27°$ .

הוכח כי: $MO\perp NO$ .

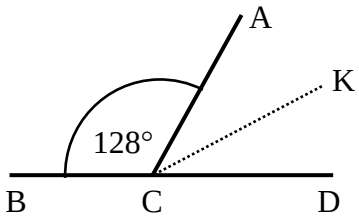



**15)** הזוויות $\sphericalangle ACD$ ו- $\sphericalangle ACB$ הן צמודות.

ידוע כי CK חוצה זווית ACD.

כמו כן: $\sphericalangle ACB=128°$ .

חשב את זווית BCK.



## תשובות סופיות:

**11)** $180°$.

**12)** $\beta = 117°$.

**13)** א. $\alpha = 36°$ ב. $\sphericalangle CBM = 108°$.

**14)** שאלת הוכחה.

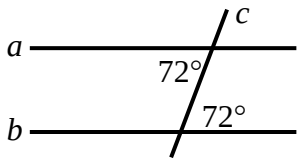
**15)** $\sphericalangle BCK = 154°$.

# זוויות בין ישרים מקבילים:

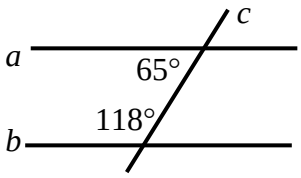
## שאלות:

**16)** קבע בכל מקרה האם הישרים $a$ ו-$b$ מקבילים או שלא. נמק.

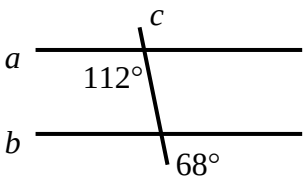
א.



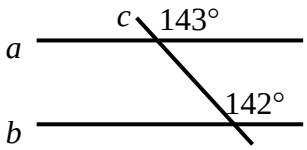

ב.




ג.

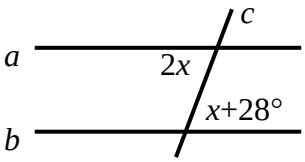



ד.

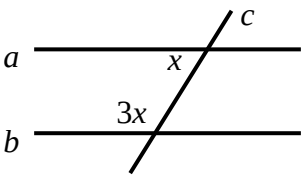



**17)** הישרים $a$ ו-$b$ מקבילים. מצא את $x$ בכל אחד מהמקרים הבאים:

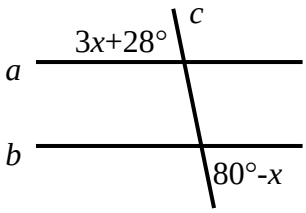
א.



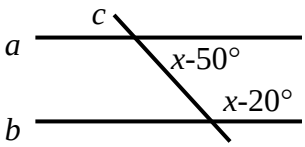

ב.



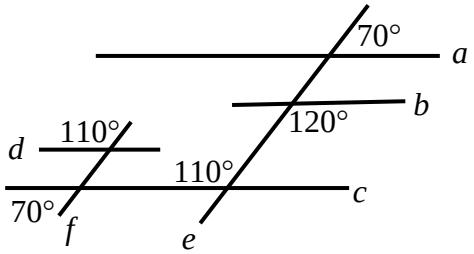

ג.



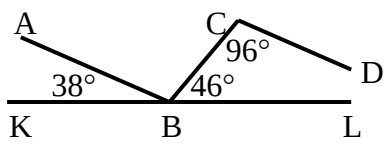

ד.



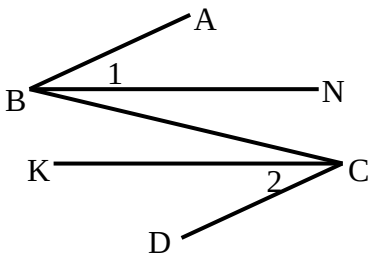

**18)** מצא את זוגות הישרים המקבילים בסרטוט הבא.
נמק.



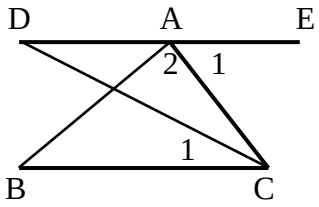
**19)** בסרטוט שלפניך נתון כי KL הוא קו ישר.
שאר הזוויות מופיעות בתרשים.
הוכח כי: $AB \parallel CD$.



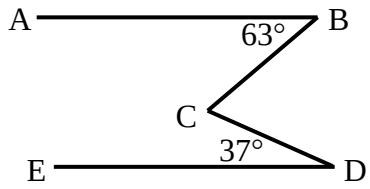

**20)** באיור שלפניך נתון כי:
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$ , $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle C_2$.
הוכח כי: $BN \parallel CK$.




**21)** באיור שלפניך מופיע קטע ישר DE.
מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
מחברים את BC וידוע כי $BC \parallel DE$.
מעבירים את CD – חוצה זווית C.
נתון: $\sphericalangle A_2 = 85°$ , $\sphericalangle A_1 = 68°$.
א. חשב את הזווית $\sphericalangle C_1$.
ב. חשב את הזווית $\sphericalangle B$.




**22)** בסרטוט שלפניך נתון:
$AB \parallel DE$ , $\sphericalangle B = 63°$ , $\sphericalangle D = 37°$.
חשב את גודל הזווית BCD.



## תשובות סופיות:

**16)** א. כן ב. לא ג. כן ד. לא.

**17)** א. $28°$ ב. $45°$ ג. $13°$ ד. $125°$.

**18)** $a \parallel c \parallel d$ , $e \parallel f$.

**19)** שאלת הוכחה.

**20)** שאלת הוכחה.

**21)** א. $34°$ ב. $27°$.

**22)** $\sphericalangle BCD = 100°$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 13 - גיאומטריה אוקלידית - משולשים

### תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות ..... 190
2. זוויות במשולשים ..... 192
3. משולש שווה שוקיים ושווה צלעות ..... 195
4. חפיפת משולשים ..... 197
5. זווית חיצונית במשולש ..... 203
6. משולש ישר זווית ..... 204
7. קטע אמצעים במשולש ..... 207
8. מפגש תיכונים במשולש ..... 209

# הגדרות כלליות:

## סוגי משולשים:

ניתן למיין את המשולשים לפי זוויות או לפי צלעות.
לפי זוויות:

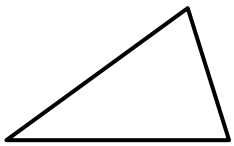
1. משולש חד זווית – משולש שכל זוויותיו חדות.
2. משולש ישר זווית – משולש בעל זווית ישרה.
3. משולש קהה זווית – משולש בעל זווית קהה.

לפי צלעות:

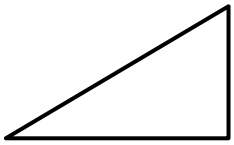
4. משולש שונה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שונות באורכן.
5. משולש שווה שוקיים – משולש שבו שתי צלעות שוות.
6. משולש שווה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שוות באורכן.

**איורים לכל מקרה לפי המספרים:**

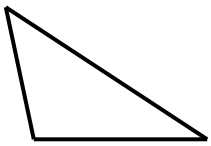
1. משולש חד זווית:



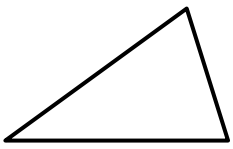
2. משולש ישר זווית:



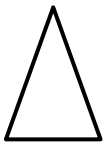
3. משולש קהה זווית:



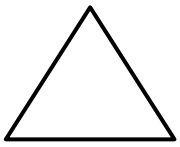
4. משולש שונה צלעות:



5. משולש שווה שוקיים:



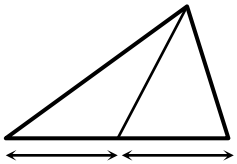
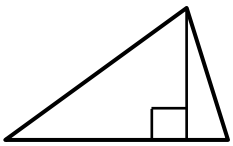
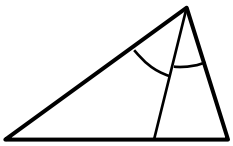
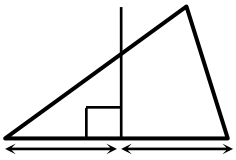
6. משולש שווה צלעות:



## קטעים מיוחדים במשולשים:

1. תיכון – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו וחוצה אותה.
2. גובה – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו ומאונך לה.
3. חוצה זווית – קטע היוצא מקדקוד וחוצה את הזווית שממנה הוא יוצא.
4. אנך אמצעי – קטע היוצא מאמצע צלע ומאונך לה.

**איורים לכל מקרה לפי המספרים:**

1. 
2. 
3. 
4. 

## משפטים כלליים במשולשים:

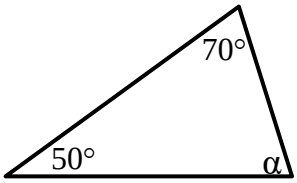
- סכום הזוויות במשולש הוא $180°$.
- סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
- במשולש מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה ולהפך.
  במשולש מול הזווית הקטנה נמצאת הצלע הקטנה ולהפך.
  במשולש מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות ולהפך.

# זוויות במשולשים:

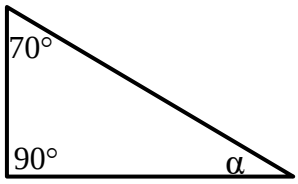
## שאלות:

**1)** חשב את הזוויות בכל אחד מהמשולשים שלפניך:

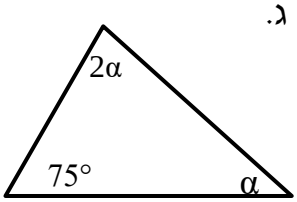
א.



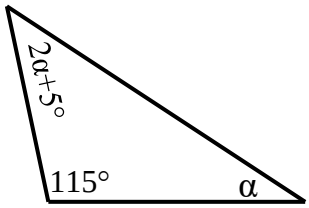

ב.



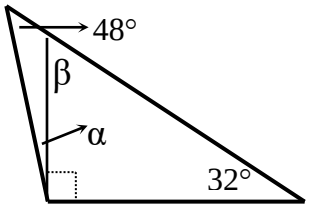

ג.



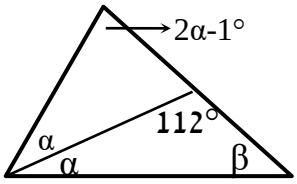

ד.



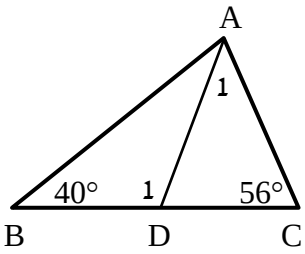

ה.



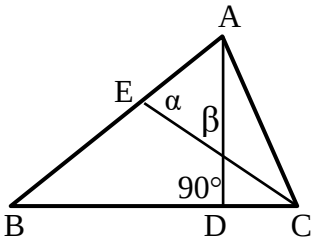

ו.



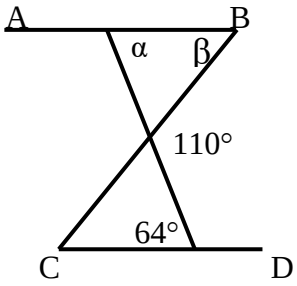

**2)** במשולש שלפניך נתון AD חוצה זווית A.
נתון: $\sphericalangle C = 56°$ , $\sphericalangle B = 40°$.
חשב את הזוויות $\sphericalangle D_1$ , $\sphericalangle A_1$.




**3)** נתון משולש ABC ובו AD גובה לצלע BC.
$\sphericalangle D = 90°$ הקטע CE חוצה זווית $\sphericalangle C$.
כמו כן: $\beta = 63°$ , $\alpha = 75°$.
חשב את זוויות המשולש ABC.



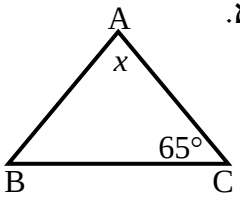

**4)** בסרטוט שלפניך נתון: $AB \parallel CD$.
מצא את הזוויות $\alpha$ ו- $\beta$.



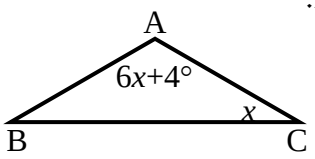

**5)** שלוש זוויות המשולש מתייחסות זו לזו כמו: 1:2:6.
חשב את זוויות המשולש.

**6)** בסרטוטים שלפניך נתונים משולשים שווי שוקיים $(AB=AC)$ שאחת מזוויותיהם נתונה. מצא את הגודל $x$ בכל סרטוט.

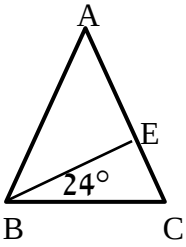
א.




ב.




**7)** הגובה לשוק המשולש שווה השוקיים $ABC$ , $(AB=AC)$ יוצר זווית בת $24°$ עם הבסיס $BC$.
מצא את זוויות המשולש $ABC$.




**8)** חשב את זוויות המשולשים בכל אחד מהמקרים הבאים:

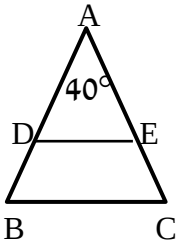
א. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה פי ארבעה מזווית הראש.
מצא את זוויות המשולש.

ב. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה ב-$12°$ מזווית הראש.
מצא את זוויות המשולש.

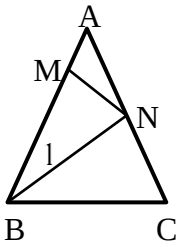
**9)** באיור שלפניך נתון: $AB=AC$ , $AD=AE$ , $\sphericalangle A=40°$.

א. חשב את הזוויות: $\sphericalangle E$ , $\sphericalangle D$ , $\sphericalangle C$ , $\sphericalangle B$.

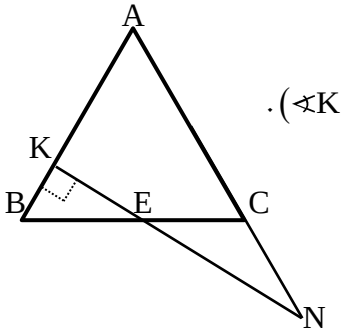
ב. הוכח: $DE \parallel BC$.




**10)** באיור שלפניך נתון: $AB=AC$.
מעבירים את הקטעים $BN$ ו- $MN$ כך שמתקיים:
$BM=BN=BC$.
נתון בנוסף: $\sphericalangle A=32°$.
חשב את זוויות: $\sphericalangle ANM$ , $\sphericalangle B_1$.




**11)** משולש $ABC$ הוא שווה שוקיים $(AB=AC)$.
בנקודה $K$ כלשהי על $AB$ מעלים אנך ל-$AB$ $(\sphericalangle K=90°)$.
אנך זה חותך את $BC$ בנקודה $E$
ואת המשך $AC$ בנקודה $N$.
מתקיים: $CE=CN$.
חשב את זוויות המשולש $ABC$.



## תשובות סופיות:

**1)** א. $\alpha = 60°$ ב. $\alpha = 20°$ ג. $\alpha = 35°$ ד. $\alpha = 20°$
ה. $\alpha = 10°\ ,\ \beta = 58°$ ו. $\alpha = 37\frac{2}{3}°\ ,\ \beta = 30\frac{1}{3}°$.

**2)** $\sphericalangle A_1 = 42°\ ,\ \sphericalangle D_1 = 98°$

**3)** $\sphericalangle A = 78°\ ,\ \sphericalangle B = 48°\ ,\ \sphericalangle C = 54°$.

**4)** $\alpha = 64°\ ,\ \beta = 46°$.

**5)** $20°\ ,\ 40°\ ,\ 120°$.

**6)** א. $x = 50°$ ב. $x = 22°$.

**7)** $\sphericalangle A = 48°\ ,\ \sphericalangle B = \sphericalangle C = 66°$.

**8)** א. $20°\ ,\ 80°\ ,\ 80°$ ב. $52°\ ,\ 64°\ ,\ 64°$

**9)** א. $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = 70°$. ב. שאלת הוכחה

**10)** א. $\sphericalangle ANM = 37°\ ,\ \sphericalangle B_1 = 42°$.

**11)** $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$.

# משולש שווה שוקיים ושווה צלעות:

## סיכום כללי:

**משפטים במשולש שווה שוקיים:**

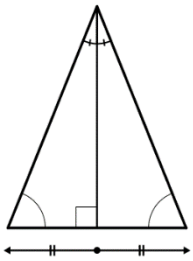
- במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
(משפט הפוך) משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים.
- במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים.
(משפט הפוך) משולש שבו חוצה זווית הוא גם גובה או חוצה זווית הוא גם תיכון או גובה הוא גם תיכון הוא משולש שווה שוקיים.

**משפטים במשולש שווה צלעות:**

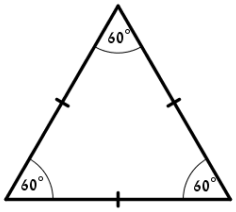
- במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות $60°$.
(משפט הפוך) משולש שבו כל הזוויות שוות הוא משולש שווה צלעות.

**איורים:**

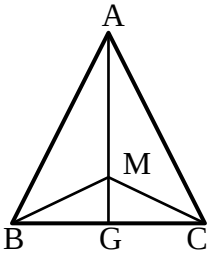
משפט במשולש שווה שוקיים



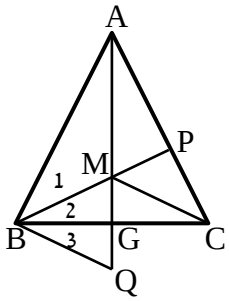
משפט במשולש שווה צלעות



## שאלות:




**12)** המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים (AB=AC) .
AG חוצה את זווית A∢ .
M היא נקודה כלשהי על AG.
הוכח כי: BM = CM .




**13)** המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים (AB=AC) .
AG ו-BP חוצים את הזוויות A∢ ו-ABC∢ בהתאמה.
הנקודה Q נמצאת על המשך AG .
נתון: GM = GQ .
הוכח: $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_3$ .

## תשובות סופיות:

**12)** שאלת הוכחה.
**13)** שאלת הוכחה.

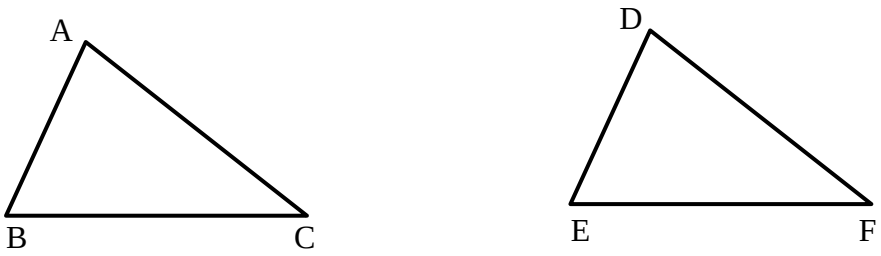
# חפיפת משולשים:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

משולשים חופפים הם משולשים ששווים זה לזה בכל צלעותיהם ובכל זוויותיהם בהתאמה.

סימון מתמטי: $\Delta ABC \cong \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} AB = DE \ , \ AC = DF \ , \ BC = EF \\ \sphericalangle A = \sphericalangle D \ , \ \sphericalangle B = \sphericalangle E \ , \ \sphericalangle C = \sphericalangle F \end{cases}$.




**משפטי החפיפה:**

- משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ):

אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

- משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (ז.צ.ז):

אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות והצלע שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

- משפט חפיפה צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ):

אם בין שני משולשים שוות שלוש צלעות בהתאמה אז המשולשים חופפים.

- משפט חפיפה צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז):

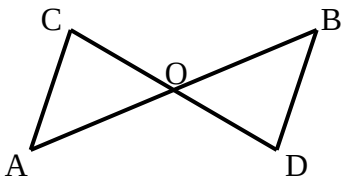
אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

## שאלות:

### שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-זווית-צלע:

**14)** באיור שלפניך הקטעים AB ו- CD חוצים זה את זה בנקודה O.

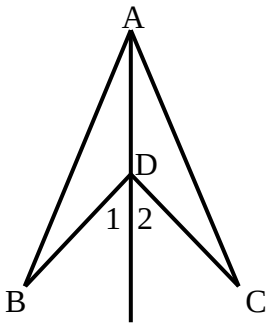
הוכח: $\Delta ACO \cong \Delta BDO$.




**15)** באיור שלפניך נתון: $BD = CD$.

כמו כן: $\sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2$.

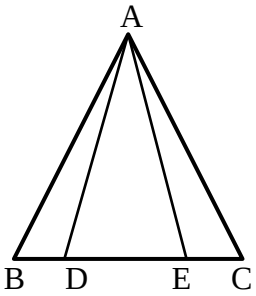
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.




**16)** בסרטוט שלפניך נתון:

$BE = CD$ , $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ , $AB = AC$.

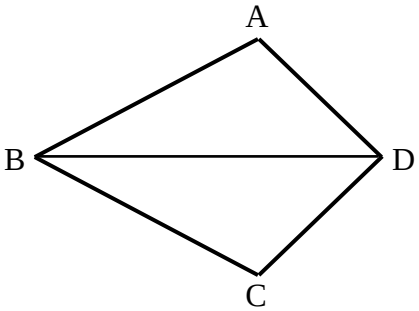
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.




### שאלות העוסקות במשפט חפיפה זווית-צלע-זווית:

**17)** במרובע ABCD נתון כי BD חוצה את זוויות $\sphericalangle B$ ו- $\sphericalangle D$.

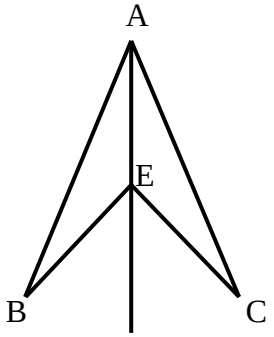
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.



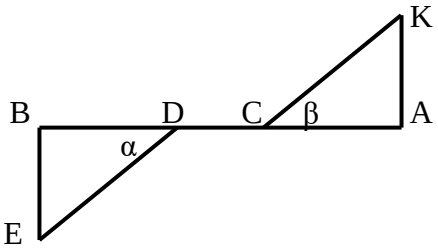

**18)** בסרטוט שלפניך נתון:

AE חוצה את הזוויות $\sphericalangle BAC$ ו-$\sphericalangle BEC$.

הוכח: $\Delta ABE \cong \Delta ACE$.

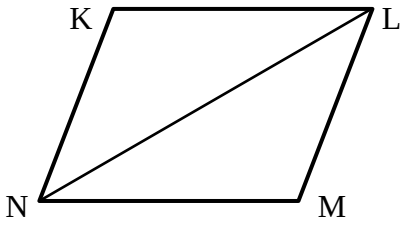


**19)** בציור שלפניך נתון:
$AC = BD \ , \ \alpha = \beta$
$AB \perp BE \ , \ AB \perp AK$.
הוכח: $\Delta AKC \cong \Delta BED$.



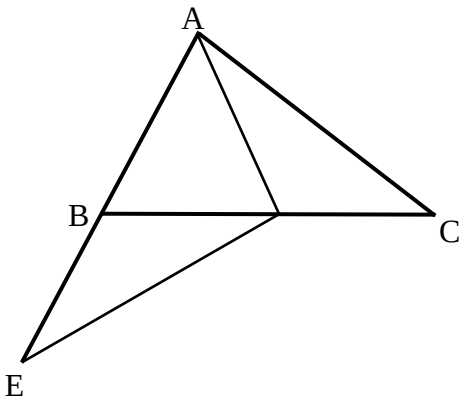

**שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-צלע:**

**20)** באיור שלפניך נתון:
$KL = MN \ , \ KN = LM$.
הוכח: $\Delta KLN \cong \Delta MLN$.



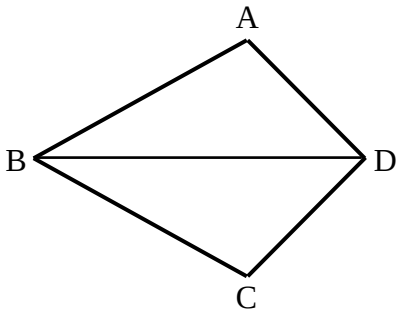

**שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-זווית שמול הצלע הגדולה:**

**21)** בציור שלפניך נתון:
$AC = DE \ , \ AB = BE = AD$
הוכח כי הנקודה D היא אמצע BC.

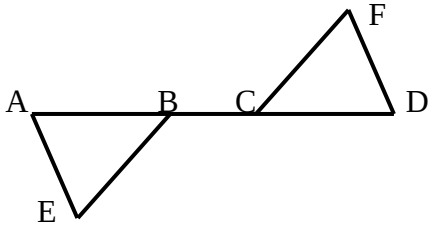



**שאלות העוסקות בשלושת משפטי החפיפה יחדיו:**

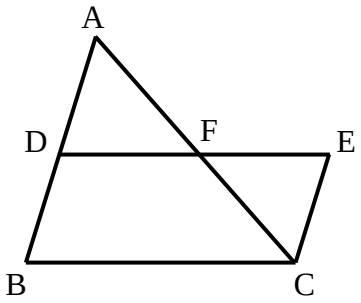
**22)** במרובע ABCD נתון:
$AB = BC \ , \ AD = CD$.
הוכח: $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.



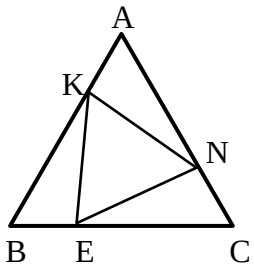

**23)** הקטע AD הוא קו ישר.
נתון: $AC = BD \ , \ AE = DF$.
כמו כן מתקיים: $\sphericalangle A = \sphericalangle D$.
הוכח כי הקטעים BE ו- FC שווים.



**24)** באיור שלפניך נתון:
הנקודה F היא אמצע הקטע AC.
מתקיים: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACE$.
הקטעים BD ו- CE שווים.
הוכח את הטענות הבאות:
א. F היא אמצע הקטע DE.
ב. D היא אמצע הקטע AB.

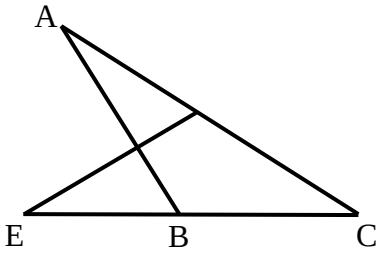



**25)** המשולש ABC הוא שווה צלעות.
נתון: $AK = BE = CN$.
הוכח כי $\Delta KEN$ הוא גם משולש שווה צלעות.

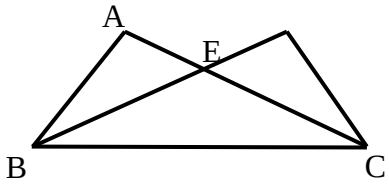



**שאלות העוסקות במשולשים המכסים חלקית זה את זה:**

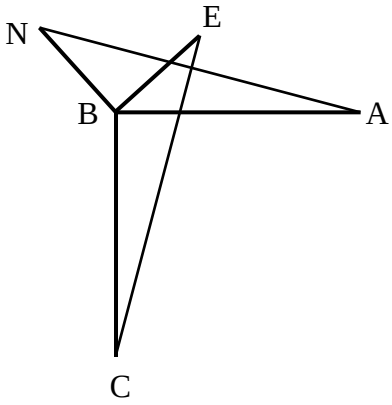
**26)** בציור שלפניך נתון: $AC = CE \ , \ DC = BC$.
הוכח:
א. $\Delta CDE \cong \Delta CBA$.
ב. $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABE$.




**27)** באיור שלפניך נתון:
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB$ , $\sphericalangle DBC = \sphericalangle ACB$.
הוכח: $AB = CD$.

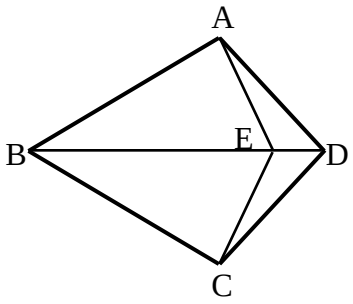



**28)** בציור שלפניך נתון:
$AB = BC \ , \ BE = BN$
$AB \perp BC \ , \ BE \perp BN$
הוכח: $AN = CE$.

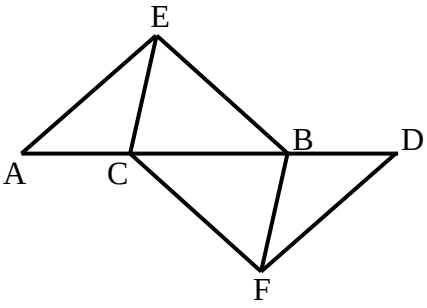


**שאלות העוסקות בשתי חפיפות:**

**29)** בסרטוט שלפניך נתון כי BD הוא קו ישר.
מתקיים: $AB = BC$ , $AD = CD$.
הנקודה E נמצאת על BD.
הוכח כי: $AE = CE$.

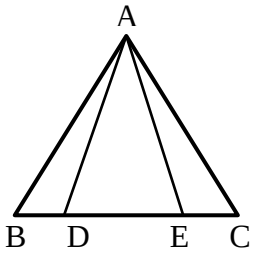



**30)** בציור שלפניך נתון כי AD הוא קו ישר. מתקיים: $\sphericalangle A = \sphericalangle D$ , $\sphericalangle AEC = \sphericalangle DFB$
וכן $AE = DF$. הוכח:
א. $CE = BF$.
ב. $BE = CF$.

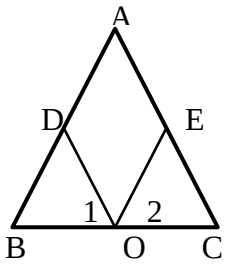



**שאלות העוסקות בחפיפות עם משולש שווה שוקיים:**

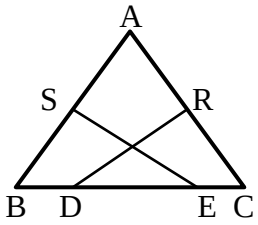
**31)** נתון משולש שווה שוקיים $\Delta ABC$ , $(AB = AC)$.
מתקיים: $BD = CE$.
הוכח: $AD = AE$.

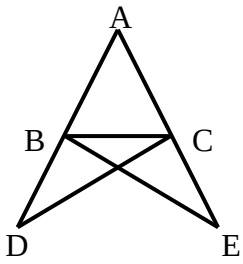



**32)** בסרטוט שלפניך נתון משולש
שווה שוקיים $\Delta ABC$ , $(AB = AC)$.
הנקודה O היא אמצע BC.
מתקיים: $\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_2$.
הוכח: $AD = AE$.

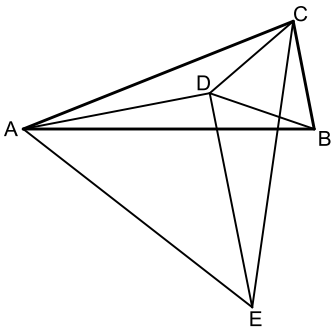



**33)** במשולש שווה שוקיים $\Delta ABC$ , $(AB = AC)$
הנקודות S ו-R הן אמצעי השוקיים.
ידוע כי $BD = CE$.
הוכח כי: $SE = RD$.






**34)** נתון משולש $ABC$. הקטעים $AD$ ו-$AE$ ישרים ונתון בנוסף כי: $BD = CE$ , $DC = BE$.
הוכח: $AB = AC$.




**35)** המשולש $ABC$ הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$.
על השוק $AC$ ועל הבסיס $BC$ בונים משולשים שווי צלעות $ACE$ ו-$BCD$.
מחברים את הנקודה $D$ עם הקדקודים $A$ ו-$E$.

א. הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

ב. ידוע גם כי: $DE \parallel BC$.
הוכח: $\sphericalangle ADE = 90°$.

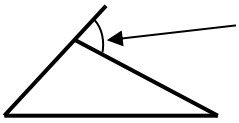
## תשובות סופיות:

**14)** שאלת הוכחה.
**15)** שאלת הוכחה.
**16)** שאלת הוכחה.
**17)** שאלת הוכחה.
**18)** שאלת הוכחה.
**19)** שאלת הוכחה.
**20)** שאלת הוכחה.
**21)** שאלת הוכחה.
**22)** שאלת הוכחה.
**23)** שאלת הוכחה.
**24)** שאלת הוכחה.
**25)** שאלת הוכחה.
**26)** שאלת הוכחה.
**27)** שאלת הוכחה.
**28)** שאלת הוכחה.
**29)** שאלת הוכחה.
**30)** שאלת הוכחה.
**31)** שאלת הוכחה.
**32)** שאלת הוכחה.
**33)** שאלת הוכחה.
**34)** שאלת הוכחה.
**35)** שאלת הוכחה.

# זווית חיצונית במשולש:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**



זווית חיצונית למשולש היא זווית הכלואה בין צלע במשולש להמשך צלע הסמוכה לה.

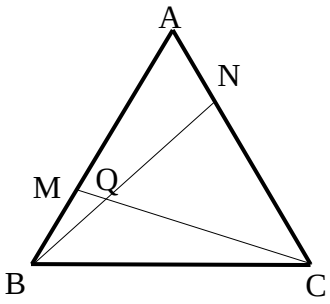
**משפט:**

זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

## שאלות:

**36)** הוכח את המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

**37)** המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה צלעות.




נתון: $AN = BM$ .

הוכח: $\sphericalangle NQC = 60°$ .

## תשובות סופיות:

**36)** שאלת הוכחה.

**37)** שאלת הוכחה.

# משולש ישר זווית:

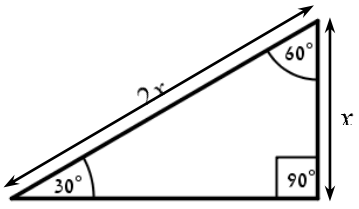
## סיכום כללי:

**משפטים במשולש ישר זווית:**

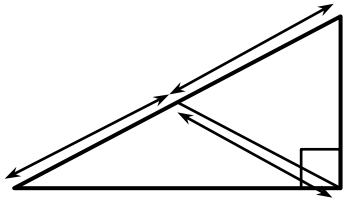
- סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא $90°$.
- במשולש שזוויותיו $90°$ , $60°$ , $30°$, הניצב שמול הזווית של ה-$30°$ שווה למחצית היתר.
(משפט הפוך ל-2) אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה היא בת $30°$.
- במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
(משפט הפוך ל-4) אם במשולש תיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש ישר זווית (כאשר הזווית ממנה יוצא התיכון היא הזווית הישרה).
- משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.
כלומר: $(\text{יתר})^2 = (\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2$.
- (משפט הפוך למשפט פיתגורס) אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית, אז המשולש ישר זווית.

**איורים:**

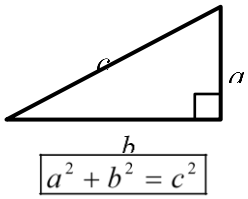
משולש $90°,60°,30°$




תיכון ליתר



משפט פיתגורס



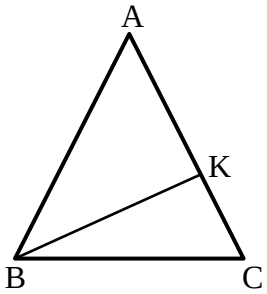
## שאלות:

**38)** באיור שלפניך נתון משולש שווה שוקיים $ABC$ $(AB=AC)$.

זווית הבסיס: $\sphericalangle C=75°$

וכן: 16 ס"מ =AC. מעבירים גובה BK לשוק AC.

מצא את אורך הגובה BK.

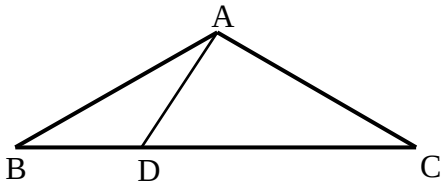



**39)** המשולש $ABC$ שבציור הוא משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$.

נתון: $\sphericalangle DAC=90°$ , $\sphericalangle ABD=30°$ ,

18 ס"מ = BC.

חשב את אורכו של הקטע BD.



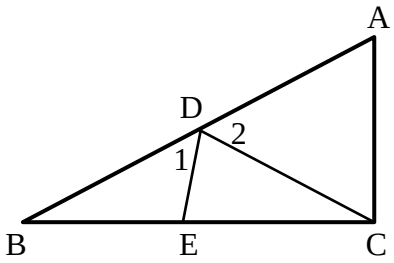

**40)** המשולש $\Delta ABC$ הוא ישר זווית $(\sphericalangle C=90°)$.

מעבירים תיכון CD ליתר AB במשולש.

הנקודה E נמצאת על BC כך ש- $CD=CE$.

ידוע כי: $\sphericalangle CED=80°$.

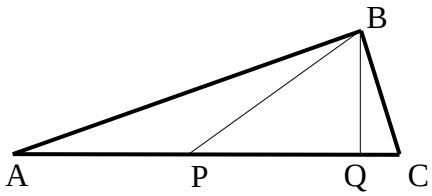
מצא את הזוויות: $\sphericalangle D_2$ , $\sphericalangle D_1$




**41)** המשולש $ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC=90°)$. BQ הוא הגובה ליתר AC ו-BP הוא התיכון ליתר AC.

נתון: $BQ=\frac{1}{2}BP$.

חשב את גודלה של הזווית C.

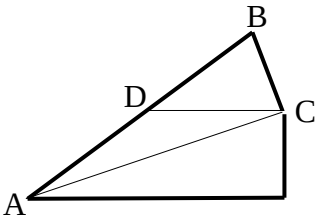



**42)** המשולש BCD שבציור הוא משולש שווה שוקיים $(BD=DC)$.

AC חוצה את הזווית $\sphericalangle BAE$.

נתון: $DC \parallel AE$.

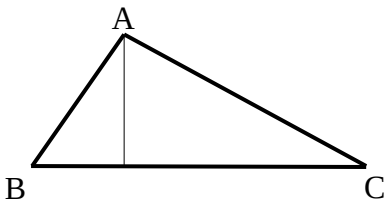
חשב את גודלה של הזווית $\sphericalangle ACB$.



**43)** AD הוא גובה במשולש ABC.
נתון: AB = 15 ס"מ , AC = 20 ס"מ,
BC = 25 ס"מ .

א. מצא את אורכו של AD
ואת שטח המשולש ABC .

ב. האם המשולש ABC ישר זווית? נמק.




## תשובות סופיות:

**38)** 8 ס"מ.
**39)** 6 ס"מ.
**40)** $\sphericalangle D_1 = 60°$ , $\sphericalangle D_2 = 40°$
**41)** $75°$
**42)** $90°$
**43)** א. AD = 12 ס"מ , $S_{ABC}$ = 150 סמ"ר .
ב. כן.

# קטע אמצעים במשולש:

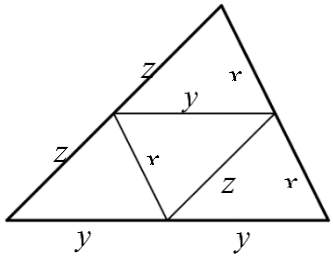
## סיכום כללי:

**הגדרה:**

קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.

- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- (משפט הפוך 1): קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית חוצה את הצלע השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).
- (משפט הפוך 2): קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

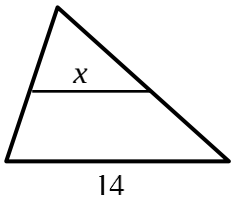
איור – קטע אמצעים במשולש:



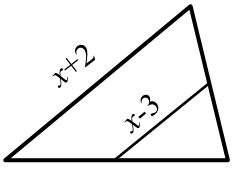

## שאלות:

**44)** לפניך משולשים עם קטע אמצעים בתוכם.
מצא את $x$ בכל אחד מהמקרים:

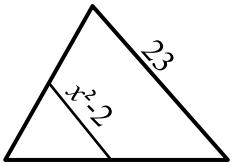
א.



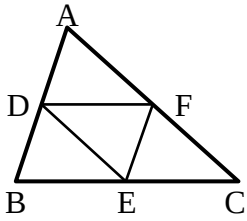

ב.

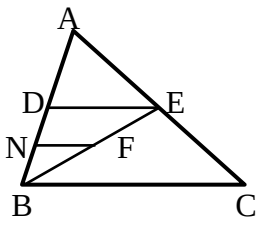



ג.

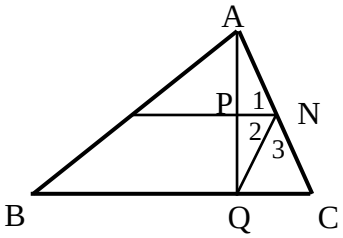



**45)** הנקודות D, E ו-F הם נקודות האמצע במשולש $\Delta ABC$.
נתון: DE= 9 ס"מ, EF= 12 ס"מ, DF = 10 ס"מ.
חשב את היקף המשולש $\Delta ABC$.

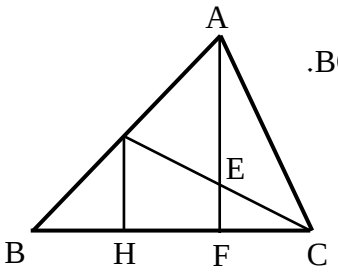





**46)** הקטע DE הוא קטע אמצעים במשולש $\Delta ABC$.
הקטע FN הוא קטע אמצעים במשולש $\Delta BDE$.
נתון: 3 ס"מ = NF. מצא את אורך הצלע BC.




**47)** הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש $\Delta ABC$
AQ הוא גובה לצלע BC.
הוכח: $\sphericalangle N_1 = \sphericalangle N_2$.




**48)** AF הוא גובה לצלע BC ו- GC הוא תיכון
לצלע AB במשולש $\Delta ABC$. הקטע GH מאונך לצלע BC.

א. הוכח: HF =BH.

ב. נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את
התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס"מ.
חשב את אורך הקטע EF.

## תשובות סופיות:

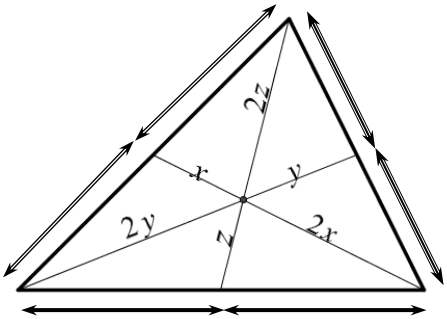
**44)** א. $x=7$ ב. $x=8$ ג. $x=\sqrt{13.5}$.
**45)** 62 ס"מ.
**46)** 12 ס"מ.
**47)** שאלת הוכחה.
**48)** א. שאלת הוכחה. ב. 3 ס"מ.

# מפגש תיכונים במשולש:

## סיכום כללי:

- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון ביחס של 1:2 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.
- אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של 1:2 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.
- נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.

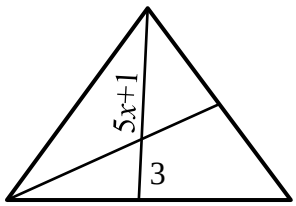
איור – מפגש תיכונים במשולש:



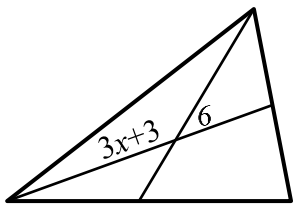

## שאלות:

**49)** הקטעים שבמשולשים הם תיכונים. מצא את $x$ בכל אחד מהמקרים הבאים:

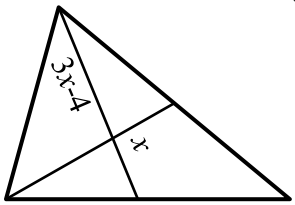
א.



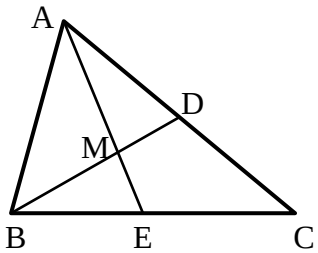

ב.



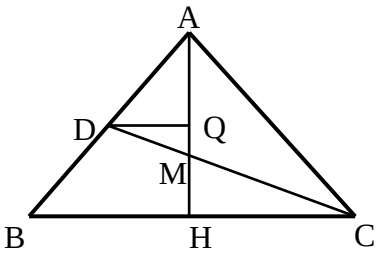

ג.



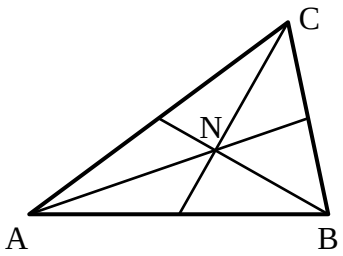

**50)** הקטעים AE ו-BD הם תיכונים במשולש $\Delta ABC$ אשר נחתכים בנקודה M.
נתון: $AD = AM$ וכן: 30 ס"מ = AC.
חשב את AE.



**51)** המשולש $\Delta ABC$ שבציור הוא משו"ש ($AB=AC$) שבו $AH$ הוא הגובה לבסיס $BC$.
$CD$, התיכון לשוק $AB$,
יוצר זווית של $30°$ עם הבסיס $BC$.
נתון: $BC=12\sqrt{3}$ ס"מ, $DQ \parallel BC$.
חשב את אורך הקטע $MQ$.




**52)** במשולש $\Delta ABC$ נחתכים התיכונים בנקודה $N$.
נתון: $\sphericalangle CNB=90°$.
הוכח: $BC=AN$.




## תשובות סופיות:

**49)** א. $x=1$ ב. $x=3$ ג. $x=4$
**50)** 22.5 ס"מ.
**51)** 3 ס"מ.
**52)** שאלת הוכחה.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 14 - גיאומטריה אוקלידית - מרובעים

### תוכן העניינים

1. מרובע כללי ..... 211
2. המקבילית ..... 213
3. המלבן ..... 218
4. המעוין ..... 221
5. הריבוע ..... 224
6. הטרפז ..... 226
7. הדלתון ..... 232
8. סיכום משפחת המרובעים ..... 234

# מרובע כללי:

## סיכום כללי:

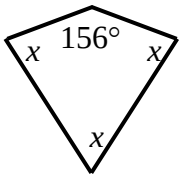
**הגדרה:** מרובע הוא מצולע בעל 4 צלעות.

**משפט:** סכום זוויות במרובע הוא $360°$.

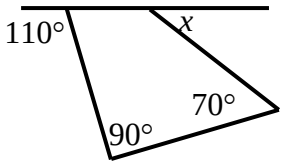
## שאלות:

**1)** בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים.
חלק מהזוויות מסומנות ב-$x$.
מצא את $x$ ואת הזוויות של כל מרובע.

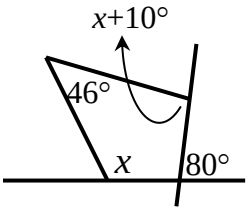
א.




ב.

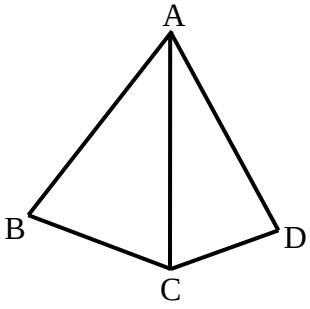



ג.

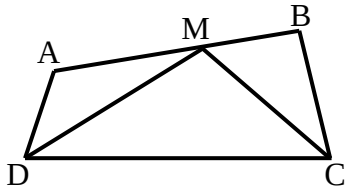



**2)** מצא את זוויות המרובע בכל אחד מהמקרים הבאים:
כל זווית במרובע (פרט לראשונה) גדולה ב-$10°$ מהזווית הקודמת לה.
זוויות המרובע מתייחסות זו לזו כמו: $1:2:3:4$.

**3)** המשולשים ABC ו-ACD שבציור הם משולשים שווי שוקיים ($AB=AC=AD$).
נתון: $\sphericalangle BAD=80°$.
חשב את גודלה של הזווית BCD.




**4)** בסרטוט שלפניך נתון מרובע ABCD.
CM חוצה את זווית C ו-DM חוצה את זווית D.
ידוע כי: $CM=DM$ , $\sphericalangle A=130°$ , $\sphericalangle DMC=110°$.
מצא את שאר זוויות המרובע ABCD.



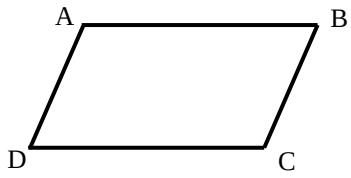
## תשובות סופיות:

1) א. $x=68°$ . ב. $x=50°$ . ג. $x=102°$
2) א. $105°$ , $95°$ , $85°$ , $75°$ ב. $144°$ , $108°$ , $72°$ , $36°$
3) $140°$.
4) $\sphericalangle B=90°$ , $\sphericalangle C=\sphericalangle D=70°$

# המקבילית:

## סיכום כללי:

**הגדרה:** מקבילית היא מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.



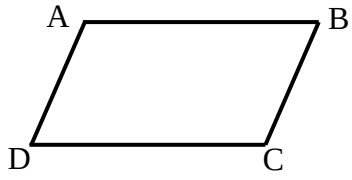

- במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
- במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות.
- במקבילית סכום כל שתי זוויות סמוכות הוא $180°$.
- במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
- היקף מקבילית = סכום הצלעות, שטח מקבילית = צלע · גובה לצלע.

**כדי להוכיח כי מרובע הוא מקבילית נשתמש באחת הדרכים הבאות:**

- מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית.
- מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.
- מרובע שבו זוג צלעות שוות ומקבילות הוא מקבילית.
- מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
- מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

## שאלות:

**5)** נתונה מקבילית ABCD.
בכל אחד מהסעיפים הבאים הזוויות מיוצגות ע"י תבניות מספר שונות.
מצא את זוויות המקבילית בכל מקרה.

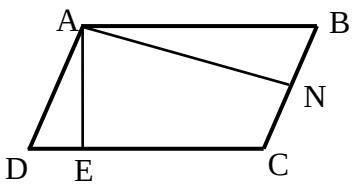


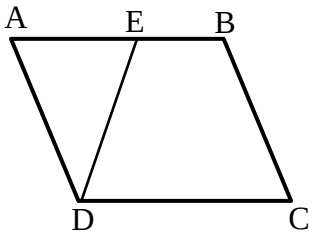

א. $\sphericalangle A = x$ , $\sphericalangle B = x - 70°$.

ב. $\sphericalangle B = 3x - 130°$ , $\sphericalangle D = x + 10°$.

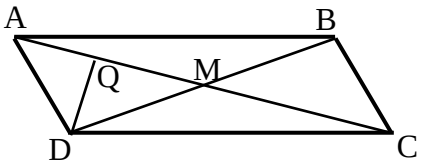
ג. $\sphericalangle A = x + 20°$ , $\sphericalangle C = 100° - x$.

**6)** המרובע ABCD הוא מקבילית
ובו: $AE \perp CD$ , $AN \perp BC$.
הוכח כי: $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAN$.

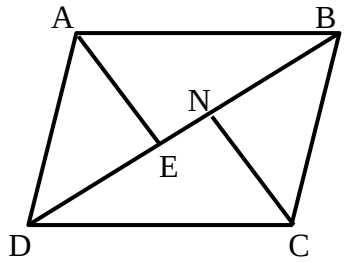




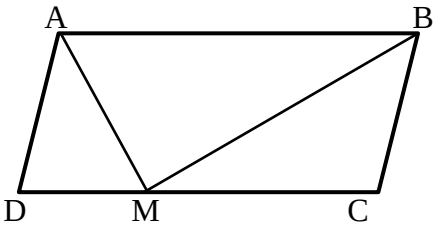

**7)** במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AB כך שמתקיים: $DE = BC$.
הוכח כי: $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EDC$.



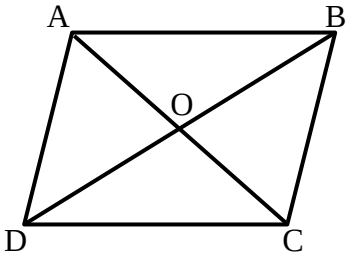

**8)** נתונה מקבילית ABCD שאלכסוניה נפגשים בנקודה M.
נתון: $AC = 20$ ס"מ, $BC = \frac{1}{2}BD$ ו- $DQ \perp AC$.
חשב את אורך הקטע AQ.




**9)** הוכח כי במקבילית הקדקודים הנגדיים נמצאים במרחקים שווים מאלכסון המקבילית שאינו עובר דרכם, כלומר הוכח: $AE = CN$.

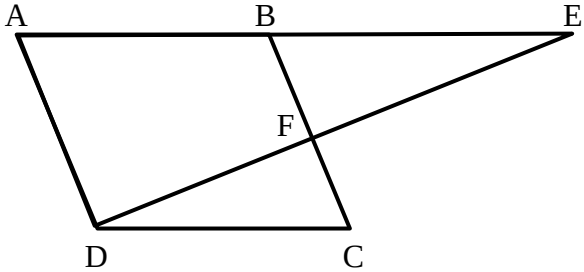



**10)** במקבילית ABCD הקטעים AM ו-BM הם חוצי הזוויות של A ו-B בהתאמה אשר נפגשים בנקודה M שעל הצלע DC.
א. הוכח כי: $AB = 2BC$.
ב. הוכח כי המשולש AMB הוא ישר זווית.




**11)** המרובע ABCD הוא מקבילית.
O – פגישת האלכסונים.
נתון: $DO = 3x - 10$, $BO = x + 8$, $AO = x + 1$.
מצא את אורכי האלכסונים AC ו-BD.

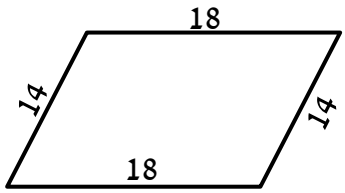
**12)** נתונה מקבילית ABCD ובה: $\sphericalangle ADC = 120°$, $\sphericalangle BEF = \frac{1}{2}\sphericalangle EAD$.
הוכח כי: $BC \perp ED$.



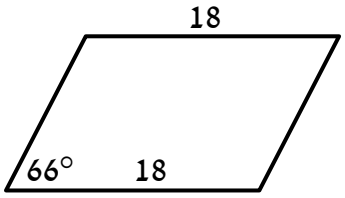
**13)** בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים.
קבע אלו מהם הם מקביליות וציין מדוע.

א.

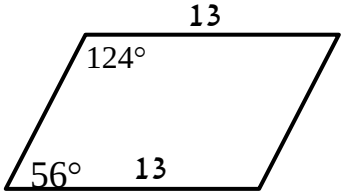
ב.



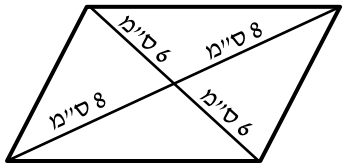

ג.



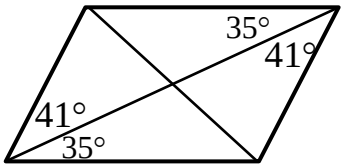

ד.




ה.

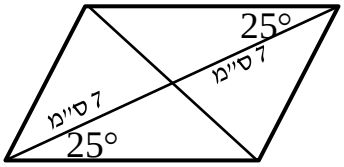



ו.

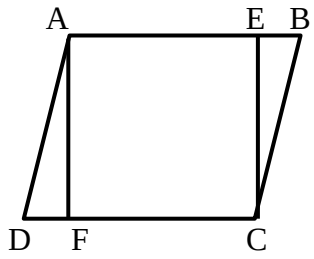



ז.

ח.



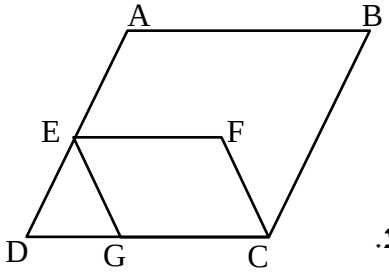

**14)** במקבילית ABCD הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AB ו-CD בהתאמה.
נתון: $\sphericalangle DAF = \sphericalangle BCE$ .
הוכח כי המרובע AECF הוא מקבילית.



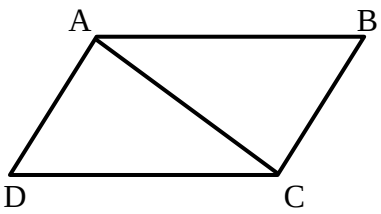

**15)** במקבילית ABCD הנקודות E ו-G נמצאות על הצלעות AD ו-DC בהתאמה כך שהמשולש DEG הוא שווה צלעות. הנקודה F נמצאת בתוך המקבילית כך שהקטע EF מקביל לצלע AB.

א. הוכח: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle EGC$ .

ב. נתון: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle GCF$ . הוכח כי EFCG מקבילית.



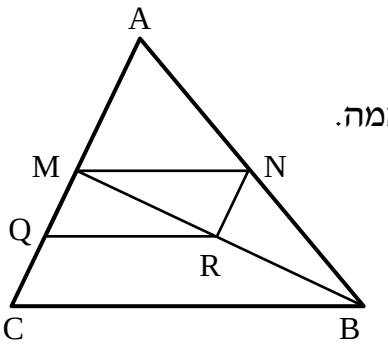
**16)** במרובע ABCD נתון כי הצלעות AB ו-DC שוות.
כמו כן: $BC \perp AC$ , $AD \perp AC$.
הוכח כי המרובע ABCD הוא מקבילית.



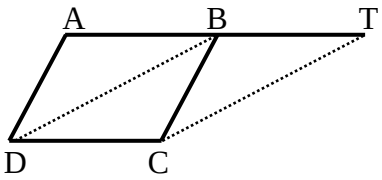

**17)** נתון משולש ABC ובו הקטע MN הוא קטע אמצעים.
הנקודות Q ו-R הן אמצעי הקטעים MC ו-BM בהתאמה.

א. הוכח כי המרובע MNRQ הוא מקבילית.

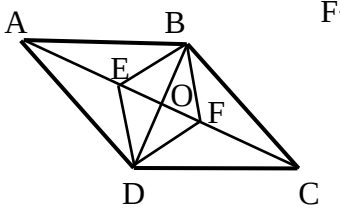
ב. ידוע כי הקטע AN שווה לקטע QR.
איזה סוג משולש הוא AMB? נמק.




**18)** את הצלע AB במקבילית ABCD האריכו כאורכה עד לנקודה T.
הוכח: BTCD מקבילית.
**הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.**




**19)** הנקודה O היא מפגש אלכסוני המקבילית ABCD. E ו-F הן נקודות על האלכסון AC.
נתון: $AE = FC$.
הוכח כי EBFD הוא מקבילית.



## תשובות סופיות:

**5)** א. $125°, 55°$ ב. $100°, 80°$ ג. $120°, 60°$.

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** 5 ס"מ.

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** שאלת הוכחה.

**11)** 20 ס"מ = AC, 34 ס"מ = BD.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** מקבילות: א', ב', ד', ה', ו', ח' אינן מקבילות: ג', ז'.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** שאלת הוכחה.

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** שאלת הוכחה.

**19)** שאלת הוכחה.

# המלבן:

## סיכום כללי:

**הגדרה:** מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות.

(מסקנה: מלבן הוא סוג של מקבילית).

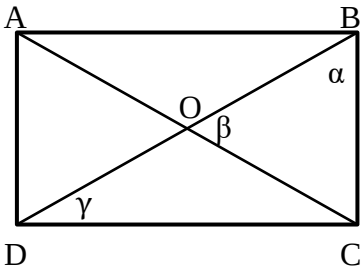
**תכונות המלבן (בנוסף לתכונות המקבילית):**

- ארבע זוויות המלבן שוות והן זוויות ישרות.
- האלכסונים במלבן שווים זה לזה
- היקף מלבן סכום הצלעות, שטח מלבן צלע גובה לצלע.

**כדי להוכיח כי מרובע הוא מלבן נשתמש באחת הדרכים הבאות:**

- מרובע שבו שלוש זוויות ישרות הוא מלבן.
- מקבילית שבה זווית ישרה היא מלבן.
- מקבילית שבה האלכסונים שווים היא מלבן.

## שאלות:

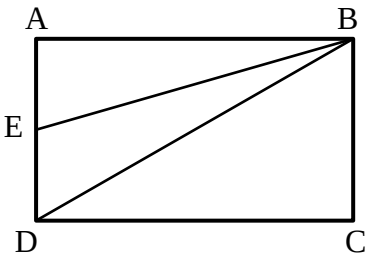



**20)** המרובע ABCD הוא מלבן.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
חשב את הזוויות $\beta$ , $\alpha$ ו- $\gamma$ במקרים הבאים:

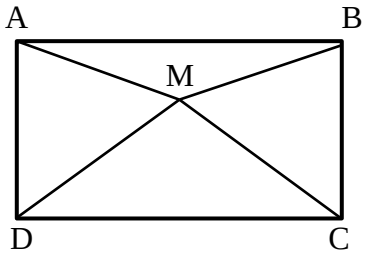
א. $\beta$ קטנה ב- $15°$ מ- $\alpha$.

ב. $\alpha = 2\gamma$.

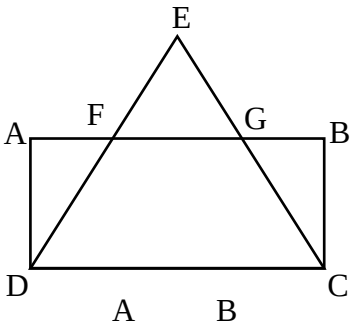
ג. $\gamma = 28°$.



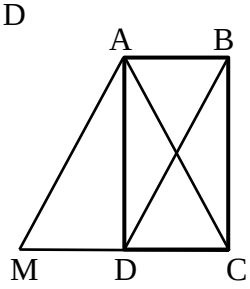

**21)** במלבן ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD.
נתון: $\sphericalangle AEB = 70°$ , $BD = 2BC$.
חשב את גודלה של הזווית EBD.



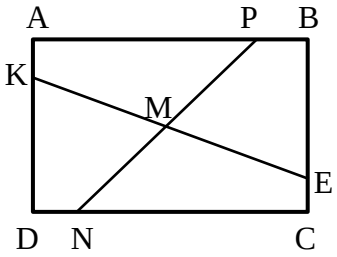

**22)** נתון מלבן ABCD שבו $DM = MC$ .
הוכח: $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA$ .



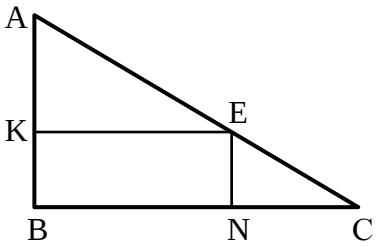

**23)** המרובע ABCD הוא מלבן.
המשכי הקטעים DF ו-CG נפגשים בנקודה E.
נתון: $EF = EG$ .
הוכח: $FD = GC$ .



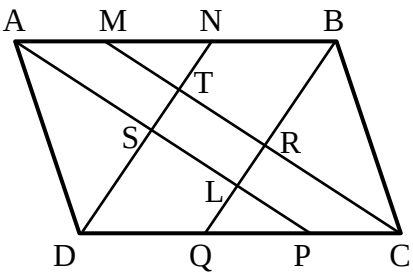

**24)** המרובע ABCD הוא מלבן.
המרובע ABDM הוא מקבילית.
הוכח כי המשולש ACM הוא שווה שוקיים.




**25)** מרובע ABCD הוא מלבן.
נתון: $AK = CE$ , $AP = CN$ .
הוכח: $KM = EM$ , $PM = NM$ .

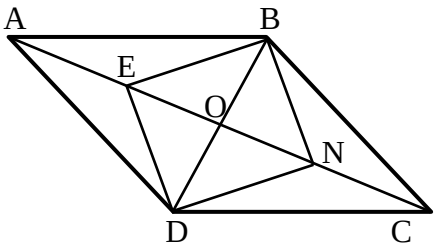



**26)** $\Delta ABC$ הוא משולש ישר זווית $\left(\sphericalangle B = 90°\right)$.
המרובע KENB חסום במשולש זה.
נתון כי: $\sphericalangle NEC = \sphericalangle A$ , $\sphericalangle AEK = \sphericalangle C$ .
הוכח כי המרובע KENB הוא מלבן.

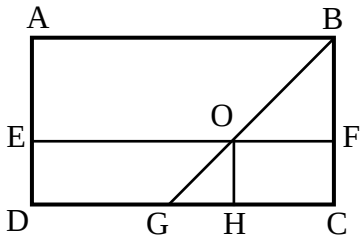



**27)** נתונה מקבילית ABCD
ובה AP, BQ, CM ו-DN
הם חוצי הזוויות $\sphericalangle A$ , $\sphericalangle B$ , $\sphericalangle C$ ו- $\sphericalangle D$
בהתאמה.
הוכח: TRLS מלבן.

**28)** מרובע ABCD הוא מקבילית.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD
אשר נחתכים בנקודה O.
נתון: $2BD = AC$.
E – אמצע AO. N – אמצע CO.
הוכח כי המרובע BNDE הוא מלבן.




**29)** במלבן ABCD נתון:
$\sphericalangle ABO = \sphericalangle BOF$ , $OH \perp DC$.
הוכח: EOHD הוא מלבן.




## תשובות סופיות:

**20)** א. $\alpha = 55° , \beta = 70° , \gamma = 35°$ ב. $\alpha = \beta = 60° , \gamma = 30°$
ג. $\alpha = 62° , \beta = 56°$

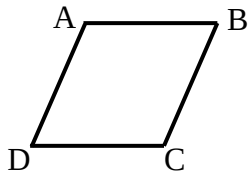
**21)** $10°$.
**22)** שאלת הוכחה.
**23)** שאלת הוכחה.
**24)** שאלת הוכחה.
**25)** שאלת הוכחה.
**26)** שאלת הוכחה.
**27)** שאלת הוכחה.
**28)** שאלת הוכחה.
**29)** שאלת הוכחה.

# המעוין:

## סיכום כללי:

**הגדרה**: מעוין הוא מרובע שכל צלעותיו שוות.

(מסקנה: מעוין הוא סוג של מקבילית).




**תכונות המעוין (בנוסף לתכונות המקבילית):**

- במעוין כל הצלעות שוות.
- במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
- במעוין האלכסונים הם חוצי זוויות.
- היקף מעוין = צלע· 4, שטח מעוין = צלע· גובה לצלע = 2/(אלכסון· אלכסון).

**כדי להוכיח כי מרובע הוא מעוין נשתמש באחת הדרכים הבאות:**

- מרובע שבו כל הצלעות שוות הוא מעוין.
- מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.
- מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.
- מקבילית שבה אלכסון חוצה זווית היא מעוין (מספיק אחד).

## שאלות:

**30)** המרובע ABCD הוא מעוין.

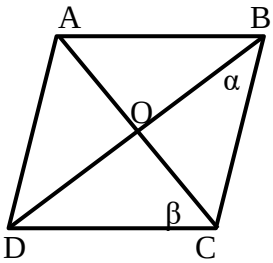
חשב בכל אחד מהמקרים הבאים את $\alpha$ ו- $\beta$.

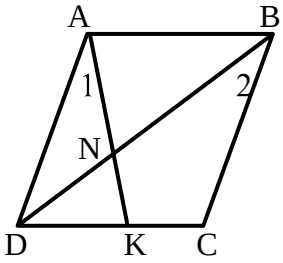
א. $\sphericalangle A = 138°$.

ב. $\beta = 3.5\alpha$.

ג. $\beta = \alpha + 20°$.

ד. $\sphericalangle B = \beta$.

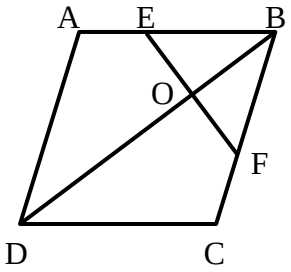




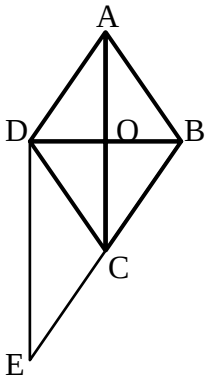

**31)** המרובע ABCD הוא מעוין.
מעבירים את האלכסון BD ואת הקטע AK
אשר נחתכים בנקודה N.
ידוע כי: $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle B_2$.

א. הוכח כי המשולש ADN הוא שווה שוקיים.

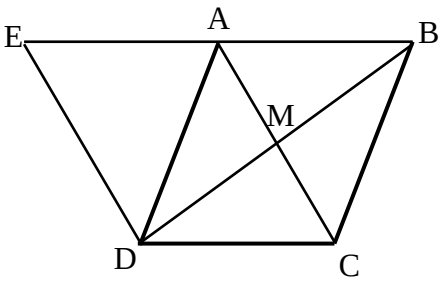
ב. הוכח כי: $\sphericalangle AND = \sphericalangle C$.



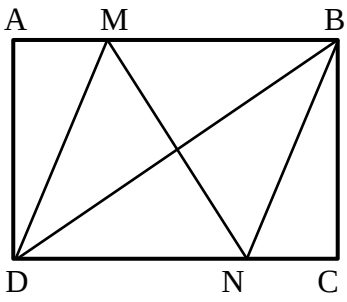

**32)** מעוין ABCD הנקודות E ו-F
נמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה.
נתון: $EF \perp BD$ , $\sphericalangle DCB = 120°$.
הוכח כי משולש EBF הוא שווה צלעות.



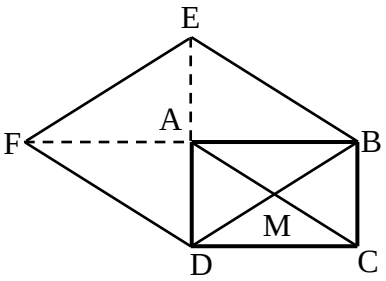

**33)** נתון מעוין ABCD.
הנקודה E נמצאת על המשך הצלע BC.
נתון: $\sphericalangle CDE = \sphericalangle BCA$.
הוכח כי המשולש BDE הוא ישר זווית.



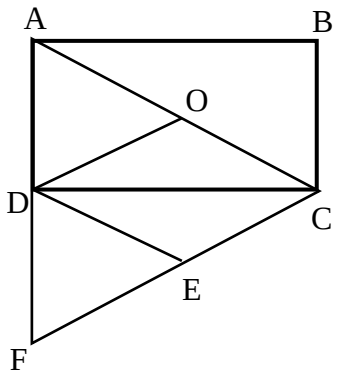

**34)** נתון מעוין ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M.
האריכו את הצלע AB עד לנקודה E
כך שמתקיים: $DE \perp BD$.
הוכח: $AD = AE$.




**35)** במלבן ABCD מעבירים את האלכסון BD.
הנקודות M ו-N נמצאות על הצלעות AB
ו-DC בהתאמה.
נתון: $AM = CN$ ו- $DM = DN$.
הוכח כי הקטע MN חוצה את
הזוויות BMD ו-BND.




**36)** נתון מלבן ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M.
האריכו את הצלע AB כאורכה עד
לנקודה F ואת הצלע AD כאורכה עד
לנקודה E כמתואר בשרטוט.
הוכח: המרובע EBDF הוא מעוין.




**37)** ABCD הוא מלבן שאלכסוניו נחתכים בנקודה O.
הנקודה F נמצאת על המשך הצלע AD
כך שמתקיים: $AD = DF$.
נתון: $FE = CE$.
הוכח כי DOCE הוא מעוין.

## תשובות סופיות:

**30)** א. $\alpha = 21^\circ , \beta = 69^\circ$ ב. $\alpha = 20^\circ , \beta = 70^\circ$
ג. $\alpha = 35^\circ , \beta = 55^\circ$ ד. $\alpha = 30^\circ , \beta = 60^\circ$.

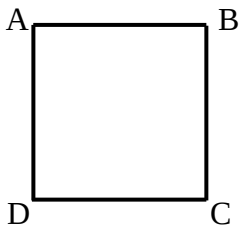
**31)** שאלת הוכחה.
**32)** שאלת הוכחה.
**33)** שאלת הוכחה.
**34)** שאלת הוכחה.
**35)** שאלת הוכחה.
**36)** שאלת הוכחה.
**37)** שאלת הוכחה.

# הריבוע:

## סיכום כללי:

**הגדרה**: ריבוע הוא מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות.

(מסקנה: ריבוע הוא סוג של מקבילית, סוג של מלבן וסוג של מעוין).
מכאן, שבנוסף לתכונות שבהגדרת הריבוע מתקיים
כי אלכסוני הריבוע חוצים זה את זה, שווים זה לזה,
מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע.
היקף ריבוע = צלע · 4, שטח ריבוע = (צלע)$^2$ = (אלכסון)$^2$/2

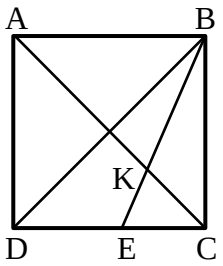



**כדי להוכיח כי מרובע הוא ריבוע נשתמש באחת הדרכים הבאות:**

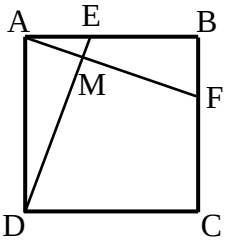
- מלבן שבו האלכסונים מאונכים הוא ריבוע.
- מלבן שבו אלכסון חוצה זווית הוא ריבוע.
- מלבן שבו שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.
- מעוין שבו האלכסונים שווים הוא ריבוע.
- מעוין שבו זווית ישרה הוא ריבוע.

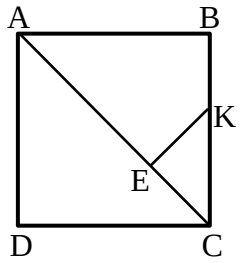
## שאלות:

**38)** המרובע ABCD הוא ריבוע.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
BE חוצה זווית DBC וחותך את AC בנקודה K.
הוכח: $CE = CK$.

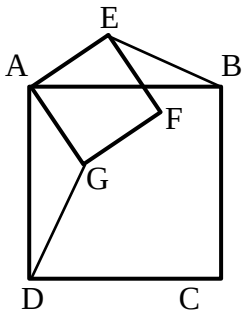



**39)** בריבוע ABCD מעבירים את הקטעים AF ו-DE.
נתון כי $AE = BF$.
הוכח: $DE \perp AF$.

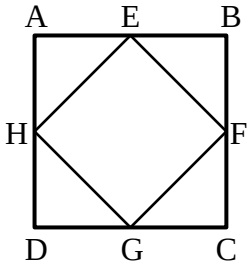




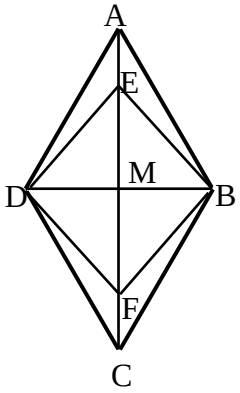

**40)** המרובע ABCD הוא ריבוע.
מעבירים את האלכסון AC.
מהנקודה E שעל האלכסון מעבירים
את הקטע KE אשר מאונך לאלכסון.
נתון: $AE = AB$.
הוכח כי: $CE = KE = BK$.




**41)** המרובעים ABCD ו-AEFG הם ריבועים.
הוכח: $BE = DG$.




**42)** הנקודות E, F, G, H הן אמצעי צלעות הריבוע ABCD.
הוכח כי EFGH הוא ריבוע.




**43)** נתון מעוין ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M.
נתון: $AE = FC$, $MB = \frac{1}{2}AB$, $\sphericalangle EBA = 15°$.
הוכח: המרובע EBFD הוא ריבוע.

## תשובות סופיות:

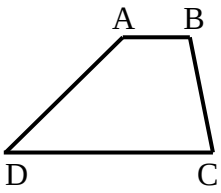
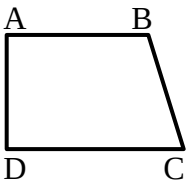
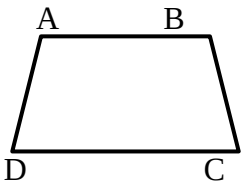
**38)** שאלת הוכחה.
**39)** שאלת הוכחה.
**40)** שאלת הוכחה.
**41)** שאלת הוכחה.
**42)** שאלת הוכחה.
**43)** שאלת הוכחה.

# הטרפז:

## סיכום כללי:

**הגדרה:** טרפז הוא מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות.

היקף טרפז = סכום הצלעות, שטח טרפז = 2/(גובה · סכום הבסיסים).

| **סוג הטרפז** | טרפז כללי | טרפז ישר זווית | טרפז שווה שוקיים |
|---|---|---|---|
| **איור מתאים** |  |  |  |

**משפטים הנוגעים לטרפז שווה שוקיים:**

- בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
- (משפט הפוך) טרפז שבו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.
- בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
- (משפט הפוך) טרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

**קטע אמצעים בטרפז:**

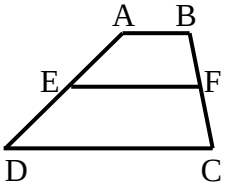
**הגדרה:** קטע אמצעים בטרפז הוא קטע המחבר את אמצעי השוקיים בטרפז.

- קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.

(משפט הפוך) קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז

- ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה

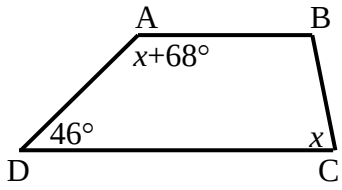
(כלומר הוא קטע אמצעים בטרפז).



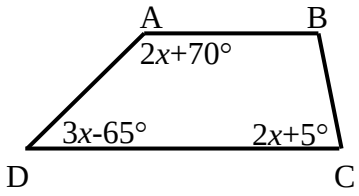
## שאלות:

**44)** בסרטוטים שלפניך נתונים טרפזים כלליים $(AB\|CD)$.
מצא את $x$ ואת זוויות הטרפז בכל מקרה.

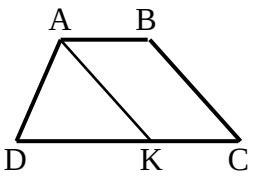
א.



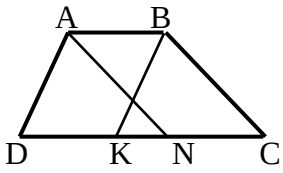

ב.



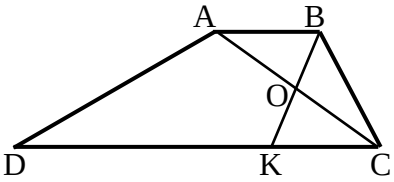

**45)** המרובע ABCD הוא טרפז $(AB\|CD)$.
מעבירים את הקטע AK.
נתון: $AK=DK$ , $AK\|BC$ ,
6 ס"מ = AB, 14 ס"מ = DC.
חשב את אורך השוק BC.




**46)** המרובע ABCD הוא טרפז $(AB\|CD)$.
נתון כי: $AN\|BC$ , $AD\|BK$ .
הוכח כי: $DK=CN$ .




**47)** המרובע ABCD הוא טרפז $(AB\|CD)$.
מעבירים את האלכסון AC ואת
הקטע BK אשר חוצים זה את זה בנקודה O.
ידוע כי: $\sphericalangle D=30°$ , $\sphericalangle C=60°$ .




א. חשב את אורך DC, הבסיס הגדול,
אם ידוע כי: 7 ס"מ = AB, 9 ס"מ = BC.

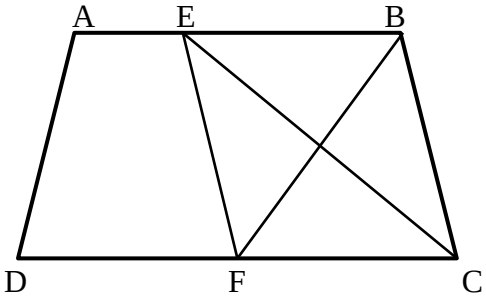
ב. הוכח כי אם $AB=BC$ אז: $DC=3AB$ .

**48)** נתון טרפז ABCD, $(AB\|CD)$ ובו
הקטעים CE ו-BF חוצים את זוויות
הקדקודים C ו- B בהתאמה. הוכח:

א. $BF\perp CE$ .

ב. המשולש EBC הוא שווה שוקיים.

ג. המרובע EBCF הוא מעוין.

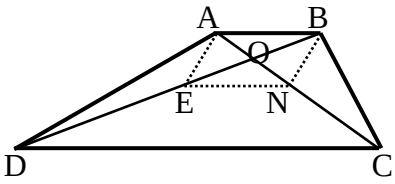


**49)** מרובע ABCD הוא טרפז $(AB\|CD)$.

O - היא נקודת פגישת האלכסונים.

נתון: $AO = NO$ , $BO = EO$.

הוכח כי המרובע ENCD הוא טרפז.

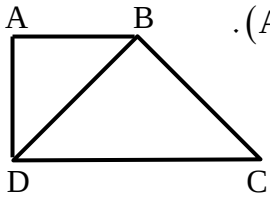



**50)** המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB\|CD\ ,\ \sphericalangle D = 90°)$.

האלכסון BD חוצה את זווית D

ונתון בנוסף כי: $BD = BC$ וכי: 15 ס"מ = AD.

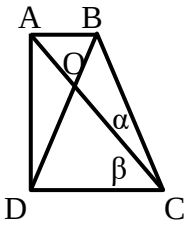
חשב את אורכי בסיסי הטרפז.




**51)** המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB\|CD\ ,\ AD \perp DC)$.

נתון כי: $BD = BC$ , $\beta = 2\alpha$ ו- $\sphericalangle DOC = 80°$.

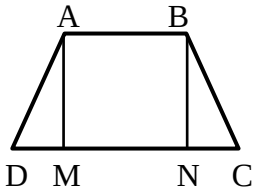
חשב את זוויות הטרפז.




**52)** מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB\|CD\ ,\ AD = BC)$.

נתון כי: $BN \perp DC$ , $AM \perp DC$.

הוכח כי: $DM = CN$.

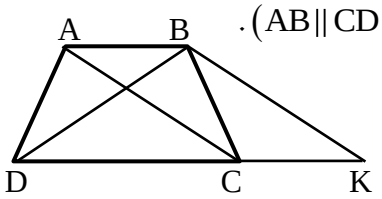



**53)** מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB\|CD\ ,\ AD = BC)$.

דרך הנקודה B מעבירים מקביל ל-AC הפוגש

את המשך הבסיס DC בנקודה K.

הוכח כי משולש BDK הוא שווה שוקיים.




**54)** מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB\|CD\ ,\ AD = BC)$.

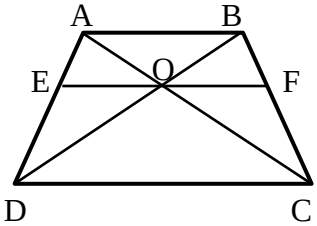
O היא פגישת האלכסונים.

נתון כי: $EF\|DC$ כאשר EF עובר דרך O.

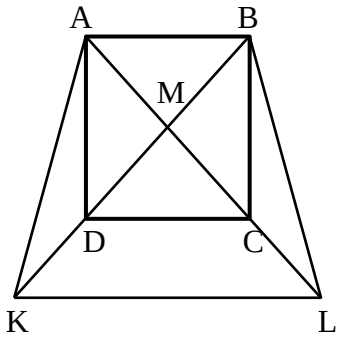
הוכח:

א. $\sphericalangle BOF = \sphericalangle COF$.

ב. $EO = FO$.



**55)** נתון ריבוע ABCD.
הנקודה M היא מפגש האלכסונים AC ו-BD.
ממשיכים את האלכסונים ויוצרים את הטרפז השווה שוקיים ABLK.
ידוע גם כי DC הוא קטע אמצעים משולש KML.

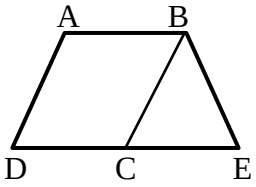



א. קבע אלו מהטענות הבאות ניתן להוכיח:
i. המשולש KML הוא ישר זווית ושווה שוקיים.
ii. הקטעים BK ו-BL מאונכים זה לזה.
iii. המרובע DCLK הוא טרפז שווה שוקיים.
iv. הקטעים DK ו-AD שווים זה לזה.

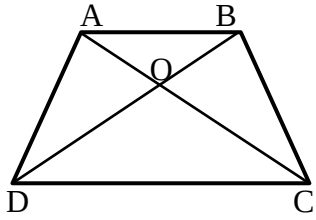
ב. הוכח כי: $3DK = AL$.

ג. נתון כי $8\sqrt{2}$ ס"מ $= AD$.
חשב את היקף הטרפז ABLK.

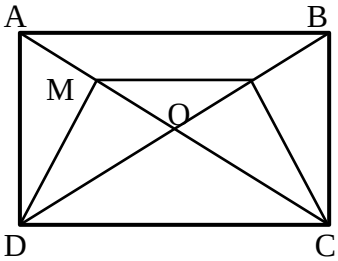
**56)** המרובע ABCD הוא מקבילית.
הקטע DE הוא קו ישר ונתון כי: $\sphericalangle A + \sphericalangle E = 180°$.
הוכח כי המרובע ABED הוא טרפז שווה שוקיים.



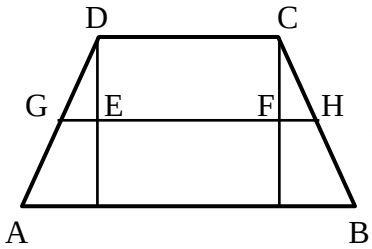

**57)** במרובע ABCD הנקודה O היא פגישת האלכסונים.
נתון כי: $AO = BO$ , $CO = DO$.
הוכח כי מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.



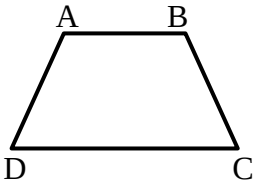

**58)** נתון מלבן ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה O.
נתון: $MN \parallel DC$.
הוכח: DMNC טרפז שווה שוקיים.




**59)** בטרפז ABCD $(AB \parallel CD)$ הורדו מקצות הבסיס הקטן אנכים לבסיס הגדול.
קטע האמצעים GH חותך גבהים אלה בנקודות E ו-F.
נתון: GE = 3 ס"מ, EF = 12 ס"מ, FH = 2 ס"מ.
חשב את בסיסי הטרפז.



**60)** סכום כל אורכי הצלעות של טרפז שווה שוקיים הוא 54 ס"מ.
אורך קטע האמצעים הוא 13 ס"מ.
מצא את אורך שוק הטרפז.

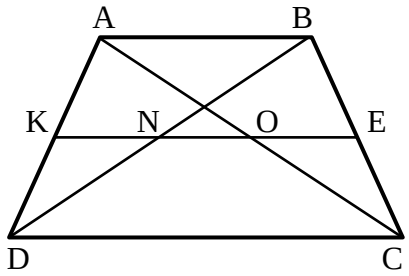



**61)** המרובע ABCD הוא טרפז $(AB\|CD)$.
KE הוא קטע אמצעים בטרפז, החותך את אלכסוני הטרפז בנקודות N ו-O.

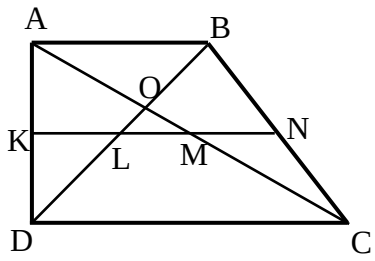
א. הוכח כי: $KN = EO$.

ב. בטרפז הנ"ל נתון:
$AB =$ 14 ס"מ, $DC =$ 26 ס"מ.
חשב את אורכי הקטעים KN, NO ו-EO.

ג. בטרפז הנ"ל נתון: $KE =$ 13 ס"מ,
$NO =$ 3 ס"מ. חשב את בסיסי הטרפז.



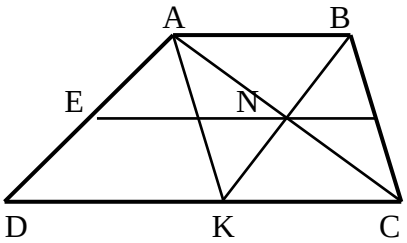

**62)** KN הוא קטע אמצעים בטרפז ישר זווית ABCD שאלכסוניו $(AB\|CD\ ,\ AD\perp AB)$ נפגשים בנקודה O.
נתון: $AD =$ 12 ס"מ, $DC = 2AB$, $\sphericalangle ADB = 45°$.
חשב את אורך הקטע LM
והוכח כי: $KL = LM = MN$.



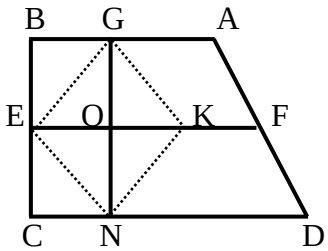

**63)** מרובע ABCD הוא טרפז $(AB\|CD)$.
EF הוא קטע אמצעים. AC ו-BK נפגשים בנקודה N הנמצאת על EF.

א. הוכח כי מרובע ABCK הוא מקבילית.

ב. נתון: $EF =$ 13 ס"מ, $EN =$ 9 ס"מ.
חשב את בסיסי הטרפז AB ו-DC
ואת הקטע DK.




**64)** המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB\|CD\ ,\ \sphericalangle B = 90°)$.
EF קטע אמצעים בטרפז.
G ו-N הן נקודות על AB ו-CD
בהתאמה המקיימות: $GN\perp DC$.
בנוסף נתון: $KO = EO$, $\sphericalangle D < 90°$.
הוכח כי מרובע GENK הוא מעוין.



## תשובות סופיות:

**44)** א. $x=66°;\ 46°,134°,66°,114°$ ב. $x=35°\ ;\ 40°,140°,75°,105°$

**45)** 8 ס"מ.

**46)** שאלת הוכחה.

**47)** א. 25 ס"מ. ב. שאלת הוכחה.

**48)** שאלת הוכחה.

**49)** שאלת הוכחה.

**50)** א. 15 ס"מ, 30 ס"מ. ב. שאלת הוכחה.

**51)** $120°\ ,\ 60°\ ,\ 90°\ ,\ 90°$

**52)** שאלת הוכחה.

**53)** שאלת הוכחה.

**54)** שאלת הוכחה.

**55)** א. ניתן להוכיח את טענות : i, iii. ב. שאלת הוכחה.

ג. 69.71 ס"מ $\approx 16\sqrt{5}+24\sqrt{2}=P_{ABLK}$.

**56)** שאלת הוכחה.

**57)** שאלת הוכחה.

**58)** שאלת הוכחה.

**59)** 22 ס"מ ו-12 ס"מ.

**60)** 14 ס"מ.

**61)** א. שאלת הוכחה. ב. 7 ס"מ $=EO=KN$ , 6 ס"מ $=NO$

ג. 10 ס"מ $=AB$, 16 ס"מ $=DC$.

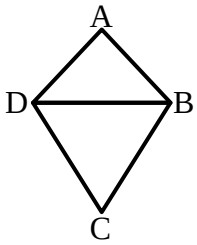
**62)** 6 ס"מ.

**63)** 8 ס"מ $=AB$, 18 ס"מ $=DC$, 10 ס"מ $=DK$.

**64)** שאלת הוכחה.

# הדלתון:

## סיכום כללי:

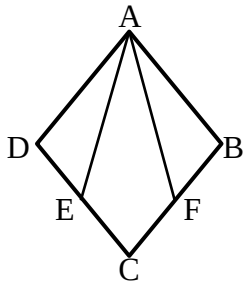



**הגדרה**:
דלתון הוא מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות.
(מסקנה: דלתון הוא מרובע שניתן לפרק לשני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף).

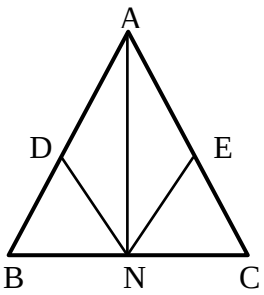
**תכונות האלכסונים בדלתון:**

- האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.
- האלכסון הראשי אינו בהכרח גדול מהאלכסון המשני.
- היקף דלתון = סכום הצלעות, שטח דלתון = 2/(אלכסון · אלכסון).

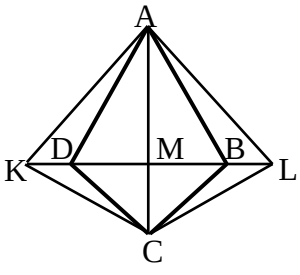
## שאלות:




**65)** נתון מעוין ABCD. הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות DC ו-BC בהתאמה כך שהמרובע AFCE הוא דלתון.
הוכח: $\sphericalangle DAE = \sphericalangle FAB$.




**66)** במשולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$
מקצים נקודות D ו-E על השוקיים.
נתון כי: $AD = AE$.
הנקודה N היא אמצע BC.
הוכח כי ADNE הוא דלתון.



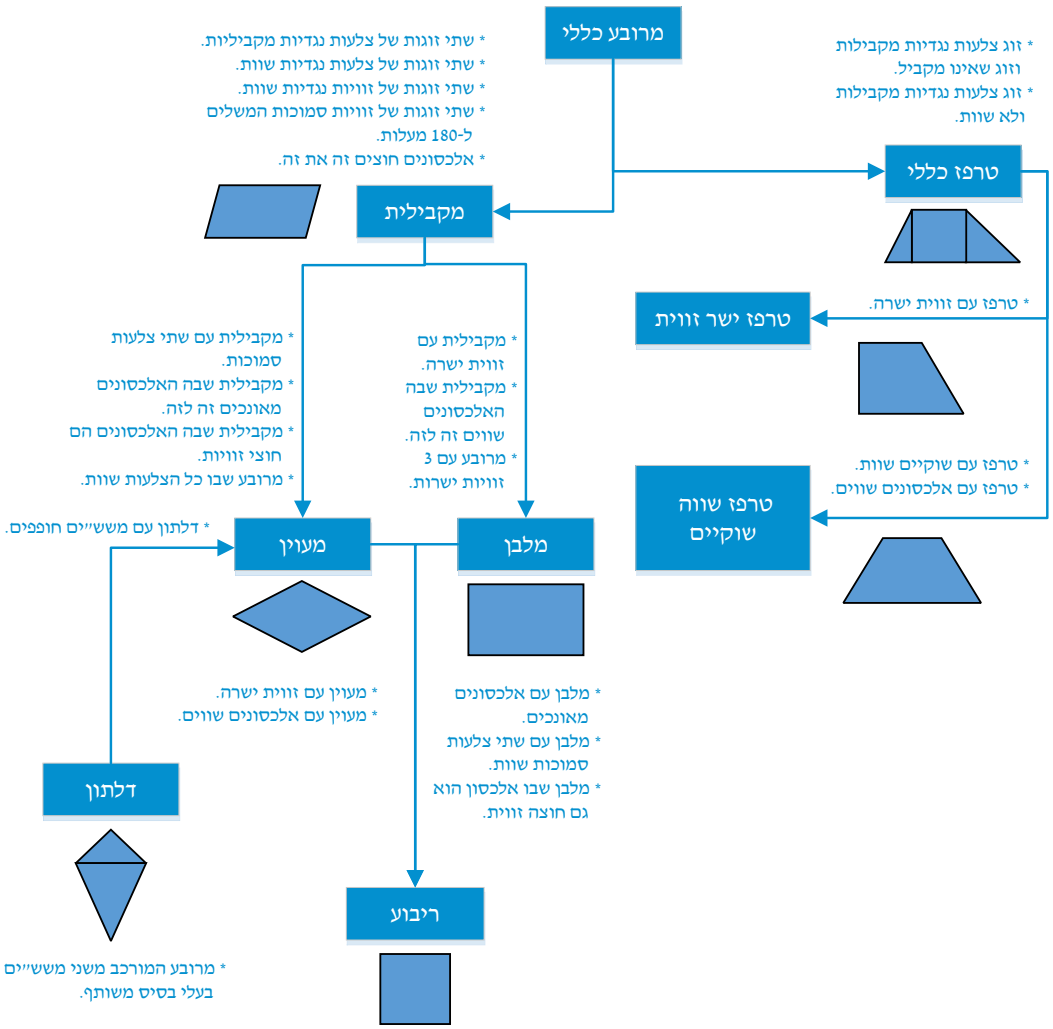

**67)** בדלתון ABCD האריכו את האלכסון המשני משני צדיו כמתואר בשרטוט כך שמתקיים: $KD = BL$.
הוכח: המרובע ALCK הוא דלתון.

## תשובות סופיות:

**65)** שאלת הוכחה.
**66)** שאלת הוכחה.
**67)** שאלת הוכחה.

# סיכום משפחת המרובעים:

להלן דיאגרמה מסכמת של כל משפחת המרובעים ותכונותיהם:



# מתמטיקה למדעים

## פרק 15 - גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים

### תוכן העניינים

1. שטחים והיקפים של משולשים ..... 235
2. שטחים והיקפים של מרובעים ..... 237
3. שאלות עם מקבילית ..... 238
4. שאלות עם מלבן ..... 241
5. שאלות עם מעוין ..... 242
6. שאלות עם ריבוע ..... 244
7. שאלות עם טרפז ..... 246

# שטחים והיקפים של משולשים:

## סיכום כללי:

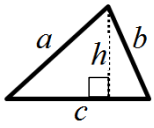
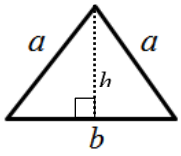
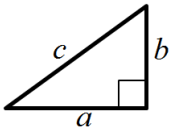
### שטח – הגדרה:

גודל של תחום מישורי בהשוואה ליחידת מידה קבועה.
שטח נמדד ביחידות מידה של אורך בריבוע כגון:
מטר ריבועי ($m^2$), ס"מ ריבועי (סמ"ר $cm^2$).

### היקף – הגדרה:

היקף מצולע הוא סכום כל צלעותיו.

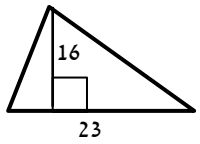
### משולשים:

| סוג | משולש כללי | משולש שווה שוקיים | משולש ישר זווית |
|---|---|---|---|
| איור |  |  |  |
| שטח | $S=\frac{c\cdot h}{2}$ | $S=\frac{b\cdot h}{2}$ | $S=\frac{a\cdot b}{2}$ |
| היקף | $P=a+b+c$ | $P=2a+b$ | $P=a+b+c$ |

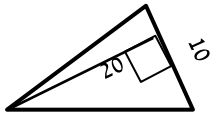
## שאלות:

**1)** מצא את שטחם של המשולשים הבאים (כל המידות נתונות בס"מ):

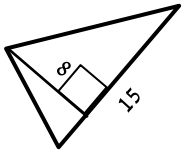
א.



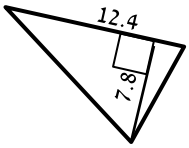

ב.



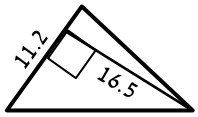

ג.



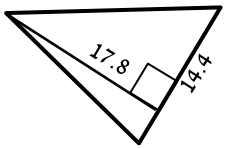

ד.




ה.

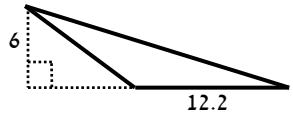



ו.

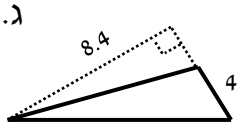



**2)** מצא את שטחם של המשולשים קהי-הזווית הבאים (כל המידות בס"מ):

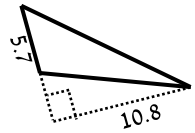
א.




ב.




ג.

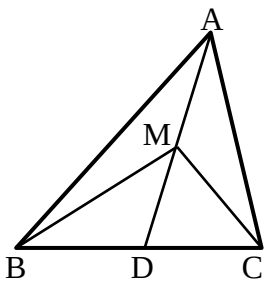



**3)** הוכח כי אם במשולש ABC, הקטע AD המחבר את הקדקוד A עם הצלע BC יוצר שני משולשים השווים בשטחם אז הוא תיכון ל-BC.

**4)** במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC.
M היא אמצע AD. הוכח כי:

א. הקטעים AD, MC ו-BM מחלקים את המשולש ABC ל-4 משולשים שווי שטח.

ב. $S_{MBC}=\frac{1}{2}S_{ABC}$.




## תשובות סופיות:

**1)** א. 184 סמ"ר ב. 100 סמ"ר ג. 60 סמ"ר ד. 48.36 סמ"ר
ה. 92.4 סמ"ר ו. 128.16 סמ"ר.

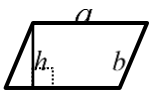
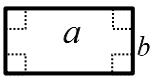
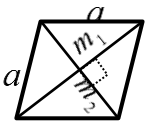
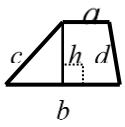
**2)** א. 36.6 סמ"ר ב. 16.8 סמ"ר ג. 30.78 סמ"ר.

**3)** שאלת הוכחה.

**4)** שאלת הוכחה.

# שטחים והיקפים של מרובעים:

## סיכום כללי:

| סוג | מקבילית | מלבן | מעוין | ריבוע | טרפז |
|---|---|---|---|---|---|
| איור |  |  |  | |  |
| שטח | $S=a\cdot h$ | $S=a\cdot b$ | $S=a\cdot h$<br>$S=\frac{m_1\cdot m_2}{2}$ | $S=a^2$ | $S=\frac{(a+b)h}{2}$ |
| היקף | $P=2(a+b)$ | $P=2(a+b)$ | $P=4a$ | $P=4a$ | $P=a+b+c+d$ |

**הערות כלליות:**

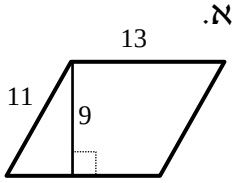
- שטח מקבילית ניתן לחישוב ע"י מכפלת כל צלע בגובה המתאים לה.
  כך ניתן לקבל את הנוסחה: $S=a\cdot h_a=b\cdot h_b$ כאשר $h_a$ ו- $h_b$ הם הגבהים לצלעות $a$ ו- $b$ בהתאמה.
- ניתן לחשב שטח מעוין ע"י מחצית ממכפלת אלכסונים או ע"י מכפלת צלע בגובה שלה (שכן היא סוג של מקבילית).
- עבור טרפז ישר זווית, שבו $h=c$ נקבל: $S=\frac{(a+b)c}{2}$.
- ניתן לחשב שטח של טרפז ע"י הורדת גבהים, חלוקתו למלבן ושני משולשים, חישוב שטחם בנפרד ואיחודם.

## שאלות עם מקבילית:

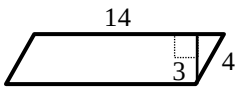
### שאלות:

**5)** חשב את השטחים וההיקפים של המקבליות הבאות (כל המידות בס"מ):

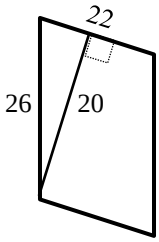
א.



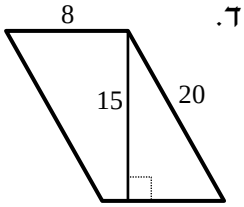

ב.



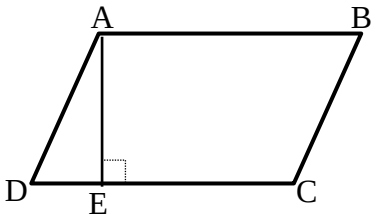

ג.




ד.



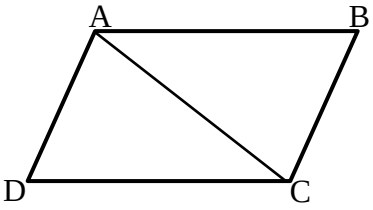

**6)** נתונה מקבילית ABCD.
מעבירים גובה AE לצלע CD שאורכו הוא 6 ס"מ.
ידוע כי שטח המקבילית הוא 60 סמ"ר.



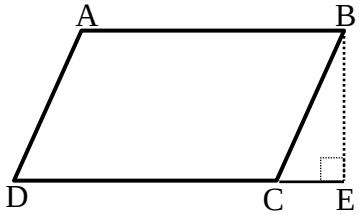

א. מצא את אורך הצלע AB.

ב. ידוע כי היקף המקבילית הוא 36 ס"מ.
מצא את אורך הצלע BC.

**7)** נתונה מקבילית ABCD.
מעבירים את האלכסון AC שאורכו 25 ס"מ.
ידוע כי היקף המשולש ACD הוא 66 ס"מ.
חשב את היקף המקבילית.



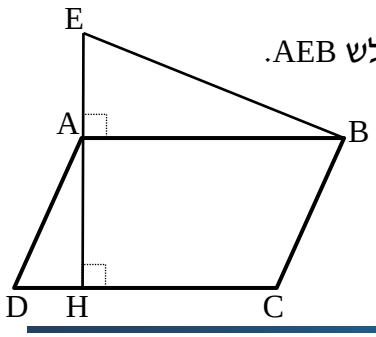

**8)** נתונה מקבילית ABCD.
מורידים גובה מהקדקוד B לצלע CD כך שנוצר המשולש BCE.
שטח המשולש BCE הוא 24 סמ"ר
ושטח המקבילית ABCD הוא 112 סמ"ר.
נתון: 6 ס"מ = CE.




א. מצא את אורך הגובה BE.

ב. מצא את אורך הצלע AB של המקבילית.

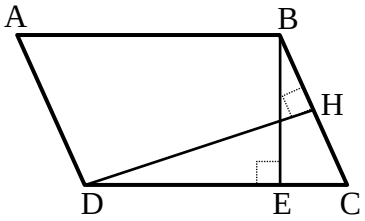
**9)** נתונה מקבילית ABCD.
מעלים אנך מהקדקוד A עד לנקודה E ויוצרים משולש AEB.
מורידים גובה AH לצלע CD שאורכו 12 ס"מ.
נתון: 8 ס"מ = AE, 13 ס"מ = AD.
שטח כל הצורה AEBCD הוא 256 סמ"ר.




א. מצא את אורך הצלע AB.

ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.

**10)** במקבילית ABCD מעבירים את הגבהים BE ו-DH לצלעות CD ו-BC בהתאמה.




נתון: BE = 12 ס"מ, BC = 14.4 ס"מ, DH = 15 ס"מ.

א. חשב את שטח המקבילית ABCD.

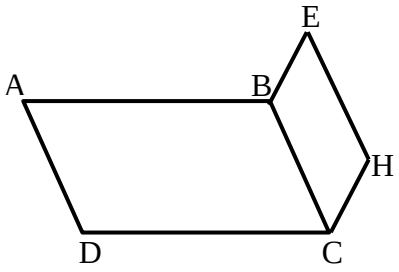
ב. חשב את אורך הצלע AB.

ג. חשב את היקף המקבילית.

**11)** נתונה המקבילית ABCD.

על הצלע BC בונים מקבילית נוספת BCHE שהיקפה הוא 44 ס"מ.

ידוע כי היקף הצורה ABEHCD הוא 94 ס"מ.




נתון: BC = 15 ס"מ.

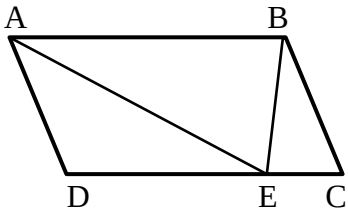
א. חשב את אורך הצלע AB.

ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.

**12)** המרובע ABCD הוא מקבילית.

הנקודה E נמצאת על DC.

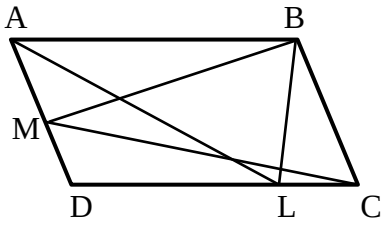
הוכח כי: $S_{AEB}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.




**13)** המרובע ABCD הוא מקבילית.

הנקודות M ו-L נמצאות על הצלעות AD ו-DC בהתאמה.

הוכח כי: $S_{BMC}=S_{ALB}$.



## תשובות סופיות:

**5)** א. $P=$ 48 ס"מ , $S=$ 117 סמ"ר
ב. $P=$ 36 ס"מ , $S=$ 42 סמ"ר
ג. $P=$ 96 ס"מ , $S=$ 440 סמ"ר
ד. $P=$ 56 ס"מ , $S=$ 120 סמ"ר.

**6)** א. AB = 10 ס"מ
ב. BC = 8 ס"מ.

**7)** $P=$ 82 ס"מ.

**8)** א. BE = 8 ס"מ
ב. AB = 14 ס"מ.

**9)** א. AB = 16 ס"מ
ב. $P=$ 58 ס"מ.

**10)** א. $S=$ 216 סמ"ר
ב. AB = 18 ס"מ
ג. $P=$ 64.8 ס"מ.

**11)** א. AB = 25 ס"מ
ב. $P=$ 80 ס"מ.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

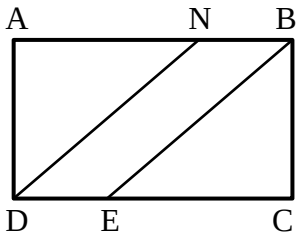
# שאלות עם מלבן:

## שאלות:

**14)** במלבן ABCD אורכי הצלעות הם: $AB = 12$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ.
מצאו את ההיקף של המלבן.

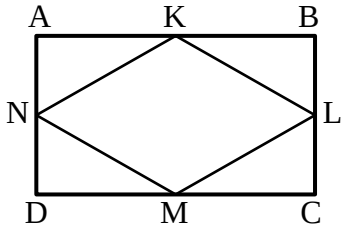
**15)** במלבן ABCD אורך הצלע AB הוא 10 ס"מ. היקף המלבן הוא 32 ס"מ.
מצאו את שטח המלבן.

**16)** במלבן ABCD נתון: $DC = 11$ ס"מ, $AD = 9$ ס"מ.
מצאו את האורך של האלכסון AC.




**17)** המרובע ABCD הוא מלבן.
הישרים DN ו-BE מקבילים.
נתון: $AB = 32$ ס"מ, $DN = 30$ ס"מ ו-$BN = 8$ ס"מ.
הוכח כי מרובע NBED הוא מקבילית וחשב את שטחה.

**18)** הנקודות K, L, M ו-N הן אמצעי הצלעות AB, BC, CD
ו-AD בהתאמה במלבן ABCD.
נתון כי היקף המלבן הוא 120 ס"מ וכי שטחו
הוא 836 סמ"ר.
חשב את שטחו של המרובע KLMN.




## תשובות סופיות:

**14)** 40 ס"מ.

**15)** 60 סמ"ר.

**16)** $\sqrt{202} \approx$ 14.21 ס"מ.

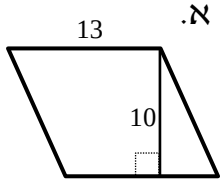
**17)** 144 סמ"ר.

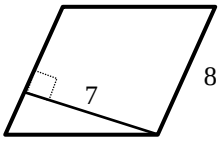
**18)** 418 סמ"ר.

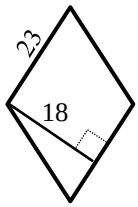
# שאלות עם מעוין:

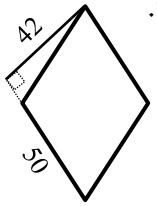
## שאלות:

**19)** חשב את השטחים וההיקפים של המעוינים הבאים (כל המידות בס"מ):

א.



ב.



ג.



ד.


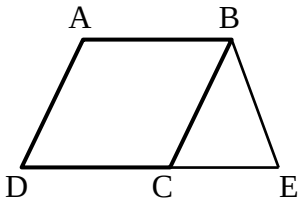

**20)** במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O.
נתון: 3 ס"מ = AO, 4 ס"מ = BO. מצא את אורך צלע המעוין.

**21)** במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O.
נתון: 12 ס"מ = AB, 8 ס"מ = BO. מצא את AO.

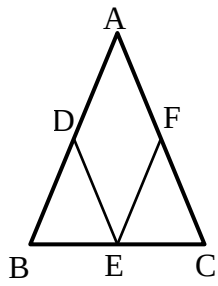
**22)** במעוין ABCD האלכסון AC שווה באורכו לצלע המעוין.
נתון: 20 ס"מ = AB.
א. חשב את אורך האלכסון BD.
ב. חשב את שטח המעוין.

**23)** נתון מעוין ABCD. אורך האלכסון הקצר הוא 7 ס"מ ושטח המעוין הוא 35 סמ"ר. חשב את היקף המעוין.

**24)** נתון מעוין ABCD בעל אורך צלע של 8 ס"מ.
מעבירים את הקטע BE השווה באורכו לצלע המעוין
כך שנוצר המשולש BCE. ידוע כי: 6 ס"מ = CE.
א. איזה סוג משולש הוא המשולש BCE? נמק.
ב. חשב את היקף הצורה ABECD.



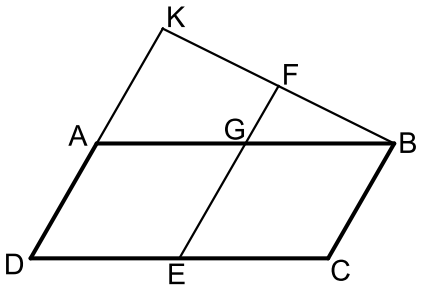
**25)** נתון משולש שווה שוקיים ABC, (AB =AC).
מסמנים את אמצעי צלעות המשולש ב-D, E ו-F
ומעבירים את הקטעים DE ו-EF כך שהמרובע ADEF הוא מעוין.
נתון: 12 ס"מ = BC, וכי היקף המשולש ABC הוא 48 ס"מ.




א. מצא את אורך צלע המעוין ADEF.

ב. חשב את היקף המעוין ADEF.

**26)** המרובע ABCD הוא מקבילית שבה אורך הצלע AB גדולה פי 2 מהצלע AD.
ממשיכים את הצלע AD עד לנקודה K ומחברים אותה לקדקוד B. מעבירים
את הקטע FE כך ש-F היא אמצע הקטע BK. EF חותך את הצלע AB בנקודה G
ומקביל לצלע AD.




א. הוכח כי המרובע AGED הוא מעוין.

ב. שטח המעוין AGED הוא 20 סמ"ר.
חשב את שטח המרובע DCBK אם ידוע
כי A היא אמצע הקטע DK.

## תשובות סופיות:

**19)** א. $P=$ 52 ס"מ, $S=$ 130 סמ"ר ב. $P=$ 32 ס"מ, $S=$ 56 סמ"ר.
ג. $P=$ 92 ס"מ, $S=$ 414 סמ"ר ד. $P=$ 200 ס"מ, $S=$ 2100 סמ"ר.

**20)** 5 ס"מ.

**21)** $\sqrt{80}\approx$ 8.94 ס"מ.

**22)** א. $BD=20\sqrt{3}$ ס"מ ב. 346.41 סמ"ר.

**23)** 24.413 ס"מ.

**24)** א. משולש שווה שוקיים, מכיוון ש-BE=BC. ב. $P=$ 38 ס"מ.

**25)** א. 9 ס"מ. ב. $P=$ 36 ס"מ.

**26)** ב. 60 סמ"ר.

# שאלות עם ריבוע:

## שאלות:

**27)** נתון ריבוע ABCD בעל אורך צלע של 6 ס"מ.

א. חשב את שטח הריבוע.

ב. חשב את היקף הריבוע.

ג. חשב את אורך האלכסון בריבוע.

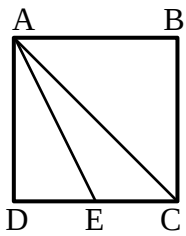
**28)** שטחו של ריבוע ABCD הוא 49 סמ"ר.

א. מהו אורך צלע הריבוע?

ב. מהו אורך האלכסון בריבוע?

ג. מהו היקף הריבוע?

**29)** בריבוע ABCD מעבירים את הקטע AE כך ש-E היא אמצע הצלע DC ואת האלכסון AC.
שטח הריבוע הוא 40 סמ"ר.




א. מצא את אורך צלע הריבוע.

ב. מצא את אורך אלכסון הריבוע.

ג. מצא את אורך הקטע AE.

**30)** חשב את צלע הריבוע השווה בשטחו לשטח משולש שצלעו 25 ס"מ והגובה לצלע זו הוא 18 ס"מ.

**31)** נתונים מלבן וריבוע השווים בשטחם.
אורכי צלעות המלבן הם 25 ס"מ ו-9 ס"מ.
חשב את היקף הריבוע.

**32)** נתונים מלבן וריבוע השווים בהיקפם.
שטח הריבוע הוא 36 ס"מ ואורך המלבן גדול ב-8 ס"מ מרוחבו.
חשב את שטח המלבן.

## תשובות סופיות:

**27)** א. 36 סמ"ר ב. 24 ס"מ ג. 8.48 ס"מ.

**28)** א. 7 ס"מ ב. 9.89 ס"מ ג. 28 ס"מ.

**29)** א. 6.32 ס"מ ב. 8.94 ס"מ ג. 7.07 ס"מ.

**30)** 15 ס"מ.

**31)** 60 ס"מ.

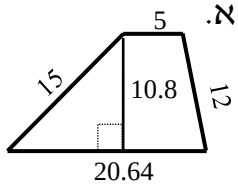
**32)** 20 סמ"ר.

# שאלות עם טרפז:

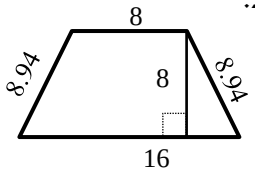
## שאלות:

**33)** חשב את השטחים וההיקפים של הטרפזים הבאים (כל המידות בס"מ):

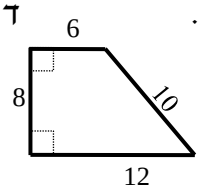
א.



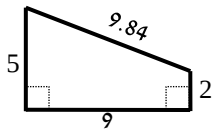

ב.




ג.




ד.



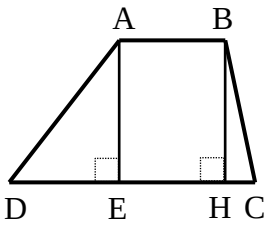

**34)** נתון טרפז $ABCD$, $(AB\|CD)$.

מורידים את הגבהים AE ו-BH שאורכם 8 ס"מ.

ידוע כי: 6 ס"מ = DE, 2 ס"מ = HC.

שטח הטרפז הוא 88 סמ"ר.

מצא את אורך בסיס הטרפז AB.




**35)** נתון טרפז $ABCD$, $(AB\|CD)$.

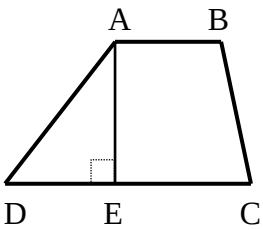
מורידים גובה AE מהקדקוד A.

היקף הטרפז הוא 68 ס"מ ונתון כי:

18 ס"מ = AD, 16 ס"מ = BC, 12 ס"מ = AB.

א. מצא את אורך הבסיס DC.

ב. מצא את הגובה AE אם ידוע כי שטח הטרפז הוא 255 סמ"ר.




**36)** נתון טרפז $ABCD$, $(AB\|CD)$.

מהקדקוד B מורידים גובה חיצוני לטרפז BE

כאשר E נמצאת על המשך הבסיס DC.

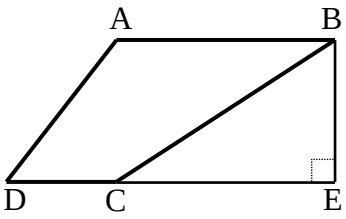
ידוע כי: 20 ס"מ = AB, 8 ס"מ = DC

וכי שטח הטרפז הוא 196 סמ"ר.

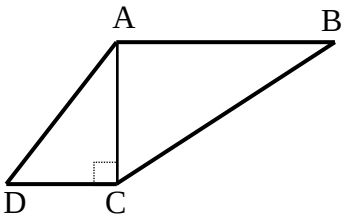
א. מצא את הגובה BE.

ב. נתון כי: $\sphericalangle D = 60°$, $\sphericalangle BCD = 130°$.

חשב את זווית $\sphericalangle A$ ואת זוויות המשולש BCE.



**37)** נתון טרפז $ABCD$, $(AB\|CD)$.



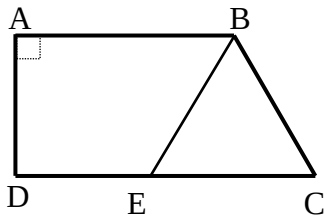

האלכסון $AC$ הוא גובה בטרפז ואורכו 12 ס"מ.
ידוע כי: $AB = AD = 13$ ס"מ, $BC = 17.7$ ס"מ.
היקף הטרפז הוא 48.7 ס"מ ו- $\sphericalangle B = 42.71°$.

א. מצא את אורך הבסיס $DC$.

ב. חשב את שטח הטרפז.

ג. חשב את זווית $C$.

**38)** הטרפז $ABCD$, $(AB\|CD)$ הוא ישר זווית $(\sphericalangle A = 90°)$.

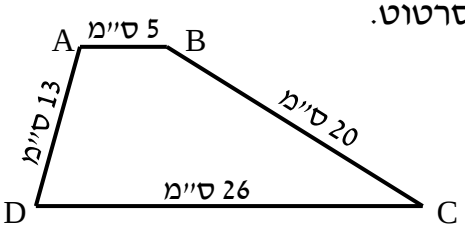



מהנקודה $E$ שעל הבסיס $DC$ מעבירים את הקטע $BE$
כך שהמשולש $BCE$ הוא שווה צלעות עם $BC = 14$ ס"מ.
היקף הטרפז $ABCD$ הוא 67 ס"מ ו- $AD$ הוא 10 ס"מ.

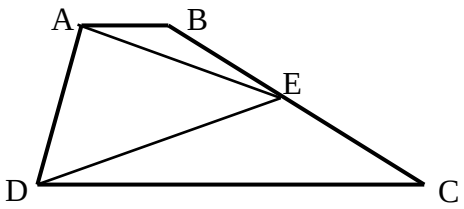
א. מהו היקף הטרפז $ABED$?

ב. חשב את שטח הטרפז $ABED$.

**39)** נתון טרפז $ABCD$ שאורכי צלעותיו נתונים בסרטוט.
חשב את שטח הטרפז (פתור כתרגיל חישוב).

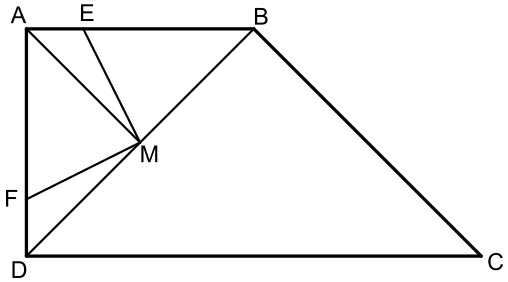



**40)** המרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB\|CD)$.




הנקודה $E$ היא אמצע השוק $BC$.
הוכח כי: $S_{ADE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

**41)** המרובע $ABCD$ הוא טרפז ישר זווית $(\sphericalangle A = 90°)$.
הנקודה $M$ נמצאת על אמצע האלכסון $BD$ של הטרפז וממנה מעבירים
את הקטעים $ME$ ו-$MF$ השווים זה לזה ומחברים אותה עם הקדקוד $A$.
נתון כי: $ME \perp MF$ וכי: $\sphericalangle DFM > 90°$.




א. הוכח: $\Delta AMF \cong \Delta BME$.

ב. נתון כי: $BC = \sqrt{32}$, $AE = FD = 1$.
כמו כן: $AM \| BC$.

i. מצא את אורך הקטע $BE$.

ii. חשב את שטח הטרפז $ABCD$.

## תשובות סופיות:

**33)** א. $P=$ 52.64 ס"מ , $S=$ 138.456 סמ"ר.
ב. $P=$ 41.88 ס"מ , $S=$ 96 סמ"ר.
ג. $P=$ 36 ס"מ , $S=$ 72 סמ"ר.
ד. $P=$ 25.48 ס"מ , $S=$ 31.5 סמ"ר.

**34)** $AB=$ 7 ס"מ.

**35)** א. $DC=$ 22 ס"מ.
ב. $AE=$ 15 ס"מ.

**36)** א. $BE=$ 14 ס"מ.
ב. $\sphericalangle A=120°$ , $\sphericalangle CBE=40°$ , $\sphericalangle BCE=50°$ , $\sphericalangle E=90°$.

**37)** א. $DC=$ 5 ס"מ.
ב. $S=$ 108 סמ"ר.
ג. $\sphericalangle C=137.29°$.

**38)** א. $P=$ 53 ס"מ.
ב. $S=$ 145 סמ"ר.

**39)** 186 סמ"ר.

**40)** שאלת הוכחה.

**41)** ב. i. 3 ס"מ.
ב. ii. 24 סמ"ר.

# מתמטיקה למדעים

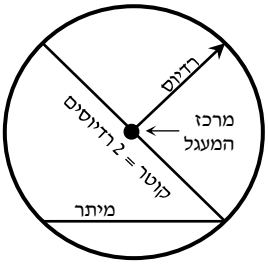
## פרק 16 - גיאומטריה אוקלידית - המעגל

### תוכן העניינים

1. הגדרות ..... 249
2. קשתות ומיתרים במעגל ..... 250
3. אנך אמצעי למיתר ..... 253
4. זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל ..... 255
5. זווית היקפית הנשענת על קוטר ..... 259
6. משיקים למעגל ..... 261
7. משיק ומיתר ..... 264
8. שני מעגלים ..... 266
9. מעגל חוסם ומעגל חסום ..... 268
10. שטחים והיקפים במעגל ..... 271

## הגדרות:

- מעגל – המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה קבועה קבוע.
- הנקודה הקבועה נקראת מרכז המעגל.
- רדיוס – קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.
- מיתר – קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל.
- קוטר – מיתר העובר במרכז המעגל.




- היקף מעגל $= 2\pi R$ .
- שטח מעגל $= \pi R^2$ .
- קשת – חלק מהיקף המעגל.
- גזרה – חלק משטח המעגל.
- זווית מרכזית – זווית שקדקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים.
- זווית היקפית – זווית שקדקודה על היקף המעגל ושוקיה מיתרים.

# קשתות ומיתרים במעגל:

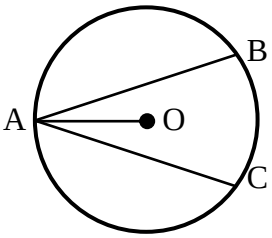
## סיכום כללי:

**משפטים העוסקים במיתרים במעגל:**

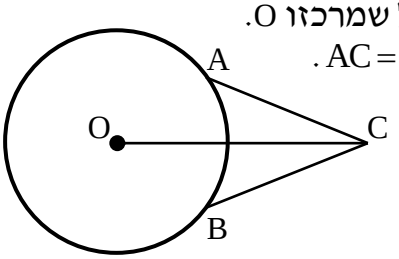
1. מיתרים שווים נשענים על קשתות שוות ולהפך.
2. על מיתרים שווים נשענות זוויות מרכזיות שוות ולהפך.
3. מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.
(משפט הפוך) מיתרים הנמצאים במרחק שווה ממרכז המעגל שווים.

## שאלות:

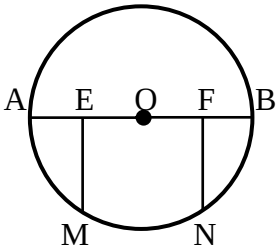
**1)** AB ו-AC הם שני מיתרים שווים במעגל שמרכזו O.
הוכח כי AO חוצה את זווית BAC.



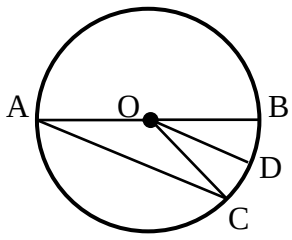

**2)** A ו-B הן שתי נקודות הנמצאות על היקף המעגל שמרכזו O.
נקודה C הנמצאת מחוץ למעגל מקיימת כי: $AC = BC$.
הוכח כי OC חוצה את זווית C.



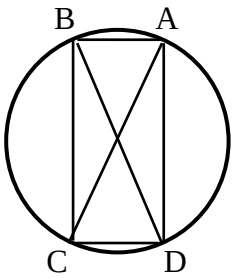

**3)** הקטע AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
נתון כי: $EO = FO$ , $EM \perp AB$ , $FN \perp AB$.
הוכח כי $MN = EF$.



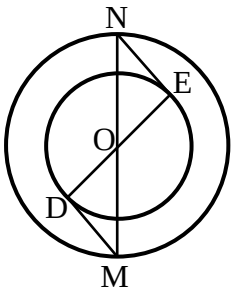

**4)** AB הוא קוטר במעגל שלפניך.
AC הוא מיתר ו-O מרכז מעגל.
הרדיוס OD חוצה את זווית BOC.
הוכח כי DO מקביל ל-AC.



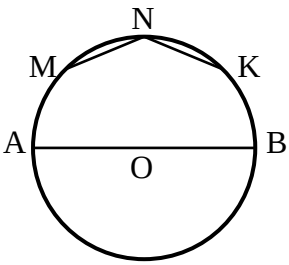
**5)** במעגל שלפניך AC ו-BD הם קטרים.
הוכח כי המרובע ABCD הוא מלבן.



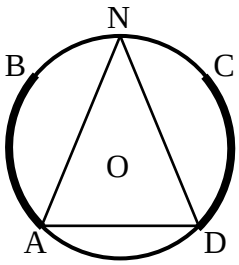

**6)** בשרטוט שלפניך שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
הקטע MN הוא קוטר במעגל הגדול והקטע DE
הוא קוטר במעגל הקטן.
מעבירים את הקטעים MD ו-NE.
הוכח כי MD שווה ל-NE.



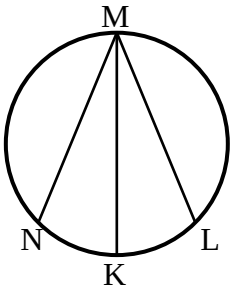

**7)** AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
את הקשת העליונה של AB מחלקים ל-4
קשתות שוות, כלומר: $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NK} = \overset{\frown}{KB}$.
חשב את זווית KNM.



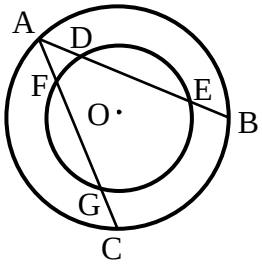

**8)** במעגל שלפניך נתון כי הקשתות המסומנות שוות
זו"א: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. הנקודה N היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{BC}$.
הוכח כי המשולש AND הוא שווה שוקיים.




**9)** המיתרים MN ו-ML שווים זה לזה.
המיתר MK חוצה את זווית NML.
הוכח כי $\Delta KNM \cong \Delta KLM$.
הוכח כי MK הוא קוטר במעגל.




**10)** נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
מעבירים את המיתרים AB ו-AC במעגל הגדול.
ידוע כי שני המיתרים שווים זה לזה.
מסמנים את נקודות החיתוך של המיתרים עם המעגל
הקטן ב-D ו-E עבור המיתר AB, ו-F, G עבור המיתר AC.
הוכח: $DE = FG$.



## תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) $135°$.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.

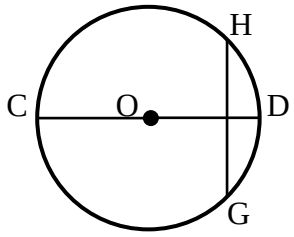
# אנך אמצעי למיתר:

## סיכום כללי:

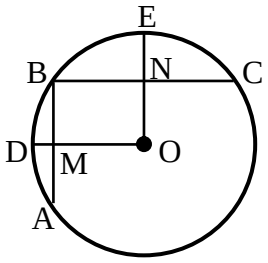
**משפט אנך אמצעי למיתר:**

1. אנך למיתר ממרכז המעגל חוצה את המיתר.
(משפט הפוך ל-4 (1)) רדיוס החוצה מיתר מאונך לו.
(משפט הפוך ל-4 (2)) קטע היוצא מאמצע מיתר ומאונך לו, עובר במרכז המעגל.

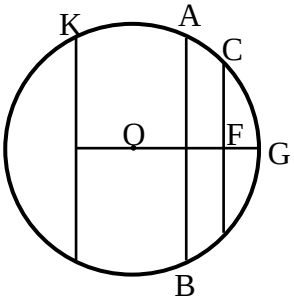
## שאלות:




**11)** במעגל שמרכזו O המיתר GH מאונך לקוטר CD.
הוכח כי $GC = HC$.
נתון כי: $\overset{\frown}{HDG} = 80°$.
בת כמה מעלות הקשת $\overset{\frown}{CG}$ ?

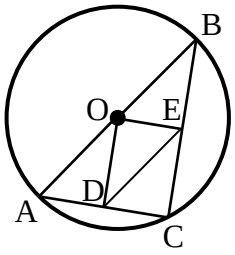



**12)** AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.
מעבירים את הרדיוסים OD ו-OE אשר חותכים את המיתרים AB ו-BC בנקודות M ו-N בהתאמה.
ידוע כי מרובע ONBM הוא מלבן. נתונות המידות הבאות: $R$ = 29 ס"מ , MD = 8 ס"מ , NE = 9 ס"מ.
חשב את אורך כל אחד מהמיתרים AB ו-BC.




**13)** CD, AB ו-KL הם מיתרים במעגל שמרכזו O, והם חותכים את הקטע MG, העובר במרכז המעגל, בנקודות E, F ו-M בהתאמה.
נתון $CF = DF$ , $KL \parallel CD$.
הוכח: $KM = LM$.
נתון בנוסף כי: $AB \perp MG$ , $ML = BE$.
הוכח: $MO = EO$.

**14)** ABC הוא משולש החסום במעגל O. המיתר AB הוא קוטר במעגל. הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AC ו-BC בהתאמה. מעבירים את הקטעים OD ו-OE וידוע כי: $OD \perp AC$ , $OE \perp BC$.
הוכח כי DE שווה באורכו לרדיוס המעגל.




## תשובות סופיות:

**11)** א. שאלת הוכחה. ב. $140°$.
**12)** 40 ס"מ = AB, 42 ס"מ = BC.
**13)** שאלת הוכחה.
**14)** שאלת הוכחה.

# זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל:

## סיכום כללי:

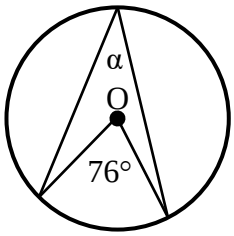
**משפטים העוסקים בזוויות במעגל:**

1. שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת/קשתות שוות, שוות ביניהן.
   (משפט הפוך ל-5) זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות.
2. זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

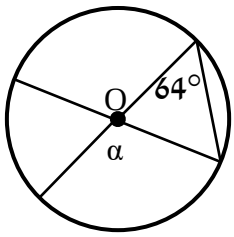
## שאלות:

**15)** נתונים המעגלים הבאים שמרכזם הוא O.
חשב את הזווית $\alpha$ בכל אחד מהמקרים.

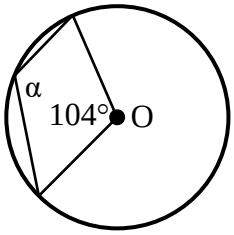
א.



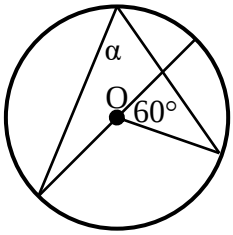

ב.



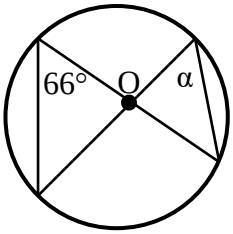

ג.



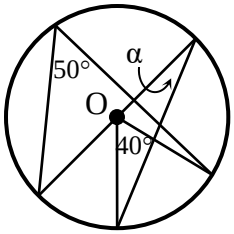

ד.




ה.

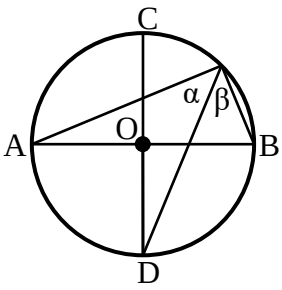


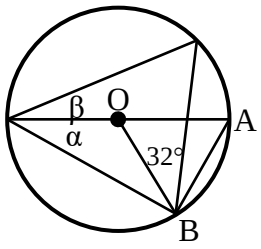

ו.

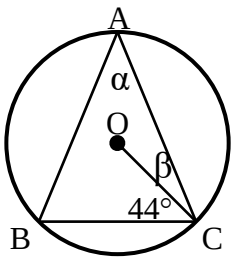


**16)** במעגלים הבאים שמרכזם O מופיעים הנתונים לידם.
חשב את הזוויות $\alpha$ ו- $\beta$ בכל אחד מהמקרים:

א. $AB = AC$ ב. $\Delta AOB$ - שווה צלעות. ג. $AB, CD$ קטרים מאונכים זה לזה.



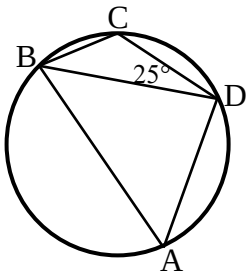



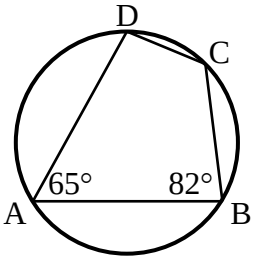



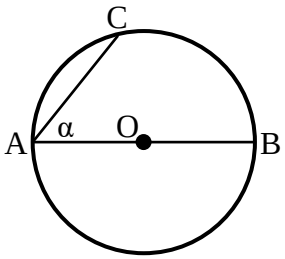

**17)** חשב את המבוקש בכל מקרה:

א. $AB$ קוטר, $\overset{\frown}{AC} = 84°$ ב. $\overset{\frown}{DC} = 52°$. ג. $\overset{\frown}{DC} = 60°$.

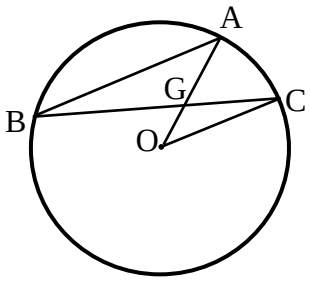
חשב את $\alpha$. חשב: $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{DC}, \overset{\frown}{AD}$. חשב $\sphericalangle BAD$.



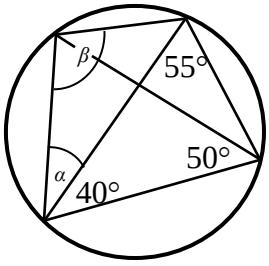



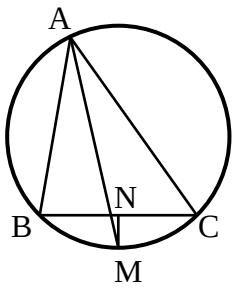

**18)** $AB$ ו-$BC$ הם מיתרים במעגל שמרכזו O.
נתון: $\sphericalangle AGC = 60°$ , $AB \parallel CO$.
חשב את גודלה של הזווית $\sphericalangle AOC$.



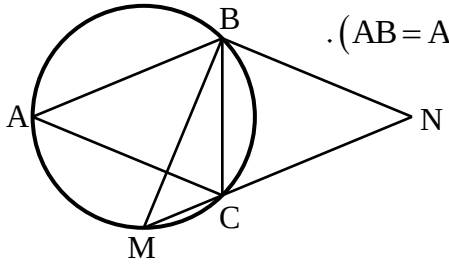

**19)** חשב את גודל הזוויות $\alpha$ ו- $\beta$ במעגל הנתון.



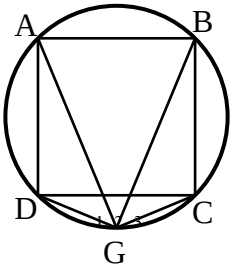
**20)** המשולש ABC חסום במעגל.
המיתר AM חוצה את זווית A.
מעבירים אנך מהנקודה M לצלע BC
החותך אותה בנקודה N.
הוכח: $BN = CN$.



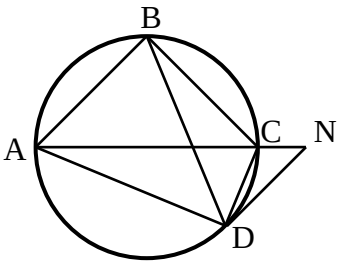

**21)** בסרטוט שלפניך נתון כי המשולשים
ABC ו-BMN הם שווי שוקיים $(AB = AC\ ,\ BM = BN)$.
זווית הראש במשולש BMN היא $94°$.
חשב את זווית ACB.




**22)** במעגל שלפניך חסום ריבוע ABCD.
הנקודה G נמצאת על היקף המעגל.
ממנה מעבירים מיתרים לכל קדקוד
כך שנוצרות הזוויות $\sphericalangle G_3$ , $\sphericalangle G_2$ , $\sphericalangle G_1$.
הוכח כי $\sphericalangle G_1 = \sphericalangle G_2 = \sphericalangle G_3$ ומצא אותן.




**23)** המרובע ABCD חסום במעגל.
ממשיכים את האלכסון AC עד לנקודה N
ומחברים אותה עם הקדקוד D
כך שמתקיים: $AB \parallel DN$.
הוכח כי זוויות המשולשים $\Delta ADN$
ו-$\Delta BDC$ שוות.



## תשובות סופיות:

**15)** א. $38°$ ב. $128°$ ג. $128°$ ד. $60°$ ה. $66°$ ו. $30°$.

**16)** א. $\alpha = 46° \ , \ \beta = 23°$ ב. $\alpha = 30° \ , \ \beta = 28°$ ג. $\alpha = \beta = 45°$.

**17)** א. $\alpha = 48°$ ב. $\overset{\frown}{AD} = 112° , \overset{\frown}{BC} = 78° , \overset{\frown}{AB} = 118°$ ג. $55°$.

**18)** $40°$.

**19)** $\alpha = 35° \ , \ \beta = 95°$.

**20)** שאלת הוכחה.

**21)** $68.5°$.

**22)** $\sphericalangle G_1 = \sphericalangle G_2 = \sphericalangle G_3 = 45°$

**23)** שאלת הוכחה.

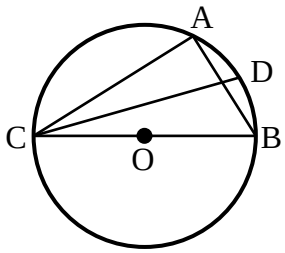
# זווית היקפית הנשענת על קוטר:

## סיכום כללי:

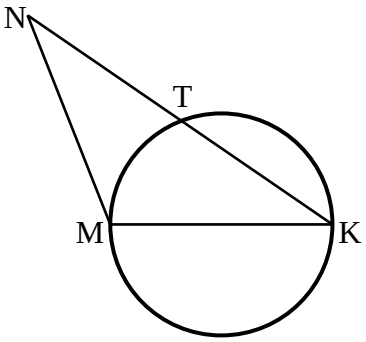
**משפט:**

1. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.
(משפט הפוך) מיתר עליו נשענת זווית היקפית ישרה הוא קוטר.

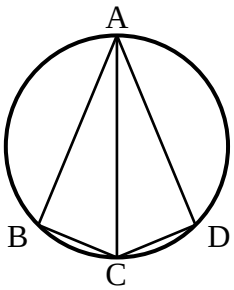
## שאלות:



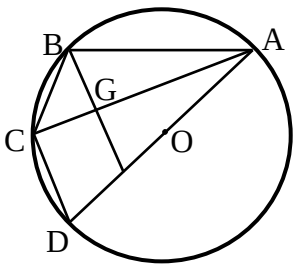

**24)** המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש-BC הוא קוטר. מעבירים את המיתר CD המקיים: $\sphericalangle DCB = 20°$.
מצא את זווית CAD.




**25)** MK הוא קוטר במעגל שלפניך.
הקטע KN חותך את המעגל בנקודה T.
מתקיים: $KT = NT$.
הוכח כי: $MK = NM$.

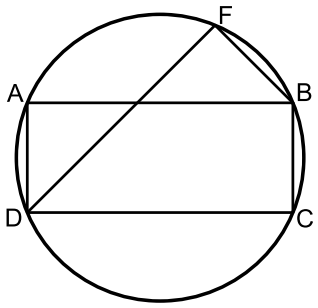



**26)** מרובע ABCD חסום במעגל כאשר האלכסון AC הוא קוטר וחוצה את זווית BCD.
הוכח כי ABCD הוא דלתון.




**27)** AB, AC, AD, BC ו-CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O (המיתר AD עובר ב-O).
הקטע BE חותך את המיתר AC בנקודה G.
נתון: $BG = GE$ , $BE \parallel CD$.
הוכח: $BC = CD$.

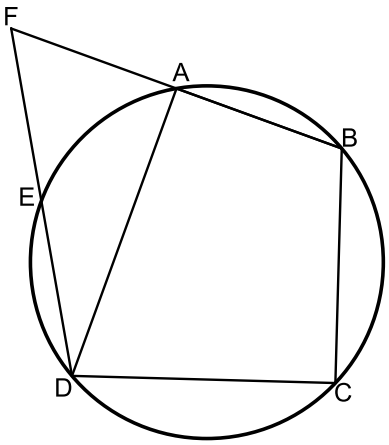
**28)** המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל.
מהקדקוד D מעבירים את המיתר DF
החותך את הצלע AB בנקודה E.
ידוע כי: $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CF}$.
הצלע AD של המלבן תסומן ב- $a$.




א. הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים.

ב. נתון גם כי: $BC = BF$.
הבע באמצעות $a$ את רדיוס המעגל.

**29)** המרובע ABCD חסום במעגל.
המשכי המיתרים AB ו-ED נפגשים בנקודה F.
הקטע FD חותך את היקף המעגל בנקודה E
כך שמתקיים: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AE}$.
נתון כי הזווית BCD היא ישרה.

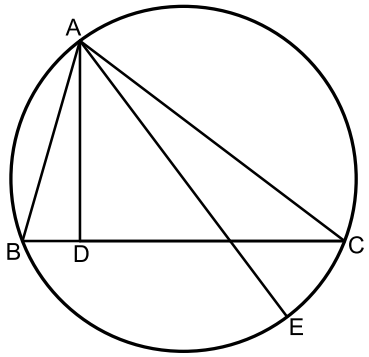



א. הוכח כי הקטע DF שווה לקוטר המעגל.

ב. נתון כי: $DF = BF$ וכי רדיוס המעגל הוא 12 ס"מ.
הוכח כי המרובע AEDB הוא טרפז.

ג. חשב את היקף הטרפז AEDB.

**30)** משולש ABC חסום במעגל.
AD גובה לצלע BC ו-AE קוטר במעגל.




א. הוכח: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$.

נתון גם כי: $CE = \sqrt{21}, AD = 6, CD = 8$.

ב. חשב את רדיוס המעגל.

## תשובות סופיות:

**24)** $110°$.
**25)** שאלת הוכחה.
**26)** שאלת הוכחה.
**27)** שאלת הוכחה.
**28)** א. שאלת הוכחה. ב. $R = 1.3a$.
**29)** א. שאלת הוכחה. ב. 5.5.
**30)** א. $\alpha = 135°$ ב. $\alpha = 45°$ ג. $\alpha = 40°$.

# משיקים למעגל:

## סיכום כללי:

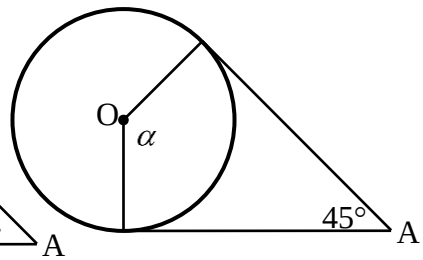
**משפטים העוסקים במשיק למעגל ושני משיקים למעגל:**

1. משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
(משפט הפוך ל-8) קטע המאונך לרדיוס בקצהו משיק למעגל.
2. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
3. קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שממנה יוצאים שני משיקים חוצה את הזווית בין המשיקים.

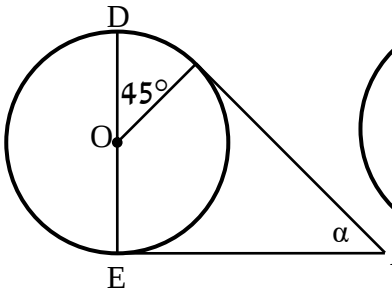
## שאלות:

**31)** באיורים שלפניך נתונים שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה A שמחוץ למעגל.
מרכזי המעגלים מסומן ב-O. מצא את $\alpha$ בכל מקרה.

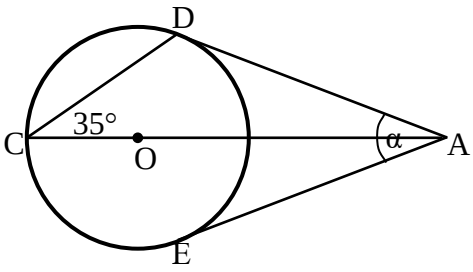
א.



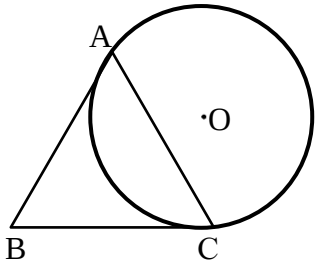

ב.



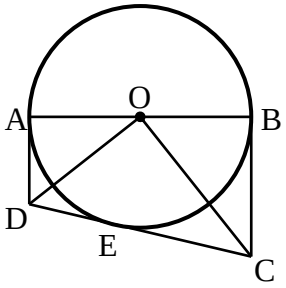

ג.

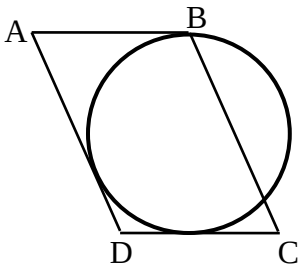



**32)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB=AC)$.
המעגל O משיק לצלעות AB ו-BC בנקודות A ו-C.
הוכח כי ABC הוא שווה צלעות.

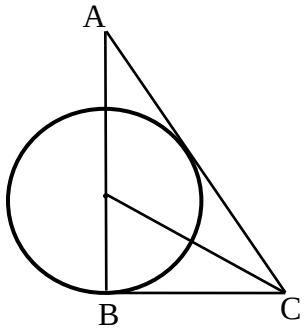



**33)** במעגל O מעבירים קוטר AB ושלושה משיקים
AD, CD ו-BC. E היא נקודת ההשקה של CD עם המעגל.
הוכח כי: $\sphericalangle COD=90°$.





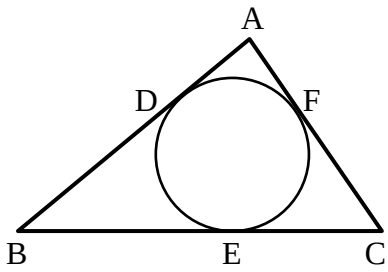

**34)** הצלעות AB, AD ו-DC של המקבילית ABCD משיקות למעגל בנקודות B , L ו-K בהתאמה (ראה שרטוט).
נתון: BC = 6 ס"מ, CK = 14 ס"מ.
חשב את היקף המקבילית.



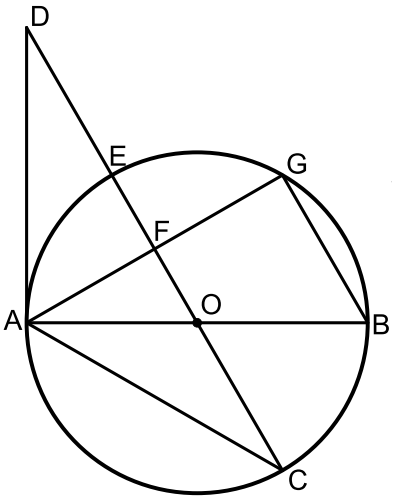

**35)** הצלעות AC ו-BC של המשולש ABC משיקות למעגל שמרכזו O , בנקודות K ו-B בהתאמה.
הצלע AB עוברת בנקודה O.
נתון: $AK = CK$ , AB = 15 ס"מ.

א. חשב את גודלה של זווית A.

ב. חשב את אורכו של רדיוס המעגל.




**36)** משולש ABC חוסם מעגל אשר משיק לצלעותיו בנקודות D, E ו-F כמתואר באיור.
נתון כי: AC = 18 ס"מ, BD = 14 ס"מ.
מצא את היקף המשולש ABC.




**37)** AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
מהנקודה A מעבירים את המיתרים AC ו-AG ואת המשיק AD כך שהמשולש ACD שווה שוקיים.
הישר CD חותך את היקף המעגל בנקודה E,
את המיתר AG בנקודה F ועובר דרך מרכז המעגל O
המיתר BG מקביל לישר החותך CD.

א. חשב את זוויות המשולש ACD.

ב. הוכח כי: $AF = FG$ .

ג. רדיוס המעגל יסומן ב- $R$ .
הוכח כי: $DC = 3R$ .

## תשובות סופיות:

**31)** א. $\alpha=135°$ ב. $\alpha=45°$ ג. $\alpha=40°$.

**32)** שאלת הוכחה.

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** 48 ס"מ.

**35)** א. $30°$ ב. 5 ס"מ.

**36)** 64 ס"מ.

**37)** א. $120°$ , $30°$ , $30°$. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

# משיק ומיתר:

## סיכום כללי:

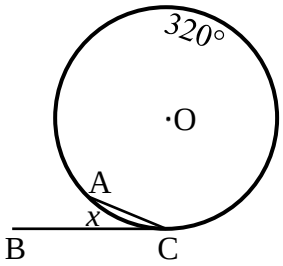
**משפט:**

1. הזווית הכלואה בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני.

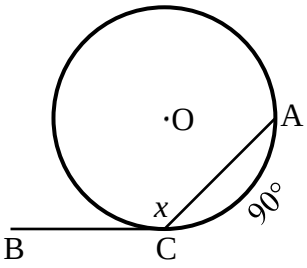
## שאלות:

**38)** באיורים שלפניך נתון מעגל שמרכזו O, מיתר AC ומשיק BC בנקודה C.
מצא את $x$.

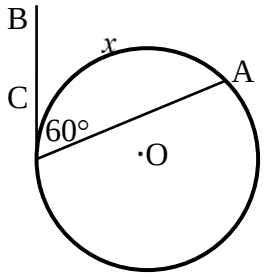
א.



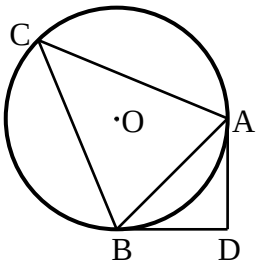

ב.



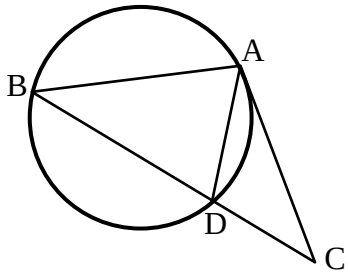

ג.



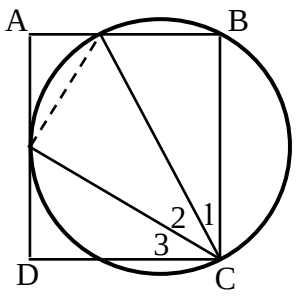

**39)** ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AC = BC)$
החסום במעגל שמרכזו O.
מהקדקודים A ו-B מעבירים משיקים אשר נחתכים בנקודה D.
ידוע כי זווית הבסיס במשולש ABC היא $68°$.
חשב את זווית ADB.




**40)** AC הוא משיק למעגל בנקודה A.
BC חותך את המעגל בנקודה D.
נתון כי $AD = CD$ , הוכח: $AB = AC$.



**41)** הקדקודים B ו-C של המלבן ABCD מונחים על מעגל.
צלע AD משיקה למעגל בנקודה G והצלע AB חותכת את המעגל בנקודה H.
הוכח: $\sphericalangle C_2 = \sphericalangle C_3$ .
(הדרכה: סמן $\sphericalangle AGH = \alpha$).




## תשובות סופיות:

**38)** א. $x = 20°$ ב. $x = 135°$ ג. $x = 120°$ .
**39)** $92°$
**40)** שאלת הוכחה.
**41)** שאלת הוכחה.

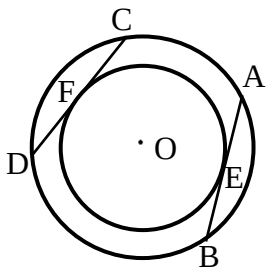
# שני מעגלים:

## סיכום כללי:

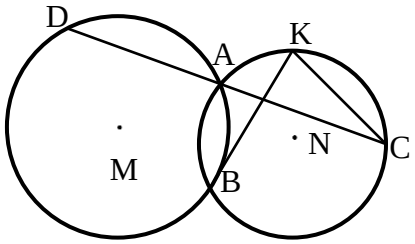
**משפטים העוסקים בשני מעגלים:**

1. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.
2. קטע המרכזים (או המשכו) של שני מעגלים משיקים עובר בנקודת ההשקה.

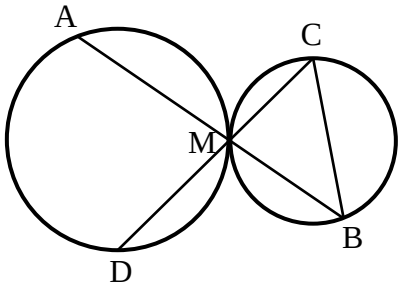
## שאלות:



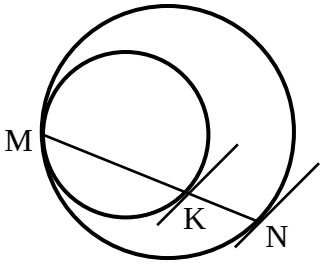

**42)** נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
דרך שתי נקודות E ו-F שעל היקף המעגל הפנימי מעבירים משיקים אשר חותכים את המעגל החיצוני בנקודות A, B, C ו-D. הוכח כי המיתרים AB ו-CD הנוצרים באופן זה שווים.



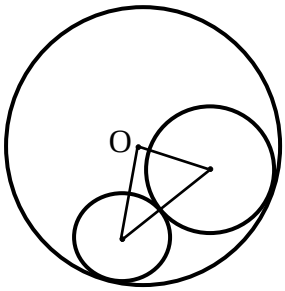

**43)** שני מעגלים M ו-N נחתכים בנקודות A ו-B.
הישר CD עובר דרך הנקודה A.
מעבירים משיק למעגל M בנקודה B
החותך את המעגל N בנקודה K.
הוכח כי: $CK \parallel BD$.




**44)** שני מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ בנקודה M.
דרך הנקודה M מעבירים שני ישרים חותכים.
האחד חותך את המעגל השמאלי בנקודה A ואת הימני בנקודה B והאחר חותך את המעגל השמאלי בנקודה D ואת הימני בנקודה C.
הוכח כי $AD \parallel BC$.

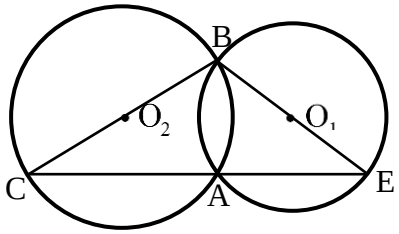



**45)** שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה M.
מעבירים מיתר MN במעגל החיצוני אשר חותך את המעגל הפנימי בנקודה K.
הוכח כי המשיקים לשני המעגלים בנקודות N ו-K מקבילים זה לזה.




**46)** המעגלים שמרכזיהם M ו-G משיקים מבחוץ זה לזה ומשיקים מבפנים למעגל שמרכזו O.
נתון כי רדיוס המעגל שמרכזו O הוא 8 ס"מ.
חשב את היקף המשולש OMG.

**47)** שני מעגלים שמרכיזהם $O_1$ ו-$O_2$ נחתכים בנקודות A ו-B.
מעבירים את הקטרים BC ו-BE.




א. הוכח כי הנקודות C, E ו-A נמצאות על ישר אחד.
ב. הוכח כי $O_1O_2$ הוא קטע אמצעים במשולש BCE.

## תשובות סופיות:

**42)** שאלת הוכחה.
**43)** שאלת הוכחה.
**44)** שאלת הוכחה.
**45)** שאלת הוכחה.
**46)** 16 ס"מ.
**47)** שאלת הוכחה.

# מעגל חוסם ומעגל חסום:

## סיכום כללי:

**משפטים העוסקים במעגל חוסם ומעגל חסום:**

1. מרכז מעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים במשולש.
2. מרכז מעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי הזווית במשולש.
3. במרובע החסום במעגל, סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא $180°$.
(משפט הפוך) אם במרובע סכום זוג זויות נגדיות הוא $180°$,
המרובע בר חסימה במעגל.
4. במרובע החוסם מעגל סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.
(משפט הפוך) אם במרובע סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג
השני אז ניתן לחסום בתוכו מעגל.
5. כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל וניתן לחסום בתוכו מעגל.

## שאלות:

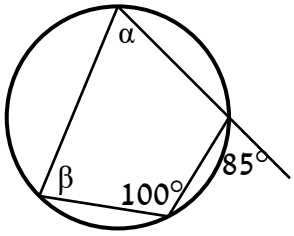
**48)** AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC.

א. הוכח: אם מרכז המעגל החסום במשולש ABC נמצא על AD אז המשולש ABC הוא שווה שוקיים.

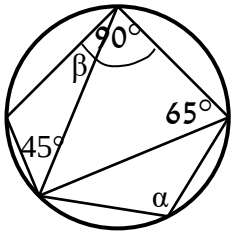
ב. בהמשך לסעיף א', האם מרכז המעגל החוסם את משולש ABC נמצא על AD?

**49)** מצא את הנעלמים בכל אחד מהסרטוטים שלפניך:

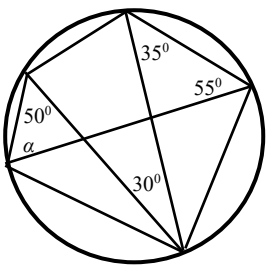
א.




ב.

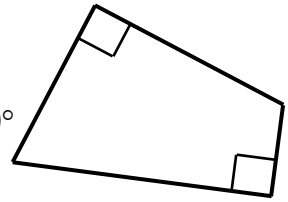



**50)** חשב את גודלה של הזווית $\alpha$ בסרטוט הבא:

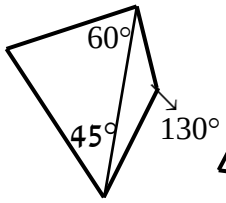


**51)** קבע אלו מהמרובעים הבאים ניתן לחסום במעגל:

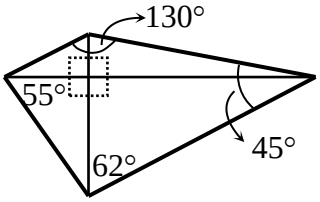
א.



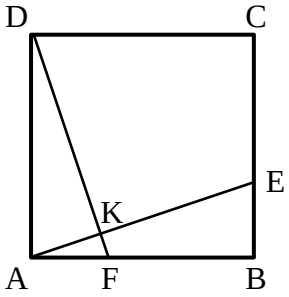
ב.



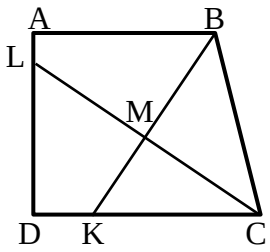

ג.



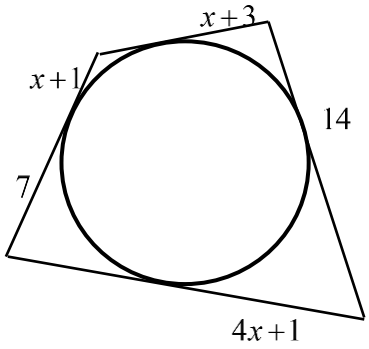

**52)** בריבוע ABCD נתון כי $AF = BE$.
הנקודה K היא חיתוך של הקטעים AE ו-DF.
הוכח כי את המרובע DKEC ניתן לחסום במעגל.



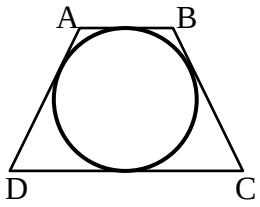

**53)** בטרפז ישר זווית ABCD שבו השוק AD מאונכת לבסיסים AB ו-DC הנקודות K ו-L נמצאות על הצלעות DC ו-AD בהתאמה, כך שהקטעים BK ו-CL הם חוצי הזוויות B ו-C בהתאמה.
חוצי הזוויות נפגשים בנקודה M.
הוכח: את המרובע DKML ניתן לחסום במעגל.
**הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.**




**54)** חשב את גודלו של $x$ בשרטוט הבא:




**55)** בטרפז שווה שוקיים $(AB \| CD)$ ABCD
שהיקפו 60 ס"מ וזוויות הבסיס החדות שלו הן $60°$ חסום מעגל.
מצא את אורכי צלעות הטרפז.



## תשובות סופיות:

**48)** שאלת הוכחה.

**49)** א. $\alpha=80°\ ,\ \beta=85°$ ב. $\alpha=110°\ ,\ \beta=20°$.

**50)** $\alpha=70°$.

**51)** ניתן לחסום את מרובע א' בלבד.

**52)** שאלת הוכחה.

**53)** שאלת הוכחה.

**54)** $x=2$

**55)** 15 ס"מ, 15 ס"מ, 7.5 ס"מ, 22.5 ס"מ.

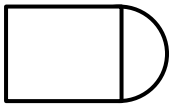
# שטחים והיקפים במעגל:

## שאלות:

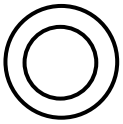
**56)** ענה על השאלות הבאות:

א. היקפו של עיגול הוא 44 ס"מ. חשב את שטחו.

ב. הצורה שבאיור היא $\frac{3}{4}$ עיגול.
היקף הצורה שווה ל-45 ס"מ.
חשב את אורך הרדיוס של העיגול.

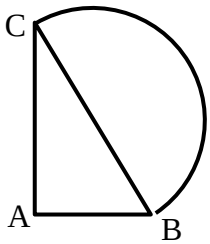


ג. שטח צורה המורכבת מריבוע וחצי עיגול הוא 30 סמ"ר.
חשב את רדיוס חצי העיגול.



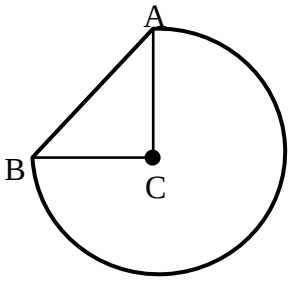
ד. שטח טבעת הוא $55\pi$ סמ"ר.
הרדיוס הפנימי הוא 3 ס"מ.
חשב את הרדיוס החיצוני של הטבעת.

**57)** נתון משולש ישר זווית ABC, $(\sphericalangle A = 90°)$.
על היתר BC בונים חצי עיגול.
נתון: AB = 10 ס"מ , AC = 24 ס"מ , BC = 26 ס"מ.



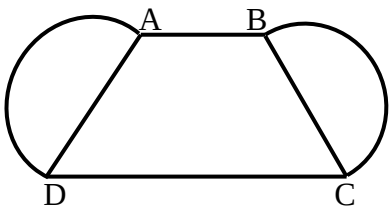

א. חשב את היקף הצורה המורכבת.
ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.

**58)** באיור שלפניך שלושה רבעי עיגול החסומים ע"י הקטע AB ומשולש ישר זווית ABC (C מרכז העיגול).
ידוע כי רדיוס העיגול הוא 14 ס"מ
וכי אורך הקטע AB הוא 19.8 ס"מ.



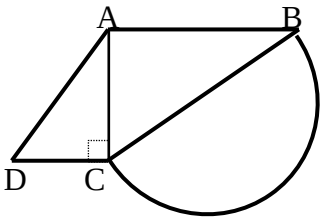

א. חשב את היקף הצורה המורכבת.
ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.

**59)** באיור שלפניך נתון טרפז שווה שוקיים ABCD, $(AB \| CD \, , \, AD = BC)$.
על שוקי הטרפז בונים חצאי עיגולים.
נתון: AB = 10 ס"מ, CD = 16 ס"מ , BC = 12 ס"מ.
אורך גובה הטרפז הוא 11.6 ס"מ.




א. חשב את היקף הצורה המורכבת.
ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.

**60)** נתון טרפז $ABCD$, $(AB \| CD)$. מעבירים את האלכסון $AC$ אשר מאונך לבסיסים $AB$ ו-$DC$ של הטרפז. על השוק $BC$ בונים חצי עיגול.




נתון: $AB = 24$ ס"מ, $AC = 18$ ס"מ.
שטח הטרפז הוא 283.5 סמ"ר.

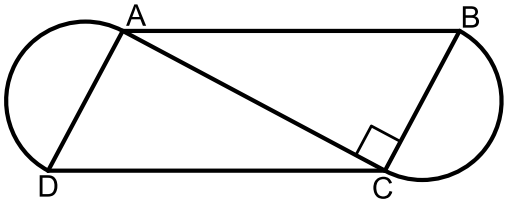
א. מצא את הבסיס $DC$.

ב. חשב את רדיוס העיגול.

ג. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ד. חשב את שטח הצורה המורכבת.

**61)** המרובע $ABCD$ הוא מקבילית.
על הצלעות $BC$ ו-$AD$ בונים שני חצאי עיגול זהים בעלי רדיוס $R$.
מעבירים את האלכסון $AC$.




ידוע כי האלכסון $AC$ מאונך לצלע $BC$.
נתון: $AC = 4R - 1$, $AB = 4R + 1$.

א. מצא את רדיוס העיגולים, $R$.

ב. חשב את היקף המקבילית $ABCD$.

ג. חשב את השטח של הצורה המורכבת מהמקבילית ושני חצאי העיגולים.

**62)** נתון מעגל שאורך רדיוסו הוא 16 ס"מ.
חשב את אורך הקשת ואת שטח הגזרה המתאימות לזווית מרכזית בכל אחד מהמקרים הבאים:

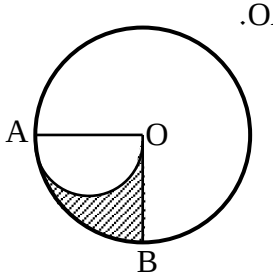
א. $60°$

ב. $45°$

ג. $270°$

ד. $17°$

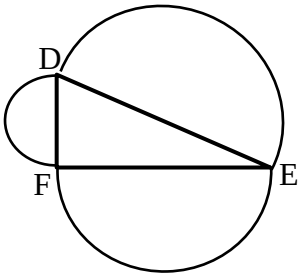
**63)** על הרדיוס $OA$ של מעגל $O$ בונים חצי מעגל אשר קוטרו הוא $OA$.
ידוע כי $\sphericalangle BOA = 90°$.




א. חשב את השטח המקווקו $OBA$
אם ידוע כי $OA =$ 10 ס"מ.

ב. הוכח באופן כללי כי שטח הגזרה $OBA$ שווה לשטח חצי מעגל אשר קוטרו הוא $OA$.

**64)** על הצלעות של משולש ישר זווית $\Delta DEF$ $(\sphericalangle F = 90°)$ בונים חצאי מעגלים.
הוכח כי שטח חצי המעגל הבנוי על היתר שווה לסכום שטחי חצאי המעגלים הבנויים על הניצבים.



## תשובות סופיות:

**56)** א. $S=\frac{484}{\pi}$ סמ"ר. ב. $R=6.706$ ס"מ. ג. $R=2.32$ ס"מ. ד. $R=8$ ס"מ.

**57)** א. $P=74.84$ ס"מ. ב. $S=385.46$ סמ"ר.

**58)** א. $P=85.77$ ס"מ. ב. $S=559.814$ סמ"ר.

**59)** א. $P=63.7$ ס"מ. ב. $S=263.89$ סמ"ר.

**60)** א. $DC=7.5$ ס"מ. ב. $R=15$ ס"מ. ג. $P=98.12$ ס"מ. ד. $S=636.929$ סמ"ר.

**61)** א. $R=4$ ס"מ. ב. $P_{ABCD}=50$ ס"מ. ג. $S=120+16\pi\approx170.26$ סמ"ר.

**62)** א. $l=5\frac{1}{3}\pi$ ס"מ, $S=42\frac{2}{3}\pi$ סמ"ר. ב. $l=4\pi$ ס"מ, $S=32\pi$ סמ"ר.
ג. $l=24\pi$ ס"מ, $S=192\pi$ סמ"ר. ד. $l=1.51\pi$ ס"מ, $S=12.08\pi$ סמ"ר.

**63)** א. $12.5\pi$ סמ"ר. ב. שאלת הוכחה.

**64)** שאלת הוכחה.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 17 - גיאומטריה אוקלידית - פרופורציה ודמיון

### תוכן העניינים

1. משפט תאלס ..... 274
2. הרחבות של משפט תאלס ..... 277
3. משפט חוצה הזווית ..... 281
4. דמיון משולשים ..... 285
5. יחסים בין גדלים שונים ושטחים במשולשים דומים ..... 292
6. פרופורציה במשולש ישר זווית ..... 296
7. פרופורציות במעגל ..... 297

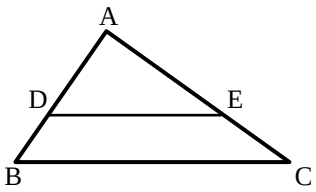
# משפט תאלס:

## סיכום כללי:

- שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.
- משפט הפוך: אם שני ישרים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים הישרים מקבילים.

- משפט תאלס + ההפוך:

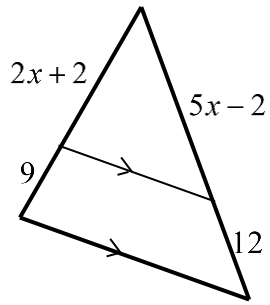
$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$



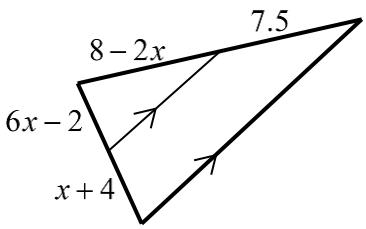

## שאלות:

**1)** מצא את ערכו של $x$ בשרטוטים הבאים:

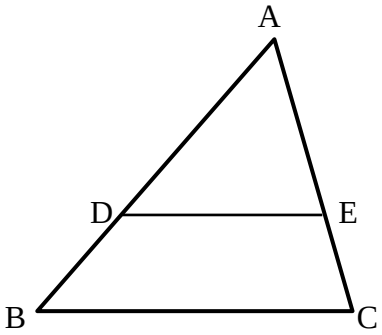
א.




ב.

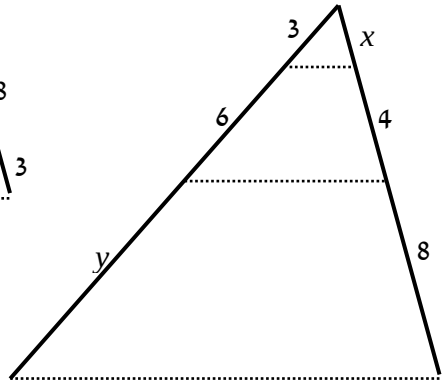



**2)** בסרטוט שלפניך נתון $DE \parallel BC$.
$AC$ = 30 ס"מ , $AE$ = 20 ס"מ , $BD$ = 12 ס"מ.
מצא את אורך הקטע $AD$.

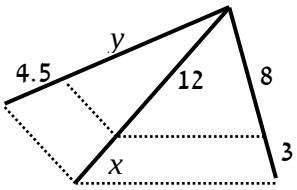


**3)** חשב את $x$ ואת $y$ בסרטוטים שלפניך (הקטעים המקווקוים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:

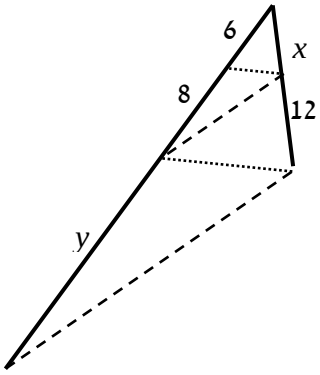
א.



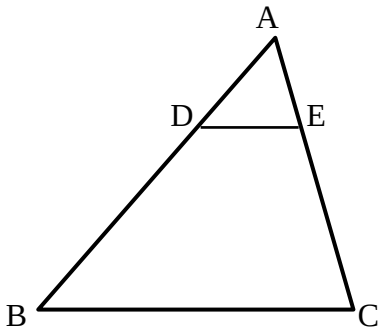

ב.



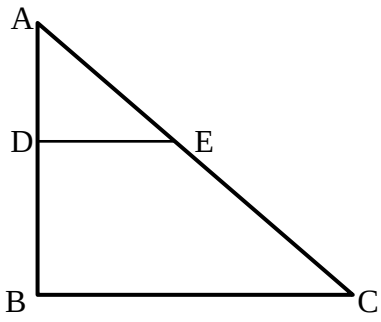

ג.



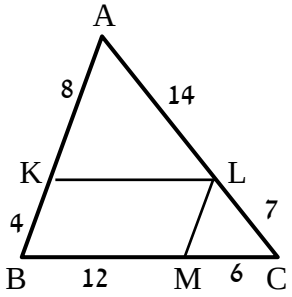

**4)** בסרטוט שלפניך נתון:
$DE \parallel BC$ , $\frac{AD}{BD}=\frac{2}{7}$ , $AC =$ 36 ס"מ.
מצא את אורכי הקטעים AE ו-CE.




**5)** במשולש שלפניך נתון $DE \parallel BC$.
כמו כן: $\sphericalangle ADE = 90°$
וכן: $AE = BD =$ 10 ס"מ , $DE =$ 8 ס"מ.
מצא את אורכי הקטעים AD , CE ו-BC.




**6)** מרובע KLMB חסום במשולש ABC.
הנתונים המספריים רשומים בסרטוט.
כל המידות הן בס"מ.
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.



## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=2$ ב. $x=1$.

**2)** 24 ס"מ.

**3)** א. $x=2\ ,\ y=12$ ב. $x=4.5\ ,\ y=12$ ג. $x=9\ ,\ y=18\frac{2}{3}$.

**4)** $AE=$ 8 ס"מ , $CE=$ 28 ס"מ.

**5)** $AD=$ 6 ס"מ , $BC=21\frac{1}{3}$ ס"מ , $CE=16\frac{2}{3}$ ס"מ.

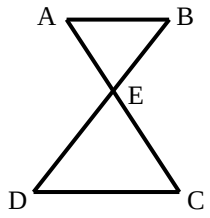
**6)** שאלת הוכחה.

# הרחבות של משפט תאלס:

## סיכום כללי:

- משפט תאלס המורחב + ההפוך:
$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

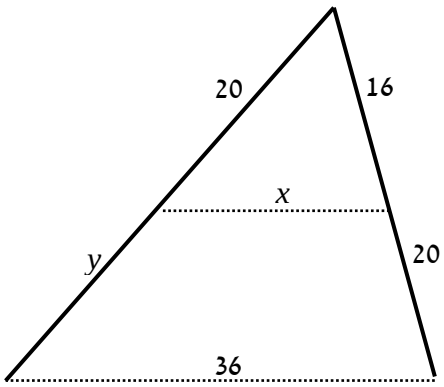
- משפט תאלס "שעון חול" + ההפוך:
$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \frac{BE}{DE}=\frac{AE}{CE}=\frac{AB}{CD}$$



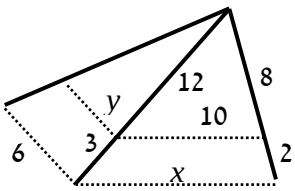

## שאלות:

**7)** חשב את $x$ ואת $y$ בסרטוטים שלפניך (הקטעים המקווקוים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:

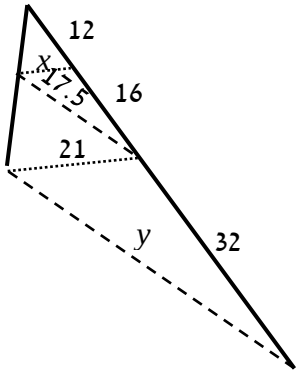
א.



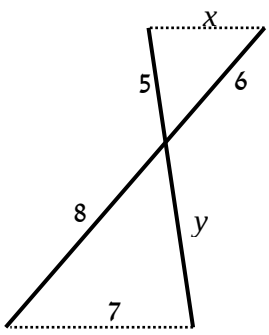

ב.



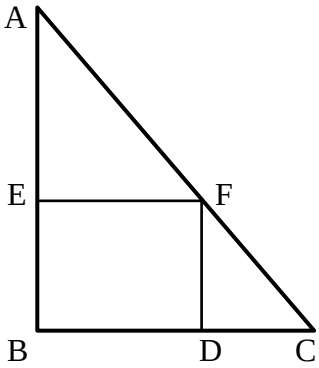

ג.



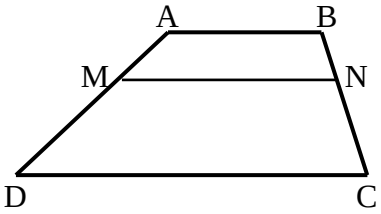

ד.



**8)** המרובע EFBD הוא מלבן החסום במשולש ישר זווית ABC . נתון כי: 20 ס"מ = AB ,
15 ס"מ = BC , 18 ס"מ = AF.
מצא את אורכי צלעות המלבן.



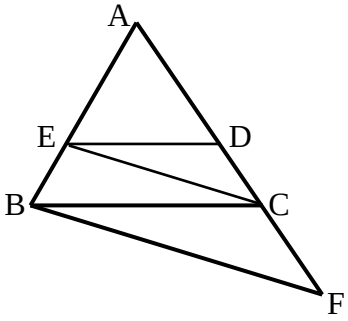

**9)** המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \| CD)$.
מעבירים קטע MN אשר מקביל לבסיסים.
הוכח: $\frac{AM}{DM} = \frac{BN}{CN}$.




**10)** באיור שלפניך נתון: $DE \| BC \; , \; CE \| BF$.
הוכח את הטענות הבאות:

א. $\frac{AD}{CD} = \frac{AC}{CF}$.

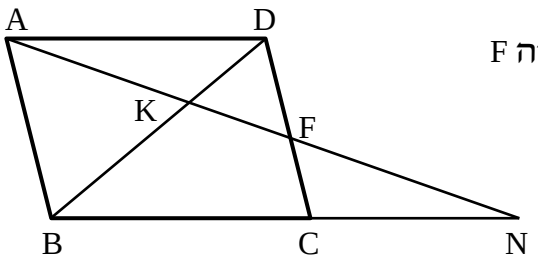
ב. $AC^2 = AD \cdot AF$.



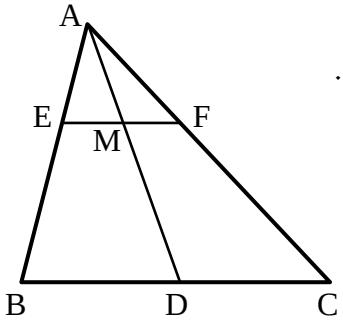

**11)** במקבילית ABCD מעבירים ישר דרך הנקודה A החותך את הצלע CD בנקודה F ונפגש עם המשך BC בנקודה N.
הוכח את הטענות הבאות:

א. $\frac{NK}{AK} = \frac{AK}{KF}$.

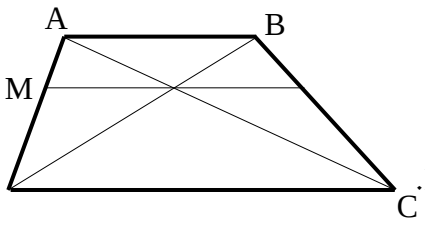
ב. $\frac{BC}{CN} = \frac{DF}{CF}$.




**12)** במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC.
הקטע EF מקביל ל-BC וחותך את התיכון בנקודה M.
הוכח כי: $EM = FM$.



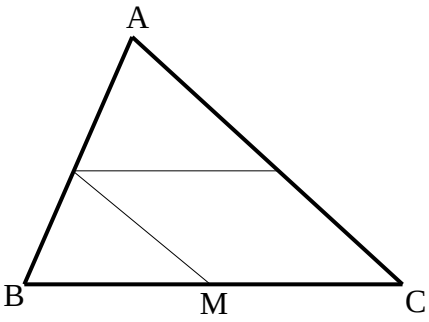
**13)** בטרפז ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה Q.
בנקודה Q העבירו קטע המקביל לבסיסי הטרפז וחותך את שוקי הטרפז בנקודות M ו-N כמתואר בשרטוט.
נתון: $DC = 18$ ס"מ , $DQ = 9$ ס"מ, $BQ = 3$ ס"מ.
חשב את גודל הקטע MQ.



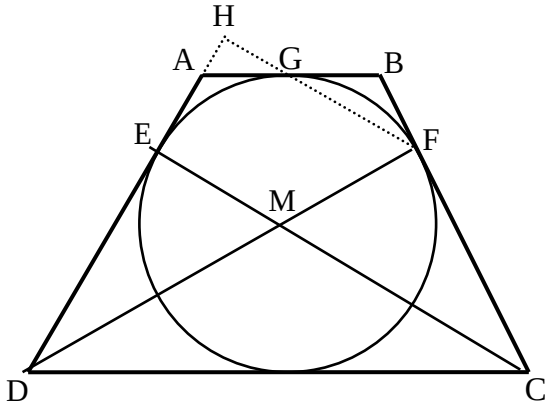

**14)** בשרטוט נתון: $\frac{AK}{CK}=\frac{CM}{BM}=\frac{AL}{BL}$.

א. הוכח: המרובע KLMC הוא מקבילית.

ב. נתון: $AL=1.5BL$ , $BC = 10$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע LK.




**15)** הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים.
חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו בנקודות E , F ו-G כמתואר באיור.
הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז ונחתכים בנקודה M.




א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.

ב. חשב את זוויות הטרפז.

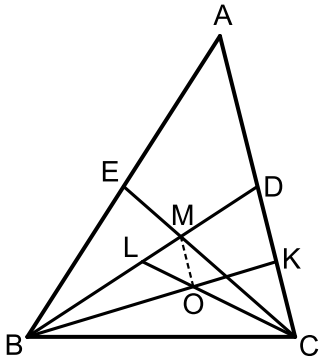
ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.
חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$.

**16)** במשולש ABC מעבירים את התיכונים BD ו-CE אשר נפגשים בנקודה M.
במשולש BDC מעבירים את התיכונים CL ו-BK הנפגשים בנקודה O.

א. הוכח כי: $3LM = BL$.

ב. הוכח כי: $AC \parallel MO$.

ג. נתון: $S_{BLC} = 27$.
חשב את שטח המשולש MOL.



## תשובות סופיות:

**7)** א. $x=16\ ,\ y=25$ ב. $x=12.5\ ,\ y=4.8$

ג. $x=9\ ,\ y=37.5$ ד. $x=5.25\ ,\ y=6\frac{2}{3}$.

**8)** 10.8 ס"מ ו-5.6 ס"מ.

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

**11)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** 4.5 ס"מ.

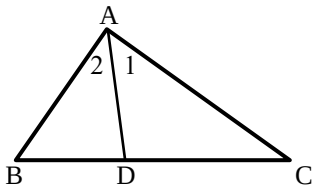
**14)** א. שאלת הוכחה. ב. 6 ס"מ.

**15)** א. שאלת הוכחה. ב. $60°,120°$ ג. $\frac{2}{3}$.

**16)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 3.

# משפט חוצה הזווית:

## סיכום כללי:



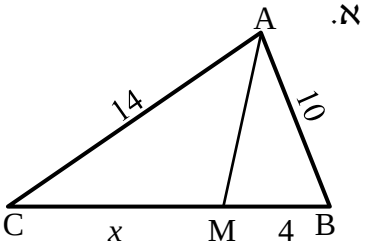

- חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית ביחס הזהה ליחס בין הצלעות שביניהן הוא כלוא ולהיפך.

אם: $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ אז: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$ ולהיפך.

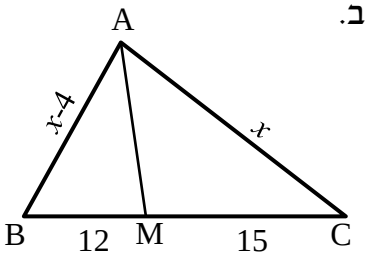
## שאלות:

**17)** מצא את גודלו של $x$ בסרטוטים הבאים אם נתון כי AM חוצה זווית A בכל המשולשים, כל הגדלים הם בס"מ:

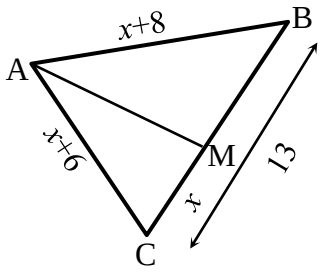
א.



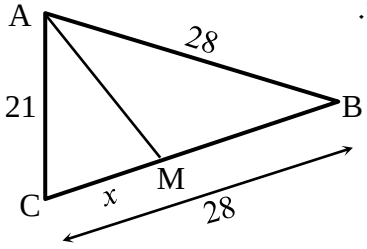

ב.



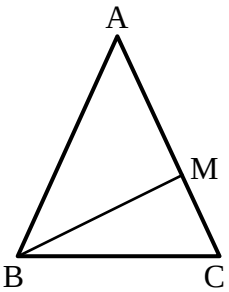

ג.

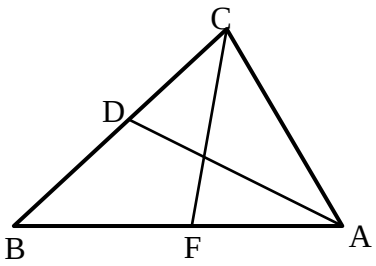



ד.



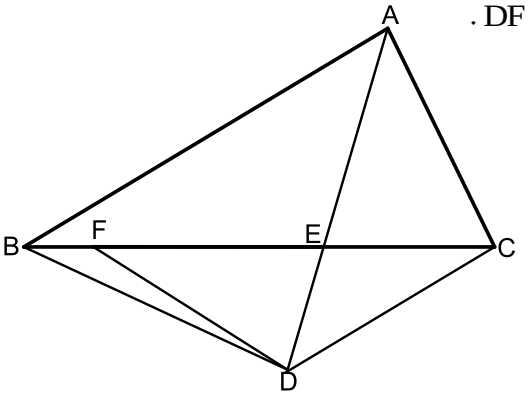

**18)** נתון משולש שווה שוקיים ABC, $(AB = AC)$.
ידוע כי היקפו הוא 28 ס"מ.
הקטע BM הוא חוצה זווית B.
נתון כי הקטע AM גדול פי 3 מהקטע MC.
חשב את אורך הקטע MC.






**19)** הקטעים AD ו-CF הם חוצי הזוויות A ו-C בהתאמה במשולש ABC.
נתון: $AB = 18$ ס"מ , $AC = 12$ ס"מ , $CD = 6$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע AF.

**20)** נתון משולש ABC. הקטע AE חוצה את זווית A של המשולש.
ממשיכים את AE עד לנקודה D כך שנוצר המשולש BDC.
F היא נקודה על הצלע BC המקיימת: $DF = FE = DC$.
הצלע AB מקבילה לצלע DC.

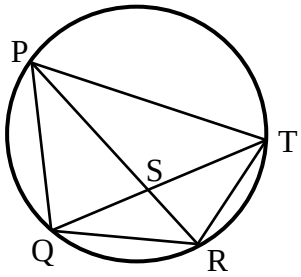



א. הוכח כי: $AC = EF$.

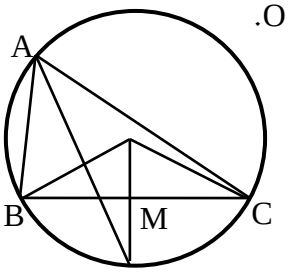
ב. הוכח: $\frac{AB}{BE} = \frac{FE}{CE}$.

ג. הָמְשֵׁך את הקטע DF עד לנקודה H שעל הצלע AB.
ידוע כי המרובע ACDH הוא בר חסימה.
חשב את זוויות המשולש DEF.

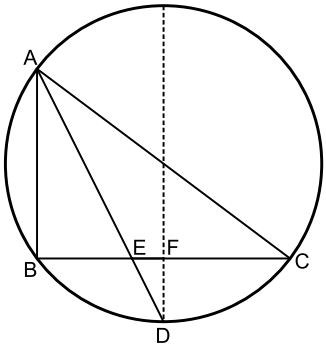
**21)** המרובע PQRT חסום במעגל.
נתון כי: $QR = RT$.
ידוע כי: $PQ = 20$ ס"מ , $PT = 28$ ס"מ , $QT = 24$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע QS.




**22)** הנקודות A, B, C ו-D מונחות על היקפו של מעגל שמרכזו O.
הרדיוס DO חוצה את הזווית BOC.
נתון: $AB = 8$ ס"מ , $AC = 12$ ס"מ , $BC = 10$ ס"מ.
חשב את אורכו של הקטע MN.




**23)** במעגל שרדיוסו הוא 10 ס"מ המיתרים AB ו-BC מאונכים זה לזה.
הנקודה D היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{BC}$. הקטע AD חותך את המיתר BC בנקודה E.
אורך המיתר AB הוא 12 ס"מ.

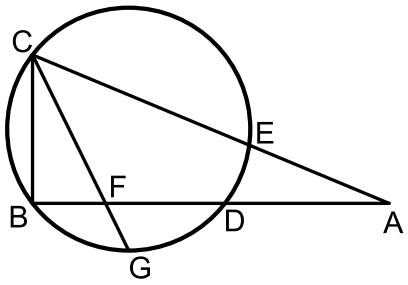



א. חשב את אורך הקטע BE.
מהנקודה D מעבירים מיתר החותך את המיתר BC בנקודה F ומקביל למיתר AB.

ב. הוכח כי מיתר זה עובר דרך מרכז המעגל.

ג. חשב את אורך הקטע FE.

**24)** הישרים AB ו-AC חותכים את המעגל בנקודות D ו-E בהתאמה כך שהמיתרים BD ו-BC מאונכים זה לזה.

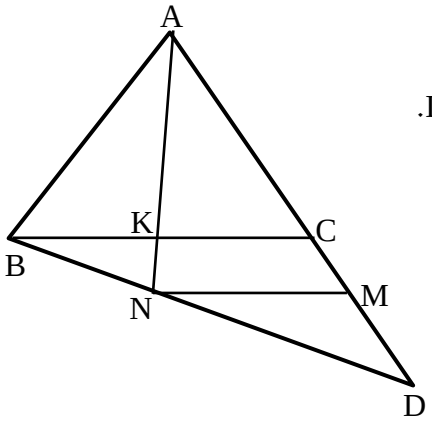



המיתר CG חוצה את הקשת הקטנה $\overset{\frown}{BGD}$.
וחותך את המיתר BD בנקודה F.
נתון: $\frac{AC}{AB}=\frac{13}{12}$. נסמן: $AB=t$.

א. הבע באמצעות $t$ את אורך המיתר BC.

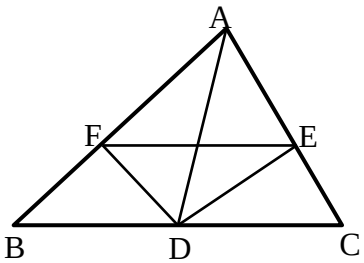
ב. נתון כי רדיוס המעגל הוא 5 ס"מ
וכי: $\frac{BF}{DF}=\frac{3}{5}$.
חשב את אורך הקטע AB.

**25)** נתון משולש ABC.
ממשיכים את הצלע AC מהכיוון של C עד לנקודה D.
מחברים את הנקודה D עם הקדקוד B.
מעבירים את הקטע AK אשר חוצה את זווית A במשולש ABC.
המשך AK חותך את BD בנקודה N.
מעבירים את הקטע MN. נתון: $MN \parallel BC$.

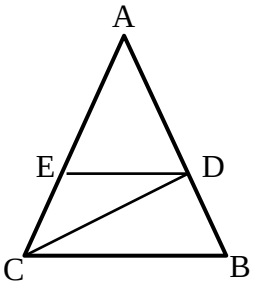



הוכח: $\frac{AB}{AD}=\frac{CM}{DM}$.

**26)** נתון משולש ABC. מעבירים את התיכון AD לצלע BC.
נתון כי DE הוא חוצה זווית $\sphericalangle ADC$
וכי DF הוא חוצה זווית $\sphericalangle ADB$.
הוכח: $EF \parallel BC$.




**27)** נתון משולש ABC. מעבירים את הקטעים CD ו-DE.
נתון כי: $DE \parallel BC$ ו- $AC=2BC$.
הקטע AC גדול פי 3 מהקטע DE.
הוכח כי: $\sphericalangle ACD=\sphericalangle BCD$.



## תשובות סופיות:

**17)** א. $x=5.6$ ב. $x=20$ ג. $x=6$ ד. $x=12$.

**18)** 3 ס"מ.

**19)** 8 ס"מ.

**20)** שאלת הוכחה. ג. $36°$ , $72°$, $72°$.

**21)** 10 ס"מ.

**22)** 1 ס"מ.

**23)** א. $BE=6$ ב. שאלת הוכחה. ג. $EF=2$.

**24)** שאלת הוכחה.

**25)** שאלת הוכחה.

**26)** שאלת הוכחה.

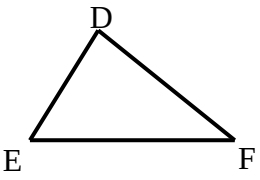
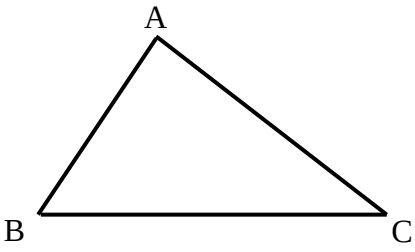
**27)** 15 ס"מ.

# דמיון משולשים:

## סיכום כללי:

### הגדרה:

משולשים דומים הם משולשים ששווים זה לזה בכל זוויותיהם ושצלעותיהם שומרות בהתאמה על אותו יחס.

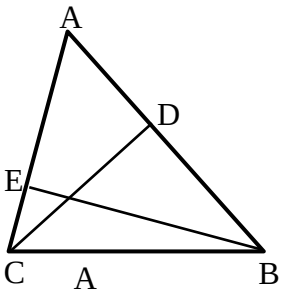
| יחס הדמיון ושוויונות | משולש ראשון | משולש שני |
|---|---|---|
| $\Delta ABC \sim \Delta DEF$<br>$\Updownarrow$<br>$\sphericalangle A = \sphericalangle D \ , \ \sphericalangle B = \sphericalangle E \ , \ \sphericalangle C = \sphericalangle F$<br>$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ |  |  |

### משפטי הדמיון:

- משפט דמיון זווית-זווית (ז.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ): אם בין שני משולשים שתי צלעות שומרות על אותו יחס והזוויות שבניהן שווה אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ): אם בין שני משולשים שלוש הצלעות שומרות על אותו יחס אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז): אם בין שני משולשים שתי לצעות שומרות על אותו יחס והזווית שמול הצלע הגדולה מבניהם שווה אז המשולשים דומים.

## שאלות:

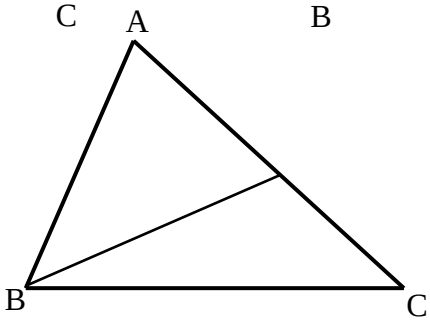
### משפט דמיון ז.ז:



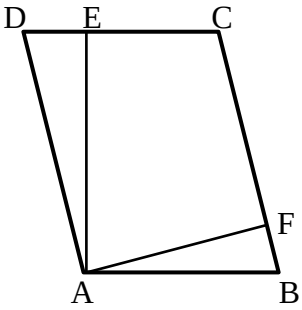

**28)** CD ו-BE הם גבהים במשולש ABC.

א. הוכח כי: $\Delta ABE \sim \Delta ACD$.

ב. נתון כי: 18 ס"מ = AB, 12 ס"מ = BE,
10 ס"מ = CD. חשב את אורך הצלע AC.



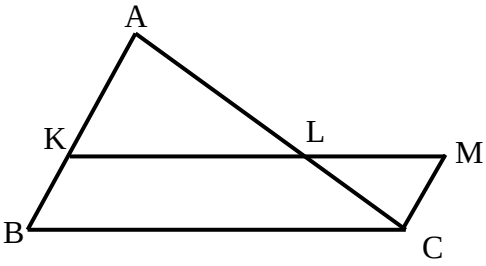

**29)** במשולש ABC העבירו את הקטע BK
כך ש-$\sphericalangle AKB = \sphericalangle ABC$.
הוכח: $\Delta AKB \sim \Delta ABC$.



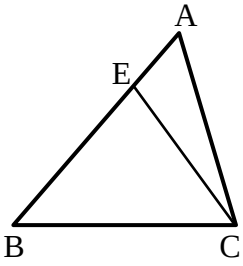

**30)** המרובע ABCD הוא מקבילית.
מעבירים גבהים AE ו-AF לצלעות DC ו-BC בהתאמה.

א. הוכח כי: $\Delta ADE \sim \Delta AFB$.

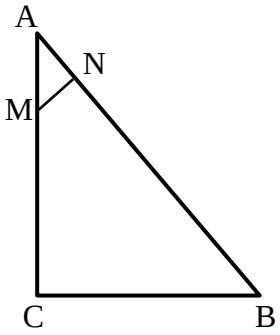
ב. הוכח כי: $DC \cdot AE = BC \cdot AF$
והסבר את המשמעות הגיאומטרית של התוצאה.



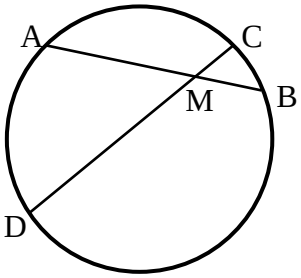

**31)** נתונה מקבילית BKMC.
המשיכו את הצלע BK עד לנקודה A.
הקטע AC חותך את הצלע KM בנקודה L.
הוכח: $LC \cdot BC = LM \cdot AC$.



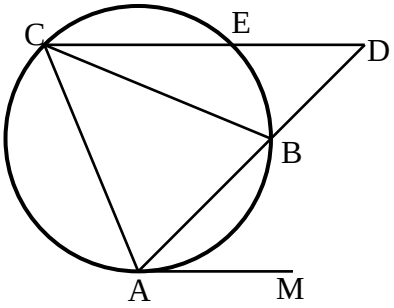

**32)** מעבירים את הקטע CE במשולש ABC.
ידוע כי: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ECB$ וכן: 8 ס"מ = BE,
10 ס"מ = BC. חשב את AB.




**33)** המשולש ABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle C = 90°)$.
מנקודה M שעל הניצב AC העלו אנך NM ליתר AB.
נתון כי: AB = 20 ס"מ, AN = 4 ס"מ, BC = 12 ס"מ.
מצא את אורך הקטע AM.

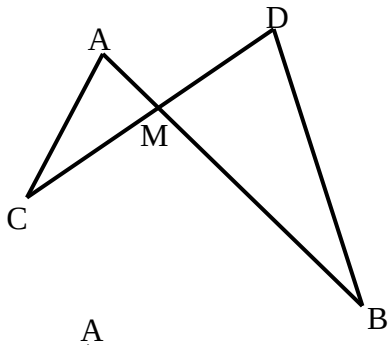



**34)** המיתרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.
א. הוכח כי: $\Delta ADM \sim \Delta CBM$.
ב. נתון כי: AM = 5 ס"מ, DM = 8 ס"מ,
CM = 2 ס"מ.
חשב את אורכו של BM.

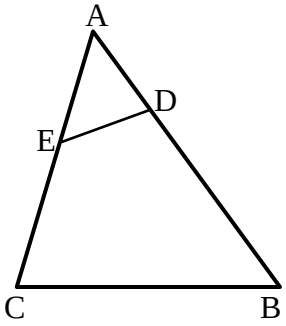



**35)** המשולש ABC חסום במעגל.
מהנקודה A מעבירים משיק AM.
ממשיכים את AB עד לנקודה D שמחוץ למעגל.
מחברים את הנקודה D עם הקדקוד C.
הישר CD חותך את המעגל
בנקודה E כך ש- $CE \parallel AM$.
הוכח כי AC הוא הממוצע הגיאומטרי
בין AB לבין AD.
כלומר: $AC^2 = AB \cdot AD$.

**משפט דמיון צ.ז.צ:**

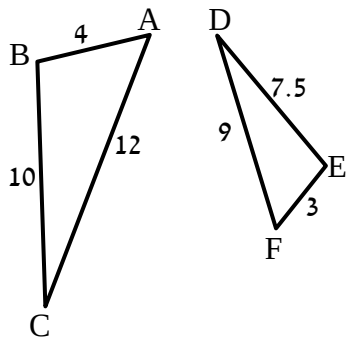



**36)** הישרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.
אורכי הקטעים הם: AM = 3 ס"מ,
BM = 10 ס"מ, CM = 6 ס"מ, DM = 5 ס"מ.
א. הוכח כי: $\Delta AMC \sim \Delta DMB$.
ב. האם $AC \parallel BD$? נמק.
ג. מצא את אורכו של AC
אם נתון כי BD שווה ל-14 ס"מ.




**37)** לפניך משולש ABC.
מעבירים את הקטע DE אשר יוצר את הגדלים הבאים:
AD = 4 ס"מ, BD = 11 ס"מ, AE = 5 ס"מ, CE = 7 ס"מ.
א. הוכח כי: $\Delta ADE \sim \Delta ACB$.
ב. הוכח כי את המרובע BCED אפשר לחסום במעגל.

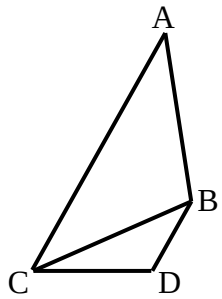
**משפט דמיון צ.צ.צ:**




**38)** בסרטוט שלפניך רשומים שני משולשים.
אורכי צלעותיהם נתונים בתרשים (בס"מ).

א. הוכח כי המשולשים דומים ורשום את הדמיון עפ"י הקדקודים.

ב. רשום את הזוויות השוות בשני המשולשים.

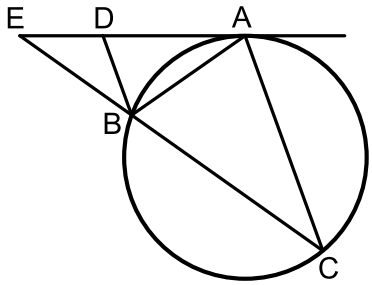



**39)** נתונים המשולשים ABC ו-BDC.
ידוע כי: $AC = 16$ ס"מ, $AB = 10$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ, $DC = 5$ ס"מ, $BD = 4$ ס"מ.

א. הוכח כי שני המשולשים דומים ורשום אותם לפי סדר התאמת קדקודיהם.

ב. הוכח כי: $AC \parallel BD$.

**שונות – דמיון משולשים:**

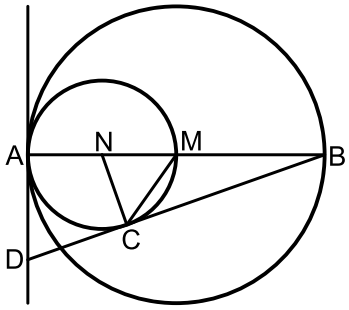



**40)** מעבירים משיק AE למעגל הנתון באיור.
מנקודת ההשקה מעבירים את המיתרים AB ו-AC כך שנוצר המשולש ABC. ידוע כי: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$.
המשך המיתר BC נפגש עם המשיק בנקודה E.
המיתר AB חוצה את זווית CBD.

א. הוכח כי הקטע BD מקביל למיתר AC.

ב. הוכח: $\Delta ABD \sim \Delta CBA$ וכתוב את יחס הדמיון.

ג. הוכח: $\frac{DE}{BE} = \frac{BD}{AB}$.



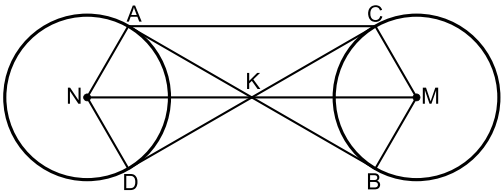

**41)** המעגלים שמרכזם בנקודות M ו-N משיקים זה לזה מבפנים בנקודה A כך שהיקף המעגל הפנימי עובר בנקודה M.
דרך הנקודה A מעבירים משיק.
AB הוא קוטר במעגלים ו-C היא נקודה הנמצאת על היקף המעגל הפנימי כך שהישר החותך BD משיק למעגל הפנימי בנקודה זו.

א. הוכח: $\Delta ABD \sim \Delta CBN$ וחשב את יחס הדמיון.

ב. נתון כי: $AD = \sqrt{8}$.
חשב את רדיוס המעגל הגדול.

ג. הוכח: $BC = 2CD$.

**42)** נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס זהה M ו-N.
מעבירים שני משיקים למעגלים AB ו-CD הנחתכים בנקודה K.
מעבירים את הרדיוסים AN ו-DN במעגל השמאלי ו-BM ו-CM במעגל הימני.

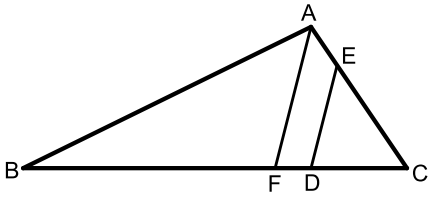



א. הוכח: $KN = KM$ .

ב. הוכח כי המרובע ACMN הוא טרפז שווה שוקיים.

ג. רדיוס המעגלים הוא $R$ וידוע כי המשולש BKC הוא שווה צלעות.
הבע באמצעות $R$ את היקף הטרפז ACMN.

**43)** על הצלעות של המשולש ABC הקצו את הנקודות D ו-E כך שהמרובע AEDB הוא בר חסימה.
הנקודה D מחלקת את הצלע BC כך שהקטע BD גדול פי 3 מהקטע DC.

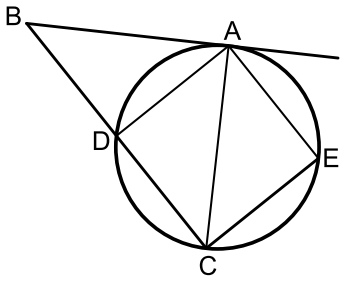



א. הוכח: $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ .

ב. נתון גם כי: $AC \cdot CE = 36$ .
חשב את אורך הקטע DC.

ג. מעבירים מהקודקוד A את הקטע AF המקביל לקטע DE.
נתון כי: $AC = 9$ .
חשב את היחס: $\frac{DF}{BC}$ .

**44)** הקטע AB משיק למעגל בנקודה A.
מהנקודה B מעבירים ישר חותך למעגל החותך אותו בנקודות C ו-D. E היא נקודה על המעגל כך ש- $\sphericalangle AEC = 90°$ .
נתון כי המיתר AC חוצה את זווית BCE.



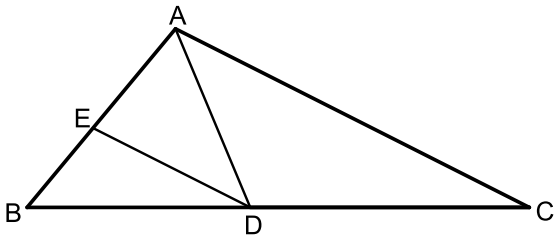

א. הוכח: $\Delta ABC \sim \Delta EAC$ .

ב. נסמן ב- $R$ את רדיוס המעגל.
הוכח: $R = \frac{\sqrt{BC \cdot CE}}{2}$ .

ג. איזה מרובע יהיה המרובע ADCE אם יתקיים: $2CE = BC$ . נמק.

**45)** במשולש ABC הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות BC ו-AB בהתאמה.

נתון כי: $DE \parallel AC$ , $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BED$ .



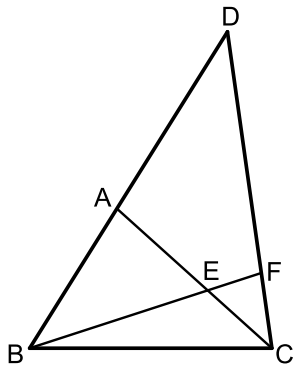

א. הוכח: $AD \cdot BD = AB \cdot DE$ .

ב. ידוע כי הנקודה D מחלקת את הצלע BC באופן הבא: $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$

וכי: $AD \cdot BD = 16$ . חשב את המכפלה: $AB \cdot AC$ .

**46)** מהקודקוד C של המשולש BCD מעבירים את הקטע AC כך שהמשולש ACD הוא שווה שוקיים $(AC = AD)$.

הנקודה F נמצאת על הצלע CD כך שמתקיים $\sphericalangle D = \sphericalangle CBF$ , $3 \cdot \sphericalangle ACD = \sphericalangle BEC$ .




א. הוכח כי הקטע BF חוצה את זווית $\sphericalangle B$.

ב. הוכח כי: $\Delta AEB \sim \Delta FEC$.

ג. הוכח כי: $\frac{BE}{BC} = \frac{AE}{FC}$ .

## תשובות סופיות:

**28)** שאלת הוכחה.

**29)** שאלת הוכחה.

**30)** שאלת הוכחה.

**31)** שאלת הוכחה.

**32)** 12.5 ס"מ.

**33)** 5 ס"מ.

**34)** א. שאלת הוכחה. ב. 3.2 ס"מ.

**35)** א. שאלת הוכחה.

**36)** א. שאלת הוכחה ב. לא. ג. 8.4 ס"מ.

**37)** א. שאלת הוכחה ב. שאלת הוכחה

**38)** א. $\Delta ABC \sim \Delta FED$ ב. $\sphericalangle C = \sphericalangle D$ , $\sphericalangle B = \sphericalangle E$ , $\sphericalangle A = \sphericalangle F$.

**39)** א. $\Delta ABC \sim \Delta CDB$ ב. שאלת הוכחה.

**40)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

**41)** א. שאלת הוכחה. ב. 4 ס"מ. ג. שאלת הוכחה.

**42)** א. שאלת הוכחה ב. שאלת הוכחה. ג. $9R$.

**43)** א. שאלת הוכחה ב. 3 ס"מ. ג. $\frac{DF}{BC}=\frac{5}{16}$.

**44)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. ריבוע.

**45)** א. שאלת הוכחה. ב. $AB\cdot AC=36$.

**46)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

# יחסים בין גדלים שונים ושטחים במשולשים דומים:

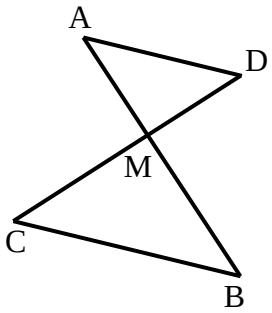
## שאלות:

**47)** הוכח את חלקי המשפט הבאים:

א. גבהים במשולשים דומים לצלעות המתאימות בכל משולש, מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.

ב. תיכונים במשולשים דומים לצלעות המתאימות בכל משולש, מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.

ג. היקפים של משולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.



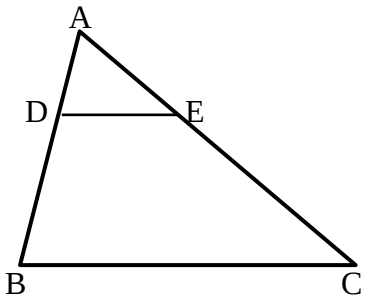

**48)** הקטעים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.

נתון כי: $AD \parallel BC$ וכן נתונים הגדלים הבאים:

$AD = 4$ ס"מ , $BC = 6$ ס"מ , $S_{ADM} = 36$ סמ"ר.

א. הוכח כי: $\Delta AMD \sim \Delta BMC$.

ב. חשב את שטח המשולש MBC.

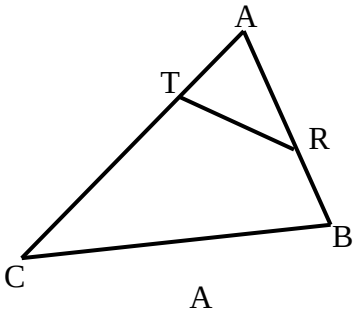



**49)** במשולש ABC הקטע DE מקביל לצלע BC.

נתון: $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$ וכי: $S_{ADE} = 20$ סמ"ר.

א. חשב את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המרובע DECB.

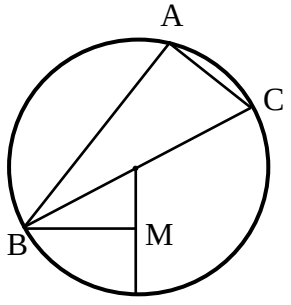



**50)** בסרטוט שלפניך נתון משולש ABC ובו קטע RT כך שמתקיימים האורכים הבאים:

$BR = 4$ ס"מ , $AT = 4$ ס"מ , $AR = 6$ ס"מ,

$CT = 11$ ס"מ , $S_{ABC} = 100$ סמ"ר.

מצא את שטח המרובע RTCB.




**51)** המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.

הצלע BC היא קוטר המעגל.

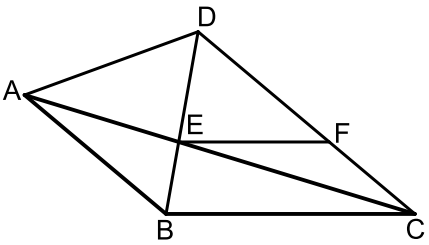
הקטע BM מאונך לרדיוס DO.

נתון: $AC = 2OM$.

א. הוכח: $\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{BD}$.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\Delta BOM}}{S_{\Delta BAC}}$.

**52)** נתון משולש ABC. על הצלע AB של המשולש ABC בונים משולש שווה צלעות ABD.
הצלע AC חותכת את הצלע BD בנקודה E
אשר ממנה מעבירים ישר EF המקביל לצלע BC.
נתון כי: $\sphericalangle DBC = 80°$ , $\sphericalangle DCB = 40°$.



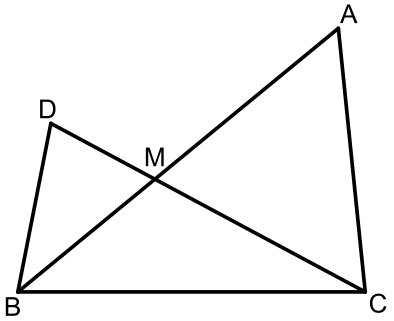

א. הוכח כי המשולשים ABE ו-CDE דומים.

ב. הוכח: $FC \cdot CE = AE \cdot DF$.

ג. נתון כי: $BC = 1.5 \cdot EF$.
הוכח: $\frac{AE}{CE} = \frac{1}{2}$.

ד. חשב את יחס השטחים: $\frac{S_{ABE}}{S_{CDE}}$.

**53)** נתון משולש ABC. על הצלע BC של המשולש ABC בונים משולש נוסף BDC.
הצלעות DC ו-AB נחתכות בנקודה M.
הצלע AB חוצה את זווית B וידוע כי: $\sphericalangle B = 2\sphericalangle ACD$.

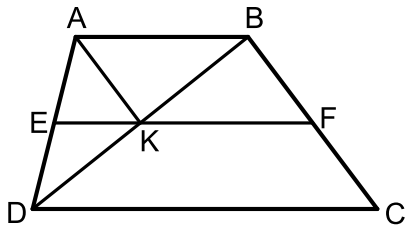



א. הוכח: $\Delta ACM \sim \Delta DBM$.

ב. הוכח: $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{CM}$.

ג. נתון כי: $\frac{AM}{CM} = \frac{8}{5}$ וכי אורך הצלע BD הוא 6 ס"מ.
סכום הצלעות AC ו-BC הוא 19.5 ס"מ.
חשב את היחס: $\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}}$.

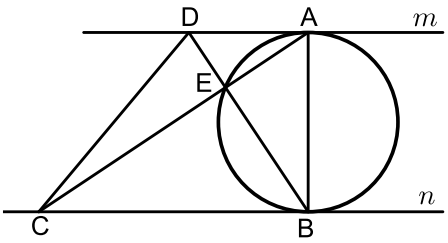
**54)** המרובע ABCD הוא טרפז, $(AB \| CD)$.
מעבירים את קטע האמצעים EF החותך את אלכסון הטרפז BD בנקודה K.
ידוע כי הקטע AK מקביל לשוק BC של הטרפז.




א. הוכח כי המרובע ABFK הוא מקבילית.

ב. נסמן: $S_{BKF} = S$.
הבע באמצעות $S$ את שטח הטרפז ABCD.

**55)** בין המשיקים המקבילים $m$ ו-$n$ מעבירים מעגל כך ש-AB הוא הקוטר היוצא משתי נקודות ההשקה שלהם.
הנקודות D ו-C נמצאות על המשכי המשיקים כך שהמרובע ABCD הוא טרפז.
אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה E שנמצאת על היקף המעגל.
ידוע כי: $S_{ABC}=3\cdot S_{DAB}$.
שטח המשולש ADE יסומן ב- $S$.
בטא באמצעות $S$ את שטח הטרפז ABCD.




**56)** AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
מהנקודה C שעל היקף המעגל מעבירים את הרדיוס CO ואת המיתר CD החותך את הקוטר בנקודה E.
מהנקודה D מעבירים את המיתרים BD ו-AD.
ידוע כי המיתר CD מקיים: $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{BE}$.
נתון: $AD=DE$.

א. הוכח כי הרדיוס CO מאונך לקוטר AB.

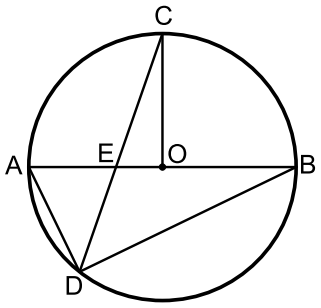
ב. הוכח: $\Delta COE\sim\Delta BDA$.

ג. נתון כי: $BD=9\sqrt{2+\sqrt{2}}\approx 16.63$ ס"מ.

i. חשב את אורכו של רדיוס המעגל.

ii. חשב את היחס: $\frac{S_{COE}}{S_{BDA}}$

(שים לב, הינך יכול להשאיר $\sqrt{2}$ בתשובתך הסופית).



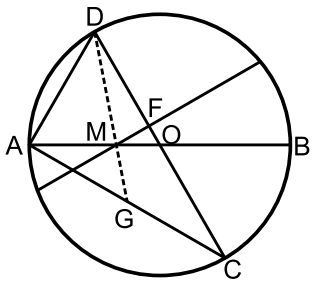

**57)** AB ו-CD הם קטרים במעגל שמרכזו O.
מעבירים מיתר החותך את AB בנקודה M כך שמתקיים: $2AM=BM$ ואת CD בנקודה F כך שמתקיים: $FM\perp CD$.
ידוע כי זווית BMF היא $30°$.
מעבירים את המיתרים AC ו-AD כך שנוצר המשולש ACD.

א. הוכח: $\sphericalangle CAB=\sphericalangle BMF$.

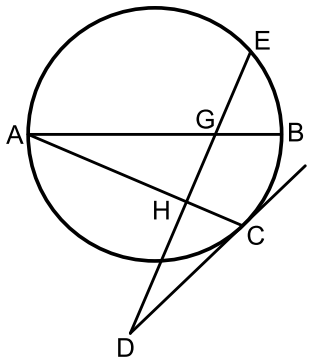
ב. i. הוכח כי המשולשים ADC ו-FOM דומים.

ii. פי כמה קטן הקטע FO מרדיוס המעגל?

ג. מעבירים מהקודקוד D של המשולש ACD קטע העובר דרך הנקודה M וחותך את המיתר AC בנקודה G.
חשב פי כמה גדול שטח המשולש DGC משטח המשולש MOF.



**58)** AB הוא קוטר במעגל.
מהנקודה A מעבירים מיתר AC.
הנקודה D נמצאת מחוץ למעגל וממנה מעבירים
משיק CD וישר חותך DE.
ידוע כי הישר DE חותך את הקוטר AB
בנקודה G ומאונך למיתר AC בנקודה H.




א. הוכח: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BGE$.

ב. נתון כי: $\frac{S_{AHG}}{S_{GHCB}} = \frac{4}{5}$. חשב את היחס: $\frac{AH}{AC}$.

## תשובות סופיות:

**47)** שאלת הוכחה.

**48)** א. שאלת הוכחה. ב. 81 סמ"ר.

**49)** א. 125 ס"מ. ב. 105 סמ"ר.

**50)** 84 סמ"ר.

**51)** א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{S_{\Delta BOM}}{S_{\Delta BAC}} = \frac{1}{4}$.

**52)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה. ד. $\frac{S_{ABE}}{S_{CDE}} = \frac{1}{4}$.

**53)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}} = 0.8$.

**54)** א. שאלת הוכחה. ב. $6S$.

**55)** $16S$.

**56)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. i. $R = 9$ ii. $\frac{S_{COE}}{S_{BDA}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$.

**57)** א. שאלת הוכחה. ב. i. שאלת הוכחה. ב. ii. קטן פי 6.
ג. שטח המשולש DGC גדול פי 18 משטח המשולש MOF.

**58)** א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{AH}{AC} = \frac{2}{3}$

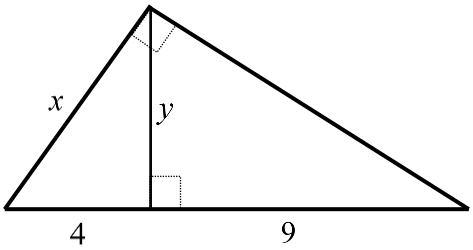
# פרופורציה במשולש ישר זווית:

## סיכום כללי:

- במשולש ישר זווית, הגובה ליתר בריבוע שווה למכפלת היטלי הניצבים על היתר.
- במשולש ישר זווית, ניצב בריבוע שווה למכפלת היתר והיטל הניצב על היתר.
- (משפט הפוך ל-1) אם במשולש גובה לצלע אחת בריבוע שווה למכפלת היטלי הצלעות האחרות על צלע זאת, המשולש ישר זווית.

## שאלות:

**59)** מצא את ערכם של $x$ ו- $y$ בשרטוט הבא:




**60)** במשולש ישר זווית שאורכי ניצביו $m$ ו-$n$ נתון כי אורך הגובה ליתר הוא $h$.
הראה שמתקיים: $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}$ (אין צורך ברישום מסודר של הוכחה).

**61)** הוכח את המשפט: אם במשולש גובה לצלע אחת בריבוע שווה למכפלת היטלי הצלעות האחרות על צלע זאת, המשולש ישר זווית.

## תשובות סופיות:

**59)** $y=6\ ,\ x=\sqrt{52}$
**60)** שאלת הוכחה.
**61)** שאלת הוכחה.

# פרופורציות במעגל:

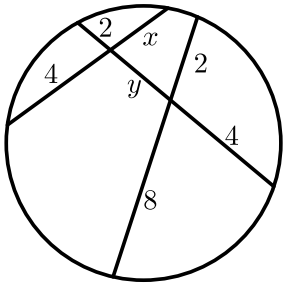
## סיכום כללי:

- אם שני מיתרים נחתכים במעגל, אז מכפלת קטעי המיתר האחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני.
- אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.
- אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

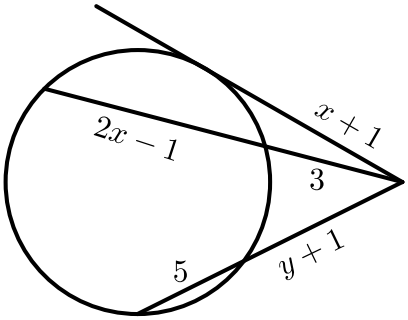
## שאלות:

**62)** חשב את גודלם של $x$ ו- $y$ בשרטוטים הבאים:

א.




ב.




**63)** הוכח את המשפט: אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל, מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

**64)** הוכח את המשפט: אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל, מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

## תשובות סופיות:

**62)** א. $x=3\,,\,y=2$ ב. $x=5\,,\,y=3$ .

**63)** שאלת הוכחה.

**64)** שאלת הוכחה.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 18 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

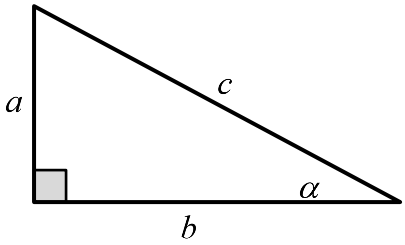
### תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית ..... 298

# משולש ישר זווית:

## סיכום כללי:

### הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:




$$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

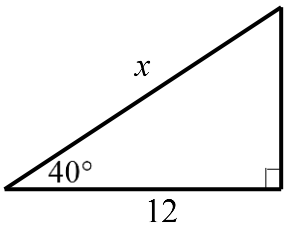
$$\tan\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

משפט פיתגורס: $a^2+b^2=c^2$

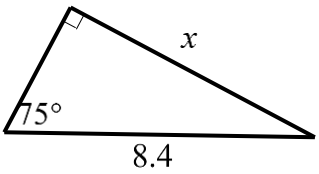
## שאלות:

**1)** מצא את ערכו של $\alpha / x$ במשולשים ישרי הזווית הבאים:

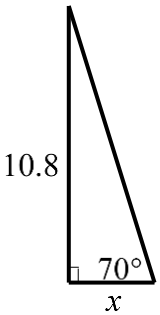
א.



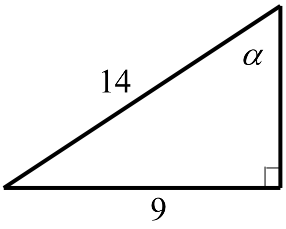

ב.



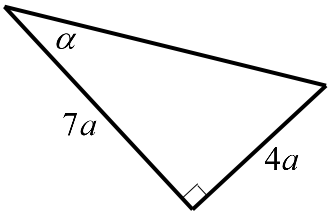

ג.




ד.




ה.

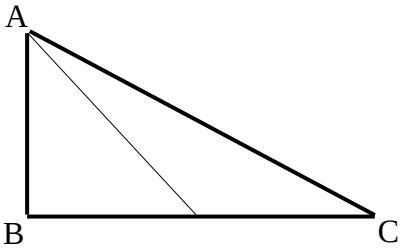



**2)** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90°)$.

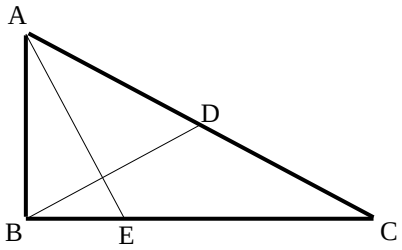
AD הוא התיכון לניצב BC.

נתון: $\sphericalangle C = 28°$ , 6 ס"מ = AB.

מצא את AD ואת $\sphericalangle BAD$.

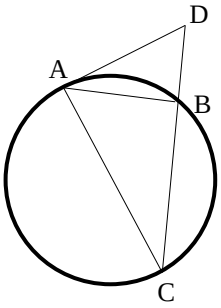


**3)** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90°)$. BD הוא התיכון ליתר ו-AE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle A$.
נתון: BD = 5.6 ס"מ , BC = 8 ס"מ.
מצא את BE ואת $\sphericalangle BAE$.



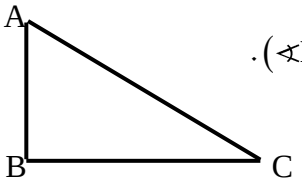

**4)** מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסוניו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

**5)** המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל.
המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D.
נתון: BD=4 ס"מ , $\sphericalangle DAB=32°$.
מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

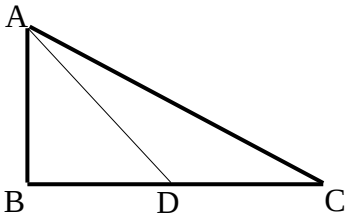



**6)** במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא $34.92°$. מצא את שטח המשולש.

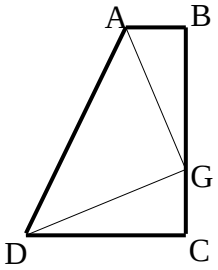
**7)** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90°)$.
נתון: $\sphericalangle A=\alpha$ , $AB=a$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו-$a$ את היקף המשולש.



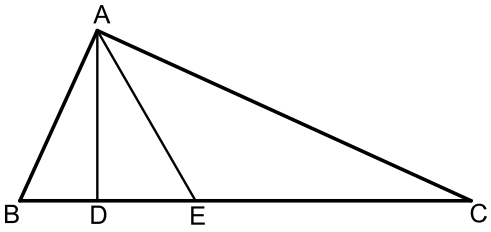

**8)** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90°)$.
AD הוא התיכון לניצב BC.
נתון: $\sphericalangle C=\alpha$ , $AB=b$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו-$b$ את אורכי הקטעים BD ו-AD.




**9)** במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא $\alpha$ ואורך חוצה זווית זו הוא $k$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו-$k$ את שטח המשולש ואת אורך היתר.



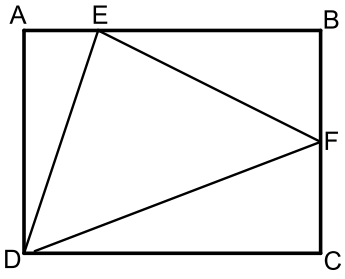

**10)** טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית $(\sphericalangle B=\sphericalangle C=90°)$.
הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG\perp DG$.
נתון: $AG=DG=m$ , $\sphericalangle BAG=\beta$.
הבע באמצעות $\beta$ ו- $m$ את שטח הטרפז.




**11)** המשולש ABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle A=90°)$.
הקטעים AD ו-AE הם בהתאמה גובה
ליתר וחוצה זווית.
מסמנים: $DE=k$ , $\sphericalangle DAE=\alpha$.

א. הבע באמצעות $k$ ו- $\alpha$
את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC
אם ידוע כי: $\alpha=30$ ו- $k=2$.




**12)** במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו-F
הנמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה כך ש-E
מקיימת: $3AE=BE$ ו-F היא אמצע הצלע BC.
אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE.
מעבירים את הקטעים DF , EF ו-DE כך
שנוצר במשולש DEF.

א. סמן ב- $t$ את אורך הקטע AE והבע
באמצעות $t$ את אורכי צלעות המשולש DEF.

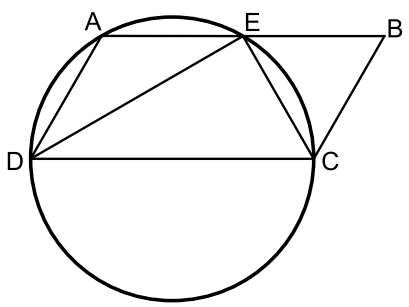
ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

**13)** משולש שווה שוקיים שאורך שוקו $k$ וזווית הבסיס שלו היא $\beta$ חוסם מעגל.
הבע באמצעות $\beta$ ו- $k$ את רדיוס המעגל.

**14)** בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא $b$ והזווית
שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא $\alpha$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו- $b$ את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

**הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:**

**15)** דרך הקודקודים A , C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E, $(AE = BE)$.



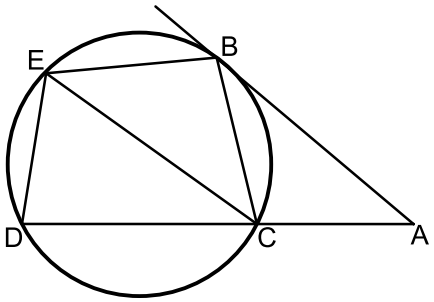

נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.

א. הוכח כי המיתר CE חוצה את זוויות C.

ב. רדיוס המעגל יסומן ב- $R$.
הבע באמצעות $R$ את היקף המקבילית.

ג. מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.

**16)** מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD.
מעבירים את המיתרים BC ו-BE אשר זהים באורכם.
כמו כן מעבירים את המיתר DE.
אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.




א. הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.

ב. הוכח כי: $2\cdot\sphericalangle BEC = \sphericalangle EDC$.

ג. נתונים: $\sphericalangle A = 40°$ , AC = 6 ס"מ, AB = 9 ס"מ , CE = 8 ס"מ.
חשב את שטח המרובע ABEC.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=15.665$ ב. $x=8.114$ ג. $x=3.931$ ד. $\alpha=40.005°$ ה. $\alpha=29.745°$.

**2)** $\sphericalangle BAD=43.24°$ , $AD=$ 8.236 ס"מ.

**3)** $\sphericalangle BAE=22.792°$ , $BE=$ 3.294 ס"מ.

**4)** $106.26°$ , $106.26°$ , $73.74°$ , $73.74°$.

**5)** $R=$ 6.04 ס"מ.

**6)** $S=$ 28.618 סמ"ר.

**7)** $P=a\left(1+\tan\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)$.

**8)** $BD=\dfrac{b}{2\tan\alpha}$ , $AD=\sqrt{b^2+\dfrac{b^2}{4\tan^2\alpha}}$.

**9)** $S=\dfrac{k^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\tan\alpha}{2}$ , $AC=\dfrac{k\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

**10)** $\dfrac{\left(m\sin\beta+m\cos\beta\right)^2}{2}$.

**11)** א. $S=\dfrac{k^2}{\cos 2\alpha\tan^2\alpha}$ ב. 24 סמ"ר.

**12)** א. $DF=t\sqrt{18.25}$ , $EF=t\sqrt{11.25}$ , $DE=t\sqrt{10}$ ב. $47.14°$ , $51°$ , $81.86°$.

**13)** $R=k\cos\beta\tan\dfrac{\beta}{2}$.

**14)** $S=\dfrac{1}{2}b^2\sin\alpha\left(1+\sin\alpha\right)$ , $\dfrac{1}{2}b\sin\alpha+\dfrac{\dfrac{1}{2}b\sin\alpha}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}$.

**15)** א. שאלת הוכחה. ב. $6R$ ג. 4 ס"מ.

**16)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 32.78 סמ"ר.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 19 - זהויות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

1. זהויות יסוד ..... 303
2. ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות ..... 307
3. מעגל היחידה ..... 309
4. סכום והפרש זוויות ..... 312
5. זווית כפולה ..... 316
6. סכום והפרש פונקציות ..... 319
7. מכפלת פונקציות ..... 322

# זהויות יסוד:

## סיכום כללי:

| | | |
|---|---|---|
| **קשרים בין פונקציות** | $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ , $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ | $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$<br>$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$ |
| **זוויות משלימות ל-** $90°$ | $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$ | $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$ |
| | $\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$ | $\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$ |
| **קשרים בין פונקציות** | $\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ | $\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ |

## שאלות:

### הוכחת זהויות יסודית:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

**1)** $\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$

**2)** $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$

**3)** $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\tan\alpha$

**4)** $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=1+\cos^2\alpha$

**5)** $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=2$

**6)** $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

**7)** $\frac{\cos(90°-\alpha)}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

**8)** $\sin^2(\alpha+45°)+\sin^2(45°-\alpha)=1$

**9)** $\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\tan\alpha$

**10)** $\frac{\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha}=\tan^3\alpha$

**11)** $\frac{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\cot\alpha$

**12)** $\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=1$

**13)** $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\cot\alpha$

**14)** $\frac{\sin^3\alpha}{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}=\tan\alpha$

**15)** $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$

**16)** $\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$

**הוכחות מתקדמות:**

**17)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=2+4\cot^2\alpha$.

**18)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

**19)** הוכח את הזהות הבאה: $(\cot\alpha-\tan\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=(1+\cot^2\alpha)(1+\tan\alpha)(1-\tan\alpha)$.

**20)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\cot^4\alpha$.

**21)** הוכח את הזהות הבאה: $1-\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha)=\cos^4\alpha$.

**22)** הוכח את הזהות הבאה: $\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)^2=4+4\cot^2\alpha$.

**23)** הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

**24)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\tan\alpha\tan\beta$.

**הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:**

**25)** נתון כי: $\sin\alpha+\cos\alpha=k$.

הבע באמצעות $k$ את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

ב. $\sin\alpha-\cos\alpha$.

ג. $\tan\alpha+\cot\alpha$.

ד. $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

**26)** נתון כי: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

מבלי למצוא את $\alpha$ חשב את: $\tan^2\alpha-2\cot^2\alpha$.

**27)** נתון כי: $\tan\alpha=\sqrt{7}$.

מבלי למצוא את $\alpha$ חשב את: $\dfrac{\sqrt{7}\sin\alpha+6\cos\alpha}{\sqrt{28}\sin\alpha-\cos\alpha}$.

**28)** חשב את ערך המכפלה הבאה: $\tan1^\circ\cdot\tan2^\circ\cdot\tan3^\circ\cdot\cdots\cdot\tan88^\circ\cdot\tan89^\circ$.

## תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) שאלת הוכחה.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) שאלת הוכחה.
22) שאלת הוכחה.
23) שאלת הוכחה.
24) שאלת הוכחה.
25) א. $\frac{k^2-1}{2}$ ב. $\pm\sqrt{2-k^2}$ ג. $\frac{2}{k^2-1}$ ד. $\frac{k}{2}\left(3-k^2\right)$
26) -7.75
27) 1
28) 1

# ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

## סיכום כללי:

| | $\alpha=0°$ | $\alpha=30°$ | $\alpha=45°$ | $\alpha=60°$ | $\alpha=90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\phi$ |
| $\cot\alpha$ | $\phi$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

**הערות:**

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של $0°$ ו-$90°$ תִּלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי: $\frac{\sqrt{4}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{1}}{2},\frac{\sqrt{0}}{2}$
אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל.
עבור שורת ה-$\cos\alpha$ יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי $\tan\alpha$ ולסובב עבור ערכי $\cot\alpha$.

## שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

**1)** $\sin 30°+\cos 30°$.

**2)** $\frac{\sin 30°\cdot\cos 30°}{\sin 60°}$.

**3)** $\tan 45°+\frac{\sin 45°}{\cos 45°}$.

4) $\frac{1+\cos 60^\circ}{2\sin 60^\circ}$.

5) $\cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ$.

6) $\frac{\tan^2 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ}$.

7) $\frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}{4\left(\sin^2 60^\circ - \frac{1}{4}\right)}$.

8) $\frac{27\cot^4 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ}$.

## תשובות סופיות:

1) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2) $\frac{1}{2}$

3) $2$

4) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

5) $\frac{3}{4}$

6) $9$

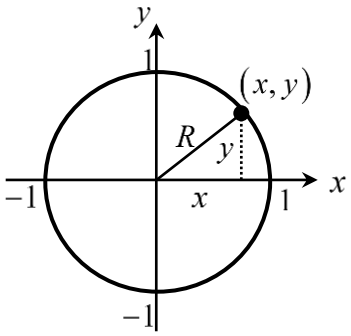
7) $-\frac{1}{3}$

8) $2\sqrt{6}$

# מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

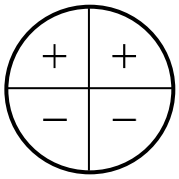
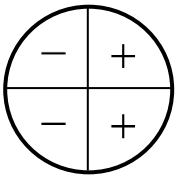
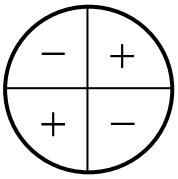
## סיכום כללי:

### הגדרת מעגל היחידה:




- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות $(1,0)$ , $(0,1)$ , $(-1,0)$ , $(0,-1)$ מתאימות לזוויות של $0°$ , $90°$ , $180°$ , $270°$.

### הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

| רביע | סינוס | קוסינוס | טנגנס |
|---|---|---|---|
| II<br>III<br>VI | $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$<br>$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$<br>$\sin(-a)=-\sin\alpha$ | $\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha$<br>$\cos(180^o+\alpha)=-\cos\alpha$<br>$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ | $\tan(180^o-\alpha)=-\tan\alpha$<br>$\tan(180^o+\alpha)=\tan\alpha$<br>$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ |
| **סימנים** |  |  |  |





### זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+360°k)&=\sin\alpha\\ \cos(\alpha+360°k)&=\cos\alpha\end{aligned}} \quad , \quad \boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha+180°k)&=\tan\alpha\\ \cot(\alpha+180°k)&=\cot\alpha\end{aligned}}$$

כאשר $k$ הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

## שאלות:

**1)** העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120°$
ב. $\cos 150°$
ג. $\tan 160°$
ד. $\cot 130°$
ה. $\sin 215°$
ו. $\cos 245°$
ז. $\tan 230°$
ח. $\cot 200°$
ט. $\sin 300°$
י. $\cos 310°$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150°$
ב. $\cos 210°$
ג. $\tan 120°$
ד. $\sin 330°$
ה. $\tan 225°$
ו. $\sin 315°$
ז. $\cos 120°$
ח. $\tan(-30°)$
ט. $\cos(-45°)$
י. $\sin 510°$
יא. $\cos 930°$
יב. $\tan(-225°)$

**3)** חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

א. $\left(\sin 240° \cdot \tan 150° + \cos(-60°)\right)^2$.

ב. $8\sin^2 150° \cdot \tan 135° - 2 \cdot \sin 135° \cdot \cos(-135°)$.

ג. $\dfrac{\cot 225°}{\sin(-225°) - \cos 135°} + \tan^2 210°$.

**4)** הוכח כי אם $\alpha, \beta$ ו- $\gamma$ הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

א. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$.

ב. $\sin\left(\dfrac{\gamma + \beta}{2}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2}$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\sin 60°$ ב. $-\cos 30°$ ג. $-\tan 20°$ ד. $-\cot 50°$
ה. $-\sin 35°$ ו. $-\cos 65°$ ז. $\tan 50°$ ח. $\cot 20°$
ט. $-\sin 60°$ י. $\cos 50°$

**2)** א. $\frac{1}{2}$ ב. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ג. $-\sqrt{3}$ ד. $-\frac{1}{2}$
ה. $1$ ו. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ז. $-\frac{1}{2}$ ח. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
ט. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ י. $\frac{1}{2}$ יא. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ יב. $-1$

**3)** א. $1$ ב. $-1$ ג. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$.

**4)** שאלת הוכחה.

# סכום והפרש זוויות:

## סיכום כללי:

סכום והפרש עבור $\sin(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cos(\alpha\pm\beta)$ יחושב לפי:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta)&=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha\\ \cos(\alpha\pm\beta)&=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

סכום והפרש עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha\pm\beta)&=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\\ \cot(\alpha\pm\beta)&=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}\end{aligned}}$$

**הערה:**

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

א. $\sin 75°$ ב. $\sin 15°$ ג. $\sin 105°$

ד. $\sin(-15°)$ ה. $\cos 75°$ ו. $\cos 15°$

ז. $\cos(-105°)$ ח. $\cos 165°$ ט. $\cos(-195°)$

**2)** חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin 65°\cos 25°+\sin 25°\cos 65°$.

ב. $5\cos 50°\cos 20°+5\sin 50°\sin 20°$.

**3)** הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\sin(60°+\alpha)+\sin(60°-\alpha)=\sqrt{3}\cos\alpha$.

ב. $\cos(45°-\alpha)-\cos(45°+\alpha)=\sqrt{2}\sin\alpha$.

ג. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

ד. $\tan\alpha-\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

**4)** נתון: $\cos\beta=\dfrac{8}{17}$ , $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ ו- $\alpha,\beta$ זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של $\alpha$ ו- $\beta$ חשב:

א. $\sin(\alpha+\beta)$.

ב. $\cos(\alpha+\beta)$.

ג. $\tan(\alpha+\beta)$.

**5)** הוכח את הזהות: $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$.

**6)** הוכח את הזהות: $(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin2\alpha+\cos2\alpha)=\sin3\alpha+\cos\alpha$.

**7)** הוכח את הזהות: $\tan7\alpha-\tan5\alpha-\tan2\alpha=\tan7\alpha\tan5\alpha\tan2\alpha$.

**8)** הוכח את הזהות: $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

**9)** הוכח את הזהות: $\cot\alpha-\cot\beta=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

**10)** הוכח את הזהות הבאה:

$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

**11)** הוכח כי מתקיים: $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$.

**12)** הוכח כי מתקיים: $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$.

**13)** נתון כי: $\sin 76^\circ = m$. הבע את $\sin 31^\circ$ באמצעות $m$.

**14)** הזוויות $\alpha$ ו- $\beta$ הן זוויות חדות.

נתון כי: $\tan \alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$ ו- $\tan \beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$.

הראה כי מתקיים: $\alpha + \beta = 60^\circ$.

**15)** היעזר בנוסחה: $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ ומצא את $\tan x$ ו- $\tan y$

אם ידוע כי: $\tan(x+y) = -3$ ו- $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$. הבחן בין שני מקרים.

## תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ב. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ג. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ד. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ה. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
ו. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ז. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ח. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ט. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) א. 1 ב. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

3) שאלת הוכחה.

4) א. $\frac{84}{85}$ ב. $-\frac{13}{85}$ ג. $-6\frac{6}{13}$

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(m-\sqrt{1-m^2}\right)$.

15) שאלת הוכחה.

16) 1 ו-2 או $-\frac{1}{2}$ ו- 1-.

# זווית כפולה:

## סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

## שאלות:

**1)** הוכח את הזהויות הבאות:

א. $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$

ב. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$

ג. $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$

ד. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

ה. $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\cot 2\alpha$

ו. $\frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2}\cot 2\alpha$

ז. $\cos^2 2\alpha = 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha + 1$

ח. $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

**2)** הוכח את הזהות: $\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\sin 3\alpha$ לפי: $\sin(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

**3)** הוכח את הזהות: $\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\cos 3\alpha$ לפי: $\cos(\alpha + 2\alpha)$ ושימשו בזהויות שנלמדו.

**4)** נתונה זווית חדה $\alpha$ המקיימת: $\sin\alpha = \frac{40}{41}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\cos\alpha$.

ב. $\tan\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

ה. $\tan 2\alpha$.

**5)** נתונה זווית חדה $\alpha$ המקיימת: $\tan\alpha=\frac{5}{12}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\sin\alpha$.

ב. $\cos\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

**6)** נתונה זווית $\alpha$ ברביע הראשון וזווית $\beta$ ברביע השני המקיימות: $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ ו- $\cos\beta=-0.8$. מבלי למצוא את $\alpha$ ו- $\beta$ חשב את הביטויים הבאים:

א. $\sin(\alpha+\beta)$.

ב. $\cos(\alpha+\beta)$.

ג. $\sin(2\alpha+\beta)$.

**7)** נתון כי $\sin\alpha+\cos\alpha=1.2$ עבור $0°<\alpha<90°$. חשב את $\sin 2\alpha$.

**8)** פשט את הביטוי הבא: $\sqrt{\frac{1+\cos 8\alpha}{2}}$.

**9)** ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 16°\cos 16°}{3-6\sin^2 29°}$.

**10)** ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin^2 78°-\cos^2 78°}{\sin 66°}$.

**11)** ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{5\tan 15°\left(1-2\cos^2 15°\right)}{1-\tan^2 15°}$.

## תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) א. $\frac{9}{41}$ ב. $4\frac{4}{9}$ ג. $\frac{720}{1681}$ ד. $-\frac{1519}{1681}$
ה. $-\frac{720}{1519}$
5) א. $\frac{5}{13}$ ב. $\frac{12}{13}$ ג. $\frac{120}{169}$ ד. $\frac{119}{169}$
6) א. $\frac{16}{65}$ ב. $-\frac{63}{65}$ ג. $-\frac{123}{845}$
7) 0.44.
8) $\cos 4\alpha$.
9) $\frac{1}{6}$.
10) 1.
11) -1.25.

# סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

## סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

**הערה:**

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

## שאלות:

**1)** הוכח את הזהות הבאה: $\sin 5\alpha+\sin 3\alpha=2\sin 4\alpha\cos\alpha$.

**2)** הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha-\sin 2\alpha=2\sin 2.5\alpha\cos 4.5\alpha$.

**3)** הוכח את הזהות הבאה: $\cos\alpha+\cos 5\alpha=2\sin 2\alpha\cos 3\alpha$.

**4)** הוכח את הזהות הבאה: $\cos 5\alpha-\cos 2\alpha=-2\sin 3.5\alpha\cos 1.5\alpha$.

**5)** הוכח את הזהות הבאה: $\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha$.

**6)** הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

**7)** הוכח את הזהות הבאה: $\sin(2\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin\beta$.

**8)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\sin 4\alpha-\sin 2\alpha}=2\cos\alpha$.

**9)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = 2\sin\alpha$.

**10)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \tan 2\alpha$.

**11)** הוכח את הזהות הבאה: $\tan\alpha + \tan 3\alpha = \frac{2\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}$.

**12)** פשט את הביטוי: $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}$ ומצא את ערכו מבלי להיעזר במחשבון אם ידוע כי $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$.

**13)** נתון כי $\alpha$ ו- $\beta$ הן זוויות חדות המקיימות: $\sin\alpha = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ ו- $\sin\beta = \frac{n^2-m^2}{m^2+n^2}$.
הראה כי: $\alpha + \beta = 90°$.

**14)** היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\cos 6\alpha\cos 2\alpha - \cos 5\alpha\cos\alpha = -\sin 7\alpha\sin\alpha$.

**15)** היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\sin 4\alpha\sin 2\alpha - \sin 5\alpha\sin\alpha + \cos 3\alpha\cos\alpha = \cos 2\alpha$.

**16)** חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 52.5°\cdot\sin 7.5°$.

**17)** חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 35°\sin 55°}{\cos 40°\cos 20° - 0.25}$.

**18)** חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$.

**19)** חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 5°\cdot\sin 25°\cdot\sin 35°\cdot\sin 55°\cdot\sin 65°\cdot\sin 85°$.

## תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) $-\frac{7}{9}$.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.
17) 1.
18) $\frac{1}{8}$.
19) $\frac{1}{64}$.

# מכפלת פונקציות:

## סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום:

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right]\\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]\\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$$

## שאלות:

**1)** הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(\sin 8\alpha+\sin 6\alpha\right)$.

**2)** הוכח את הזהות הבאה: $\cos 11\alpha\sin 3\alpha=\frac{1}{2}\left(\sin 14\alpha-\sin 8\alpha\right)$.

**3)** הוכח את הזהות הבאה: $\cos 4\alpha\cos 10\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos 6\alpha+\cos 14\alpha\right)$.

**4)** הוכח את הזהות הבאה: $\sin 3\alpha\sin 7\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos 4\alpha-\cos 10\alpha\right)$.

**5)** הוכח את הזהות הבאה: $2\sin 7\alpha\sin 2\alpha+\cos 9\alpha=\cos 5\alpha$.

**6)** הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cos\alpha=\sin 3\alpha\cos 8\alpha$.

**7)** הוכח את הזהות הבאה: $\sin\alpha\sin 3\alpha=\cos 2\alpha-\cos 3\alpha\cos\alpha$.

**8)** הוכח את הזהות הבאה: $2\left(\sin^2\beta-\sin^2\alpha\right)=\cos 2\alpha-\cos 2\beta$.

**9)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{2}{\cot\beta-\tan\alpha}=\tan\left(\alpha+\beta\right)-\frac{\sin\left(\alpha-\beta\right)}{\cos\left(\alpha+\beta\right)}$.

## תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 20 - משוואות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

1. משוואות טריגונומטריות כלליות ..... 324
2. משוואות הנפתרות עי טכניקה אלגברית ..... 327
3. משוואות הנפתרות על ידי זהויות יסוד ..... 329
4. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של מעגל היחידה ..... 331
5. משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס ..... 332
6. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות ..... 333
7. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של זווית כפולה ..... 334
8. משוואות מהצורה $a\sin(x)+b\cos(x)=c$ ..... 335
9. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש פונקציות ..... 336
10. משוואות עם תחום נתון ..... 338
11. משוואות עם זוויות ברדיאנים ..... 339
12. אי שוויונים טריגונומטריים ..... 343

# משוואות טריגונומטריות כלליות:

## סיכום כללי:

**פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):**

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות
כאשר $x$ הוא משתנה ו- $\alpha$ היא זווית נתונה/ידועה:

| המשוואה | הפתרון |
|---|---|
| $\sin x = \sin\alpha$ | $x_1 = \alpha + 360°k \ , \ x_2 = 180° - \alpha + 360°k$ |
| $\cos x = \cos\alpha$ | $x_{1,2} = \pm\alpha + 360°k$ |
| $\tan x = \tan\alpha$ | $x = \alpha + 180°k$ |
| $\cot x = \cot\alpha$ | $x = \alpha + 180°k$ |

כאשר $k$ מספר שלם.

## שאלות:

**1)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

א. $\sin x = \frac{1}{2}$ ב. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ד. $\sin x = -\frac{1}{2}$

**2)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

א. $\cos x = \frac{1}{2}$ ב. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**3)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

א. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ב. $\tan x = -1$

**4)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית):

א. $\sin x = 0.7$ ב. $\cos x = -0.6$ ג. $\tan x = 5$

**5)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות):

א. $\sin 3x = \frac{1}{2}$ ב. $2\cos 2x = -\sqrt{3}$

ג. $\tan 5x = -1$ ד. $3\sin 2x = 2$

ה. $3\cos 3x = 1$ ו. $2\tan 4x = 1$

**6)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב):

א. $\sin(2x+30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. $\cos(75° - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\tan(50° - x) = 1.3$

**7)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים):

א. $\sin x = \sin 3x$ ב. $\sin 2x = \sin(x+30°)$

ג. $\sin x = \sin(120° - x)$ ד. $\cos x = \cos 3x$

ה. $\cos x = \cos(40° - x)$ ו. $\tan x = \tan 3x$

ז. $\tan 2x = \tan(60° - x)$

**8)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות):

א. $\sin x = 0$ ב. $\sin x = 1$

ג. $\sin x = -1$ ד. $\cos x = 0$

ה. $\cos x = 1$ ו. $\cos x = -1$

ז. $\tan x = 0$ ח. $\tan x = 1$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x_1=30°+360°k\ ,\ x_2=150°+360°k$ ב. $x_1=45°+360°k\ ,\ x_2=135°+360°k$

ג. $x_1=-60°+360°k\ ,\ x_2=240°+360°k$ ד. $x_1=-30°+360°k\ ,\ x_2=210°+360°k$.

**2)** א. $x_{1,2}=\pm 60°+360°k$ ב. $x_{1,2}=\pm 150°+360°k$.

**3)** א. $x=30°+180°k$ ב. $x=135°+180°k$.

**4)** א. $x_1=44.427°+360°k\ ,\ x_2=135.573°+360°k$

ב. $x_{1,2}=126.87°+360°k$ ג. $x=78.69°+180°k$.

**5)** א. $x_1=10°+120°k\ ,\ x_2=50°+120°k$ ב. $x_1=75°+180°k\ ,\ x_2=-75°+180°k$

ג. $x=-9°+36°k$ ד. $x_1=20.9°+180°k\ ,\ x_2=69.09°+180°k$

ה. $x_{1,2}=\pm 23.5°+120°k$ ו. $x=6.64°+45°k$.

**6)** א. $x_1=105°+180°k\ ,\ x_2=-45°+180°k$

ב. $x_1=10°+120°k\ ,\ x_2=40°+120°k$ ג. $x=-2.431°+180°k$.

**7)** א. $x_1=180°k\ ,\ x_2=45°+90°k$ ב. $x_1=30°+360°k\ ,\ x_2=50°+120°k$

ג. $x=60°+180°k$ ד. $x=90°k$

ה. $x=20°+180°k$ ו. $x=180°k$ ז. $x=20°+60°k$.

**8)** א. $x=180°k$ ב. $x=90°+360°k$ ג. $x=180°+360°k$

ד. $x=90°+180°k$ ה. $x=360°k$ ו. $x=180°+360°k$

ז. $x=180°k$ ח. $x=45°+180°k$.

# משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

## סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

**טכניקות שכיחות:**

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע"י הוצאת גורם משותף, ע"י נוסחאות הכפל המקוצר וע"י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

## שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

**1)** $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

**2)** $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

**3)** $\tan^2 2x = 3$

**4)** $\sin x \cos 3x = 0$

**5)** $\sin 2x - 2\sin^2 2x = 0$

**6)** $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$

**7)** $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

**8)** $3\sin^2 x - \sin x = 2$

**9)** $6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

**10)** $\cos^2 x + 2\cos x = 3$

**11)** $\tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0$

**12)** $\tan^2 x = 4\tan x - 1$

**13)** $\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0$

**14)** $\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0$

**15)** $\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0$

## תשובות סופיות:

**1)** $x_{1,2}=\pm 30^\circ+360^\circ k$ , $x_{3,4}=\pm 150^\circ+360^\circ k$.

**2)** $x_1=30^\circ+360^\circ k$ , $x_2=150^\circ+360^\circ k$ , $x_3=330^\circ+360^\circ k$ , $x_4=210^\circ+360^\circ k$.

**3)** $x_1=30^\circ+90^\circ k$ , $x_2=-30^\circ+90^\circ k$.

**4)** $x_1=180^\circ k$ , $x_2=30^\circ+60^\circ k$.

**5)** $x_1=90^\circ k$ , $x_2=15^\circ+180^\circ k$ , $x_3=75^\circ+180^\circ k$.

**6)** $x_1=90^\circ+180^\circ k$ , $x_{2,3}=\pm 150^\circ+360^\circ k$.

**7)** $x_1=90^\circ+360^\circ k$ , $x_2=210^\circ+360^\circ k$ , $x_3=-30^\circ+360^\circ k$.

**8)** $x_1=90^\circ+360^\circ k$ , $x_2=-41.8^\circ+360^\circ k$ , $x_3=221.8^\circ+360^\circ k$.

**9)** $x_1=30^\circ+360^\circ k, x_2=150^\circ+360^\circ k, x_3=-19.4^\circ+360^\circ k, x_4=199.4^\circ+360^\circ k$.

**10)** $x=360^\circ k$.

**11)** $x_1=-45^\circ+180^\circ k$ , $x_2=75.964^\circ+180^\circ k$.

**12)** $x_1=75^\circ+180^\circ k$ , $x_2=15^\circ+180^\circ k$.

**13)** $x=360^\circ k$.

**14)** $x=180^\circ+360^\circ k$.

**15)** $x=45^\circ+90^\circ k$ , $x\neq -45^\circ+180^\circ k$.

# משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

## סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

**תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:**

| | | |
|---|---|---|
| **קשרים בין פונקציות** | $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ , $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ | $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$<br>$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$ |
| **זוויות משלימות ל-** $90°$ | $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$ | $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$ |
| | $\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$ | $\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$ |
| **קשרים בין פונקציות** | $\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ | $\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ |

## שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

**1)** $\sin x=\cos x$

**2)** $\sin x=\cos(x+45°)$

**3)** $\cos x=\frac{2}{3}\sin^2 x$

**4)** $2\cos^2 x=3\sin x$

**5)** $\sin^2 x-\cos x=\frac{1}{4}$

**6)** $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x$

**7)** $\sin^2 x+2\cos^2 x=1.5$

**8)** $\sin x-\tan x=0$

## תשובות סופיות:

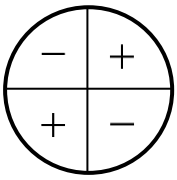
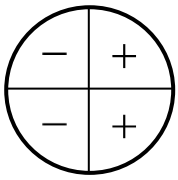
1) $x = 45° + 180°k$ .
2) $x = 22.5° + 180°k$ .
3) $x_{1,2} = \pm 60° + 360°k$ .
4) $x_1 = 30° + 360°k$ , $x_2 = 150° + 360°k$ .
5) $x_{1,2} = \pm 60° + 360°k$ .
6) $x_1 = 30° + 120°k$ , $x_2 = -90° + 360°k$
7) $x_{1,2} = \pm 45° + 360°k$ , $x_{3,4} = \pm 135° + 360°k$ .
8) $x = 180°k$ .

# משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

## סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

**תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:**

| רביע | סינוס | קוסינוס | טנגנס |
|---|---|---|---|
| I<br>II<br>III | $\sin(180^o-\alpha)=\sin\alpha$<br>$\sin(180^o+\alpha)=-\sin\alpha$ | $\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha$<br>$\cos(180^o+\alpha)=-\cos\alpha$<br>$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ | $\tan(180^o-\alpha)=-\tan\alpha$<br>$\tan(180^o+\alpha)=\tan\alpha$<br>$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ |
| סימנים |  |  |  |

**זהויות עבור זוויות הגדולות מ-360 מעלות:**

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+360°k)&=\sin\alpha\\ \cos(\alpha+360°k)&=\cos\alpha\end{aligned}}\quad,\quad\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha+180°k)&=\tan\alpha\\ \cot(\alpha+180°k)&=\cot\alpha\end{aligned}}$$

## שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

**1)** $\sin x=-\sin 3x$ **2)** $\cos 2x=-\cos 3x$

**3)** $\sin(x+30°)=-\cos x$ **4)** $\sin 3x=-\cos(180°-x)$

## תשובות סופיות:

**1)** $x_1=90°k\ ,\ x_2=-90°+180°k$ **2)** $x_1=180°+360°k\ ,\ x_2=36°+72°k$

**3)** $x=120°+180°k$ **4)** $x_1=22.5°+90°k\ ,\ x_2=45°+180°k$

# משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

## סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה: $\sin x = a\cos x$ לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע"י חלוקה ב-$\cos x$ (בתנאי ש-$\cos x \neq 0$).
כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a\cos x \quad /:\cos x \neq 0$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = a\frac{\cos x}{\cos x}$$
$$\tan x = a$$
$$x = \tanh^{-1}(a) + 180°k$$

**הערה:**

יש לבדוק האם ערכי $x$ שמקיימים $\cos x = 0$ מהווים פתרון למשוואה.
אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

## שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x = 2\cos x$
2) $3\sin x = \cos x$
3) $4\sin x = 7\cos x$
4) $2\sin x = -5\cos x$
5) $\sin^2 x = 8\cos^2 x$
6) $3\sin^2 x = \cos^2 x$

## תשובות סופיות:

1) $x = 63.43° + 180°k$.
2) $x = 18.43° + 180°k$.
3) $x = 60.25° + 180°k$.
4) $x = -68.19° + 180°k$.
5) $x_1 = 70.52° + 180°k$ , $x_2 = -70.52° + 180°k$.
6) $x_1 = 30° + 180°k$ , $x_2 = -30° + 180°k$.

# משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

## סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

**תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:**

| | |
|---|---|
| **סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס** | $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$<br>$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ |
| **סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס** | $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$<br>$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$ |

## שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

**1)** $2\sin x=\sin(60°-x)$

**2)** $\sin(x+45°)\sin(x-45°)=\frac{1}{2}$

**3)** $\frac{\cos 3x}{\sin x}-\frac{\sin 3x}{\cos x}=2$

**4)** $3\cos^2 x-\sin^2 x=\sin 3x$

## תשובות סופיות:

**1)** $x=19.11°+180°k$.

**2)** $x=90°+180°k$.

**3)** $x=15°+60°k$.

**4)** $x_{1,2}=\pm60°+180°k$ , $x_3=90°+360°k$.

# משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

## סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

| | |
|---|---|
| **סינוס זווית כפולה** | $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ |
| **קוסינוס זווית כפולה** | $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ |

## שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

**1)** $\sin x - \sin 2x = 0$

**2)** $\sqrt{2}\sin x + \sin 2x = 0$

**3)** $4\cos x = \sin 2x$

**4)** $2\cos 2x + \sin 4x = 0$

**5)** $3\cos x - \cos 2x = 0$

**6)** $\cos 2x = 2\sin x$

**7)** $\sin x + \cos 2x = 1$

**8)** $2\sin^2 x = \cos 2x + 2$

## תשובות סופיות:

**1)** $x_1 = 360°k \ , \ x_2 = 60° + 120°k$

**2)** $x_1 = 180°k \ , \ x_{2,3} = \pm 135° + 360°k$

**3)** $x = 90° + 180°k$

**4)** $x_1 = 45° + 90°k \ , \ x_2 = 135° + 180°k$

**5)** $x_{1,2} = \pm 106.307° + 360°k$

**6)** $x_1 = 21.1° + 360°k \ , \ x_2 = 158.9° + 360°k$

**7)** $x_1 = 180°k \ , \ x_2 = 30° + 360°k \ , \ x_3 = 150° + 360°k$.

**8)** $x_1 = -60 + 360°k \ , \ x_2 = 60° + 360°k \ , \ x_3 = 120° + 360°k \ , \ x_4 = 240° + 360°k$.

# משוואות מהצורה: a sin(x) + b cos(x) = c :

## סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה: $a\sin x+b\cos x=c$ לצורה: $\sin x+\frac{b}{a}\cos x=\frac{c}{a}$.

מציאת זווית $\alpha$ המקיימת: $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ תאפשר לכתוב: $\sin x+\tan\alpha\cdot\cos x=\frac{c}{a}$.

שימוש בזהות: $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ובזהות: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ יובילו:

$$\sin x+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos x=\frac{c}{a}\quad /\cdot\cos\alpha$$
$$\sin x\cos\alpha+\sin\alpha\cos x=\frac{c}{a}\cos\alpha$$
$$\sin(x+\alpha)=\frac{c}{a}\cos\alpha$$

אם נסמן: $\frac{c}{a}\cos\alpha=k$ נקבל את המשוואה: $\sin(x+\alpha)=k$ כאשר $\alpha$ ו- $k$ ידועים.
מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $10\sin x+3\cos x=5$

2) $5\cos x-6\sin x=1$

3) $\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x=\sqrt{12}$

4) $\frac{1}{2}\sin x+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}$

5) $\cos x+\cos(60°+x)=\sqrt{2}+\cos(60°-x)$

## תשובות סופיות:

1) $x_1=11.91°+360°k\ ,\ x_2=134.69°+360°k$

2) $x_1=227.156°+360°k\ ,\ x_2=32.44°+360°k$

3) $x=15°+180°k$

4) $x_1=-60°+720°k\ ,\ x_2=180°+360°k$

5) $x_1=-105°+360°k\ ,\ x_2=15°+360°k$

# משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

## סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

**תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:**

| | |
|---|---|
| **סכום והפרש פונקציות עבור סינוס** | $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$<br>$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ |
| **סכום והפרש פונקציות עבור קוסינוס** | $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$<br>$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ |

## שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

**1)** $\sin x+\sin 3x=\sin 2x$.

**2)** $\cos 2x-\cos 6x=\sin 2x$.

**3)** $\sin x+\sin 3x=4\sin^3 x$.

**4)** $\sin 6x-\sin 4x=1-\cos 2x$.

**5)** $\left(\sin 5x+\sin 7x\right)^2=\left(\cos 5x+\cos 7x\right)^2$.

**6)** $2\cos^2\frac{x}{2}+\cos 3x+\cos 5x=1$.

**7)** $1+\sin x+\sin 7x=\cos 8x$.

**8)** $2\sin 3x\left(\cos 2x+\cos x\right)=\sin x+\sin 2x$.

**9)** $\sin\left(x+60°\right)-\sin x=\sin\left(2x+60°\right)-\sin 2x$.

**10** $\cos^2 3x-\cos^2 x=\sin x\cos x$.

**11** $\sin 8x\sin 2x+\cos 10x=0$.

**12** $\cos x+3\sin x=1+2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

**13** $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x-\sin 4x=0$.

**14** $4\cos x\cos 2x\cos 3x=1$.

## תשובות סופיות:

**1** $x_{1,2}=\pm 60°+360°k$ , $x_3=90°k$.

**2** $x_1=45°+90°k$ , $x_2=180°k$.

**3** $x_1=37.5°+90°k$ , $x_2=7.5°+90°k$ , $x_3=90°k$.

**4** $x_1=15°+60°k$ , $x_2=180°k$ , $x_3=-22.5°+90°k$.

**5** $x_1=36°k$ , $x_2=\left(\frac{180}{7}\right)°+\left(\frac{180}{7}\right)°k$.

**6** $x_{1,2}=\pm 30°+90°k$ , $x_3=90°+180°k$.

**7** $x_1=-\left(12\frac{6}{7}\right)°k+\left(51\frac{3}{7}\right)°k$ , $x_2=45°k$.

**8** $x_1=40°k$ , $x_2=180°+360°k$.

**9** $x_1=-20°+120°k$ , $x_2=360°k$.

**10** $x_1=52.5°+90°k$ , $x_2=-7.5°+90°k$ , $x_3=90°k$.

**11** $x_1=45°+90°k$ , $x_2=11.25°+22.5°k$.

**12** $x_1=30°+360°k$ , $x_2=150°+360°k$.

**13** $x_1=7.5°+15°k$ , $x_2=90°k$.

**14** $x_1=60°+180°k$ , $x_2=22.5+45°k$.

# משוואות עם תחום נתון:

## סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- $k$ ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

## שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

1) $8\sin x-4=0\ ,\ [0°:180°]$.
2) $\sin 2x=\sin(x+60°)\ ,\ [-90°:90°]$.
3) $3\cos(2x+30°)+1=0\ ,\ [-90°:90°]$.
4) $\cos(50°-x)=-\cos x\ ,\ [0°:360°]$.
5) $2\sin 3x-5\cos 3x=0\ ,\ [-30°:30°]$.
6) $2\cos^2 3x=\sin 6x+1\ ,\ [0°:180°]$.
7) $\cos 4x+1=3\sin 2x\ ,\ [-180°:180°]$.
8) $\cos 2x+\cos^2 x+\sin x=0\ ,\ [-180°:180°]$.

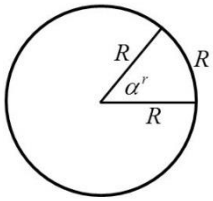
## תשובות סופיות:

1) $x=30°\ ,\ 150°$.
2) $x=-80°\ ,\ 40°\ ,\ 60°$.
3) $x=39.736°\ ,\ -69.736°$.
4) $x=115°\ ,\ 295°$.
5) $x=22.733°$.
6) $x=7.5°\ ,\ 37.5°\ ,\ 67.5°\ ,\ 97.5°\ ,\ 127.5°\ ,\ 157.5°$.
7) $x=-165°\ ,\ -105°\ ,\ 15°\ ,\ 75°$.
8) $x=-138.19°\ ,\ -41.81°\ ,\ 90°$.

# משוואות עם זוויות ברדיאנים:

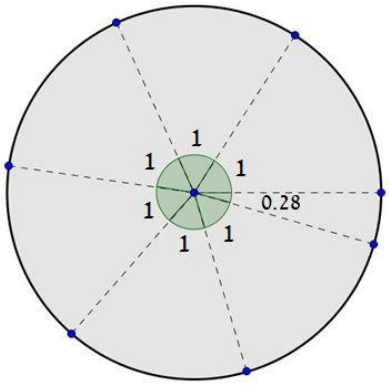
## סיכום כללי:

**הגדרת הרדיאן:**




זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו $R$, תימצאנה $2\pi$ רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא $P=2\pi\cdot R$.




באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל-$2\pi=6.28$ קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל.
הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד,
כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן.
מקבלים $2\pi$ רדיאנים.

**קשר בין רדיאנים למעלות:**

- נוסחת מעבר מזווית $\alpha^\circ$ (במעלות) לזווית $\alpha^r$ (ברדיאנים): $\alpha^r=\frac{\pi}{180}\alpha^\circ$.
- נוסחת מעבר מזווית $\alpha^r$ (ברדיאנים) לזווית $\alpha^\circ$ (במעלות): $\alpha^\circ=\frac{180}{\pi}\alpha^r$.

**פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:**

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות
כאשר $x$ הוא משתנה ו- $\alpha$ היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

| המשוואה | הפתרון |
|---|---|
| $\sin x=\sin\alpha$ | $x_1=\alpha+2\pi k\ ,\ x_2=\pi-\alpha+2\pi k$ |
| $\cos x=\cos\alpha$ | $x_{1,2}=\pm\alpha+2\pi k$ |
| $\tan x=\tan\alpha$ | $x=\alpha+\pi k$ |
| $\cot x=\cot\alpha$ | $x=\alpha+\pi k$ |

כאשר $k$ מספר שלם.

## שאלות:

**1)** המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. $30°$ | ב. $90°$ | ג. $75°$ | ד. $120°$ |
| ה. $210°$ | ו. $315°$ | ז. $18°$ | ח. $285°$ |
| ט. $-15°$ | י. $-80°$ | יא. $510°$ | יב. $-390°$ |

**2)** המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. $\pi$ | ב. $2\pi$ | ג. $4\pi$ | ד. $1.5\pi$ |
| ה. $\frac{1}{2}\pi$ | ו. $\frac{\pi}{4}$ | ז. $\frac{\pi}{6}$ | ח. $\frac{1}{18}\pi$ |
| ט. $\frac{13}{18}\pi$ | י. $\frac{19}{12}\pi$ | יא. $1\frac{1}{6}\pi$ | יב. $2\frac{1}{4}\pi$ |

**3)** פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

א. $2\sin 3x=1$ , $\left[0:\frac{1}{3}\pi\right]$

ב. $\sqrt{3}+2\cos x=0$ , $[0:\pi]$

ג. $3-3\tan\frac{x}{2}=0$ , $[0:2\pi]$

ד. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ , $[0:\pi]$

ה. $4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2=0$ , $\left[0:\frac{1}{2}\pi\right]$

ו. $\sin x=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2x\right)$ , $\left[-\frac{5\pi}{18}:\frac{5\pi}{18}\right]$

ז. $5-5\tan\left(4x-0.1\pi\right)=0$ , $\left[0:\frac{\pi}{3}\right]$

ח. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0.7$ , $\left[-\frac{\pi}{4}:\frac{\pi}{4}\right]$

**4)** פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

א. $\sin^2 x=\frac{3}{4}$ , $\left[0:\frac{\pi}{2}\right]$

ב. $16\cos^2 2x-1=0$ , $\left[-\frac{\pi}{8}:\frac{\pi}{8}\right]$

ג. $2\tan^2 x-18=0$ , $[0:\pi]$

ד. $3\sin x\cos x+3\cos x=0$ , $\left[-\frac{\pi}{3}:\frac{\pi}{3}\right]$

ה. $\sin^2 x-5\sin x\cos x=0$ , $\left[-\frac{\pi}{2}:\frac{\pi}{2}\right]$

ו. $2\sin^2 x-5\sin x+2=0$ , $[-\pi:\pi]$

ז. $4\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x-1=0$ , $[-\pi:0]$

ח. $\tan^2 x-7\tan x+10=0$ , $[0:2\pi]$

**5)** פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א. $0 \le x \le \pi \ , \ \sin x = \cos\left( x + \frac{\pi}{4} \right)$

ב. $0 \le x \le \pi \ , \ \tan x = 4\sin x$

ג. $0 \le x \le 2\pi \ , \ 2\sin^2 x = 3\cos x$

**6)** פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $\left[ -\pi : \pi \right] \ , \ \sin\left( x - \frac{\pi}{6} \right) = -\sin x$

ב. $\left[ 0 : \pi \right] \ , \ \sin\left( 2x + \frac{2}{9}\pi \right) = -\cos 2x$

ג. $\left[ 0 : \pi \right] \ , \ \sin 4x = -\cos\left( \pi - x \right)$

ד. $\left[ -\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2} \right] \ , \ \tan x = -\tan 2x$

**7)** פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א. $-\pi \le x \le \pi \ , \ \sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב. $\left[ -\pi : \pi \right] \ , \ \cos 4x + 1 = 3\sin 2x$

ג. $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \ 2\sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד. $0 \le x \le \pi \ , \ \cos 4x + \sin^2 x = 1$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{5\pi}{12}$ ד. $\frac{2\pi}{3}$ ה. $\frac{7\pi}{6}$

ו. $\frac{7\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{10}$ ח. $\frac{19\pi}{12}$ ט. $-\frac{\pi}{12}$ י. $-\frac{4\pi}{9}$

יא. $\frac{17\pi}{6}$ יב. $-\frac{13\pi}{6}$.

**2)** א. $180°$ ב. $360°$ ג. $720°$ ד. $270°$ ה. $90°$

ו. $45°$ ז. $30°$ ח. $10°$ ט. $130°$ י. $285°$

יא. $210°$ יב. $405°$.

**3)** א. $x=\frac{\pi}{18}\ ,\ \frac{5\pi}{18}$ ב. $x=\frac{5\pi}{6}$ ג. $x=\frac{\pi}{2}$ ד. $x=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{2}$

ה. $x=0$ ו. $x=\frac{2\pi}{9}$ ז. $x=0.0875\pi$ ח. $x=0.224\pi$.

**4)** א. $x=\frac{\pi}{3}$ ב. $\phi$ ג. $x=0.398\pi, 0.602\pi$ ד. $\phi$

ה. $x=0, 0.437\pi$ ו. $x=\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{5\pi}{6}$

ז. $x=-\frac{\pi}{4}\ ,\ -0.615\pi$ ח. $x=0.352\pi\ ,\ 0.437\pi\ ,\ 1.352\pi\ ,1.437\pi$.

**5)** א. $x=\frac{\pi}{8}$ ב. $x=0\ ,\ 0.42\pi\ ,\ \pi$ ג. $x=\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{5\pi}{3}$

**6)** א. $x=\frac{\pi}{12}\ ,\ -\frac{11\pi}{12}$ ב. $x=\frac{23\pi}{72}\ ,\ \frac{59\pi}{72}$

ג. $x=\frac{\pi}{10}\ ,\ \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{5\pi}{6}\ ,\ \frac{9\pi}{10}$ ד. $x=\pm\frac{\pi}{3}\ ,\ 0$.

**7)** א. $x=\pm\frac{\pi}{2}\ ,\ -0.148\pi\ ,\ 0.852\pi$ ב. $x=-\frac{7\pi}{12}\ ,\ \frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{5\pi}{12}\ ,\ \frac{11\pi}{12}$

ג. $x=\pm\frac{\pi}{3}$ ד. $x=0\ ,\ 0.38\pi\ ,\ 0.61\pi\ ,\ \pi$.

# אי שוויונים טריגונומטריים:

## סיכום כללי:

כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:

1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
   - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
   - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

**הערה:**

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

## שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

**1)** $[0,180^\circ]\ \sin x<\frac{1}{2}$

**2)** $[0,1.5\pi]\ 2\cos x-\sqrt{3}\geq 0$

**3)** $(-90^\circ,90^\circ)\ 2\cos^2 x+\sin x\geq 1$

**4)** $[0,\pi]\ \sin x+\sin 2x+\sin 3x<0$

**5)** $[0^\circ,180^\circ]\ 1<2\sin(x+10^\circ)<\sqrt{3}$

**6)** $(0<x<\pi)\ \sin x+\sqrt{3}\cos x\geq 1$

**7)** $[0,2\pi]\ \tan x+\cot x>0$

**8)** $(-\pi<x<\pi)\ |\tan(x)|>\frac{1}{\sqrt{3}}$

## תשובות סופיות:

1) $150^\circ \le x \le 180^\circ \;,\; 0^\circ \le x < 30^\circ$.

2) $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

3) $-30^\circ \le x < 90^\circ$.

4) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$.

5) $110^\circ < x < 140^\circ \;,\; 20^\circ < x < 50^\circ$.

6) $0 < x \le \frac{\pi}{2}$.

7) $\pi < x < \frac{3}{2}\pi \;\;,\;\; 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

8) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \;,\; x \ne \frac{\pi}{2}$ או: $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6} \;,\; x \ne -\frac{\pi}{2}$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 21 - טריגונומטריה במישור

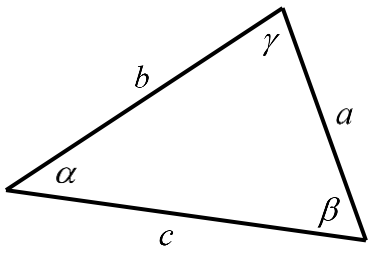
### תוכן העניינים

1. שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים ..... 345
2. שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש ..... 353
3. שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה ..... 362
4. שאלות מסכמות ..... 366

# שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים:

## סיכום כללי:

### משפט הסינוסים:




במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

בצורה מתמטית: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$ .

### משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן בקוסינוס הזווית שבניהן: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ או $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ .

### מתי נשתמש בכל משפט:

- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
  א. נתונות שתי זוויות וצלע.
  ב. נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
  ג. נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.

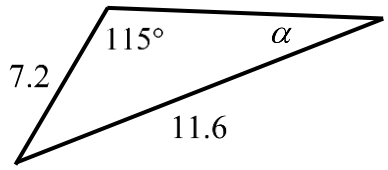
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
  א. נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
  ב. נתונות שלוש צלעות.

- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

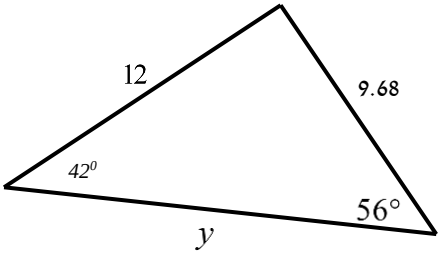
## שאלות:

**1)** מצא את ערכו של $a/x/y$ במשולשים הבאים
($R$ הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):

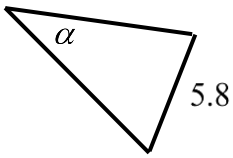
א.



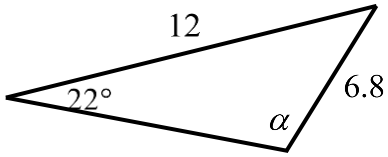

ב.



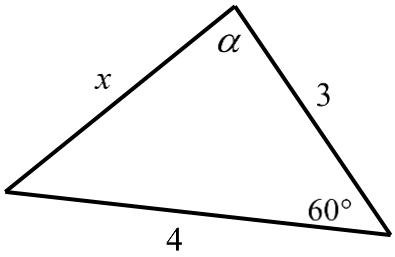

ג. רדיוס המעגל: $R=7$.




ד.

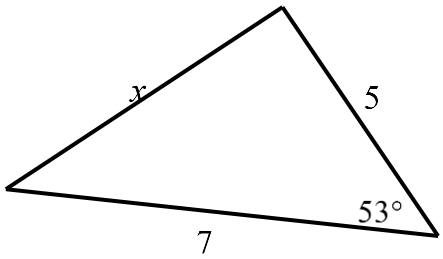



ה.

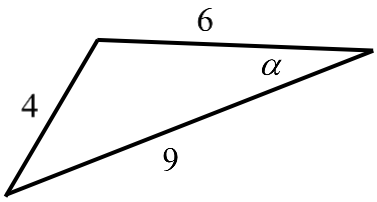



**2)** מצא את ערכו של $\alpha/x$ במשולשים הבאים:

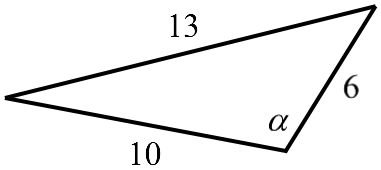
א.



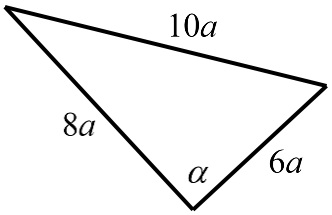

ב.




ג.

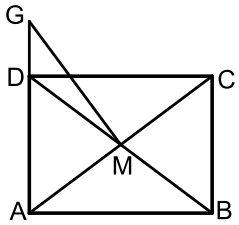



ד.



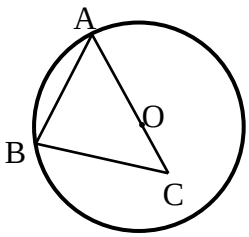
**3)** נתון משולש שווה שוקיים ABC (AB=AC) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ
וגודלה של זווית הבסיס בו הוא 70°. CD הוא חוצה זווית הבסיס $\sphericalangle C$.
מצא את אורכו של הקטע AD.

**4)** אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה M.
הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD.
נתון: AD = 3 ס"מ , AB = 4 ס"מ , DG = 1.2 ס"מ.
מצא את גודלו של הקטע GM.



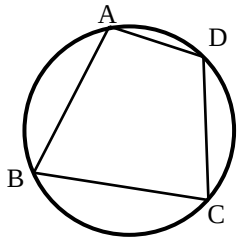

**5)** מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל
שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ.
חשב את זוויות המרובע.

**6)** הצלע AB במשולש ABC היא מיתר במעגל שמרכזו O.
הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט.
נתון: BC = 9 ס"מ , OC = 3 ס"מ , $\sphericalangle BAC = 38°$.
מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB.

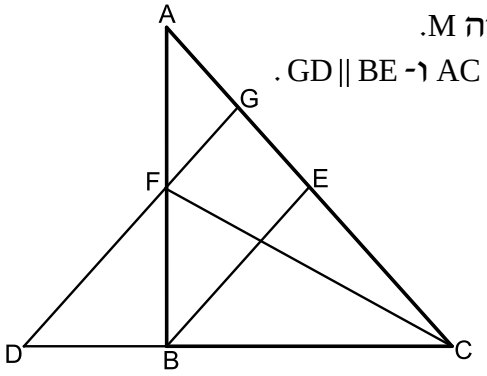



**7)** אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של 30° עם
צלע אחת של המקבילית וזווית של 61.05° עם הצלע הסמוכה לה.
אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה.
חשב את היקף המקבילית.

**8)** המרובע ABCD חסום במעגל.
נתון: AB = 6 ס"מ , BC = 9 ס"מ , CD = 10 ס"מ
ו-AD = 4 ס"מ.
מצא את אורכם של האלכסון AC ושל רדיוס המעגל.



**9)** BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.
מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: $AC = DC$ ו- $GD \parallel BE$.

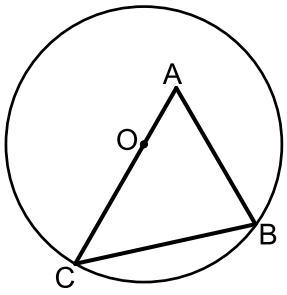



א. הוכח: $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$.

ב. נתון כי: 4 ס"מ $= ME$.
חשב את אורך הקטע DG.

ג. נתון כי: $\sphericalangle ACD = 48.189°$
הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.

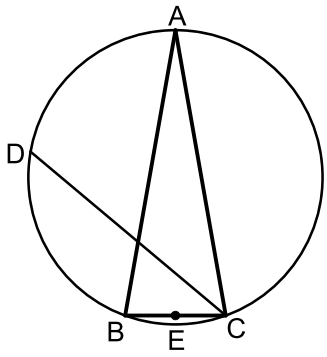
**10)** נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא $60°$.




א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD כך שנוצר המשולש ADB.
חשב את זווית ADB.

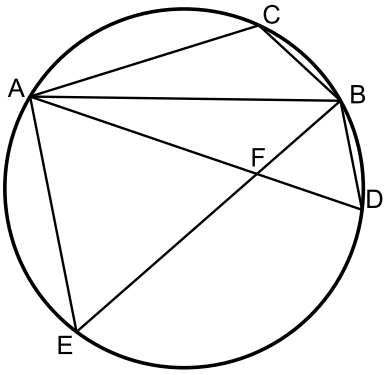
**11)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$)
החסום במעגל שרדיוסו $R$.
הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$.
ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא $80°$.




א. הבע באמצעות $R$ את הקטעים CD ו-DE.

ב. $r$ הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED.
הבע באמצעות $R$ את $r$.

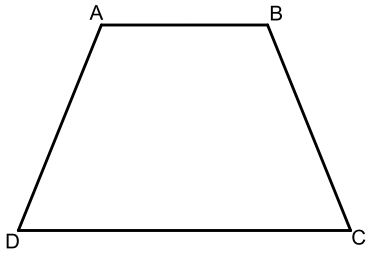
**12)** AB, AC ו-AD הם מיתרים במעגל המקיימים: $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.
מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את המיתרים AE ו-BE.
המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F.
נתון כי: $AC = AF = EF$.




א. הוכח: $\Delta ABF \cong \Delta ABC$.

ב. נתון גם: $\sphericalangle DAE = 3 \cdot \sphericalangle CAB$.
הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.

**13)** המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB \parallel CD\ ,\ AD = BC)$.



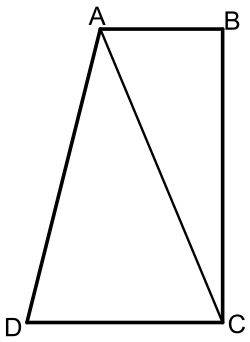

מידות הטרפז הן:
$AB$ = 6 ס"מ , $BC$ = 8 ס"מ , $CD$ = 12 ס"מ.

א. מצא את זווית C (עגל למספר שלם).

ב. מצא את אורך אלכסון הטרפז.

ג. חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

**14)** המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB \parallel CD\ ,\ \sphericalangle B = 90°)$.




מסמנים את הבסיס: $AB = t$ וידוע כי: $DC = 1.6t$ , $AD = 3t$.
היקף הטרפז הוא: 40 ס"מ.

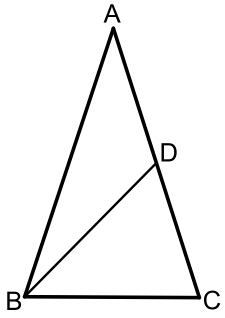
א. הבע באמצעות $t$ את אורך האלכסון AC.

ב. ידוע גם כי: $\sphericalangle D = 60°$.

i. חשב את אורך הקטע AC.

ii. חשב את שטח הטרפז.

**15)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC) בעל זווית ראש $36°$ החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.




א. מצא את אורך הבסיס BC במשולש.

ב. חשב את אורך התיכון BD.

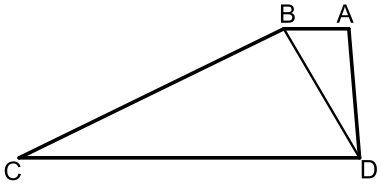
ג. מסמנים:

$r_1$ - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.

$r_2$ - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

הוכח את היחס הבא: $\frac{r_1}{r_2} = 2\cos 36$.

**16)** המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.



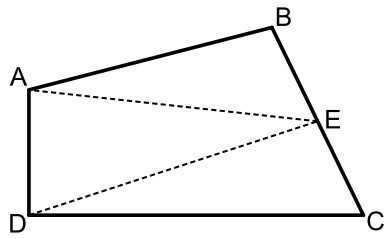

מעבירים את האלכסון BD המקיים: $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADB$.
נתון כי: $CD$ = 20 ס"מ , $AD$ = 10 ס"מ , $AB$ = 5 ס"מ.
כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.

א. הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.

ב. חשב את זווית C.

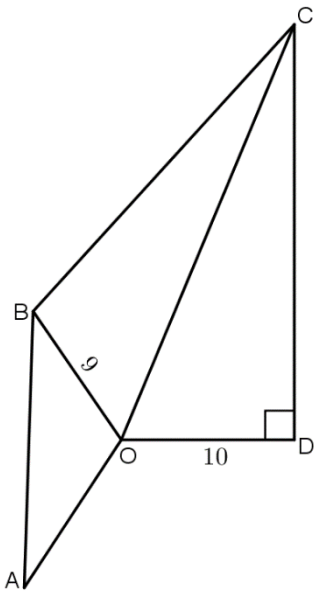
ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

**17)** באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.
ידוע כי: $\sphericalangle D = 90°$.
נסמן את הצלעות באופן הבא: $AD = 3x$ , $CD = 8x$ , $BC = 5x$ , $AB = 6x$.



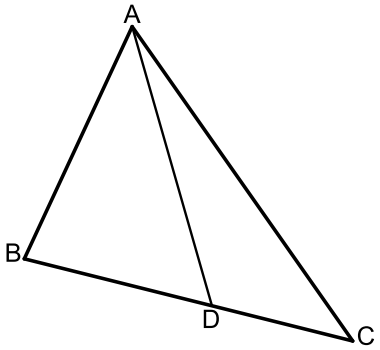

א. חשב את זווית BCD.
ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.
מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך
ש-DE מקביל ל-AB.
חשב את היחס הבא: $\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}$.

**18)** מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA , OB , OC ו-OD.
ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- $\alpha$.
המשולש COD הוא ישר זווית $\sphericalangle CDO = 90°$.
נתונים האורכים: $DO = 10$ , $BO = 9$.
מסמנים: $CD = 1.5m$ , $BC = 1.4m$.



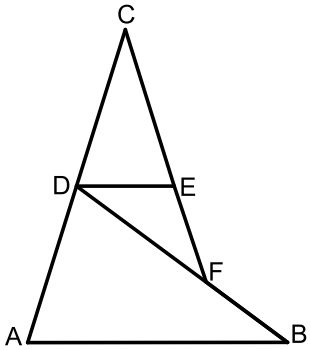

א. הבע באמצעות $m$ את $\sin\alpha$.
(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).
ב. נתון גם כי: $AB = m$.
מצא את $m$ אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם
את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.
ג. חשב את זווית BOC.

**19)** במשולש ABC הזווית A היא בת $60°$.
מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית: $\sphericalangle ADB = 60°$.
ידוע כי $AB = \sqrt{28}$ וכי הצלע AD במשולש ABD
גדולה פי 1.5 מהצלע BD.




א. מצא את אורך הצלע BD.
ב. היקף המשולש ABC הוא: $P = 5\sqrt{7} + 7$.
i. סמן: $DC = t$ והבע באמצעות $t$
את אורך הצלע AC.
ii. מצא את $t$.
ג. חשב את שטח המשולש ABC.

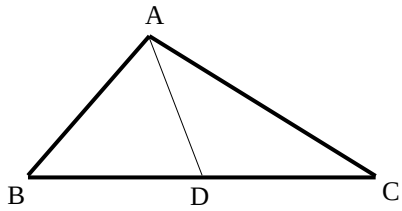
**20)** מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.
הנקודות E , C ו-F נמצאות על אותו הישר.
ידוע כי המשולשים DEF , ABD ו-DCE הם
שווי שוקיים (AB = BD , DC = CE , EF = DE).
נתון כי: AD = 8.



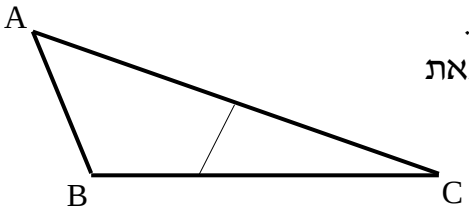

א. חשב את אורך הקטע BF.

ב. מחברים את הנקודות B ו-C.
חשב את אורך הצלע BC.

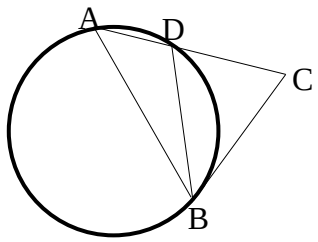
**21)** בשרטוט נתון: AB = 6 ס"מ , AC = 8 ס"מ ,
AD = 5 ס"מ. הנקודה D היא אמצע הצלע BC.
חשב את אורך הקטע BC.



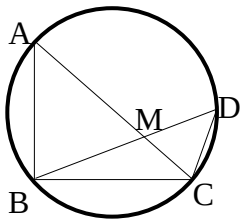

**22)** הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.
הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת
על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$.
נתון: $AB = a$ , $BC = b$.
הבע באמצעות $a$ ו-$b$ את אורך הקטע DE.




**23)** המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו $R$.
המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B
נפגשים בנקודה C. נתון: $\sphericalangle C = \alpha$ , $\sphericalangle ADB = \beta$.
הבע באמצעות $R$ , $\alpha$ ו-$\beta$ את אורך הקטע BC.




**24)** AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו $R$ ,
שנפגשים בנקודה M. זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון: $AB = k$ , $DM = p$ , $DC = q$.
הבע באמצעות $R$ , $k$ , $p$ ו-$q$ את אורך הקטע MC.



## תשובות סופיות:

**1)** א. $\alpha=34.231°$ ב. $y=$ ס"מ 14.33 ג. $\alpha=155.526°$ או $\alpha=24.474°$

ד. $\alpha=41.382°$ או $\alpha=138.618°$ ה. $x=$ ס"מ 3.606 , $\alpha=73.898°$

**2)** א. $x=$ ס"מ 5.646 ב. $\alpha=20.742°$ ג. $\alpha=105.962°$ ד. $\alpha=90°$

**3)** AD = ס"מ 13.064

**4)** GM = ס"מ 3.360

**5)** $138.190°$ , $41.810°$ , $113.556°$ , $66.444°$

**6)** AB = ס"מ 14.56 , $R=$ ס"מ 9.242

**7)** $P=$ ס"מ 22

**8)** AC = ס"מ 10.790 , $R=$ ס"מ 5.395

**9)** DG = 18

**10)** $R=$ ס"מ 10.5 ב. $24.32°$

**11)** א. $CD=R\sqrt{3}$ , $DE=1.48R$ ב. $r=1.15R$

**13)** א. $68°$ ב. ס"מ 11.66 ג. $R=$ ס"מ 6.29

**14)** א. $AC=\sqrt{32.36t^2-448t+1600}$ ב.i. ס"מ 13 ב.ii. 78 סמ"ר

**15)** א. 9.4 ס"מ ב.i. 10 ס"מ

**16)** ב. $\sphericalangle C=28.9°$ ג. $R=13.77$

**17)** א. $64.04°$ ב. $\frac{S_{ABE}}{S_{ECD}}=0.817$

**18)** א. $\sin\alpha=\frac{1.5m}{\sqrt{100+2.25m^2}}$ ב. $m=16$ ג. $56.94°$

**19)** א. 4 ב.i. $1.5\sqrt{28}+3-t$ ב.ii. 3 ג. $S=18.18$

**20)** א. 4.94 ס"מ ב. 17.19 ס"מ

**21)** BC = ס"מ 10

**22)** $DE=\sqrt{\frac{1}{9}b^2-a^2}$

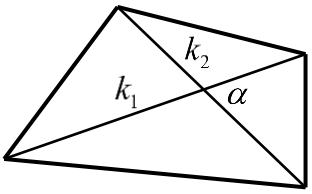
**23)** $BC=\frac{2R\sin\beta\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}$

**24)** $MC=\sqrt{p^2+q^2-\frac{pqk}{R}}$

# שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש:

## סיכום כללי:

### שטחים של משולשים ומרובעים:

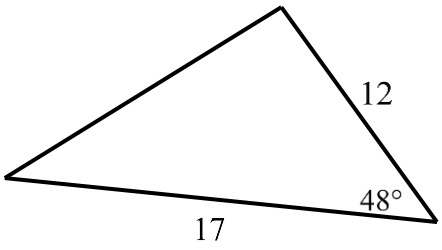



- שטח משולש ניתן לחישוב ע"י: $S=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$.
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסוניו: $S=\frac{k_1k_2\sin\alpha}{2}$.

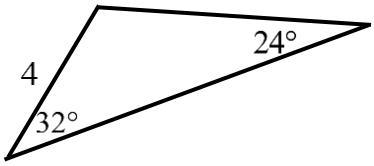
## שאלות:

**25)** חשב את שטחי המשולשים הבאים:

א.




ב.

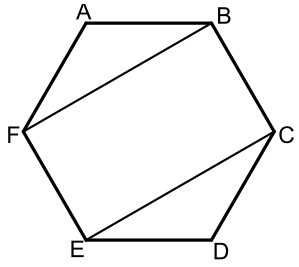



**26)** חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של $15°$ עם הבסיסים.

**27)** אורכו של מלבן הוא $m$ ורוחבו $n$. הזווית שבין אלכסוני המלבן היא $\theta$.
הוכח כי מתקיים: $\sin\theta=\frac{2mn}{m^2+n^2}$.

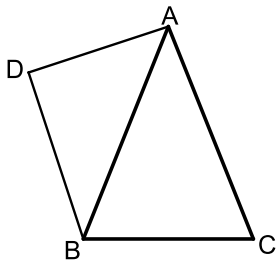
**28)** במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$), BD חוצה את הזווית $\sphericalangle B$.
נתון: $AB=m$ , $\sphericalangle A=\alpha$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו-$m$ את שטח המשולש BCD.

**29)** באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא $S$.



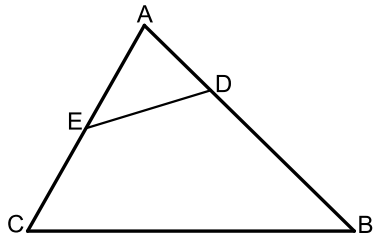

א. הבע באמצעות $S$ את אורך צלע המשושה.
ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן BFEC.
הבע באמצעות $S$ את שטח המלבן.

**30)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש $\alpha$, $(AB = AC)$.
אורך הבסיס BC הוא $k$.
על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו $\sphericalangle D = 90°$.



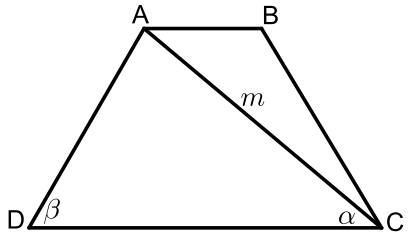

א. הבע באמצעות $k$ ו- $\alpha$ את אורך שוק המשולש ABC.
ב. הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$
וכי: $\sphericalangle ABD = 40°$. מצא את זוויות המשולש ABC.
ג. חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי $k = 6$.

**31)** במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.
הנקודה E היא אמצע הצלע AC
והנקודה D מקיימת: 3 ס"מ = AD.
ידוע כי: $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$.



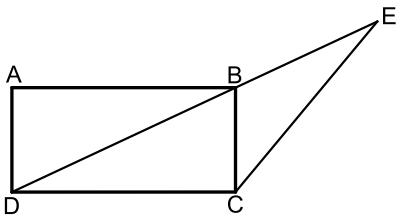

א. מצא את אורך הקטע DE.
ב. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
ג. חשב את שטח המרובע BCED.

**32)** המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \| CD)$. הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.
מסמנים: $\sphericalangle ADC = \beta$, $\sphericalangle ACD = \alpha$, $AC = m$.



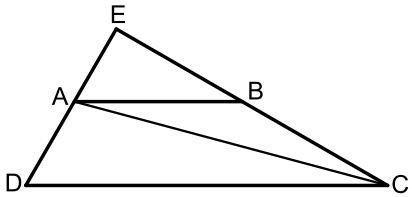

א. הבע באמצעות $\alpha$, $\beta$ ו- $m$ את אורך הבסיס הגדול DC.
ב. נתון כי האלכסון AC מקיים: $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = 3$.
הבע באמצעות $\alpha$, $\beta$ ו- $m$ את הבסיס AB.
ג. חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי: $\beta = 60°$, $\alpha = 40°$ ו- $m = 8$.

**33)** המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.
מחברים את הנקודה E עם הקודקוד C.
ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא $115°$.



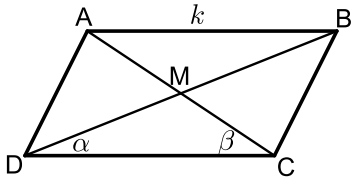

א. מצא את אורך הקטע CE.
ב. מצא את אורך האלכסון BD.
ג. חשב את שטח המשולש DCE.

**34)** המרובע ABCD הוא טרפז $(AB\|CD)$.
ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם בנקודה E. ידוע כי: $DE\perp CE$.
מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C.
מסמנים את הבסיס הגדול DC ב-$k$ ואת: $\sphericalangle ACD=\alpha$.




א. הבע באמצעות $k$ ו-$\alpha$ את הבסיס הקטן AB.
ב. הבע באמצעות $k$ ו-$\alpha$ את שטח המשולש ABC.
ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר: $\alpha=15°$ , $k=12$ ס"מ.

**35)** נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים בנקודה M כמתואר באיור.
מסמנים: $\sphericalangle ACD=\beta$ , $\sphericalangle BDC=\alpha$ , $AB=k$.

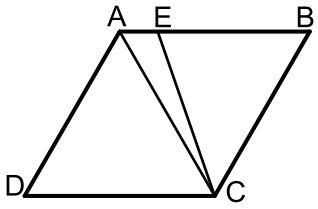



א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים: $\frac{AC}{BD}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

ב. ענה על השאלות הבאות:
i. הבע באמצעות $\alpha$ , $\beta$ ו-$k$ את שטח המשולש DMC.
ii. הבע באמצעות $\alpha$ , $\beta$ ו-$k$ את שטח המקבילית ABCD.

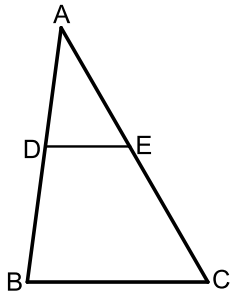
ג. נתון כי: $\frac{AC}{BD}=2$. הראה כי שטח המקבילית הוא: $\frac{4k^2\sin^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

**36)** המרובע ABCD הוא מעוין ובו $\sphericalangle D=60°$.
מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת אותה ביחס: $\frac{BE}{AE}=4$.



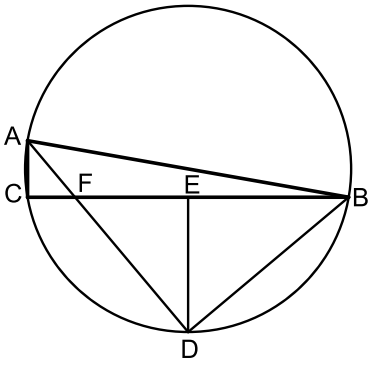

א. חשב את זווית AEC.
ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.

**37)** הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.
נתון כי: $CE=13$ , $BC=15$ , $BD=\sqrt{129}$.
ידוע כי זווית AED היא $60°$.




א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע
ב. כי הוא קטן מ-10 ס"מ.
ג. חשב את שטח המשולש ADE.

**38)** המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.




הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים גובה DE לצלע BC.

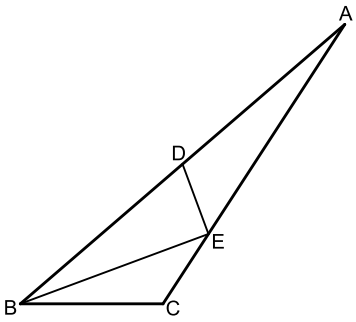
מסמנים: $DE=k$ ונתון כי: $\sphericalangle ABC=10°$.

א. הבע באמצעות $k$ את רדיוס המעגל.

ב. הבע באמצעות $k$ את שטח המשולש ABF.

ג. מצא את $k$ אם ידוע כי שטח המשולש ABF הוא 15.363 סמ"ר.

**39)** במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.



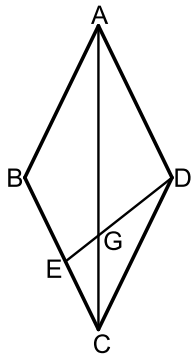

הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת: $DE = CE$.

ידוע כי: $BD = 9\ ,\ BE = 8\ ,\ BC = 6$.

א. מצא את זווית B.

ב. חשב את שטח המשולש ADE.

**40)** נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.



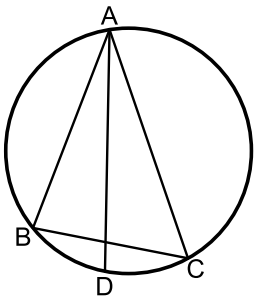

א. חשב את זוויות המעוין.

ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא $m$.
הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.
הזווית EDC תסומן ב-$\alpha$.

i. הבע באמצעות $m$ ו-$\alpha$ את אורך הקטע CE.

ii. הבע באמצעות $m$ ו-$\alpha$ את שטח המשולש EGC.

**41)** המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.




מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.

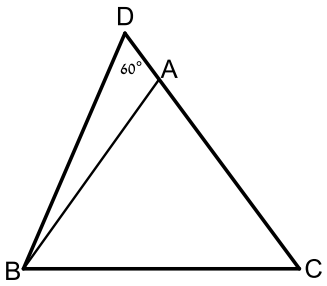
ידוע כי: $\sphericalangle ACB=60°\ ,\ \sphericalangle BAC=40°$.

מסמנים: $AD=k$.

א. הבע באמצעות $k$ את אורך המיתר BD.

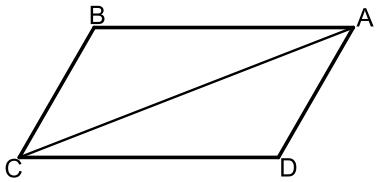
ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.
מצא את $k$ (עגל למספר שלם).

**42)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$.
ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך
שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD.
ידוע כי: $\sphericalangle D = 60°$.
אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ.



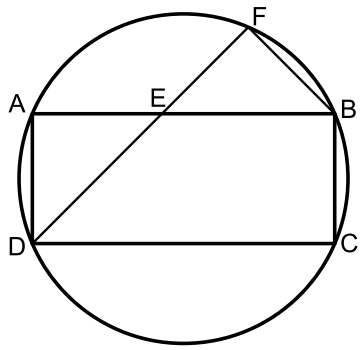

א. מצא את אורך הקטע AD.
ב. חשב את שטח המשולש ABC.

**43)** במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא $\sqrt{79}$ ס"מ.
היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי: $\sphericalangle B = 120°$.



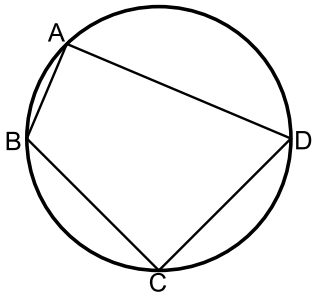

א. מצא את אורכי צלעות המקבילית.
ב. חשב את שטח המקבילית.
ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.

**44)** המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל.
מהקודקוד D מעבירים את המיתר DF
החותך את הצלע AB בנקודה E.
ידוע כי: $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CF}$.
הצלע AD של המלבן תסומן ב-$a$.



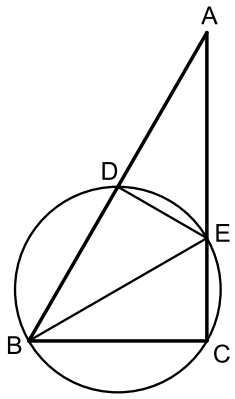

א. הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים.
ב. נתון גם כי: $BC = BF$.
i. הבע באמצעות $a$ את רדיוס המעגל.
ii. חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות: $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AB}$
(אין צורך לסרטט אותן).

**45)** המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור.
ידוע כי: $AD = 3b$, $CD = a$, $BC = a$, $AB = b$.




א. הבע באמצעות $a$ ו-$b$ את $\cos\sphericalangle BCD$.
ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים: $a = b\sqrt{5}$.
ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ.
הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.

**46)** המשולש ABC הוא ישר זווית $\sphericalangle C=90°$ ובו: $\sphericalangle B=2\alpha$.
מעבירים מעגל שרדיוסו $R$ דרך הקודקודים B ו-C
אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E.
המיתר BE חוצה את זווית B.



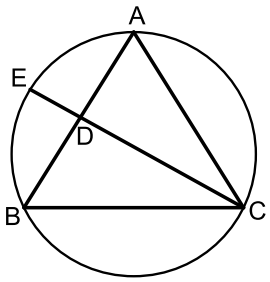

א. הבע באמצעות $R$ ו- $\alpha$ את שטח המשולש ABE.

ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים
וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המשולש ABE.

**47)** במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) שאורך השוק בו הוא $k$ וזווית הבסיס שלו היא $\beta$, BE חוצה את זווית $\sphericalangle B$ ו- CD הוא הגובה לשוק AB.

הוכח כי שטח המשולש ADE הוא: $S_{ADE}=-\dfrac{k^2\sin\frac{\beta}{2}\sin 4\beta}{4\sin\frac{3\beta}{2}}$.

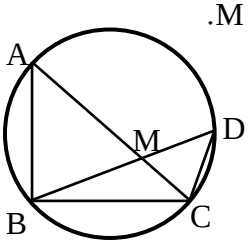
**48)** נתון משולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) החסום במעגל.
מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D.
ידוע כי E היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$ והיחס בין
הקטעים BD ו-CD הוא 7:4.
מסמנים: $\sphericalangle ACD=\alpha$.




א. מצא את זוויות המשולש ABC
(עגל למספרים שלמים).

ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי
רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.

**49)** AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו $R$, שנפגשים בנקודה M.
זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון: $\sphericalangle MBC=\alpha$, $\sphericalangle MCB=\beta$.




א. הבע באמצעות $R$, $\alpha$ ו- $\beta$ את שטח המשולש BDC.

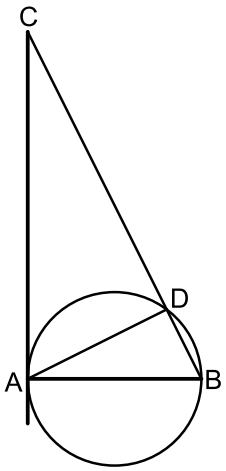
ב. נתון: $\beta=2\alpha$, $S_{BDC}=\dfrac{1}{2}R^2$.

חשב את $\alpha$.

**50)** בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא $b$ והזווית שליד הבסיס הגדול היא $\gamma$ נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות $\gamma$ ו- $b$ את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את $\gamma$ אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי $\sqrt{3}$ מהבסיס הקטן.



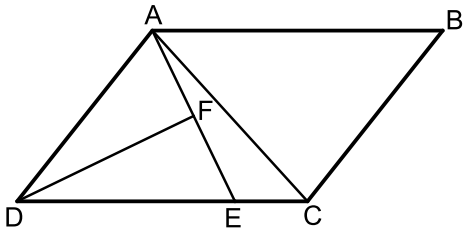

**51)** המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו $R$ ו-AD הוא מיתר.
ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.
המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C.
מסמנים: $\sphericalangle BAD = \alpha$.

א. הבע באמצעות $\alpha$ ו- $R$ את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות $\alpha$ ו- $R$ את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את $\alpha$ אם ידוע כי שטח המשולש ABD קטן פי 4 משטח המשולש ACD.

**52)** המרובע ABCD הוא מקבילית.
הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים
המקיימים: $3CE = DE$.
מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.
ידוע כי: $\sphericalangle ADF = \sphericalangle CDF = \alpha$.
מסמנים: $CE = k$.




א. הבע באמצעות $k$ ו- $\alpha$ את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.
הבע באמצעות $k$ ו- $\alpha$ את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצא את $\alpha$.

## תשובות סופיות:

**25)** א. $S=$ 75.801 סמ"ר ב. $S=$ 8.641 סמ"ר

**26)** $S=$ 16 סמ"ר

**27)** $S_{\Delta BCD}=\dfrac{m^2\tan^2\alpha\sin 45^\circ\cos\alpha}{2\sin(\alpha+45^\circ)}$

**28)** א. $\sqrt{\dfrac{2S}{\sqrt{27}}}\approx 0.62S$ ב. $\dfrac{2}{3}S$

**29)** א. $\dfrac{k}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$ ב. $44.4^\circ$ , $67.78^\circ$ , $67.78^\circ$ ג. $S=37.18$

**30)** א. $DE=\sqrt{1.6}=1.26$ ב. $R=2$ ג. $S=21.48$

**31)** א. $DC=\dfrac{m\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ ב. $AB=\dfrac{m\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\beta}$ ג. $S_{ABCD}=31.2$

**32)** א. 12.75 ס"מ ב. 14.19 ס"מ ג. 63.05 ס"מ

**33)** א. $\dfrac{k\tan\alpha}{\tan 2\alpha}$ ב. $\dfrac{k^2\tan\alpha\sin 2\alpha}{2\tan^2 2\alpha}$ ג. $S=$ 7.754 ס"מ

**34)** ב.i. $\dfrac{k^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ ב.ii. $\dfrac{2k^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

**35)** א. $109.1^\circ$ ב. $S=86.6$

**36)** א. 7 ס"מ ב. 34.48 סמ"ר

**37)** א. $R=\dfrac{k}{2\sin^2 40}=1.21k$ ב. $S=\dfrac{k^2\sin 10}{2\sin 50\sin^3 40}$ ג. $k=6$

**38)** א. $40.72^\circ$ ב. $S=12.52$

**39)** א. $128.32^\circ$ ; $51.68^\circ$ ב. $1.27m\sin\alpha$ ג. $\dfrac{0.35m^2\sin^2\alpha\sin(128.32-\alpha)}{\sin(25.84+\alpha)}$

**40)** א. $BD=\dfrac{k\sin 20}{\sin 100}$ ב. $k=7$

**41)** א. 5 ס"מ ב. $S=172.77$

**42)** א. BC = 3 ס"מ ו-AB = 7 ס"מ ב. $S=$ 18.18 סמ"ר ג. $R=\sqrt{\dfrac{37}{3}}$

**43** ב. i. $R=a\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\approx 1.3a$ ב. ii. $45^\circ$ , $135^\circ$

**44** א. $\cos\sphericalangle BCD=\frac{a^2-5b^2}{a^2+3b^2}$ ג. $S=14.4$ סמ"ר.

**45** א. $S=R^2\tan 2\alpha$ ב. $S=36\sqrt{3}$ סמ"ר.

**48** א. $58^\circ$ , $58^\circ$ , $64^\circ$ ב. $BE=7.75$.

**49** א. $S=2R^2\sin\alpha\cos\beta\sin\left(90^\circ-\alpha+\beta\right)$ ב. $\alpha=22.5^\circ$.

**50** א. $\frac{b\sin\left(135^\circ-\gamma\right)}{\sin 45^\circ}$ , $\frac{b\sin\left(\gamma-45^\circ\right)}{\sin 45^\circ}$ ב. $\gamma=75^\circ$.

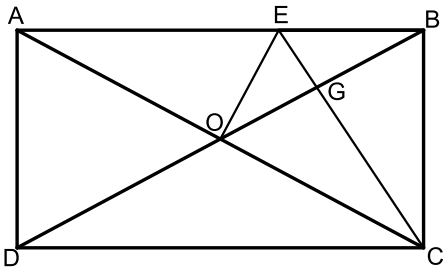
**51** א. $S=R^2\sin 2\alpha$ ב. $S=\frac{2R^2\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$ ג. $\alpha=26.56^\circ$.

**52** א. $AE=6k\sin\alpha$ ב. $P_{ACE}=k+6k\sin\alpha+k\sqrt{25-24\cos 2\alpha}$

ג. $\alpha=14.47^\circ$.

# שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה:

## שאלות:

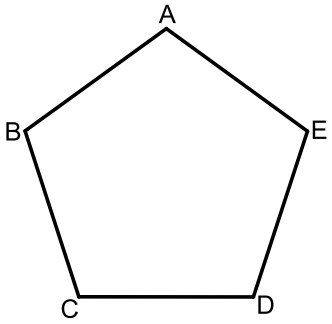



**53)** המרובע ABCD הוא מלבן.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD .
הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן
ומחלקת אותה כך ש- $2BE = AE$ .
ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC
ושווה ל-BE.
הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.

א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.

ב. הוכח כי מתקיים: $4GE = AE$ .

ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.
חשב את שטח המלבן ABCD.



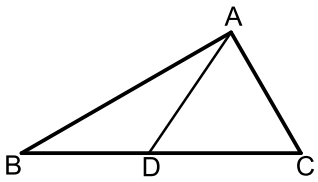

**54)** באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE
(כל זוויותיו הן $108°$) בעל אורך צלע $\alpha$ .

א. הבע באמצעות $\alpha$ את אלכסון המחומש AD.

ב. הבע באמצעות $\alpha$ את רדיוס המעגל
החוסם את המחומש.

ג. הבע באמצעות $\alpha$ את שטח המחומש.

ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.

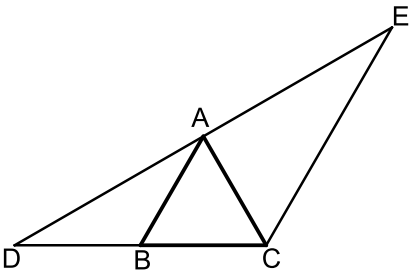



**55)** במשולש ABC הזווית C היא $60°$ .
מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים
המשולשים ACD ו-ABD.
ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את
המשולש ACD הוא: $R_1 = \sqrt{3}$ ס"מ .
כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא: $R_2 = 3$ ס"מ .

א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.

ב. היקף המשולש ABC הוא: $P = 12+4\sqrt{3}$ ס"מ .
חשב את שטח המשולש.

**56)** המשולש ABC הוא שווה צלעות.
הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים שני משולשים ABD ו-ACE .
ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.




א. הוכח: $AB \parallel CE$ .

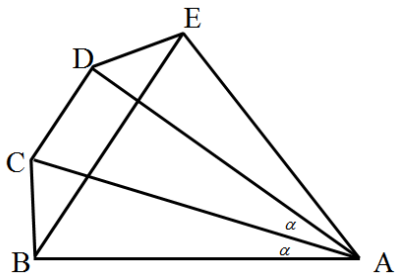
ב. הוכח: $BC \cdot DE = DC \cdot AE$ .

ג. נתון: $DC = 8$ ס"מ
וכי: $AC \perp DE$ .

i. חשב את שטח המשולש DCE .

ii. חשב את שטח המשולש ABD.

**57)** מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB , AC , AD ו-AE כך שמתקיים: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \alpha$ ו- $AB = AE$ .
מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE.
מתקיים: $BE \parallel CD$ .
ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה.




א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש ($AC = AD$).
הוכח כי: $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ .

ג. ידוע כי: $\sphericalangle ADC = 3\alpha + 2.5$ ו- $\sphericalangle ADE = 3\alpha - 10$ .
הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית.

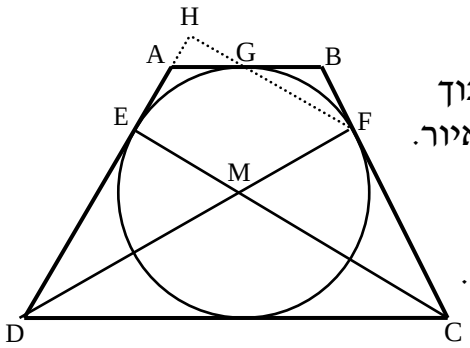
ד. נסמן: $AB = m$ .

i. הבע באמצעות $m$ את צלעות הטרפז BCDE.

ii. הבע באמצעות $m$ את שטח המחומש ABCDE.

iii. מצא את $m$ אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).

**58)** הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F ו-G כמתואר באיור.
הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז ונחתכים בנקודה M.

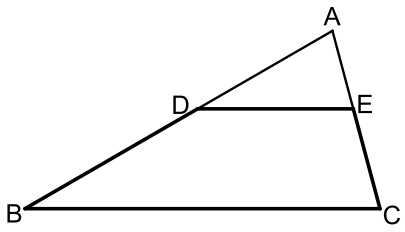



א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.

ב. חשב את זוויות הטרפז.

ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.
חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$ .

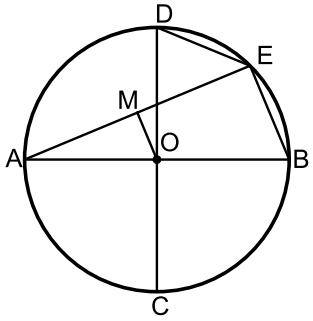
**59)** המרובע BDEC הוא טרפז $DE \parallel BC$.
המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A
כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = BC$).
נתון: $AB =$ 18 ס"מ, $\sphericalangle ADE = 30°$.




א. סמן את אורך הבסיס DE ב-$x$
ואת שטח הטרפז BDEC ב-$S$.
הבע את $S$ באמצעות $x$.

ב. על הקטע AD בונים ריבוע.
ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ"ר משטח הטרפז BDEC.
חשב את היחס: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$.

**60)** במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו-CD
המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף
המעגל המקיימת: $BE + DE =$ 15 ס"מ.
מעבירים את המיתר AE.
הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE.



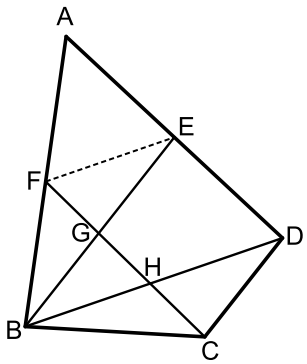

א. הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.

ב. מצא את אורך המיתר BE.
נתון כי שטח הטרפז הוא 90 סמ"ר.

ג. מצא את רדיוס המעגל.

ד. חשב את זווית B.

**61)** BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD.
הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי
הצלעות AD ו-AB במרובע.
מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש-$BE \parallel CD$.
נתון כי הזוויות $\sphericalangle A$ ו-$\sphericalangle BFE$ משלימות ל-$180°$.




א. הוכח: $\Delta BCD \sim \Delta BFE$.

ב. נתון כי: $BE = 7.5$ וכי: $GE - HD = 17\frac{1}{15}$.
חשב את אורך הקטע FE.

ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED
הוא: $R =$ 4.001 ס"מ. מצא את זווית $\sphericalangle EBD$.

## תשובות סופיות:

**53)** ג. 120 סמ"ר

**54)** א. $1.618\alpha$ ב. $0.85\alpha$ ג. $1.72\alpha^2$ ד. $S=85.57$

**55)** ב. $S=8\sqrt{3}$

**56)** ג.i. $S_{CDE}=16\sqrt{3}$ ג.ii. $S_{ABD}=4\sqrt{3}$

**57)** ד.i. $BE=1.2175m$ , $CD=0.4776m$ , $DE=0.4663m$ , $BC=0.4663m$

**62)** ד.ii. $0.7232m^2$ ד.iii. $m=8$ ס"מ

**58)** ב. $120°$ , $60°$ ג. $\frac{2}{3}$

**59)** א. $S=81-0.25x^2$ ב. $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{16}{81}$

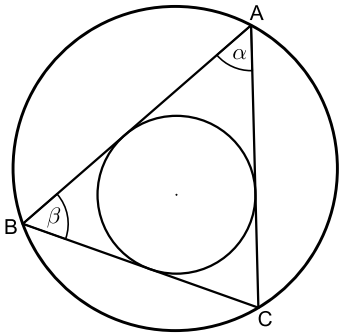
**60)** ב. BE = 10 ג. R = 13 ד. $\sphericalangle B=67.38°$

**61)** ב. FE = 4 ג. $16.73°$

# שאלות מסכמות:

## שאלות:

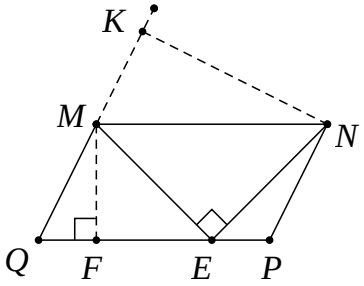
**1)** המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו $R$.
נתון כי $\sphericalangle B=\beta$ , $\sphericalangle A=\alpha$.



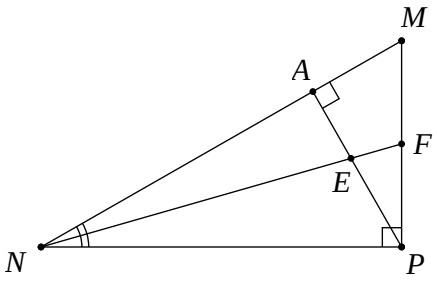

א. הבע את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת $R$ , $\beta$ , $\alpha$.

ב. נתון כי: $\alpha=\beta=60°$.
חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת $R$.

**2)** במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על הצלע PQ כך ש-$\sphericalangle MEN=90°$ (ראה ציור).
נתון: 12 ס"מ = MQ , $\sphericalangle MQP=70°$ , $\sphericalangle MNE=40°$.
מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



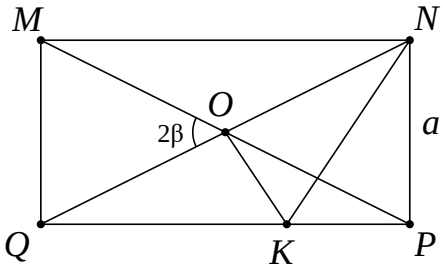

**3)** במשולש ישר-זווית MNP, $(\sphericalangle P=90°)$
PA הוא גובה ליתר ו-NF חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.
PA ו-NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור).
נתון: 24 ס"מ = NP , $\sphericalangle MNP=40°$.




א. מצא את אורך הקטע NA.

ב. מצא את אורך הקטע EF.

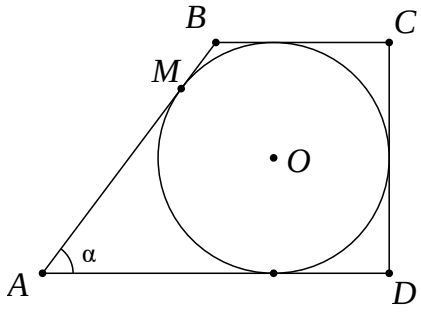
**4)** אלכסוני המלבן MNPQ נחתכים בנקודה O.
מנקודה O מעלים אנך ל-QN החותך את QP בנקודה K (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle MOQ=2\beta$ , $NP=a$.




א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות $\beta$ ו-$a$.

ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות $\beta$ ו-$a$.

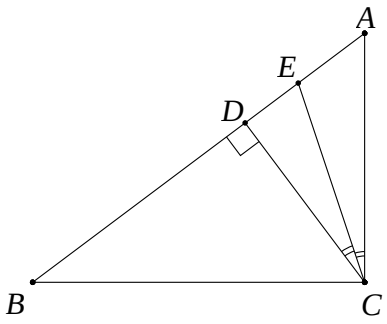
**5)** בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.
הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.
נתון: $AM = 12$ ס"מ , $\sphericalangle BAD = \alpha$ .




א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת $\alpha$ .

ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת $\alpha$ .

**6)** במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון:
$BC = 8$ ס"מ , $\sphericalangle ACB = 90°$ , $\sphericalangle ABC = \beta$ .
CD הוא הגובה ליתר.
CE הוא חוצה-הזווית $\sphericalangle ACD$ .
הבע את אורך הקטע AE באמצעות $\beta$ .



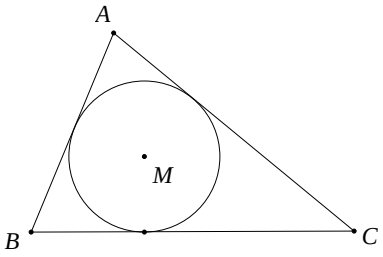

**7)** נתון מעגל שרדיוסו $R$ . מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה.
מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חסום בתוך מעגל זה.
חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

**8)** $\Delta ABC$ הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC) שאורך בסיסו 12 ס"מ.
AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB.
שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון: $\sphericalangle ABC = \alpha$ $(\alpha > 45°)$.

א. הבע את היחס $AO : DO$ באמצעות $\alpha$ .

ב. הראה כי בעבור $\alpha = 60°$ הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.

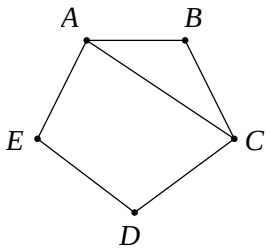
**9)** במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M ורדיוסו $r$ (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle C = 46°$ , $\sphericalangle B = 62°$ .




א. הבע באמצעות $r$ את אורך הצלע BC .

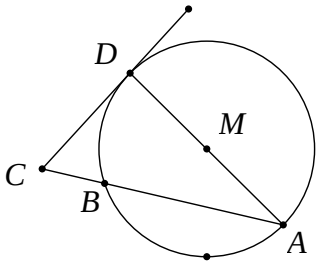
ב. נתון: BC = 16 ס"מ. מצא את $r$ .

**10)** במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)
אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.



**11)** מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו $R$ מעבירים משיק CD וחותך CBA למעגל (ראה ציור).

נתון: $CD=\frac{3}{5}R$.

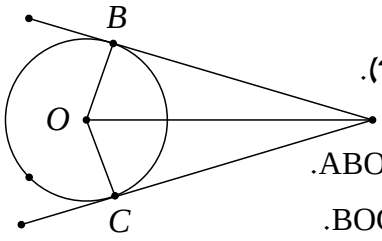



א. מצא את זוויות המשולש CAD.

ב. הבע באמצעות $R$ את שטח המשולש BCD.

**12)** מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC=2\alpha$ , $AO=$ 10 ס"מ.




א. הבע באמצעות $\alpha$ את $S_1$, שטח המרובע ABOC.

ב. הבע באמצעות $\alpha$ את $S_2$, שטח המשולש BOC.

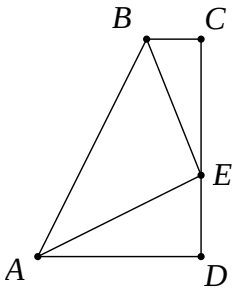
ג. הראה שאם $\alpha=30°$, אזי: $S_1=4\cdot S_2$.

**13)** ABCD הוא טרפז ישר-זווית $(\sphericalangle C=\sphericalangle D=90°)$.

נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle AEB=90°$ , $AE=BE=k$ ו- $\sphericalangle CBE=\beta$.

הבע באמצעות $k$ ו- $\beta$ את שטח הטרפז.

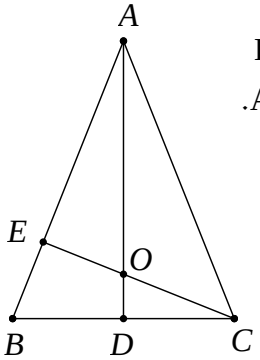



**14)** ענה על השאלות הבאות:

א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל. מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.

ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'. מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.

**15)** ABC הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC) שבו זווית הראש היא זווית חדה. נתון כי זווית הבסיס היא $\beta$ ואורך הבסיס BC הוא $2\alpha$. AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).

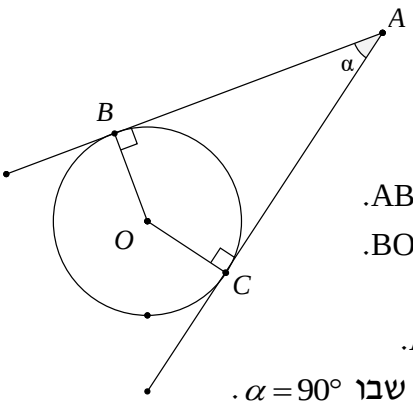



א. הבע באמצעות $\alpha$ ו- $\beta$ את אורכי הקטעים CO ו-CE.

ב. הבע באמצעות $\beta$ את היחס $\frac{CO}{CE}$.

ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר $\beta=60°$, והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.

**16)** מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם $m$ (כלומר: $AB=AC=m$).
נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא $\sphericalangle BAC=\alpha$ (ראה ציור).



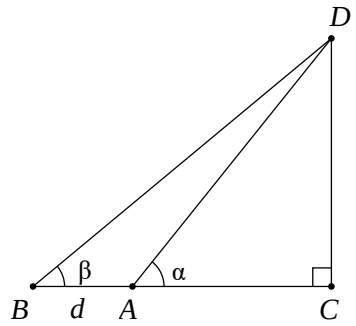

א. הבע באמצעות $m$ ו-$\alpha$ את שטח המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות $m$ ו-$\alpha$ את שטח המשולש BOC.

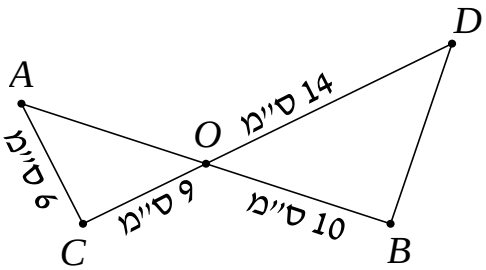
ג. הבע באמצעות $\alpha$ את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.

ד. בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו $\alpha=90°$.

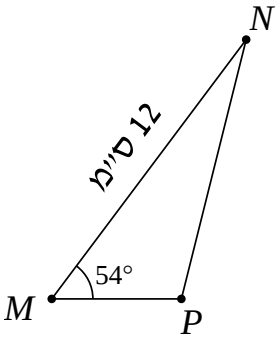
**17)** במשולש ישר-זווית DAC נתון $\sphericalangle DAC=\alpha$.
מאריכים את הניצב AC כך ש-$AB=d$.
נתון כי: $\sphericalangle DBA=\beta$ (ראה ציור).
סמן: $AC=x$.
הבע את $x$ באמצעות $d$, $\alpha$ ו-$\beta$.




**18)** הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O.
נתון כי: $\sphericalangle OAC=60°$,
9 ס"מ = CO, 6 ס"מ = AC,
14 ס"מ = OD, 10 ס"מ = OB.
חשב את $\sphericalangle ODB$.



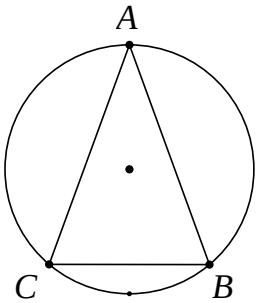

**19)** במשולש MNP גודל הזווית M הוא $54°$.
נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ
(ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP.




א. חשב את אורך הצלע NP.

ב. PA הוא תיכון לצלע MN.
חשב את שטח המשולש PAN.

**20)** המשולש השווה-שוקיים ABC (AB = AC) חסום במעגל (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle ABC=\beta$.
כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.

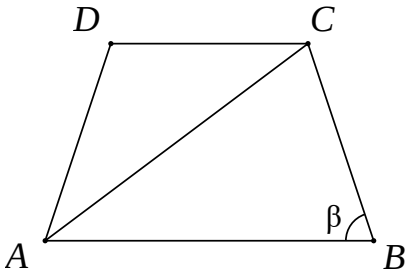



א. הבע בעזרת $\beta$ את שטח המשולש ABC.

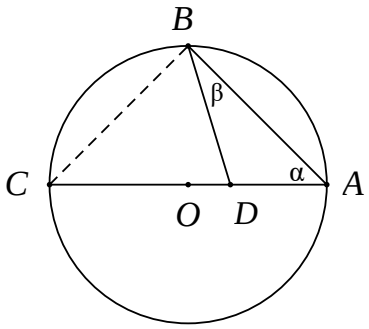
ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור $\beta=45°$.

**21)** במשולש ABC הזווית $\sphericalangle C$ היא בת $60°$, אורך הצלע AB הוא $\sqrt{13}$ ס"מ, והיקף המשולש הוא $7+\sqrt{13}$ ס"מ. חשב את שטח המשולש.

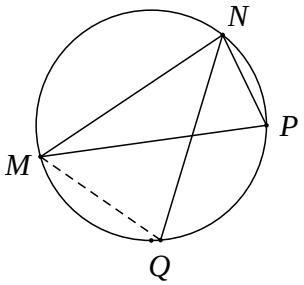
**22)** בטרפז שווה-שוקיים ABCD $(AD = BC)$ אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון.
זווית הבסיס היא $\beta$ $(\beta > 60°)$, (ראה ציור).
הבע באמצעות $\beta$ את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



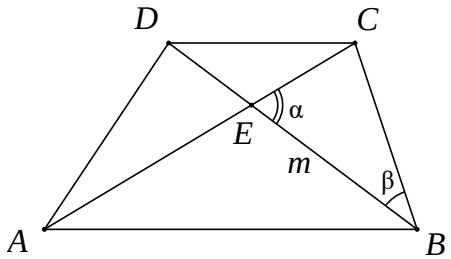

**23)** הקודקודים A ו- B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O.
הקודקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA.
א. הבע בעזרת $\alpha$ ו- $\beta$ את שטח המשולש ABD.
ב. הבע בעזרת $\alpha$ ו- $\beta$ את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.



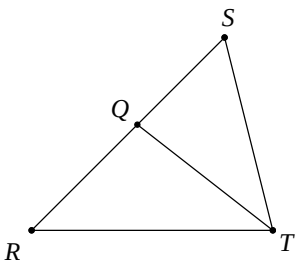

**24)** משולש MNP חסום במעגל.
המיתר NQ חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.
נתון: $\sphericalangle MNP = 80°$, $\sphericalangle MPN = 70°$,
NP = 12 ס"מ.
חשב את אורך המיתר MQ.




**25)** נתון טרפז ABCD $(AB \| CD)$.
הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז.
נתון: $DC = BC$, $BE = m$,
$\sphericalangle CEB = \alpha$, $\sphericalangle CBD = \beta$ (ראה ציור).
הבע את אורכי בסיס הטרפז:
AB ו- CD באמצעות $m$, $\alpha$ ו- $\beta$.



**26)** במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית $\sphericalangle RTS$
(ראה ציור), $QS=m$ , $RQ=\sqrt{2}$ ,
$\sphericalangle RST=\alpha$ , $\sphericalangle TRQ=45°$ .




א. הבע את $\sin\alpha$ באמצעות $m$ .

ב. נתון כי: $m=\frac{2}{\sqrt{3}}$ .

חשב את זוויות המשולש RST.

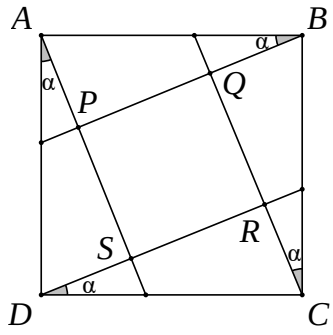
**27)** במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

**28)** נתון משולש שצלעותיו $kt$ , $2t$ , $t$ .

א. לאיזה ערכים של הקבוע $k$ המשולש הוא קהה זווית?

ב. נתון $k=\sqrt{7}$ . הבע ע"י $t$ את אורך חוצה הזווית הקהה.

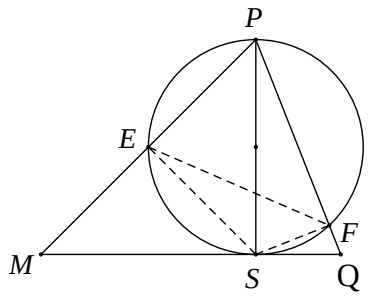
**29)** בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה קטעים היוצרים את אותה זווית $\alpha$ עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע פנימי PQRS.




א. הוכח כי: $\frac{PQ}{AB}=\cos\alpha-\sin\alpha$ .

ב. לאיזו זווית $\alpha$ מתקיים: $PR=AB$ ?

**30)** PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).
נתון $\sphericalangle SPQ=\beta$ , $\sphericalangle MPS=\alpha$ , $PS=h$ .




א. הבע את שטח המשולש PMQ באמצעות $h$ , $\alpha$ ו- $\beta$ .

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את הצלעות PM ו-PQ בנקודות E ו-F בהתאמה (ראה ציור).

i. הבע באמצעות $\alpha$ ו- $\beta$ את $\sphericalangle ESF$ .

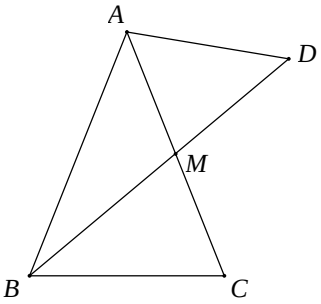
ii. הבע באמצעות $\alpha$ ו- $\beta$ את היחס בין שטח המשולש ESF לשטח המשולש PMQ.

**31)** במשולש ABC הצלעות הן $a$, $b$ ו-$c$ והזוויות שמונחות מולן הן: $\alpha$, $\beta$ ו-$\gamma$ בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון $m_a$ (התיכון לצלע $a$) באמצעות הצלעות $b$ ו-$c$ והזווית $\alpha$.

ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.

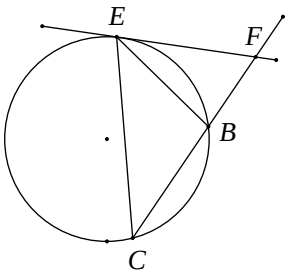
**32)** במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC),
BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).
נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש
ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש-$\sphericalangle BAC = 50°$.




א. מצא את גודל הזווית $\sphericalangle BMC$.

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D,
כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.
מצא את שטח המשולש AMD.

**33)** משולש שווה שוקיים BCE (BC = BE) חסום במעגל שרדיוסו $R$.
זווית הבסיס של המשולש BCE היא $\alpha$.
בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את
המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

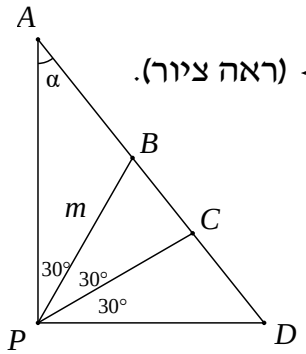



א. בטא את שטח המשולש BEF באמצעות $R$ ו-$\alpha$.

ב. מצא את הערך של $\alpha$ שבעבורו שטח
המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.

**34)** בטרפז BCDE $(BC \| ED)$ אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ.
הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא $80°$.
אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית $\sphericalangle CBE$.
חשב את היקף הטרפז.

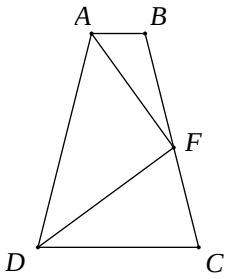
**35)** במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית הישרה $\sphericalangle P$
לשלוש זוויות שוות, כלומר $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPD = 30°$ (ראה ציור).
נתון כי: $PB = m$, $\sphericalangle PAD = \alpha$.




א. היעזר במשפט הסינוסים,
והבע את AB , AC , BD ו- CD באמצעות $m$ ו-$\alpha$.

ב. הוכח כי: $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$.

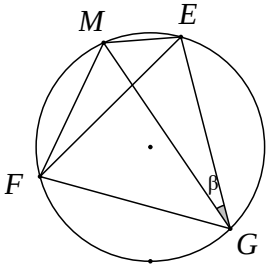
**36)** בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ $(AD=BC\ ,\ AB\|DC)$,
F היא נקודה על השוק BC, כך ש-DF חוצה את
הזווית $\sphericalangle CDA$ ו-AF חוצה את הזווית $\sphericalangle DAB$ (ראה ציור).
נתון: $AB=\beta$ , $\sphericalangle FAB=\beta$.
הבע באמצעות $b$ ו- $\beta$ את אורך הבסיס DC.




**37)** משולש שווה צלעות EFG חסום במעגל שרדיוסו $R$.
M היא נקודה על המעגל. נתון: $\sphericalangle MGE=\beta$ (ראה ציור).

א. הוכח כי: $ME+MF=MG$.

ב. אם $ME=R$ מה תוכל לומר על MG?

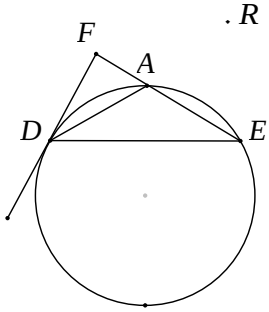



**38)** משולש שווה שוקיים ADE $(AD=AE)$ חסום במעגל שרדיוסו $R$.
ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך
הצלע AE בנקודה F (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle AE=\alpha$ $(60°<\alpha<180°)$.

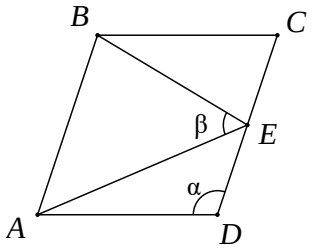
א. הבע את שטח המשולש ADF באמצעות $R$ ו- $\alpha$.

ב. הבע באמצעות $\alpha$ את היחס שבין שטח
המשולש ADE ובין שטח המשולש ADF.

ג. חשב את $\alpha$ אם שטח המשולש ADE שווה לשטח המשולש ADF.




**39)** במעוין ABCD הנקודה E היא אמצע הצלע CD.
נתון: $\sphericalangle ADC=\alpha$ , $\sphericalangle AEB=\beta$ (ראה ציור).
הוכח כי: $\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{25-16\cos^2\alpha}}$.

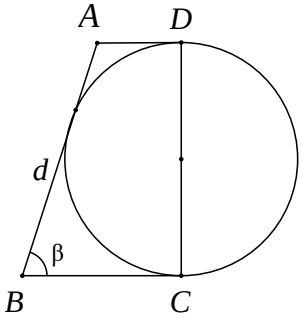


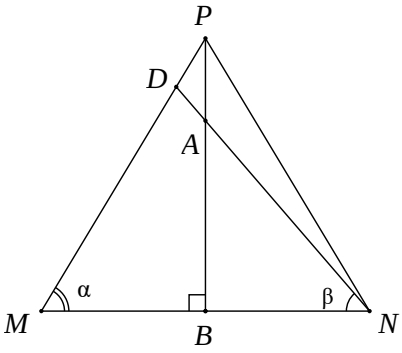

**40)** נתון טרפז ABCD ונתון מעגל. השוק DC הוא קוטר המעגל.
השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו- BC
משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו- C בהתאמה (ראה ציור).
נתון כי: $\sphericalangle B=\beta$ , $AB=d$.

א. הבע באמצעות $d$ את סכום בסיסיו של הטרפז.

ב. הבע באמצעות $d$ ו- $\beta$ את היקף הטרפז ואת השטח
של הטרפז.

ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר.
חשב את הזווית החדה $\beta$.

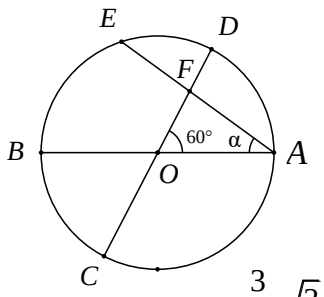





**41)** במשולש שווה שוקיים PMN (PM = PN),
A היא נקודה על הגובה PB, כך ש- $PA=\frac{1}{5}\cdot PB$.
הישר NA חותך את השוק PM בנקודה D (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle DNM=\alpha$ , $\sphericalangle DNB=\beta$ ו- $BN=\alpha$.

א. חשב את היחס $\tan\alpha:\tan\beta$.

ב. חשב את היחס PM:DM.




**42)** במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני קטרים AB ו- CD הנחתכים בזווית של 60°.
מיתר AE, היוצר זווית $\alpha$ עם הקוטר AB,
חותך את הקוטר CD בנקודה F (ראה ציור).

א. הבע את שטח המשולש ACF באמצעות $R$ ו- $\alpha$.

ב. הוכח שכאשר $\alpha=30°$, שטח המשולש ACF הוא $\frac{3}{8}\cdot\sqrt{3}\cdot R^2$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $r=\dfrac{2R\sin(\alpha+\beta)\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ב. $\frac{1}{2}R$

**2)** $MF=$ 11.28 ס"מ , $KN=$ 21.52 ס"מ

**3)** א. $NA=$ 18.385 ס"מ ב. $EF=$ 5.975 ס"מ

**4)** א. $OK=\dfrac{a}{2\cos\beta}$ ב. $\dfrac{a}{2\sin\beta}\cdot\left[1+\tan\beta+\dfrac{1}{\cos\beta}\right]$

**5)** א. $12\cdot\tan\dfrac{\alpha}{2}$ ב. $24\cdot\left(1+\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$

**6)** $AE=8\sin\beta\cdot\left[\tan\beta-\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)\right]=8\tan\beta\cdot\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)$

**7)** $2\cdot\dfrac{\tan20^\circ}{\sin40^\circ}=\dfrac{1}{\cos^2 20^\circ}\approx1.132$

**8)** א. $-2\cdot\dfrac{\tan\alpha}{\tan2\alpha}=-\dfrac{\cos2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha-1$

ב. מתקיים: $AO=2\cdot DO$ (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

**9)** א. $BC=r\cdot(\tan59^\circ+\tan67^\circ)\approx4.02\cdot r$ ב. $r=\dfrac{16}{\tan59^\circ+\tan67^\circ}\approx3.98$

**10)** $S=$ 147.86 סמ"ר

**11)** א. $\sphericalangle A=16.7^\circ$ , $\sphericalangle D=90^\circ$ , $\sphericalangle C=73.3^\circ$ ב. $S\approx0.0495\cdot R^2$

**12)** א. $S_1=100\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=50\cdot\sin2\alpha$

ב. $S_2=50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin(180^\circ-2\alpha)=50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin2\alpha$

**13)** א. $S=\frac{1}{2}k^2\cdot(1+2\sin\beta\cos\beta)$ (או כל תשובה שקולה). ב. 27 יח"ש.

**14)** א. $r\approx$ 5.548 ס"מ ב. $S\approx$ 90.45 סמ"ר

**15)** א. $CO=\dfrac{a}{\sin\beta}$ , $CE=2a\cdot\sin\beta$ ב. $\dfrac{CO}{CE}=\dfrac{1}{2\sin^2\beta}$

ג. היחס הוא: $\frac{2}{3}$ (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

**16** א. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha$ ב. $S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha\cdot\tan^2\frac{\alpha}{2}$

ג. יחס השטחים: $\tan^2\frac{\alpha}{2}$

ד. במקרה זה ABOC הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 $\left(\tan^2 45°=1\right)$.

**17** $AC=x=d\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

**18** $\sphericalangle ODB\approx 44.7°$

**19** א. $NP=$ 10.38 ס"מ ב. $S_{\Delta PAN}=$ 8.2 סמ"ר

**20** א. $S=800\cdot\sin^2\beta\cdot\sin 2\beta$ ב. 400 סמ"ר

**21** $S_{\Delta ABC}=3\cdot\sqrt{3}\approx$ 5.196 סמ"ר

**22** יחס השטחים הוא: $\left(-\frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}\right)=1-4\cos^2\beta$ או כל תשובה שקולה.

**23** א. $S_{\Delta ABD}=288\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ ב. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cdot\cos\alpha}$

**24** $MQ\approx$ 15.43 ס"מ

**25** $AB=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$ , $DC=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

**26** א. $\sin\alpha=\frac{1}{m}$ ב. $15°$ , $120°$ , $45°$ או $75°$ , $60°$ , $45°$

**27** $\alpha\approx 20.7$

**28** א. $\sqrt{5}<k<3$ או $1<k<\sqrt{3}$ ב. $\frac{2}{3}\cdot t\approx 0.667t$

**29** $\alpha=15°$

**30** א. $S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{2}\cdot h^2\cdot(\tan\alpha+\tan\beta)$ ב. i. $\sphericalangle ESF=180°-(\alpha+\beta)$

ii. $S_{\Delta EFS}:S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{4}\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

**31** א. $m_a=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2+c^2+2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}$ ב. $m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot b$

**32** א. $\sphericalangle BMC=79.5°$ ב. $S_{\Delta AMD}=$ 54.1 סמ"ר

**33** א. $S_{\Delta BEF}=\frac{2R^2\cdot\sin^3\alpha\cdot\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$ ב. $\alpha=45°$

**34** $P_{BCDE}=51.09$

**35** א. $AC=\frac{\sqrt{3}\cdot m\cdot\sin(30°+\alpha)}{2\cdot\sin(60°+\alpha)\cdot\sin\alpha}$ , $AB=\frac{m}{2\cdot\sin\alpha}$ , $BD=\frac{\sqrt{3}\cdot m}{2\cdot\cos\alpha}$

ב. הוכחה. $CD=\frac{m\cdot\sin(30°+\alpha)}{2\cdot\sin(60°+\alpha)\cdot\cos\alpha}$

**36** $DC=\frac{-b\cdot\tan\beta}{\tan 3\beta}$

**37** ב. MG הוא קוטר במעגל.

**38** א. $S_{\Delta ADF}=\frac{-2R^2\cdot\cos^3\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha}{\cos(1.5\alpha)}$ ב. $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ADF}}=-\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)}$

ג. $\alpha=90°$

**40** א. $AD+BC=d$ ב. $P=2d+d\sin\beta$ , $S=\frac{1}{2}d^2\cdot\sin\beta$

ג. $\beta=30°$

**41** א. $\tan\beta:\tan\alpha=\frac{4}{5}=0.8$ ב. $PM:DM=\frac{9}{8}=1.125$

**42** א. $S=\frac{3R^2\cdot\sin(30°+\alpha)}{4\cdot\sin(60°+\alpha)}$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 22 - גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר

### תוכן העניינים

1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית ..... 378
2. משוואת הישר ..... 382
3. מצבים הדדיים בין ישרים ..... 387
4. מציאת משוואות ישר ..... 389
5. שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר ..... 390
6. נושאים מתקדמים עם משוואת הישר ..... (ללא ספר)
7. חלוקת קטע ביחס נתון ..... 396
8. מרחק נקודה מישר ..... 397
9. מיקום נקודה ביחס לישר ..... 399
10. מרחק בין ישרים מקבילים ..... 401

# מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

## סיכום כללי:

### נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ יחושב לפי: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.
- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$.

## שאלות:

### שאלות העוסקות באמצע קטע:

**1)** מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

א. $A(1,4)$ , $B(5,-8)$

ב. $A(-3,0)$ , $B(3,-2)$

ג. $A(4,5)$ , $B(-4,-5)$

ד. $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ , $B\left(7\frac{1}{2},-2\right)$

ה. $A(6,-1)$ , $B(-3,-1)$

ו. $A(4,7)$ , $B(4,-12)$

**2)** נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

א. $A(4,-2)$ , $M(2,1)$

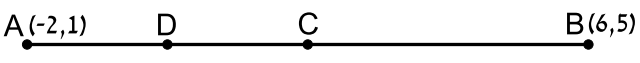
ב. $A(-6,-8)$ , $M(0,0)$

ג. $A(13,-11)$ , $M(4,-7)$

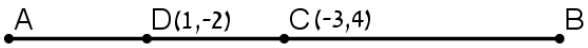
ד. $A\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$ , $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

**3)** נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם $C(6,1)$ , $B(2,-4)$.
מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.

**4)** באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $B(6,5)$ , $A(-2,1)$. מצא את שיעורי הנקודה D.



**5)** באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $D(1,-2)$ , $C(-3,4)$. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.




**6)** הנקודות $A(2,-7)$ , $B(-10,4)$ ו-$C(6,11)$ הן שלושה קדקודים של מקבילית ABCD.
מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי, D.

**שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:**

**7)** מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

א. $A(4,7)$ , $B(-3,7)$

ב. $A(6,2)$ , $B(1,2)$

ג. $A(-3,10)$ , $B(0,6)$

ד. $A(6,-9)$ , $B(1,3)$

ה. $A(4,7)$ , $B(13,-1)$

ו. $A(6,6)$ , $B(-9,-9)$

**8)** חשב את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם: $C(0,14)$ , $B(4,9)$ , $A(3,-2)$.

**9)** נתונות נקודות $B(6,y)$ , $A(14,4)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך.
מצא את $y$.

**10)** נתונות נקודות $B(15,-2)$ , $A(x,-12)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך.
מצא את $x$.

**11)** נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה-$y$ שלה גדול פי 3 משיעור ה-$x$ שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

**12)** במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$ יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם $(0,4)$ ושיעורי ה-$y$ של הקדקודים B ו-C הוא 2-. מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

**13)** אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC}=\sqrt{50}$
וידוע כי: $B(-4,1)$ , $A(-3,-2)$. מצא את היקף המלבן.

**שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:**

**14)** מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

א. $A(5,2)\ ,\ B(4,1)$

ב. $A(3,-2)\ ,\ B(-3,1)$

ג. $A(7,8)\ ,\ B(6,15)$

ד. $A(0,5)\ ,\ B(7,0)$

ה. $A(6,9)\ ,\ B(6,-7)$

ו. $A(4,-1)\ ,\ B(18,-1)$

**15)** מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו הם: $A(6,5)\ ,\ B(2,13)\ ,\ C(4,-7)$ מונחים עליהם.

## תשובות סופיות:

1) א. $(3,-2)$ ב. $(0,-1)$ ג. $(0,0)$
ד. $\left(4,-\frac{5}{8}\right)$ ה. $(1.5,-1)$ ו. $(4,-2.5)$.

2) א. $B(0,4)$ ב. $B(6,8)$ ג. $B(-5,-3)$ ד. $B\left(1,\frac{2}{3}\right)$.

3) $D(4,-1.5)$.

4) $D(0,2)$.

5) $B(-11,16)$ , $A(5,-8)$.

6) $D(18,0)$.

7) א. $d_{AB}=7$ ב. $d_{AB}=5$ ג. $d_{AB}=5$ ד. $d_{AB}=13$
ה. $d_{AB}=\sqrt{145}$ ו. $d_{AB}=15\sqrt{2}$.

8) 33.862 יחידות אורך $\approx P_{ABC}$.

9) $y=10$ או $y=-2$.

10) $x=-9$ או $x=39$.

11) $B(-1,-3)$.

12) $B(3,-2)$ , $C(-3,-2)$.

13) 18.97 יחידות אורך $\approx P_{ABCD}=6\sqrt{10}$.

14) א. $m_{AB}=1$ ב. $m_{AB}=-\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB}=-7$ ד. $m_{AB}=-\frac{5}{7}$
ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB}=0$.

15) $m_{AB}=-2$ , $m_{BC}=-10$ , $m_{AC}=6$.

# משוואת הישר:

## סיכום כללי:

### נוסחאות כלליות:

- שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

### שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1\cdot m_2=-1$.
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-$x$: $m=\tan\alpha$.

### משוואת הישר:

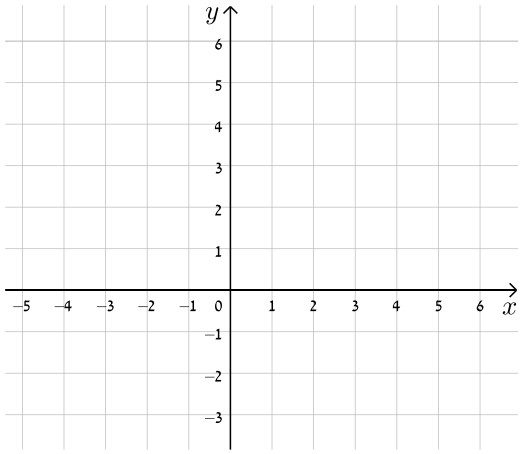
- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y=mx+n$.
- כאשר: $m$ הוא שיפוע הישר ו-$n$ הוא ערך ה-$y$ של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-$y$.

  נוסחה למציאת משוואת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

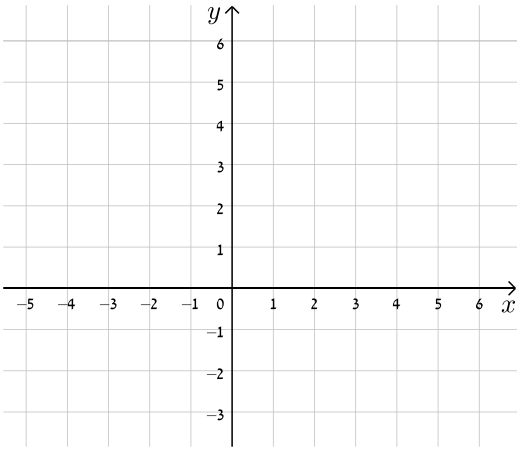
## שאלות:

**16)** עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

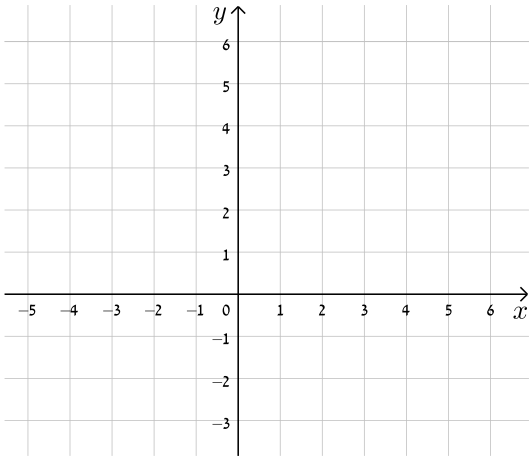
א. $y=x+4$



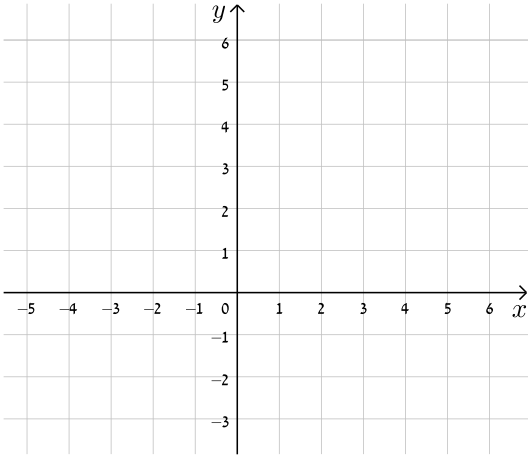

ב. $y=-x+5$



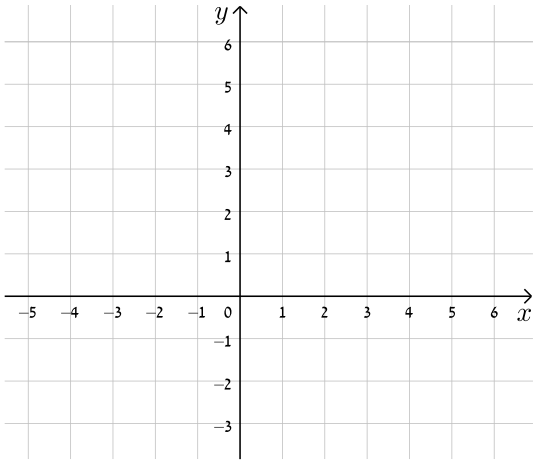
ג. $y=2x-3$



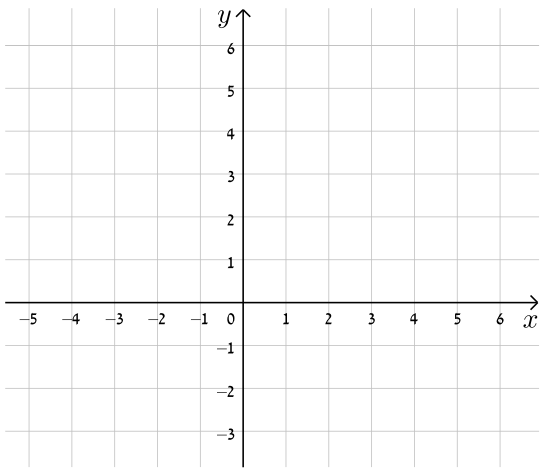
ד. $y=-3x+5$



ה. $y=3x-1$

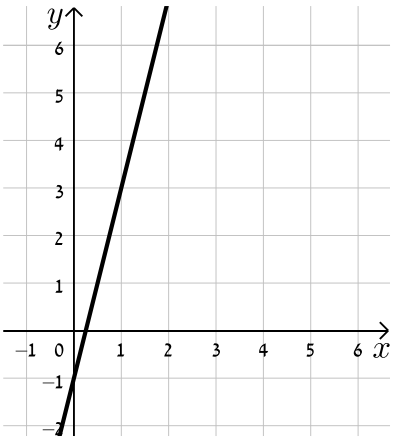


ו. $y=8-4x$

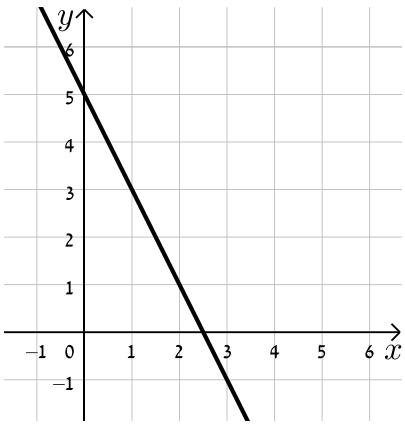


**17)** כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

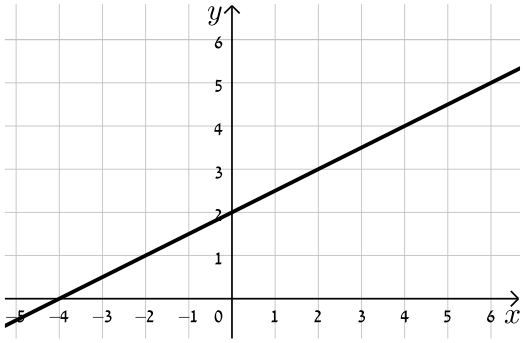
א.



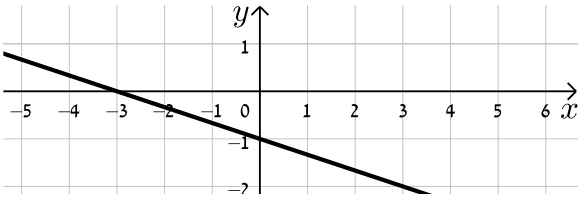
ב.



ג.




ד.




**18)** התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:

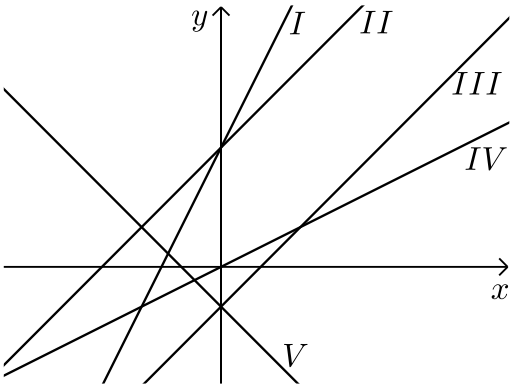
א. $y=x+3$

ב. $y=-x-1$

ג. $y=2x+3$

ד. $y=x-1$

ה. $y=\frac{1}{2}x$




**19)** נתונה משוואה הישר הבאה: $y=2x+3$. קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות עליו: $D(6,15)$ , $C(0,4)$ , $B(3,3)$ , $A(-1,1)$.

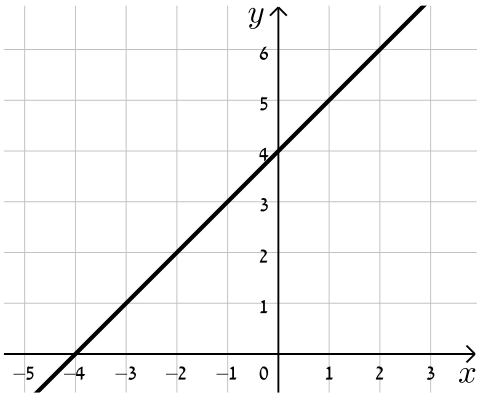
**20)** נתונה משוואת הישר הבאה: $y=mx-2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4,2)$ נמצאת על הישר. מצא את $m$ וקבע האם גם הנקודה $B(7,-2)$ נמצאת עליו.

**21)** הנקודות $B(4,1)$ , $A(5,-3)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא: $y=mx+n$.
מצא את $m$ ואת $n$.

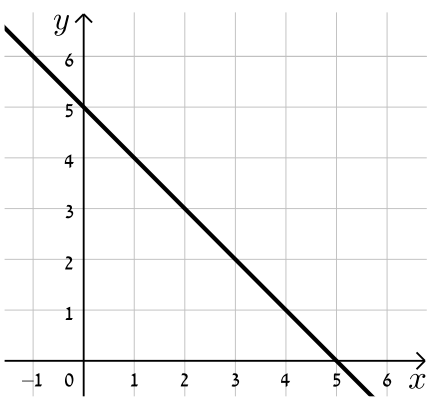
## תשובות סופיות:

**16)** להלן הגרפים של משוואות הישרים:

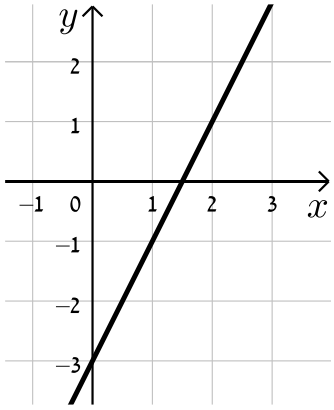
א.



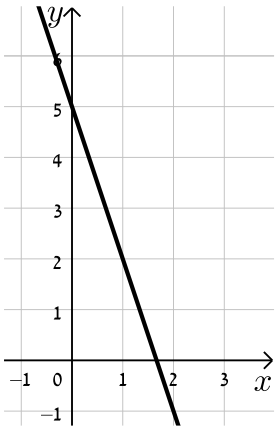

ב.



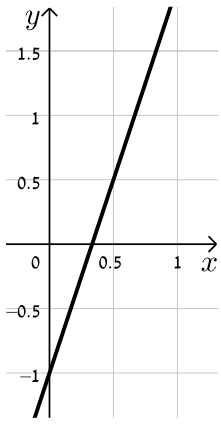

ג.



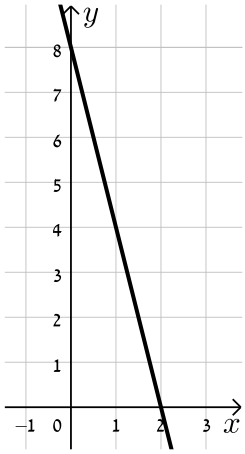

ד.




ה.




ו.



**17)** א. $y=4x-1$ ב. $y=-2x+5$ ג. $y=\frac{1}{2}x+2$ ד. $y=-\frac{1}{3}x-1$.

**18)** א.II. ב.V. ג.I. ד.III. ה.IV.

**19)** נמצאות: A, D. לא נמצאות: B, C.

**20)** $m=\frac{9}{8}$, B לא נמצאת.

**21)** $n=17$, $m=-4$.

# מצבים הדדיים בין ישרים:

## סיכום כללי:

**מצב הדדי בין שני ישרים:**

- ישרים מקבילים מקיימים: $m_1 = m_2$ , $n_1 \neq n_2$.
- ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.
- ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1 = m_2$ , $n_1 = n_2$.

## שאלות:

**22)** מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$

**23)** קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}$

**24)** קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

א. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}$

**25)** משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y=6x-2$.

א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?

ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

**26)** במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $C(-5,5)$ , $B(3,7)$ , $A(5,-1)$.
הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

## תשובות סופיות:

**22)** א. $(-1,1)$ ב. $(-6,-18)$ ג. $(10,16)$.

**23)** א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.

**24)** מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.

**25)** א. $m_{BC}=m_{AD}=-\frac{1}{6}$ , $m_{AB}=m_{CD}=6$.

ב. הכל הפוך: $m_{BC}=m_{AD}=6$ , $m_{AB}=m_{CD}=-\frac{1}{6}$.

**26)** שאלת הוכחה.

# מציאת משוואות ישר:

## שאלות:

**27)** מצא את משוואות הישרים הבאים:

א. ישר העובר דרך הנקודה $A(1,3)$ ושיפועו $m=2$.

ב. ישר העובר דרך הנקודה $A(0,-4)$ ושיפועו $m=\frac{1}{3}$.

ג. ישר העובר דרך הנקודה $A(5,9)$ ושיפועו $m=0$.

ד. ישר העובר דרך הנקודות $A(5,-12)$ ו-$B(6,-6)$.

ה. ישר העובר דרך הנקודה $A(-6,4)$ ומקביל לישר: $y=2x-3$.

ו. ישר העובר דרך הנקודה $A(3,-5)$ ומקביל לציר ה-$y$.

ז. ישר העובר דרך הנקודה $A(-7,-3)$ ומאונך לישר: $y=x+3$.

ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים: $y=11x-4$ ו-$y=3x-12$ ומקביל לישר: $y=7x+5$.

## תשובות סופיות:

**27)** א. $y=2x+1$ ב. $y=\frac{1}{3}x-4$ ג. $y=9$ ד. $y=6x-42$

ה. $y=2x+16$ ו. $x=3$ ז. $y=-x-10$ ח. $y=7x-8$.

## שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר:

### שאלות:

**28)** במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.
ידוע כי: $D(-2,2)$ , $B(2,4)$ , $A(3,-2)$.

א. כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.

ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.

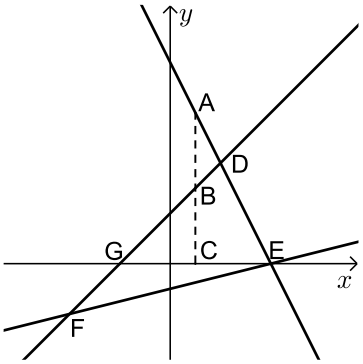
ג. כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

**29)** נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים $A(-9,1)$ ו-$B(5,-7)$.
משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x+3y+6=0$.

א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.

ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.

**30)** שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים בשרטוט: $x-4y-4=0$ , $x-y+2=0$ ו- $2x+y-8=0$.
הקטע AC מקביל לציר ה-$y$.




א. חשב את שטח המשולש DEF.

ב. נתון: $d_{BC}=3$.
חשב את אורך הקטע AB.

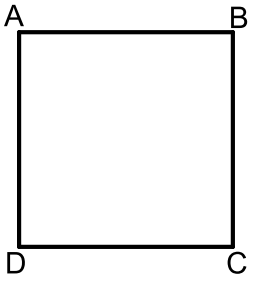
**31)** BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד $A(-6,1)$.
משוואת התיכון BD היא $x-y=1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x+5y=67$.
מצא את שיעורי הקדקוד C.

**32)** נתון טרפז ABCD $(AB\|CD)$ ובו משוואת השוק BC היא: $x=2$.
משוואת הבסיס CD היא $2x+3y=7$ וידוע כי $A(-4,1)$.

א. מצא את משוואת הבסיס AB.

ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.

ג. מעבירים את האלכסון AC.
הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.




**33)** במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3 ושיעורי הנקודה A הם: $(1,4)$.

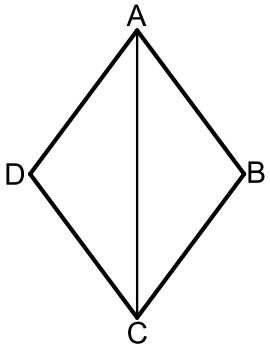
א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?
הראה חישוב מתאים.

ב. נתון גם: $D(4,13)$ , $m_{CD}=-\frac{1}{3}$ ו- $\sqrt{90}$ ס"מ $=BC$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ג. נתון גם: $B(-8,7)$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

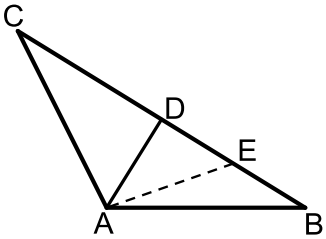
**34)** המרובע ABCD הוא מעוין.
ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: $(0,6)$.
כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא: $y=-1.5x+6$ ואחת ממשוואות הצלעות היא: $5y+x=4$.




א. מצא את משוואת האלכסון השני.

ב. מצא את שאר קדקודי המעוין

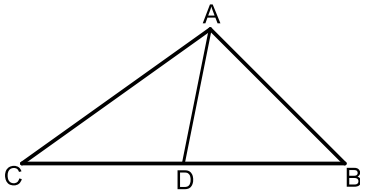
**35)** המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$.
ב-$\Delta ABC$ מעבירים את הגובה AD לבסיס BC ומסמנים נקודה E כך שמתקיים: $DE=BE$.
קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון כי: $E(8.5,2.5)$ , $D(5,7)$.




א. מצא את שיעורי שאר קודקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.

**36)** נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD.
הצלע BC מונחת על הישר: $y=4$ וידוע כי שיעור ה-$x$ של הנקודה C הוא: $x_C=-1$.
כמו כן נתון: $A(7,8)$ , $m_{AB}=-2$.



א. מצא את משוואת הצלע AB.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?

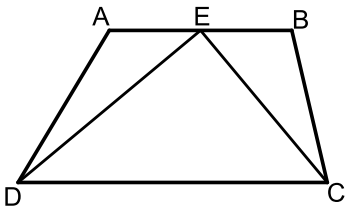
ii. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.

ii. איזה משולש הוא המשולש ABC?

**37)** המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה-$x$.




שיעורי הנקודה B הם $(3,2)$ והצלע AD מונחת על הישר: $x=-5$. אורך הקטע DE הוא $\sqrt{80}$.

כך ש-D ברביע השלישי וכן: $\sphericalangle DEC=90°$.

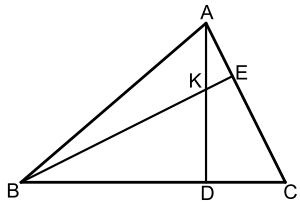
א. מצא את שיעורי הנקודות A , D ו-E.

ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.

ג. מצא את שיעורי הנקודה C.

ד. חשב את שטח המשולש DEC.

**38)** AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC.




ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: $(1,3)$.

שיעורי הנקודות D ו-E הם: $E(3,5)$ , $D(-2,4)$.

א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.

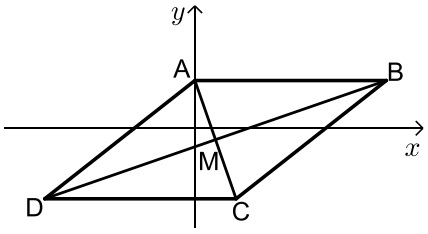
ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.

ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.

ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.

**39)** נתון מעוין ABCD. ידוע כי הצלע CD מונחת על $y=-7$.

אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים בנקודה: $M(-0.5,-3)$. שיפוע האלכסון AC הוא 4-.

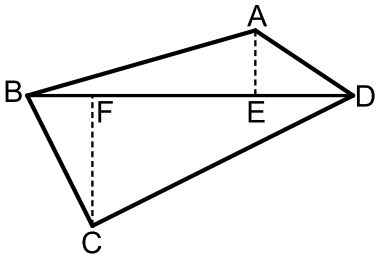



א. מצא את משוואת האלכסון AC.

ב. מצא את שיעורי הנקודה C.

ג. חשב את שטח המשולש BMC.

**40)** נתון מרובע ABCD שקודקודיו הם: $A(3,13)$ , $B(-2,4)$ , $C(9,3)$ , $D(8,14)$.




מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.

א. מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.

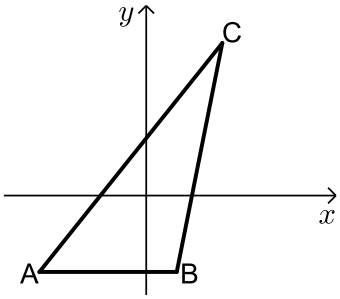
ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

**41)** על הישר $y=-5$ מסמנים את

הנקודות: $A(-7,-5)$ , $B(2,-5)$.

הנקודה C נמצאת על הישר: $y=x-5$.

נסמן את שיעור ה-$x$ של הנקודה C ב-$t$.




א. הבע באמצעות $t$ את שיעור ה-$y$ של הנקודה C.

ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.

הבע באמצעות $t$ את המרחקים של C מ-A ומ-B.

ג. מצא את $t$ ואת אורך הצלע BC.

ד. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB.

ידוע כי D נמצאת ברביע השלישי.

מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח

המשולש DAC יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.

**42)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB=BC)$

ובו נתון: $A(-4,12)$ , $B(x,6)$ ו-$C(4,8)$.

א. מצא את $x$.

ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת הצלע AC.

ii. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-$y$ ב-D.

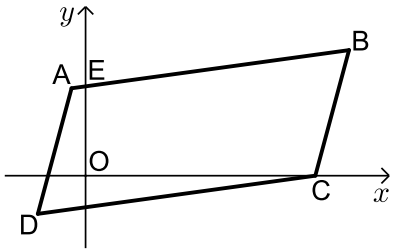
מצא את שיעורי הנקודה D.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא נקודה E ברביע הראשון $(x_E<5)$ כך שהמשולש DCE יהיה גם

שווה שוקיים וישר זווית $(\sphericalangle C=90°)$.

ii. חשב את יחס השטחים בין המשולשים: $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$.




**43)** באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.

ידועים קודקודי המקבילית הבאים: $A(-1,y)$

ו-$B(x,4)$. ($x$ ו- $y$ נעלמים).

שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא: $d_{CD}=\sqrt{104}$.

א. מצא את $x$ ו- $y$ אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה-$x$ בחלקו החיובי

וכי: $d_{BC}=\sqrt{17}$. מצא את שיעורי הקדקוד C (מצא שתי אפשרויות).

ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- $y$ ב-E.

שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש. מצא את האפשרות הנכונה עבור הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

## תשובות סופיות:

**28** א. $y=-\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}$ ב. $C(-6,0)$ ג. $y=-\frac{2}{9}x-\frac{4}{3}$.

**29** א. $l_{BD}: y=3x-22$. ב. $l_{BC}: y=-\frac{1}{8}x-6\frac{3}{8}$.

**30** א. $S_{EDF}=$ 18 יח"ש. ב. AB = 3 יחידות אורך.

**31** $C(14,5)$.

**32** א. $y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ ב. $C(2,1)$ , $B(2,-3)$ ג. $S_{ABC}=$ 12 יחידות שטח.

**33** א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.
ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.
ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות. ד. $S=$ 90 יח"ש.

**34** א. $y=\frac{2}{3}x+1\frac{2}{3}$ ב. $(-1,1)$ , $(4,0)$ , $(5,5)$.

**35** א. $C(-2,16)$ , $B(12,-2)$ ב. $y=-8x$.

**36** א. $y=-2x+22$ ב. i. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווי שטח הוא תיכון.
ב. ii. $D(4,4)$ , $B(9,4)$.
ג. ii. $BC=10$ , $AD=5$. ג. ii. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

**37** א. $E(-1,0)$ , $A(-5,-2)$ , $D(-5,-8)$. ב. $CD: y=\frac{1}{2}x-5\frac{1}{2}$ , $CE: y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
ג. $C(5,-3)$. ד. $S_{DEC}=$ 30 יח"ש.

**38** א. $AC: y=-x+8$ , $AD: y=-\frac{1}{3}x+3\frac{1}{3}$. ב. $A(7,1)$.
ג. $BC: y=3x+10$ , $BE: y=x+2$. ד. $B(-4,-2)$.

**39** א. $y=-4x-5$ ב. $C(0.5,-7)$ ג. $S_{DMC}=S_{BMC}=$ 34 סמ"ר.

**40** א. $y=x+6$ , $d_{BD}=\sqrt{200}$ ב. $E(5,11)$ , $F(3,9)$.
ג. $d_{AE}=\sqrt{8}$ , $d_{CF}=\sqrt{72}$ ד. $S_{ABCD}=80$.

**41** א. $C(t,t-5)$. ב. i. $BC=\sqrt{2t^2-4t+4}$ , $AC=\sqrt{2t^2+14t+49}$
ii. $t=8$ , BC = 10 ס"מ. ג. $D(-20,-5)$.

**42** א. $x=-2$ ג. i. $y=-0.5x+10$ ii. $D(0,10)$ ד. i. $E(2,4)$
ii. $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2}$.

**43** א. $x=9$ , $y=2$ ב. $C(10,0)$ , $C(8,0)$ ג. $C(8,0)$.

# חלוקת קטע ביחס נתון:

## סיכום כללי:

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}, y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$ (בהצלבה).

## שאלות:

**1)** הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון: $B(-12,16)$ , $A(2,-5)$.
מצא את ערכי הנקודה P, אם נתון כי: $\frac{AP}{PB}=\frac{2}{5}$.

**2)** קודקודי משולש ABC הם: $C(4,-12)$ , $B(6,0)$ , $A(-1,3)$.
מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

**3)** מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC
שקודקודיו הם: $C(x_3,y_3)$ , $B(x_2,y_2)$ , $A(x_1,y_1)$.

**4)** קודקודי המשולש ABC הם: $C(-1,4)$ , $B(7,-3)$ , $A(5,1)$.
מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקודקוד A.

## תשובות סופיות:

**1)** $P(-2,1)$

**2)** $M(3,-3)$

**3)** $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

**4)** 1.697 יחידות אורך.

# מרחק נקודה מישר:

## סיכום כללי:

### הצגה כללית של ישר ומרחקים:

- הצגה כללית של ישר (צורה סתומה): $Ax+By+C=0$.
- מרחק הנקודה $A(x_1,y_1)$ מהישר $Ax+By+C=0$ הוא: $d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$.

  כאשר $B>0$:
  - אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
  - אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

## שאלות:

**5)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את מרחק הנקודה $(-2,4)$ מהישר $4x+3y+11=0$.

ב. מצא את מרחק הנקודה $(4,3)$ מהישר $y=3x-1$.

ג. מצא את מרחק הנקודה $(3,-11)$ מהישר $x-5=0$.

**6)** מצא את המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון:

א. $3x-4y+6=0$, $A(-5,-1)$ ב. $12x+5y-17=0$, $A(-3,8)$

ב. $2y+7=0$, $A(11,-2)$ ד. $3x-14=0$, $A\left(6,-\frac{1}{2}\right)$

**7)** מצא את שיעורי הנקודות על הישר $x+y-7=0$ שמרחקן מהישר $2x-y+5=0$ הוא: $\sqrt{20}$.

**8)** מצא את שטחה של מקבילית ששיעורי קודקודיה הם: $D(11,2)$, $C(-1,7)$, $B(-5,4)$, $A(7,-1)$.

**9)** מצא את שטחו של המשולש $\Delta ABC$ שבו שיעורי קדקוד $A$ הם $A(5,-3)$ ושניים מתיכוני המשולש מונחים על הישרים $x-4=0$ ו- $2x-y-1=0$.

**10)** מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם: $A(2,2)$ , $B(-1,1)$ , $C(-5,-2)$.

**11)** מצא את שיעורי הנקודות על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקן מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$.

**12)** מצא את שיעורי הנקודות על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקן מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$.

## תשובות סופיות:

**5)** א. 3 ב. $\frac{8}{\sqrt{10}}$ ג. 2.

**6)** א. 1 ב. 1 ג. $1\frac{1}{2}$ ד. $1\frac{1}{3}$.

**7)** $(4,3)$ , $\left(-2\frac{2}{3},9\frac{2}{3}\right)$

**8)** $S_{ABCD}=56$ יח"ש

**9)** $S_{ABC}=18$ יח"ש

**10)** $S_{ABC}=2.5$ יח"ש

**11)** $(4,9)$ , $(64,99)$

**12)** $(-1,8)$ , $(-157,216)$

# מיקום נקודה ביחס לישר:

## שאלות:

**13)** מצא את שיעורי הנקודה על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקה מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$ והיא נמצאת מתחתיו.

**14)** מצא את שיעורי הנקודה על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקה מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$ והיא נמצאת מעליו.

**15)** נתון משולש ABC שבו נתונים הקודקודים: $A(1,1)$ , $B(13,6)$.
הקדקוד C נמצא על הישר $2x-y-19=0$ ונמצא מתחת לצלע AB.
מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.

**16)** נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:
$I: x+2y+1=0$ , $II: x-2y-11=0$ , $III: 2x-y+6=0$
מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ושמרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.

**17)** מצא את שיעורי מרכז המעגל, החסום במשולש, שצלעותיו מונחות על הישרים: $III: 3x+4y-11=0$ , $II: 3x-4y-51=0$ , $I: 4x-3y+2=0$.

**18)** מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה $G(7,-3)$ נמצאת מתחתיו ובמרחק $2\sqrt{10}$ ממנו.

**19)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-2,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,9)$ הוא $\sqrt{5}$.

**20)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(9,10)$ ומרחקו מהנקודה $B(8,-3)$ הוא $5\sqrt{5}$.

**21)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(3,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(-9,2)$ הוא 4.

**22)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(1,2)$ ומרחקו מהנקודה $B(-3,10)$ הוא 4.

**23)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(10,8)$ ומרחקו מהנקודה $B(7,-1)$ הוא 3.

**24)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-6,1)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,7)$ הוא 10.

## תשובות סופיות:

**13)** $(64,99)$

**14)** $(-1,8)$

**15)** $C(11,3)$

**16)** $(-1,-4)$

**17)** $(2,-5)$

**18)** $y=3x-4$

**19)** $y=2x+10$ , $y=\frac{2}{11}x+6\frac{4}{11}$

**20)** $y=\frac{1}{2}x+5\frac{1}{2}$ , $y=-\frac{22}{31}x+16\frac{12}{31}$

**21)** $y=6$ , $y=\frac{3}{4}x+3\frac{3}{4}$

**22)** $x=1$ או $y=-\frac{3}{4}x+2\frac{3}{4}$

**23)** $x=10$ או $y=1\frac{1}{3}x-5\frac{1}{3}$

**24)** $y=-\frac{4}{3}x-7$

# מרחק בין ישרים מקבילים:

## סיכום כללי:

- מרחק בין שני ישרים מקבילים: $Ax+By+C_1=0$ ו- $Ax+By+C_2=0$ כאשר: $B>0$
  הוא: $d=\left|\frac{C_1-C_2}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ ומתקיים בהעדר הערך המוחלט:
  - אם: $C_1>C_2$, $(d>0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מתחת ל- $Ax+By+C_2=0$.
  - אם: $C_1<C_2$ $(d<0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מעל ל- $Ax+By+C_2=0$.

## שאלות:

**25)** מצא משוואת ישר, המקביל לישר $3x-4y+8=0$ ונמצא במרחק 4 ממנו.

**26)** מצא את המרחק בין הישרים המקבילים: $5x+12y+25=0, 5x+12y-14=0$.

**27)** נתונים הישרים: $y=6x+5, 12x-2y-15=0$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

**28)** נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן $AB: 3x+y=0$ ו- $CD: 3x+y-6=0$. הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע AB ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

**29)** צלע של ריבוע מונחת על הישר $3x-2y+5=0$.
אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $B(1,-1)$.
מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

**30)** נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי.
מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות $P(4,1)$ ו- $Q(7,2)$
וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא $3\sqrt{10}$.

**31)** במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר $x-y+3=0$ והצלע BP מונחת על הישר $x+2y+3=0$. אורך הגובה לצלע BP הוא $3\sqrt{5}$ ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

## תשובות סופיות:

**25)** $3x-4y+28=0$ , $3x-4y-12=0$ **26)** 3

**27)** $\frac{25}{\sqrt{148}}$ **28)** $S=$ יח"ש 14.4 , $(2.1,-3.3)$

**29)** $y=-\frac{2}{3}x+3$ , $y=-\frac{2}{3}x-3\frac{2}{3}$ , $3x-2y-15=0$

**30)** $y=3x$ **31)** $P\left(2,-2\frac{1}{2}\right)$

# מתמטיקה למדעים

## פרק 23 - גיאומטריה אנליטית - המעגל

### תוכן העניינים

1. הכרות עם משוואת המעגל ..... 403
2. מעגל המשיק לצירים ..... 407
3. משיק למעגל ..... 409
4. שאלות יסודיות שונות ..... 410
5. נושאים מתקדמים במעגל ..... (ללא ספר)
6. כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע ..... 417
7. משוואות המשיקים למעגל ..... 418
8. מיתר המחבר שתי נקודות השקה ..... 420
9. שאלות מסכמות שונות ..... 421

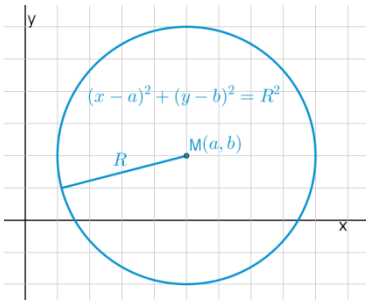
# הכרות עם משוואת המעגל:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

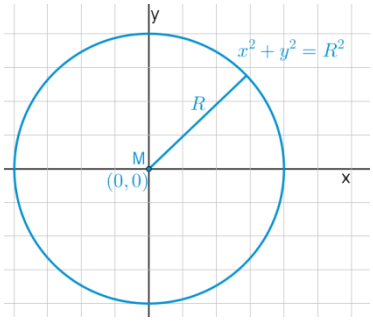
המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.

**משוואת מעגל:**




משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $M(a,b)$ ורדיוסו $R$ היא: $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$.

**משוואת מעגל קנוני:**




משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים $M(0,0)$) ורדיוסו $R$ היא: $x^2+y^2=R^2$.

## שאלות:

**1)** מצא את מרכז ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $(x-3)^2+(y+5)^2=49$.

ב. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=10$.

ג. $(x-m)^2+(y+n)^2=m^2+n^2$.

**2)** כתוב את משוואות המעגלים שמרכזם M ורדיוסם $R$:

א. $M(4,-2)\ ,\ R=3$

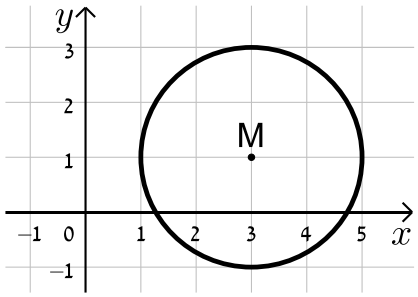
ב. $M(-3,5)\ ,\ R=10$

ג. $M(5,5)\ ,\ R=\sqrt{40}$

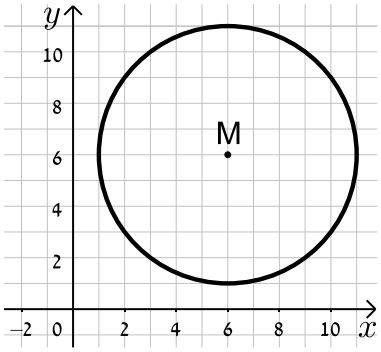
ד. $M(10,-12)\ ,\ R=\sqrt{30}$

**3)** כתוב את משוואות המעגלים הבאים בכל מקרה:

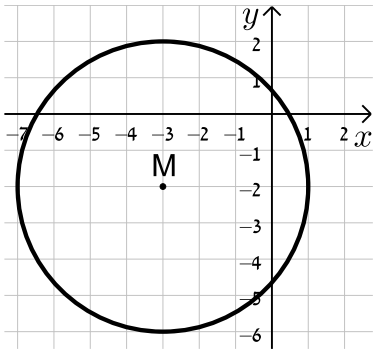
א.



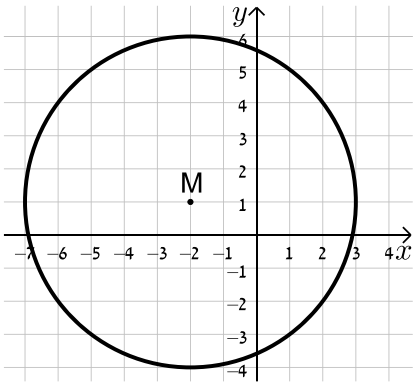

ב.




ג.




ד.




**4)** מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(-4,5)$ ומרכזו בנקודה $O(2,-1)$.

**5)** מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(-5,6)$ והוא חותך את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=9$.

**6)** מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(0,-7)$ והוא חותך את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=3$.

**7)** מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(11,2)$, רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר $y=2x-1$.

**8)** מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות $A(-2,3)$ ו-$B(4,-3)$ הן קצות הקוטר שלו.

**9)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר $x=4$ , רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה-$x$ מיתר שאורכו 12.

**10)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו $M(4,-3)$ אם ידוע כי הישר $y=-3x+7$ חותך אותו בשתי נקודות A ו-B כך שאורכו של המיתר AB הוא 4 יחידות אורך.

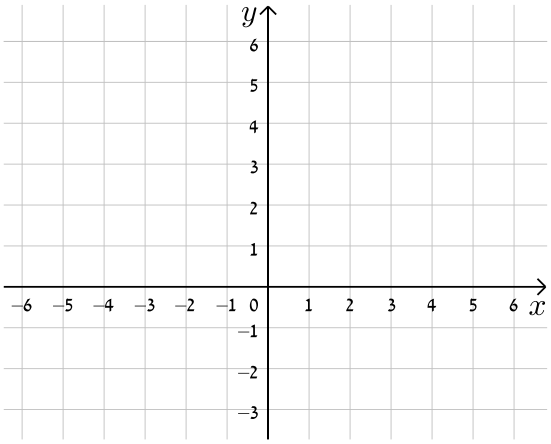
**11)** מצא את משוואתו של מעגל החוסם משולש שקודקודיו הם $C(-30,28)$ , $B(-10,40)$ , $A(22,-24)$.

**12)** נתונים שני מעגלים בעלי אותו המרכז $M(3,-1)$ , האחד הוא בעל רדיוס $R$ והשני בעל רדיוס של $2R$.

א. כתוב את המשוואות של שני המעגלים (בטא באמצעות $R$).

ב. מה תהיינה המשוואות עבור $R=2$ ?

ג. צייר את שני המעגלים במערכת הצירים שלפניך.




**13)** שני מעגלים שמרכזיהם $M_1(6,2)$ ו-$M_2(-3,-4)$ חותכים זה את זה בנקודה $(-2,3)$. מצא את משוואות המעגלים.

**14)** נתונה משוואת המעגל הבאה: $x^2+y^2-10x-10y+a=0$ כאשר $a$ פרמטר.

א. מצא ביטוי של רדיוס המעגל באמצעות $a$.

ב. איזה מהערכים הבאים יכול להיות הגיוני עבור $a$ ?
נמק ומצא את תחום ההגדרה של $a$.

i. $a=5$.

ii. $a=55$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $M(3,-5)\ ,\ R=7$ ב. $M(-0.5,0)\ ,\ R=\sqrt{10}$

ג. $M(m,-n)\ ,\ R=\sqrt{m^2+n^2}$ .

**2)** א. $(x-4)^2+(y+2)^2=9$ ב. $(x+3)^2+(y-5)^2=100$

ג. $(x-5)^2+(y-5)^2=40$ ד. $(x-10)^2+(y+12)^2=30$.

**3)** א. $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ ב. $(x-6)^2+(y-6)^2=25$

ג. $(x+3)^2+(y+2)^2=16$ ד. $(x+2)^2+(y-1)^2=25$.

**4)** $(x-2)^2+(y+1)^2=72$ , $M(3,-3)$.

**5)** $(x+5)^2+(y-6)^2=232$.

**6)** $x^2+(y+7)^2=100$.

**7)** $(x+1)^2+(y+3)^2=169$ או $(x-7.8)^2+(y+14.6)^2=169$.

**8)** $(x-1)^2+y^2=18$.

**9)** $(x-4)^2+(y-8)^2=100$ או $(x-4)^2+(y+8)^2=100$

**10)** $(x-4)^2+(y+3)^2=4\frac{2}{5}$.

**11)** $(x+2)^2+(y-4)^2=1360$.

**12)** א. $(x-3)^2+(y+1)^2=4R^2$ , $(x-3)^2+(y+1)^2=R^2$

ב. $(x-3)^2+(y+1)^2=16$ , $(x-3)^2+(y+1)^2=4$.

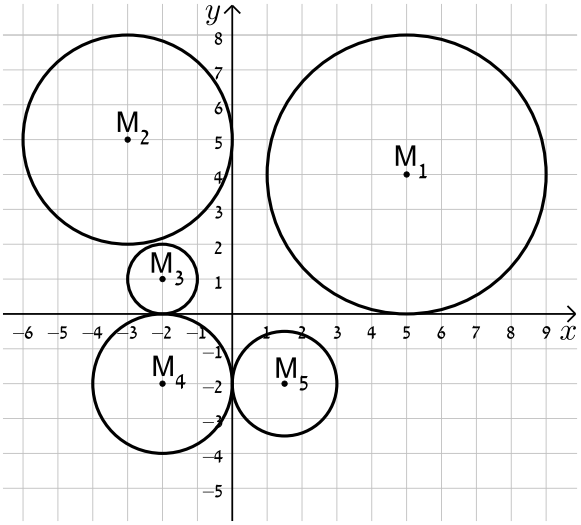
**13)** $(x-6)^2+(y-2)^2=65$ , $(x+3)^2+(y+4)^2=50$

**14)** א. $R=\sqrt{50-a}$ ב. $a=5$ , ת.ה: $a<50$.

# מעגל המשיק לצירים:

## שאלות:

**15)** כתוב את משוואות המעגלים הבאים:




**16)** מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

**17)** מצא את משוואת המעגל שמשיק לציר ה-$x$ ומרכזו בנקודה $M(16,8)$.

**18)** מצא את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על הישר $2x+3y+6=0$ והוא משיק לשני הצירים.

**19)** מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לציר ה-$y$ ולישר $y=6$ ומרכזו על הישר $y=3x-2$ ברביע הראשון.

## תשובות סופיות:

**15** $M_1:(x-5)^2+(y-4)^2=16$ , $M_2:(x+3)^2+(y-5)^2=9$ , $M_3:(x+2)^2+(y-1)^2=1$ , $M_4:(x+2)^2+(y+2)^2=4$ , $M_5:(x-1.5)^2+(y+2)^2=2\frac{1}{4}$.

**16** $(x\pm4)^2+(y\pm4)^2=16$.

**17** $(x-16)^2+(y-8)^2=64$.

**18** $(x-6)^2+(y+6)^2=36$ , $\left(x+1\frac{1}{5}\right)^2+\left(y+1\frac{1}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$.

**19** $(x-2)^2+(y-4)^2=4$.

# משיק למעגל:

## סיכום כללי:

משוואת המשיק למעגל $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעליו היא: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$.

## שאלות:

**20)** מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ בנקודות על המעגל שבהן $y=5$.

**21)** נתונה משוואת המעגל: $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ ומשוואת הישר $y=2x+m$ כאשר $m$ פרמטר. מצא עבור אלו ערכים של $m$ הישר ישיק למעגל ולאלו ערכים הישר יחתוך את המעגל.

## תשובות סופיות:

**20)** $4x-3y+35=0$ ו- $4x+3y=27$.

**21)** משיק: $m=11,-9$, חותך: $-9<m<11$.

# שאלות יסודיות שונות:

## שאלות:

**22)** נתון מעגל שמשוואתו $(x-3)^2+(y+4)^2=25$.

א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

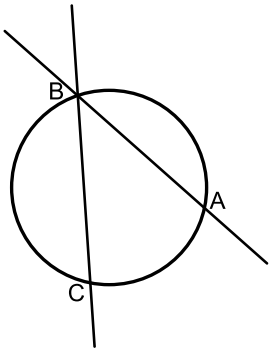
ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה-$x$.
מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

**23)** נתון ישר שמשוואתו $y=2x-10$. הישר חותך את ציר ה-$x$ בנקודה A ואת ציר ה-$y$ בנקודה B. בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו.
המשיק חותך את ציר ה-$y$ בנקודה C.
מצא את אורך הקטע BC.

**24)** נתון המעגל שמשוואתו $x^2+y^2=81$. מסמנים ב-A את נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה-$x$. הנקודה A היא מרכזו של מעגל נוסף בעל רדיוס של 12. מסמנים את נקודות החיתוך של שני המעגלים ב-B ו-C.
מצא את שטח המשולש שנוצר בין הנקודות B, C ו- O (O ראשית הצירים).

**25)** נתון ישר שמשוואתו $y=x$. הישר חותך מעגל קנוני שמשוואתו $x^2+y^2=32$ בשתי נקודות, A ו-B, כאשר A ברביע הראשון. בנקודה A עובר מעגל נוסף, המשיק למעגל הקנוני ובעל אותו רדיוס.
מצא את משוואת המעגל הנוסף ואת משוואת המשיק המשותף לשני המעגלים העובר בנקודה A.

**26)** הישרים: $9y+11x=94$ ו- $y=-3x+14$ נחתכים בנקודה B.
דרך נקודה זו עובר מעגל שמרכזו הוא: $M(-9,1)$.
ידוע כי מעגל זה חותך את הישרים (חוץ מהנקודה B) בשתי נקודות A ו-C (ראה איור).

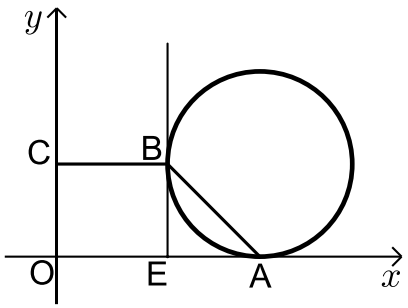



א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את משוואת המעגל.

ג. מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של הישר שמשוואתו: $y=-3x+14$ עם המעגל.

**27)** נתון מעגל המשיק לציר ה-$x$ בנקודה A.
מהנקודה E שעל ציר ה-$x$ מעלים אנך המשיק למעגל בנקודה B (ראה איור).
הקטע BC מקביל לציר ה-$x$ ו-O היא נקודת ראשית הצירים. יוצרים טרפז ישר זווית ABCO ששטחו הוא 170 סמ"ר.

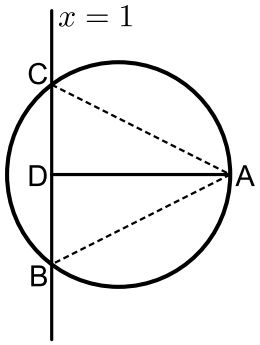



ידוע כי: $C(0,10)$ ו- 10 ס"מ $= AE$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:
   i. מצא את שיעורי הנקודה B.
   ii. מצא את שיעורי הנקודה A.

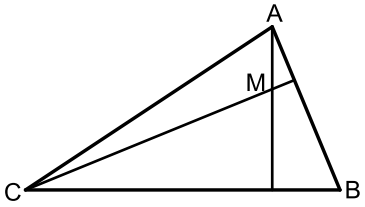
ב. כתוב את משוואת המעגל.

**28)** הנקודה $A(17,4)$ נמצאת על המעגל שמשוואתו: $(x-7)^2+(y-4)^2=R^2$.
הישר $x=1$ חותך את המעגל בשתי נקודות B ו-C כך ש-B נמצאת ברביע הרביעי. מעבירים את הקטע AD המאונך לישר BC וידוע כי הנקודה D היא אמצע BC.



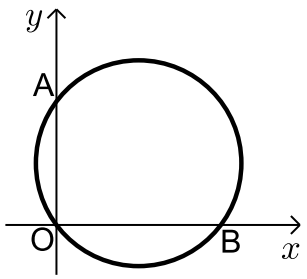

א. מצא את רדיוס המעגל.
ב. מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.
ג. ענה על הסעיפים הבאים:
   i. חשב את מרחק הנקודה A מהישר $x=1$:
   ii. חשב את שטח המשולש ABC.

**29)** נתון משולש ABC. משוואות הצלעות AB ו-BC במשולש ABC הן בהתאמה: $2y-x=56$ ו- $8y+x=104$.
מעבירים גבהים לצלעות AB ו-BC אשר נחתכים בנקודה $M(0,-2)$ שבתוך המשולש.




א. מצא את משוואות הגבהים.
ב. מצא את שיעורי הנקודה B.
ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו הוא הקטע BM.

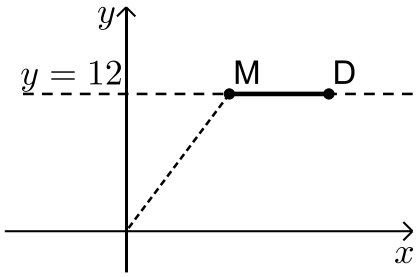
**30)** באיור שלפניך מתואר המעגל: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.
המעגל חותך את הצירים בנקודות A , B ו-O.




א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
ב. מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע הראשון כך שהמרובע ABCO יהיה מלבן.
ג. חשב את היקף המלבן.

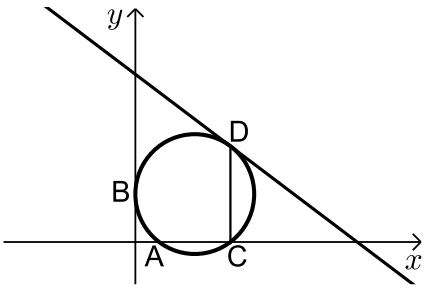
**31)** המעגל: $(x+a)^2+(y-1)^2=a+4$ , $a>0$ חותך את ציר ה-$x$ בנקודה שבה: $x=1$.
א. מצא את $a$.
ב. מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.
ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.
ד. חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.

**32)** הנקודות M ו-D נמצאות על הישר $y=12$ ידוע כי שיעור ה-$x$ של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של הנקודה M מראשית הצירים גדול ב- 6 מהמרחק בין הנקודות D ו-M (ראה איור).
בונים מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו הוא האורך DM.



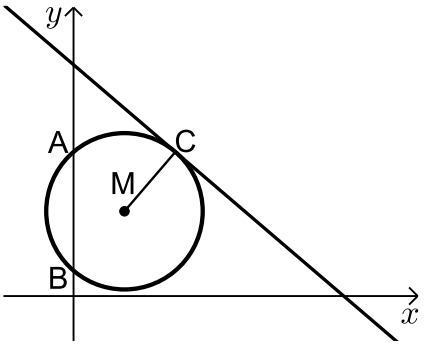

א. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.
ii. מצא את שיעור ה-$x$ של הנקודה D.
ב. כתוב את משוואת המעגל.
ג. האם המעגל הזה חותך את הצירים? הראה חישוב מתאים לטענתך.

**33)** מעגל שמרכזו בנקודה $M(15,12)$ משיק לציר ה-$y$ בנקודה B וחותך את ציר ה-$x$ בשתי נקודות A ו-C כמתואר באיור.



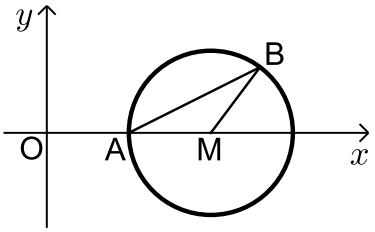

א. כתוב את משוואת המעגל.
מהנקודה C מעלים אנך לציר ה-$x$ שחותך את המעגל בנקודה נוספת D.
דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.
ב. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.

**34)** באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M.
המעגל חותך את ציר ה- $y$ בנקודות A ו-B.
מעבירים משיק למעגל: $6x+7y=191$
דרך הנקודה: $C(12,17)$.



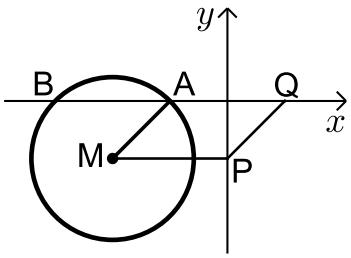

א. כתוב את משוואת הרדיוס MC.
ב. ידוע כי הנקודה M נמצאת על הישר $y=10$.
i. מצא את שיעורי הנקודה M.
ii. מצא את אורך רדיוס המעגל.
iii. כתוב את משוואת המעגל.
ג. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- $y$.
ד. חשב את שטח המשולש AMB.

**35)** באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M הנמצאת על ציר ה- $x$. המעגל חותך את ציר ה- $x$ בנקודה A.
מסמנים את ראשית הצירים ב-O.
ידוע כי A היא אמצע הקטע MO ושיעוריה הם: $A(5,0)$.



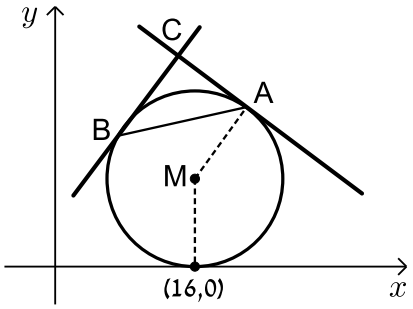

א. מצא את משוואת המעגל.
ב. כתוב את משוואת הישר שעובר דרך הנקודה A ושיפועו הוא 0.5.
ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של הישר שמצאת עם המעגל.
ד. סמן את הנקודה שמצאת בסעיף הקודם ב-B וחשב את שטח המשולש AMB.

**36)** באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו היא: $(x+4)^2+(y+2)^2=8$.




מסמנים את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- $x$ ב-A ו-B (ראה איור).
א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
מעבירים אנך לציר ה- $y$ מנקודת מרכז המעגל M ומסמנים את חיתוכם ב- P.
ב. מצא נקודה Q כך שהמרובע AMPQ יהיה מקבילית. נמק.
ג. כתוב את משוואת הישר PQ.
ד. הוכח כי הישר שמצאת בסעיף הקודם משיק למעגל בנקודה $(-2,-4)$.

**37)** נתון מעגל שרדיוסו $R$ $(R<16)$ ומשיק לציר ה-$x$ בנקודה שבה: $x=16$.




א. הבע באמצעות R את משוואת המעגל וציין האם הוא חותך את ציר ה-$y$ או לא. נמק.

מהנקודה $A(22,18)$ שעל המעגל מעבירים משיק.

ב. מצא את R וכתוב את משוואת המעגל.

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.

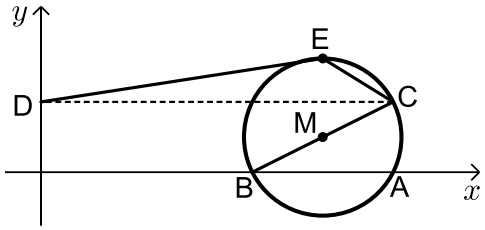
ד. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה B שבה $x_B < x_M$ אם ידוע כי הוא המאונך למשיק הקודם.

ה. המשיקים נחתכים בנקודה C.

i. מצא את שיעורי הנקודה C.

ii. מצא את שטח המשולש ABC.

**38)** באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו: $(x+a)^2+(y-1)^2=5$, $a$ פרמטר.




ידוע כי המעגל חותך את ציר ה-$x$ בנקודה $A(10,0)$.

א. מצא את $a$ אם ידוע כי $a>-10$.

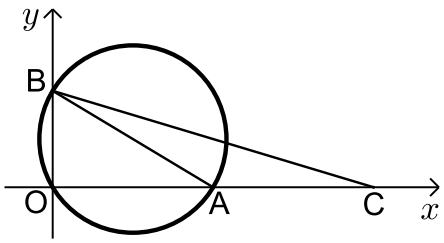
ב. מצא את הנקודה B - נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה-$x$.

ג. כתוב את משוואת הקוטר העובר דרך הנקודה B ומרכז המעגל M.

ד. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הקוטר עם המעגל.

ה. מעבירים אנך מנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם לציר ה-$y$ בנקודה D.
הנקודה E היא הנקודה בעלת שיעור ה-$y$ הגדול ביותר על המעגל.
מחברים את הנקודות E ו-D כך שנוצר המחומש DECBO. חשב את שטחו.

**39)** באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו: $(x-5)^2+(y-3)^2=R^2$, $R$ רדיוס המעגל.
ידוע כי המעגל עובר בראשית הצירים.




א. מצא את רדיוס המעגל וכתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את הנקודות A ו- B - החיתוך של המעגל עם הצירים (ראה איור).

ג. מסמנים נקודה C על ציר ה-$x$ כך ש-A היא אמצע הקטע CO.

i. מצא את שיעורי הנקודה C.

ii. חשב את שטח המשולש ABC.

## תשובות סופיות:

**22)** א. $(0,0)$ , $(6,0)$ , $(0,-8)$ ב. 27 יח"ש.

**23)** 12.5 יחידות אורך.

**24)** $\sqrt{80}$ יח"ש $= S_{\Delta BOC}$.

**25)** $(x-8)^2+(y-8)^2=32$ , $y=-x+8$.

**26)** א. $(2,8)$ ב. $(x+9)^2+(y-1)^2=170$ ג. $(4,2)$.

**27)** א. i. $B(12,10)$ ii. $A(22,0)$ ב. $(x-22)^2+(y-10)^2=100$.

**28)** א. $R=10$ ב. $B(1,-4)$ , $C(1,12)$ ג. i. $d=16$

ii. $S=128$

**29)** א. $y=8x-2$ , $y=-2x-2$ ב. $(-24,16)$ ג. $x^2+(y+2)^2=900$.

**30)** א. $O(0,0)$ , $A(0,6)$ , $B(8,0)$ ב. $C(8,6)$ ג. $P=$ 28 יח"א.

**31)** א. $a=1$ ב. $(0,-1)$ , $(-2,3)$ ג. $y=-2x-1$

ד. $S=\frac{1}{4}$.

**32)** א. i. $d=15$ ii. $x=18$. ב. $(x-9)^2+(y-12)^2=81$.

ג. המעגל אינו חותך את ציר ה-$x$ כאשר מציבים ב-$y$ אפס מתקבלת משוואה ריבועית ללא פתרון. המעגל חותך את ציר ה-$x$ בנקודה אחת- $(12,0)$.

**33)** א. $(x-15)^2+(y-12)^2=225$ ב. $C(24,0)$ , $D(24,24)$. ג. $y=-\frac{3}{4}x+42$.

**34)** א. $y=\frac{7}{6}x+3$ ב. i. $M(6,10)$ ii. $\sqrt{85}$

iii. $(x-6)^2+(y-10)^2=85$ ג. $A(0,17)$ , $B(0,3)$ ד. 42 יח"ש.

**35)** א. $(x-10)^2+y^2=25$ ב. $y=0.5x-2.5$ ג. $B(13,4)$

ד. 10 יח"ש $= S_{AMB}$.

**36)** א. $A(-2,0)$ , $B(-6,0)$ ב. $Q(2,0)$ ג. $y=x-2$ .

**37)** א. $(x-16)^2+(y-R)^2=R^2$ , המעגל אינו חותך את ציר ה- $y$ .

ב. $R=10$ , $(x-16)^2+(y-10)^2=100$ ג. $y=-\frac{3}{4}x+34\frac{1}{2}$

ד. $y=\frac{4}{3}x+5\frac{1}{3}$ ה. i. $C(14,24)$ ii. 50 יח"ש.

**38)** א. $a=-8$ ב. $B(6,0)$ ג. $y=0.5x-3$

ד. $(10,2)$. ה. $11+5\sqrt{5}$ יח"ש $=S_{DECBO}$ .

**39)** א. $R=\sqrt{34}$ יחידות אורך , $(x-5)^2+(y-3)^2=34$ . ב. $A(10,0)$ , $B(0,6)$

ג. i. $C(20,0)$. ii. 30 יח"ש $=S_{ABC}$ .

# כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע:

## שאלות:

**1)** מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $x^2+10x+y^2+6y-2=0$

ב. $x^2-2x+y^2+20y+1=0$

ג. $x^2-8x+y^2-14y=0$

ד. $x^2+y^2+2y=0$

ה. $x^2+x+y^2-3\frac{3}{4}=0$

ו. $x^2-2mx+y^2+6my+m^2=0$

**2)** משוואתו של מעגל היא $x^2+y^2-6mx-2(m+2)y+4m+4=0$.
מצא את ערכו של $m$ אם ידוע שמרכז המעגל נמצא על הישר $y=2x+7$.

**3)** משוואתו של מעגל היא $x^2+y^2-8x+12y-48=0$.
מצא את אורכו של המיתר שחותך הישר $y=2x-4$ מהמעגל בלי למצוא את נקודות הקצה של המיתר.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $M(-5,-3)\ ,\ R=6$

ב. $M(1,-10)\ ,\ R=10$

ג. $M(4,7)\ ,\ R=\sqrt{65}$

ד. $M(0,-1)\ ,\ R=1$

ה. $M\left(-\frac{1}{2},0\right)\ ,\ R=2$

ו. $M(m,-3m)\ ,\ R=3m$.

**2)** $m=-1$.

**3)** $2\sqrt{80}$.

# משוואות המשיקים למעגל:

## שאלות:

**4)** מצא משוואת מעגל העובר בנקודה $(1,8)$ המשיק לשני הצירים.

**5)** מצא את אורך המשיק למעגל שמשוואתו $x^2+y^2-4x+14y+37=0$ היוצא מהנקודה $A(10,-3)$.

**6)** מצא את משוואת המשיק ואת משוואת הנורמל למעגל שמשוואתו $x^2+y^2-4x+6y+3=0$ בנקודה $A(5,-4)$.

**7)** מצא את נקודת החיתוך של המשיקים למעגל שמשוואתו $x^2+(y-1)^2=5$ בנקודות שבהן $x=-1$.

**8)** נתון מעגל שמרכזו בנקודה $(-2,6)$ והוא עובר בראשית הצירים. המעגל חותך את הצירים בשתי נקודות נוספות, A ו-B.

א. הוכח כי המשיקים למעגל בנקודות A ו-B מקבילים זה לזה.

ב. הוכח את סעיף א' בלי למצוא את משוואות המשיקים או את שיפועיהם.

**9)** נתון המעגל $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ והישר $y=2x+m$.

לאלו ערכים של הפרמטר $m$ הישר משיק למעגל ולאלו ערכים של $m$ הישר חותך את המעגל?

## תשובות סופיות:

**4)** $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ או $(x-13)^2+(y-13)^2=169$.

**5)** 8.

**6)** משיק: $y=3x-19$ , נורמל: $x+3y+7=0$.

**7)** $(-5,1)$.

**8)** שאלת הוכחה.

**9)** משיק: $m=-9,11$ , חותך: $-9<m<11$.

# מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

## סיכום כללי:

משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים למעגל $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$ היוצאים מהנקודה $A(x_1,y_1)$ שמחוץ למעגל היא: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$.

## שאלות:

**10)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2+y^2+2x-19=0$, המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-3,8)$

ב. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2+(y-1)^2=5$, המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-5,1)$.

**11)** נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+16x+48=0$ ונקודה P, שנמצאת על החלק החיובי של ציר ה- $y$. הישר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים למעגל מנקודה P חותך את ציר ה- $y$ בנקודה Q. נתון: $PQ=14$.
מצא את שיעורי הנקודה Q.

## תשובות סופיות:

**10)** א. $x-4y+11=0$ ב. $x=-1$.

**11)** $Q(0,-8)$ או $Q(0,-6)$.

# שאלות מסכמות שונות:

## שאלות:

**12)** נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+16x-12y+64=0$. המעגל משיק מבחוץ למעגל קנוני. מצא את משוואת המעגל הקנוני, את נקודת ההשקה בין המעגלים ואת משוואת המשיק המשותף העובר בנקודה זו.

**13)** המעגלים $x^2+y^2+22x-6y=m$ ו- $x^2+y^2=26$ נחתכים בזווית ישרה.
מצא את ערכו של $m$.

**14)** בטרפז שווה שוקיים ABCD נתון כי הבסיס הגדול, DC, מונח על הישר: $3x-y-9=0$ והשוק AD מונחת על הישר $x+y-3=0$.
שיעורי הקודקוד B הם $(3,-8)$.
מצא את משוואת המעגל החוסם את הטרפז ABCD.

**15)** מצא את משוואתו של מעגל החוסם ריבוע, שאחד מקדקודיו נמצא בראשית הצירים ומשוואת אחד מאלכסוניו היא $3x-y+10=0$.

## תשובות סופיות:

**12)** $x^2+y^2=16$ , $A(-3.2,2.4)$ , $4x-3y+20=0$.

**13)** $m=-26$.

**14)** $(x-1)^2+(y+4)^2=20$.

**15)** $(x+3)^2+(y-1)^2=10$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 24 - טריגונומטריה במרחב - התיבה והקובייה

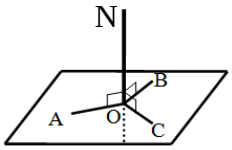
### תוכן העניינים

1. הגדרות יסודיות ..... 422
2. תיבה שבסיסה ריבוע ..... 425
3. תיבה שבסיסה מלבן ..... 429
4. הקובייה ..... 434

# הגדרות יסודיות:

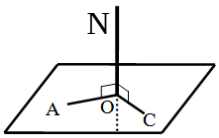
## סיכום כללי:

**הגדרה:**




ישר המאונך לכל הישרים במישור העוברים דרך עקבו נקרא אנך למישור.
באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים AO , BO , CO שעל המישור.

**משפט:**

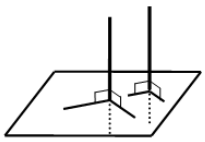



אם ישר מאונך לשני ישרים במישור העוברים דרך עקבו אזי הוא מאונך למישור כולו.
באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים AO , CO שעל המישור ולכן מאונך למישור כולו.

**משפט:**

בכל נקודה במישור אפשר להעלות אנך אחד בלבד.

**משפט:**

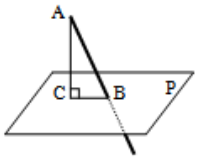


מנקודה שמחוץ למישור אפשר להוריד אנך אחד בלבד למישור זה.

**משפט:**

שני אנכים למישור אחד הם מקבילים.
באיור הסמוך ניתן לראות כי שני אנכים הם מקבילים.

**הגדרה:**

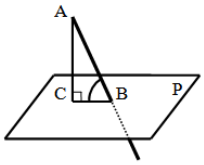



ישר החותך מישור ואינו מאונך למישור זה נקרא משופע למישור.
הקטע המחבר את עקב האנך עם עקב המשופע נקרא היטל המשופע על המישור.
באיור הסמוך הקטע AC הוא אנך למישור P , AB הוא משופע למישור ו-BC הוא היטל המשופע.

**הגדרה:**

אורך אנך המורד מנקודה שמחוץ למישור אל המישור נקרא מרחק הנקודה מהמישור.

**הגדרה:**




זווית בין ישר ומישור היא הזווית שבין הישר (המשופע) ובין היטלו של הישר על המישור.
באיור הסמוך הזווית שבין הישר המשופע AB לבין המישור P היא: $\sphericalangle ABC$.

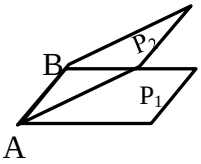
**הגדרה:**

שני מישורים שאינם נחתכים נקראים מישורים מקבילים.

**הגדרה:**

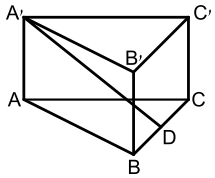
אורך האנך המורד מנקודה שעל פני מישור אחד אל מישור המקביל לו נקרא המרחק בין המישורים.

**הגדרה:**

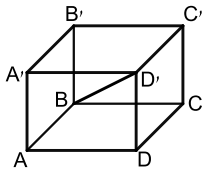



שני מישורים נחתכים יוצרים צורה גיאומטרית הנקראת פינה.
ישר החיתוך של שני המישורים נקרא מקצוע, והמישורים היוצרים את הפינה נקראים פאות.
באיור הסמוך הקטע AB הוא ישר החיתוך של שני המישורים $P_1$ ו-$P_2$ הנקרא מקצוע.
הצורות הסגורות של המישורים נקראות פאות וכל הצורה נקראת פינה.

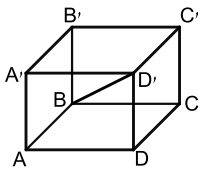
## שאלות:



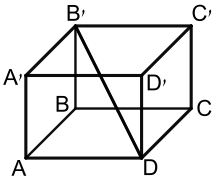

**1)** במנסרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$ הנקודה D היא אמצע המקצוע BC.
סמן את הזווית בין הישר A'D לבין הבסיס ABC.




**2)** נתונה תיבה ABCDA'B'C'D'.
סמן את הזווית בין האלכסון BD' לבין הבסיס ABCD.



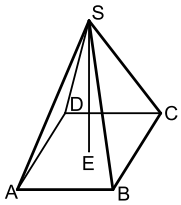

**3)** נתונה תיבה ABCDA'B'C'D' (ראה איור).
סמן את הזווית בין האלכסון AC' לבין הפאה D'C'CD.



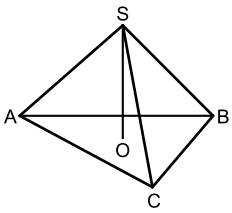

**4)** נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$. סמן את הזוויות בין:

א. האלכסון $B'D$ לבין הפאה $B'C'CB$.

ב. האלכסון $B'D$ לבין הפאה $D'C'CD$.




**5)** $SABCD$ היא פירמידה ישרה שבסיסה מלבן (ראה איור).
סמן את הזווית בין המקצוע $SB$ לבין הבסיס $ABCD$.




**6)** $SABC$ היא פירמידה ישרה שבסיסה
משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$.
סמן את הזווית בין המקצוע $SA$ לבין הבסיס $ABC$.

## תשובות סופיות:

**1)** $\sphericalangle A'DA$

**2)** $\sphericalangle D'BD$

**3)** $\sphericalangle AC'D$

**4)** א. $\sphericalangle DB'C$ ב. $\sphericalangle B'DC'$

**5)** $\sphericalangle SBE$

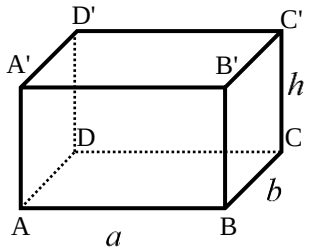
**6)** $\sphericalangle SAO$

# תיבה שבסיסה ריבוע:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

גוף מרחבי הבנוי משני מלבנים זהים מקבילים במרחב (ABCD ו-A'B'C'D')
הקרויים בסיסי התיבה. כל מקצוע צדדי (AA' , BB' , CC' , DD') נקרא גובה התיבה.
המקצועות הצדדיים שווים זה לזה ומאונכים למישורי הבסיס של התיבה.



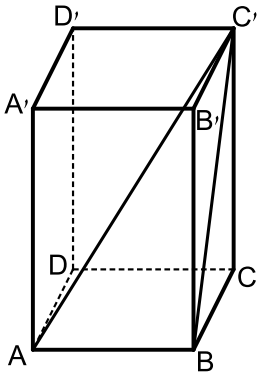

**נוסחאות:**

| הנוסחה | תיאור מילולי |
|---|---|
| $S=a\cdot b$ | שטח בסיס התיבה |
| $V=a\cdot b\cdot h$ | נפח התיבה |
| $M=2h(a+b)$ | שטח מעטפת התיבה |
| $P=2h(a+b)+2ab$ | שטח פנים |

- תיבה שבסיסה ריבוע: תיבה שבסיסיה הם ריבועים.
  מתקיים: $a=b$ בכל הנוסחאות.
- קובייה: אם בסיסי התיבה הם ריבועים וגובה התיבה שווה לאורך מקצוע הבסיס, דהיינו: $a=b=h$ אזי התיבה נקראת קובייה.

## שאלות:

**1)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע,
אורך אלכסון הבסיס $AC$ הוא 15.2 ס"מ.
אורך המקצוע הצדדי $AA'$ הוא 10 ס"מ.



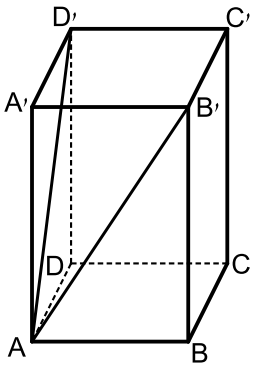

א. חשב אורך מקצוע הבסיס.

ב. חשב נפח התיבה ושטח הפנים.

ג. חשב את $BC'$, אלכסון הפאה $BB'C'C$,
ואת אלכסון התיבה $AC'$.

ד. חשב את זווית $\sphericalangle AC'B$, שבין
האלכסון $BC'$ בפאה $BB'C'C$ לבין אלכסון התיבה $AC'$.

**2)** נתונה תיבה $ABCDA'BC'D'$ שבסיסה
ריבוע. אורך האלכסון $AD'$ של הפאה הצדדית $ADD'A'$
הוא 16.8 ס"מ. הזווית שנוצרת בין שני
האלכסונים $AD'$ ו- $AB'$ היא בת $58°$.



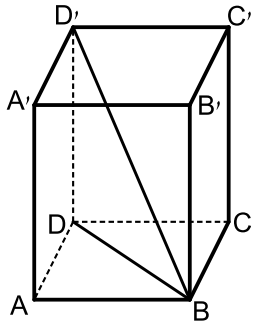

א. חשב את אורך אלכסון הבסיס, $B'D'$.

ב. חשב את אורך מקצוע הבסיס $AB$.

ג. חשב את גובה התיבה $AA'$.

ד. חשב את נפח התיבה.

**3)** נתונה תיבה $ABCDA'BC'D'$ שבסיסה ריבוע.
אורך אלכסון הבסיס $BD$ הוא 16 ס"מ ונפח
התיבה הוא 1408 סמ"ק. חשב:

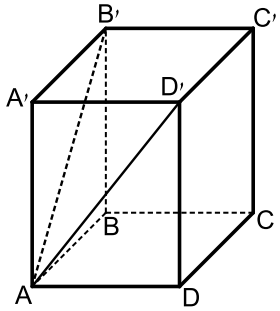



א. גובה התיבה $DD'$.

ב. הזווית שבין אלכסון התיבה $BD'$ לבסיס $ABCD$.

ג. אורך מקצוע הבסיס $AB$.

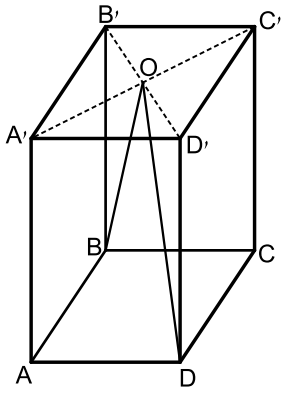
**4)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$, שבסיסה $ABCD$
הוא ריבוע. אורך האלכסון של הפאה הצדדית
הוא 10 ס"מ. הזווית שבין אלכסוני
הפאות הצדדיות היא בת $48°$.




א. חשב את אורך האלכסון של הבסיס העליון $B'D'$.

ב. חשב את שטח הבסיס של התיבה.

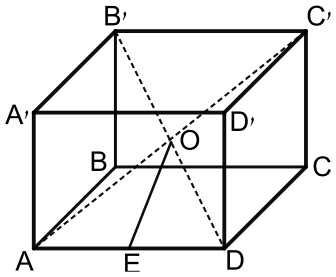
**5)** בתיבה ריבועית $ABCDA'B'C'D'$ מעבירים את האלכסונים $B'D'$ ו-$A'C'$ במישור הבסיס העליון.
האלכסונים נפגשים בנקודה O כך שנוצר המשולש BOD.
נתון כי: $\sphericalangle BOD = 23°$ וכי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 6 ס"מ.




א. חשב את היקף המשולש BOD.

ב. חשב את הזווית שנוצרת בין הצלע OD של המשולש BOD ומישור הפאה $AA'D'D$.

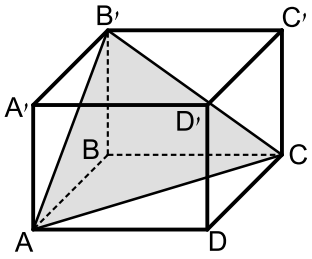
**6)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע מעבירים את האלכסונים $AC'$ ו-$B'D$.
האלכסונים נחתכים בנקודה O שבתוך התיבה.
מהנקודה O מעבירים את הקטע OE כך ש-E היא אמצע המקצוע AD.
ידוע כי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 8 ס"מ ואורך אלכסון התיבה הוא 12 ס"מ.




א. מצא את אורך גובה התיבה.

ב. מצא את אורך הקטע OE.

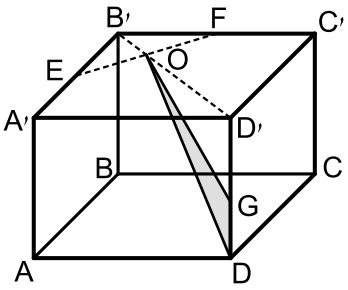
**7)** בתיבה ריבועית וישרה $ABCDA'B'C'D'$ מסמנים את אורך הגובה ב-$h$.
מעבירים את הקטעים $AB'$ , $AC$ ו-$B'C$ כך שנוצר המשולש $AB'C$ כמתואר באיור.
הזווית הנוצרת בין אנך לצלע AC במשולש $AB'C$ ומישור הבסיס ABCD היא $\alpha$.




א. הבע באמצעות $h$ ו-$\alpha$ את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. הבע באמצעות $h$ ו-$\alpha$ את נפח התיבה.

**8)** בתיבה הריבועית $ABCDA'B'C'D'$ שלפניך מעבירים את אלכסון הבסיס העליון $B'D'$.
הנקודות E ו-F נמצאות על אמצעי המקצועות $A'B'$ ו-$B'C'$ כך שהקטע EF חותך את האלכסון $B'D'$ בנקודה O.
מקצים נקודה נוספת G - הנמצאת על הגובה $DD'$ כך ש: $DG = a$. מעבירים את הקטעים GO ו-DO כך שנוצר המשולש DOG. אורך מקצוע הבסיס הוא $k$ וגובה התיבה הוא $h$.




א. הבע באמצעות $k$ ו-$a$ את שטח המשולש DOG.

ב. מצא את היחס $\frac{a}{h}$ עבורו מתקיים: $S_{DOG} = S_{D'OG}$.

**9)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ הבסיס $ABCD$ הוא ריבוע. גובה התיבה הוא $h$.
נתון : $\sphericalangle A'DC' = \beta$.

א. הראה כי אורך הצלע בבסיס התיבה הוא : $\dfrac{\sqrt{2}h \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{\sqrt{\cos\beta}}$.

ב. לאלו ערכים של $\beta$ יש פתרון לבעיה?

## תשובות סופיות:

**1)** א. 10.748 ס"מ. ב. 1155.2 סמ"ק $= V$ , 660.959 סמ"ר $= S$.
ג. 14.68 ס"מ, 18.19 ס"מ. ד. $\sphericalangle AC'B = 36.21°$.

**2)** א. 16.29 ס"מ. ב. 11.518 ס"מ. ג. 12.23 ס"מ.
ד. 1622.485 סמ"ק $= V$.

**3)** א. 11 ס"מ. ב. $34.51°$ ג. 11.313 ס"מ.

**4)** א. 8.13 ס"מ. ב. 33.09 סמ"ר.

**5)** א. 51 ס"מ. ב. $8.1°$.

**6)** א. 4 ס"מ. ב. 4.47 ס"מ.

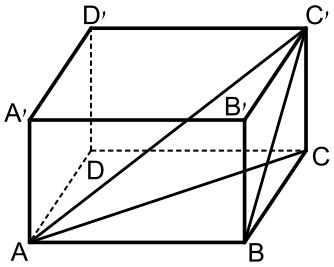
**7)** א. $\dfrac{h\sqrt{2}}{\tan\alpha}$ ב. $\dfrac{2h^3}{\tan^2\alpha}$.

**8)** א. $S_{DOG} = \dfrac{3ka}{4\sqrt{2}}$ ב. $\dfrac{a}{h} = \dfrac{1}{2}$.

**9)** ב. $0° < \beta < 90°$.

# תיבה שבסיסה מלבן:

## שאלות:




**10)** בתיבה שלפניך אורכי צלעות הבסיס הם:
12 ס"מ = AB , 5 ס"מ = BC. הזווית בין 'BC
אלכסון הפאה, BB'C'C, לבסיס ABCD היא 40°.

א. חשב את גובה התיבה 'CC.

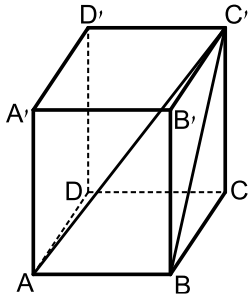
ב. חשב את אורך אלכסון הבסיס, AC.

ג. חשב את הזווית בין אלכסון התיבה 'AC לבסיס ABCD.

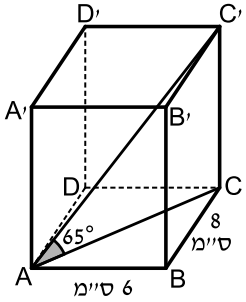
ד. חשב את אורך אלכסון התיבה 'AC.

ה. חשב את נפח התיבה.

ו. חשב את שטח מעטפת התיבה.



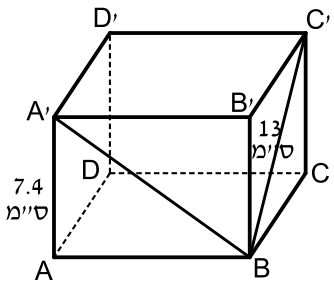

**11)** נתונה תיבה 'ABCDA'B'C'D.
אורך צלע הבסיס: 9 ס"מ = AB.
אלכסון הפאה BB'C'C הוא: 15 ס"מ = 'BC.
חשב את הזווית בין 'BC, אלכסון הפאה BB'C'C,
לאלכסון התיבה 'AC.




**12)** נתונה תיבה 'ABCDA'B'C'D, בה מתקיים:
8 ס"מ = AD , 6 ס"מ = AB. הזווית בין אלכסון
התיבה 'AC לבסיס ABCD היא בת 65°.

א. חשב את גובה התיבה 'CC.

ב. חשב את נפח התיבה ושטח הפנים שלה.

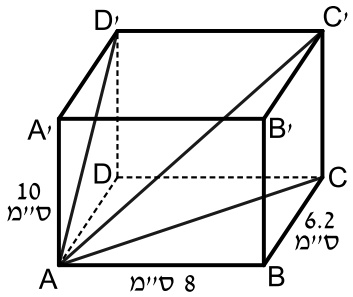



**13)** נתונה תיבה 'ABCDA'B'C'D שבסיסה
מלבן. גובה התיבה 'AA הוא 7.4 ס"מ.
אורך אלכסון הפאה 13 ס"מ = 'BC.
הזווית בין אלכסון הפאה A'B לבסיס ABCD
היא בת 37°.

א. חשב את אורכי צלעות הבסיס.

ב. חשב את שטח המעטפת ושטח הפנים של התיבה.

**14)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון:
$BC = 6.2$ ס"מ , $AB = 8$ ס"מ , $AA' = 10$ ס"מ.
חשב את:

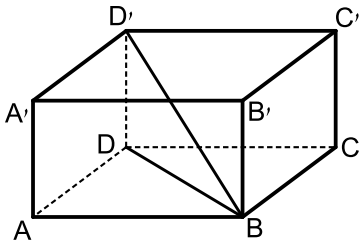



א. אלכסון הבסיס, $AC$, אלכסון הפאה, $AD'$ ואלכסון התיבה, $AC'$.

ב. הזווית בין $AD'$, אלכסון הפאה $ADD'A'$, לאלכסון התיבה $AC'$: $\sphericalangle D'AC'$.

ג. נפח התיבה ושטח המעטפת.

**15)** נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$. $AB = 12$ ס"מ.
אורך אלכסון הבסיס BD הוא 15 ס"מ.
נפח התיבה הוא 864 סמ"ק.
חשב את:

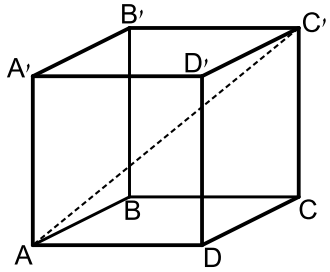



א. רוחב הבסיס של התיבה, $BC$.

ב. גובה התיבה, $AA'$.

ג. הזווית בין אלכסון התיבה $BD'$ לבסיסה $ABCD$.

**16)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ (ראה ציור), נתון:
$AD = 12$ ס"מ , $DC = 8$ ס"מ , $CC' = 14$ ס"מ.



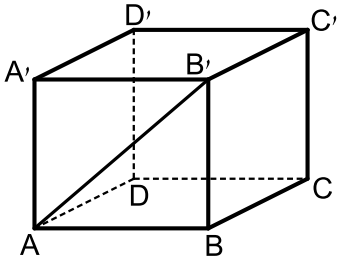

א. חשב את האורך של אלכסון הבסיס, $AC$.

ב. חשב את הזווית שבין אלכסון התיבה $AC'$ לבין הבסיס $ABCD$.

ג. חשב את שטח המעטפת של התיבה.

ד. חשב את שטח הפנים של התיבה.

**17)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ (ראה ציור) נתון:
$AB = 12$ ס"מ , $AD = 10$ ס"מ.
הזווית שבין אלכסון הפאה $AB'$ לבין הבסיס $ABCD$ היא בת $35°$.

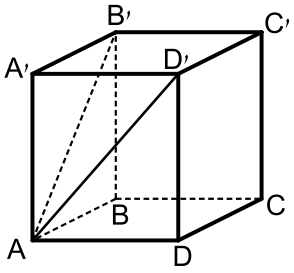



א. חשב את גובה התיבה $BB'$.

ב. חשב את $AD'$, אלכסון הפאה $ADD'A'$.

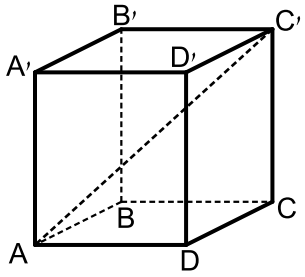
ג. חשב את הזווית שבין $AD'$ לבין הבסיס $ABCD$.

**18)** נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה מלבן (ראה ציור).
אורך גובה התיבה $AA'$ הוא 10 ס"מ.
אורך $AB'$, אלכסון הפאה $ABB'A'$ הוא 14 ס"מ.



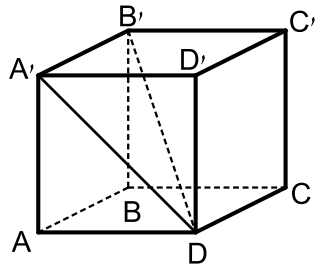

א. חשב את אורך המקצוע $AB$.
הזווית שבין $AD'$, אלכסון הפאה $ADD'A'$,
לבין הבסיס $ABCD$ היא בת $40°$.
ב. חשב את נפח התיבה.
ג. חשב את שטח מעטפת התיבה.

**19)** נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבה
$AB = 10$ ס"מ, $AD = 12$ ס"מ (ראה ציור).
הזווית שבין אלכסון התיבה, $AC'$
לבין הבסיס $ABCD$ היא בת $38°$.



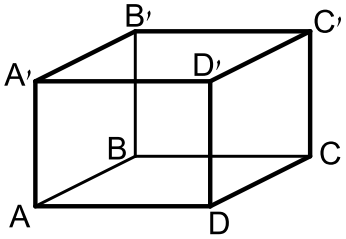

א. חשב את אלכסון הבסיס.
ב. חשב את גובה התיבה.
ג. חשב את שטח פני התיבה.

**20)** נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ (ראו סרטוט)
שבה: $AB = 10$ ס"מ, $AD = 12$ ס"מ, $AA' = 8$ ס"מ.

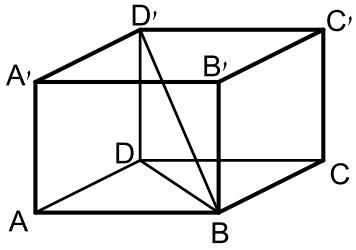



א. חשב את אורך $A'D$, אלכסון הפאה $ADD'A'$.
ב. חשב את אורך האלכסון של התיבה $B'D$.

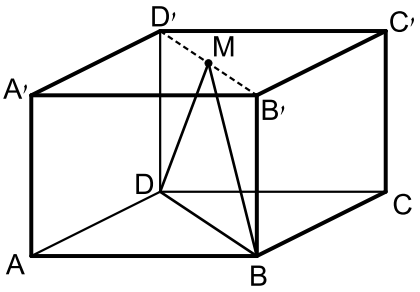
**21)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון:
$AA' = 7$ ס"מ, $AD = 12$ ס"מ, $AB = 8$ ס"מ.
חשב את אורך האלכסון $BD'$ ואת הזווית
בינו לבין בסיס התיבה.




**22)** נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה מלבן.
מעבירים את האלכסונים $BD$ ו-$BD'$ כך
שמתקיים: $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBD' = \alpha$.
אורך האלכסון $BD$ יסומן ב-$a$.




א. הבע באמצעות $a$ ו-$\alpha$ את:
i. אורך התיבה – $AB$.
ii. רוחב התיבה – $AD$.
iii. גובה התיבה – $AA'$.
ב. מצא את $\alpha$ אם ידוע כי נפח התיבה הוא $0.64a^3$.




**23)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה מלבן מעבירים את האלכסון $B'D'$ בבסיס העליון. מאמצע האלכסון M מעבירים את הקטעים DM ו-BM כך שנוצר המשולש ישר הזווית BMD $\left(\sphericalangle BMD = 90°\right)$.
אורך מקצוע הבסיס AB הוא $5a$
ואורך הקטע DM הוא $4a$.

א. הבע באמצעות $a$ את אורך המקצוע AD.

ב. מעבירים את הקטע AM. חשב את זווית MAD.

ג. מצא את $a$ אם ידוע כי שטח המשולש MAD הוא 125 סמ״ר (עגל למספר שלם).

**24)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $BD' = m$. הזווית שבין האלכסון $BD'$ לבסיס ABCD היא $\alpha$ והזווית שבין האלכסון $BD'$ לפאה צדדית $ABB'A'$ היא $\gamma$.
הבע באמצעות $m$ , $\alpha$ ו- $\gamma$ את נפח התיבה.

## תשובות סופיות:

**10)** א. $CC'=4.195$ ס"מ ב. $AC=13$ ס"מ ג. $17.886°$
ד. $AC'=13.66$ ס"מ ה. $V=251.7$ סמ"ק ו. $M=142.63$ סמ"ר.

**11)** $\sphericalangle AC'B=30.96°$.

**12)** א. $CC'=21.44$ ס"מ ב. $V=1029.6$ סמ"ק, $P=696.96$ סמ"ר.

**13)** א. $AB=9.82$ ס"מ, $BC=10.688$ ס"מ ב. $M=303.5184$ סמ"ר, $P=513.43$ סמ"ר.

**14)** א. $AC=10.121$ ס"מ, $AD'=11.766$ ס"מ, $AC'=14.227$ ס"מ
ב. $34.22°$. ג. $V=496$ סמ"ק, $M=284$ סמ"ר.

**15)** א. $BC=9$ ס"מ ב. $h=8$ ס"מ ג. $28.072°$.

**16)** א. $AC=14.42$ ס"מ ב. $44.15°$ ג. 560 סמ"ר ד. 752 סמ"ר.

**17)** א. $BB'=8.4$ ס"מ ב. $AD'=13.06$ ס"מ ג. $40.03°$

**18)** א. $AB=9.8$ ס"מ ב. $V=1,167.9$ סמ"ק ג. 434.4 סמ"ר.

**19)** א. 15.62 ס"מ ב. $h=12.2$ ס"מ ג. $P=776.8$ סמ"ר.

**20)** א. $A'D=14.42$ ס"מ ב. $B'D=17.55$ ס"מ.

**21)** $BD'=16.031$ ס"מ, $\sphericalangle D'BD=25.89°$.

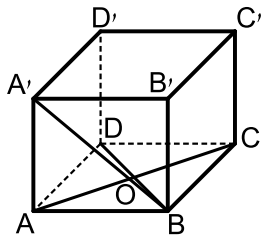
**22)** א. i. $a\cos\alpha$ ii. $a\sin\alpha$ iii. $a\tan\alpha$ ב. $53.13°$.

**23)** א. $a\sqrt{7}$ ב. $70.6°$ ג. $a=5$.

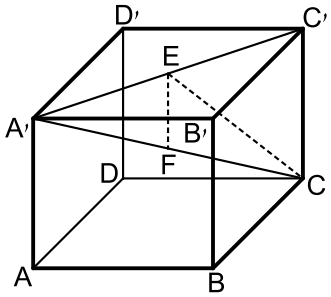
**24)** $V=m^3\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\sqrt{\cos^2\gamma-\sin^2\alpha}$.

# הקובייה:

## שאלות:




**25)** בקובייה $ABCDA'B'C'D'$ אורך המקצוע הוא 8 ס״מ.
הנקודה O היא מפגש אלכסוני הבסיס התחתון.
מצא את הזווית שבין $OA'$ לפאה $ABB'A'$.




**26)** נתונה קובייה $ABCDA'B'C'D'$ מעבירים את האלכסון $A'C$ בבסיס העליון. מהנקודה E שעל האלכסון $A'C$ מותחים את הקטע CE השווה באורכו לקטע $A'E$. כמו כן מורידים גובה EF ממישור הבסיס העליון $A'B'C'D'$.
(EF מאונך ל-$A'C'$).
הנקודה F נמצאת על האלכסון הראשי $A'C$.
נסמן: $\sphericalangle A'CE=\alpha$ , $A'F=m$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו-$m$ את נפח הקובייה.

## תשובות סופיות:

**25)** $24.095°$.

**26)** $\left(m\sin 2\alpha\cos\alpha\right)^3$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 25 - טריגונומטריה במרחב - המנסרה

### תוכן העניינים

1. מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות ..... 435
2. מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים ..... 437
3. מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית ..... 438

# מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות:

## סיכום כללי:

גוף מרחבי הבנוי משני מצולעים זהים המקבילים זה לזה במרחב.
המקצועות הצדדיים המחברים את קדקודי הבסיסים המתאימים נקראים גובהי המנסרה.
כל גובה במנסרה ישרה מאונך למישורי הבסיס העליון והתחתון.

נעסוק במנסרות הבאות:

- מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות.
- מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים.
- מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית.

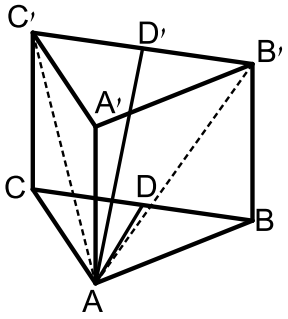
**הערה:**
התיבה וקובייה הן מקרים פרטיים של מנסרות ישרות שבסיסן מלבן וריבוע בהתאמה.

## שאלות:

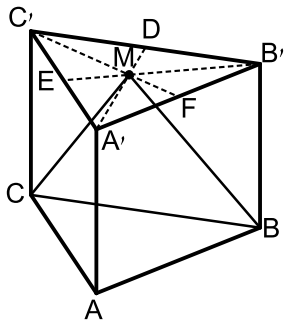
**1)** במנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים את האלכסונים AB' ו-AC' כך שנוצר המשולש AB'C'.
הזווית שבין האנך לצלע BC במשולש ABC והאנך לצלע B'C' במשולש AB'C' היא 40°.
אורך גובה המנסרה הוא 14 ס"מ.

א. חשב את שטח המשולש A'B'C'.

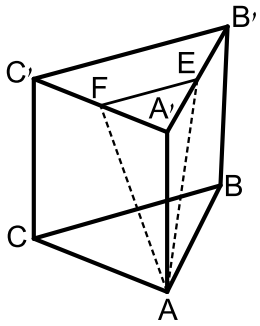
ב. חשב את נפח המנסרה.




**2)** במנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים בבסיס העליון A'B'C' את התיכונים A'D , B'E ו-C'F אשר נחתכים בנקודה M. מהנקודה M מעבירים את הקטעים MC ו-MB כך שנוצר המשולש MCB.
גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה.
חשב את הזווית שבין האנך לצלע BC במשולש MCB למישור הבסיס ABC.



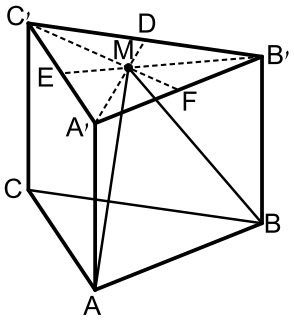
**3)** במנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי המקצועות A'B' ו-A'C'. מעבירים את הקטעים AE ו-AF, כך שנוצר המשולש AEF.
אורך מקצוע הבסיס של המנסרה הוא 10 ס"מ וגובה המנסרה הוא 12 ס"מ.




א. חשב את אורכי הצלעות של המשולש AEF.

ב. חשב את הזווית שבין גובה המנסרה AA' למישור המשולש AEF.

**4)** במנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים בבסיס העליון A'B'C' את התיכונים A'D , B'E ו-C'F אשר נחתכים ב-M.
מהנקודה M מעבירים את הקטעים MA ו-MB כך שנוצר המשולש MAB.
גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה ויסומן ב- $2a$.




א. הבע באמצעות $a$ את אורך הקטע MA.

ב. חשב את הזווית שבין הקטע MA ומישור הבסיס ABC.

ג. חשב את הזווית שבין הגובה למקצוע AB במישור MAB לבין מישור הבסיס ABC.

ד. חשב את הזווית שבין MA והפאה AA'B'B.

ה. הבע באמצעות $a$ את שטח הפנים של המנסרה.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 160.68 סמ"ר. ב. 2250 סמ"ק.

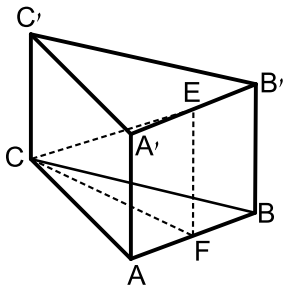
**2)** $73.89°$.

**3)** א. 13 ס"מ, 13 ס"מ, 5 ס"מ. ב. $19.84°$.

**4)** א. $MA = 2.3a$ ב. $60°$ ג. $73.9°$ ד. $14.47°$ ה. $P = 15.46a^2$.

# מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים:

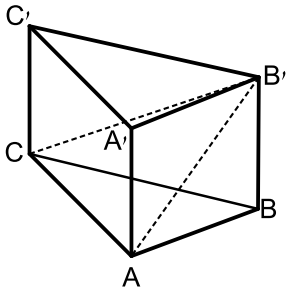
## שאלות:




**5)** נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$
שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים $(AC=BC)$.
מאמצעי המקצועות $A'B'$ ו-$AB$ מעבירים את הקטע $EF$.
ידוע כי אורך מקצוע הבסיס $AB$ הוא $k$ ס"מ והוא
קטן פי 2 מאורך שוק הבסיס $AC$. נסמן: $\sphericalangle FCE=\alpha$.

א. הבע באמצעות $k$ ו- $\alpha$ את נפח המנסרה.

ב. חשב את נפח המנסרה אם ידוע כי: $2EF=CE$,
וכי שטח הבסיס $ABC$ הוא $\sqrt{15}$ סמ"ר.




**6)** במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה
הוא משולש שווה שוקיים $(AC=BC)$ מעבירים
את האלכסונים $AB'$ ו-$CB'$ כך שנוצר המשולש $AB'C$.
ידוע כי הזווית שבין אנך למקצוע $AC$ במשולש $ABC$
ואנך למקצוע $AC$ במשולש $AB'C$ היא $45°$
(האנכים נפגשים על המקצוע $AC$ בנקודה $E$).
זוויות הבסיס $ABC$ הן $\sphericalangle ABC=\sphericalangle CAB=75°$, $\sphericalangle ACB=30°$
גובה המנסרה הוא 5 ס"מ.

א. מצא את אורך המקצוע $AC$.

ב. חשב את הזווית שבין האלכסון $CB'$ למישור הבסיס.

**7)** נתונה מנסרה $ABCA'B'C'$ שבה הבסיס הוא משולש שווה שוקיים $(AC=BC)$,
אורך השוק היא $k$ וזווית הראש היא $\gamma$. הזווית שבין המישור $ABC$
למישור $ABC'$ היא $\beta$. הבע באמצעות $k$, $\gamma$ ו- $\beta$ את נפח המנסרה.

## תשובות סופיות:

**5)** א. $V=\frac{15k^3\tan\alpha}{8}$ ב. $\frac{15}{\sqrt{3}}$ סמ"ק.

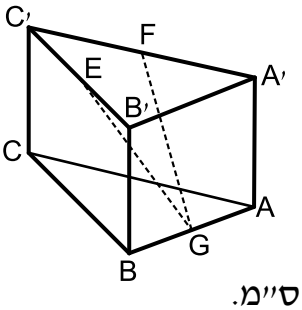
**6)** א. 10 ס"מ. ב. $26.56°$ .

**7)** $V=\frac{1}{2}k^3\sin\gamma\cos\frac{\gamma}{2}\tan\beta$.

# מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית:

## שאלות:

**8)** במנסרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90°)$,
הנקודות $E$, $F$ ו-$G$ הן בהתאמה אמצעי המקצועות $B'C'$, $A'C'$ ו-$AB$
כמתואר באיור.



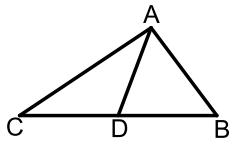

מסמנים את מידות הבסיס $ABC$: $BC = 12t$ , $AB = 5t$.
הזווית שבין הקטע $GE$ למישור הבסיס $ABC$ היא $36.86°$.

א. הבע באמצעות $t$ את גובה המנסרה.

ב. חשב את הזווית שבין הקטע $GF$
ולמישור הבסיס $ABC$.

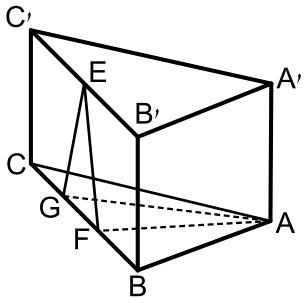
ג. מצא את $t$ אם ידוע כי אורך הקטע $GF$ הוא: $\sqrt{3825}$ ס"מ.

**9)** ענה על הסעיפים הבאים:




א. הוכח את הטענה: תיכון במשולש חוצה אותו
לשני משולשים שווי שטח. כלומר, הקטע $AD$
הוא תיכון במשולש $ABC$. הראה כי: $S_{ABD} = S_{ACD}$.

במנסרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש
ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90°)$ הנקודות $F$ ו- $G$ מחלקות
את מקצוע הבסיס $BC$ לשלושה חלקים שווים.
הנקודה $E$ היא אמצע המקצוע $B'C'$.
ידוע כי אורך הקטע $EF$ הוא 10 ס"מ ואורך
המקצוע $BC$ הוא 24 ס"מ.
שטח המשולש $AFG$ הוא 40 סמ"ר.



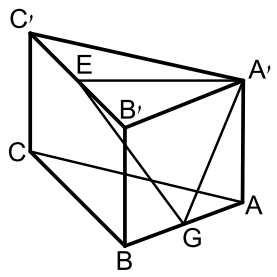

ב. איזה משולש הוא המשולש $EFG$ ? מצא את זוויותיו.

ג. מצא את גובה המנסרה.

ד. היעזר בטענה שהוכחת בסעיף א' ומצא את אורך המקצוע $AB$.
(רמז: התבונן במשולש $ABF$ ומצא את הצלע $AB$ באמצעות שטחו).

ה. חשב את שטח המעטפת של המנסרה.

**10)** לפניך מנסרה ישרה שבסיסה משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90°)$.
ידוע כי הפאה הצדדית AA'B'B היא ריבוע וכי אורך המקצוע BC גדול פי 3 מ-AB.
הנקודות E ו-G נמצאות על אמצעי
המקצועות B'C' ו-AB בהתאמה.
מעבירים את הקטעים A'G, A'E ו-GE.




א. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE ומישור הבסיס.

ב. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE ומישור הפאה AA'B'B.

ג. חשב את זווית EA'G.

## תשובות סופיות:

**8)** א. $4.875t$ ב. $39.1°$ ג. $t = 8$.

**9)** ב. משולש שווה שוקיים. $66.42°, 47.15°$ ג. $\sqrt{84}$ ס"מ. ד. 10 ס"מ.
ה. $60\sqrt{84}$ סמ"ר.

**10)** א. $\sphericalangle EGH = 32.31°$ ב. $\sphericalangle B'GE = 53.3°$
ג. $\sphericalangle GA'E = 71.93° \sim 72°$ .

# מתמטיקה למדעים

## פרק 26 - טריגונומטריה במרחב - הפירמידה

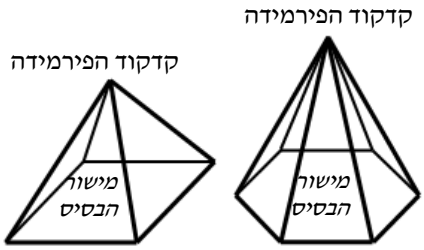
### תוכן העניינים

1. פירמידה שבסיסה ריבוע ..... 440
2. פירמידה שבסיסה מלבן ..... 444
3. פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות ..... 451
4. פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים ..... 453
5. פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית ..... 454

# פירמידה שבסיסה ריבוע:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**




גוף מרחבי הבנוי ממצולע כלשהו, המהווה את בסיס הפירמידה, ומקצועות היוצאים מכל קדקודי המצולע ונפגשים בנקודה אחת הנקראת קדקוד הפירמידה.
בפירמידה ישרה כל המקצועות שווים.

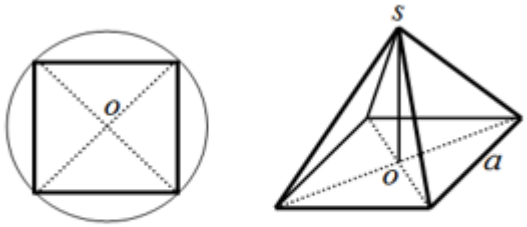
**הגדרה:**

גובה הפירמידה הוא קטע היוצא מקדקוד הראש של הפירמידה ומאונך למישור הבסיס.

**משפט:**

בפירמידה ישרה, גובה הפירמידה תמיד נופל בנקודת מרכז המעגל החוסם את מצולע הבסיס.

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



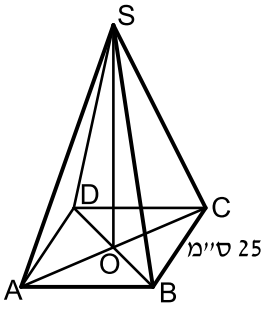

תיאור פירמידה שבסיסה ריבוע. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את הריבוע.

**נפח פירמידה:**

נפח פירמידה ששטח בסיסה הוא $S$ וגובהה $h$ הוא: $V=\frac{S\cdot h}{3}$.

## שאלות:

**1)** נתונה פירמידה מרובעת משוכללת (הבסיס הוא ריבוע) SABCD.
אורך מקצוע הבסיס הוא 25 ס"מ.
הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא זווית בת $35°$.

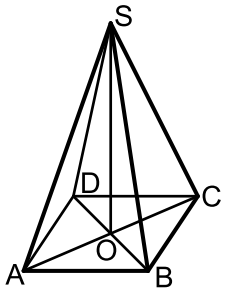



א. חשב את אלכסון הבסיס.

ב. חשב את גובה הפירמידה.

ג. סמן נקודה E כאמצע BC וחשב את הזווית שבין SE לבסיס הפירמידה.

**2)** נתונה פירמידה מרובעת משוכללת SABCD.
אורך מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ.
אורך מקצוע צדדי הוא 20 ס"מ.

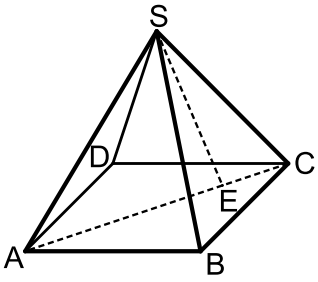



א. חשב אורך גובה של פאה צדדית.

ב. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.

ג. חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

**3)** נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע בעל אורך צלע $a$.
אורך מקצועות הפירמידה הוא $3a$.
מעבירים את האלכסון AC ועליו מסמנים את הנקודה E
המחלקת אותו ביחס של $1:3$ $\left(\frac{CE}{AE}=\frac{1}{3}\right)$.
מהקדקוד S מעבירים את הקטע SE.

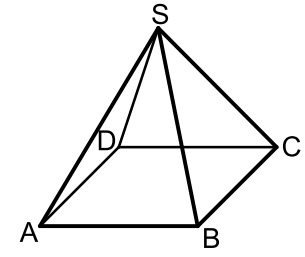


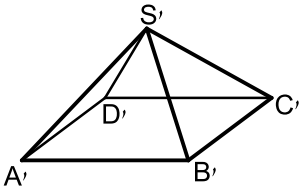

א. הבע באמצעות $a$ את גובה הפירמידה.

ב. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע SE לגובה הפירמידה.

ג. מצא את $a$ אם ידוע כי שטח המעטפת של הפירמידה הוא: $\sqrt{560}$ סמ"ר.

**4)** נתונות שתי פירמידות ריבועיות ישרות: SABCD ו-S'A'B'C'D'.
אורך מקצוע הבסיס בפירמידה הראשונה הוא $a$ וגובהה הוא $2a$.
אורך מקצוע הבסיס בפירמידה השנייה הוא $2a$ וגובהה הוא $a$.




א. קבע לאיזו פירמידה יש נפח גדול יותר.

ב. כעת משנים את הגובה של כל פירמידה כך שנפחן יהיה זהה והוא: $a^3$.
מצא את יחס בין המקצוע הצדדי של הפירמידה SABCD למקצוע הצדדי של הפירמידה S'A'B'C'D'.

ג. דנה טוענת כי מאחר שנפח שתי הפירמידות זהה, הרי גם שטח הפנים שלהן זהה. האם דנה צודקת? הוכח את טענתך באמצעות חישוב מתאים.

**5)** נתונה פירמידה מרובעת משוכללת וישרה.
אורכו של מקצוע הבסיס הוא 10 ס"מ ואורכו של המקצוע הצדדי הוא 16 ס"מ.
חשב את:

א. הזווית שבין המקצוע הצדדי והבסיס.

ב. גובה הפירמידה.

ג. הזווית שבין הפאה הצדדית והבסיס.

ד. נפח הפירמידה.

ה. שטח הפנים של הפירמידה.

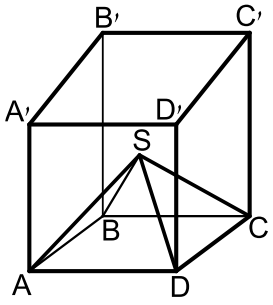
**6)** נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורך מקצוע הבסיס הוא $b$ והזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס היא $\alpha$.
הבע באמצעות $b$ ו- $\alpha$ את נפח הפירמידה ואת שטח המעטפת שלה.

**7)** נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורכו של מקצוע הבסיס הוא $a$ והזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות היא $\beta$.
זווית הבסיס של פאה צדדית היא $\gamma$. הבע באמצעות $\beta$ את $\sin\gamma$.

**8)** נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
הזווית שבין שני מקצועות צדדיים סמוכים היא $2\alpha$ והזווית שבין שני מקצועות צדדיים נגדיים היא $2\beta$. הוכח: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**9)** נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
גובה הפירמידה הוא $h$ והזווית שבין שתי פאות צדדיות היא $\beta$.
הראה כי מקצוע הבסיס של הפירמידה הוא: $\frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}\cdot\sqrt{-2\cos\beta}$.

**10)** בקובייה ABCDA'B'C'D' חסומה פירמידה SABCD שבה כל המקצועות שווים.
בסיס הפירמידה מונח על בסיס הקובייה.
מצא את גודל הזווית שבין המקצוע הצדדי של הפירמידה לפאה צדדית של הקובייה, שלהם קדקוד משותף.



## תשובות סופיות:

**1)** א. 35.36 ס"מ ב. $h=12.378$ ס"מ ג. $44.72°$.

**2)** א. 19.079 ס"מ ב. $P=601.89$ ס"מ ג. $64.896°$.

**3)** א. $a\sqrt{8.5}$ ב. $6.9°$ ג. $a=2$.

**4)** א. $V_{SABCD}=\frac{2}{3}a^3 > V_{S'A'B'C'D'}=\frac{4}{3}a^3$ ב. פי $4\sqrt{\frac{19}{82}}$

ג. דנה טועה - $P_{SABCD}\approx 7a^2 \neq P_{S'A'B'C'D'}=9a^2$.

**5)** א. $63.77°$ ב. $\sqrt{206}$ ס"מ ג. $70.79°$ ד. 478.42 סמ"ק

ה. 403.97 סמ"ר.

**6)** $M=2b^2\sqrt{\frac{1}{2}\tan^2\alpha+\frac{1}{4}}$ , $V=\frac{b^3\tan\alpha}{3\sqrt{2}}$.

**7)** $\sin\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\cos\beta}}$.

**8)** הוכחה.

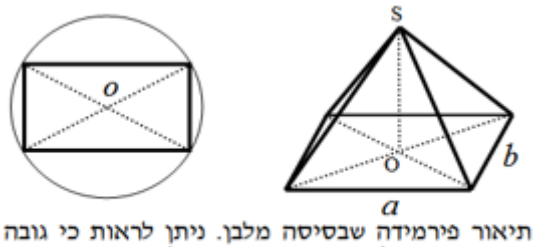
**9)** הוכחה.

**10)** $30°$.

# פירמידה שבסיסה מלבן:

## סיכום כללי:

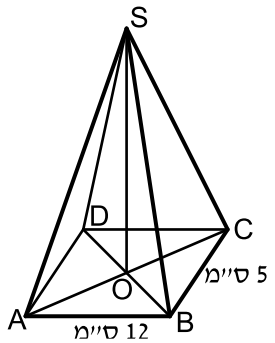
באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.




תיאור פירמידה שבסיסה מלבן. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את המלבן.

## שאלות:

**11)** נתונה פירמידה מרובעת וישרה SABCD שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם: $AB = 12$ ס"מ , $BC = 5$ ס"מ.
אורך גובה הפירמידה הוא: $SO = 15$ ס"מ.

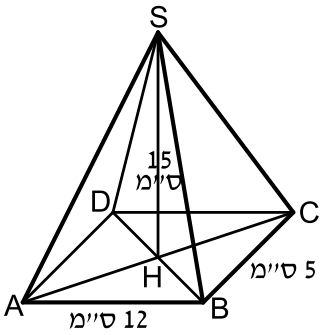



א. חשב את נפח הפירמידה.

ב. חשב את אורך אלכסון הבסיס.

ג. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

**12)** נתונה פירמידה מרובעת ישרה SABCD שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם:
$AB = 12$ ס"מ , $BC = 5$ ס"מ.
אורך גובה הפירמידה הוא: $SH = 15$ ס"מ.



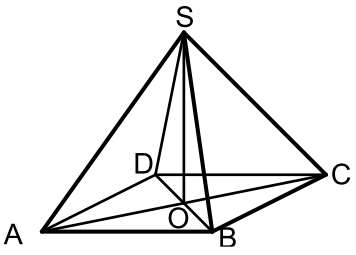

א. חשב את גובה הפאה הצדדית SBC.

ב. חשב את גובה הפאה הצדדית ABS.

ג. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.

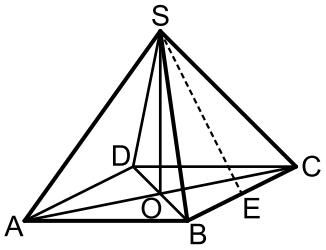
ד. הנקודה E היא אמצע BC.
חשב את הזווית שבין SE לבסיס ABCD.

**13)** נתונה פירמידה ישרה ומרובעת שבסיסה ABCD הוא מלבן.
נתון: אורך אלכסון הבסיס AC הוא 10 ס"מ.
גובה הפירמידה SO הוא 12 ס"מ.



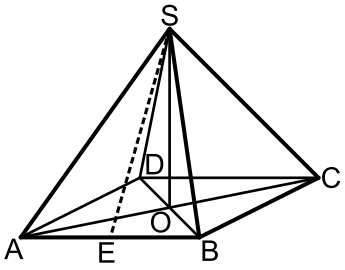

א. חשב את אורך המקצוע הצדדי.
ב. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.
ג. נתון כי זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא $40°$.
חשב את אורך מקצוע הבסיס BC.
חשב את אורך המקצוע AB ואת נפח הפירמידה.

**14)** נתונה פירמידה SABCD, מרובעת וישרה שבסיסה מלבן.
E אמצע BC. $AB = 16$ ס"מ. גובה הפירמידה: $SO = 10$ ס"מ.



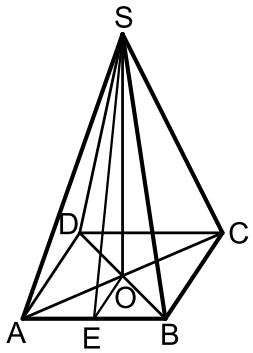

א. חשב את הזווית שבין הקטע SE לבסיס הפירמידה ABCD.
ב. חשב את מקצוע BC אם נתון כי נפח הפירמידה הוא 480 סמ"ק.
ג. סמן ב-F את אמצע המקצוע AB.
חשב את הזווית שבין SF לבסיס הפירמידה.

**15)** נתונה פירמידה SABCD שבסיסה מלבן.
זווית הראש של פאה צדדית SAB היא $56°$.
אורך מקצוע הבסיס AB שווה ל-12 ס"מ.



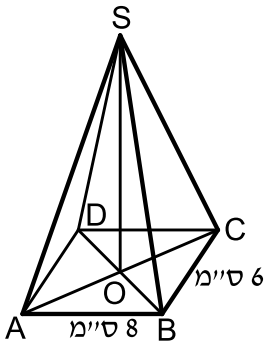

א. חשב את אורך הגובה SE של הפאה SAB.
ב. חשב את אורך המקצוע הצדדי SA.
ג. נתון כי אורך המקצוע AD הוא 8 ס"מ.
חשב את גובה הפירמידה.
ד. חשב את נפח הפירמידה.
ה. חשב את הזווית בין הקטע SE לבסיס הפירמידה.
ו. חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

**16)** נתונה פירמידה SABCD מרובעת וישרה שבסיסה מלבן. אורך המקצוע AB הוא 15 ס"מ.
הגובה SE של הפאה הצדדית SAB הוא 20 ס"מ.
גובה הפירמידה SO הוא 18 ס"מ.




א. חשב את אורך מקצוע הבסיס AD.
ב. חשב את גובה הפאה הצדדית SBC.
ג. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.

**17)** נתונה פירמידה ישרה SABCD.
הבסיס ABCD הוא מלבן שבו: $AB = 8$ ס"מ , $BC = 6$ ס"מ.
אורך מקצוע צדדי הוא 17 ס"מ.

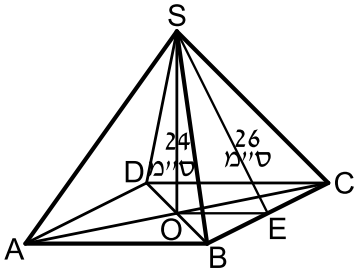



א. חשב את הזווית $\sphericalangle CSA$.

ב. חשב את הזווית $\sphericalangle CSB$.

ג. חשב את נפח הפירמידה.

**18)** נתונה פירמידה SABCD מרובעת וישרה שבסיסה מלבן.
גובה הפירמידה שווה ל-24 ס"מ.
הגובה SE בפאה הצדדית SBC שווה ל-26 ס"מ.
חשב את:



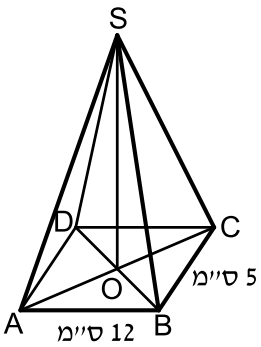

א. אורך המקצוע AB.

ב. הזווית בין הקטע SE לבסיס ABCD.

ג. נפח הפירמידה הוא 2400 סמ"ק.

ד. חשב את אורך המקצוע BC.

**19)** נתונה פירמידה מרובעת וישרה SABCD.
בסיס הפירמידה הוא מלבן.
אורכי צלעות הבסיס הם: $BC = 5$ ס"מ , $AB = 12$ ס"מ.
זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא $42°$.

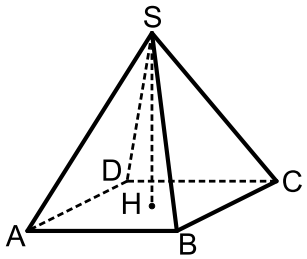



א. חשב אורך מקצוע צדדי.

ב. חשב את שטח הפאה SBC.

ג. חשב את גובה הפירמידה, SO.

**20)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה
ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AD = 17$ ס"מ , $AB = 25$ ס"מ , $SH = 12$ ס"מ.




א. חשב את אלכסון הבסיס של הפירמידה.

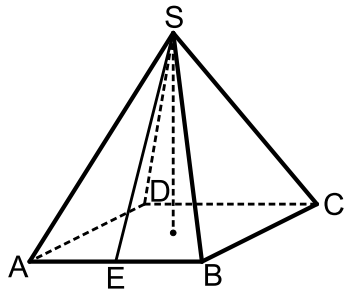
ב. חשב את המקצוע הצדדי של הפירמידה.

ג. חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבין בסיס הפירמידה.

**21)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).

נתון: $AD = 15$ ס"מ , $AB = 20$ ס"מ.

הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 22$ ס"מ.




א. חשב את גובה הפירמידה.

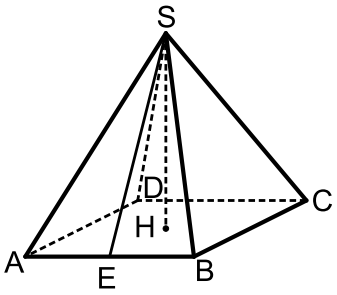
ב. חשב את נפח הפירמידה.

ג. חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.

**22)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).

נתון: $AD = 16$ ס"מ , $AB = 17$ ס"מ.

הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 12$ ס"מ.




א. חשב את גובה הפירמידה.

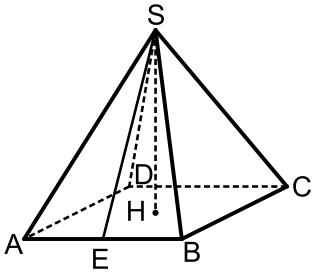
ב. חשב את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.

ג. חשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי לבין בסיס הפירמידה.

**23)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).

נתון: $AB = 20$ ס"מ , $SH = 8$ ס"מ.

הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 12$ ס"מ.




א. חשב את האורך AD.

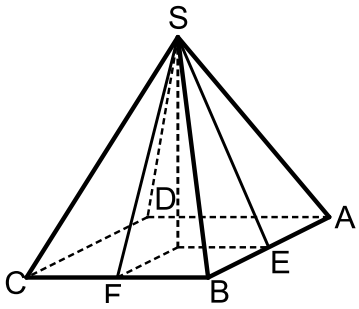
ב. חשב את אורך DH.

ג. חשב את נפח הפירמידה.

**24)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).

נתון: $AB = 15$ ס"מ , $BC = 20$ ס"מ. E היא האמצע של AB.

הזווית שבין הישר SE לבסיס היא בת $55°$.



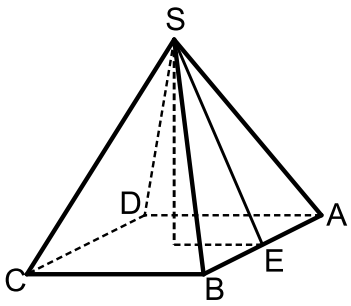

א. חשב את גובה הפירמידה.

ב. F היא האמצע של BC. חשב את זווית שבין הישר SF לבין בסיס הפירמידה.

ג. חשב את גובה הפאה הצדדית SAB.

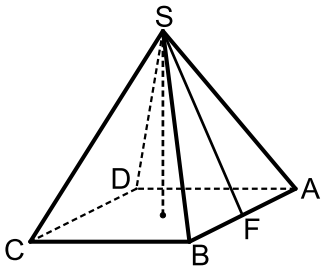
ד. חשב את שטח הפאה SAB.

**25)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
גובה הפירמידה הוא 17 ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא 22 ס"מ = SE.



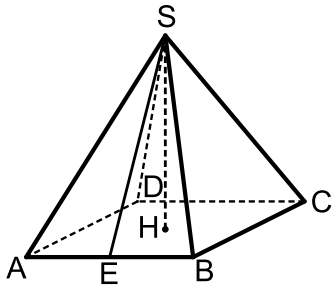

א. חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.
ב. חשב את מקצוע הבסיס, BC.
ג. חשב את מקצוע הבסיס, AB,
אם נפח הפירמידה הוא 1000 סמ"ק.

**26)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: AD = 15 ס"מ , AB = 20 ס"מ.
זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא בת 38°.



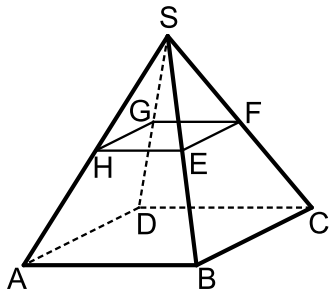

א. חשב את הגובה של הפאה הצדדית SAB.
ב. חשב את הזווית שבין SF לבין בסיס הפירמידה.
ג. חשב את גובה הפירמידה.

**27)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: AD = 15 ס"מ , AB = 20 ס"מ.
זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא בת 38°.



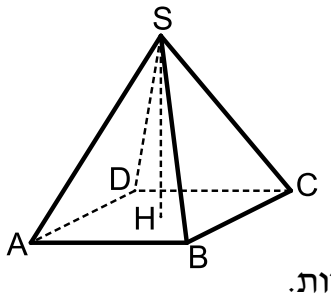

א. חשב את גובה הפאה SAB.
ב. חשב את גובה הפירמידה.
ג. חשב את זווית הראש של הפאה SAD.

**28)** נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן.
מאמצעי המקצועות הצדדיים מעבירים קטעים כך שנוצר המלבן EFGH.
ידוע כי שטח מלבן זה הוא 48 סמ"ר וכי אורך האלכסון שלו הוא 10 ס"מ.
הזווית HSF היא בת 50°.

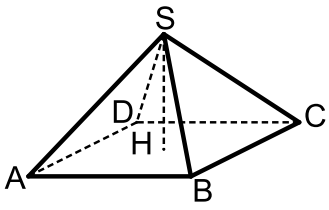



א. מצא את מידות הבסיס ABCD.
ב. מצא את גובה הפירמידה.
ג. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.

**29)** נתונות שתי פירמידות ישרות שבסיסן מלבן:
האחת- SABCD והשנייה- S'A'B'C'D'.
הקטעים SH ו-S'H' הם בהתאמה הגבהים של שתי הפירמידות.
ידוע כי: $AB = 2k$ , $BC = k$ , $HS = 3k$
וכי: $H'S' = 2k$ , $B'C' = k$ , $A'B' = 3k$.



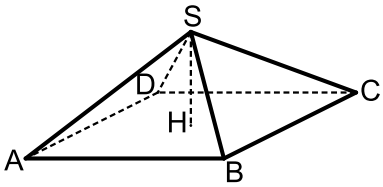

א. לפניך מספר טענות - קבע אלו נכונות ואלו שגויות. נמק.




i. לשתי הפירמידות אותו שטח פנים.
ii. לשתי הפירמידות אותו הנפח.
iii. בשתי הפירמידות הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה שווה.
iv. אורך מקצוע צדדי בפירמידה SABCD גדול יותר מאורך מקצוע צדדי בפירמידה S'A'B'C'D'.

ב. מצא את הערך של $k$ בעבורו סכום הנפחים של שתי הפירמידות יהיה שווה לנפחה של קובייה בעלת אורך מקצוע של 4 ס"מ.

**30)** נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן.
ידוע כי מקצוע הבסיס BC שווה באורכו לגובה הפירמידה ויסומן ב- $t$.
כמו כן נתון כי אלכסון הבסיס AC גדול פי 4 מהמקצוע BC.




א. הבע באמצעות $t$ את אורך המקצוע AB.

ב. הורד גובה SH למקצוע BC במישור הפאה SBC וחשב את הזווית הנוצרת בינו לבין מישור הבסיס ABCD.

ג. חשב את הזויות שבין שני מקצועות צדדיים שאינם סמוכים.

ד. מסמנים את פגישת התיכונים בפאה SBC ב-N.
מעבירים קטע היוצא מנקודת פגישת האלכסונים במישור הבסיס ABCD לנקודה N.
חשב את הזווית שהוא יוצר עם הבסיס.

## תשובות סופיות:

**11)** א. $V=300$ סמ"ק ב. 13 ס"מ ג. $66.57°$.

**12)** א. 16.115 ס"מ ב. 15.207 ס"מ ג. $M=263.26$ סמ"ר ד. $68.2°$.

**13)** א. 13 ס"מ ב. $67.38°$ ג. $BC=8.89$ ס"מ

ד. $AB=4.579$ ס"מ , $V=162.32$ סמ"ק

**14)** א. $51.34°$ ב. $BC=9$ ס"מ ג. $65.77°$.

**15)** א. $SE=11.284$ ס"מ ב. $SA=12.78$ ס"מ ג. $h=10.551$ ס"מ

ד. $V=337.632$ סמ"ק ה. $69.24°$ ו. $55.65°$.

**16)** א. $AD=17.435$ ס"מ ב. $SF=19.5$ ס"מ ג. $M=640$ סמ"ר.

**17)** א. $34.21°$ ב. $20.328°$ ג. $V=260$ סמ"ק.

**18)** א. $AB=20$ ס"מ ב. $67.38°$ ג. $BC=15$ ס"מ.

**19)** א. 6.796 ס"מ ב. $S_{\Delta SBC}=16.282$ סמ"ר ג. $h=2.533$ ס"מ.

**20)** א. 30.23 ס"מ ב. 19.3 ס"מ ג. $38.44°$.

**21)** א. $h=20.68$ ס"מ ב. $V=2068.2$ סמ"ק ג. $70.07°$.

**22)** א. $h=8.94$ ס"מ ב. 14.7 ס"מ ג. $37.45°$.

**23)** א. $AD=17.89$ ב. $DH=13.42$ ס"מ ג. $V=954.1$ סמ"ק.

**24)** א. $h=14.28$ ס"מ ב. $62.29°$ ג. 17.43 ס"מ ד. 130.7 סמ"ר.

**25)** א. $50.6°$ ב. $BC=27.93$ ס"מ ג. $AB=6.32$ ס"מ.

**26)** א. 29.04 ס"מ ב. $75.03°$ ג. $h=28.05$ ס"מ.

**27)** א. 29.04 ס"מ ב. $h=28.05$ ס"מ ג. $28.27°$.

**28)** א. 12 ס"מ ו-16 ס"מ. ב. 21.44 ס"מ. ג. 823 סמ"ר.

**29)** א. i. לא נכון. שטח הפנים הוא שונה: $P_{S'A'B'C'D'}\approx 11.68k^2$ , $P_{SABCD}\approx 11.245k^2$.

ii. נכון. הנפח הוא: $V=2k^3$.

iii. לא נכון. הזוויות המתקבלות הן: $51.67°$ , $69.56°$.

vi. נכון. מתקבל: $k\sqrt{10.25}>k\sqrt{6.5}$.

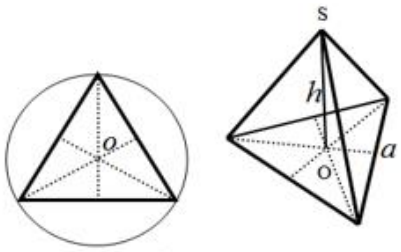
**30)** א. $AB=t\sqrt{15}$ ב. $\sphericalangle SHM=27.31°$ ג. $\sphericalangle ASC=126.86°$

ד. $\sphericalangle NMH=14.47°$.

# פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות:

## סיכום כללי:

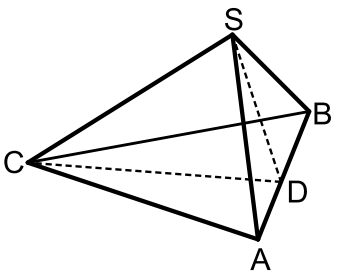
באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.




תיאור פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות.
ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת התיכונים (נקודת מרכז המעגל החוסם את המשולש).

## שאלות:

**31)** נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. מעבירים את הגובה SD בפאה הצדדית ASB וכן את הגובה CD בבסיס ABC. זווית הבסיס של פאה צדדית במנסרה היא $50°$ ושטח המעטפת הוא 89.38 סמ"ר.




א. מצא את אורך מקצוע הבסיס של המנסרה.

ב. מצא את גובה המנסרה.

ג. חשב את הזווית SDC.

ד. חשב את הזווית שבין המקצוע SC לבסיס הפירמידה.

**32)** נתונה פירמידה משולשת, משוכללת וישרה.
אורכו של מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ ואורכו של המקצוע הצדדי הוא 14 ס"מ.

א. חשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי ובסיס הפירמידה.

ב. חשב את גובה פירמידה.

ג. חשב את הזווית שבין הפאה הצדדית ובסיס הפירמידה.

ד. חשב את הזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות בפירמידה.

**33)** נתונה פירמידה משולשת, משוכללת וישרה. הזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות היא $\beta$. זווית הבסיס של פאה צדדית היא $\gamma$.

הוכח: $\sin\gamma\cdot\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}$.

## תשובות סופיות:

**31)** א. 10 ס"מ. ב. 5.21 ס"מ. ג. $61°$ ד. $42°$ .

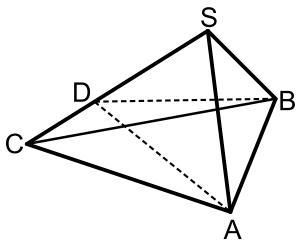
**32)** א. $60.339°$ ב. $\sqrt{148}$ ס"מ. ג. $74.106°$ ד. $67.2°$ .

**33)** הוכחה.

# פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים:

## שאלות:

**34)** נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים $(AC=BC)$. מעבירים גבהים למקצוע SC במישורי הפאות SAC ו-SBC כך שהזווית הנוצרת בין מישורים אלו היא $\sphericalangle ADB=42°$. ידוע כי אורך המקצוע AB הוא 8 ס"מ.




הגובה AD בפאה SAC מחלק את המקצוע SC ביחס: $\frac{DC}{SD}=\frac{2}{3}$.

א. חשב את אורך הגובה AD.

ב. חשב את זווית הראש בפאה SAC.

ג. חשב את שטח משולש הבסיס ABC.

**35)** נתונה פירמידה משוכללת וישרה SABC.

הבסיס הוא משולש שווה שוקיים $(AC=BC)$, אורך שוקו $k$ וזווית הראש שלו היא $2\gamma$. אורך כל מקצוע צדדי בפירמידה גם הוא $k$.

הבע באמצעות $k$ ו- $\gamma$ את נפח הפירמידה.

## תשובות סופיות:

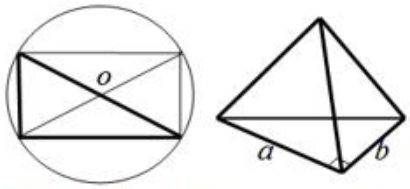
**34)** א. 11.16 ס"מ. ב. $53.13°$ ג. 47.27 סמ"ר.

**35)** $V=\frac{k^3\sin 2\gamma\cdot\sqrt{4\cos^2\gamma-1}}{12\cos\gamma}$.

# פירמידה שבסיסה הוא משולש ישר זווית:

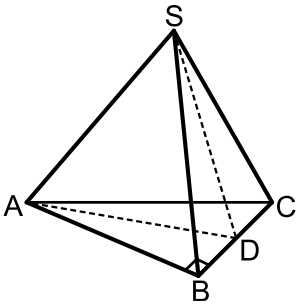
## סיכום כללי:

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.




תיאור פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית.
ניתן לראות כי משולש הבסיס מתקבל ממלבן ע"י העברת אלכסון, לכן נקודת המרכז היא מפגש האלכסונים (בדומה לבסיס מלבני).

## שאלות:




**36)** נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90°)$.
בפירמידה זו מעבירים גובה SD בפאה הצדדית SBC כך שנוצר המשולש SAD.
ידוע כי משולש זה הוא שווה שוקיים ובו נסמן: $SA = AD = 2m$.
הזווית הנוצרת בין הגובה SD והקטע AD תסומן ב- $\sphericalangle SDA = \alpha$.

א. הראה כי הגובה SD בפאה SBC שווה באורכו למקצוע הבסיס AB.

ב. מה ניתן לומר על המשולשים SAB ו-SAD במקרה זה?

ג. הבע באמצעות $m$ , $\alpha$ את גובה הפירמידה.

**37)** נתונה פירמידה משולשת וישרה שבסיסה משולש ישר זווית.
אחד מהניצבים במשולש הוא $c$ והזווית שמולו היא $\alpha$.
הזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס היא $\beta$.
הבע באמצעות $c$ , $\alpha$ ו- $\beta$ את נפח הפירמידה.

## תשובות סופיות:

**36)** א. $SD = AB = 4m\cos\alpha$ ב. המשולשים חופפים. ג. $2\sqrt{3}m\cos\alpha$.

**37)** $V = \dfrac{c^3 \tan\beta}{12\tan\alpha\sin\alpha}$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 27 - טריגונומטריה במרחב - גליל חרוט וכדור

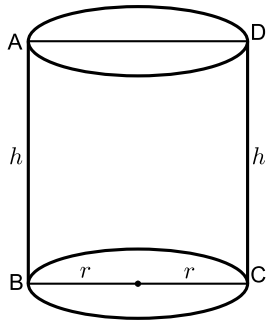
### תוכן העניינים

1. הגליל ..... 455
2. החרוט ..... 457
3. הכדור ..... 460

# הגליל:

## סיכום כללי:

**הגדרות:**

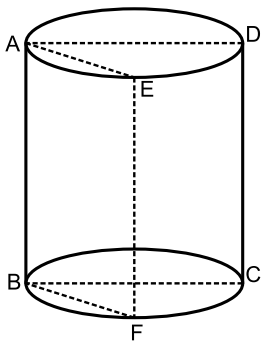



- נתון מעגל במישור $\alpha$. אם דרך כל הנקודות שעל המעגל נעלה אנכים למישור $\alpha$ ונחתוך אותם ע"י מישור נוסף $\beta$ המקביל ל- $\alpha$ נקבל גוף הנקרא גליל.
- לכל גליל יש שני בסיסים השווים זה לזה.
- המרחק בין שני בסיסי הגליל נקרא **גובה הגליל**.
- הישר AB נקרא **הקו היוצר** של הגליל (והוא גובה הגליל).
- כאשר חותכים את הגליל ע"י מישור שמאונך לבסיסי הגליל ועובר דרך המרכזים של שני הבסיסים, מתקבל מלבן הנקרא **החתך הצירי של הגליל**.
- אם נפרוש את מעטפת הגליל נקבל מלבן שאורכו $2\pi r$ וגובהו $h$.

**נוסחאות:**

- נפח גליל: $V=\pi r^2 h$.
- שטח מעטפת של גליל: $M=2\pi rh$.
- שטח פנים של גליל: $P=2\pi r^2+2\pi rh$.

## שאלות:



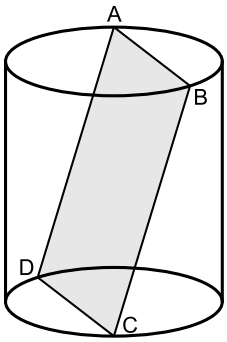

**1)** בגליל ישר חתכו מישור AEFB, היוצר עם מישור החתך הצירי ABCD של הגליל זווית $\alpha$. האלכסון $AF=\ell$ של המרובע AEFB יוצר עם מישור בסיס הגליל זווית $\beta$.
הבע את נפח הגליל באמצעות $\alpha,\beta$ ו- $\ell$.

**2)** האלכסון העובר במעטפת של גליל ישר כאשר היא פרושה יוצר זווית $\alpha$ עם גובה הגליל. אורך האלכסון בחתך הצירי של הגליל הוא $d$.

הבע באמצעות $d$ ו- $\alpha$ את שטח המעטפת של הגליל והוכח שהוא שווה: $\frac{\pi^2 d^2 \tan\alpha}{\pi^2+\tan^2\alpha}$.

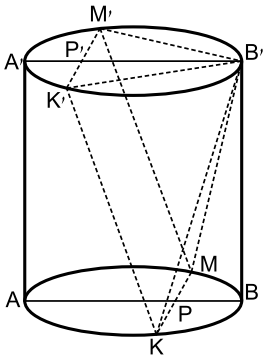
**3)** ABCD הוא חתך מלבני מישורי, בתוך גליל ישר, שהזווית בינו לבין מישור בסיס הגליל היא $\alpha$.
הזווית בין האלכסון AC של המלבן ABCD למישור בסיס הגליל היא $\beta$.
הצלע BC שווה ל- $a$.

הוכח שנפח הגליל הוא: $\frac{\pi a^3 \sin^3\alpha}{4\tan^2\beta}$.




**4)** נתון גליל ישר שגובהו 16 ס"מ ורדיוס בסיסיו הוא 12 ס"מ. מעבירים את הקטרים AB ואת A'B' אשר מקבילים זה לזה בשני הבסיסים בהתאמה.

הנקודות P ו-P' נמצאות על הקטרים כך ש: $A'P'=\frac{1}{4}A'B'$ ו- $BP=\frac{1}{4}AB$. דרך הנקודה P מעבירים KM מאונך ל-AB ודרך הנקודה P' מעבירים את K'M' המאונך ל-A'B'.
מצא את נפח הפירמידה המרובעת שבסיסה הוא KMM'K' וקדקודה בנקודה B'.




## תשובות סופיות:

**1)** $V=\frac{\pi\ell^3\cos^2\beta\sin\beta}{4\cos^2\alpha}$.

**2)** שאלת הוכחה.

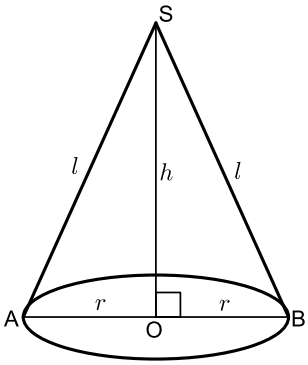
**3)** שאלת הוכחה.

**4)** צריך לחשב.

# החרוט:

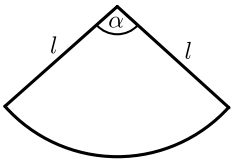
## סיכום כללי:

**הגדרות:**




- כאשר מחברים את נקודה S הנמצאת מחוץ למישור שבו נמצא מעגל ברדיוס $r$, עם כל הנקודות שעל מעגל זה, יתקבל חרוט.
- הנקודה S נקראת קדקוד החרוט.
- אם העקב של הגובה היורד מ-S נמצא במרכז המעגל, החרוט הוא **חרוט ישר**.
- לישר AS קוראים **הקו היוצר** (והוא מסומן ב-$l$).

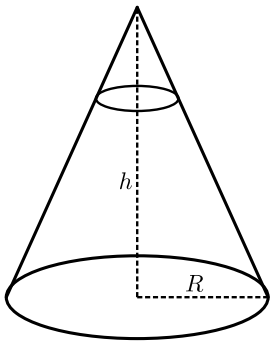
- אם נחתוך חרוט ישר במישור העובר דרך הגובה, נקבל משולש שווה שוקיים שבסיסו הוא קוטר המעגל. למשולש זה קוראים בשם **החתך הצירי של החרוט**.
- אם נחתוך חרוט לאורך הקו היוצר שלו ונפרוש את מעטפת החרוט, נקבל גזרת עיגול עם זווית מרכזית $\alpha$ המקיימת: $\frac{\alpha}{360}=\frac{r}{l}$.



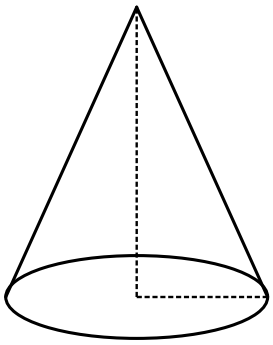

**נוסחאות:**

- נפח חרוט: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.
- שטח מעטפת של חרוט: $M=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$.
- שטח פנים של חרוט: $P=\pi r^2+\pi r\sqrt{r^2+h^2}$.

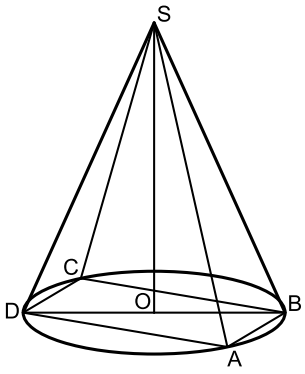
## שאלות:



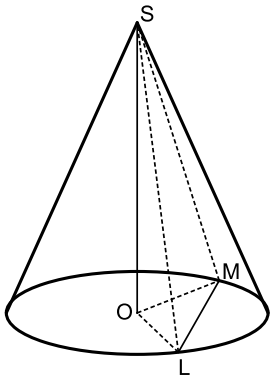

**1)** נתון חרוט ישר, שרדיוס בסיסו $R$ , וגובהו $h$ .
מישור מקביל לבסיס חותך את החרוט.
החתך הוא מעגל, ששטחו שווה לרבע משטחו של בסיס החרוט.
מצא את היחס בין נפח החרוט, שנוצר ע"י החיתוך, לבין נפח החרוט המקורי.



**2)** שטח פני חרוט ישר שווה ל- $245\pi$ סמ"ר.
אם נפרוש את המעטפת הנ"ל במישור,
נקבל גזרת עיגול בת זווית מרכזית השווה ל- $60°$ .
מצא את נפח החרוט הנ"ל.

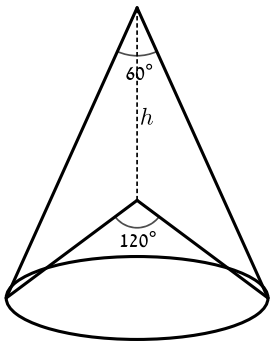



**3)** בבסיס חרוט ישר חסום ריבוע ABCD שצלעו $a$.
מחברים את הקדקודים A ו-B של הריבוע עם ראש החרוט S, ומתקבל משולש שווה שוקיים SAB עם זווית הראש $\sphericalangle ASB = \alpha$ .
הבע את נפח החרוט באמצעות $a$ ו- $\alpha$ .




**4)** נתון חרוט ישר שקדקודו S ומרכז בסיסו הוא O.
מעבירים מיתר LM כך ש- $\sphericalangle LOM = \alpha$ .
הזווית שבין המישור LSM לבין בסיס החרוט היא $\beta$ .
מרחק המישור LSM ממרכז הבסיס הוא $d$ .
הבע את נפח החרוט באמצעות $\alpha$ , $\beta$ ו- $d$ .

**5)** נתונים שני חרוטים ישרים בעלי בסיס משותף.
בחרוט אחד זווית הראש של החתך הצירי היא בת $60°$
ובחרוט השני זווית הראש של החתך הצירי היא בת $120°$.
הקדקודים של שני החרוטים נמצאים במרחק $h$ זה מזה.
הוכח כי ההפרש בין הנפחים של שני החרוטים הוא $\frac{\pi h^3}{4}$.




## תשובות סופיות:

**1)** $\frac{1}{8}$.

**2)** $\frac{1225\pi}{3}$.

**3)** $\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$.

**4)** $\frac{\pi d^3}{3\sin^2\beta\cos\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

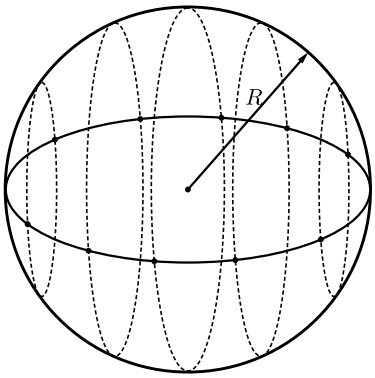
**5)** הוכחה.

# הכדור:

## סיכום כללי:

**הגדרות:**

כדור הוא גוף הנוצר מסיבובו של חצי מעגל סביב קוטרו.
קוטר זה הוא קוטר הכדור ושווה לפעמיים רדיוס הכדור.
כל הנקודות שעל הכדור נמצאות במרחקים שווים ממרכז הכדור (רדיוס הכדור).

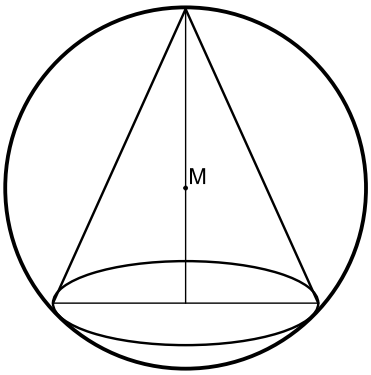



**נוסחאות:**

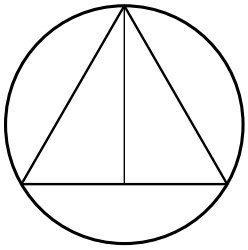
- נפח כדור: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.
- שטח פני הכדור: $P=4\pi R^2$.

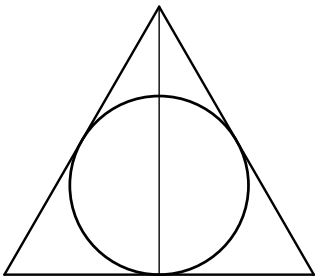
## שאלות:

**1)** חרוט ישר חסום בכדור, באופן שמרכז הכדור M נמצא על גובה החרוט.
קוטר בסיס החרוט שווה לרדיוס הכדור.
מצא את גודל הזווית בין הקו היוצר של החרוט לבין בסיסו.




**2)** בכדור בעל רדיוס $R$ חסום חרוט ישר, שבו זווית הראש של החתך הצירי שווה ל- $2\alpha$.
הבע את שטח מעטפת החרוט הנ"ל באמצעות $R$ ו- $\alpha$.





**3)** בחרוט ישר שבו זווית הראש של החתך הצירי היא $\alpha$,
והקו היוצר הוא $\ell$, חסום כדור.
הבע את נפח הכדור באמצעות $\alpha$ ו- $\ell$.

**4)** חרוט שגובהו גדול פי 4 מרדיוס בסיסו חסום בתוך כדור.
שטח הפנים של הכדור הוא $P$. הבע את נפח החרוט באמצעות $P$.

**5)** בפירמידה ישרה שבסיסה ריבועי חסום כדור שרדיוסו $R$.
כל אחת מהפאות הצדדיות יוצרת עם בסיס הפירמידה זווית $\beta$.
הבע את נפח הפירמידה באמצעות $R$ ו- $\beta$.

## תשובות סופיות:

**1)** $75°$.

**2)** $2\pi R^2 \sin 2\alpha \cos\alpha$.

**3)** $\frac{4}{3}\pi\ell^3 \sin^3\frac{\alpha}{2}\tan^3\left(45-\frac{\alpha}{4}\right)$.

**4)** $\frac{256P\sqrt{P}}{14739\sqrt{\pi}}$.

**5)** $\frac{4R^3}{3}\tan\beta\cot^3\frac{\beta}{2}$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 28 - וקטורים גיאומטריים

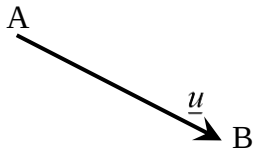
### תוכן העניינים

1. הגדרות וכללים יסודיים ..... 462
2. וקטורים הפורשים מישור ..... 467
3. מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור ..... 471

# הגדרות וכללים יסודיים:

## סיכום כללי:

**הגדרה כללית:**



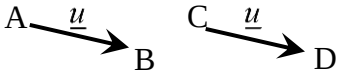

להלן תיאור של ווקטור גיאומטרי: ווקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: $\overrightarrow{AB}$.

ניתן לסמן ווקטור באות קטנה באופן הבא: $\underline{u}$ (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$).

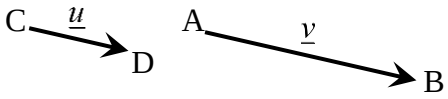
מהאיור לעיל מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

**קשרים בין ווקטורים:**

- ווקטורים שווים: שני ווקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.
  דוגמא לווקטורים שווים: מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

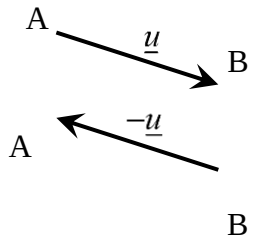



- ווקטורים מקבילים: שני ווקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.
  ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.
  ווקטורים מקבילים נקראים גם "ווקטורים תלויים ליניארית".
  דוגמא לתלות בין ווקטורים מקבילים:
  עבור $\alpha > 1$ מתקיים: $\underline{v} = \alpha\underline{u}$, או: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$.




- אם זוג ווקטורים במרחב: $\overrightarrow{AB} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD} = a\underline{u} + b\underline{v} + c\underline{w}$ מקבילים
  אז מתקיים: $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$.

- ווקטור המסומן $\overrightarrow{BA}$ הוא בעל גודל זהה לווקטור $\overrightarrow{AB}$
  וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$.

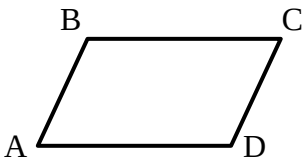



**הערה:**

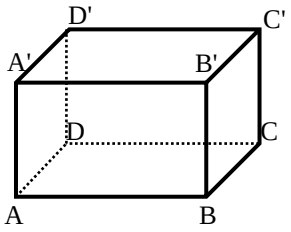
שני ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ יקראו מקבילים אם מתקיים: $\underline{v} = \alpha\underline{u}$ כאשר הגודל $\alpha$ יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום $\alpha \neq 0$. בפרט עבור $\alpha < 0$ כיוונם הפוך ב-$180°$.

## שאלות:

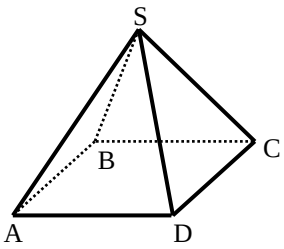
**1)** במקבילית ABCD נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים
ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



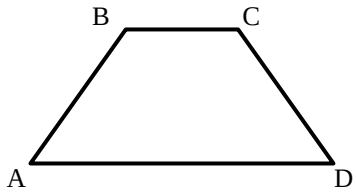

**2)** בתיבה ABCDA'B'C'D'
נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ .
מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים
ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.




**3)** בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ .
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים
ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.




**4)** בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ .
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע
באמצעות $\underline{u}$ או $\underline{v}$.

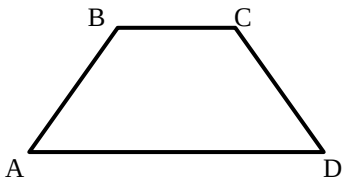



**5)** בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$

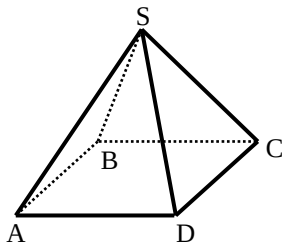
א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את
הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{DC}$.

ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{BE}$.

ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.



**6)** בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ .




א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את
הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{SC}$.

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{BN}$.

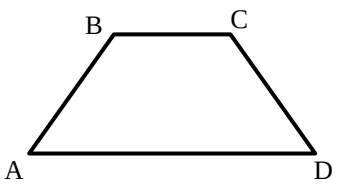
**7)** הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=2:3$ . נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

**8)** הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=3:5$ . נתון: $\overrightarrow{AP}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{PB}$ ו- $\overrightarrow{AB}$.

**9)** הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB}=\alpha$ . נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

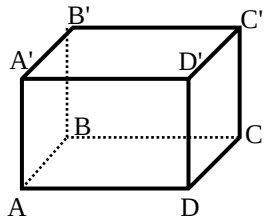
**10)** הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB}=\alpha$ . נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

**11)** בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה F נמצאת על הצלע CD
ומקיימת: $\frac{DF}{FC}=\beta$.




הבע באמצעות $\underline{u}$ , $\underline{v}$ ו- $\beta$ את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.

**12)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

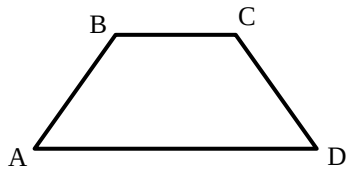



הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע $CC'$ ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$

הבע באמצעות $\underline{w}$ , $\underline{v}$ , $\underline{u}$ , $\alpha$ ו- $\beta$ את הווקטור: $\overrightarrow{PQ}$.

**13)** בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $AD=3BC$.

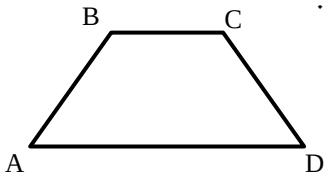



הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

מצא את ערכו של $\alpha$ שבעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AB}$ .

**14)** בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $AD=3BC$.

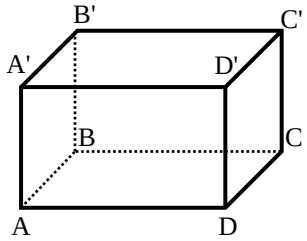



הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

מצא את ערכו של $\alpha$ שבעבורו מתקיים: $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AC}$.

**15)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$ .




הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע $CC'$ ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$ .

א. הבע באמצעות $\underline{w}$ , $\underline{v}$ , $\underline{u}$ , $\alpha$ ו- $\beta$ את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. האם קיימים ערכי $\alpha$ ו- $\beta$ שבעבורם $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה $ABB'A'$.

מצא את ערכי $\alpha$ ו- $\beta$ אם נתון כי $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{EC}$.

## תשובות סופיות:

1) $\underline{u}=\overrightarrow{DC}$ , $\underline{v}=\overrightarrow{BC}$.

2) $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{B'C'}$ , $\underline{u}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$ , $\underline{w}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BB'}$.

3) $\underline{w}=\overrightarrow{AS}$ , $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ , $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

4) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\underline{v}$.

5) א. $\overrightarrow{DC}=\underline{u}-\frac{2}{3}\underline{v}$ , $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}$ ב. $\overrightarrow{BE}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$ ג. $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}$.

6) א. $\overrightarrow{SC}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$ , $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\underline{v}$ ב. $\overrightarrow{BN}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$.

7) $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\underline{u}$ , $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\underline{u}$.

8) $\overrightarrow{PB}=\frac{5}{3}\underline{u}$ , $\overrightarrow{AB}=\frac{8}{3}\underline{u}$.

9) $\overrightarrow{PB}=(1-\alpha)\underline{u}$ , $\overrightarrow{AP}=\alpha\underline{u}$.

10) $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{1+\alpha}\underline{u}$ , $\overrightarrow{AP}=\frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}$.

11) $\overrightarrow{AF}=\frac{\beta}{1+\beta}\underline{u}+\frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v}$.

12) $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$.

13) $\alpha=2$.

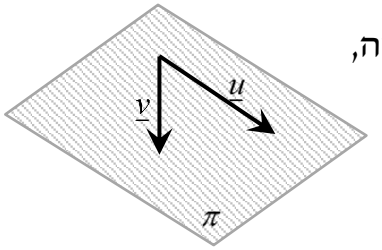
14) $\alpha=1$.

15) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. לא ג. $\alpha=\frac{1}{2}$ , $\beta=1$.

# ווקטורים הפורשים מישור:

## סיכום כללי:

**ווקטורים הפורשים מישור:**




כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:

הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ בעלי כוונים שונים ולכן פורשים

את המישור $\pi$.

**קומבינציה לינארית של ווקטורים:**

- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה לינארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים תלויים ליניארית (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

**דוגמא:**

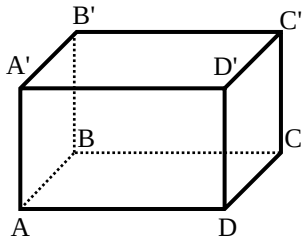
עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור $\underline{w}$ המוכל, או מקביל

למישור $\pi$ באופן הבא: $\underline{w}=\alpha\cdot\underline{u}+\beta\cdot\underline{v}$ כאשר: $\alpha,\ \beta$ מספרים ממשיים כלשהם.

במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{v}$ , $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ נקראים תלויים ליניארית.

## שאלות:

**16)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.




הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע $CC'$ ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$

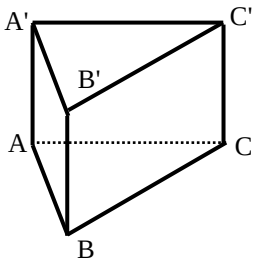
א. הבע באמצעות $\underline{w}$ , $\underline{v}$ , $\underline{u}$ , $\alpha$ ו- $\beta$ את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. מהו ערכו של $\alpha$ שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה $ADD'A'$?

ג. האם קיים ערך של $\beta$ שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לבסיס $ABCD$?

**17)** נתונה מנסרה משולשת $ABCA'B'C'$

ובה נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.




הנקודה M נמצאת על המקצוע $A'C'$ ומקיימת: $\frac{A'M}{MC'}=\alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC}=\beta$.

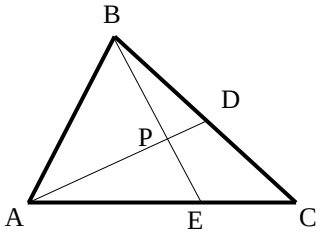
א. הבע באמצעות $\underline{w}$ , $\underline{v}$ , $\underline{u}$ , $\alpha$ ו- $\beta$ את הווקטור $\overrightarrow{NM}$.

ב. מהו ערכו של $\beta$ שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה $ACC'A'$?

ג. נתון כי הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה $ABB'A'$.
הבע את $\alpha$ באמצעות $\beta$.

**18)** במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC

והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE}=2$.



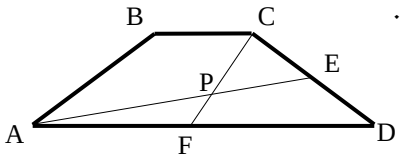

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נגדיר: $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, וכן: $\overrightarrow{AP}=t\cdot\overrightarrow{AD}$ , $\overrightarrow{BP}=s\cdot\overrightarrow{BE}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$ , $\underline{v}$ , $t$ ו- $s$ את הווקטור $\overrightarrow{AP}$ בשתי דרכים שונות.

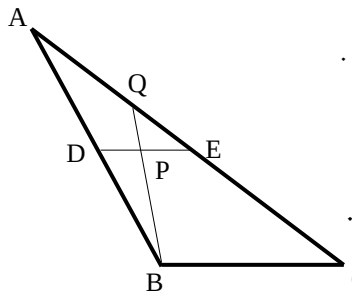
ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.

**19)** בטרפז $ABCD$, $(AD \parallel BC)$ שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$.




הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD
והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו-CF.
מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF.

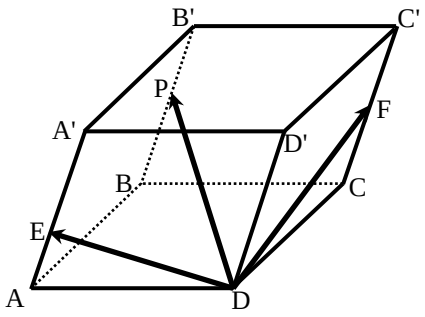
**20)** במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$.
הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP
חותך את הצלע AC בנקודה Q.




א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\Delta QPE}}{S_{\Delta DPB}}$.

**21)** במקבילון $ABCDA'B'C'D'$
נתון: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$.
הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע $CC'$,
הנקודה E נמצאת על המקצוע $AA'$
ומקיימת: $A'E = 2AE$ והנקודה P נמצאת על
המקצוע $BB'$ ומקיימת: $\overrightarrow{B'P} = k \cdot \overrightarrow{B'B}$.
נתון: $\overrightarrow{DP} = t \cdot \overrightarrow{DE} + s \cdot \overrightarrow{DF}$.




א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו-$k$ את הווקטור $\overrightarrow{DP}$.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע $BB'$.

ג. האם הנקודות D, E, F ו-P נמצאות על אותו מישור? נמק.

## תשובות סופיות:

**16)** א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. $\alpha=1$ ג. לא.

**17)** א. $\overrightarrow{NM}=(\beta-1)\underline{u}+\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}-\beta\right)\underline{v}+\underline{w}$ ב. $\beta=1$ ג. $\alpha=\frac{\beta}{1-\beta}$

**18)** א. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}t\underline{u}+\frac{1}{2}t\underline{v}$ , $\overrightarrow{AP}=(1-s)\underline{u}+\frac{2}{3}s\underline{v}$ ב. $BP:PE=3:2$ , $AP:PD=4:1$

**19)** $AP:PE=2:1$ , $CP:PF=2:1$

**20)** א. $AQ:QC=1:2$ ב. $\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}}=\frac{1}{3}$

**21)** א. $\overrightarrow{DP}=\underline{u}+\underline{v}+(1-k)\underline{w}$ ב. $B'P:PB=1:5$ ג. כן.

# מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:

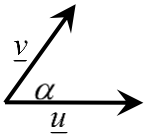
## סיכום כללי:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$$

כאשר $\alpha$ היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.

ניתן למצוא את הזווית שבין שני וקטורים ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.




גודל של וקטור נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}$, או: $|\underline{u}|^2=\underline{u}^2$.

**הערה:**

המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$ בין שני וקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

## שאלות:

**22)** חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

א. $\alpha=60°\ ,\ |\underline{v}|=2\ ,\ |\underline{u}|=3$

ב. $\alpha=120°\ ,\ |\underline{v}|=5\ ,\ |\underline{u}|=4$

ג. $\alpha=30°\ ,\ |\underline{v}|=6\ ,\ |\underline{u}|=2$

ד. $\alpha=180°\ ,\ |\underline{v}|=3\ ,\ |\underline{u}|=8$

ה. $\alpha=0°\ ,\ |\underline{v}|=5\ ,\ |\underline{u}|=3$

ו. $\alpha=90°\ ,\ |\underline{v}|=4\ ,\ |\underline{u}|=7$

**23)** חשב את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

א. $\underline{u}\cdot\underline{v}=6\ ,\ |\underline{v}|=4\ ,\ |\underline{u}|=3$

ב. $\underline{u}\cdot\underline{v}=-4\sqrt{3}\ ,\ |\underline{v}|=2\ ,\ |\underline{u}|=4$

ג. $\underline{u}\cdot\underline{v}=0\ ,\ |\underline{v}|=5\ ,\ |\underline{u}|=9$

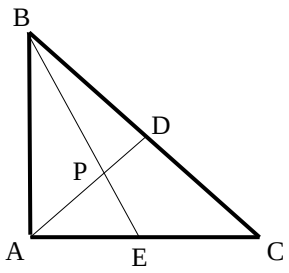
ד. $\underline{u}\cdot\underline{v}=12\ ,\ |\underline{v}|=6\ ,\ |\underline{u}|=2$

**24)** נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$ , $|\underline{v}|=3$ . הזווית ביניהם היא $120°$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר: $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

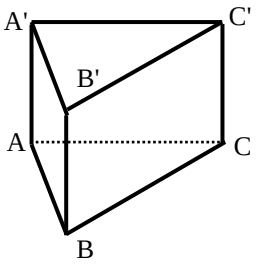
**25)** נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{u}|=4$ , $|\underline{v}|=5$ .
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר: $\overrightarrow{MN}=0.5\underline{u}-\underline{v}$.

**26)** נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$ , $|\underline{v}|=3$ . הזווית ביניהם היא $120°$.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PM}=4\underline{u}+\underline{v}$ , $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

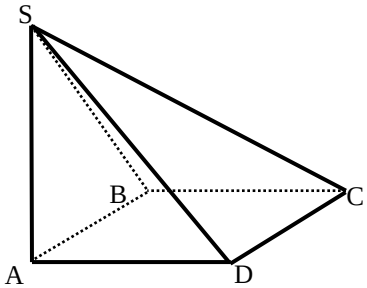
**27)** המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle BAC=90°$).
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.
נתון: $\frac{AP}{PD}=3$ , $AB=8$ , $AC=12$.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle DPC$.



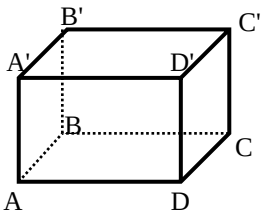

**28)** נתונה מנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C'
שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.
הנקודה M היא אמצע המקצוע A'C' והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $BN=2CN$.
נסמן: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle MAN$.




**29)** בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.
נתון: $AB=AD=\frac{1}{2}AS=k$.
נסמן: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle PAQ$.



**30)** בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ , $AB=\frac{1}{\sqrt{2}}AD=AA'$.




הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע DD'.

א. מהו ערכו של $\alpha$ שבעבורו מתקיים: $\left|\overrightarrow{AP}\right|=\frac{5}{6}\left|\overrightarrow{AQ}\right|$?

ב. הבע באמצעות $\alpha$ את $\cos\sphericalangle PAQ$
והראה כי לכל ערך של $\alpha$ הזווית $\sphericalangle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של $\alpha$ שבעבורו הזווית $\sphericalangle PAQ$ מקיימת: $\cos\sphericalangle PAQ=\frac{2}{3\sqrt{5}}$?

**31)** הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

**32)** נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$.

**33)** נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$.

**34)** נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $\overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}}{2}$.

**35)** נתונה פירמידה משולשת SABC שבה $\overrightarrow{AS}\perp\overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{AC}$.
הוכח: $\overrightarrow{CS}\perp\overrightarrow{AB}$.

**36)** הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

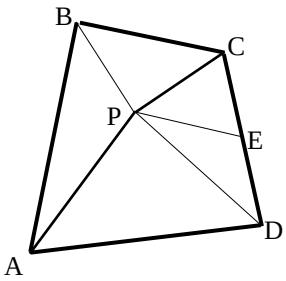
**37)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.
הוכח: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$.

ב. נתונה פירמידה משולשת SABC. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC.
הוכח: $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}\right)$.

ג. נתון בנוסף כי $\overrightarrow{AS}$ ו- $\overrightarrow{AP}$ מאונכים ל- $\overrightarrow{BC}$.
הוכח כי $AB=AC$. (הדרכה: סמן $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ , $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$).

**38)** הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים ישרי זווית וש"ש ($AP=PD$ , $BP=PC$).
הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח: $\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{AB}$.
(הדרכה: סמן $\overrightarrow{PA}=\underline{c}$ , $\overrightarrow{PC}=\underline{b}$ , $\overrightarrow{PD}=\underline{d}$ , $\overrightarrow{PB}=\underline{a}$).




**39)** בטטראדר SABC נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\overrightarrow{AP}=\alpha\cdot\overrightarrow{AS}$ .
הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\overrightarrow{SQ}=\beta\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$.

א. מצא את הקשר בין $\alpha$ ו- $\beta$ שבעבורו $\overrightarrow{PQ}$ מקביל למישור ABC.

ב. נתון: $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$ , $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BC}$ . הוכח: $AB=AC$.

**40)** נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים, אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

## תשובות סופיות:

**22)** א. 3 ב. -10 ג. $6\sqrt{3}$ ד. -24 ה. 15 ו. 0.

**23)** א. $60°$ ב. $150°$ ג. $90°$ ד. $0°$.

**24)** $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=18.248$

**25)** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{29}$

**26)** $31.87°$

**27)** $55.49°$

**28)** $70.623°$

**29)** $24.095°$

**30)** א. $\alpha=\frac{3}{4}$ ב. $\cos\left(\sphericalangle PAQ\right)=\frac{1}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$ ג. $\alpha=\frac{1}{2}$

**31)** שאלת הוכחה.

**32)** שאלת הוכחה.

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** שאלת הוכחה.

**35)** שאלת הוכחה.

**36)** שאלת הוכחה.

**37)** שאלת הוכחה.

**38)** שאלת הוכחה.

**39)** א. $\alpha+2\beta=1$ ב. שאלת הוכחה.

**40)** שאלת הוכחה.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 29 - וקטורים אלגבריים

### תוכן העניינים


1. שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים ..... 476
2. פעולות אלגבריות בין וקטורים ..... 480
3. גודל של וקטור ..... 482
4. וקטורים מקבילים ושווים ..... 483
5. זווית בין וקטורים ..... 484
6. הצגה פרמטרית של ישר ..... 485
7. מצב הדדי בין ישרים ..... 488
8. הצגה פרמטרית של מישור ..... 491
9. משוואת מישור ..... 493
10. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור ..... 494
11. מישורים המקבילים לצירים ..... 495
12. מצב הדדי בין ישר ומישור ..... 496
13. מצב הדדי בין מישורים ..... 498
14. ישר חיתוך בין מישורים ..... 499
15. חישובי זוויות שונות ..... (ללא ספר)
16. זווית בין שני ישרים ..... 500
17. זווית בין ישר ומישור ..... 502
18. זווית בין שני מישורים ..... 503
19. חישובי מרחקים ..... (ללא ספר)
20. מרחק בין שתי נקודות במרחב ..... 504
21. מרחק בין נקודה לישר ..... 505
22. מרחק בין נקודה למישור ..... 506
23. מרחק בין ישרים מקבילים ..... 507
24. מרחק בין ישר למישור ..... 508
25. מרחק בין מישורים מקבילים ..... 509
26. מרחק בין ישרים מצטלבים ..... 510

27. סיכום מרחקים (ללא ספר) ..... 511
28. שאלות מסכמות בוקטורים ..... 514
29. שאלות הנפתרות עם מכפלה וקטורית

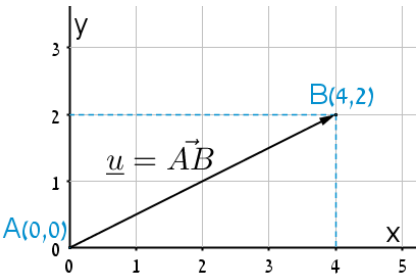
# שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים:

## סיכום כללי:

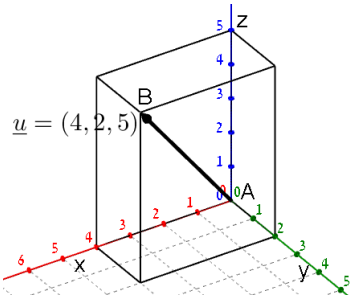
### הגדרה כללית:

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: $(x,y)$ במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.

דוגמאות:




- הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.




- הווקטור: $\underline{u}=(4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.

### ווקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים:

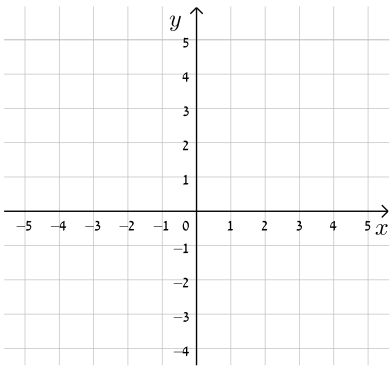
ווקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

### אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון:

- אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}$ , $y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$ , $z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו-$B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$ ; $y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$ ; $z_P=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$.

## שאלות:

**1)** שרטט את הווקטורים הבאים:



א. $\underline{u}=(4,2)$

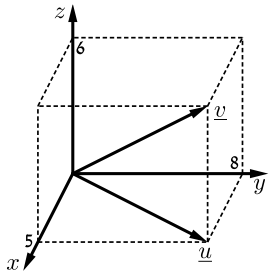
ב. $\underline{v}=(-5,1)$

ג. $\underline{w}=(3,-4)$

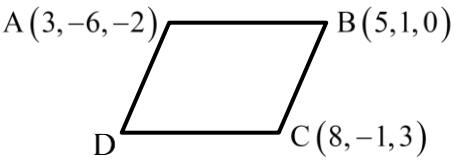
ד. $\underline{a}=(0,3)$

ה. $\underline{b}=(-5,0)$

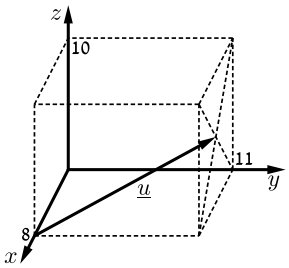
**2)** נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט.



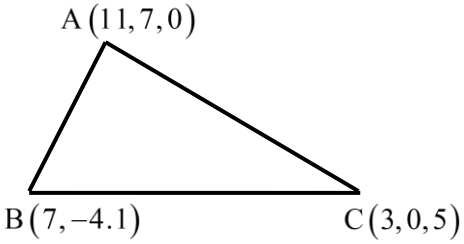

**3)** בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים (ראה איור).
מצא את שיעורי הקודקוד D.




**4)** נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.




**5)** בשרטוט נתון משולש ששיעורי קודקודיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.




**6)** מצא את $x$ , $y$ ו- $z$ אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר:

$\underline{u}=(4,-1,2)$ , $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$

**7)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ אם נתונות הנקודות $A(-3,5)$ ו-$B(6,1)$.

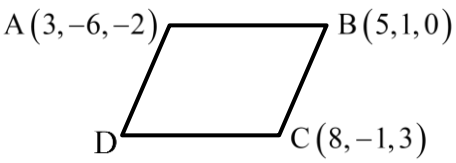
ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8,11)$ והווקטור $\overrightarrow{PQ}=(4,-3)$.

**8)** ענה על הסעיפים הבאים:

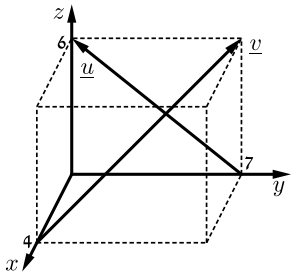
א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו-$F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$
והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

**9)** בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקודקוד D.

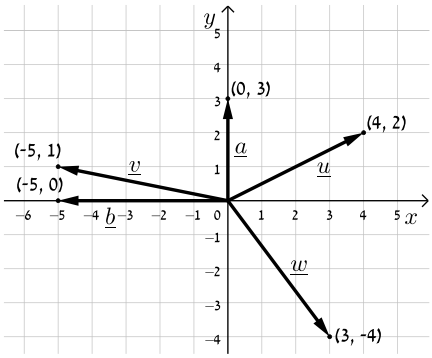



**10)** נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



## תשובות סופיות:

**1)** להלן סרטוט:




**2)** $\underline{u}=(5,8,0)$ , $\underline{v}=(5,8,6)$.

**3)** $D(6,-8,1)$.

**4)** $\underline{u}=(4,11,5)$.

**5)** $(7,1,2)$.

**6)** $x=5$ , $y=-2$ , $z=6$.

**7)** א. $\overrightarrow{AB}=(9,-4)$ ב. $Q(12,8)$.

**8)** א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N(-1,-5,10)$.

**9)** $D(6,-8,1)$.

**10)** $\underline{v}=(-4,7,6)$ , $\underline{u}=(0,-7,6)$.

# פעולות אלגבריות בין וקטורים:

## סיכום כללי:

**מכפלה סקלרית בהצגה אלגברית:**

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$ כאשר $\alpha$ היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של ווקטורים: $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$ , $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

## שאלות:

**11)** נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{v}=(-1,3,-5)$ , $\underline{u}=(4,0,9)$.
חשב את ערכי הווקטורים הבאים: $3\underline{u}+2\underline{v}$ , $\underline{u}-2\underline{v}$ , $\underline{u}-\underline{v}$ , $\underline{u}+\underline{v}$.

**12)** נתונים הווקטורים: $\underline{w}=(2,6,-5)$ , $\underline{v}=(4,-2,-6)$ , $\underline{u}=(-3,1,4)$.
חשב את:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

ד. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ה. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$ ו. $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

**13)** נתונות הנקודות הבאות: $A(1,-3,0)$ , $B(4,2,-1)$ , $C(3,-1,2)$.
מצא את הווקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$ ב. $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$ ג. $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

**14)** נתונים שלושה וקטורים: $\underline{w}=(x,5,-10)$ , $\underline{v}=(0,y,4)$ , $\underline{u}=(6,-1,z)$.

א. מצא את ערכם של $x,y,z$ המקיימים: $\underline{u}+2\underline{v}=\underline{w}$.

ב. מצא את ערכם של $x,y,z$ המקיימים: $2\underline{v}-3\underline{w}=\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v})$.

ג. כיצד תשתנה התוצאה של סעיף א' אם: $\underline{w}=(x,2z,-10)$ , $\underline{v}=(y\text{-}1,2,x)$, $\underline{u}=(6,y,z)$?

**15)** נתונים הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$.

א. חשב את תוצאת המכפלה הסקלרית עבור: $\underline{v}=(4,0,1)$ , $\underline{u}=(-6,2,3)$.

ב. מצא את $y$ עבורו תוצאת המכפלה הסקלרית של הווקטורים:

$\underline{v}=(2,y,4)$ , $\underline{u}=(1,7,-6)$ תהיה 1-.

ג. מצא את $y$ עבורו הווקטורים מהסעיף הקודם יהיו מאונכים זה לזה.

## תשובות סופיות:

**11)** $3\underline{u}+2\underline{v}=(10,6,17)$ ; $\underline{u}-2\underline{v}=(6,-6,19)$ ; $\underline{u}-\underline{v}=(5,-3,14)$ ; $\underline{u}+\underline{v}=(3,3,4)$.

**12)** א. $(6,-2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

ד. $(2.5,-1,-3.5)$ ה. $(9.5,9.5,-18)$ ו. $(19,19,-36)$

**13)** א. $(5,7,1)$ ב. $(-8,-16,8)$ ג. $(8,12,0)$

**14)** א. $x=6$ , $y=3$ , $z=-18$ ב. $x=-1$ , $y=9\frac{2}{3}$ , $z=72$

ג. $z=-\frac{2}{9}$ , $y=-4\frac{4}{9}$ , $x=-4\frac{8}{9}$.

**15)** א. $\underline{u}\cdot\underline{v}=-21$ ב. $y=3$ ג. $y=3\frac{1}{7}$ .

# גודל של וקטור:

## סיכום כללי:

גודלו של ווקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

## שאלות:

**16)** נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{v}=(5,-1,0)$ , $\underline{u}=(1,-3,2)$.
חשב את הגדלים של הוקטורים הבאים: $4\underline{u}-3\underline{v}$ , $2\underline{v}+\underline{u}$ , $\underline{v}$ , $\underline{u}$.

**17)** נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$ , $B(0,2,-1)$ , $C(-3,-5,0)$ , $D(-7,-5,2)$
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

## תשובות סופיות:

**16)** $|4\underline{u}-3\underline{v}|=\sqrt{266}$ ; $|2\underline{v}+\underline{u}|=\sqrt{150}$ ; $|\underline{v}|=\sqrt{26}$ ; $|\underline{u}|=\sqrt{14}$.

**17)** הוכחה.

## וקטורים מקבילים ושווים:

### שאלות:

**18)** נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$ , $B(-2,5,3)$ , $C(-1,8,4)$ , $D(4,3,-1)$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

**19)** נתונות הנקודות הבאות: $A(1,0,2)$ , $B(3,7,-4)$ , $C(6,9,0)$ , $D(7,4,10)$ , $E(9,11,4)$.

א. הראה כי: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

### תשובות סופיות:

**18)** א. הוכחה. ב. כן.

**19)** א. הוכחה. ב. לא.

# זווית בין וקטורים:

## סיכום כללי:

- זווית $\alpha$ בין שני וקטורים $\underline{u}$ , $\underline{v}$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.

## שאלות:

**20)** חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$ , $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$ , $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$ , $\underline{v}=(4,-2,-6)$

**21)** מצא את שטחו של משולש ABC שקודקודיו הם: $A(-3,2,1)$ , $B(0,3,2)$ , $C(5,-1,0)$.

**22)** נתונים הווקטורים: $\underline{v}=(5,0,3)$ , $\underline{u}=(2,-1,0)$.
מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

## תשובות סופיות:

**20)** א. $92.277°$ ב. $90°$ ג. $180°$.

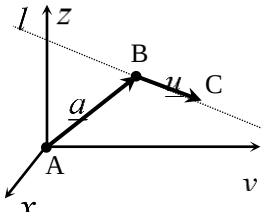
**21)** 10.173 יח"ש.

**22)** $\underline{w}=(3,6,-5)$ או $\underline{w}=(-3,-6,5)$.

# הצגה פרמטרית של ישר:

## סיכום כללי:

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני ווקטורים.




הווקטור $\underline{a}$ נקרא ווקטור ההעתקה.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.
הווקטור $\underline{u}$ נקרא ווקטור הכיוון של הישר.
זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$
כאשר $t$ הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירה של $t$ שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר $l$.

<u>דוגמא</u>: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$ , $B(5,3,1)$ ו-$C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים:

$$\underline{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,3,1) \;\; ; \;\; \underline{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l : \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$.

**הערות:**

- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה וווקטור הכיוון.
  ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l : \underline{x} = (7,0,10) + t(-6,9,-27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת $t_0$ בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת $t_1$ בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

## שאלות:

**23)** האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = (4,3,0) + t(1,-1,1)$?

**24)** האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = t(2,-1,5)$?

**25)** מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו-$B(1,6)$.

**26)** מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו-$D(4,1,1)$.

**27)** מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$
ומקביל לישר $\ell : \underline{x} = (0,3,-1) + t(-4,2,1)$.

**28)** מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$
ומאונך לישר: $\ell : \underline{x} = (1,2,0) + s(1,-2,4)$.

**29)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(4,5,6)$.
כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות $x$ , $y$ ו- $z$.

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות: $z = 4 - t$ , $y = 10$ , $x = 1 + 2t$.
כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

**30)** מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- $y$ במרחב.

**31)** מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$
ומקביל לציר ה- $z$.

**32)** מצא את נקודת החיתוך של הישר $\ell : \underline{x} = (1,-2,6) + t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

## תשובות סופיות:

**23)** כן.

**24)** לא.

**25)** $\ell : \underline{x} = (-5,-2) + t(6,8)$.

**26)** $\ell : \underline{x} = (4,1,1) + t(1,1,3)$.

**27)** $\ell : \underline{x} = (2,-7,1) + s(-4,2,1)$.

**28)** $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(2,1,0)$.

**29)** א. $x = 1+4t$ , $y = 2+5t$ , $z = 3+6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1,10,4) + t(2,0,-1)$

**30)** $\ell : \underline{x} = t(0,1,0)$.

**31)** $\ell : \underline{x} = (3,-1,4) + t(0,0,1)$.

**32)** $(7,-5,0)$.

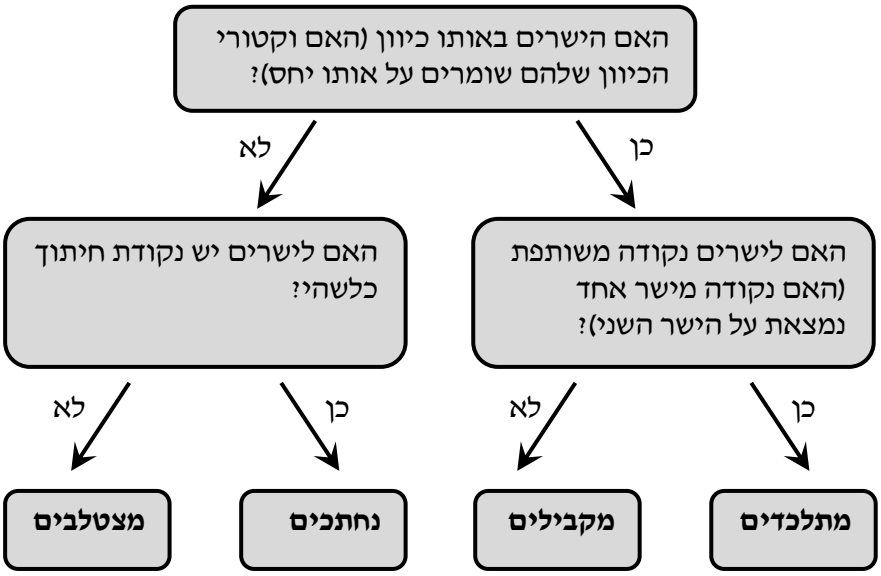
# מצב הדדי בין ישרים:

## סיכום כללי:

ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



## שאלות:

**33)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_1 : \underline{x} = (2,-3,0) + t(5,-1,2)$ , $\ell_2 : \underline{x} = (12,-5,4) + s(-10,2,-4)$ .

**34)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_3 : \underline{x} = (0,1,-7) + t(-2,1,1)$ , $\ell_4 : \underline{x} = (2,0,-6) + s(6,-3,-3)$ .

**35)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_5 : \underline{x} = (-3,5,1) + t(4,0,-1)$ , $\ell_6 : \underline{x} = (-1,7,4) + s(-1,1,2)$ .

**36)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_7 : \underline{x} = (3,0,0) + t(2,-2,5)$ , $\ell_8 : \underline{x} = (0,1,-5) + s(3,1,-2)$ .

**37)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_9 : \underline{x} = (-4,1,-1) + t(3,0,-1)$ , $\ell_{10} : \underline{x} = s(6,0,-2)$ .

**38)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{11} : \underline{x} = (2,8,-1) + t(1,0,0)$ , $\ell_{12} : \underline{x} = (-5,8,2) + s(2,0,-1)$ .

**39)** מצא את ערכו של הפרמטר $k$ שבעבורו הישרים הבאים:
$\ell_1 : \underline{x} = (k+1,1-k,6) + t(1,-2,2)$ , $\ell_2 : \underline{x} = (k-1,7,-k) + s(1-k^2,k^2+2,-6)$

א. מקבילים.

ב. מתלכדים.

**40)** נתונות הנקודות: $D(-2,3,k)$ , $C(-6,3,-1)$ , $B(k,-1,3)$ , $A(3,-1,5)$ .
הראה כי לכל ערך של $k$ הישרים $\ell_{AB}$ ו- $\ell_{CD}$ מצטלבים.

## תשובות סופיות:

**33)** מתלכדים.

**34)** מקבילים.

**35)** נחתכים, $(1,5,0)$.

**36)** מצטלבים.

**37)** מקבילים.

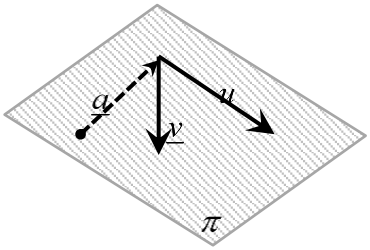
**38)** נחתכים, $(1,8,-1)$.

**39)** א. $k=2$. ב. $k=-2$.

**40)** הוכחה.

# הצגה פרמטרית של מישור:

## סיכום כללי:




מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.
הווקטור $\underline{a}$ הוא ווקטור ההעתקה.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ הם וקטורי הכיוון של המישור.
אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר $t, s$ הם מספרים ממשיים כלשהם ו-$\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור $\pi$.

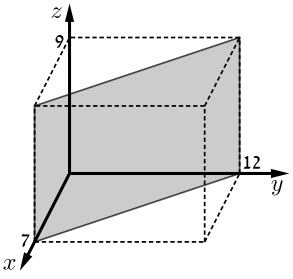
## שאלות:

**41)** מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבא:
$A(1,-4,0)$ , $B(3,6,2)$ , $C(0,-3,1)$.

**42)** מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$,
ומכיל את הישר $\ell : \underline{x} = (-2,-2,5) + t(1,0,-4)$ .

**43)** נתונים שני ישרים: $\ell_2 : \underline{x} = (2,16,11) + s(0,1,-6)$ , $\ell_1 : \underline{x} = (0,1,-1) + t(1,9,-3)$.
הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

**44)** מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5,-2,-1)$ ומכיל את ציר ה-$x$.




**45)** מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

**46)** נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המסומן.

## תשובות סופיות:

41) $\pi: \underline{x}=(1,-4,0)+t(2,10,2)+s(-1,1,1)$.

42) $\pi: \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)+s(8,9,-6)$.

43) $\pi: \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)+s(0,1,-6)$.

44) $\pi: \underline{x}=t(1,0,0)+s(5,-2,-1)$.

45) $\pi: \underline{x}=t(1,0,0)+s(0,0,1)$.

46) $\pi: \underline{x}=(7,0,0)+t(0,0,1)+s(-7,12,0)$.

# משוואת מישור:

## סיכום כללי:

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$,

כאשר: $(x,y,z)$ היא נקודה על המישור והמקדמים $a,b,c$ הם שיעורי ווקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h}=(a,b,c)$.

## שאלות:

**47)** קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi:\ 2x-y+3z-6=0$:

א. $D(5,7,1)$ ב. $E(2,-1,1)$

**48)** מצא את ערכו של $k$ שבעבורו הנקודה $A(1,k,-1)$ נמצאת על המישור: $\pi:\ kx-2y+(1+k)z+7=0$.

**49)** נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 3x+2y-z-9=0$.
מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

**50)** נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 4x+y-2z+8=0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

## תשובות סופיות:

**47)** א. על המישור. ב. לא על המישור.

**48)** $k=3$.

**49)** $(0,0,-9)$, $\left(0,4\frac{1}{2},0\right)$, $(3,0,0)$.

**50)** $\ell:\ \underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$.

## מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור:

### שאלות:

**51)** נתונה משוואת מישור: $\pi: 2x+3z-12=0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

**52)** נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.
מצא את משוואת המישור.

**53)** נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

**54)** המישור $\pi$ עובר בנקודות: $C(4,-1,0)$ , $B(2,0,0)$ , $A(1,0,-3)$.
מצא את משוואת המישור.

**55)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. לפניך הנקודות הבאות: $(1,1,0)$ , $(0,1,-2)$ , $(2,0,5)$.

i. הראה ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד ומצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.

ii. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.

ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א'?

### תשובות סופיות:

**51)** $\pi: \underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$.

**52)** $\pi: -2x+3y+z+19=0$.

**53)** $\pi: x-3y+8z=0$.

**54)** $\pi: 3x+6y-z-6=0$.

**55)** א. i. $\pi: \underline{x}=(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ ii. $-2x+3y+z-1=0$

ב. למשל: $(0,0,1)$ , $(-0.5,0,0)$ ג. לא.

# מישורים המקבילים לצירים:

## שאלות:

**56)** נתונה משוואת מישור: $\pi: (k+2)x+(k^2-2k-3)y-3z+k^2-1=0$.
לאיזה ערך של $k$ המישור מקביל לציר ה- $y$ (ולא מכיל אותו)?

**57)** פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$ , $y=0$ , $z=0$ ו- $x+3y+2z-6=0$. מצא את נפח הטטראדר.

## תשובות סופיות:

**56)** $k=3$.

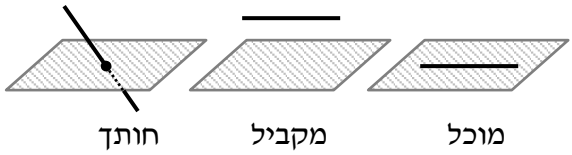
**57)** 6 יח"נ.

# מצב הדדי בין ישר ומישור:

## סיכום כללי:

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.




כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

## שאלות:

**58)** נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell: \underline{x}=(5,0,1)+t(4,1,-2)$ , $\pi: 2x-y-3z+6=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

**59)** נתונים הישר והמישור הבאים:
$\ell: \underline{x}=(2,-1,6)+t(-1,1,2)$ , $\pi: x-3y+2z-11=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

**60)** נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell: \underline{x}=(-6,1,0)+t(3,0,-1)$ , $\pi: 2x+y+6z+11=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

**61)** נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell: \underline{x}=(1,a,3)+t(4,1-b,0)$ , $\pi: 2x-y+z-4=0$.
מצא את ערכי $a$ ו- $b$ בעבורם הישר מוכל במישור.

## תשובות סופיות:

**58)** הישר חותך, $(1,-1,3)$.

**59)** מקבילים.

**60)** הישר מוכל.

**61)** $a=1$ , $b=-7$ .

# מצב הדדי בין מישורים:

## סיכום כללי:

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא ישר החיתוך.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

| מתלכדים | מקבילים | נחתכים |
|---|---|---|
| $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$ | $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$ | כל מצב אחר |

## שאלות:

**62)** נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א. $\pi_1:2x-y+4z-5=0$ , $\pi_2:4x-2y+8z-10=0$.

ב. $\pi_3:x+3y-z+1=0$ , $\pi_4:3x+9y-3z-8=0$.

ג. $\pi_5:5x-2y-2z+3=0$ , $\pi_6:2x+3y+z-5=0$.

**63)** נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_1:2x+\left(k^2+k\right)y-2z+1=0$ , $\pi_2:4x+12y-4z+k^2-2=0$.

מצא את ערכי $k$ עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים.

## תשובות סופיות:

**62)** א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

**63)** א. $k\neq 2,-3$. ב. $k=-3$. ג. $k=2$.

## ישר חיתוך בין מישורים:

### שאלות:

**64)** נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_2: 2x-y+z+10=0$ , $\pi_1: 4x+y-2z+2=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

**65)** נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_4: 2x-3y+z+4=0$ , $\pi_3: 8x+2y-3z+2=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

**66)** נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_6: 5x-2z+20=0$ , $\pi_5: 3x-3y+z+2=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

**67)** נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_8: z-2=0$ , $\pi_7: x-2y-z+6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

**68)** מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi: 6x-5y+z+18=0$
עם המישור $[xz]$.

**69)** נתונים שני מישורים: $\pi_2: 4x+y-z-6=0$ , $\pi_1: x-3y+2z-1=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

### תשובות סופיות:

**64)** $\ell: \underline{x}=(-2,6,0)+t(2,16,12)$.

**65)** $\ell: \underline{x}=(0,2,2)+t(1,2,4)$.

**66)** $\ell: \underline{x}=(0,4,10)+t\left(4,7\frac{1}{3},10\right)$.

**67)** $\ell: \underline{x}=(0,2,2)+t(4,2,0)$.

**68)** $\ell: \underline{x}=(-3,0,0)+t(3,0,-18)$.

**69)** $\ell: \underline{x}=t(1,9,13)$.

# זווית בין שני ישרים:

## סיכום כללי:

- זווית חדה $\alpha$ בין שני ישרים $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$ ו- $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos\alpha = \left|\frac{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|}\right|$.

## שאלות:

**70)** מצא את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\ell_2 : \underline{x} = s(-4,2,-4)$ , $\ell_1 : \underline{x} = (4,0,0) + t(6,8,1)$.

ב. $\ell_2 : \underline{x} = (6,5,4) + s(0,4,0)$ , $\ell_1 : \underline{x} = (10,17,-18) + t(3,0,-6)$.

**71)** מצא את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $B(6,0,-2)$ , $A(3,4,6)$ וישר העובר דרך הנקודות: $D(-1,4,2)$ , $C(6,5,1)$ וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.

**72)** נתונות הנקודות $C(3,-1,2)$ , $B(4,2,-1)$ , $A(1,-3,0)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

i. A ו-B.

ii. B ו-C.

iii. A ו-C.

ב. מי מבין הנקודות $D(4,2,-1)$ ו- $E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

**73)** נתון מישור שמשוואתו: $3x-4y+6=0$. הנקודות $B(-2,y,-1)$ , $A(x,6,1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$.
מצא את שיעורי הנקודה C אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא: $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

## תשובות סופיות:

**70)** א. $78.521°$ ב. $90°$.

**71)** $68.21°$. הישרים מצטלבים.

**72)** א. i. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(3,5,-1)$ ii. $\ell : \underline{x} = (4,2,-1) + t(-1,-3,3)$

א. iii. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(2,2,2)$ ב. הנקודה D. ג. $35.477°$.

**73)** $C(0,2,11)$ או $C(0,28.45,11)$

# זווית בין ישר ומישור:

## סיכום כללי:

- זווית חדה $\alpha$ בין ישר $l=\underline{a}+t\underline{u}$ ומישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$
  תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha=\left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.

## שאלות:

**74)** מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
$\pi:\ 3x-2y+2z+9=0$ , $\ell:\ \underline{x}=(-2,0,5)+t(-2,1,2)$.

**75)** נתונות הנקודות $D(-7,3,-1)$ , $C(1,2,5)$ , $B(0,2,-1)$ , $A(1,-1,2)$.
מצא את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

**76)** נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה היא: $2x+y-2z-6=0$. קדקוד הפירמידה הוא $S(3,1,-2)$.
מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
אם נתון כי שיעורי הקודקוד B מקיימים: $x_B=z_B=-1$.

## תשובות סופיות:

**74)** $18.87°$.

**75)** $44.83°$.

**76)** $14.9°$.

# זווית בין שני מישורים:

## סיכום כללי:

- זווית חדה $\alpha$ בין שני מישורים: $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$
- תחושב ע"י: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{n}_1\cdot\underline{n}_2}{|\underline{n}_1|\cdot|\underline{n}_2|}\right|$.

## שאלות:

**77)** מצא את הזווית שבין המישורים הבאים: $\pi_1: 4x+3y+z-12=0$
ו- $\pi_2: 4x-7y+5z+3=0$.

**78)** נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקודקודיה הם:
$A(0,2,-5)$ , $B(3,-1,1)$ , $C(7,-1,-5)$ , $D(3,2,0)$.
מצא את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

**79)** מצא את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x+5y-z+4=0$ למישור $[xz]$.

## תשובות סופיות:

**77)** $90°$.
**78)** $87.539°$.
**79)** $32.312°$.

# מרחק בין שתי נקודות במרחב:

## סיכום כללי:

מרחק בין שתי נקודות $A(x_1,y_1,z_1)$ ו-$B(x_2,y_2,z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

## שאלות:

**80)** נתונות הנקודות: $A(2,4,-5)$ , $B(0,-2,6)$ ו-$C(k,-1,13-k)$.
מצא ערכי $k$ עבורם המשולש ABC יהיה שווה-שוקיים: $AB=AC$.

## תשובות סופיות:

**80)** $k=8$ או $k=12$.

# מרחק בין נקודה לישר:

## סיכום כללי:

מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l:\underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

## שאלות:

**81)** מצא את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $\ell:\underline{x}=t(2,0,-7)$.

**82)** נתונות הנקודות $C(6,-4,0)$ , $B(2,-1,0)$ , $A(1,6,-1)$.
חשב את שטח המשולש ABC.

**83)** על הישר $\ell:\underline{x}=(5,-2,0)+t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$.
מצא את שיעורי הקודקוד B (שתי אפשרויות).

## תשובות סופיות:

**81)** $\sqrt{54}$.

**82)** 12.75 יח"ש.

**83)** $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$.

# מרחק בין נקודה למישור:

## סיכום כללי:

מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ למישור: $\pi: ax+by+cz+d=0$ יחושב ע"י: $d=\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

## שאלות:

**84)** מצא את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

**85)** מצא משוואת מישור המאונך לישר $\ell: \underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4,5,-9)$.

**86)** נתונים ישר ומישור: $\pi: 2x+4y-4z+15=0$ , $\ell: \underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$.
מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

## תשובות סופיות:

**84)** $2\frac{1}{2}$.

**85)** $\pi: 3x-2y+z+21=0$ או $\pi: 3x-2y+z-7=0$.

**86)** $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.

# מרחק בין ישרים מקבילים:

## סיכום כללי:

מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו.

## שאלות:

**87)** נתונות הנקודות $A(15,0,-4)$ , $B(12,-5,2)$ , $C(6,1,4)$ , $D(12,11,-8)$.

א. מצא את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B
ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצא את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

**88)** 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1:\underline{x}=(2,0,-1)+t(1,-2,1) \quad , \quad l_2:\underline{x}=(-8,-1,19)+s(-4,1,6)$$
$$l_3:\underline{x}=(-2,7,-11)+r(-2,4,-2) \quad , \quad l_4:\underline{x}=(-2,1,5)+q(4,-1,-6)$$

א. הוכח כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצא את שטח המלבן.

## תשובות סופיות:

**87)** א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

**88)** א. הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

# מרחק בין ישר למישור:

## סיכום כללי:

מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאת מרחקה מהמישור.

## שאלות:

**89)** נתונה משוואת מישור: $4x-z+6=0$.

א. מצא את המצב ההדדי בין ציר ה- $y$ ובין המישור הנתון.

ב. מצא את המרחק בין ציר ה- $y$ ובין המישור הנתון.

**90)** נתונים ישר ומישור: $\pi:3x+12y-4z+k-10=0$ , $l:\underline{x}=(1,k-1,5)+t(4,-2,-3)$.

א. הוכח שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצא את ערכו של הפרמטר $k$ שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

## תשובות סופיות:

**89)** א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$.

**90)** א. הוכחה. ב. $k=2,4$.

# מרחק בין מישורים מקבילים:

## סיכום כללי:

מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:

1. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.
2. שימוש בנוסחה: $d=\left|\frac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

## שאלות:

**91)** נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x-4y+5z-10=0$.
מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

**92)** נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_2: x-2y-2z-12=0$ , $\pi_1: x-2y-2z+6=0$.
מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

**93)** נתונים שישה מישורים:

$\pi_3: 2x-2y+z+3=0$ , $\pi_2: x+2y+2z+5=0$ , $\pi_1: 2x+y-2z-11=0$

$\pi_6: kx+qy+z+p=0$ , $\pi_5: x+2y+2z-1=0$ , $\pi_4: 2x+y-2z+7=0$

מצא את ערכי הפרמטרים $k$ , $q$ ו- $p$ שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

**94)** כדור שמרכזו בנקודה $O(3,8,-1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x+4y-3z-6=0$.
מצא את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

## תשובות סופיות:

**91)** $\pi_1: 3x-4y+5z+10=0$ , $\pi_2: 3x-4y+5z-30=0$.

**92)** $\pi_3: x-2y-2z-3=0$.

**93)** $p=18,-12$ , $q=-2$ , $k=2$.

**94)** $12x+4y-3z-136=0$.

# מרחק בין ישרים מצטלבים:

## סיכום כללי:

מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני.

## שאלות:

**95)** נתונים שני הישרים הבאים: $\ell_1 : \underline{x} = (-3,2,6) + t(-4,1,2)$
ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0,2,-7) + s(1,0,-1)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

**96)** נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים: $\ell_1 : \underline{x} = (-1,0,5) + t(1,1,-2)$
ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2,-1,9) + s(6,-1,0)$.
מצא את המרחק שביניהם.

**97)** מצא את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4,-2,-1) + t(-1,1,6)$ מציר ה- $z$.

## תשובות סופיות:

**95)** $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.

**96)** 1.567 יח"א.

**97)** $\sqrt{2}$ יח"א.

# שאלות מסכמות בוקטורים:

## שאלות:

**1)** נתונות הנקודות $C(1,1,1)$ , $B(1,2,0)$ , $A(1,1,3)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.
הראה כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.

ב. חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.

ג. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

**2)** מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את המרחק ביניהם.

א. $\underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0)$ , $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0)$.

ב. $\underline{x}=(1,-1,0)+s(12,-3,1)$ , $\underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1)$.

ג. $\underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2)$ , $\underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1)$.

ד. $\underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1)$ , $\underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4)$.

**3)** מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור. במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$ , $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$ , $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$ , $2x-14y+10z=-6$.

**4)** מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניים.
במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

א. $2x+y+2z-4=0$ , $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$ , $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$ , $2x-14y+10z=-6$.

**5)** נתונה קובייה 'ABCDA'B'C'D שנפחה הוא 8.
משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא: $\pi_1 : 4x+y+3z-28=0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה 'ABB'A היא: $\pi_2 : x+2y-2z+6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

**6)** הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור שמרכזו $O(1,1,2)$.
מצא את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.

**7)** נתונים מישור וישר: $\pi : 2x-y+2z+1=0$ , $\ell : \underline{x}=(1,5,5)+t(1,1,0)$.
מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- $z$ הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

**8)** נתונים שני מישורים: $\pi_2 : 4x-2y+4z-1=0$ , $\pi_1 : 2x-4y+4z-5=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור $\pi_1$ ובמרחק 6 ממישור $\pi_2$ (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

**9)** נתונים ישר ומישור: $\pi : 6x+2y-z+5=0$ , $\ell_1 : \underline{x}=(0,-3,0)+t(1,1,-8)$.
ישר נוסף, $\ell_2$, המקביל למישור $\pi$, עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר $\ell_1$ בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור $\pi$, הנקודה 'P היא הקרובה ביותר לנקודה P והנקודה 'Q היא הקרובה ביותר לנקודה Q. מצא את שטח המלבן 'PQQ'P. (הדרכה: הבע באמצעות $t$ את וקטור הכיוון של $\ell_2$).

**10)** נתונים שני מישורים: $\pi_2 : 3x+y+2z+11=0$ , $\pi_1 : 2x+y+z-5=0$.
$\ell_1$ הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור $\pi_3$ מכיל את הישר $\ell_1$ ויוצר זווית של $60°$ עם
הישר $\ell_2 : \underline{x}=(1,3,-4)+t(1,1,0)$.
מצא את משוואת המישור $\pi_3$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\underline{x}=(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y-z+2=0$

**2)** א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$, הזווית היא: $47.6°$.

**3)** א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל
ג. חותך בנקודה $(3.5,-0.5,-2)$, הזווית היא: $40.78°$.

**4)** א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x}=(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$, זווית: $63.6°$.
ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.

**5)** $\ell:\underline{x}=(0,7,7)+t(8,-11,-7)$ , $\ell:\underline{x}=(0,2.5,8.5)+t(2,-2.75,-1.75)$.

**6)** $\pi:\ -3x+y+3z+15=0$.

**7)** $(0,0,4)$ או $\left(0,0,14\frac{4}{5}\right)$.

**8)** $\ell:\underline{x}=\left(0,-14,-15\frac{3}{4}\right)+t(-14,14,21)$.

**9)** 10.467 יח"ש.

**10)** $\pi_3:\ x+2y-z-58=0$ או $\pi_3:\ 2x+y+z-5=0$.

# שאלות הנפתרות עם מכפלה וקטורית:

## שאלות:

### מציאת משוואת מישור:

**1)** נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi:\ \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

**2)** המישור $\pi$ עובר בנקודות: $C(4,-1,0)$ , $B(2,0,0)$ , $A(1,0,-3)$.
מצא את משוואת המישור.

**3)** נתונים שני ישרים: $\ell_2:\ \underline{x}=(0,-6,2)+s(0,-2,1)$ , $\ell_1:\ \underline{x}=(5,-4,1)+t(0,2,-1)$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את משוואת המישור המכיל אותם.

**4)** נתונים שני ישרים: $\ell_2:\ \underline{x}=(-7,1,0)+s(4,-3,0)$ , $\ell_1:\ \underline{x}=(-1,1,3)+t(3,-2,4)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את משוואת המישור המכיל את הישר $\ell_1$ ומקביל לישר $\ell_2$.

**5)** מצא משוואת מישור שעובר בנקודה $A(6,0,-1)$ ומכיל את ציר ה- $z$.

### מצב הדדי בין ישר ומישור:

**6)** נתונים הישר והמישור הבאים:
$\ell:\ \underline{x}=(0,3,-2)+t(1,-1,2)$ , $\pi:\ \underline{x}=(-1,0,2)+s(1,0,-2)+r(3,0,-1)$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

**7)** נתונים שני המישורים הבאים: $\pi_2:\ 4x+y-z-6=0$ , $\pi_1:\ x-3y+2z-1=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

**מצב הדדי בין מישורים:**

**8)** במקבילון $ABCDA'B'C'D'$ נתונים שלוש הקודקודים הבאים:
$C(5,2,-2)$ , $B(9,0,2)$ , $A(1,-1,4)$.
מצא את משוואת המישור עליו מונחת הפאה $A'B'C'D'$ אם ידוע שהנקודה $(2,-1,0)$ נמצאת עליו.

**מציאת ישר חיתוך בין שני מישורים:**

**9)** המישורים $\pi_1$ ו-$\pi_2$ מאונכים זה לזה.
הישר $\ell : \underline{x}=(4,1,-1)+t(2,-1,1)$ הוא ישר החיתוך שבין המישורים.
מצא את משוואות המישורים אם ידוע שהמישור $\pi_1$ עובר בראשית.

**10)** נתונים ישר ומישור: $\pi : 4x-2y-3z-6=0$ , $\ell : \underline{x}=(-2,0,5)+t(3,1,-1)$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שהוא היטלו של הישר $\ell$ על המישור.

**חישובי מרחקים שונים:**

**11)** חשב את נפחה של פירמידה משולשת $SABC$ שקודקודיה הם:
$A(1,6,-1)$ , $B(2,-1,0)$ , $C(6,-4,0)$ , $S(11,-2,4)$.

**12)** בפירמידה משולשת $SABC$ המקצועות $SA$, $SB$ ו-$SC$ מאונכים זה לזה.
נתון: $SA=6$ , $SB=8$ , $SC=12$.
חשב את אורכו של גובה הפירמידה היורד מהקודקוד $S$ לבסיס $ABC$.

**13)** נתונים שני הישרים הבאים: $\ell_1 : \underline{x}=(-3,2,6)+t(-4,1,2)$
ו-$\ell_2 : \underline{x}=(0,2,-7)+s(1,0,-1)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

**14)** נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים: $\ell_1 : \underline{x}=(-1,0,5)+t(1,1,-2)$
ו-$\ell_4 : \underline{x}=(2,-1,9)+s(6,-1,0)$. מצא את המרחק שביניהם.

**15)** מצא את מרחק הישר $\ell : \underline{x}=(4,-2,-1)+t(-1,1,6)$ מציר ה-$z$.

**שאלות שונות:**

**16)** נתונים שני ישרים: $\ell_2 : \underline{x} = (-7,3,-1) + s(-5,4,-2)$ , $\ell_1 : \underline{x} = (-2,1,5) + t(5,-4,2)$ .

א. מצא את המצב ההדדי שבין הישרים.

ב. המישור $\pi_1$ מכיל את שני הישרים והמישור $\pi_2$ נמצא בין שני הישרים במרחק שווה מכל אחד מהם, מקביל לשני הישרים ומאונך למישור $\pi_1$.
מצא את משוואות המישורים $\pi_1$ ו-$\pi_2$.

**17)** נתונים שני מישורים: $\pi_2 : x - y + 2z - 4 = 0$ , $\pi_1 : 2x - y + 4z - 8 = 0$ .
המישור $\pi_3$ מכיל את ישר החיתוך של שני המישורים וחותך את ציר ה-$y$ בנקודה A כך שמתקיים $OA = m$ (O ראשית הצירים).
הזווית שבין המישור $\pi_2$ למישור $\pi_3$ היא $\alpha$ ונתון כי: $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ .
מצא את הערכים האפשריים של הפרמטר $m$.

**18)** נתונות שלוש נקודות: $O(3,1,0)$ , $B(2,-1,0)$ , $A(3,-1,1)$ .
הנקודות A ו-B נמצאות על היקפו של מעגל שהנקודה O היא מרכזו.
מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל בנקודה A
(הישר נמצא במישור המעגל).

## תשובות סופיות:

1) $\pi: x-3y+8z=0$.

2) $\pi: 3x+6y-z-6=0$.

3) $\pi: y+2z+2=0$.

4) $\pi: 12x+16y-z-1=0$.

5) $\pi: y=0$.

6) נחתכים בנקודה: $(3,0,4)$.

7) $l: \underline{x}=t(1,9,13)$.

8) $\pi_{A'B'C'D'}: 2y+z+2=0$.

9) $\pi_2: x+y-z-6=0$ , $\pi_1: y+z=0$.

10) $l: \underline{x}=(-5,-13,0)+t(7,11,2)$.

11) 20.5 יח"נ.

12) 4.46 יח"א.

13) $\frac{4}{\sqrt{6}}$ יח"א.

14) 1.567 יח"א.

15) $\sqrt{2}$ יח"א.

16) א. הישרים מקבילים. ב. $\pi_1: 2x+2y-z+7=0$ , $\pi_2: y+2z-6=0$.

17) $m=4$ או $m=-\frac{4}{7}$.

18) $l: \underline{x}=(3,-1,1)+k(-5,-2,-4)$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 30 - מספרים מרוכבים

### תוכן העניינים

1. הגדרת המספר המרוכב ..... 518
2. המספר הצמוד ..... 521
3. חקירת משוואה ריבועית מרוכבת ..... 524
4. מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב ..... 525
5. נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב ..... 529
6. שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים ..... 531
7. שאלות שונות עם מספרים מרוכבים ..... 532

# הגדרת המספר המרוכב:

## סיכום כללי:

### הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i=\sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z=a+bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי $a$ וחלק מדומה $b$. המספרים $a$ ו- $b$ הם ממשיים.

$a$ נקרא הרכיב הממשי של $z$ ומסומן גם $\mathrm{Re}(z)$ (מלשון: Real).

$b$ נקרא הרכיב המדומה של $z$ ומסומן גם $\mathrm{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

## שאלות:

**1)** רשום עם $i$:

א. $\sqrt{-1}=$ ב. $\sqrt{-4}=$ ג. $\sqrt{-25}=$

ד. $\sqrt{-3}=$ ה. $\sqrt{-5}=$

**2)** חשב:

א. $i=$ ב. $i^2=$ ג. $i^3=$

ד. $i^4=$ ה. $i^5=$ ו. $i^{17}=$

**3)** רשום את ערכם של $a$ ו- $b$ בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. $-4$ ו. $0$

**4)** כתוב מספר מרוכב $z$ לפי הדרישות הבאות:

א. $\mathrm{Re}(z)=-3\ ,\ \mathrm{Im}(z)=2$.

ב. $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**5)** מספר מרוכב מסוים $z$ מקיים: $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=4$ ו-$\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)=-1$.
מצא את $z$.

**6)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2=-1$ ב. $x^2+36=0$ ג. $x^2-2x+5=0$

**7)** פתור את המשוואה הבאה: $x^2+x+1=0$.

**8)** פתור את המשוואה הבאה: $z^2+iz+6=0$.

**9)** נתון: $z_2=5-2i$ , $z_1=2+3i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א. $z_1+z_2=$ ב. $z_1-z_2=$ ג. $z_1\cdot z_2=$

**10)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-2+6i)+(1-i)$ ב. $(4+4i)-\left(3+\frac{1}{2}i\right)$

ג. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ד. $5-(3-2i)$

ה. $(i-3)+6i$ ו. $(i+2)-(3i-2)+(7-5i)$

**11)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(1+4i)\cdot(8-2i)$ ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ג. $(4i-3)\cdot(4i+3)$ ד. $i\cdot(i-1)$

ה. $(2i+3)\cdot i$ ו. $(5i-1)^2$

**12)** נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2 i$ .
ידוע כי $z_1 + z_2$ הוא ממשי וכי $z_1 - z_2$ הוא מדומה.

א. מצא קשר בין $a_1$ ל- $a_2$ וקשר בין $b_1$ ו- $b_2$.

ב. הראה כי המכפלה $z_1 \cdot z_2$ היא ממשית.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $i$ ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$.

**2)** א. $i$ ב. $-1$ ג. $-i$ ד. $1$ ה. $i$ ו. $i$.

**3)** א. $a=2\ ,\ b=5$ ב. $a=3\ ,\ b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}$
ד. $a=0\ ,\ b=7$ ה. $a=-4\ ,\ b=0$ ו. $a=0\ ,\ b=0$.

**4)** א. $z=-3+2i$ ב. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

**5)** $z=1.5+2.5i$.

**6)** א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i\ ,\ 1-2i$.

**7)** $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

**8)** $z=2i\ ,\ -3i$.

**9)** א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$.

**10)** א. $-1+5i$ ב. $1+3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2+2i$ ה. $-3+7i$ ו. $11-7i$

**11)** א. $16+30i$ ב. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ג. $-25$ ד. $-1-i$
ה. $-2+3i$ ו. $-24-10i$.

**12)** א. $a_1=a_2\ ,\ b_1=-b_2$ ב. הוכחה.

# המספר הצמוד:

## סיכום כללי:

**צמוד קומפלקסי (מרוכב):**

לכל מספר מרוכב $z=a+bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$ וערכו: $\bar{z}=a-bi$.

## שאלות:

**13)** רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. $-4$ ו. $0$

**14)** חשב:

א. $\frac{11+2i}{2-i}$ ב. $\frac{3+7i}{2-5i}$ ג. $\frac{19-9i}{2-3i}$

**15)** נתון מספר $z=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$ ב. $\frac{z}{z+3}$ ג. $\frac{z+i}{z-i}$

**16)** המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור. מצא את $a$.

**17)** נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.

הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

**18)** פתור את המשוואה הבאה: $3z-11=iz-7i$.

**19)** פתור את המשוואה הבאה: $iz+5=4i$.

**20)** פתור את מערכת המשוואות הבאה ($z$ ו-$w$ משתנים מרוכבים): $\begin{cases}3z+iw=5-4i\\5iz-2w=5+8i\end{cases}$.

**21)** פתור את המשוואות הבאות שבהן $a$ ו-$b$ ממשיים:

א. $2a-3i=10+bi$ ב. $3a-8+5bi=2b-ai-3i$

**22)** פתור את המשוואה הבאה: $2z+7i=iz+\bar{z}-3$.

**23)** חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$ ב. $\sqrt{8+6i}$

**24)** פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$.

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$.

**25)** פתור את המשוואה הבאה: $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$.

**26)** פתור את המשוואה הבאה: $z^2-i\bar{z}+6=0$.

## תשובות סופיות:

**13)** א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. $-4$ ו. $0$.

**14)** א. $4+3i$ ב. $-1+i$. ג. $5+3i$.

**15)** א. $\frac{5}{29}+\frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17}-\frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i$.

**16)** $a=-\frac{3}{4}$.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** $z=4-i$.

**19)** $z=4+5i$.

**20)** $w=5+i$ , $z=2-3i$.

**21)** א. $a=5$ , $b=-3$ ב. $a=2$ , $b=-1$.

**22)** $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$.

**23)** א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$.

**24)** א. $z_{1,2}=i$ , $1$ ב. $z_{1,2}=-2-i$ , $2-5i$.

**25)** $z_1=-2-5i$ , $z_2=3i$.

**26)** $z_1=-3i$ , $z_2=2i$.

# חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

## שאלות:

**27)** נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2-2(m+2i)z+1=0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב $m$ למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

## תשובות סופיות:

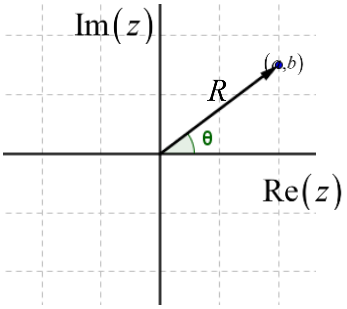
**27)** א. $m=-i$ ב. $m=-2i$.

# מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

## סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב $z$ ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה-$x$ מייצג את $a$, גודל הערך הממשי של $z$, וציר ה-$y$ מייצג את $b$, גודל הערך המדומה של $z$.

מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.




במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג: $(a,b)$

או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ-$(0,0)$)

והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס.

הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב

ויסומן: $(R,\theta)$. מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$z = R\cos\theta + i\cdot R\sin\theta = R(\cos\theta + i\sin\theta) = R\text{cis}\theta$.

### נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $\tan\theta = \frac{b}{a}$ , $R = \sqrt{a^2+b^2}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $a = R\cos\theta$ , $b = R\sin\theta$.
- גודל של מספר מרוכב $z$ יסומן: $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2+b^2}$.

### פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1\cdot z_2 = (R_1\text{cis}\theta_1)\cdot(R_2\text{cis}\theta_2) = R_1R_2\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1\text{cis}\theta_1}{R_2\text{cis}\theta_2} = \frac{R_1}{R_2}\text{cis}(\theta_1-\theta_2)$.

## שאלות:

**28)** כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60°$ ב. $6\text{cis}135°$ ג. $4\text{cis}330°$

ד. $4\text{cis}(-30°)$ ה. $4\text{cis}690°$ ו. $8\text{cis}90°$

ז. $3\text{cis}270°$ ח. $\text{cis}180°$ ט. $\text{cis}0°$

**29)** הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$ ב. $\sqrt{3}-i$ ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ד. $3+4i$ ה. $6i$ ו. $-i$

ז. $4$ ח. $-1$ ט. $1$

י. $0$

**30)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120°\cdot 3\text{cis}60°$ ב. $\text{cis}210°\cdot 5\text{cis}(-40°)$

ג. $\frac{12\text{cis}315°}{3\text{cis}90°}$ ד. $\frac{1}{2\text{cis}40°}$

ה. $6\text{cis}30°+2\text{cis}210°$

**31)** נתון המספר המרוכב $z=R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות $R$ ו-$\theta$ את המספרים:

א. $\overline{z}$ ב. $1/z$ ג. $-z$

ד. $-\frac{1}{z}$ ה. $iz$ ו. $z\cdot\overline{z}$

**32)** הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z+\overline{z}$ ב. $z\cdot\overline{z}$ ג. $\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}$

**33)** הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2-\overline{z}^2$ ב. $\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}$

**34)** הוכח את הטענות הבאות:

א. $z-i\overline{z}=\overline{\overline{z}+iz}$ ב. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$

**35)** מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

**36)** ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1+\sqrt{3}i$.
מצא את קדקודיו האחרים.

**37)** משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס.
אחד מקודקודי המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

**38)** משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא $30°$ חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

**39)** $z$ הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה.
קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. $\overline{z}$ ב. $\frac{1}{z}$ ג. $\frac{z}{\overline{z}}$ ד. $z\cdot\overline{z}$

## תשובות סופיות:

**28)** א. $1+\sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3}-2i$ ד. $2\sqrt{3}-2i$
ה. $2\sqrt{3}-2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1.

**29)** א. $\sqrt{2}\text{cis}45°$ ב. $2\text{cis}330°$ ג. $\text{cis}240°$ ד. $5\text{cis}53.13°$
ה. $6\text{cis}90°$ ו. $\text{cis}270°$ ז. $4\text{cis}0°$ ח. $\text{cis}180°$
ט. $\text{cis}0°$ י. 0.

**30)** א. $-6$ ב. $5\text{cis}170°$ ג. $4\text{cis}225°$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}(-40°)$
ה. $4\text{cis}30°$.

**31)** א. $R\text{cis}(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$ ג. $R\text{cis}(180°+\theta)$
ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180°+\theta)$ ה. $R\text{cis}(90°+\theta)$ ו. $R^2$.

**32)** שאלת הוכחה.

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** שאלת הוכחה.

**35)** $1-i$ , $1-i$ , $-1+i$ , $1+i$.

**36)** $\sqrt{3}-i$ , $-1-\sqrt{3}i$ , $-\sqrt{3}+i$.

**37)** $-2$ , $1-\sqrt{3}i$ , $1+\sqrt{3}i$.

**38)** $2$ , $-1+\sqrt{3}i$ , $1+\sqrt{3}i$.

**39)** א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל ג. על המעגל
ד. מחוץ למעגל.

# נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

## סיכום כללי:

**משפט דה-מואבר:**

כדי להעלות מספר מרוכב $z$ בחזקת $n$ נעזר בקשר: $\left(R\text{cis}\theta\right)^n = R^n\text{cis}\left(n\theta\right)$.

**שורשים של מספר מרוכב:**

כדי להוציא שורש $n$-י של מספר מרוכב $z$ השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

נבצע: $1 \le k \le n$ : $z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 \;/\; \sqrt[n]{\;} \quad \Rightarrow \quad z_k = \sqrt[n]{R_0}\cdot\text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)$.

## שאלות:

**40)** חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $\left(2\text{cis}30°\right)^3$ ב. $\left(2\text{cis}14°\right)^5$ ג. $\left(1+i\right)^4$

ד. $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$ ה. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

**41)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2 = 36\text{cis}120°$ ב. $z^4 = \left(9\text{cis}80°\right)^2$ ג. $z^5 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

**42)** מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

**43)** נתון המספר המרוכב $z = x+iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z| = 2$.

**44)** נתון המספר המרוכב $z=x+iy$ .
מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה : $|z-3i|=5$ .

**45)** נתון המספר המרוכב $z=x+iy$ . מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס
המתקבל בעבור המשוואה : $|z+i|+|\bar{z}+i|=|1+3i|$ .

## תשובות סופיות:

**40)** א. $8i$ ב. $32\text{cis}70°$ ג. -4 ד. $-8i$ ה. 1.

**41)** א. $z_0=6\text{cis}60°$ , $z_1=6\text{cis}240°$ .

ב. $z_0=3\text{cis}40°$ , $z_1=3\text{cis}130°$ , $z_2=3\text{cis}220°$ , $z_3=3\text{cis}310°$ .

ג. $z_0=\text{cis}12°$ , $z_1=\text{cis}84°$ , $z_2=\text{cis}156°$ , $z_3=\text{cis}228°$ , $z_4=\text{cis}300°$ .

**42)** סכום : 0 , מכפלה : -1 .

**43)** $x^2+y^2=4$ .

**44)** $x^2+(y-3)^2=25$ .

**45)** $\frac{2x^2}{3}+\frac{2y^2}{5}=1$ .

# שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

## שאלות:

**46)** בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7=13+3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3=5-9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

**47)** בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5=32+16i$ והאיבר השני הוא $a_2=2-4i$.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.

ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

**48)** נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

## תשובות סופיות:

**46)** $S_{10}=100-15i$.

**47)** א. $a_1=2+i\ ,\ q=-2i$ ב. $S_5=20+25i$.

**48)** $-2\ ,\ 2\text{i}\ ,\ 2$ או $6-8i\ ,\ 4-2i\ ,\ 2$.

# שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

## שאלות:

**49)** פתור את המשוואה: $z-\bar{z}+|z|=|2-i|^2-4i+\mathrm{Im}(z)$.

**50)** פתור את המשוואה: $\left|2-3^{x^2-x-1}i\right|=\sqrt{13}$.

**51)** פתור את המשוואה: $z^3=\bar{z}$.

**52)** הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

**53)** נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים.
הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

**54)** נתון מספר מרוכב $z$, שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.
הוכח כי אם $z-\frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז $z$ על מעגל היחידה.

**55)** הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1\mathrm{cis}\theta_1\cdot R_2\mathrm{cis}\theta_2=R_1R_2\mathrm{cis}(\theta_1+\theta_2)$.

**56)** $z$ הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.
נתון: $\left|z^4-z^3\right|=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

**57)** $z$ הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.
מצא את ערך הביטוי $z+iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

**58)** $z_1$ ו- $z_2$ הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2-2\cos\theta\cdot z+1=0$.
הבע באמצעות $\theta$ את גודל הזווית $\sphericalangle z_1Oz_2$ (O ראשית הצירים).

## תשובות סופיות:

**49)** $z_1=3-4i$ , $z_2=-3-4i$.

**50)** $x=2$ , $-1$.

**51)** $z_1=0$ , $z_2=i$ , $z_3=-i$ , $z_4=1$ , $z_5=-1$.

**52)** שאלת הוכחה.

**53)** שאלת הוכחה.

**54)** שאלת הוכחה.

**55)** שאלת הוכחה.

**56)** $\arg(z)=30°$.

**57)** $z+iz=\sqrt{2}$ , $-\sqrt{2}$.

**58)** $2\theta$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 31 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

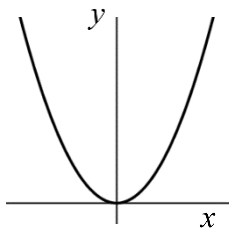
### תוכן העניינים

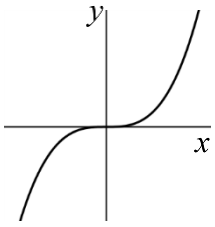
1. הקדמה כללית ..... 534
2. גזירת פונקציות ..... 535
3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה ..... 541
4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה ..... 542
5. שאלות עם פרמטרים ..... 545
6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית ..... 547

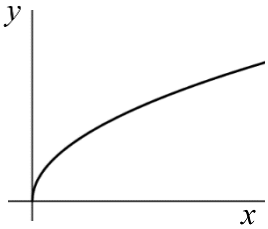
# הקדמה כללית:

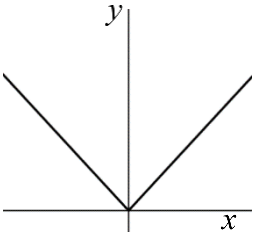
## סיכום כללי:

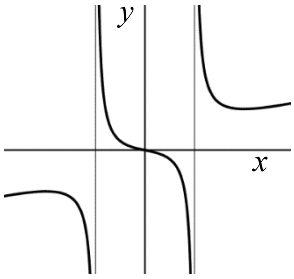
### פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x)=x^2$ : 

הפונקציה $f(x)=x^3$ : 

הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ : 

הפונקציה $f(x)=|x|$ : 

פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x)=\frac{5x^3+4x}{x^2-1}$ : 

### שיפוע של פונקציה:

- השיפוע $m$ של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1,y_1)$, כלומר: $m=f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1,y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

### הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

# גזירת פונקציות:

## סיכום כללי:

### כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x)=ax^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot ax^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x)=a \Rightarrow f'(x)=0$.
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x)=u\pm v \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$.
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x)=u^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x)=u\cdot v \Rightarrow f'(x)=u'v+v'u$.
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

## שאלות:

**1)** גזור את הפונקציות הבאות:

| | | |
|---|---|---|
| א. $f(x)=x^3$ | ב. $f(x)=x^7$ | ג. $f(x)=x^2$ |
| ד. $f(x)=x$ | ה. $f(x)=x^{-3}$ | ו. $f(x)=x^{-1}$ |
| ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$ |

**2)** גזור את הפונקציות הבאות:

| | | |
|---|---|---|
| א. $f(x)=2x^3$ | ב. $f(x)=3x^7$ | ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$ |
| ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x)=8x$ | ו. $f(x)=3x^{-2}$ |
| ז. $f(x)=\frac{4}{x}$ | ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

**3)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$ ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

**4)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $f(x)=7x^2+23x-6$ ד. $f(x)=6x^2+8x+4$

ה. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x^3$ ו. $f(x)=\frac{x^4}{8}+67$

**5)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

**6)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=-\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$

ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

**7)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$ ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$ ד. $f(x)=3x^2\cdot x$

ה. $f(x)=x^2\cdot x^3$ ו. $f(x)=x(3x+7)$

ז. $f(x)=3x^3(3x-1)$ ח. $f(x)=(x-2)(2x^2+3)$

ט. $f(x)=(3x-2)(x^2+10x)$ י. $f(x)=(3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$

יא. $f(x)=x(x-2)(3x-4)$

**8)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(x^2-4)^2$

ב. $f(x)=2x^3(3x+5)^2$

ג. $f(x)=(x^3+2)^2(x-1)^3$

ד. $f(x)=(x^2+1)^3(2x-1)^2$

**9)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$

ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x}$

ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ז. $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$

ח. $f(x)=\frac{(x^2+3)^2}{x^2-2}$

ט. $f(x)=\frac{x^3-x^2}{2(1-x)}$

י. $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

**10)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$

ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$

ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$

ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$

**11)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x+1}$

ב. $f(x)=\sqrt{2x}$

ג. $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$

ד. $f(x)=\sqrt{10-3x}$

ה. $f(x)=\sqrt{2x^2+7x}$

ו. $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$

ז. $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$

ח. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$

ט. $f(x)=\frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$

י. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}$

יא. $f(x)=\frac{2x^3-x^2+x-5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

יב. $f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x}}$

יג. $f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$

יד. $f(x)=\frac{x^2+7}{\sqrt{x^2-5}}$

טו. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

טז. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

**12)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=ax^4-bx$

ב. $f(x)=\frac{ax^2}{3}-\frac{x}{b}+c$

ג. $f(x)=\frac{x-2a}{x-4a}$

ד. $f(x)=a\sqrt{bx^2+c}$

**13)** גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

ג. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ד. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ה. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ו. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. $1$ ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$

ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

**2)** א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. $8$.

ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$.

**3)** א. $0$ ב. $0$.

**4)** א. $3x^2+4x-3$ ב. $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$ ג. $14x+23$ ד. $12x+8$ ה. $x-3x^2$ ו. $0.5x^3$.

**5)** א. $15(5x-2)^2$ ב. $15x^2(x^3+6)^4$ ג. $6(x-x^2)(1-2x)$

ד. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$.

**6)** א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$

ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$.

**7)** א. $10x-14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$.

ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x+7$ ז. $36x^3-9x^2$ ח. $6x^2-8x+3$

ט. $9x^2+56x-20$ י. $36x^5+75x^4+24x^3-24x^2-40x-8$

יא. $9x^2-20x+8$.

**8)** א. $4x(x^2-4)$ ב. $30x^2(x+1)(3x+5)$ ג. $3(x-1)^2(x^3+2)(3x^3-2x^2+2)$

ד. $2(2x-1)(x^2+1)^2(8x^2-3x+2)$.

**9)** א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$

ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

ח. $\frac{2x(x^2+3)(x^2-7)}{(x^2-2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x+2)^2}$.

**10)** א. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$ ד. $\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$

ו. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

**11)** א. $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ ג. $\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$ ד. $-\frac{3}{2\sqrt{10-3x}}$ ה. $\frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$

ו. $6x-\frac{4}{\sqrt{x}}$ ז. $\frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}}$ ח. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ ט. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}}$ י. $\frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$

יא. $3\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{5}{x^2}$ יב. $-\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}}$ יג. $\frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$

יד. $\frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}}$ טו $-\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$ טז. $-\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$.

**12)** א. $4ax^3-b$ ב. $\frac{2ax}{3}-\frac{1}{b}$ ג. $\frac{-2a}{(x-4a)^2}$ ד. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$.

**13)** א. $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2}$ , $f''(x)=\frac{4}{x^3}$.

ב. $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}$ , $f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$.

ג. $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3}$ , $f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$.

ד. $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$ , $f''(x)=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$.

ה. $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$ , $f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$.

ו. $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$ , $f''(x)=\frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

# מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

## שאלות:

**14)** מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=2x^3-7x$ בנקודה $(2\ ,\ 2)$.

**15)** מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$ בנקודה בה $x=-2$.

**16)** מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

## תשובות סופיות:

**14)** $m=17$
**15)** $m=4$
**16)** $m=2$

# מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

## שאלות:

**17)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x=-1$.

**18)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y=2$.

**19)** מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=x^2-2x-8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה-$x$.

**20)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$ ששיפועו 2.

**21)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$ בנקודה שבה $x=1$.

**22)** נתון כי הישר $2y-3x=3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=3\sqrt{x}$.
מצא את נקודת ההשקה.

**23)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

**24)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=4$.

**25)** נתונה הפונקציה הבאה $f(x)=4x-2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x)=3x-\frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-$x$.

**26)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו 2-.

**27)** מצא את משוואות המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

**28)** מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה-$x$ זווית של $135°$.

**29)** מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y=-\frac{1}{4}x^2-5$ , $y=x^2$.

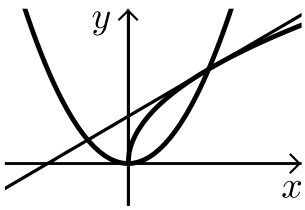
**30)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y=2x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.

ב. מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

ג. חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

**31)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $g(x)=x^2$ , $f(x)=\sqrt{x}$.




א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.

ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

## תשובות סופיות:

**17)** $y=24x+22$

**18)** $y=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$

**19)** $y=6x-24$ , $y=-6x-12$

**20)** $y=2x-3$

**21)** $y=-12x+9$

**22)** $(1\ ,\ 3)$

**23)** $y=-\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$

**24)** $y=22x-56$

**25)** א. $y=3x-1$ ב. $\left(\frac{1}{3}\ ,\ 0\right)$

**26)** $y=-2x+8$

**27)** $y=\frac{11}{16}x-\frac{15}{8}$

**28)** $y=-x+1\frac{1}{3}$ , $y=-x-1\frac{1}{3}$

**29)** $y=2x-1$ , $y=-2x-1$

**30)** א. $(1\ ,\ 2)$ ב. $y=-1.5x+3.5$ ג. $S=4\frac{1}{12}$.

**31)** א. $(1\ ,\ 1)$ , $(0\ ,\ 0)$ ב. $y=0.5x+0.5$ ג. $(-0.5\ ,\ 0.25)$.

# שאלות עם פרמטרים:

## שאלות:

**32)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=ax^2-4x$ בנקודה שבה $x=3$ הוא 8.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$ ואת משוואת המשיק.

**33)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$ , $(a>0)$.
המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1.
מצא את ערך הפרמטר $a$.

**34)** נתונה הפונקציה: $y=x^3+a\sqrt{x}$ ($a$ פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 5.
מצא את ערך הפרמטר $a$.

**35)** נתונה הפונקציה: $y=2\sqrt{x}-\frac{A}{x}$ (A פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 2.
מצא את ערך הפרמטר A.

**36)** הישר $y=4x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+3$.
מצא את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**37)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y=2$ הוא 4-.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$ ואת משוואת המשיק.

**38)** הישר $y=ax+\frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)=\frac{2}{x+c}$ בנקודה $x=0$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו-$c$.

**39)** הישר $y=3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+b$.
מצא את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**40)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה $(1\ ,\ 6)$ הוא 6-.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ ואת משוואת המשיק.

**41)** לאילו ערכי $k$ ישיק הישר $y=-5x+6$ לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2-4x+k$ ?
לכל ערך כזה של $k$ מצא את נקודת ההשקה.

**42)** הפונקציות $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ משיקות זו לזו.
מצא את $k$ ואת נקודת ההשקה.

## תשובות סופיות:

**32)** $a=2\ ,\ y=8x-18$

**33)** $a=2$

**34)** $a=4$

**35)** $A=1$

**36)** $(-1\ ,\ 5)\ ,\ y=4x+9$

**37)** $a=2\ ,\ y=-4x-2$

**38)** $a=-\frac{1}{8}\ ,\ c=4$

**39)** $b=4\ ,\ (4\ ,\ 12)$

**40)** $b=2\ ,\ a=6\ ,\ y=-6x+12$

**41)** $k=6:(1\ ,\ 1)$ או: $k=\frac{158}{27}:\left(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{13}{3}\right)$.

**42)** $(1\ ,\ 1)\ ,\ k=1.5$

# שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

## שאלות:

**43)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. בטא באמצעות $t$ את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^2+1$ בנקודה שבה $x=t$.

ב. מצא את ערכיו של $t$ אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1\ ,\ 1)$.

**44)** מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=5x-x^2$ העוברים דרך הנקודה $(3\ ,\ 7)$.

**45)** מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=x^2+5x-6$ העוברים דרך הנקודה $(0\ ,-10)$.

**46)** מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=12x-x^3$ העוברים דרך הנקודה $(2\ ,\ 24)$.

**47)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3\ ,\ 0)$.

**48)** מצא משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

**49)** מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-2}}$ העוברים דרך הנקודה $(2\ ,\ 3)$.

## תשובות סופיות:

**43)** א. $y=2tx-t^2+1$ ב. $t=0,-2$.

**44)** $y=-3x+16$ , $y=x+4$

**45)** $y=x-10$ , $y=9x-10$

**46)** $y=-15x+54$ , $y=12x$

**47)** $y=-\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$

**48)** $y=-\frac{1}{16}x+\frac{3}{4}$

**49)** $y=-x+5$

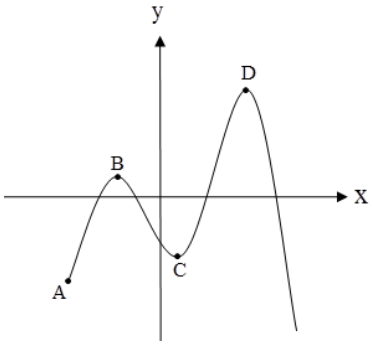
# מתמטיקה למדעים

## פרק 32 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

### תוכן העניינים

1. נקודות קיצון של פונקציות ..... 549
2. חקירת פונקציה פולינומית ..... 552
3. פונקציה זוגית ואי-זוגית ..... 556

# נקודות קיצון של פונקציות:




## סיכום כללי:

**נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):**

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B , C , D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

**נקודות קיצון מקומיות:**

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית. נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

**שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:**

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה-$x$ של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה-$x$ מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה-$y$.
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

## שאלות:

**1)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=10x-x^2$.

**2)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

**3)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$ .

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$ .

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

**5)** לפונקציה $f(x)=ax-x^3-5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-1$ .
מצא את ערכו של הפרמטר $a$ .

**6)** נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$ . ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון.
מצא את הקבוע $a$

**7)** לפונקציה $f(x)=Ax^3+Bx^2-1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה : $(2,3)$ .
מצא את ערכי הפרמטרים B , A.

**8)** לפונקציה $f(x)=Ax^3+Bx^2-4x$ יש נקודת קיצון ב-$x=-1$ ו-$x=4$ .
מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה-$y$ של שתי נקודות הקיצון.

**9)** נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$ . ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.
מצא את הפרמטרים $a$ , $b$ .

**10)** לפונקציה $f(x)=ax^4+bx^2+35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2,3)$ .
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ , $b$ .

## תשובות סופיות:

1) $\max(5,25)$.

2) א. $\max(-2,16)$ , $\min(2,-16)$ ב. עולה: $x>2$ , $x<-2$ יורדת: $-2<x<2$.

3) א. $\min(-\sqrt{5},-16)$ , $\min(\sqrt{5},-16)$ , $\max(0,9)$

ב. עולה: $-\sqrt{5}<x<0$ , $x>\sqrt{5}$ יורדת: $0<x<\sqrt{5}$ , $x<-\sqrt{5}$.

4) א. $\min(3,5)$ ב. עולה: $x>3$ יורדת: $x<3$.

5) $a=3$.

6) $a=-\frac{2}{3}$.

7) $A=-1$ , $B=3$.

8) $\left(4,-18\frac{2}{3}\right)$ , $\left(-1,2\frac{1}{6}\right)$ , $B=-\frac{3}{2}$ , $A=\frac{1}{3}$.

9) $a=-4$ , $b=6$.

10) $a=2$ , $b=-16$.

# חקירת פונקציה פולינומית:

## שאלות:

**11)** נתונה הפונקציה $f(x)=10x-x^2$ .
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**12)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$ .
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**13)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$ .
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**14)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**15)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-3ax^2+54x-50$.

א. לאלו ערכים של הפרמטר $a$ עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?

ב. הצב בפונקציה $a=6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$, סרטוט.

**17)** נתונה הפונקציה: $y=-3x^3+6x^2-4x+d$ ($d$ פרמטר).
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה: $x=2$.

א. מצא את $d$.

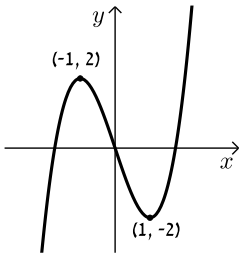
ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?

ג. כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**18)** לפניך גרף הפונקציה $f(x)=x^3-3x$:




א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=5$?

ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=2$?

ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0.5$?

ד. עבור איזה ערך של $k$ למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק פתרון אחד?

ה. עבור איזה ערך של $k$ למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שני פתרונות?

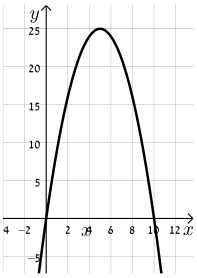
ו. עבור איזה ערך של $k$ למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

ז. האם קיים ערך של $k$ עבורו למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון?

## תשובות סופיות:

**11)** א. כל $x$ ב. $\max(5,25)$ ג. עלייה: $x<5$, ירידה: $x>5$

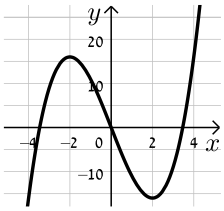
ד. $(10,0)$, $(0,0)$. ה. להלן גרף:



**12)** א. כל $x$ ב. $\max(-2,16)$, $\min(2,-16)$

ג. עלייה: $x>2$, $x<-2$ ירידה: $-2<x<2$

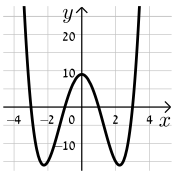
ד. $(-\sqrt{12},0)$, $(\sqrt{12},0)$, $(0,0)$. ה. להלן גרף:



**13)** א. כל $x$ ב. $\min(-\sqrt{5},-16)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\max(0,9)$

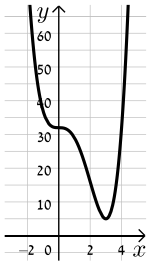
ג. עלייה: $-\sqrt{5}<x<0$, $x>\sqrt{5}$ ירידה: $x<-\sqrt{5}$, $0<x<\sqrt{5}$.

ד. $(\pm3,0)$, $(\pm1,0)$, $(0,9)$. ה. להלן גרף:



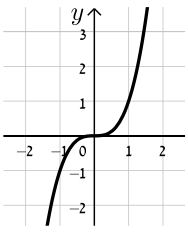
**14)** א. כל $x$ ב. $\min(3,5)$ ג. תחומי עלייה: $x>3$, תחומי ירידה: $x<3$

ד. $(0,32)$. ה. להלן גרף:

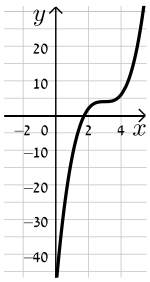


**15)** א. כל $x$ ב. אין. ג. עולה לכל $x$

ד. $(0,0)$. ה. להלן גרף:

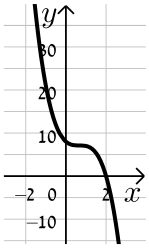


**16)** א. $-6<a<6$ ב. תחום הגדרה: כל $x$, נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל $x$, תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים: $(0,-50)$, להלן גרף:




**17)** א. $d=8$ ב. לא. ג. יורדת בתחום $x\neq\frac{2}{3}$

ד. $(0,8)$. ה. להלן גרף:




**18)** א. 1. ב. 2. ג. 3. ד. $k>2$ , $k<-2$

ה. $k=\pm 2$ ו. $-2<k<2$ ז. לא.

# פונקציה זוגית ואי-זוגית:

## סיכום כללי:

**הגדרות:**

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל $x$ בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x)=f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל $x$ בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x)=-f(x)$.

## שאלות:

**1)** קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x)=3x-5$

ב. $f(x)=3x^2$

ג. $f(x)=2x^3$

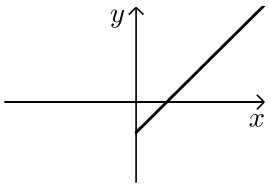
ד. $f(x)=x^3-2x^2$

ה. $f(x)=4x^4-3x^2+1$

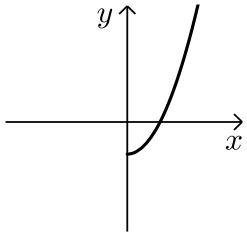
ו. $f(x)=4x^5-3x^3-1$

**2)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל $x$.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

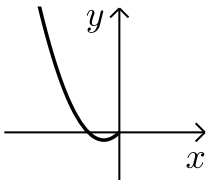
א.



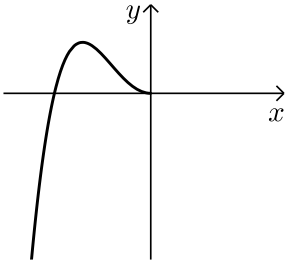

ב.



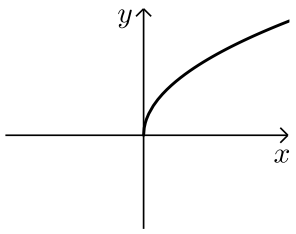

ג.

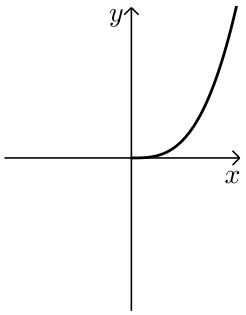


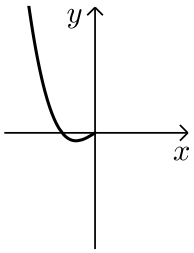

ד.

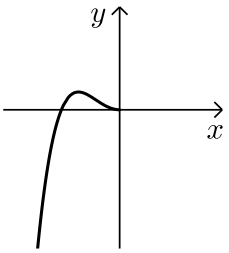


**3)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל $x$.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

א.



ב.



ג.



ד.



**4)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^4-4x^2$ בתחום: $[0:3]$.

א. חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:
   i. תחום הגדרה.
   ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
   iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
   iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
   v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

ג. התבסס על ממצאיך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

**5)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^6-3x^2+3$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- $y$, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.

ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.

ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל $x$ בתחום הגדרתה.

**6)** לפניך הפונקציה: $f(x)=-2x^6+3x^4+a$, $a$ פרמטר.
ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

**7)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=3x^3-9x$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

**8)** לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=5x^3-3x^5+b$ , $b$ פרמטר.
ידוע כי הישר $y=2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות: $f'(x)=0$.

א. מצא את $b$ וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.
נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

**9)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^7-x}{3}$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן
(בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

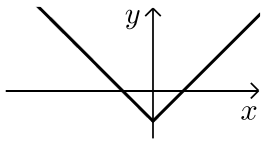
ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?
נמק ע"י חישוב מתאים.

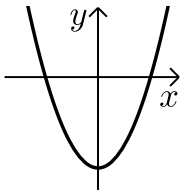
ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

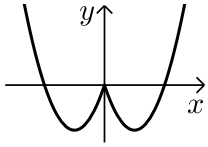
## תשובות סופיות:

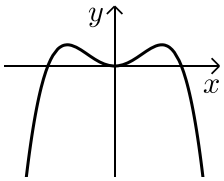
**1)** זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

**2)** להלן הגרפים:

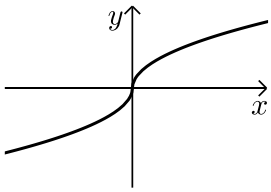
א.


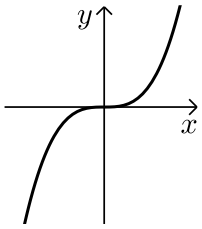

ב.


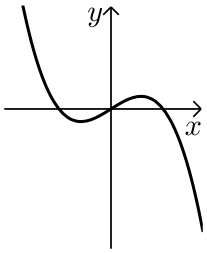

ג.


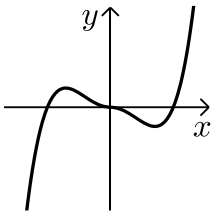

ד.



**3)** להלן הגרפים:

א.



ב.


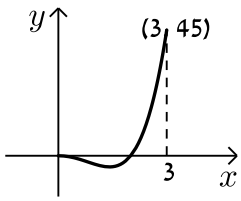

ג.



ד.


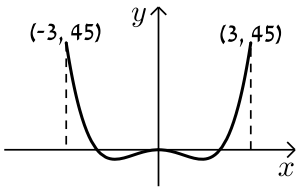

**4)** א. i. $0 \le x \le 3$ ii. $(0,0),(2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min\left(\sqrt{2},-4\right)$,

$\max(0,0)$ קצה. iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$ ב. סעיף הוכחה.

**סרטוט עבור חלק v:**




**סרטוט עבור סעיף ג:**



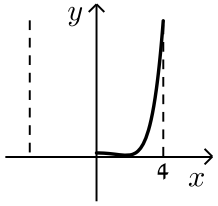

**5)** א. תחום הגדרה: $0 \le x \le 4$, חיתוך עם ציר ה-$y$: $(0,3)$,

נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה,

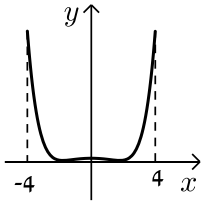
עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$ ב. זוגית.

ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

**סרטוט עבור סעיף א:**

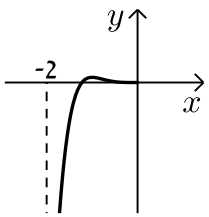



**סרטוט עבור סעיף ג:**

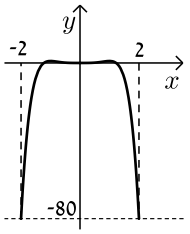


**6)** א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2\le x\le 0$, חיתוך עם הצירים: $(0,0),(-1.225,0)$, נקודות קיצון: $\min(-2,-80)$ קצה, $\max(-1,1)$, $\min(0,0)$ קצה,
עולה: $-2<x<-1$, יורדת: $-1<x<0$. ג. זוגית.

**סרטוט עבור סעיף א:**

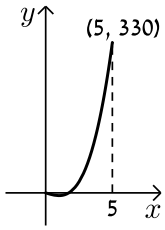



**סרטוט עבור סעיף ד:**

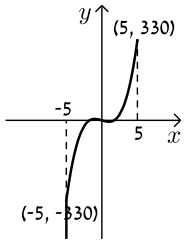



**7)** א. תחום הגדרה: $0\le x\le 5$, חיתוך עם הצירים: $(0,0),\left(\sqrt{3},0\right)$,
נקודות קיצון: $\max(5,330)$ קצה, $\min(1,-6)$, $\max(0,0)$ קצה,
עולה: $1<x<5$, יורדת: $0<x<1$, ב. אי-זוגית.

**סרטוט עבור סעיף א:**

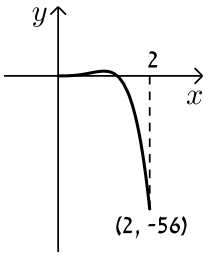



**סרטוט עבור סעיף ג:**

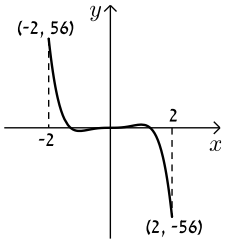



**8)** א. $b=0$ ב. i $0\le x\le 2$ ii. $(0,0),(1.29,0)$ iii. $\min(2,-56)$ קצה,
$\max(1,2)$, $\min(0,0)$ קצה. iv. עולה: $0<x<1$, יורדת: $1<x<2$,
ג. אי-זוגית.

**סרטוט עבור חלק v:**

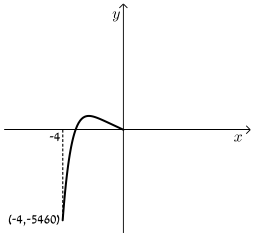



**סרטוט עבור סעיף ד:**

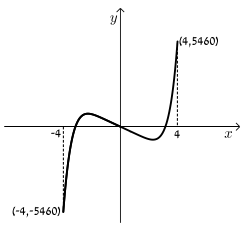



**9)** א. i $-4\le x\le 0$ ii. $(-1,0),(0,0)$ iii. $\min(0,0)$ קצה, $\max(-0.723,0.207)$,
$\min(-4,-5460)$ קצה. iv. עולה: $-4<x<-0.723$,
יורדת: $-0.723<x<0$ ג. אי-זוגית.

**סרטוט עבור חלק v:**




**סרטוט עבור סעיף ד:**



# מתמטיקה למדעים

## פרק 33 - חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה למדעים

## פרק 34 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש

### תוכן העניינים

1. מציאת תחום הגדרה ..... 562
2. מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה ..... 564
3. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים ..... 565
4. חקירת פונקצית מנה ..... 570
5. חקירת פונקצית שורש ..... 579
6. תחומי קעירות ונקודות פיתול ..... 587
7. חקירת פונקציה עם פרמטר ..... 593
8. פונקציות ללא תבנית מפורשת ..... 596

# מציאת תחום הגדרה:

## סיכום כללי:

- כל פולינום מוגדר לכל $x$.
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

## שאלות:

**1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x$

ב. $f(x)=4x^3-x^2+\frac{x}{2}+1$

ג. $f(x)=x^3-x^2-4x+1$

ד. $f(x)=\frac{2x}{x-3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

ו. $f(x)=\frac{5x^3+4x}{x^2-1}$

ז. $f(x)=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

ח. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-2x-8}$

ט. $f(x)=\frac{6}{x^2+1}$

י. $f(x)=\frac{4x+1}{x^2+1}$

יא. $f(x)=\frac{1}{x^3-x}$

יב. $f(x)=\frac{x^2}{x^3-4x}$

**2)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=2\sqrt{x-3}$

ג. $f(x)=\sqrt{x-4}$

ד. $f(x)=3x\sqrt{1-2x}$

ה. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-10}$

ו. $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

ז. $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x+4}}$

ח. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

ט. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

י. $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}}$

יא. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

יב. $f(x)=\frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}}$

יג. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

יד. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. כל $x$ ב. כל $x$ ג. כל $x$ ד. $x\neq 3$ ה. $x\neq \pm 2$ ו. $x\neq \pm 1$
ז. $x\neq -1,2$ ח. $x\neq 4,-2$ ט. כל $x$ י. כל $x$ יא. $x\neq \pm 1,0$ יב. $x\neq \pm 2,0$.

**2)** א. $x\geq 0$ ב. $x\geq 3$ ג. $x\geq 4$ ד. $x\leq \frac{1}{2}$ ה. $x\leq -5\ ,\ x\geq 2$
ו. $x\geq 1\ ,\ x\leq -2$ ז. $x>-4$ ח. $x>1\ ,\ -2\leq x<1\ ,\ x\leq -3$ ט. $x\geq 1\ ,\ x\leq -1.5$
י. $x>3\ ,\ -3<x<0$ יא. $x>-2\ ,\ -6\leq x<-2$ יב. $1<x\leq 2\ ,\ x<1$
יג. $-1<x<1$ יד. $x\geq 7$.

# מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

## שאלות:

**3)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{x^2-10x+9}$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

## תשובות סופיות:

**3)** א. $\max\left(3,-1\frac{1}{2}\right)$, $\min\left(-3,-\frac{3}{8}\right)$.

ב. עולה: $-3<x<3$, $x\neq 1$, יורדת: $3<x\neq 9$, $x<-3$.

# מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

## סיכום כללי:

### אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים: $g(k)=0$ וגם: $f(k)\neq 0$. בצורה מתמטית: אם: $\lim_{x\to k^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$

או: $\lim_{x\to k^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ או שניהם אז הישר: $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $y=\frac{f(x)}{g(x)}$.

### הסבר כללי:

בעבור ערכי $x$ שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית.
כאשר ערך $x$ מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה
(על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם.
אם אחרי הצמצום אותו ערך של $x$ עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית,
אך אם ערך $x$ זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא
נקודת אי הגדרה.

### אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה: $y=n$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים: $\lim_{x\to\infty^+}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או: $\lim_{x\to\infty^-}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^m+\ldots}{bx^n+\ldots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם $m>n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m=n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=\frac{a}{b}$.
- אם $m<n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=0$.

**חוקי גבולות לאינסוף:**

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר $x$ שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף).
עבור ערכי $x$ שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום: $x=\infty$ או $x=-\infty$ בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת $x$ לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\text{"}\frac{1}{\infty}\text{"}=0$.
- הגבול: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ ניתן לפיצול לשני מקרים:
  - אם: $x\to 0^+$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון החיובי) אז: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\text{"}\frac{1}{0^+}\text{"}=+\infty$.
  - אם: $x\to 0^-$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון השלילי) אז: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\text{"}\frac{1}{0^-}\text{"}=-\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty\cdot\infty$ (מכפלת שני ביטויים של $x$ אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty\cdot\infty=\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty+\infty$ (סכום שני ביטויים של $x$ אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty+\infty=\infty$.

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה: $\frac{\infty}{\infty}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת $x$).
- הגבול מהצורה: $\frac{0}{0}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת $x$).
- הגבול מהצורה: $\infty-\infty$ (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת $x$).
במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

## שאלות:

**4)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x-2}+3$.

**5)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{5x^2+1}{x^2-9}$.

**6)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$.

**7)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{3x}{x^2-2x-15}$.

**8)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$.

**9)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+b}{x-b}$.

**10)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

**11)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{2x^2-4x}$
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

**12)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$.

**13)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x}}$.

**14)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

**15)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{x-\sqrt{x}}$.

**16)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$.

**17)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$.

**18)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$.
האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה נפגשות בנקודה $(-1,2)$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**19)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$.
הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16,2)$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

## תשובות סופיות:

4) $x=2\ ,\ y=3$.

5) $x=\pm 3\ ,\ y=5$.

6) $y=\frac{2}{3}$.

7) $x=-3\ ,\ x=5\ ,\ y=0$.

8) אין.

9) $x=b\ ,\ y=a$.

10) $x=1\ ,\ y=1$, נקודת אי-הגדרה: $(2,4)$.

11) $x=2\ ,\ y=\frac{1}{2}$, נקודת אי-הגדרה: $(0,0)$.

12) $x=2\ ,\ y=0$.

13) $x=4$.

14) $x=1\ ,\ y=-1$.

15) $x=1\ ,\ y=2$.

16) $y=\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)\right)=3\ ,\ y=\lim_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)\right)=-3$.

17) $x=4\ ,\ x=-4\ ,\ y=5\ ,\ y=-5$.

18) $a=2\ ,\ b=-3$.

19) $a=2\ ,\ b=1$.

# חקירת פונקצית מנה:

## שאלות:

**20)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^2-10x+6}{3x^2-10x+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**21)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x+\frac{1}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**22)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**23)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{x^2-5x+4}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**24)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**25)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\frac{2x^2-5x+2}{4x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.
ב. נקודות קיצון.
ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.
ד. חיתוך עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.
ו. סרטוט סקיצה.

**26)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**27)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**28)** לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x=-8$.

א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה.
ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ד. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**29)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3x^2}{2x^2-8}$.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.
ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**30)** נתונה הפונקציה: $y=\frac{a^2x-4}{2x^2-1}$, ($a$ קבוע).
ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$ הוא: $m=4$.

א. מצא את כל הערכים האפשריים עבור $a$.
ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ג. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

**31)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=1.5x-\frac{5x+1}{x+5}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון וסוגן.

ג. תחומי עלייה וירידה.

ד. חיתוך עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה.

**32)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$, $(a\neq 1)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. הבע באמצעות $a$ את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$ ועם ציר ה-$y$.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא עבור אילו ערכים של $a$ הפונקציה $f(x)$ עולה לכל $x$ בתחום ההגדרה.

ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$.
מצא את הערך של $a$ אם נתון כי הפונקציה עולה לכל $x$.

**33)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+ax+6}{x-2}$, ($a$ פרמטר).
ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה-$y$.

א. מצא את הערך של $a$.

ב. הצב את הערך של $a$ שמצאת בסעיף א' ומצא:

i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

ג. עבור אלו ערכי $x$ הפונקציה שלילית?

ד. נתון הישר: $y=k$. עבור אלו ערכי $k$ אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

**34)** נתונה הפונקציה: $y=\frac{x+3}{x-2}+A$ , $A$ פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה $(3A\ ,\ A)$.

א. מצא את ערך הפרמטר $A$.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל $x$.

ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון הישר: $y=k$.
האם קיים ערך של $k$ עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

**35)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2-20x+28}{x^2+2a}$.
ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה $(3\ ,\ 0.5)$.

א. מצא את ערך הפרמטר $a$ וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של $k$ הישר: $y=k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

**36)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{9-x^2}{x^2-k}$ יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- $y$.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל $x$ אם ידוע כי שיעור ה- $y$ של נקודת הקיצון הוא 3.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ד. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

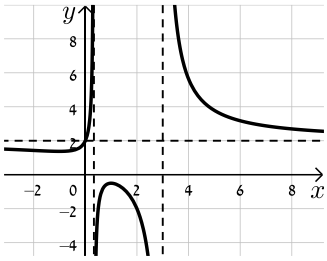
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר $y=-1$.
נמק את תשובתך.

## תשובות סופיות:

**20)** א. $x\neq 3\ ,\ x\neq \frac{1}{3}$ ב. $\max\left(1,-\frac{1}{2}\right)\ ,\ \min\left(-1,1\frac{3}{8}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $-1<x<1$ וגם $x\neq\frac{1}{3}$ , תחומי ירידה: $1<x\neq 3$ או $x<-1$.

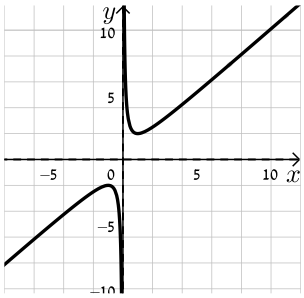
ד. $(0,2)$ ה. $y=2\ ,\ x=\frac{1}{3}\ ,\ x=3$. ו. להלן סקיצה:



**21)** א. $x\neq 0$ ב. $\max(-1,-2)\ ,\ \min(1,2)$.

ג. עולה: $x>1$ או $x<-1$ , יורדת: $-1<x<1\ ,\ x\neq 0$ ד. אין

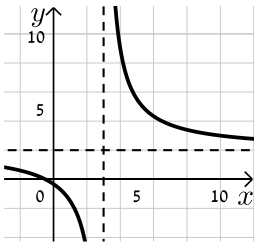
ה. להלן סקיצה:



**22)** א. $x\neq 3$ ב. אין. ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה

ד. $\left(0,-\frac{1}{3}\right)\ ,\ \left(-\frac{1}{2},0\right)$ ה. $x=3\ ,\ y=2$.

ו. להלן סקיצה:

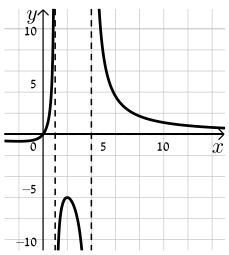


**23)** א. $x\neq 1\ ,\ x\neq 4$ ב. $\max(2,-6)\ ,\ \min\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$

ג. תחומי עלייה: $-2<x<2\ ,\ x\neq 1$ , תחומי ירידה: $x>2\ ,\ x\neq 4$ או $x<-2$

ד. $(0,0)$ (אסימפטוטות: $x=4\ ,\ x=1\ ,\ y=0$).

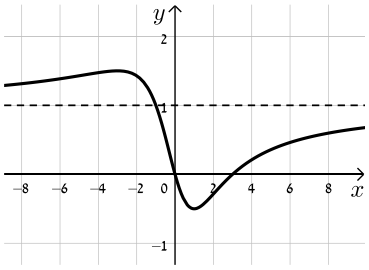
ה. להלן סקיצה:



**24)** א. כל $x$ ב. $\max\left(-3,1\frac{1}{2}\right)$ , $\min\left(1,-\frac{1}{2}\right)$

ג. עולה: $x>1$ או $x<-3$, יורדת: $-3<x<1$ ד. $(0,0),(3,0)$ (אסימפטוטה: $y=1$).

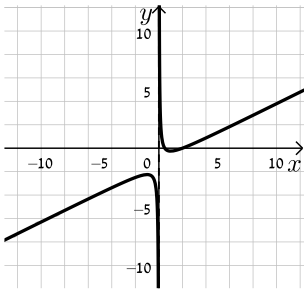
ה. להלן סקיצה:




**25)** א. $x\neq 0$ ב. $\max(-1,-2.25)$ , $\min(1,-0.25)$

ג. עולה: $x>1$ , $x<-1$, יורדת: $-1<x<1$ , $x\neq 0$ ד. $(0.5,0),(2,0)$ ה. $x=0$.

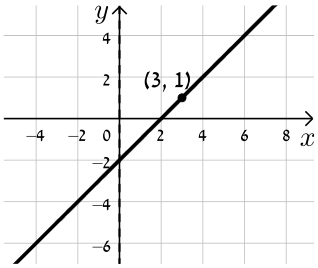
ו. להלן סקיצה:




**26)** א. $x\neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0,-2),(2,0)$ ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $(3,1)$.

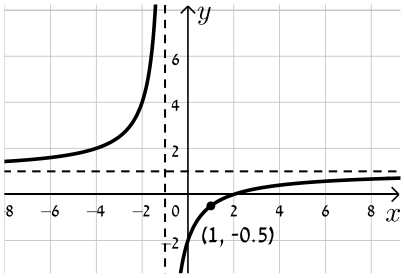
ו. להלן סקיצה:




**27)** א. $x\neq \pm 1$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0,-2),(2,0)$ ה. $x=-1$ , $y=1$, יש נקודת אי הגדרה: $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

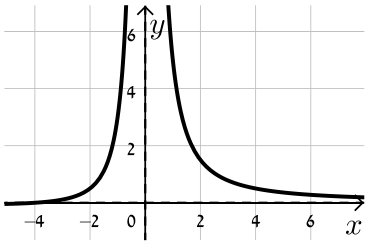
ו. להלן סקיצה:



**28)** א. $a=1$ , $f(x)=\frac{x+4}{x^2}$ ב. עולה: $-8<x<0$ יורדת: $x<-8$ , $x>0$

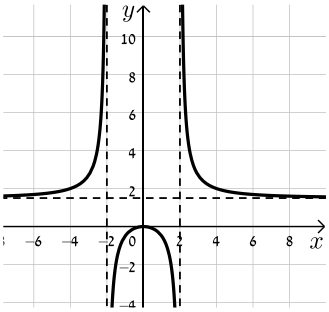
ג. $(-4,0)$ ד. $x=0$ , $y=0$.

ה. להלן סקיצה:




**29)** א. $x\neq\pm2$ ב. $\max(0,0)$ ג. יורדת: $x>0$ , $x\neq2$ עולה: $x<0$ , $x\neq-2$

ד. $(0,0)$ ה. $x=\pm2$ , $y=1.5$. ו. להלן סקיצה:



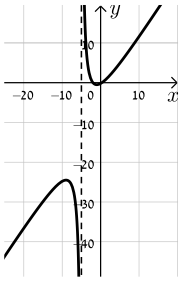

**30)** א. $a=\pm2$ ב. $(0,4)$ , $(1,0)$

ג. המשיק: $y=-4x+4$ אשר עובר בנקודה $(1,0)$. נקודת החיתוך: $(1,0)$.

**31)** א. $x\neq-5$ ב. $\max(-9,-24.5)$ , $\min(-1,-0.5)$

ג. עולה: $x>-1$ , $x<-9$, יורדת: $-9<x<-1$ , $x\neq-5$

ד. $(-2,0),\left(\frac{1}{3},0\right),(0,-0.2)$ ה. $x=-5$. ו. להלן סקיצה:



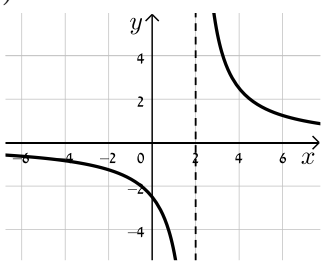

**32)** א. $x\neq1$ ב. $x=1$ , $y=1$ ג. $(a,0),(0,a)$ ד. i. $a>1$ ii. $a=2$.

**33)** א. $a=-3$ ב. i. $x\neq2$ ii. $(0,-3)$ iii. $\max(0,-3)$ , $\min(4,5)$

iv. $x=2$ ג. $x<2$ ד. $-3<k<5$.

**34)** א. A $=-1$ ב. $x\neq2$ ד. $(0,-2.5)$

ה. להלן סקיצה:




ו. לא

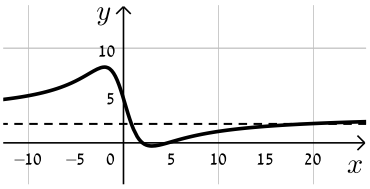
**35)** א. $a=3$ , $f(x)=\frac{3x^2-20x+28}{x^2+6}$ , כל $x$.

ב. $\max(-2,8)$ , $\min\left(3,-\frac{1}{3}\right)$

ג. עולה: $x>3$ , $x<-2$ ; יורדת: $-2<x<3$

ד. $(2,0),\left(0,4\frac{2}{3}\right),\left(4\frac{2}{3},0\right)$

ה. להלן סקיצה:

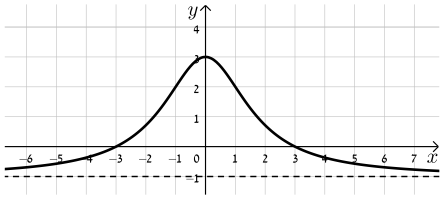



ו. $3$ , $-\frac{1}{3}$ , $k=8$.

**36)** ב. $k=-3$ ג. $(3,0),(-3,0)$ ד. $y=-1$

ה. באף נקודה.

ו. להלן סקיצה:



# חקירת פונקצית שורש:

## שאלות:

**37)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**38)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-4)\sqrt{x-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**39)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{6-x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**40)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**41)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**42)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**43)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה-$x$? נמק והראה חישוב מתאים.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$.

ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

**44)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?

ב. כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה-$x$? מצא אותן.

ג. כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

**45)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**46)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, $a$ פרמטר.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$.

ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y-x=0$.

א. מצא את ערך הפרמטר $a$.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ד. כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

**47)** נתונות שתי הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{\sqrt{x-k}}{x}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+k}}$ ($k$ פרמטר חיובי).

ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x=0.8$.

א. מצא את $k$.

ב. האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה? אם כן מצא אותה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=0.52$.

**48)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$ , $k$ פרמטר חיובי.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות $k$).

ii. מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?

ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של $k$ בתחום הגדרתה.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$. (בטא באמצעות $k$).

ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A. ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה-$x$ והאסימפטוטה הנ"ל הוא: 4 יח"ש $S=$. מצא את ערך הפרמטר $k$.

**49)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+2}{x+4}$. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.

ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.
קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.
הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות תחום הגדרה זהה.

ii. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

iii. שתי הפונקציות חותכות את ציר ה-$x$ באותה נקודה.

iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.

ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה-$y$.

אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:

היות והפונקציה $g(x)$ מוגדרת להיות: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ אזי ניתן למצוא את שיעור ה-$y$ של כל נקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה-$y$ של הנקודה בעלת אותו שיעור $x$ על הגרף של $g(x)$ ונעלה אותה בריבוע.

ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

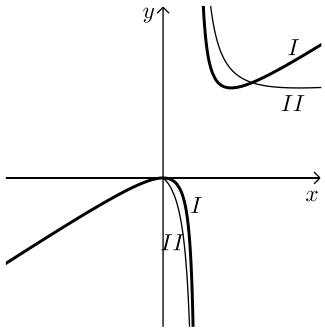
**50)** לפניך הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ , $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$ .

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.
הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר: $y=x$ .

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.




מגדירים פונקציה נוספת והיא: $h(x)=\left(g(x)\right)^2$ .

ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה: $h(x)$ .

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ זהה לשל $g(x)$ ?

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.
קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף
מתאר מבין הפונקציות: $h(x)$ , $g(x)$ , $f(x)$ . נמק את בחירותיך.

**51)** לפניך שלוש פונקציות: $h(x)=\frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$ , $g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$ , $f(x)=x^2\sqrt{k-x^2}$ $(k>0)$ .

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך
באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$ .

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה-$x$ כלל.

iii. הפונקציות: $h(x)$ ו-$g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן
(כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

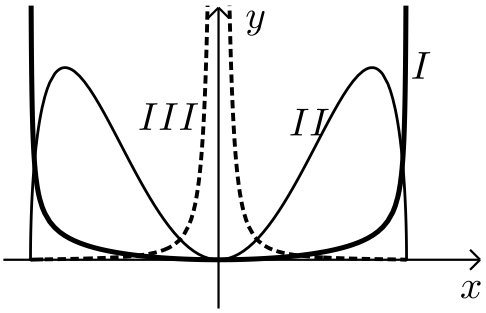
iv. לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A\left(0,\sqrt{12}\right)$ על ציר ה-$y$ . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך
של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-$x$ שאינה בראשית הוא: $d=6$ .

ב. מצא את $k$ .

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף
הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

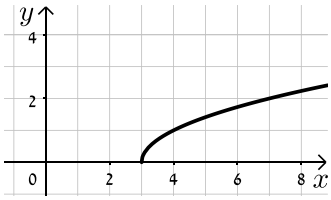
ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של
שלושת הפונקציות.
קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף
שייך לכל פונקציה.



## תשובות סופיות:

**37)** א. $x\geq 3$ ב. $\min(3,0)$ קצה ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה.

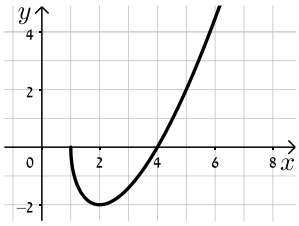
ד. $(3,0)$ ה. אין. ו. להלן סקיצה:




**38)** א. $x\geq 1$ ב. $\min(2,-2)$ , $\max(1,0)$ קצה

ג. עולה: $x>2$ , יורדת: $1<x<2$. ד. $(1,0),(4,0)$ ה. אין.

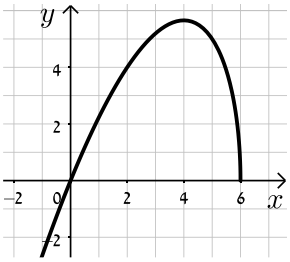
ו. להלן סקיצה:




**39)** א. $x\leq 6$ ב. $\min(6,0)$ , $\max\left(4,4\sqrt{2}\right)$ קצה

ג. עלייה: $x<4$ , ירידה: $4<x<6$ ד. $(6,0),(0,0)$.

ה. להלן סקיצה:




**40)** א. $x\geq 0$ ב. $\min(0,0)$ , $\max(1,1)$ קצה

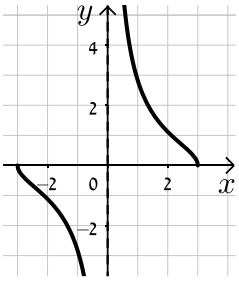
ג. עולה: $0<x<1$ , יורדת: $x>1$ ד. $(0,0)$ ה. $y=0$.

ו. להלן סקיצה:

**41)** א. $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה

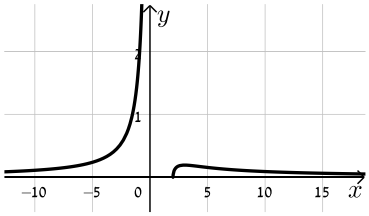
ג. עולה: אף $x$, יורדת: $-3\le x\le 3$ , $x\ne 0$ ד. $(-3,0),(3,0)$

ה. $x=0$. ו. להלן סקיצה:




**42)** א. $x<0$ , $x\ge 2$ ב. $\max\left(3,\frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ $\min(2,0)$ ג. $(2,0)$.

ד. להלן סקיצה:



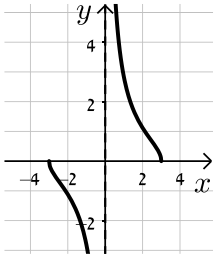

**43)** א. $(2,0)$ ב. לא ג. $y=2\sqrt{2}x-4\sqrt{2}$ ד. $S=4\sqrt{2}$.

**44)** א. $x\ge 0$ , $x\ne 1$ ב. $(9,6)$ ג. $y=6$.

**45)** א. $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה

ג. עולה: אף $x$, יורדת: $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ד. $(-3,0),(3,0)$

ה. $x=0$ ו. להלן סקיצה:




**46)** א. $a=1$ ב. $-3<x<3$ ג. $\left(-1.5,\sqrt{3}\right)$

ד. יורדת: $-3<x<-1.5$ , עולה: $-1.5<x<3$.

**47)** א. $k=0.48$ ב. כן, $(0.6,0.57)$ ג. $y=0.74x+0.1352$.

**48)** א. i. $-\sqrt{k}<x<\sqrt{k}$ ii. $x=\pm\sqrt{k}$ ב. $f'(x)=\frac{k^2}{\left(k-x^2\right)^{1.5}}>0$

ג. $y=\sqrt{k}x$ ד. $k=4$.

**49)** א. $g(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$ ב. i. לא נכון ii. נכון

iii. נכון iv. נכון ג. $f(x):\left(0,\frac{1}{2}\right)$ , $g(x):\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ד. אסף צודק.

**50)** א. i. לא נכון ii. נכון iii. נכון ב. $h(x)=\frac{x^2}{x-1}$

ג. לא, $h(x):x\neq 1$ ד. $\text{I}=h(x)$ , $\text{II}=f(x)$.

**51)** א. i. לא נכון ii. לא נכון iii. נכון iv. נכון

ב. $k=24$ ג. $\max\left(\pm 4,32\sqrt{2}\right)$ , $\min(0,0)$

ד. $\text{I}=g(x)$ , $\text{II}=f(x)$ , $\text{III}=h(x)$.

# תחומי קעירות ונקודות פיתול:

## סיכום כללי:

**תחומי קעירות – הגדרה:**

- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל $x$ בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) < 0$.
- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל $x$ בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) > 0$.

**נקודת פיתול – הגדרות:**

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת: $f''(x) = 0$ כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

## שאלות:

**52)** מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

**53)** מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$.

**54)** מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$.

**55)** מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = x(x-2)^3$.

**56)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{a}{x^2+b}$ , $a,b$ פרמטרים.

הנקודה $(-1\ ,\ 1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה.

מצא את ערכי הפרמטרים $a,b$.

**57)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+2$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**58)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{x-\sqrt{x}}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**59)** חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

i. מציאת תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.
viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

ב. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ג. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ד. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ה. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

ו. $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

ז. $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

ח. $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

**הערה: בסעיפים ו ו-ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.**

## תשובות סופיות:

**52)** $(1,7),(2,16)$, קעירות כלפי מעלה: $x>2$ או $x<1$, קעירות כלפי מטה: $1<x<2$.

**53)** $(2,1)$, קעירות כלפי מעלה: $x>2$, קעירות כלפי מטה: $0\neq x<2$.

**54)** קיצון: $\min(2,4)$, פיתול: $\left(4,\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

**55)** קיצון: $\min\left(\frac{1}{2},-\frac{27}{16}\right)$, פיתול: $(2,0),(1,-1)$.

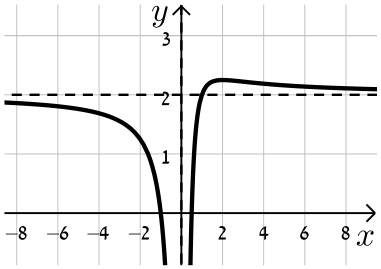
**56)** $a=4$, $b=3$.

**57)** א. $x\neq 0$ ב. $\max\left(2,2\frac{1}{4}\right)$ ג. עולה: $0<x<2$ יורדת: $x>2$, $x<0$

ד. $\left(\frac{1}{2},0\right),(-1,0)$ ה. $x=0$, $y=2$ ו. $\left(3,2\frac{2}{9}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $x>3$, קעירות כלפי מטה: $0\neq x<3$.

ח. להלן סקיצה:

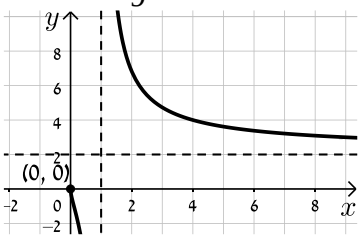



**58)** א. $1\neq x>0$ ב. אין. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.

ד. אין. ה. $x=1$, $y=2$ נקודת אי הגדרה: $(0,0)$. ו. $\left(\frac{1}{9},-1\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $x>1$ או $0<x<\frac{1}{9}$, קעירות כלפי מטה: $\frac{1}{9}<x<1$.

ח. להלן סקיצה:




**59)** א. i. $x\neq 0$ ii. $(1,0)$ iii. $x=0$, $y=0$ iv. $\max(2,0.25)$

v. עולה: $0<x<2$, יורדת: $x<0$, $x>2$ vi. $\left(3,\frac{2}{9}\right)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>3$, קעורה כלפי מטה: $0<x<3$, $x<0$.

ב. i. $x\neq -1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$, $y=2$ iv. $\min(0,0)$

v. עולה: $x<-1$ , $x>0$ , יורדת: $-1<x<0$ vi. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $-1<x<\frac{1}{2}$ , קעורה כלפי מטה: $x<-1$ , $x<\frac{1}{2}$.

ג. i. $x\neq\pm2$ ii. $(0,0)$ iii. $x=\pm2$

iv. $\max\left(-\sqrt{12},-5.2\right)$ , $\min\left(\sqrt{12},5.2\right)$.

v. עולה: $x>\sqrt{12}$ , $x<-\sqrt{12}$ , יורדת: $2<x<\sqrt{12}$ , $-2<x<2$ , $-\sqrt{12}<x<-2$

vi. $(0,0)$.

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>2$ , $-2<x<0$ , קעורה כלפי מטה: $0<x<2$ , $x<-2$.

ד. i. $x\neq-1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$ iv. $\max(-3,-6.75)$

v. עולה: $x>-1$ , $x<-3$ , יורדת: $-3<x<-1$ vi. $(0,0)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>0$ , קעורה כלפי מטה: $-1<x<0$ , $x<-1$.

ה. i. $x\neq1$ ii. $(-1,0),(0,-1)$ iii. $x=1$ , $y=1$ iv. אין.

v. יורדת בכל ת.ה. vi. $\left(-3,\frac{1}{8}\right),(-1,0)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $-3<x<-1$ , $x>1$ , קעורה כלפי מטה: $-1<x<1$ , $x<-3$.

ו. i. $x\neq2,5$ ii. $(0,-0.1),(-1,0),(1,0)$ iii. $x=2$ , $x=5$ , $y=1$

iv. $\min(0.359,-0.11)$ , $\max(2.78,-3.89)$

v. עולה: $2<x<2.78$ , $0.359<x<2$ , יורדת: $x>5$ , $2.78<x<5$ , $x<0.359$.

ז. i. $x\neq\pm2$ ii. $(3,0),(1,0),(0,-0.75)$ iii. $x=\pm2$ , $y=1$

iv. אין. v. יורדת בכל ת.ה.

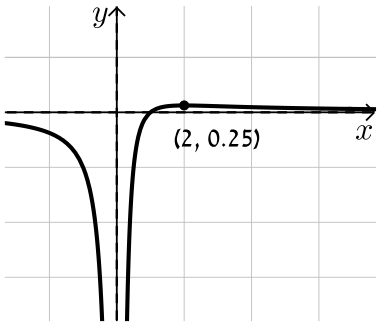
ח. i. $x\neq\pm1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$ iv. $\max(-2,-4)$ , $\min(0,0)$.

v. עולה: $x>0$ , $x<-2$ , $x\neq1$ , יורדת: $-1<x<0$ , $-2<x<-1$

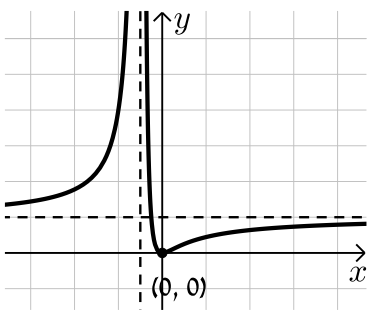
vi. אין. vii. קעורה כלפי מעלה: $x>-1$ , $x\neq1$ , קעורה כלפי מטה: $x<-1$.

**סקיצות:**

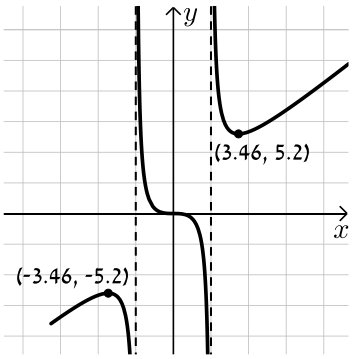
א.



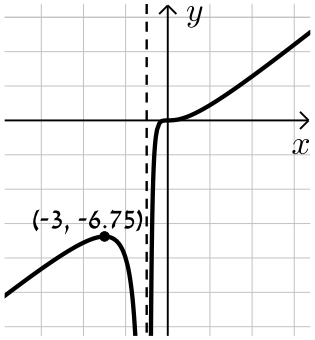

ב.



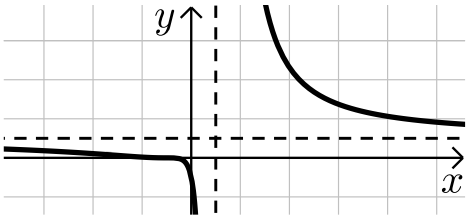

ג.



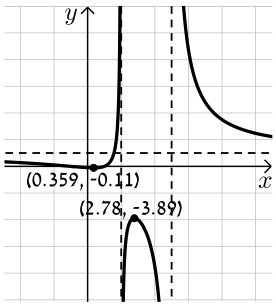

ד.



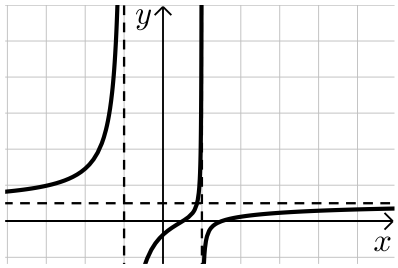

ה.



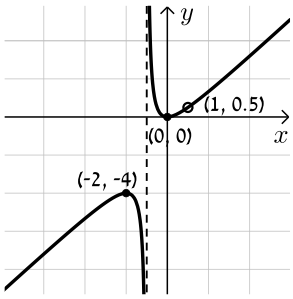

ו.




ז.




ח.



# חקירת פונקציה עם פרמטר:

## סיכום כללי:

סיווג נקודות קיצון באמצעות "$y$" :

אם הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת קיצון אז :

- אם $f''(x_1)>0$ הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת מינימום.
- אם $f''(x_1)<0$ הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת מקסימום.

## שאלות:

**1)** מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x)=x^3-12x$ .

**2)** מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x)=x^2-6x-16$ .

**3)** מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x)=x^3-3b^2x$ , $b>0$ פרמטר.
שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**4)** נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{2x}{a^2+x^2}$ $(a>0)$. חקור לפי הסעיפים הבאים :

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**5)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1-x^2}{(x-b)^2}$ , $(b>1)$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=4x\sqrt{b^2-x^2}$ , $(b>0)$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**7)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-m}{ax-4}$ , $a,m$ פרמטרים קבועים כאשר: $a>0$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$.

א. מצא את הערך של הפרמטר $m$.

ב. הצב את הערך של $m$ שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות $a$ את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות $a$ בסעיף הקודם.

ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- $y$ נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר $a$.

ה. נתון הישר: $y=k$. מצא עבור אילו ערכים של $k$ אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

## תשובות סופיות:

1) $\min(2,-16)$ , $\max(-2,16)$

2) $\min(3,-25)$

3) $\min(b,-2b^3)$ , $\max(-b,2b^3)$

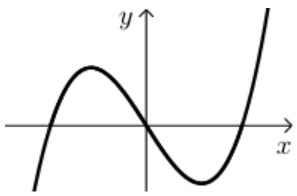
4) א. כל $x$ ב. $\min\left(-a,-\frac{1}{a}\right)$ , $\max\left(a,\frac{1}{a}\right)$.
ג. עולה: $-a<x<a$ יורדת: $x>a$ , $x<-a$.
ד. $(0,0)$ ה. אסימפטוטה אופקית: $y=0$

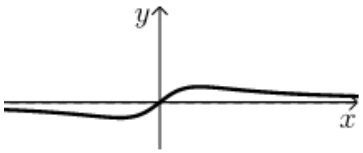
5) א. $x\neq b$ ב. $\max\left(\frac{1}{b},\frac{1}{b^2-1}\right)$ ג. עולה: $x>b$ , $x<\frac{1}{b}$ יורדת: $\frac{1}{b}<x<b$.
ד. $\left(0,\frac{1}{b^2}\right)$ , $(-1,0)$ , $(1,0)$ ה. $x=b$ , $y=-1$.

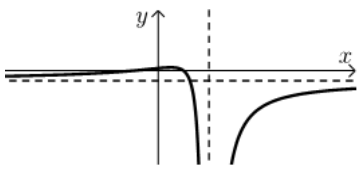
6) א. $-b\le x\le b$ ב. $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}},-2b^2\right)$ , $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}},2b^2\right)$ , $\min(-b,0)$ קצה,
ג. עולה: $-\frac{b}{\sqrt{2}}<x<\frac{b}{\sqrt{2}}$, יורדת: $\frac{b}{\sqrt{2}}<x<b$ , $-b<x<-\frac{b}{\sqrt{2}}$.
$\min(b,0)$ קצה.
ד. $(0,0)$ , $(-b,0)$ , $(b,0)$.

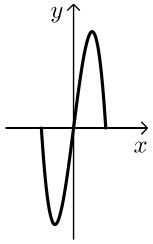
7) א. $m=0$ ב. i. $x\neq\frac{4}{a}$ ii. $\min\left(\frac{8}{a},\frac{16}{a^2}\right)$ , $\max(0,0)$
iii. $x=\frac{4}{a}$ ד. $a=2$ ה. $0<k<4$.

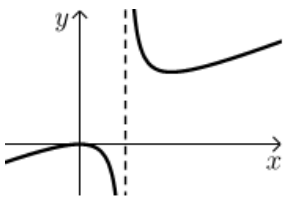
## סקיצות לשאלות:

3)



4)



5)



6)



7)


# פונקציות ללא תבנית מפורשת:

## סיכום כללי:

**הגדרת פונקציה:**

פונקציה $f$ היא התאמה בין ערך $x$ לערך $y$ ומסומנת באופן הבא: $f:x\to y$.
כך שלכל $x$ מתאים ערך אחד בלבד של $y$. סימון אחר: $y=f(x)$.
הנגזרת של פונקציה $f(x)$ מסומנת $f'(x)$.

**כללי הגזירה לפי כלל השרשרת:**

- סימון הנגזרת: $\left(f(x)\right)'=f'(x)$.
- גזירה של פונקציה בחזקה: $\left(f^2(x)\right)'=2f(x)f'(x)$.
- גזירה של הרכבת פונקציות: $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$.

## שאלות:

**1)** הפונקציה $f(x)$ מקיימת: $f(1)=3$ ו-$f'(1)=-2$.
חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $f(1)+4$.

ב. $f'(1)+4$.

ג. $\dfrac{f(1)+1}{f'(1)-1}$.

ד. $\sqrt{f(1)+f'(1)}$.

**2)** נתונה פונקציה $f$ המקיימת: $f(4)=0$ ו-$f'(4)=1$.
מגדירים: $g(x)=2x+f(2x)$.
חשב את $g(2)$ ואת $g'(2)$.

**3)** נתונה פונקציה המקיימת: $f(8)=-1$ ו-$f'(8)=1$.

א. נתון: $g(x)=x^2\sqrt{f(4x)+f'(x+6)}$. חשב את $g(2)$.

ב. נתון: $h(x)=\dfrac{f(x+2)+x+2}{f'(14-x)-14+x}$. חשב את $h(6)$.

**4)** נתונה פונקציה המקיימת: $f(9)=-4$, $f'(9)=3$.

מגדירים: $g(x)=f^2(3x)+f'(x^2)$. חשב את $g(3)$.

**5)** פונקציה $f$ מקיימת: $f(4)=2$, $f'(4)=1$.

מגדירים: $g(x)=f^2(x)+f(x)+x$.

חשב את $g(4)$ ואת $g'(4)$.

**6)** פונקציה $f$ מקיימת: $f(1)=-3$, $f'(1)=3$. מגדירים: $g(x)=\dfrac{x\cdot f(x)}{x+f(x)}$.

חשב את $g(1)$ ואת $g'(1)$.

**7)** פונקציה $f$ מקיימת: $f(-2)=6$, $f'(-2)=2$. מגדירים: $g(x)=\sqrt{f^2(x)+1}$.

חשב את $g(-2)$ ואת $g'(-2)$.

**8)** פונקציה $f$ מקיימת: $f\left(\frac{1}{2}\right)=3$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}$. מגדירים: $g(x)=3x\cdot f(2x)$.

חשב את $g\left(\frac{1}{4}\right)$ ואת $g'\left(\frac{1}{4}\right)$.

**9)** פונקציה $f$ מקיימת: $f(6)=\frac{2}{3}$, $f'(6)=-\frac{3}{2}$. מגדירים: $g(x)=\dfrac{x+3+f(x+3)}{f(2x)+3}$.

חשב את $g(3)$ ואת $g'(3)$.

**10)** נתונה פונקציה המקיימת: $f(8)=-3$. מגדירים: $g(x)=\frac{f(4x)+1}{f(x+6)+2}$.

א. חשב את $g(2)$.

ב. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2)=1$.

ג. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2)=\left(f'(8)\right)^2$ וכי $f'(8)<0$.

**11)** נתונה פונקציה המקיימת: $f(3)=-2$.

מגדירים: $g(x)=\frac{x^2\cdot f(x-2)}{f(2x-7)}$ וידוע כי $g'(5)=-15$.

חשב את $g(5)$ ואת $f'(3)$.

**12)** נתונה פונקציה שמקיימת: $f(4)=\frac{1}{2}$.

מגדירים: $g(x)=x^2\cdot f\left(x^2\right)+f'^2\left(x^2\right)$.

א. הבע את $g'(x)$ באמצעות $f$.

ב. חשב את $g(-2)$ ואת $g(2)$ אם ידוע כי $f'(4)=1$.

ג. חשב את $f'(4)$ אם ידוע כי $g'(2)=11$ ו- $f''(4)=\frac{1}{4}$.

## תשובות סופיות:

1) א. 7 ב. 2 ג. $-\frac{4}{3}$ ד. 1.

2) $g(2)=4\,,\,g'(2)=4$.

3) א. $g(2)=0$ ב. $h(6)=-1$.

4) $g(3)=19$.

5) $g(4)=10\,,\,g'(4)=6$.

6) $g(1)=1.5\,,\,g'(1)=3$.

7) $g(-2)=\sqrt{37}\,,\,g'(2)=\frac{12}{\sqrt{37}}$.

8) $g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}\,,\,g'\left(\frac{1}{4}\right)=11$.

9) $g(3)=1\frac{9}{11}\,,\,g'(3)=\frac{327}{242}=1.351$.

10) א. $g(2)=2$ ב. $f'(8)=-\frac{1}{2}$ ג. $f'(8)=-2$.

11) $g(5)=25\,,\,f'(3)=-2$.

12) א. $g'(x)=2x\,f\left(x^2\right)+2x^3 f'\left(x^2\right)+4x\,f'\left(x^2\right)f''\left(x^2\right)$

ב. $g(2)=3\,,\,g'(-2)=3$ ג. $f'(4)=\frac{1}{2}$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 35 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות

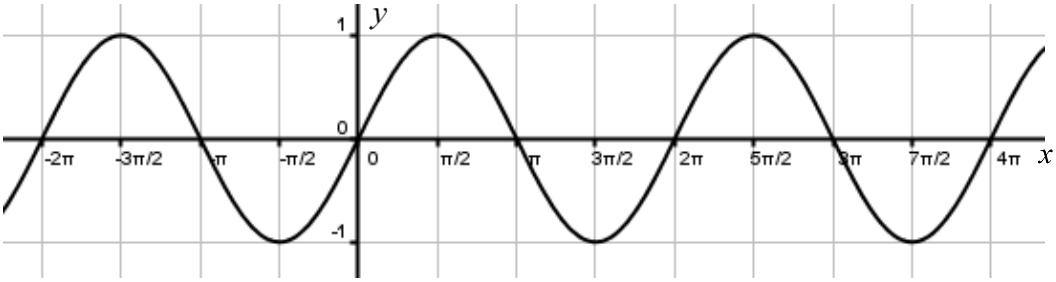
### תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות ..... 600
2. גזירה של פונקציות טריגונומטריות ..... 602
3. שאלות עם משיקים ..... 604
4. מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות ..... 606
5. מציאת נקודות קיצון ..... 607
6. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים ..... 608
7. מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות ..... 609
8. חקירת פונקציה טריגונומטרית ..... 610

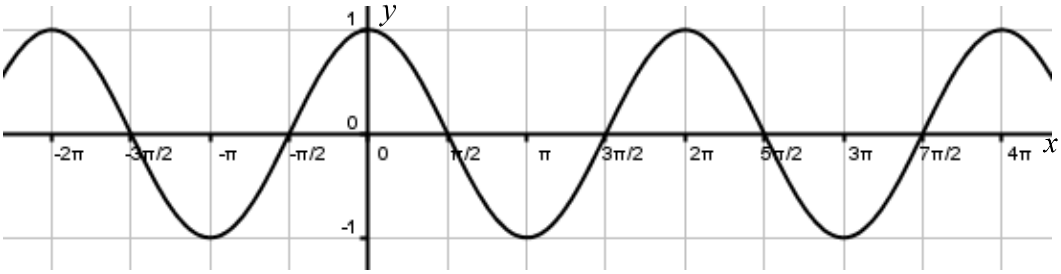
# הגדרות כלליות:

## סיכום כללי:

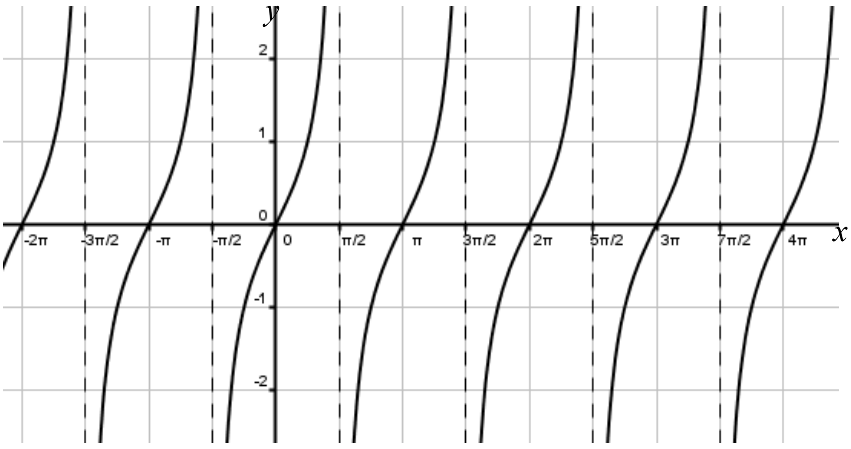
תיאור גרפי של פונקציית הסינוס $y=\sin x$ :




תיאור גרפי של פונקציית הקוסינוס $y=\cos x$ :




תיאור גרפי של פונקציית הטנגנס $y=\tan x$ :



**הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות:**

| הפונקציה | הנגזרת |
|---|---|
| $y=\sin x$ | $y'=\cos x$ |
| $y=\cos x$ | $y'=-\sin x$ |
| $y=\tan x$ | $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $y=\cot x$ | $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ |

**זוגיות של פונקציות:**

- פונקציה $f(x)$ תקרא זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x)=f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תקרא אי-זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x)=-f(-x)$.
- פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הנ"ל אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

**מחזוריות של פונקציות:**

1) פונקציה $f(x)$ תיקרא מחזורית במחזור $T$ אם היא מקיימת: $f(x+T)=f(x)$ לכל $x$ בתחום הגדרתה.
2) מחזור של פונקציות טריגונומטריות:

- הפונקציה $f(x)=\sin x$ מחזורית במחזור $T=2\pi$ שכן: $\sin(x+2\pi)=\sin x$.
- הפונקציה $f(x)=\cos x$ מחזורית במחזור $T=2\pi$ שכן: $\cos(x+2\pi)=\cos x$.
- הפונקציה $f(x)=\tan x$ מחזורית במחזור $T=\pi$ שכן: $\tan(x+\pi)=\tan x$.
- הפונקציה $f(x)=\cot x$ מחזורית במחזור $T=\pi$ שכן: $\cot(x+\pi)=\cot x$.

# גזירה של פונקציות טריגונומטריות:

## שאלות:

**1)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin x+3\cos x+x$

ב. $f(x)=2x\sin x+4\tan x$

ג. $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$

**2)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin 3x+2\cos 5x$

ב. $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$

**3)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin^3 x$

ב. $f(x)=2\cos^4 x$

ג. $f(x)=\sin^2 x$

ד. $f(x)=\sin^3 2x$

ה. $f(x)=\cos^2 2x$

ו. $f(x)=\tan^2 4x$

**4)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sin 3x}$

ב. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

**5)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x$

ב. $f(x)=\sin^4 2x-\cos^4 2x$

ג. $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$

## תשובות סופיות:

1) א. $\cos x-3\sin x+1$ ב. $2\sin x+2x\cos x+\frac{4}{\cos^2 x}$ ג. $\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$

2) א. $3\cos 3x-10\sin 5x$ ב. $-\frac{2}{1+\sin 2x}$.

3) א. $3\sin^2 x\cdot\cos x$ ב. $-8\cos^3 x\sin x$ ג. $\sin 2x$
ד. $6\sin^2 2x\cos 2x$ ה. $-2\sin 4x$ ו. $\frac{8\tan 4x}{\cos^2 4x}$.

4) א. $\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$ ב. $\frac{\cos^2 2x+1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$.

5) א. $2\sin 2x$ ב. $4\sin 4x$ ג. $-\sin 4x$.

# שאלות עם משיקים:

## שאלות:

**6)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\cos x$ בנקודה $A\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**7)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\sin 2x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{2}$.

**8)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\tan 3x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{9}$.

**9)** מצא את משוואות המשיקים לפונקציה: $f(x)=4\sin^2 x$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=1$ בתחום $[0,\pi]$.

**10)** שיפוע המשיק לפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sin x+a}$, ($a$ פרמטר) בנקודה שבה $y=1$ בתחום $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ הוא $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
מצא את ערך הפרמטר $a$.

**11)** נתונה הפונקציה: $f(x)=a\sin^2 x-5\sin x+ax$, ($a$ פרמטר) בתחום: $0\le x\le\pi$.
ידוע כי הישר: $y=ax-2$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{6}$.

א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא: $m=2$.

ג. האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק דרכן הוא 2?
נמק את תשובתך.

ד. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

**12)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x^2+\cos^2 x$ , $g(x)=x^2+\sin^2 x$.

א. הוכח כי ההפרש: $f(x)-g(x)$ שווה ל- $\cos 2x$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום: $-\pi<x<\pi$.

ג. ישר $x=t$ , $(0<t<1)$ חותך את הגרפים בנקודות A ו-B ומהן מעבירים משיקים לפונקציות. ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק של גרף הפונקציה $g(x)$ לשיפוע המשיק של גרף הפונקציה $f(x)$ הוא 1.
מצא את כל הערכים האפשריים עבור $t$.

## תשובות סופיות:

**6)** $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**7)** $y=-2x+\pi$.

**8)** $y=12x-\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$.

**9)** $y=2\sqrt{3}x-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+1$ , $y=-2\sqrt{3}x+\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}+1$.

**10)** $a=\frac{1}{2}$.

**11)** א. $a=2$ , $f(x)=2\sin^2 x-5\sin x+2x$ ב. $\left(\frac{\pi}{2},\pi-3\right)$ ג. לא. ד. $y=2x-3$.

**12)** ב. $\left(\frac{\pi}{4},1.11\right)$ , $\left(\frac{3\pi}{4},6.05\right)$ , $\left(-\frac{\pi}{4},1.11\right)$ , $\left(-\frac{3\pi}{4},6.05\right)$ ג. $t=\frac{\pi}{12}$.

# מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות:

## שאלות:

**13)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

א. $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos 2x}\ ,\ [0,2\pi]$

ב. $f(x)=\frac{1}{\sin x-\cos x}\ ,\ [-\pi,\pi]$

ג. $f(x)=\tan x\ ,\ [0,2\pi]$

## תשובות סופיות:

**13)** א. $0\le x\le 2\pi$ וגם $x\ne \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

ב. $-\pi\le x\le \pi$ וגם $x\ne \frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}$.

ג. $0\le x\le 2\pi$ וגם $x\ne \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$.

# מציאת נקודות קיצון:

## שאלות:

**14)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x)=\sin x+\cos x$ בתחום: $[0,2\pi]$.

**15)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$ בתחום: $[0,2\pi]$.

**16)** מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin x+1}{\sin x-1}$ בתחום: $[0,2\pi]$.

**17)** מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{3}\sin^3 x-2\sin x$
בתחום: $[0,1.5\pi]$.

**18)** לפונקציה: $f(x)=a\sin x+b\sin^3 x$, ($a,b$ פרמטרים) יש נקודת קיצון
ששיעוריה $\left(\frac{7\pi}{6},-1\right)$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

## תשובות סופיות:

**14)** $\min(0,1)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$ , $\min\left(\frac{5}{4}\pi,-\sqrt{2}\right)$ , $\max(2\pi,1)$ קצה.

**15)** $\min(0,0)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ , $\min\left(\frac{5}{3}\pi,-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{6}\pi\right)$ , $\max(2\pi,-\pi)$ קצה.

**16)** $\min(2\pi,-1)$ קצה, $(0,-1)$ קצה, $\max\left(\frac{3}{2}\pi,0\right)$ מוחלט.

**17)** $\max\left(\frac{3}{2}\pi,2\frac{2}{15}\right)$ , $\min\left(\frac{\pi}{2},-2\frac{2}{15}\right)$

**18)** $a=3$ , $b=-4$.

# מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

## שאלות:

**19)** מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin 3x}$ בתחום: $[0,\pi]$.

**20)** מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}$ בתחום: $[0,\pi]$.

**21)** מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x)=\tan x$ בתחום: $[-\pi,\pi]$.

## תשובות סופיות:

**19)** $x=\pi$ , $x=\frac{2\pi}{3}$ , $x=\frac{\pi}{3}$ , $x=0$.

**20)** $x=\pi$ , $x=\frac{\pi}{2}$ , $x=0$.

**21)** $x=-\frac{\pi}{2}$ , $x=\frac{\pi}{2}$.

# מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות:

## שאלות:

**22)** מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x-2\sin x$ בתחום: $[0,2\pi]$.

## תשובות סופיות:

**22)** נקודות פיתול: $\left(\frac{11}{6}\pi,1\frac{1}{4}\right)$ , $\left(\frac{7}{6}\pi,1\frac{1}{4}\right)$, קעור מעלה: $0<x<\frac{7}{6}\pi$ , $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$

קעור מטה: $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$.

# חקירת פונקציה טריגונומטרית:

## שאלות:

**23)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\cos x$ בתחום $[0,2\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.
ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**24)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$ בתחום $[0,\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ בתחום הנתון.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**25)** נתונה הפונקציה: $f(x)=4\sin 2x-2$ בתחום $0\le x\le\pi$.
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. מעבירים את הישר $y=k$ היעזר בסקיצה ומצא לאילו ערכי $k$ הישר יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.
ה. העבירו ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט שלה.
כמו כן העבירו מנקודה זו אנך לציר $x$.
מצא את שטח המלבן הנוצר על ידי הצירים, המשיק והאנך.

**26)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x-\cos x-2$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**27)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos x+\frac{1}{m}\sin mx$ , $1<m<3$ ( $m$ פרמטר).

הנגזרת של הפונקציה מתאפסת כאשר: $x=-\frac{\pi}{2}$.

א. מצא את ערך הפרמטר $m$.

ב. האם הנקודה שבה: $x=-\frac{\pi}{2}$ היא נקודת קיצון? אם כן קבע את סוגה.
אם לא נמק מדוע.

ג. מצא כמה נקודות קיצון מקומיות יש לגרף הפונקציה בתחום: $0<x<2\pi$.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$ בתחום הנתון.

**28)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\cos x\cdot(\sin x+1)$ בתחום: $0\le x\le 1.5\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x\cdot(\sin x+1)=1$ בתחום הנתון?

**29)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$.

א. מצא בתחום $[0,\pi]$ את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה
ואת נקודות הקיצון שלה.

ב. הוכח שהפונקציה זוגית.

ג. שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi,\pi]$.

**30)** נתונה הפונקציה: $f(x)=4x-3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**31)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan 2x-8\sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi<x<0.25\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

**32)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan\left(x^2-4x\right)$ בתחום $[0,4]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**33)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x\cos x-x$ בתחום: $-3\pi\le x\le 3\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ הנגזרת של הפונקציה מתאפסת.

ii. ידוע גם כי: $f'(-3.67)=0$, $f'(3.67)=0$ וכי אין נקודות נוספות בתחום הנתון שבהן הנגזרת מתאפסת. קבע אלו נקודות, מבין נקודות החיתוך שמצאת, הן נקודות קיצון ואלו אינן נקודות קיצון.
מצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

**34)** נתונה הפונקציה: $y=\left(\cos x+k\right)^2$ , $k$ פרמטר, בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=\frac{2\pi}{3}$.

א. מצא את $k$ וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודת המקסימום שאיננה מוחלטת בתחום הנתון.

ג. האם יש לגרף הפונקציה נקודות מינימום שאינן מוחלטות? אם כן מהן?

**35)** נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=m\sin x+k\cos^2 x$ ( $m$ פרמטר).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\pi$ שמשוואתו: $y=-6x+6\pi+\sqrt{7}$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים $k$ ו-$m$.

ב. מצא את נקודות הקיצון בתחום: $-0.5\pi\le x\le 1.5\pi$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע עפ"י הסקיצה בכמה נקודות גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$x$ בתחום הנ"ל.

**36)** נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=\tan x+kx$ ( $k$ פרמטר) בתחום: $0\le x\le \pi$.

א. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנתון.

הפונקציה: $g\left(x\right)=\tan^2 x+kx$ חותכת את הפונקציה $f\left(x\right)$ בשתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה-$x$ בתחום הנתון.

ב. מצא את ערך הפרמטר $k$, $\left(k\ne 0\right)$.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f\left(x\right)$ בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

**37)** לפניך הפונקציות הבאות: $f(x)=\sqrt{-\cos x}$ , $g(x)=\sqrt{\cos x+1}$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0.5\pi \le x \le 1.5\pi$ והפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

א. האם הגרפים חותכים את ציר ה-$x$ בתחום הנתון? הראה חישוב מתאים.

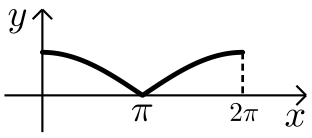
ב. האם הגרפים חותכים זה את זה בתחום הנתון? אם כן מצא את נקודות החיתוך.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגה.

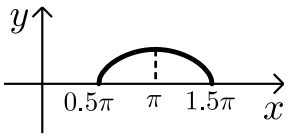
ד. לפניך ארבעה איורים: i , ii , iii , iv.

קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזה איור מתאר את הגרף של $f(x)$ ואיזה מתאר את הגרף של $g(x)$. נמק.

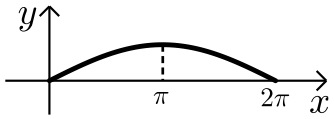
i.



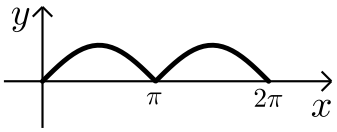

ii.




iii.




iv.



## תשובות סופיות:

**23)** א. $0 \le x \le 2\pi$.

ב. $\max(2\pi, 2\pi+2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$ , $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$ , $\min(0,2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$ .

ד. $(0,2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ , $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ , קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

**24)** א. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ; $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ ה. אנכית: $x = \pi$ , $x = \frac{\pi}{2}$ , $x = 0$.

**25)** א. $\left(\frac{5}{12}\pi, 0\right)$ , $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ , $(0,-2)$.

ב. $\max(\pi,-2), \min\left(\frac{3\pi}{4}, -6\right) \max\left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \min(0,-2)$.

ד. $-6 < k < 2$ וגם $k \ne -2$ ה. $\frac{\pi}{2}$.

**26)** א. $(\pi,0), (0,-2)$.

ב. $\max(2\pi,-2), \min\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right), \max(\pi,0), \min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right), \max(0,-2)$ .

ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$ , $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ , יורדת: $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$ , $0 < x < \frac{\pi}{3}$ .

**27)** א. $m = 2$ ב. נקודת פיתול ג. 2 נקודות

ד. $(0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0)$.

**28)** א. $(0,1)$ , $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ , $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ב. $(0,1), \left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right), \left(\frac{5}{6}\pi, -1.29\right), (1.5\pi, 0)$

ד. 2 פתרונות.

**29)** א. חיתוך: $(0,0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , קיצון: $\min(\pi,-2)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right), \min(0,0)$ קצה.

**30)** א. $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi,13.57\right)$ קצה, $\min\left(-\frac{\pi}{6},-0.36\right),\max\left(\frac{\pi}{6},0.36\right)$ קצה

ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$.

ד. $(0,0)$ ה. אנכית: $x=\frac{\pi}{2}$ ו. $(0,0)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6}\le x\le 0$, קעירות כלפי מטה: $0<x<\frac{\pi}{2}$.

**31)** א. $(0,0),(\pm 0.23\pi,0)$ ב. $x=\pm 0.25\pi$. ג. $\max\left(-\frac{\pi}{6},\sqrt{27}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{6},-\sqrt{27}\right)$.

**32)** א. $0\le x\le 4$ וגם $x\ne 3.56$, $x\ne 0.44$

ב. $\max(0,0)$ קצה, $\min(2,-1.16)$, $\max(4,0)$ קצה.

**33)** א. $(0,0),(2\pi,0),(-2\pi,0)$

ב. ii. $\min(-2\pi,0)$, $\max(2\pi,0)$, $(0,0)$ פיתול.

**34)** א. $k=0.5$, $y=(\cos x+0.5)^2$ ב. $(\pi,0.25)$

ג. לא.

**35)** א. $m=6$, $k=\sqrt{7}$ ב. $(-0.5\pi,-6),(0.5\pi,6),(1.5\pi,-6)$. ג. בשתי נקודות.

**36)** א. $x=0.5\pi$ ב. $k=-\frac{4}{\pi}\approx -1.27$

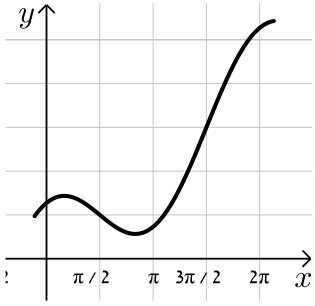
ג. $\max(0,0),\min(0.15\pi,-0.07),\max(0.84\pi,-3.9),\min(\pi,-4)$.

**37)** א. כן. $f(x):(0.5\pi,0),(1.5\pi,0)$, $g(x):(\pi,0)$. ב. כן, $\left(\frac{4}{3}\pi,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

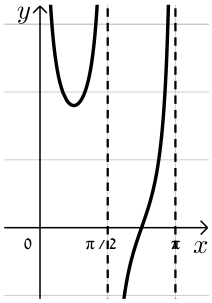
ג. $\max(0.5\pi,0),\min(1.5\pi,0),\max(\pi,1)$ ד. איור I - $g(x)$, איור II - $f(x)$.

## סקיצות לשאלות החקירה:

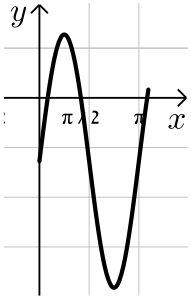
**(23**



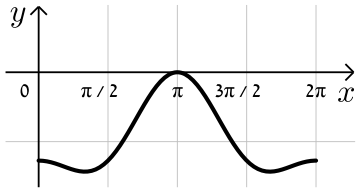

**(24**



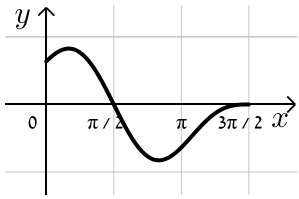

**(25**



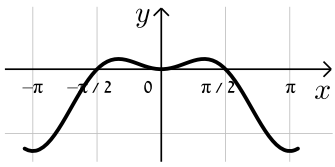

**(26**



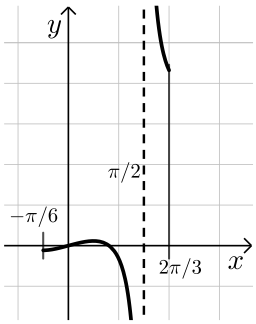

**(28**



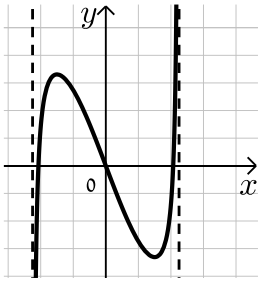

**(29**



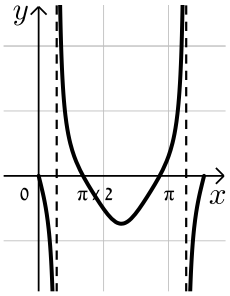

**(30**



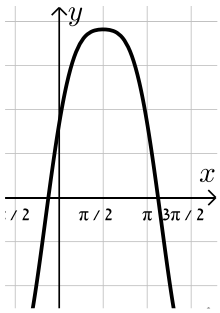

**(31**



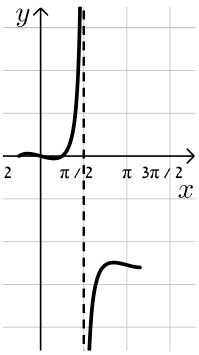

**(32**




**(35**




**(36**



# מתמטיקה למדעים

## פרק 36 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות

### תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקציה מעריכית ..... 618
2. שימושי הנגזרת ..... 622
3. חקירה של פונקציה מעריכית ..... 623

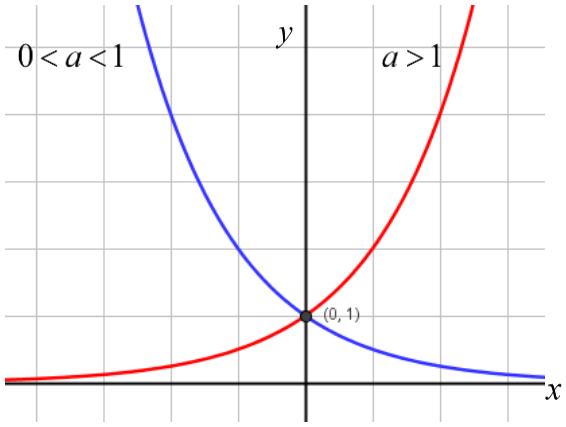
# הנגזרת של פונקציה מעריכית:

## סיכום כללי:

### הגדרות כלליות:

להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה: $f(x)=a^x$

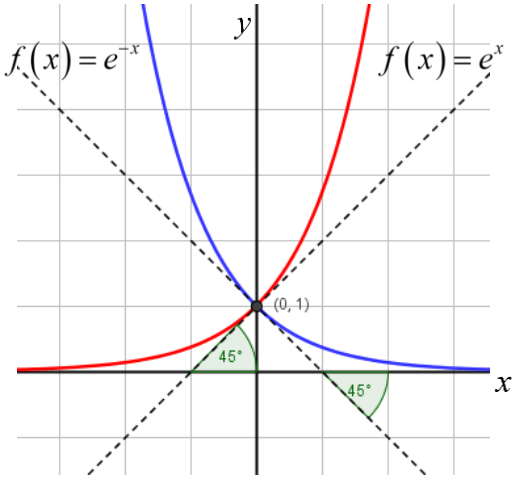
עבור: $a>1$ ו-$0<a<1$:




### תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל $x$.
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה-$y$ בנקודה: $(0,1)$.
4. עבור: $a>1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0<a<1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x)=e^x$ ו-$f(x)=e^{-x}$ נקבל:



**תכונות נוספות:**

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^{-x}$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ הוא 1-.

**נגזרות של פונקציות מעריכיות:**

| הפונקציה | הנגזרת |
|---|---|
| $y=a^x$ | $y'=a^x\cdot\ln a$ |
| $y=a^{f(x)}$ | $y'=a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\ln a$ |
| $y=e^x$ | $y'=e^x$ |
| $y=e^{f(x)}$ | $y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$ |

**תזכורת - כללי הגזירה:**

| מספר כלל | הפונקציה | תיאור | הנגזרת |
|---|---|---|---|
| 1. | $y=a\cdot f(x)$ | מכפלה בקבוע | $y'=a\cdot f'(x)$ |
| 2. | $y=f(x)+g(x)$ | סכום פונקציות | $y'=f'(x)+g'(x)$ |
| 3. | $y=f(x)\cdot g(x)$ | מכפלת פונקציות | $y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ |
| 4. | $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ | מנת פונקציות | $y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ |
| 5. | $y=f(g(x))$ | פונקציה מורכבת | $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ |

## שאלות:

**1)** גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

א. $f(x)=3e^{x}+e^{2x}+e^{-x}+2x+1$

ב. $f(x)=e^{x^2-3x}+ex$

ג. $f(x)=2^{3x}$

ד. $f(x)=3^{x^2}+4^{-x}$

**2)** גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

א. $f(x)=x\cdot e^{x}$

ב. $f(x)=x^2\cdot e^{4x}$

ג. $f(x)=(x+1)\cdot 2^{x}$

**3)** גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

א. $f(x)=\frac{x^2}{e^{x}}$

ב. $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$

**4)** גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

א. $f(x)=5\left(e^{2x}-1\right)^{3}$

ב. $f(x)=\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}$

ג. $f(x)=\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{x}+1}}$

**5)** גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x)=e^{2x}$

ב. $f(x)=e^{x}+1$

ג. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

ד. $f(x)=\left(x^2+1\right)e^{x}$

ה. $f(x)=e^{-x}\left(x^2+4x+1\right)$

ו. $f(x)=e^{3x-2}$

ז. $f(x)=e^{x}\cdot\frac{1}{x}$

ח. $f(x)=x^3e^{2x}$

ט. $f(x)=e^{-2x}(x+4)$

י. $f(x)=e^{2x+1}(1-x)$

יא. $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$

יב. $f(x)=\frac{x^3}{e^{3x}}$

יג. $f(x)=\frac{2+x^2}{e^{x^2}}$

יד. $f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{-x}+e^{x}}$

טו. $f(x)=\frac{x^2+1}{e^{-x}}$

טז. $f(x)=\frac{e^{x}}{1-e^{x+1}}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $3e^x+2e^{2x}-e^{-x}+2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x}+e$ ג. $3\ln 2\cdot 2^{3x}$ ד. $2x\ln 3\cdot 3^{x^2}-\ln 4\cdot 4^{-x}$

**2)** א. $(1+x)e^x$ ב. $2xe^{4x}(1+2x)$ ג. $2^x(1+x\ln 2+\ln 2)$

**3)** א. $\frac{x(2-x)}{e^x}$ ב. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

**4)** א. $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$ ב. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$ ג. $\frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$

**5)** א. $2e^{2x}$ ב. $e^x$ ג. $-\frac{e^{1/x}}{x^2}$ ד. $(x+1)^2e^x$

ה. $e^{-x}(-x^2-2x+3)$ ו. $3e^{3x-2}$

ז. $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ ח. $x^2e^{2x}(3+2x)$ ט. $-e^{-2x}(2x+7)$

י. $e^{2x+1}(1-2x)$

יא. $\frac{e^{-1/x}}{x^2}$ יב. $\frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}}$ יג. $\frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$

יד. $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$ טו. $\frac{(x+1)^2}{e^{-x}}$ טז. $\frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2}$

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

**6)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^x$ בנקודה $A(1,e)$.

**7)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^{2x}+xe^{-x}$ בנקודה שבה $x=0$.

**8)** מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=(e+1)e^x-e^{2x}$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=e$.

**9)** נתונה הפונקציה: $y=e^{2x}+3ex$.
לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה: $x=2$.
מצא את משוואת המשיק.

**10)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=a\cdot 3^{2x-1}+3^{x-b}$ בנקודה $(1,15)$ הוא $21\ln 3$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

### תשובות סופיות:

**6)** $y=ex$

**7)** $y=3x+1$

**8)** $y=(e-1)x+e$ , $y=(-e^2+e)x+e^2$

**9)** $y=2e^4x+3ex-3e^4$

**10)** $a=2$ , $b=-1$

# חקירה של פונקציה מעריכית:

## שאלות:

**11)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{2x-1}{e^x}$ ב. $f(x)=\frac{3}{e^x-1}$ ג. $f(x)=\frac{x+1}{e^x-5}$

ד. $f(x)=\frac{1}{e^{2x}-3e^x+2}$ ה. $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x}$ ו. $f(x)=\frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2}$

ז. $f(x)=\sqrt{e^{2x}-4e^x+3}$

**12)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=x^2e^x$.

**13)** מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x}{x-2}$.

**14)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2+bx+9}{e^x}$.
הפונקציה משיקה לציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=1.5$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו-$b$ ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

**15)** נתונה הפונקציה: $f(x)=8^x+p\cdot 2^x+q$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3,-19)$. מצא את ערכי הפרמטרים $p$ ו-$q$.

**16)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=e^{2x}+e^x$.

**17)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}}$.

**18)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x+5}{e^x-1}$.

**19)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x-5}$.

**20)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

**21)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x-2}{e^{2x}-5e^x+6}$.

**22)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$.

**23)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^3-1}{e^x}$.

**24)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x-1}{e^{3x}-e}$.

**25)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=(x-3)e^x$.

**26)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.

**27)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+a}{be^x}$. לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $\left(1,\frac{2}{e}\right)$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.

**28)** חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. $f(x)=(x-1)e^x$

ב. $f(x)=(x^2+1)e^x$

ג. $f(x)=x^2e^{-\frac{1}{4}x^2}$

ד. $f(x)=e^{x^2-x}$

ה. $f(x)=\frac{2}{e^{x^2}+1}$

ו. $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^{x+1}}$

**29)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-3)e^x$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**30)** נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x}-8e^x+6x+10$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**31)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4x}{e^{0.5x^2}}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**32)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^3}{e^x}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**33)** נתונה הפונקציה $f(x)=2x\cdot 3^x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**34)** נתונה הפונקציה $f(x)=2e^{\frac{x}{x^2+1}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
ז. לאלו ערכי $m$ יש למשוואה $f(x)=m$ בדיוק פתרון אחד?

**35)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
ז. כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**36)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{3x}}{12x^2+1}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**37)** שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{e^{3x^2+6x+k}}$ בנקודה שבה $x=1$ הוא $-\frac{12}{e^{10}}$.

א. מצא את ערך הפרמטר $k$ וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא: $0<\frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}\le e^2$.

**38)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=e^{2x}+ae^x+b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים וידוע כי כאשר $x=\ln\frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x)+f''(x)=8$.

א. מצא את $a$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y=16x+7-16\ln 2$.

ב. מצא את שיעור ה-$x$ של נקודת ההשקה.

ג. מצא את $b$.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

**39)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=6x-e^x$ ו- $g(x)=ae^x-e^{2x}+b$.

ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור $x$ וכי שתיהן נפגשות על ציר ה-$y$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו-$b$.

ב. הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

**40)** לגרף הפונקציה: $f(x)=ax^2\cdot e^{-bx^2}$ יש נקודת קיצון: $\left(2,\frac{4}{e}\right)$, $a,b\neq 0$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מעבירים ישר: $y=k$. באיזה תחום ערכים צריך להימצא $k$ כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

**41)** לפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-6x-7}{e^{ax-1}}$ יש קיצון בנקודה שבה: $x=1$.

א. מצא את ערך הפרמטר $a$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**42)** הישר $x=\sqrt{6}$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2+m}$.

א. מצא את ערך הפרמטר $m$ וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**43)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3\cdot e^{2x}$.

א. מצא את הנקודות המקיימות: $f'(x)=0$ וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.

ב. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. בכמה נקודות חותך הישר $y=-0.01$ את גרף הפונקציה?

**44)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=e^{2x}+ae^{x}+b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים וידוע כי כאשר $x=\ln\frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x)+f''(x)=12$.

א. מצא את $a$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y=22x+28-22\ln 2$.

ב. מצא את שיעור ה-$x$ של נקודת ההשקה.

ג. מצא את $b$.

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$? אם כן מצא את הנקודות.

**45)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x\cdot a^{x}$, $(a>0)$.

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x=-\frac{1}{\ln 2}$.

א. מצא את $a$.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה $x=2$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה: $g(x)=x^{2}\cdot 2^{x}-kx\cdot 2^{x}$.

ג. מצא את $k$.

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

**46)** נתונה הפונקציה: $f(x)=3^{2x}+2\cdot 3^{1-x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$.

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה-$x$.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

## תשובות סופיות:

**11)** א. כל $x$ ב. $x\neq 0$ ג. $x\neq \ln 5$ ד. $x\neq 0\ ,\ x\neq \ln 2$ ה. כל $x$

ו. $0\le x\neq \frac{2}{5}$ ז. $x\le 0\ ,\ x\ge \ln 3$

**12)** $\min(0,0)\ ,\ \max\left(-2,\frac{4}{e^2}\right)$

**13)** $\min\left(3,e^3\right)$

**14)** $a=4\ ,\ b=-12\ ,\ \max(3.5,0.483)\ ,\ \min(1.5,0)$

**15)** $q=35\ ,\ p=-27$

**16)** $y=0$

**17)** $y=0$

**18)** $y=1\ ,\ y=-5\ ,\ x=0$

**19)** $y=-\frac{1}{5}\ ,\ x=\ln 5$

**20)** $y=1\ ,y=-1$

**21)** $y=0\ ,\ y=-\frac{1}{3}\ ,x=\ln 3$, נקודת אי הגדרה: $(\ln 2,-1)$

**22)** $y=0\ ,\ x=0$

**23)** $y=0$

**24)** $y=0\ ,\ x=\frac{1}{3}$

**25)** $y=0$

**26)** $x=0$, נקודת אי הגדרה: $(0,0)$

**27)** $a=1\ ,\ b=1\ ,\ \left(3,\frac{10}{e^3}\right)$

**28)** א.1. כל $x$ 2. $(0,-1)\ ,\ (1,0)$ 3. $\min(0,-1)$ 4. עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$

ב.1. כל $x$ 2. $(0,1)$ 3. פיתול $\left(-1,\frac{2}{e}\right)$ 4. עולה: $x<-1\ ,\ x>-1$

ג.1. כל $x$ 2. $(0,0)$ 3. $\max\left(-2,\frac{4}{e}\right)\ ,\ \min(0,0)\ ,\ \max\left(2,\frac{4}{e}\right)$

4. עולה: $x<-2\ ,\ 0<x<2$ יורדת: $-2<x<0\ ,\ x>2$

ד.1. כל $x$ 2. $(0,1)$ 3. $\min\left(0.5,e^{-0.25}\right)$ 4. עולה: $x>0.5$ יורדת: $x<0.5$

ה. 1. כל $x$ 2. $(0,1)$ 3. $\max(0,1)$ 4. עולה: $x<0$ יורדת: $x>0$

ו. 1. כל $x$ 2. $(0,2e^{-1})$ 3. $\min(0,2e^{-1})$ 4. עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$

**29)** א. כל $x$ ב. $\min(2,-e^2)$ ג. תחומי עלייה: $x>2$ תחומי ירידה: $x<2$

ד. $(0,-3)$ , $(3,0)$

**30)** א. כל $x$ ב. $\min(\ln 3,1.59)$ , $\max(0,3)$

ג. תחומי עלייה: $x>\ln 3$ או $x<0$ תחומי ירידה: $0<x<\ln 3$ ד. $(0,3)$

**31)** א. כל $x$ ב. $\max\left(1,\frac{4}{e^{0.5}}\right)$ , $\min\left(-1,-\frac{4}{e^{0.5}}\right)$

ג. תחומי עלייה: $-1<x<1$ תחומי ירידה: $x>1$ או $x<-1$ ד. $(0,0)$

**32)** א. כל $x$ ב. $\max\left(3,\frac{27}{e^3}\right)$ ג. עולה: $x<3$, יורדת: $x>3$

ד. $(0,0)$

**33)** א. כל $x$ ב. $\min(-0.91,-0.67)$ ג. עולה: $x>-0.91$ יורדת: $x<-0.91$

ד. $(0,0)$

**34)** א. כל $x$ ב. $\min\left(-1,\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ , $\max(1,2\sqrt{e})$ ג. עולה: $-1<x<1$ יורדת:

$x<-1$ , $x>1$ ד. $(0,2)$ ה. $y=2$ ז. $m=\frac{2}{\sqrt{e}}$ , $m=2\sqrt{e}$ , $m=2$

**35)** א. $x\neq 0$ ב. $\min\left(\frac{1}{2},\frac{e^2}{4}\right)$ ג. עולה: $x>\frac{1}{2}$, יורדת: $0\neq x<\frac{1}{2}$

ד. אין

**36)** א. כל $x$ ב. $\min\left(\frac{1}{2},\frac{e^{1.5}}{4}\right)$ , $\max\left(\frac{1}{6},\frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$ ג. עולה: $x<\frac{1}{6}$ , $x>\frac{1}{2}$ יורדת:

$\frac{1}{6}<x<\frac{1}{2}$ ד. $(0,1)$

**37)** א. $k=1$ , $f(x)=\frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$ ב. $(-1,e^2)$

ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום $0<f(x)\le e^2$

**38)** א. $a=4$ ב. $x=\ln 2$ ג. $b=-5$ ד. $(0,0)$

**39)** א. $a=12$ , $b=-12$ ב. עולות: $x<\ln 6$ יורדות: $x>\ln 6$

**40)** א. $a=1\ ,\ b=0.25$ $f(x)=x^2e^{-\frac{1}{4}x^2}$ ב. $\min(0,0)\ ,\ \max\left(-2,\frac{4}{e}\right)$

ג. $(0,0)$ ה. $0<k<\frac{4}{e}$

**41)** א. $a=\frac{1}{3}$ ב. כן: $\left(11,\frac{48}{e^{2\frac{2}{3}}}\right)$ ג. עולה: $1<x<11$ יורדת: $x<1\ ,\ x>11$

ד. $(-1,0)\ ,\ (7,0)\ ,\ (0,-7e)$

**42)** א. $m=-6$ $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2-6}$ ב. $\min\left(3,\frac{e^6}{3}\right)\ ,\ \max\left(-2,-\frac{1}{2e^4}\right)$ ג. $\left(0,-\frac{1}{6}\right)$

**43)** א. $x=0,-1.5$. נקודת הקיצון היא: $\min\left(-1.5,-3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$ ב. $y=0$

ד. 2 נקודות.

**44)** א. $a=7$ ב. $x=\ln 2$ ג. $b=10$ ד. לא.

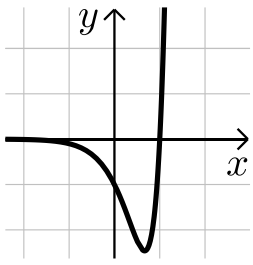
**45)** א. $a=2$ ב. עולה: $x>-\frac{1}{\ln 2}$ יורדת: $x<-\frac{1}{\ln 2}$ ג. $k=1$

ד. $(0,0)$

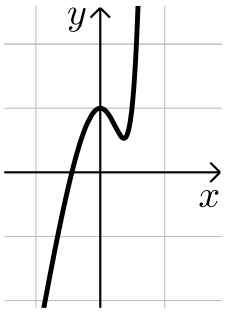
**46)** א. $y=-x\ln 81+7$ ג. $\min\left(\frac{1}{3},\sqrt[3]{243}\right)$

**סקיצות לשאלות החקירה:**

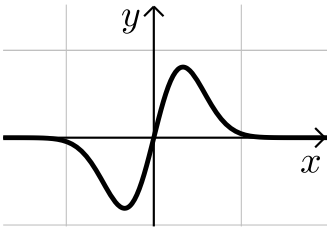
**29)**



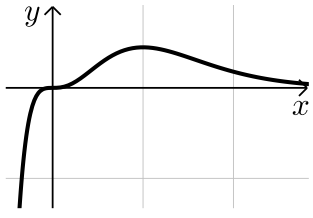

**30)**



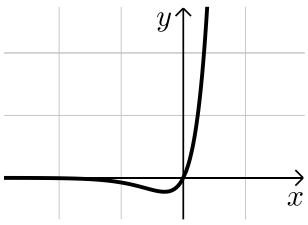

**31)**



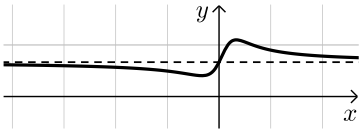

**32)**



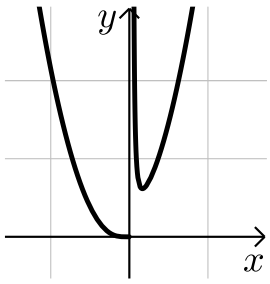

**33)**



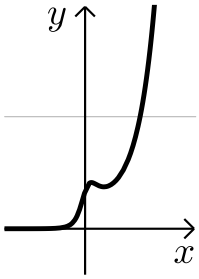

**34)**



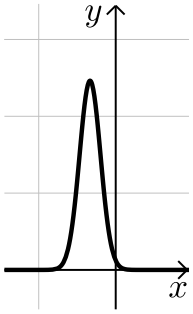
(35



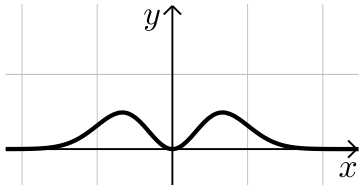

(36



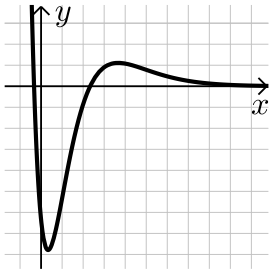

(37



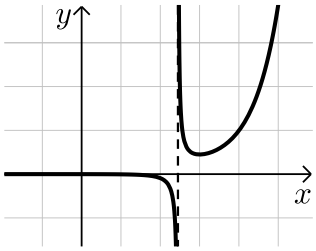

(40



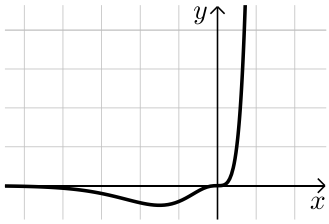

(41




(42




(43



# מתמטיקה למדעים

## פרק 37 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

### תוכן העניינים

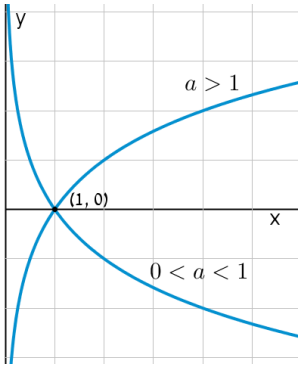
1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית ..... 634
2. שימושי הנגזרת ..... 639
3. חקירה של פונקציה לוגריתמית ..... 640

# הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

## סיכום כללי:

### הגדרות כלליות:

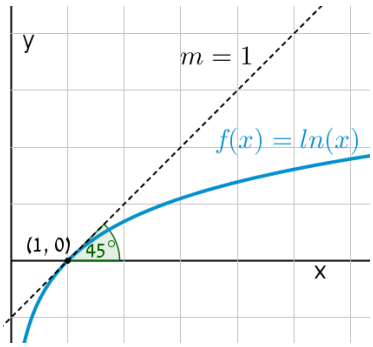
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה: $f(x)=\log_a x$ עבור $a>1$ ו- $0<a<1$:




### תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה $x>0$.
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $x$ בנקודה $(1,0)$.
- עבור $a>1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור $0<a<1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x)=\ln x=\log_e x$ נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ הוא 1:




### תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y=\log\left(f(x)\right)$ הוא: $f(x)>0$.

## נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

| הפונקציה | הנגזרת |
|---|---|
| $y=\log_a x$ | $y'=\frac{1}{x\ln a}$ |
| $y=\log_a f(x)$ | $y'=\frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$ |
| $y=\ln x$ | $y'=\frac{1}{x}$ |
| $y=\ln f(x)$ | $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ |

## שאלות:

**1)** גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א. $f(x)=3\ln x+4\ln(x+2)-\ln(5x-1)$ ב. $f(x)=\ln(x^2-3x)$

ג. $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x)=\ln(e^x+1)$

ה. $f(x)=\ln(\cos x)$ ו. $f(x)=\log_2 x+5\log_3(2x-1)$

**2)** גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x)=x\ln x$ ב. $f(x)=(3x+1)^2\ln x$ ג. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

ד. $f(x)=\frac{\ln x-2}{\ln x+2}$ ה. $f(x)=\sqrt{\ln x+x}$

**3)** גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x)=\ln^3 x$ ב. $f(x)=3\ln^2 x$

ג. $f(x)=x^2\ln^2 x$ ד. $f(x)=\frac{\ln^2 x+1}{(\ln x+1)^2}$

**4)** גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x)=\ln(x+2)$

ב. $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

ג. $f(x)=x^2\ln x$

ד. $f(x)=x^3\ln x$

ה. $f(x)=\ln e^{2x}$

ו. $f(x)=e^x\ln x$

ז. $f(x)=e^{-x^2}\ln x$

ח. $f(x)=x^2(2\ln x-1)$

ט. $f(x)=\ln(x^2)$

י. $f(x)=\ln(x^4)$

יא. $f(x)=(\ln x)^4$

יב. $f(x)=x\ln x-\ln x^2$

יג. $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

יד. $f(x)=\ln\sqrt{x}$

טו. $f(x)=\sqrt{\ln x}$

טז. $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

**5)** גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

א. $f(x)=\ln\dfrac{x+2}{x}$

ב. $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$

ג. $f(x)=\ln\dfrac{x-3}{x+3}$

ד. $f(x)=\ln\dfrac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$

ה. $f(x)=\ln\sqrt{x^2-1}$

ו. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

ז. $f(x)=e^{\sqrt{\ln x}}$

ח. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$

ט. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

י. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+5x}{1-5x}}$

יא. $f(x)=\dfrac{\ln\sqrt[3]{x}}{x}$

יב. $f(x)=\dfrac{(\ln x)^3}{x}$

יג. $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x^2)}$

יד. $f(x)=\ln^2 x+\dfrac{1}{\ln^2 x}$

טו. $f(x)=\dfrac{x}{\ln^4 x}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $f'(x)=\frac{3}{x}+\frac{4}{x+2}-\frac{5}{5x-1}$ ב. $f'(x)=\frac{2x-3}{x^2-3x}$ ג. $f'(x)=\frac{-2}{(x-1)(x+1)}$

ד. $f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ ה. $f'(x)=-\tan x$ ו. $f'(x)=\frac{1}{x\ln 2}+\frac{10}{(2x-1)\ln 3}$

**2)** א. $f'(x)=\ln x+1$ ב. $f'(x)=(3x+1)\left(6\ln x+\frac{3x+1}{x}\right)$ ג. $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

ד. $f'(x)=\frac{4}{x(\ln x+2)^2}$ ה. $f'(x)=\frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}}$.

**3)** א. $f'(x)=\frac{3\ln^2 x}{x}$ ב. $f'(x)=\frac{6\ln x}{x}$ ג. $f'(x)=2x\ln x(\ln x+1)$

ד. $f'(x)=\frac{2(\ln x-1)}{x(\ln x+1)^3}$.

**4)** א. $\frac{1}{x+2}$ ב. $\frac{2\ln x+2}{x}$ ג. $x(2\ln x+1)$

ד. $x^2(3\ln x+1)$ ה. 2 ו. $e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

ז. $e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-2x\ln x\right)$ ח. $4x\ln x$ ט. $\frac{2}{x}$ י. $\frac{4}{x}$

יא. $\frac{4(\ln x)^3}{x}$ יב. $\ln x+1-\frac{2}{x}$ יג. $\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}$

יד. $\frac{1}{2x}$ טו. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ טז. $\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

**5)** א. $-\frac{2}{x(x+2)}$ ב. $\frac{2}{x^2-1}$ ג. $\frac{6}{x^2-9}$

ד. $\frac{3}{x-5}-\frac{2}{x+1}$ ה. $\frac{x}{x^2-1}$ ו. $\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2}$

ז. $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$ ח. $\frac{1}{4-2x}$ ט. $\frac{1}{x^2-1}$

י. $\frac{5}{1-25x^2}$

יא. $\frac{1-3\ln\sqrt[3]{x}}{3x^2}$

יב. $\frac{3\ln^2 x-\ln^3 x}{x^2}$

יג. $\frac{\ln\left(x^2\right)-2}{\ln^2\left(x^2\right)}$

יד. $\frac{2\left(\ln^4 x-1\right)}{x\ln^3 x}$

טו. $\frac{\ln x-4}{\ln^5 x}$.

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

**6)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\ln x$ בנקודה $A(e,1)$.

**7)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{\ln^2 x+a}{\ln x+b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e},-1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**8)** הגרפים של הפונקציות $f(x)=\ln x$ ו-$g(x)=1$ נחתכים בנקודה A ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק ל-$f(x)$.
מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

**9)** לפונקציה $g(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x=e^2$.
מצא את משוואת המשיק.

**10)** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=x\ln\left(x^2+1\right)$ בנקודה שבה $x=1$.

### תשובות סופיות:

**6)** $y=\frac{1}{e}x$.

**7)** $a=2\ ,\ b=-2$.

**8)** $y=\frac{1}{e}x$.

**9)** $y=-\frac{2}{e^4}x+\frac{6}{e^2}$.

**10)** $y=\ln 2\cdot x+x-1$.

# חקירה של פונקציה לוגריתמית:

## שאלות:

**11)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\ln x$

ב. $f(x)=\ln\left(x^2\right)$

ג. $f(x)=\log_3\left(x^2-8x-20\right)$

ד. $f(x)=\ln\left(e^x-4\right)$

ה. $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x-1}$

ו. $f(x)=\dfrac{1}{\ln^2 x-2\ln x-3}$

ז. $f(x)=\sqrt{\ln x-1}$

**12)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=2\ln x-x^2$.

**13)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=x^2\ln x$.

**14)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=\dfrac{\sqrt{2\ln x-1}}{x}$.

**15)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=\log_4^2 x-\log_2 x$.

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{a\ln x+b}{x}$. הנקודה $\left(e^2,\dfrac{1}{e^2}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**17)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{a\ln^2 x+b\ln x}{\left(\ln x+1\right)^2}$. הנקודה $\left(\sqrt[3]{e},-\dfrac{1}{8}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**18)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\ln(x-3)$.

**19)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\dfrac{1}{\ln x-1}$.

**20)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{2\ln x-1}{\ln x+1}$.

**21)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\ln x-2}{\ln^2 x-4}$.

**22)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

**23)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^2-1}{\ln^2 x+1}$.

**24)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=x\ln x+2$.

**25)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

**26)** חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. $y=\frac{1}{2}x^2-4x+3\ln x$

ב. $y=x\ln x$

ג. $y=x\ln x-x$

ד. $y=\sqrt{x}\ln x$

ה. $y=x^2\ln x$

ו. $y=\ln\left(x^2+1\right)$

**27)** נתונה הפונקציה $f(x)=2x\ln^2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**28)** נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x}{\ln x-1}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. מצא לאלו ערכי $k$ הישר $y=k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

**29)** נתונה הפונקציה $f(x)=\log_4^2 x-\log_2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**30)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\ln x}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\ln x$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ד. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$. ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור $x$, $(x_A=x_B)$.
מצא את שיעור ה-$x$ של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

**31)** נתונה שתי הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ , $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.
נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.

i. לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור $x$ זהה.

iii. לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.

iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.

ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה-$x$ שלהן זהה.
הוכח כי מכפלת שיעורי ה-$y$ של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

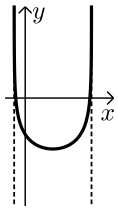
**32)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\ln\left(x^2-6x-7\right)$.

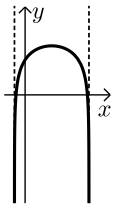
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

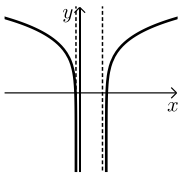
ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה-$y$?

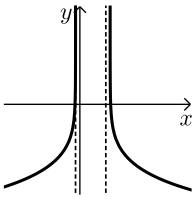
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. לפניך 4 גרפים: I , II , III ו-IV.
איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.

I.



II.



III.



IV.


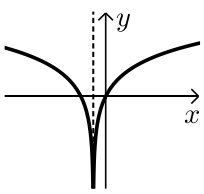

**33)** נתונה הפונקציה: $y=\ln\left(x^2+2x+1\right)$.

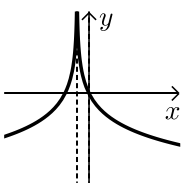
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

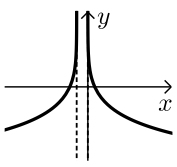
ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה-$y$?

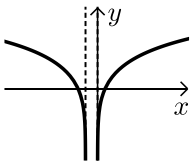
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. לפניך 4 גרפים: I , II , III ו-IV.
איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.

I.



II.



III.



IV.



ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

**34)** לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=\ln(1-\ln x)$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**35)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\ln\frac{2x+1}{x-1}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ד. הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**36)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x\left(\ln^3 x+2\ln^2 x\right)$.

א. הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x)=\ln^3 x+5\ln^2 x+4\ln x$.

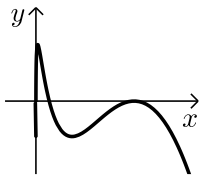
ב. מצא את התחום בו הפונקציה עולה.

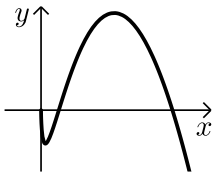
ג. ענה על השאלות הבאות:

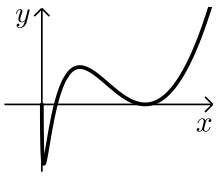
i. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

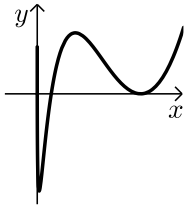
ii. מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.

I.



II.



III.



IV.



**37)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\ln^3 x-3\ln x$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה: $g(x)=\ln x$.

**38)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה הבאה: $\ln(x+e)-\ln\left(x\sqrt{e}\right)=\ln 2-0.5$.

נתונה הפונקציה: $f(x)=\ln(x+e)-\ln\left(x\sqrt{e}\right)$.

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=e$.

**39)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\dfrac{x+a}{\ln(x+a)}$, $a$ פרמטר חיובי, $a\neq 1$.

א. הבע באמצעות $a$ את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת $y'=0$.

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום: $x>e-2$. מצא את $a$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x>-1$.

ד. נתון הישר: $y=k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של $k$ עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

**40)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר $y$?
אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

## תשובות סופיות:

**11)** א. $x>0$ ב. $x\neq 0$ ג. $x>10$ או $x<-2$ ד. $x>\ln 4$
ה. $0<x\neq e$ ו. $x>0$ וגם $x\neq e^3,e^{-1}$ ז. $x\geq e$.

**12)** $\max(1,-1)$.

**13)** $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{2e}\right)$.

**14)** $\min\left(\sqrt{e},0\right)$ קצה, $\max\left(e,\frac{1}{e}\right)$.

**15)** $\min(4,-1)$.

**16)** $a=1$ , $b=-1$.

**17)** $a=1$ , $b=-1$.

**18)** $x=3$.

**19)** נקודת אי הגדרה $(0,0)$ , $x=e$ , $y=0$.

**20)** נקודת אי הגדרה $(0,2)$ , $x=\frac{1}{e}$ , $y=2$.

**21)** נקודת אי הגדרה $\left(e^2,\frac{1}{4}\right)$ ; $(0,0)$ , $x=\frac{1}{e^2}$ , $y=0$.

**22)** $x=0$ , $y=0$.

**23)** נקודת אי הגדרה $(0,0)$.

**24)** נקודת אי הגדרה $(0,2)$.

**25)** $\left(\sqrt{e^3},\frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$.

**26)** א. i. $x>0$ ii. $(1,0)$ iii. $\max(1,-3.5)$ , $\min(3,\ln 27-7.5)$ iv. עולה: $0<x<1$ , $x>3$ יורדת: $1<x<3$.
ב. i. $x>0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min\left(e^{-1},-e^{-1}\right)$ iv. עולה: $x>e^{-1}$ יורדת: $0<x<e^{-1}$.
ג. i. $x>0$ ii. $(e,0)$ iii. $\min(1,-1)$ iv. עולה: $x>1$ יורדת: $0<x<1$
ד. i. $x>0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min\left(e^{-2},-\frac{2}{e}\right)$ iv. עולה: $x>e^{-2}$ יורדת: $0<x<e^{-2}$

ה. i. $x>0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{2e}\right)$ iv. עולה: $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$ יורדת: $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל $x$ ii. $(0,0)$ iii. $\min(0,0)$ iv. עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$.

**27)** א. $x>0$ ב. $\min(1,0)$, $\max\left(\frac{1}{e^2},\frac{8}{e^2}\right)$

ג. עלייה: $x>1$ או $0<x<\frac{1}{e^2}$, ירידה: $\frac{1}{e^2}<x<1$. ד. $(1,0)$.

**28)** א. $0<x\neq e$ ב. $\min\left(e^2,e^2\right)$ ג. עלייה: $x>e^2$, ירידה:

$0<x<e^2$ וגם $x\neq e$ ד. אין. ו. $k>e^2$.

**29)** א. $x>0$ ב. $\min(4,-1)$ ג. עלייה: $x>4$, ירידה: $0<x<4$

ד. $(16,0)$, $(1,0)$.

**30)** א. $x\geq 1$ ב. מתקבל: $f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}>0$ ג. $(e,1)$, $(1,0)$.

ד. $x=\sqrt[4]{e}$.

**31)** א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $x>0$, $x\neq 1$ ותחום ההגדרה של $g(x)$ הוא: $x>0$.

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x=e$ אך עבור $f(x)$ מדובר במינימום ועבור $g(x)$ מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור $f(x)$: עולה: $x>e$ יורדת: $0<x<e$, $x\neq 1$.

ועבור $g(x)$: עולה: $0<x<e$ יורדת: $x>e$. iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה-$y$ שלה הוא: $y=\frac{x}{\ln x}$ ו-$y=\frac{\ln x}{x}$.

נכפול: $y=\frac{x}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}=1$.

**32)** א. $x<-1$, $x>7$ ב. $x=-1,7$ ג. עולה: $x>7$ יורדת: $x<-1$.

ד. III. <u>הסבר</u>: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום.

באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

**33)** א. $x\neq -1$ ב. $x=-1$. ג. עולה: $x>-1$ יורדת: $x<-1$

ד. I. <u>הסבר</u>: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. $-2<x<0$, $x\neq -1$.

**34)** א. $0<x<e$. (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם: $1-\ln x>0$ וגם $x>0$).

ב. $f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}=-\frac{1}{x(1-\ln x)}<0$ - ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.

ג. $(1,0)$.

**35)** א. $x<-\frac{1}{2}$ , $x>1$ ב. $x=-\frac{1}{2},1$ ג. $(-2,0)$

ד. מתקבל: $y'=\frac{-3}{(2x+1)(x-1)}<0$.

**36)** ב. $e^{-4}<x<e^{-1}$ , $x>1$.

ג. i. 2 נקודות והן: $(1,0)$ , $(e^{-2},0)$. הנקודה שבה: $x=0$ לא קיימת עקב ת.ה.

ii. $x>e^{-2}$ , $x\neq 1$. ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.
שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

**37)** א. $x>0$ ב. $(1,0)$ , $(e^{\sqrt{3}},0)$ , $(e^{-\sqrt{3}},0)$. ג. $\min(e,-2)$ , $\max(e^{-1},2)$

ה. $(1,0)$ , $(e^{2},2)$ , $(e^{-2},-2)$.

**38)** א. $x=e$ ב. מתקבל: $y'=\frac{-e}{x(x+e)}<0$ ג. $y=-\frac{1}{2e}x+\ln 2$.

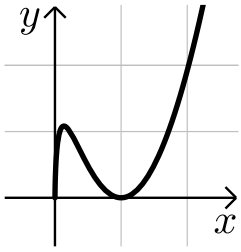
**39)** א. i. $x>-a$ , $x\neq 1-a$ ii. $(e-a,e)$ iii. $\left(0,\frac{a}{\ln a}\right)$

iv. $x=1-a$ ב. $a=2$ ד. $k<e$.

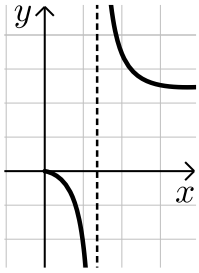
**40)** א. i. $x>0$ ii. $x=0$ ב. $\min(1,1)$ ג. עולה: $x>1$ , יורדת: $0<x<1$.

**סקיצות לשאלות:**

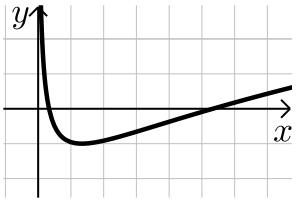
**(27**



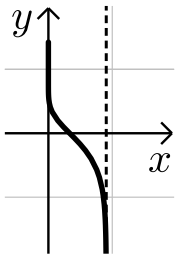

**(28**



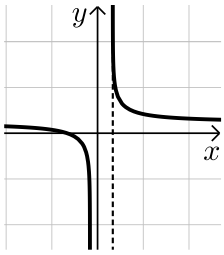

**(29**



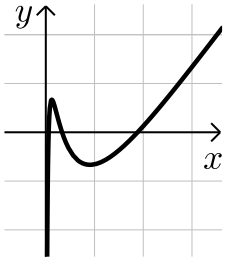

**(34**



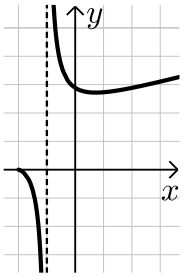

**(35**




**(37**




**(39**



# מתמטיקה למדעים

## פרק 38 - חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון

### תוכן העניינים

1. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים ..... 650
2. בעיות קיצון בהנדסת המישור ..... 652
3. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים ..... 656
4. בעיות קיצון בהנדסת המרחב ..... 660
5. בעיות קיצון עם תשובה נתונה ..... 662
6. בעיות קיצון שונות בהנדסת המישור ..... 663
7. בעיות קיצון שונות בהנדסת המרחב ..... 667
8. בעיות קיצון שונות בפונקציות וגרפים ..... 669

# בעיות קיצון יסודיות עם מספרים:

## סיכום כללי:

**שלבי עבודה:**

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- $x$.
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות $x$.
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- $x$.
- נוודא שערך ה- $x$ מהסעיף הקודם הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "$y$" (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

## שאלות:

**1)** מבין כל זוגות המספרים שסכומם 14 מצא את הזוג שמכפלתו מקסימלית.

**2)** נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני.
מצא מהם המספרים אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.

**3)** מצא את המספר החיובי שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו הסכום המתקבל יהיה מינימלי.

**4)** נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.

א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?

ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?

ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?

**5)** $x$ ו- $y$ הם שני מספרים המקיימים: $x+6y=60$.

א. הבע את $y$ באמצעות $x$.

ב. מה צריכים להיות המספרים $x$ ו- $y$ כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?

ג. מהי המכפלה הנ"ל?

## תשובות סופיות:

**1)** $7$ , $7$.

**2)** $8$ , $8$ , $8$.

**3)** $1$.

**4)** א. $12$, $12$, $12$ ב. $8$, $12$, $16$ ג. מקרה א'.

**5)** א. $y=10-\frac{x}{6}$ ב. $x=30$ , $y=5$ ג. $M=22500$.

# בעיות קיצון בהנדסת המישור:

## שאלות:

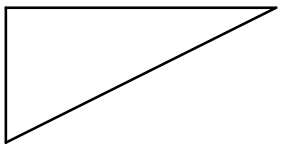
**6)** מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

**7)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם $a$, מצא את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

ב. הוכח: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.

**8)** במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ.



א. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי שטח המשולש יהיה מקסימלי?

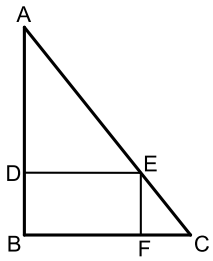
ב. מהו השטח המקסימלי?

ג. מה יהיה אורך היתר במשולש במקרה זה?

**9)** במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.

נתון: AB = 20 ס"מ , BC = 16 ס"מ.

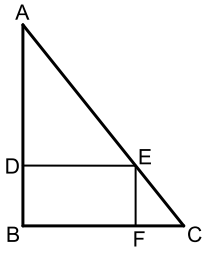
מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.




**10)** במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.

נתון: $AB=a$ , $BC=b$.

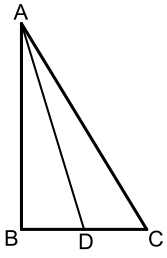
מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.

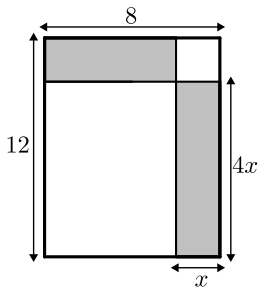



**11)** במשולש ישר הזווית ABC ($\sphericalangle B=90°$), AD הוא תיכון לניצב BC

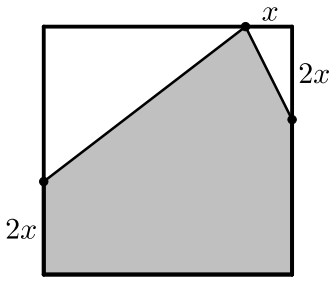
ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ.

מצא מה צריכים להיות אורכי הניצבים עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.

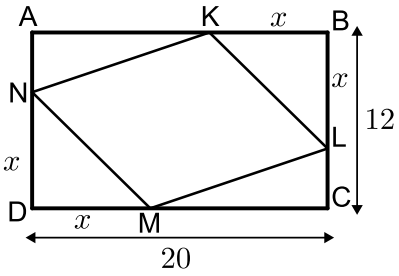





**12)** נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ
כמתואר באיור. מקצים קטעים באורכים של $x$ ו-$4x$
על צלעות המלבן כך שנוצרים המלבנים המסומנים.
מצא את $x$ עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.




**13)** נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ.
מקצים קטע שאורכו $x$ על הצלע העליונה ושני קטעים
שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות כמתואר באיור כך
שנוצר המחומש המסומן.
מצא מה צריך להיות ערכו של $x$ עבורו שטח המחומש
יהיה מקסימלי.

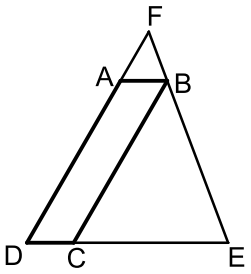



**14)** הנקודות K , L , M , N מקצות קטעים שווים
במלבן ABCD כך ש: $BK = BL = DM = DN = x$ .
צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.

א. הבע באמצעות $x$ את סכום שטחי המשולשים:
$\Delta AKN + \Delta KBL + \Delta CLM + \Delta DNM$ .

ב. מצא מה צריך להיות $x$ כדי ששטח
המרובע LKNM יהיה מקסימלי.

ג. מה הוא השטח של המרובע LKNM במקרה זה?



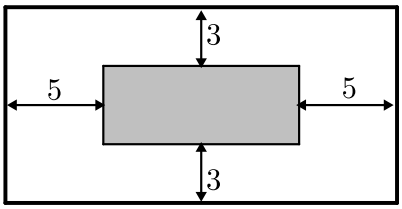

**15)** המרובע ABCD הוא מקבילית.
מהקדקוד B מעבירים את הצלע EF הנפגשת עם המשכי
הצלעות DC ו-AD.
ידוע כי מידות המקבילית הן: $AB = 2$ ס"מ , $AD = 8$ ס"מ .
מסמנים את אורך הצלע DE ב-$x$ .

א. הבע באמצעות $x$ את אורך הצלע DF.

ב. מצא את $x$ עבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.

ג. מה הוא הסכום המינימלי?

**16)** חיים הוא אחד מעובדי חברת "דפוס יהלום בע"מ".
תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).

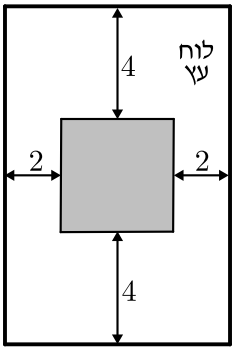



יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי ששאל אותו את השאלה הבאה: "יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.
מה הן המידות של גלויה אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?".

א. עזור לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראה דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

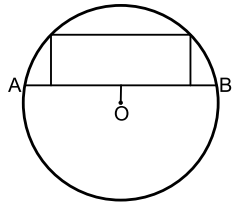
**17)** אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה: יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ ובקצוות העליון והתחתון –4 ס"מ (ראה איור).
כדי לבחור את מידות לוח העץ, אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).



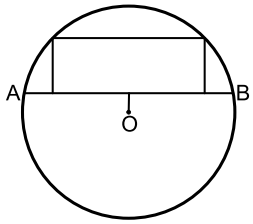

א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

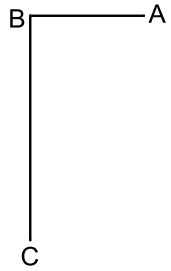
**18)** במעגל שמרכזו O ורדיוסו $10\sqrt{5}$ ס"מ העבירו מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



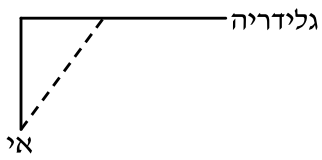

**19)** במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא $a$.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.




**20)** שני הולכי רגל יוצאים בו זמנית לדרכם, האחד מעיר A מערבה לעיר B והשני מעיר B דרומה לעיר C.
המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.
מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש.
כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי?
מצא גם את המרחק המינימלי.



**21)** אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק"מ מהחוף.
על החוף, במרחק של 3 ק"מ מהנקודה הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה.
האדם שוחה במהירות של 8 קמ"ש ורץ על החוף במהירות של 10 קמ"ש.
לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?




**22)** אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת.
שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר.
מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר.
מה צריכים להיות ממדי המרפסת כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

## תשובות סופיות:

**6)** 8 ס"מ.

**7)** א. $a/3$ ב. הוכחה.

**8)** א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ ב. 18 סמ"ר ג. $6\sqrt{2}\approx 8.48$ ס"מ.

**9)** 80 סמ"ר $S=$.

**10)** $\frac{ab}{4}$ יחידות שטח.

**11)** 4 ס"מ, 16 ס"מ.

**12)** $x=2.75$.

**13)** $x=6$.

**14)** א. $2x^2-32x+240$ ב. $x=8$ ג. $S=$ 128 סמ"ר.

**15)** א. $DF=\frac{8x}{x-2}$ ב. $x=6$ , $L=\frac{x^2+6x}{x-2}$ ג. $L=18$.

**16)** א. 6 ס"מ על 10 ס"מ. ב. 12 ס"מ על 20 ס"מ.

**17)** א. 11 ס"מ על 22 ס"מ. ב. $S=98$.

**18)** 92 ס"מ.

**19)** $2\sqrt{5}R-2a$ יחידות אורך.

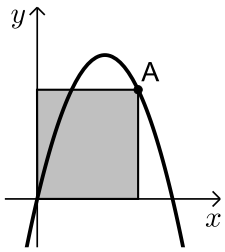
**20)** 4 שעות, המרחק: $\sqrt{80}$ ק"מ.

**21)** $2\frac{1}{3}$ ק"מ.

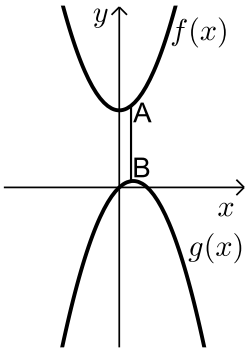
**22)** $4\cdot 6$.

# בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:

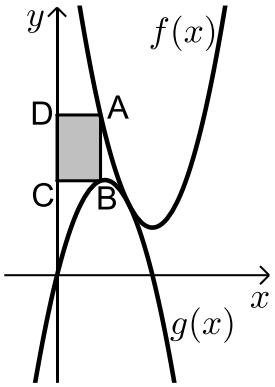
## שאלות:




**23)** נתונה הפונקציה $f(x)=6x-x^2$.
מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט.
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?




**24)** נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2+12$ ו- $g(x)=2x-x^2$
כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$.
מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.

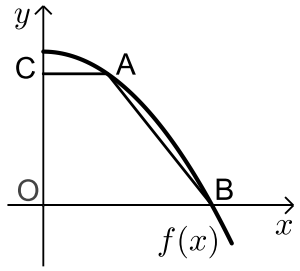



**25)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של
הפונקציות: $f(x)=x^2-8x+18$ ו- $g(x)=-x^2+4x$.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$. מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- $y$ כך שנוצר מלבן (המסומן).
נסמן את שיעור ה- $x$ של הנקודה A ב- $t$.

א. הבע באמצעות $t$ את שטח המלבן המסומן.

ב. מצא את ערכו של $t$ עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.

ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?

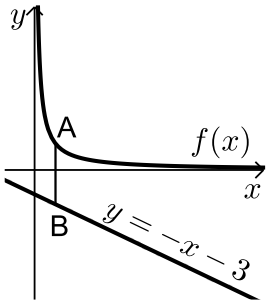



**26)** נתונה הפונקציה: $f(x)=36-x^2$.
על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A.
מהנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$ שחותך את ציר ה- $y$ בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ ו-O ראשית הצירים.

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?

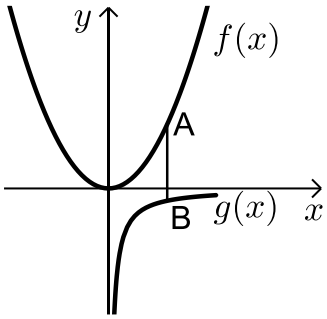
ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?

**27)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4}{x}$ ונתון הישר: $y=-x-3$.



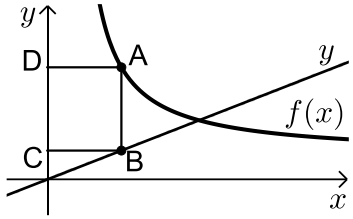

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$
והנקודה B נמצאת על גרף הישר כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$.
מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.

**28)** נתונות שתי פונקציות: $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ ו- $g(x)=-\frac{1}{x}$.




מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$
ונקודה B על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$.
מצא את שיעורי הנקודות A ו-B עבורן אורך הקטע AB מינימלי.

**29)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y=\frac{9x}{25}$.




הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$.
מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- $y$ כך שנוצר המלבן ABCD.
נסמן את שיעור ה- $x$ של הנקודה A ב- $t$.

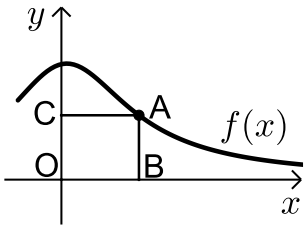
א. הבע באמצעות $t$ את היקף המלבן ABCD.

ב. מצא את $t$ עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

**30)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x-1}$ והישר $y=2x$.
בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן.
מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

**31)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+12}{x^2+3}$ בתחום: $x\geq 0$.

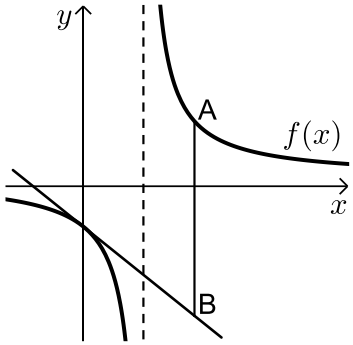



מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABCO כמתואר באיור.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.

**32)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+10}{x-2}$.




מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$.

א. מצא את משוואת המשיק.

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה-$y$.

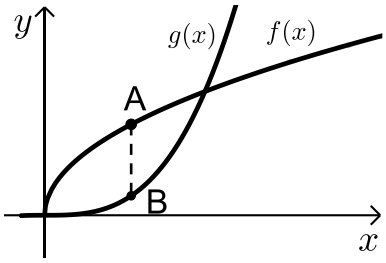
ב. מצא את שיעורי הנקודה A עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

**33)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

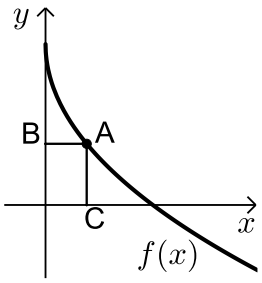
מצא שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.

**34)** נתונות הפונקציות $f(x)=2\sqrt{x}$ ו-$g(x)=\frac{1}{3}x^3$.




את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה-$y$.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?




**35)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=6-3\sqrt{x}$.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון.
מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C כמתואר באיור.
נסמן את שיעור ה-$x$ של הנקודה A ב-$t$.

א. הבע באמצעות $t$ את סכום הקטעים AC+AB.

ב. מצא את ערכו של $t$ עבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.

**36)** נתונות הפונקציות: $f(x)=1-x^2$ ו- $g(x)=bx^2$ $(b>0)$.
הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B.
מצא את ערכו של $b$ שבעבורו הקטע AO מינימלי (O– ראשית הצירים).

## תשובות סופיות:

**23)** $A(4,8)$.

**24)** $A(0.5,12.25)$.

**25)** א. $S=2t^3-12t^2+18t$ ב. $t=1$ ג. $S=8$.

**26)** א. $A(2,32)$ ב. $S=128$.

**27)** $A(2,2)$.

**28)** $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$, $B(1,-1)$.

**29)** א. $P=\frac{1.28t^2+0.72t+16}{t-1}$ ב. $t=4\frac{3}{4}$ ג. $P=$ 12.88 ס"מ.

**30)** 2·1.

**31)** א. $A(2,2)$ ב. $A(0,4)$.

**32)** א. $y=-3x-5$ ב. $A(4,7)$ ג. $AB=24$.

**33)** $\left(\sqrt{3},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$.

**34)** $A(1,2)$.

**35)** א. $l=t+6-3\sqrt{t}$ ב. $t=2.25$.

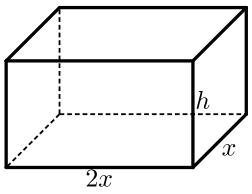
**36)** $b=1$.

# בעיות קיצון בהנדסת המרחב:

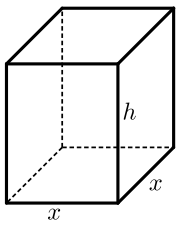
## שאלות:

**37)** נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר.
מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.

**38)** נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח פניה (ללא המכסה) הוא 75 סמ"ר.
מצא את אורך צלע הבסיס של התיבה שנפחה הוא מקסימלי.




**39)** נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה כמתואר באיור.
ידוע כי גובה התיבה $h$ וצלע המלבן הקטנה $x$ מקיימים: $x+h=9$.
מצא מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה כדי שנפחה יהיה מקסימלי.

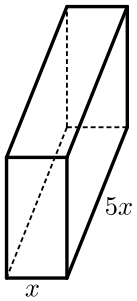



**40)** נתונה תיבה שגובהה הוא $h$ ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו היא $x$.
נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים: $4x+h=63$.

א. הבע את $h$ באמצעות $x$.

ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות $x$.

ג. מה צריך להיות ערכו של $x$ כדי ששטח הפנים יהיה מקסימלי?

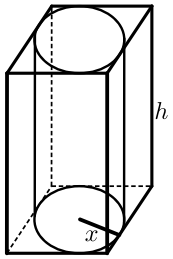



**41)** ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק. יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5 מרוחבו כמתואר באיור הסמוך. כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת ולכן הוא רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח שעליו להשתמש בכדי להשיג את מבוקשו.
מצאו את כמות הפח המינימלית.

**42)** לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה דרושים שני חומרים להם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון.
מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

**43)** מכל הגלילים הישרים שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא $k$ מצא את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.

**44)** באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- $x$ וגובהו ב- $h$.
ידוע כי הסכום של $x$ ו- $h$ הוא 12 ס"מ.




א. הבע באמצעות $x$ את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע באמצעות $x$ את נפח הגליל.

ii. הבע באמצעות $x$ את נפח התיבה.

ג. מצא את $x$ עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

**45)** נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא $k$ ושטח המעטפת שלה הוא $S$.
הוכח: $S < 2k^2$.

## תשובות סופיות:

**37)** $4\cdot 4\cdot 4$ ס"מ.

**38)** 5 ס"מ.

**39)** בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.

**40)** א. $h = 63 - 4x$ ב. $p = -14x^2 + 252x$ ג. $x = 9$.

**41)** 3 ס"מ, 15 ס"מ ו-5 ס"מ.

**42)** $3\cdot 6\cdot 8$ ס"מ.

**43)** $\frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח $= V$.

**44)** א. $2x$ ב. i. $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$ ii. $V = 48x^2 - 4x^3$
ג. $x = 8$.

**45)** הוכחה.

# בעיות קיצון עם תשובה נתונה:

## שאלות:

**בעיות קיצון בהנדסת המרחב:**

**1)** נתונים שני מספרים חיוביים $p$ ו- $q$ שסכומם $a$.

הראה שכאשר מתקיים $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$ ערך הביטוי $p^n q^m$ ($n$ ו- $m$ טבעיים) מקסימלי.

**2)** הוכח שמכל החרוטים הישרים שנפחם $\pi k$ סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו $\sqrt[3]{6k}$ ס"מ.
(שטח מעטפת של חרוט הוא $\pi Rl$ , כאשר $l$ הוא הקו היוצר של החרוט).

**בעיית קיצון עם תנועה:**

**3)** מהירותו של רכב היא $v$ קמ"ש ועליו לנסוע דרך של $S$ ק"מ.

לרכב יש הוצאות נסיעה של $\frac{v}{400}$ ₪ לכל ק"מ נסיעה ו- $\frac{v^2}{200}+48$ ₪ לכל שעת נסיעה.
הראה שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

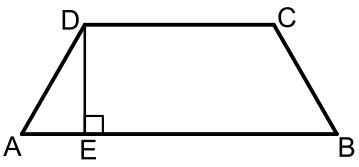
## תשובות סופיות:

**1)** הוכחה.
**2)** הוכחה.
**3)** הוכחה.

# בעיות קיצון שונות בהנדסת המישור:

## שאלות:

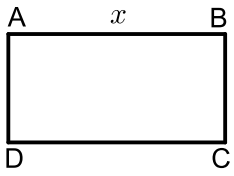
**1)** בטרפז שווה-שוקיים ABCD (AB||CD) אורך השוק הוא 4 ס"מ ואורך הבסיס הקטן הוא 6 ס"מ.
DE הוא הגובה מקדקוד D (ראה ציור).
מה צריך להיות אורך הקטע AE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?



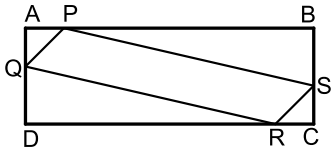

**2)** נתון מלבן ABCD .
נסמן ב- $x$ את אחת מצלעות המלבן (ראה ציור).
אם היקף המלבן הוא 60 ס"מ:

א. בטא באמצעות $x$ את שטח המלבן.

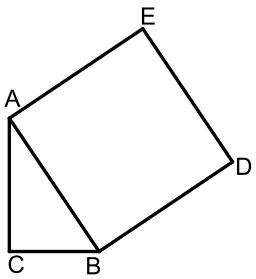
ב. אם היקף המלבן הוא $p$ מצא מה צריכות להיות אורכי צלעות המלבן כדי ששטחו יהיה מקסימלי.
(הבע את אורכי הצלעות באמצעות $p$ ).



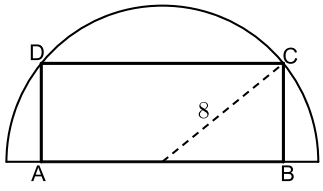

**3)** נתון מלבן ABCD כך ש- $AD=BC=$ 5 ס"מ, $AB=CD=$ 10 ס"מ. על צלעות המלבן מקצים קטעים: $AP=AQ=CS=CR=x$ (ראה ציור).
מה צריך להיות ערכו של $x$ כדי ששטח המקבילית PQRS יהיה מקסימלי?



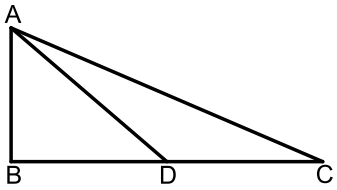

**4)** במשולש ישר זווית $\Delta ABC$ $(\sphericalangle C=90°)$ סכום אורכי הניצבים הוא 8 ס"מ. על היתר AB בונים ריבוע ABDE.
מה צריכים להיות אורכי הניצבים כדי ששטח המחומש AEDBC יהיה מינימלי?



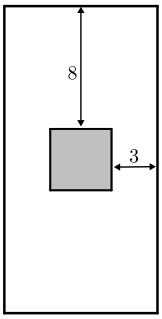

**5)** בחצי עיגול שרדיוסו 8 ס"מ חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB של המלבן מונחת על הקוטר, והקדקודים C ו-D מונחים על הקשת (ראה ציור).
מה צריך להיות אורך הצלע AB כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



**6)** במשולש ישר-זווית $\Delta ABC$ $(\sphericalangle B = 90°)$,
סכום אורכי הניצבים הוא 30 ס"מ.
AD הוא תיכון לניצב BC.
חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים,
על מנת שריבוע אורך התיכון יהיה מינימלי.




**7)** בחוברת פרסום, שטח כל עמוד הוא 600 סמ"ר.
רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו הוא 8 ס"מ,
ורוחב השוליים בצדדים הוא 3 ס"מ.
מצא מה צריך להיות האורך והרוחב של כל עמוד כדי שהשטח
המיועד לדפוס יהיה מקסימלי (השטח המסומן בציור).



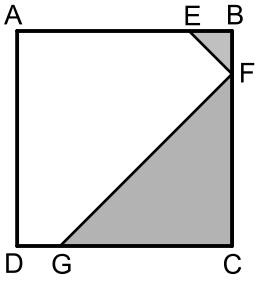

**8)** בריבוע ABCD הנקודות E , F , G נמצאות על
הצלעות AB , BC , DC בהתאמה, כך
ש- BE = BF , CF = CG (ראה ציור).
נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ.

א. סמן ב- $x$ את BF ואת BE , והבע באמצעות $x$
את הסכום של שטחי המשולשים EBF ו- FCG
(השטח המסומן בציור)

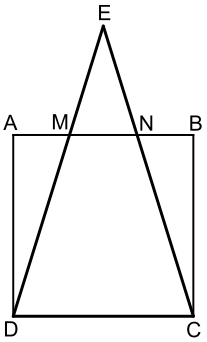
ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את $x$ שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא מינימלי.

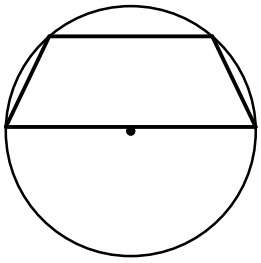
ii. חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים.



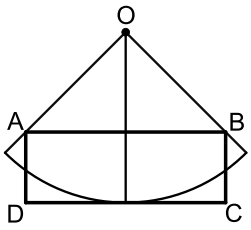

**9)** נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ.
E היא נקודה כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC הוא
שווה שוקיים (ED = EC).
שוקי המשולש חותכות את הצלע AB בנקודות M ו- N (ראה ציור).
מצא מה צריך להיות אורך הקטע AM כדי שהסכום של
שטחי המשולשים EMN , AMD , BNC יהיה מינימלי.



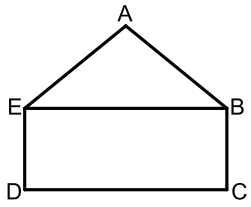

**10)** נתון מעגל שרדיוסו $R$. במעגל זה חסום טרפז שו"ש,
כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר במעגל (ראה ציור).
מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה,
הבע באמצעות $R$ את אורך הבסיס הקטן בטרפז
ששטחו מקסימלי.



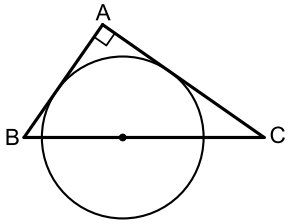
**11)** נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו O ורדיוסו 10 ס״מ.
בונים מלבן ABCD, כך שרבע המעגל משיק לצלע DC בנקודת האמצע שלה, והקדקודים A ו-B נמצאים על הרדיוסים התוחמים את הגזרה (ראה ציור).
מבין כל האלכסונים של המלבנים ABCD שנוצרים באופן זה, מצא את אורך האלכסון הקצר ביותר.



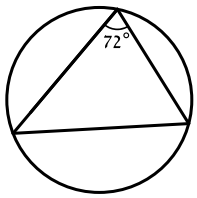

**12)** ABCDE הוא מחומש המורכב ממשולש ABE וממלבן EBCD (ראה ציור).
נתון: 2 ס״מ = BC, 4 ס״מ = AE =AB.
מצא את השטח של המחומש ששטחו מקסימלי.




**13)** מתבוננים בכל המשולשים ישרי הזווית ABC החוסמים חצי מעגל שרדיוסו $R$ כמתואר בציור.
מהן זוויות המשולש שסכום הניצבים שלו הוא מינימלי?




**14)** במעגל שרדיוסו $R$ חסומים משולשים כך שהגודל של הזווית בכל אחד מהמשולשים הוא $\frac{2\pi}{5}$.
מצא את הזוויות במשולש בעל ההיקף המקסימלי.

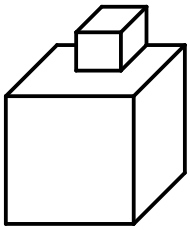


## תשובות סופיות:

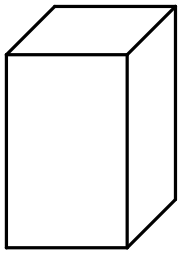
1) $AE=$ 1.7 ס"מ .
2) א. $x(30-x)$ ב. כל צלע שווה ל- $0.25p$ .
3) $x=$ 3.75 ס"מ .
4) $AC=BC=4$ .
5) $AB=2\sqrt{32}$ .
6) $BC=$ 24 ס"מ , $AB=$ 6 ס"מ .
7) אורך : 40 ס"מ, רוחב : 15 ס"מ.
8) א. $S=x^2-6x+18$ ב.i. $x=3$ ב. ii. 9 סמ"ר.
9) $AM=\frac{5}{\sqrt{2}}$ .
10) בסיס קטן $=R$ .
11) $4\sqrt{5}$ ס"מ.
12) $12\sqrt{3}$ סמ"ר.
13) $90°\ ,\ 45°\ ,\ 45°$ .
14) $\frac{2}{5}\pi\ ,\ \frac{3}{10}\pi\ ,\ \frac{3}{10}\pi$ .

# בעיות קיצון שונות בהנדסת המרחב:

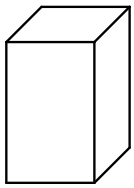
## שאלות:



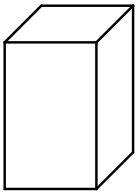
**15)** גובהו של "מגדל" הבנוי משתי קוביות (לאו דווקא שוות) הוא 8 ס"מ.
מה צריך להיות אורך המקצוע של הקובייה התחתונה כדי שנפח המגדל (סכום נפחי הקוביות) יהיה מינימלי?



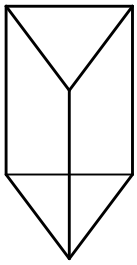
**16)** בונים תיבה שגובהה $y$ ס"מ, ובסיסה ריבוע, שאורך צלעו $x$ ס"מ (ראה ציור), כך שההיקף של כל אחת מהדפנות הצדדיות שווה ל-12 ס"מ.
מה צריך להיות אורך צלע הבסיס כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?



**17)** יש לבנות תיבה פתוחה מלמעלה, שבסיסה ריבוע ושטח פניה הוא 75 סמ"ר (במקרה זה שטח הפנים מורכב מבסיס אחד ומארבע פאות צדדיות). מכל התיבות שאפשר לבנות, מצא את ממדי התיבה (צלע הבסיס וגובה) שנפחה מקסימלי.



**18)** יש להכין מחוט תיל "שלד" (מסגרת) של תיבה, שבסיסה ריבוע ונפחה 1000 סמ"ק.
מהו האורך המינימלי של החוט הנחוץ ליצירת התיבה?

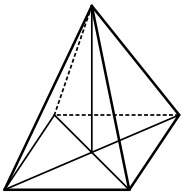


**19)** מחוט שאורכו $a$ ס"מ יש לבנות מנסרה משולשת ישרה, שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. מצא איזה חלק מאורך החוט יש להקצות לצלע הבסיס $x$ ואיזה חלק לגובה $y$ כדי שיתקיים (בטא ע"י $a$):

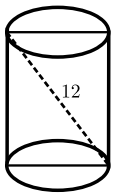
א. שטח המעטפת של המנסרה יהיה מקסימלי.

ב. נפח המנסרה יהיה מקסימלי.

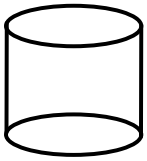
**20)** מכל הפירמידות המרובעות, המשוכללות והישרות, שאורך המקצוע הצדדי שלהן הוא $a$, מצא את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.



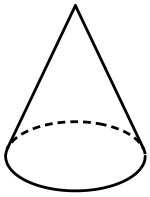
**21)** מכל הפירמידות הישרות, שבסיסן ריבוע ושטח הפנים שלהן הוא 200 סמ"ר, חשב את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.




**22)** אלכסון החתך הצירי של גליל ישר הוא 12 ס"מ (ראה ציור).
מצא מה צריכים להיות גובה הגליל ורדיוס בסיסו כדי שנפחו יהיה מקסימלי.



**23)** נתון מיכל גלילי פתוח מלמעלה שקיבולו 64 מ"ק.
המיכל עשוי כולו מפח.
הראה כי שטח הפח הוא מינימלי כאשר רדיוס הבסיס הוא $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ מטר.



**24)** מבין כל החרוטים שאורך הקו היוצר שלהם הוא 10 ס"מ (ראה ציור), מהו נפח החרוט שנפחו מקסימלי?

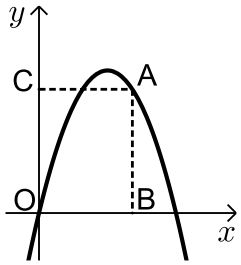
## תשובות סופיות:

**15)** 4 ס"מ.
**16)** 4 ס"מ.
**17)** צלע הבסיס: 5 ס"מ, גובה: 2.5 ס"מ.
**18)** 120 ס"מ.
**19)** א. $y=\frac{1}{6}a$ , $x=\frac{1}{12}a$ ב. $x=y=\frac{1}{9}a$.
**20)** $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$.
**21)** $\frac{500}{3}$ סמ"ק.
**22)** גובה: $\sqrt{48}$ ס"מ. רדיוס: $\sqrt{24}$ ס"מ.
**23)** הוכחה.
**24)** 403.1 סמ"ק.

# בעיות קיצון שונות בפונקציות וגרפים:

## שאלות:

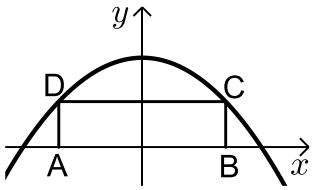
**25)** מנקודה A , הנמצאת על גרף הפונקציה $y=-x^2+5x$ ,
מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן ABOC (ראה ציור).



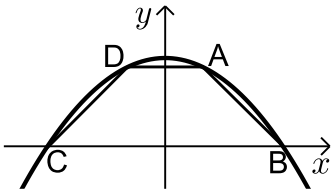

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי?

**26)** בפרבולה $y=9-x^2$ חוסמים מלבן ABCD ,
כך שהצלע AB מונחת על ציר ה-$x$ (ראה ציור).
מה צריך להיות אורך הצלע CD כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



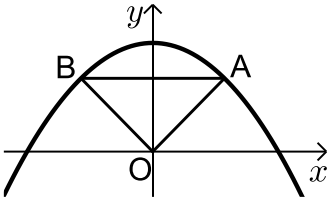

**27)** טרפז ABCD חסום בין גרף הפרבולה $y=9-x^2$ לבין ציר ה- $x$ (ראה ציור).




א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABCD יהיה מקסימלי?

ב. חשב את השטח המקסימלי של טרפז ABCD.

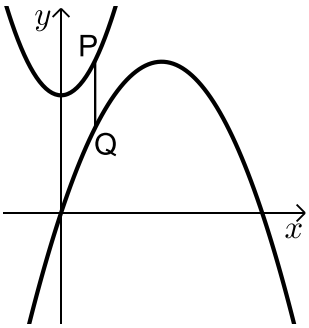
**28)** נתונה הפרבולה $y=-x^2+12$ .
ישר המקביל לציר ה-$x$ חותך את הפרבולה בנקודות A ו- B (ראה ציור).
מחברים את הנקודות A ו- B עם ראשית הצירים, O.



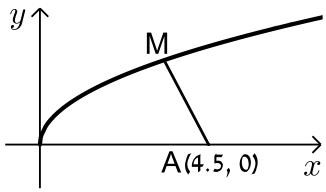

א. מה צריך להיות אורך הקטע AB כדי ששטח המשולש AOB יהיה מקסימלי?

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB ?

**29)** נתונים הגרפים של שתי פרבולות: $y=\frac{1}{2}x^2+7$ ו- $y=-\frac{1}{4}x^2+3x$ .
קו מקביל לציר ה- $y$ חותך את שתי הפרבולות בנקודות P ו- Q (ראה ציור). מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה, מצא את האורך המינימלי של הקטע PQ.



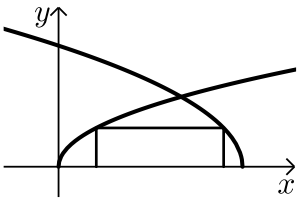
**30)** נתון גרף הפונקציה $y=\sqrt{x}$.




על ציר ה-$x$ נתונה הנקודה $A(4.5,0)$ (ראה ציור).
מצא על גרף הפונקציה נקודה M, כך שריבוע המרחק AM יהיה מינימלי.

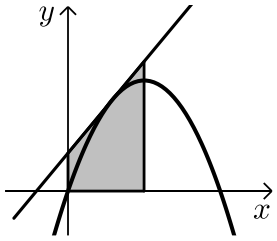
**31)** מצא על הישר $y=3x-4$ את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $(0,1)$.

**32)** בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $g(x)=\sqrt{36-6x}$ , $f(x)=\sqrt{3x}$.

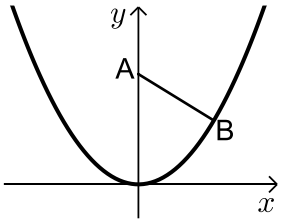



מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות ובין ציר ה-$x$, כמתואר בציור.
מצא את השטח הגדול ביותר האפשרי למלבן שחסום באופן זה.

**33)** דרך איזו נקודה על הפרבולה $y=-x^2+2x$ צריך להעביר משיק, כדי ששטח הטרפז, הנוצר על ידי המשיק והישרים: $x=1$ , $x=0$ ו-$y=0$ (השטח המסומן שבציור) יהיה מינימלי?

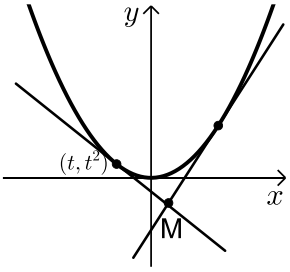



**34)** נקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $y=x^2$ ברביע הראשון.
A היא הנקודה $(0,a)$ כאשר ידוע כי $a>0.5$ (ראה ציור).



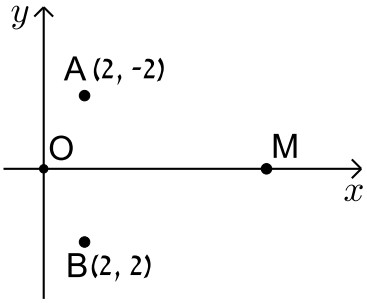

א. בטא באמצעות $a$ את שיעורי הנקודה B, שעבורה המרחק AB הוא מינימלי.
ב. מצא עבור איזה ערך של $a$ המרחק המינימלי הוא 2.

**35)** נתונה הפרבולה $y=x^2$, ונתון משיק לפרבולה שמשוואתו היא $y=6x-9$. בנקודה $(t,t^2)$ שעל הפרבולה מעבירים משיק נוסף לפרבולה.
המשיקים נחתכים בנקודה M (ראה ציור).




א. הבע את משוואת המשיק הנוסף באמצעות $t$.
ב. מצא את $t$ שעבורו אורך הקטע, המחבר את הנקודה M עם קדקוד הפרבולה יהיה מינימלי.

**36)** במערכת צירים נתונות הנקודות $A(2,2)$ ו-$B(2,-2)$.
ראשית הצירים היא בנקודה O. M היא נקודה על
ציר ה-$x$ בתחום $x>0$.
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה M,
כדי שהסכום: OM + MA + MB יהיה מינימלי?




## תשובות סופיות:

**25)** א. $A(3,6)$ ב. $A(0,0)$ או $A(5,0)$.

**26)** $CD=2\sqrt{3}$.

**27)** א. $A(1,8)$ ב. 32.

**28)** א. $AB=4$ ב. $S_{\Delta AOB}=16$.

**29)** $PQ=4$.

**30)** $M(4,2)$.

**31)** $(1.5,0.5)$.

**32)** 8.

**33)** $(0.5,0.75)$.

**34)** א. $B\left(\sqrt{\frac{2a-1}{2}},\frac{2a-1}{2}\right)$ ב. 4.25.

**35)** א. $y=2xt-t^2$ ב. $t=-\frac{3}{37}$.

**36)** $M(0.845,0)$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 39 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי

### תוכן העניינים

1. חישובי אינטגרלים ..... 672
2. מציאת פונקציה קדומה ..... 677

# חישובי אינטגרלים:

## סיכום כללי:

### הגדרה וכללי האינטגרציה:

- כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית: $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ , \ (n \neq -1)}$.
- עבור מקדם קבוע $a$ נקבל: $\boxed{\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c \ , \ (n \neq -1)}$.
- כללי האינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות:

$$\boxed{\int \sin x dx = -\cos x + c} \ , \ \boxed{\int \cos x dx = \sin x + c} \ , \ \boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c} \ , \ \boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c}$$

## שאלות:

**1)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^3 dx$

ב. $\int 12x^5 dx$

ג. $\int x^4 dx$

ד. $\int 2x^3 dx$

ה. $\int \frac{2}{3} x^5 dx$

ו. $\int 7 dx$

ז. $\int \left( \frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx$

ח. $\int \left( \frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx$

**2)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{-3} dx$

ב. $\int \frac{1}{x^3} dx$

ג. $\int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx$

ד. $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx$

**3)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{\frac{1}{2}}dx$

ב. $\int \sqrt{x}dx$

ג. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

ד. $\int\left(\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\right)dx$

**4)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int(5x-1)^3\,dx$

ב. $\int 3(2-7x)^4\,dx$

ג. $\int \frac{18}{(6x+5)^2}dx$

ד. $\int \frac{1}{\sqrt{6x-3}}dx$

ה. $\int \sqrt{ax+b}dx$

**5)** מצא את תוצאת החילוק:

א. $\frac{x^2-5x-14}{x+2}=$

ב. $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}=$

ג. $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}=$

ד. $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}=$

ה. $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}=$

**6)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{x^2-5x-14}{x+2}dx$

ב. $\int \frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}dx$

ג. $\int \frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}dx$

ד. $\int \frac{x^3-4x^2+9}{x-3}dx$

ה. $\int \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}dx$

ו. $\int \frac{2x^5+x^4-4x^2+1}{2x+1}dx$

**7)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int -\frac{2x}{(x^2-1)^2}dx$

ב. $\int \frac{x^2}{(x^3+6)^2}dx$

ג. $\int \frac{x-2}{(x^2-4x+1)^2}dx$

ד. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$

ה. $\int \frac{6x-3}{\sqrt{x-x^2}}dx$

ו. $\int 8x(x^2+1)^3\,dx$

ז. $\int(2-x^2)(6x-x^3)^2dx$

**8)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\sin x-3\cos x+\frac{4}{\cos^2 x}+5\right)dx$

ב. $\int\left(\cos 3x-2\sin 4x+\frac{4}{\cos^2 3x}\right)dx$

ג. $\int\left(\sin(\pi-x)+\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)dx$

**9)** חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות):

א. $\int(2\sin x\cos x)dx$

ב. $\int(\sin 3x\cos 3x)dx$

ג. $\int(\sin^4 x-\cos^4 x)dx$

ד. $\int(\sin^2 x)dx$

**10)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right)dx$

ב. $\int\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$

ג. $\int(\cos x\sin^2 x)dx$

**11)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\sin 2x-4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

ב. $\int\frac{1}{\cos^2 4x}dx$

ג. $\int\frac{1}{\sin^2 10x}dx$

ד. $\int(\cos^2 x-\sin^2 x)dx$

ה. $\int(\cos^4 x-\sin^4 x)dx$

ו. $\int(\cos x+\sin x)^2 dx$

ז. $\int(\sin x\cos x\cos(2x))dx$

ח. $\int\tan^2 xdx$

ט. $\int\frac{1}{(\sin x\cos x)^2}dx$

י. $\int\cos^2 xdx$

יא. $\int\sin^2 4xdx$

**12)** חשב את ערכי האינטגרלים הבאים (שאלות אתגר):

א. $\int\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)dx$

ב. $\int\cos^4 xdx$

ג. $\int\sin^4 4xdx$

ד. $\int\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

ה. $\int\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{x^4}{4}+c$ ב. $2x^6+c$ ג. $\frac{x^5}{5}+c$ ד. $\frac{x^4}{2}+c$ ה. $\frac{x^6}{9}+c$ ו. $7x+c$

ז. $\frac{x^5}{6}+4x^4-\frac{x^3}{6}+2x^2-\frac{1}{3}x+c$ ח. $\frac{x^4}{5}-\frac{ax^3}{3}-\frac{ax^2}{b}+bx+c$.

**2)** א. $-\frac{x^{-2}}{2}+c$ ב. $-\frac{1}{2x^2}+c$ ג. $-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{a}{2x^2}+\frac{x^2}{2a}+c$ ד. $2x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+c$.

**3)** א. $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$ ב. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$ ג. $2\sqrt{x}+c$ ד. $8\sqrt{x}+2\sqrt{x^3}+c$.

**4)** א. $\frac{(5x-1)^4}{20}+c$ ב. $-\frac{3(2-7x)^5}{35}+c$ ג. $-\frac{3}{6x+5}+c$

ד. $\frac{\sqrt{6x-3}}{3}+c$ ה. $\frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a}+c$.

**5)** א. $x-7$ ב. $x^2+2x+5$ ג. $x^3-2x^2+5x-1$

ד. $x^2-x-3$ ה. $x^2-4$

**6)** א. $\frac{x^2}{2}-7x+c$ ב. $\frac{x^3}{3}+x^2+5x+c$ ג. $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x+c$

ד. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x+c$ ה. $\frac{x^3}{3}-4x+c$ ו. $\frac{x^5}{5}-x^2+x+c$.

**7)** א. $\frac{1}{x^2-1}+c$ ב. $-\frac{1}{3\left(x^3+6\right)}+c$ ג. $-\frac{1}{2\left(x^2-4x+1\right)}+c$

ד. $\sqrt{x^2+2}+c$ ה. $-6\sqrt{x-x^2}+c$ ו. $\left(x^2+1\right)^4+c$

ז. $\frac{\left(6x-x^3\right)^3}{9}+c$.

**8)** א. $-\cos x-3\sin x+4\tan x+5x+c$ ב. $\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\cos 4x}{2}+\frac{4\tan 3x}{3}+c$

ג. $\cos\left(\pi-x\right)+\tan x+x+c$.

**9)** א. $-\frac{1}{2}\cos 2x+c$ ב. $-\frac{\cos 6x}{12}+c$ ג. $-\frac{\sin 2x}{2}+c$

ד. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$.

**10)** א. $2\sqrt{\sin x}+c$ ב. $\frac{1}{\cos x}+c$ ג. $\frac{1}{3}\sin^3 x+c$.

**11)** א. $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$ ב. $\frac{1}{4}\tan 4x+c$ ג. $-\frac{1}{10}\cot 10x+c$

ד. $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ ה. $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ ו. $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

ז. $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$ ח. $\tan x-x+c$ ט. $\tan x-\cot x+c$

י. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$ יא. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}\sin 8x+c$

**12)** א. $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$ ב. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

ג. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$ ד. $-\cot x-x+c$

ה. $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

# מציאת פונקציה קדומה:

## שאלות:

**1)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=3x^2-7$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2,-1)$.

**2)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.

מצא את הפונקציה.

**3)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=x^2-8x+2$. נתון: $f(-2)=1$.

א. מצא את $f(x)$.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.

**4)** נתונה הנגזרת של פונקציה $f(x)$: $f'(x)=9x^2-4$.

ערך הפונקציה בנקודה $x=1$ הוא 3.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$.

ב. מצא את $f(x)$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

**5)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=2x-3$.

לפונקציה משיק ששיפועו הוא 3-.

א. מצא את שיעור ה-$x$ של נקודת ההשקה.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.

**6)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-6x-5$.

המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של $45^\circ$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-$x$.

א. מצא את שיעור ה-$x$ של הנקודה A.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 6-.

ג. מצא את משוואת המשיק.

**7)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=3x-4$.
הישר $y=2x+5$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את $f(x)$.

## תשובות סופיות:

**1)** $f(x)=x^3-7x+5$.

**2)** $f(x)=x^2-6x+14$.

**3)** א. $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2+2x+23\frac{2}{3}$ ב. $y=-5x+27$.

**4)** א. $y=5x-2$ ב. $f(x)=3x^3-4x+4$ ג. $(0,-2)$ , $(0.4,0)$.

**5)** א. $x=0$ ב. $f(x)=x^2-3x+7$.

**6)** א. $x=-1$ ב. $f(x)=-3x^2-5x-8$ ג. $y=x-5$.

**7)** $f(x)=\frac{3x^2}{2}-4x+11$.

# מתמטיקה למדעים

## פרק 40 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים

### תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים ..... 679
2. חישובי שטחים יסודיים ..... 681
3. חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים ..... 687
4. חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה ..... 689
5. חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית ..... 692
6. חישובי שטחים עם פונקצית שורש ..... 694
7. חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות ..... 698
8. חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים ..... 701

# האינטגרל המסוים:

## סיכום כללי:

תהא פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא $f'(x)$ ($f(x)$ מוגדרת בתחום $a \le x \le b$).

הקשר שבין האינטגרל המסוים לפונקציה קדומה הוא: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

**הערה:**

יש להשתמש בכל כללי האינטגרציה המיידיים של הפונקציות השונות אשר נלמדו.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_2^5 (x^2+5x)dx$

ב. $\int_{-4}^{-1} x^2(x-3)dx$

ג. $\int_{-3}^{3} (x^3+4x)dx$

ד. $\int_{-1}^{1} 3(2x-1)^5 dx$

ה. $\int_1^2 \frac{2}{(x-3)^2}dx$

ו. $\int_1^4 \frac{x-1}{x^3}dx$

ז. $\int_{-3}^{0} \frac{2x^2+7x-4}{x+4}dx$

ח. $\int_3^4 \frac{3x^2-7x+2}{x-2}dx$

ט. $\int_1^2 \sqrt{3x-1}dx$

י. $\int_{-5}^{0} \frac{3}{\sqrt{4-x}}dx$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_0^{\pi} (\cos x)dx$

ב. $\int_0^{\pi} (\sin 2x+1)dx$

ג. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x - 3\cos 2x)dx$

ד. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{\cos^2 x}+2\right)dx$

**3)** לפניך האינטגרל הבא: $\int_{1}^{a}(4x-7)dx$.

מצא עבור אלו ערכים של $a$ ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1-.

**4)** לפניך האינטגרל הבא: $\int_{a}^{2}(x-3x^2)dx$.

א. כתוב ביטוי לערך האינטגרל כתלות ב-$a$.

ב. מצא עבור אלו ערכים של $a$ ערך האינטגרל יהיה שווה ל-$\frac{a-12}{2}$.

**5)** לפניך האינטגרל הבא: $\int_{a}^{a+4}\left(\frac{1}{\sqrt{x-a}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx$.

א. כתוב את ערך האינטגרל כתלות ב-$a$.

ב. מצא את ערכו של $a$ עבורו ערך האינטגרל יהיה שווה ל-2.

**6)** לפניך האינטגרל הבא: $\int_{0}^{a}(\sin x+2\cos 2x)dx$, $0<a<3$.

מצא עבור אלו ערכים של $a$ ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 91.5 ב. -126.75 ג. 0 ד. -182 ה. 1

ו. $\frac{9}{32}$ ז. -12 ח. 9.5 ט. 1.856 י. 6.

**2)** א. 0 ב. $\pi$ ג. 0 ד. $3\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\approx 7.29$.

**3)** $a=2\ ,\ 1.5$.

**4)** א. $a^3-\frac{1}{2}a^2-6$ ב. $a=0\ ,\ 1\ ,\ -\frac{1}{2}$.

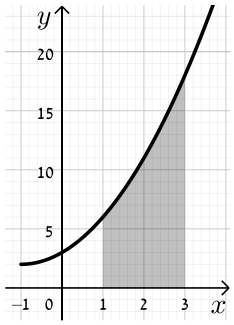
**5)** א. $4+2\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a+5}\right)$ ב. $a=1\frac{1}{4}$.

**6)** $a=\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{5\pi}{6}$.

# חישובי שטחים יסודיים:

## שאלות:

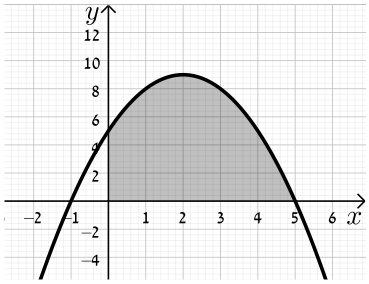
**1)** חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)=x^2+2x+3$ , ציר ה-$x$ והישרים $x=1$ ו-$x=3$.



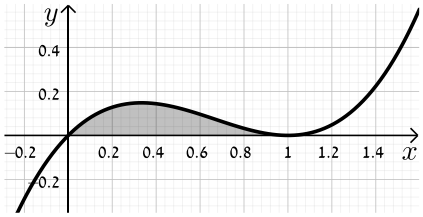

**2)** נתונה הפונקציה $y=-x^2+4x+5$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ וציר ה-$y$.



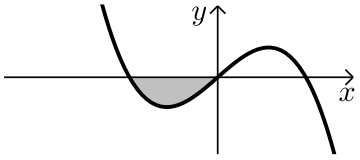

**3)** מצא את השטח המוגבל תחת הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+x$ וציר ה-$x$ כמתואר באיור.




## שאלות עם שטח מתחת לציר ה-$x$:

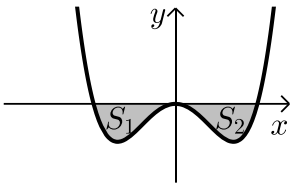
**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=x\left(4-x^2\right)$.

חשב את השטח המוגבל שמתחת הפונקציה וציר ה-$x$ שברביע השלישי.

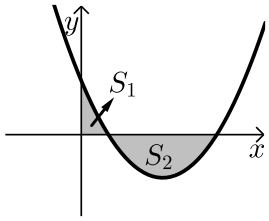



**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^2$.

חשב את השטח המוגבל שבין הפונקציה לציר ה-$x$.

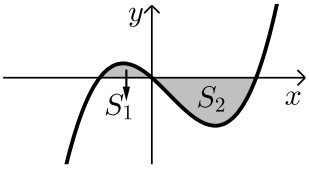


**6)** חשב את האינטגרל המסוים של
הפונקציה $y=x^2-6x+5$ בין 0 ל-5.
האם התוצאה מייצגת את סכום השטחים: $S_1+S_2$?
אם כן, הסבר. אם לא, נמק וחשב את סכום זה.



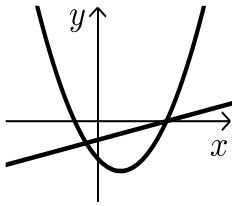

**7)** נתונה הפונקציה $y=x^3-x^2-2x$.
יוצרים את השטחים $S_1$ ו-$S_2$ בין גרף הפונקציה וציר ה-$x$ כמתואר באיור.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-$x$.

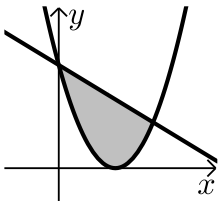



**שאלות עם שטחים בין שתי פונקציות:**

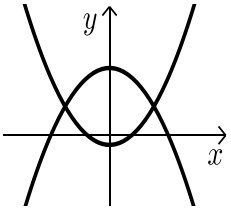
**8)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.




**9)** נתונות הפונקציות: $y=(x-3)^2$, $y=-x+9$.
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.

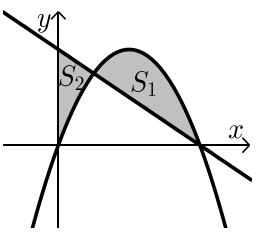



**10)** נתונות הפונקציות: $g(x)=7-x^2$, $f(x)=x^2-1$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של
הפונקציות הנ"ל.

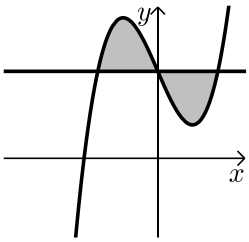



**11)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=-x^2+4x$ ו- $g(x)=-x+4$.
מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים ב-$S_1$
ואת השטח הכלוא בין הגרפים וציר ה-$y$ ב-$S_2$
כמתואר באיור.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.
ב. חשב את היחס שבין השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.



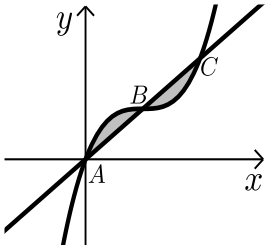
**12)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-4x+5$ : והישר $y=5$ .




א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.

ב. חשב את השטח המוגבל ביניהן.

**13)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-3x^2+3x$ : .

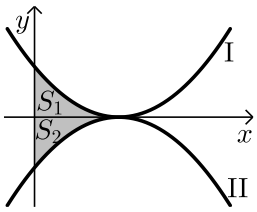



הישר AC חותך את גרף הפונקציה בנקודות

הבאות: $A(0,0)$ , $B(1,1)$ , $C(2,2)$ .

חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

**14)** נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$ כמתואר באיור.



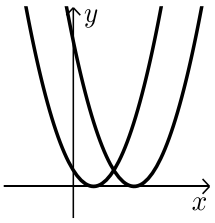

א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים ב- $S_1$ ו- $S_2$ כמתואר באיור.

הראה כי השטחים $S_1$ ו- $S_2$ שווים זה לזה.

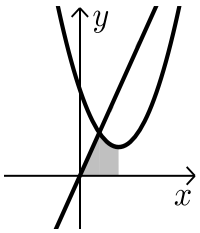
**שאלות עם שטחים מורכבים:**

**15)** נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2-2x+1$ , $g(x)=x^2-6x+9$ .




חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$ .

**16)** נתונות הפונקציות: $y=x^2-4x+6$ , $y=3x$ .

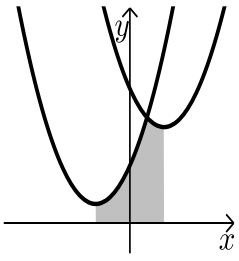



א. מצא את קדקוד הפרבולה.

ב. מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר שמשמאל לקדקוד הפרבולה.

ג. חשב את השטח המסומן שבשרטוט.

**17)** נתונות הפונקציות: $y=x^2+4x+6$ , $y=x^2-4x+14$ .

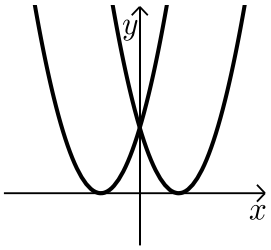



א. מצא את שיעורי ה- $x$ של קודקודי הפרבולות.

ב. חשב את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ג. חשב את השטח המסומן בשרטוט.

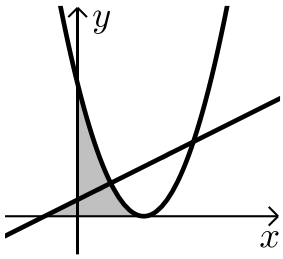
**18)** נתונות הפונקציות: $g(x)=(x+3)^2$ , $f(x)=(x-3)^2$ .
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה-$x$ .



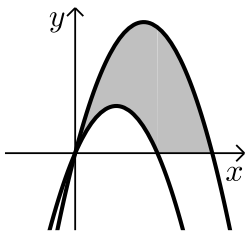

**19)** נתונות שתי הפונקציות: $y=(x-2)^2$ , $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ .

א. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה-$x$ .

ב. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה-$y$ .




**20)** נתונות הפרבולות הבאות: $f(x)=-x^2+5x$ ו- $g(x)=-x^2+3x$ .
חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה-$x$ .

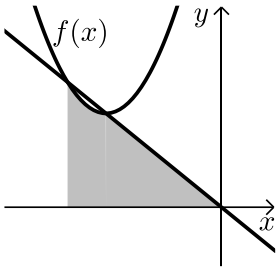



**21)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2+6x+12$ .
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4$ כמתואר באיור.

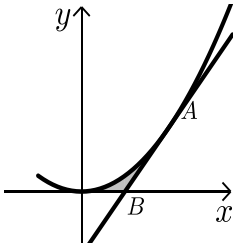
א. מצא את משוואת הישר.

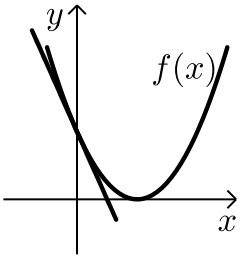
ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ והישר $x=-4$ .




**22)** נתונה הפונקציה: $y=2x^2$ .
מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה: $A(1,2)$ .
המשיק חותך את ציר ה-$x$ בנקודה B.
חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה-$x$ .



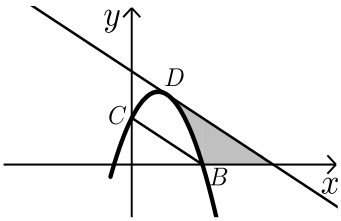



**23)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-2)^2$.
מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$ מעבירים משיק.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-$x$

ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה-$x$.




**24)** משוואת הפרבולה היא: $f(x)=-2x^2+3x+2$.
הנקודות $C(0,2)$ , $B(2,0)$ הן נקודות חיתוך של הפרבולה עם הצירים.
המשיק לפרבולה בנקודה D מקביל לישר BC.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה-$x$.

ג. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה-$y$.

## תשובות סופיות:

**1)** $22\frac{2}{3}$ יח"ש.

**2)** א. $(5,0)$ , $(-1,0)$ ב. $33\frac{1}{3}$ יח"ש.

**3)** $\frac{1}{12}$ יח"ש.

**4)** 4 יח"ש.

**5)** $4\frac{4}{15}$ יח"ש.

**6)** לא. השטח הוא: 13 יח"ש.

**7)** א. $(-1,0)\ ,\ (0,0)\ ,\ (2,0)$ ב. $3\frac{1}{12}$ יח"ש.

**8)** $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

**9)** $20\frac{5}{6}$ יח"ש.

**10)** $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

**11)** א. $(1,3)\ ,\ (4,0)$ ב. $2\frac{5}{11}$.

**12)** א. $(-2,5)\ ,\ (0,5)\ ,\ (2,5)$ ב. 8 יח"ש.

**13)** 0.5 יח"ש.

**14)** א. $f(x)=\text{I}\ ,\ g(x)=\text{II}$ ב. הוכחה.

**15)** $\frac{2}{3}$ יח"ש.

**16)** א. $(2,2)$ ב. $(1,3)$ ג. $3\frac{5}{6}$ יח"ש.

**17)** א. $x=-2\ ,\ x=2$ ב. $(1,11)$ ג. $25\frac{1}{3}$ יח"ש.

**18)** 18 יח"ש.

**19)** א. $\frac{4}{3}$ יח"ש ב. $1\frac{7}{12}$ יח"ש.

**20)** $16\frac{1}{3}$ יח"ש.

**21)** א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

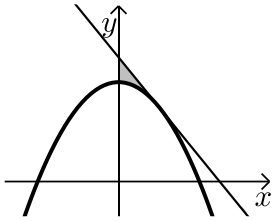
**22)** $\frac{1}{6}$ יח"ש.

**23)** א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

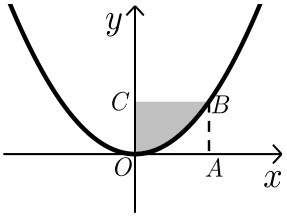
**24)** א. $y=-x+4$ ב. $2\frac{2}{3}$ יח"ש. ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

## חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים:

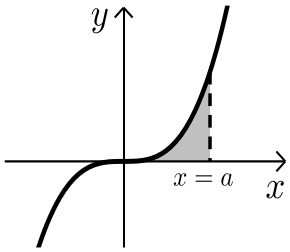
### שאלות:



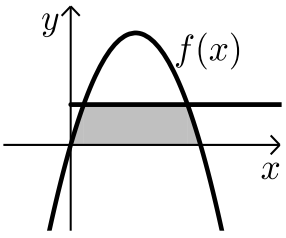

**25)** נתונה הפרבולה: $y=ax^2+8$.
שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה שבה $x=2$ הוא 2-.
א. חשב את $a$.
ב. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, הפרבולה וציר $y$.




**26)** הפונקציה המתוארת בשרטוט היא: $y=ax^2$, ($a$ פרמטר).
המרובע ABCO הוא ריבוע.
הקדקוד B נמצא על גרף הפונקציה.
ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.
מצא את ערך הפרמטר $a$ ואת השטח המסומן בסרטוט.




**27)** נתונה הפונקציה $y=x^3$.
מעבירים אנך לציר ה-$x$: $x=a$ ($a$ פרמטר חיובי)
כך שנוצר שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה-$x$.
א. הבע באמצעות $a$ את השטח המקווקו בציור.
ב. חשב את $a$ אם ידוע כי שטח זה שווה ל-$a^2$.




**28)** נתונה הפונקציה: $f(x)=kx-x^2$.
הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה-$x$ של אחת מנקודות החיתוך הוא $x=9$.
א. מצא את ערך הפרמטר $k$.
ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה-$x$ (השטח המסומן).

## תשובות סופיות:

**25)** א. $a=-\frac{1}{2}$ ב. $\frac{4}{3}$ יח"ש.

**26)** $a=\frac{1}{2}$ , $2\frac{2}{3}$ יח"ש.

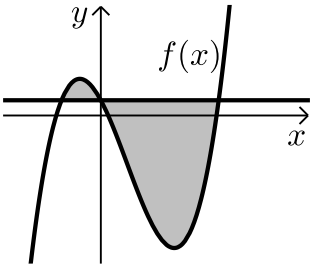
**27)** א. $\frac{a^4}{4}$ ב. $a=2$ .

**28)** א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

## חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה:

### שאלות:

**29)** נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=3x^2-8x-12$.



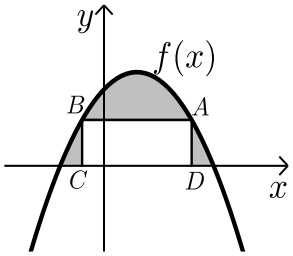

הישר $y=5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ על ציר ה-$y$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הישר והפונקציה.

**30)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ המתוארת באיור שלפניך היא: $f'(x)=3-2x$.

ישר AB שמשוואתו: $y=6$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.




מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה-$x$ כך שנוצר מלבן ABCD.

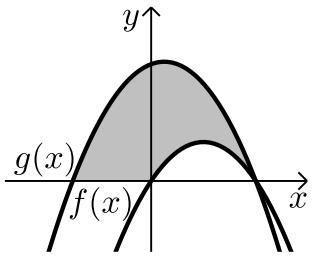
ידוע ששיעור ה-$x$ של הנקודה A הוא 4.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה-$x$.

**31)** באיור שלפניך מתוארות הפונקציות שנגזרותיהן: $g'(x)=-2x+1$, $f'(x)=4-2x$.

ידוע ששתי הפונקציות חותכות את ציר ה-$x$ כאשר: $x=4$.



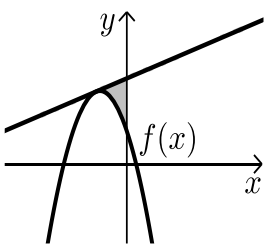

א. מצא את הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה-$x$ (המסומן).

**32)** נתונה פונקציה $f(x)$.

משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=-2$ היא: $y=x+13$.

הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x)=-4x-7$.




א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה-$y$.

**33)** נתונה פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא: $f'(x)=3x^2-6x-9$.
ישר ששיפועו 15 משיק לפונקציה ברביע הרביעי בנקודה שבה: $y=-20$.

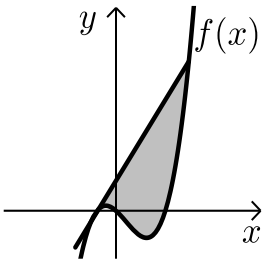
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש עוד משיקים לגרף הפונקציה בעלי שיפוע 15?
אם כן- מצא אותם.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי הנקודה שבה $x=7$ משותפת למשיק שמצאת בסעיף הקודם ולפונקציה $f(x)$.

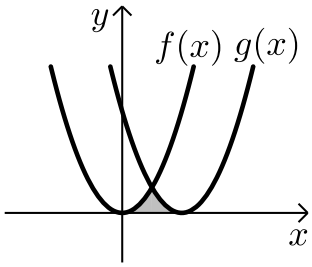
ii. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף הקודם (ראה איור).




**34)** באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה: $f(x)=x^2$
את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=2$.
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא: $g'(x)=2x-8$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה-$x$ (המסומן).

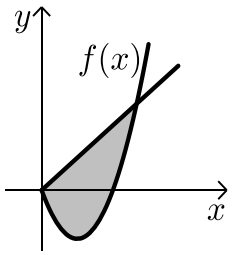



**35)** באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.
נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=2x-6$
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה בנקודה שבה ערך ה-$y$ הוא 16.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.



## תשובות סופיות:

**29)** א. $f(x)=x^3-4x^2-12x+5$ ב. $189\frac{1}{3}$ יח"ש.

**30)** א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

**31)** א. $f(x)=4x-x^2\ ,\ g(x)=-x^2+x+12$ ב. 46.5 יח"ש.

**32)** א. $f(x)=-2x^2-7x+5$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

**33)** א. $f(x)=x^3-3x^2-9x$ ב. $y=15x+28$

ג. i. $(7,133)$ ii. 546.75 יח"ש.

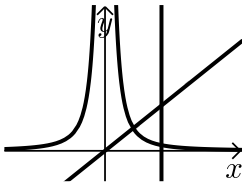
**34)** א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

**35)** א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

# חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית:

## שאלות:

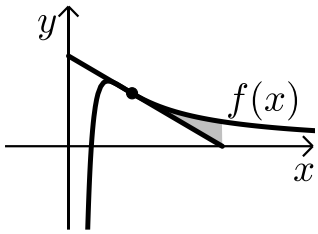
**1)** נתונות שתי פונקציות: $g(x)=x$ , $f(x)=\frac{1}{x^2}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה-$x$.



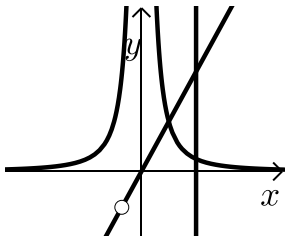

**2)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$
מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,
המשיק ואנך לציר ה-$x$ היוצא מנקודת החיתוך
של המשיק עם ציר ה-$x$.



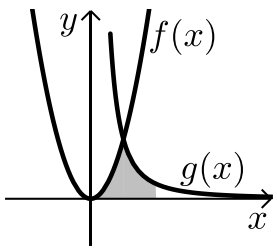

**3)** נתונות שתי פונקציות: $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$ , $f(x)=\frac{1}{x^2}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה-$x$.



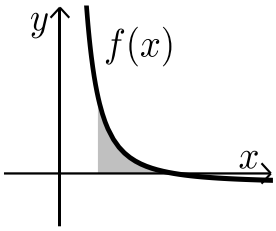

**4)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$
($a$ קבוע) בתחום: $x>0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון בנקודה
הנמצאת על הישר: $y=4x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת $a$.

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-$x$
והישר: $x=4$.



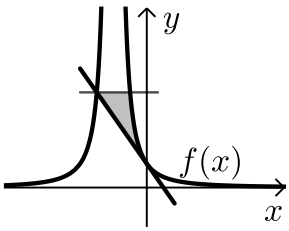
**5)** גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ ($a$ קבוע) חותך את ציר ה-$x$ בנקודה $(6,0)$.




א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ והישר: $x=2$.

**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ ($A$ פרמטר חיובי).




ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$ הוא: $-\frac{1}{9}$.

א. מצא את ערך הפרמטר $A$.

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה-$y$.

ג. הראה כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=-4.5$.

ד. העבר ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשב את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזר באיור).

## תשובות סופיות:

**1)** 1 יח"ש.

**2)** א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

**3)** 1 יח"ש.

**4)** א. $a=32$ , $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

**5)** א. $a=36$ , $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

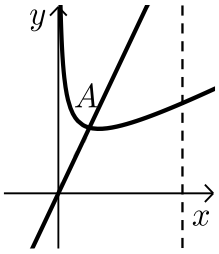
**6)** א. $A=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה.

ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

# חישובי שטחים עם פונקצית שורש:

## שאלות:

**1)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+x$.

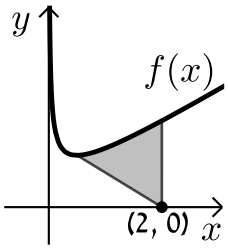



מעבירים ישר: $y=4x$ החותך את גרף הפונקציה בנקודה A המסומנת באיור.

א. מצא את שיעורי הנקודה A.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $y=4x$, ציר ה-$x$ ואנך לציר ה-$x$: $x=4$.

**2)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.

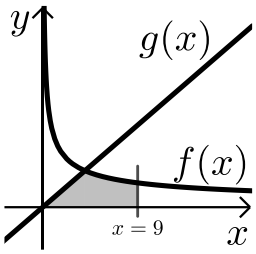



א. מצא את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים ישר לנקודה $(2,0)$ שעל ציר ה-$x$.

מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לציר ה-$x$ היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

**3)** באיור הבא מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו-$g(x)=2x$.



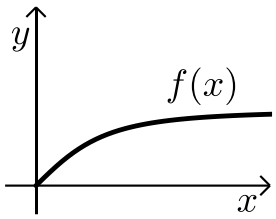

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-$x$ והישר $x=9$.

**4)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.

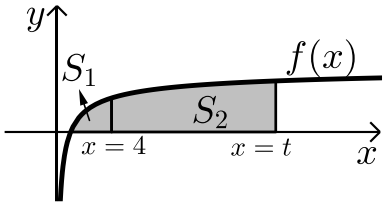
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה-$y$.

**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.




לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.

**6)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.




מעבירים שני אנכים לציר ה-$x$ והם: $x=4$
ו-$x=t$ $(t>4)$. נסמן:
$S_1$ - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-$x$.
$S_2$ - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ והאנכים.
ידוע כי: $8S_1=S_2$. מצא את $t$.

**7)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

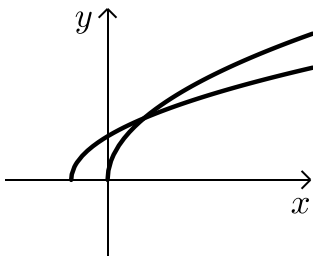
ii. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

iii. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא: $m=\frac{17}{16}$. מצא את נקודת ההשקה.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ ואנך לציר ה-$x$ מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

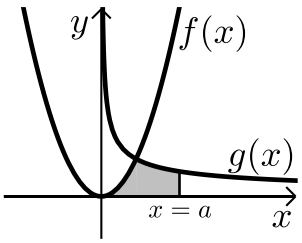
**8)** נתונות שתי פונקציות: $f(x)=\sqrt{x+b}$ , $g(x)=\sqrt{2x}$ $(b>0)$




גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה-$x$ הוא $2\frac{2}{3}$ יח"ש.
מצא את ערכו של הפרמטר $b$.

**9)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=x^2$

ו-$g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$ ברביע הראשון.




מעבירים ישר $x=a$ החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה-$x$ והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל-$S=85\frac{1}{3}$.

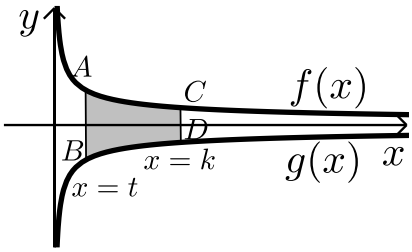
מצא את $a$.

**10)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו-$g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

מעבירים שני ישרים: $x=k$ ו-$x=t$ אשר חותכים את הגרפים

של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי: 2CD=AB.




א. הראה כי: $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות

והישרים: $x=k$ ו-$x=t$ הוא: $S=12$.

מצא את $t$.

**11)** ענה על הסעיפים הבאים:

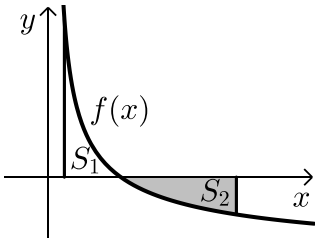
א. מצא עבור איזה ערך של $a$, $(a>1)$ יתקיים: $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.

מעבירים שני אנכים לציר ה-$x$ והם: $x=1$ ו-$x=13$

כך שנוצרים השטחים $S_1$ ו-$S_2$.

מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$



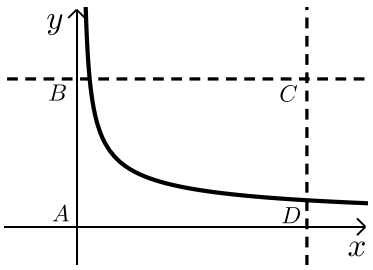

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה-$x$ והאנך $x=1$, $(S_1)$.

ii. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח $S_2$.

נמק את טענתך.




**12)** באיור שלפניך מתוארת הפונקציה: $f(x)=\frac{9}{\sqrt{2x-1}}$

מעבירים את הישרים המקבילים לצירים: $x=13$ ו- $y=3$ כך שנוצר המלבן ABCD כמתואר באיור.

הישר $y=3$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה M.

א. מצא את שיעורי הנקודה M.

ב. מסמנים את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והישרים ב- $S_1$ ואת שטח המלבן ב- $S_2$.

הראה כי: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{13}$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $A(1,4)$ ב. 15.5 יח"ש.

**2)** א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

**3)** א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

**4)** 2.26 יח"ש.

**5)** 0.5 יח"ש

**6)** $t=16$.

**7)** א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$

ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

**8)** $b=2$.

**9)** $a=9$.

**10)** א. הוכחה ב. $t=1$.

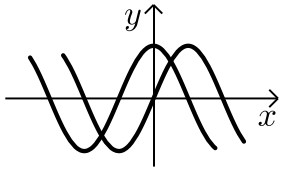
**11)** א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=|-S_1|=2$.

**12)** א. $M(5,3)$.

# חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות:

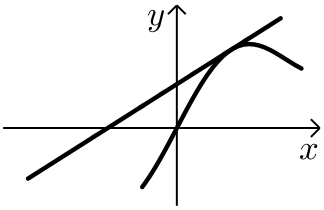
## שאלות:

**1)** נתונות הפונקציות: $f(x)=\sin x$ , $g(x)=\cos x$ .




חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לציר ה- $y$ ברביע הראשון.

**2)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\sin x$ .

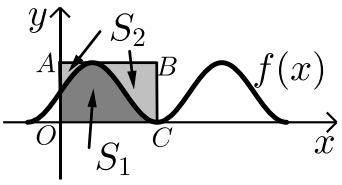



בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ ברביעים הראשון והשני.

**3)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$




בתחום: $-0.25\pi \le x \le 1.75\pi$ מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ומעלים אנך לציר ה- $x$ מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ בתחום הנתון המסומנת ב-C כך שנוצר המלבן ABCO.
השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- $S_1$ (ראה סימון בציור).
השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- $y$ יסומן ב- $S_2$ .

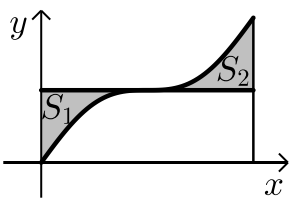
א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$ .

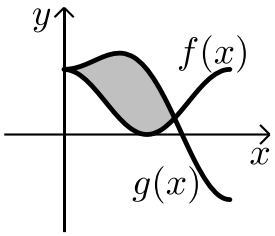
**4)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $y=\sin x+x$ בתחום: $0 \le x \le 2\pi$ .

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון?

ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- $x$ בנקודה שבה: $x=2\pi$ .
מעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$ מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראה כי השטחים $S_1$ ו- $S_2$ המסומנים בסרטוט שווים.



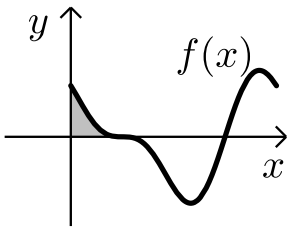
**5)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה
$f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$ הבאות:
בתחום: $0\le x\le \pi$.




א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
השתמש בזהות: $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

**6)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$.



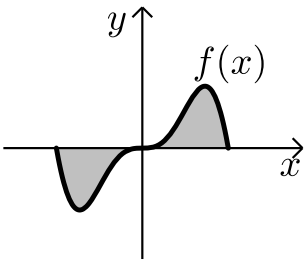

א. מצא את שיעורי ה- $x$ של הנקודות
המקיימות: $f'(x)=0$ בתחום: $0<x<2\pi$.
ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$ אשר אינה
קיצון נמצאת על ציר ה- $x$.

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

**7)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הפונקציה: $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$
הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y'=x^2\sin x$




באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2\sin x$
בתחום: $-\pi\le x\le \pi$.

ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה
וציר ה- $x$ בתחום הנתון.

**8)** נתונה הפונקציה: $f(x)=a\cos x+b\sin x$, $a,b$ פרמטרים.
הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$ והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.
גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

## תשובות סופיות:

**1)** 0.41 יח"ש.

**2)** א. $y=x+2$ ב. $\pi$ יח"ש.

**3)** א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$.

**4)** א. אין נקודת קיצון, הנקודה $(\pi,\pi)$ היא נקודת פיתול.

ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$.

**5)** א. $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ , $(0,1)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$.

**6)** א. $x=\frac{\pi}{2}$ , $\frac{7\pi}{6}$ , $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

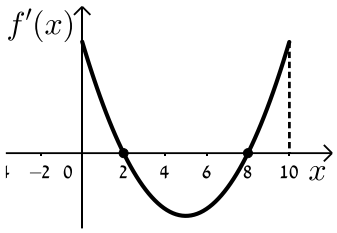
**7)** א. הוכחה ב. הוכחה ג. $S=2\left(\pi^2-4\right)\approx 11.74$.

**8)** $a=2$ , $b=-2$.

# חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:

## שאלות:

**1)** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 10$.



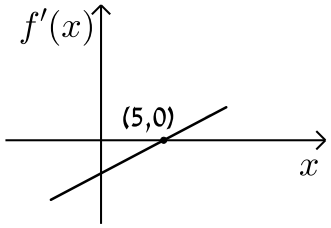

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

אם: $f(2)=6$ , $f(0)=-4$ , $f(5)=0$ וכן: $f(10)>0$.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י **<u>גרף הנגזרת</u>** **<u>והצירים</u>** ברביע הראשון עד לנקודה שבה $x=2$.

**2)** לפניך הגרף של הפונקציה $f'(x)$.




הגרף המתואר חותך את ציר ה-$x$ בנקודה אחת בלבד והיא $(5,0)$.

א. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ היא חיובית ואת התחומים שבהם היא שלילית.

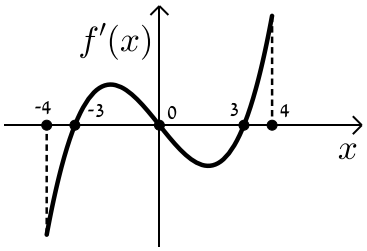
ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי שיעור ה-$y$ שלה הוא 2-.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$y$ כאשר $y=8$.

ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.

**3)** בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.



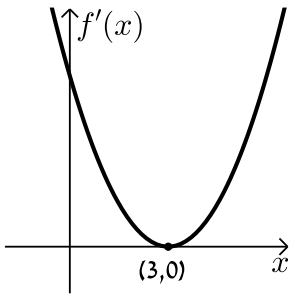

א. רשום את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי ה-$x$ של נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבע את סוגן.

ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ עוברת בראשית הצירים וגם מקיימת: $f(-3)=f(3)=m$.
סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנ"ל (הבע באמצעות $m$).

ד. השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ וציר ה-$x$ ברביעים השני והרביעי הוא 16 יח"ש. מצא את $m$.

**4)** הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור הבא.

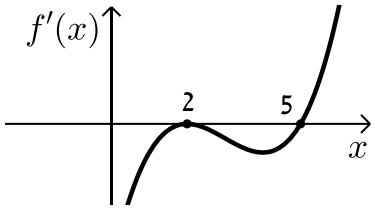



א. האם ל-$f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$
אם ידוע כי $f(3)=4$ וכי היא חותכת את ציר
ה-$y$ בנקודה שבה $y=-5$.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$
והצירים ברביע הראשון.

**5)** באיור שלפניך מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.




ידוע כי הנקודות $A(5,-4.75)$ , $B(2,2)$
ו-$C(0,14)$ נמצאות על $f(x)$.

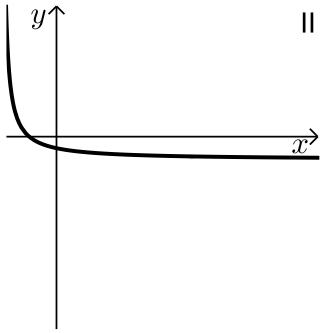
א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

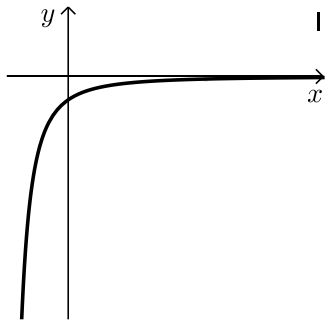
ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. חשב את השטח מוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים בתחום $0\le x\le 5$.

**6)** באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$:

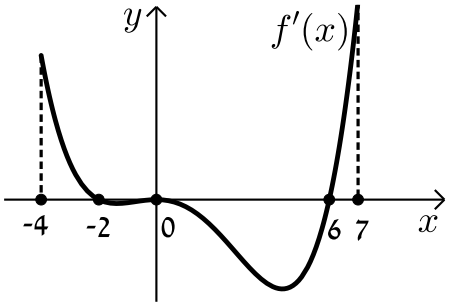



א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.

ב. נתון כי $f(10)=-3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-2$.
מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?

**7)** נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:

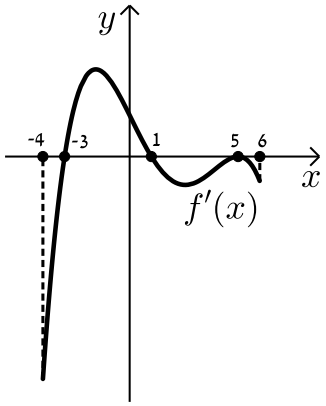



א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$ לפי הנתונים: $f(0) = -2$ , $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה-$x$ בריבוע השלישי.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה-$x$ בריבוע הרביעי.

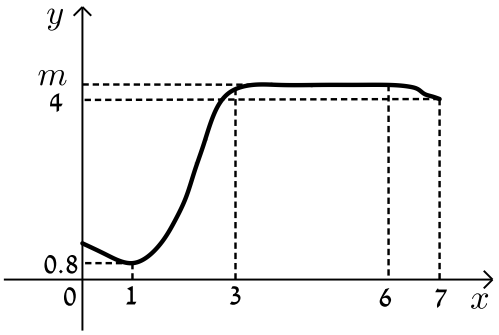
**8)** נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:




א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 6$ עבור הנתונים: $f(5) = -83\frac{1}{3}$ , $f(1) = 36\frac{2}{15}$ , $f(-3) = -356\frac{2}{5}$.

ב. חשב את כלל השטח הכלוא בין גרף הנגזרת וציר ה-$x$ בתחום: $-3 \le x \le 5$.

**9)** בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0<x<7$ :




הסתמך על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים על הציר ים
וענה על השאלות הבאות :

א. מצא עבור אילו ערכים של $x$ השונים מ-6 מתקיים :

i. $f'(x)>0$

ii. $f'(x)=0$

iii. $f'(x)<0$

ב. נתון כי : $\int_3^6 m\,dx=15$ , כאשר $m$ הוא פרמטר המסומן על ציר ה- $y$ .

מצא את $f(5)$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0<x<3$ .

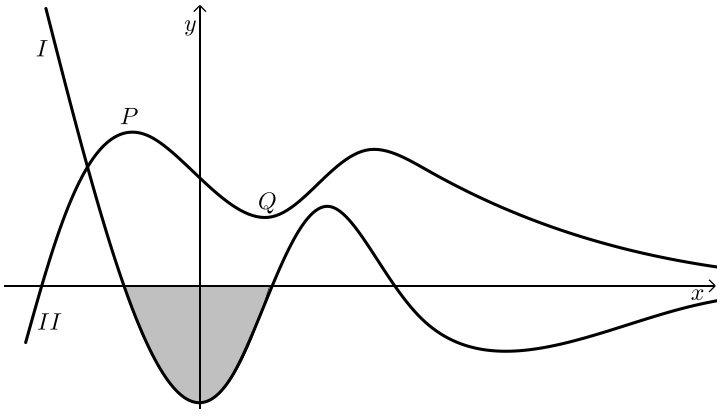
ד. מצא את השטח המוגבל בין הגרף של פונקצית הנגזרת $f'(x)$
וציר ה- $x$ בתחום $1<x<3$ .

**10)** בסרטוט נתונים הגרפים של פונקציה ושל נגזרתה.

א. קבע איזה מהגרפים, I או II, שייך לפונקציה ואיזה שייך לנגזרת. נמק.

ב. כמה נקודות פיתול יש לפונקציה? נמק וסמן אותן על הסרטוט.

ג. נתון : $P(-2,4)$ , $Q(2,1)$ . מצא את גודלו של השטח הכלוא בין גרף I
לציר ה- $x$ (השטח המסומן בסרטוט).



## תשובות סופיות:

**הערה: סרטוטי הסקיצות מופיעות במרוכז בעמוד הבא.**

**1)** ב. 10 יח"ש.

**2)** א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$.
ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$
ג. $\min(5,-2)$
ד. הוכחה.
ה. 10 יח"ש.

**3)** א. עולה: $3<x\le 4$, $-3<x<0$, יורדת: $0<x<3$, $-4\le x<-3$
ב. $x_{\min}=3$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=-3$.
ג. הוכחה.
ד. $m=-8$

**4)** א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. הוכחה.
ג. 9 יח"ש.

**5)** א. $\min(5,-4.75)$.
ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.
ג. הוכחה.
ד. 18.75 יח"ש.

**6)** א. $f'(x)$: I, $f(x)$: II
ב. 1 יח"ש.

**7)** א. הוכחה.
ב. 9.6 יח"ש.
ג. 604.8 יח"ש.

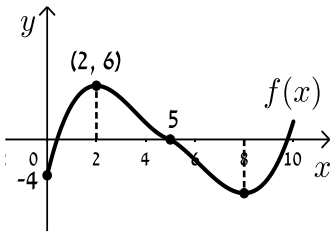
**8)** א. הוכחה.
ב. 512 יח"ש.

**9)** א. i. $f'(x)>0: 1<x<3$
ii. $f'(x)=0: x=1, 3\le x<6$
iii. $f'(x)<0: 6<x<7, 0<x<1$

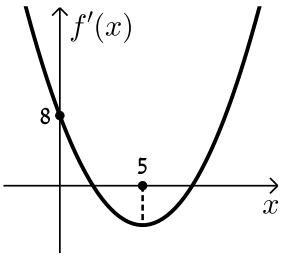
**10)** א. גרף I - $f'(x)$ וגרף II - $f(x)$.
ב. 3 נקודות פיתול.
ג. 3 יח"ש.
ד. 4.2 יח"ש.

## סרטוטי גרפים לפי מספרי שאלות:

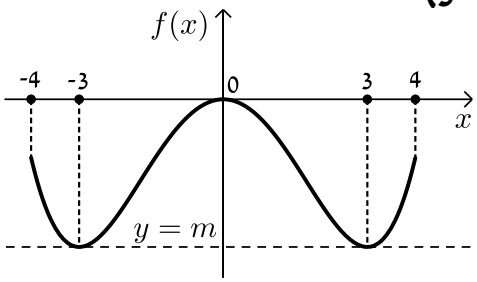
**(1**



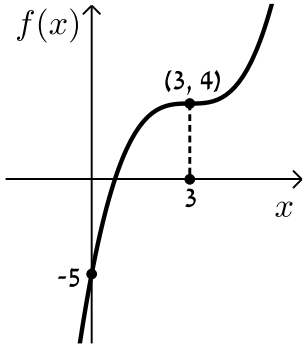

**(2**



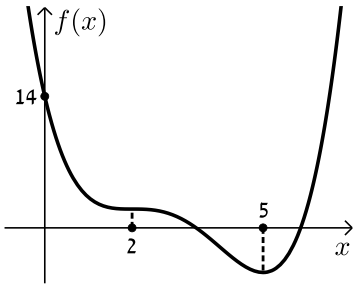

**(3**



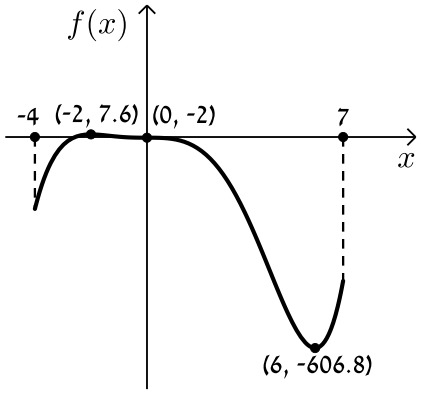

**(4**



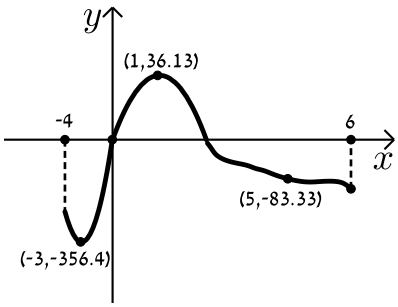

**(5**



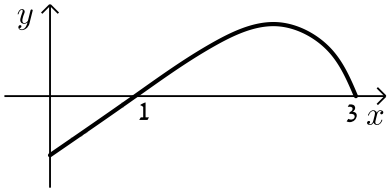

**(7**




**(8**




**(9**



# מתמטיקה למדעים

## פרק 41 - חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה

### תוכן העניינים

1. פונקציה מעריכית ..... 707
2. פונקציה לוגריתמית ..... 713
3. פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי ..... 719

# פונקציה מעריכית:

## סיכום כללי:

### אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות:

| אינטגרלים של פונקציות מורכבות | אינטגרלים יסודיים |
|---|---|
| $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln a}+c$ | $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$ |
| $\int e^{mx+n}dx=\frac{e^{mx+n}}{m}+c$ | $\int e^{x}dx=e^{x}+c$ |

## שאלות:

### אינטגרל כללי:

**1)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(5e^{x}-e^{3x}+e^{-x}+1\right)dx$

ב. $\int\left(3^{x}+5^{2x}\right)dx$

ג. $\int\left(6\sqrt{e^{4x-1}}\right)dx$

ד. $\int\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}dx$

**2)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\frac{e^{2x}-1}{e^{x}-1}dx$

ב. $\int\frac{3e^{3x}-5e^{2x}+4e^{x}-2}{e^{x}-1}dx$

**3)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$

ב. $\int\left(e^{x+1}\right)^{2}dx$

ג. $\int\frac{2^{x}+4^{2x}+10^{3x}}{5^{x}}dx$

ד. $\int\left(4\sqrt{e^{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

**4)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}\right)dx$ ב. $\int\left(\frac{3-e^x}{\left(e^x-3x\right)^2}\right)dx$ ג. $\int\left(xe^{x^2}\right)dx$

**אינטגרל מסוים:**

**5)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2e^x-\frac{1}{e^x}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(\ln 2,3\frac{1}{4}\right)$.

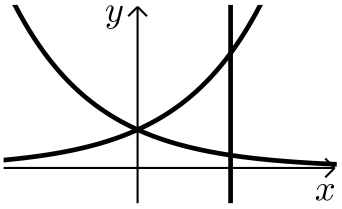
**6)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=e^{2x}+e^x-2$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא $\frac{1}{2}$.

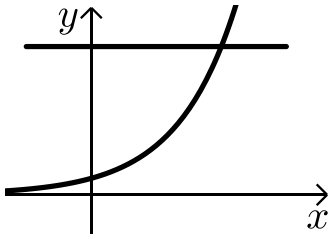
**7)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=6x^2e^{x^3}-\frac{1}{x^2}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(-1,\frac{2}{e}\right)$.

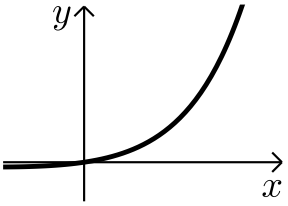
**חישובי שטחים:**



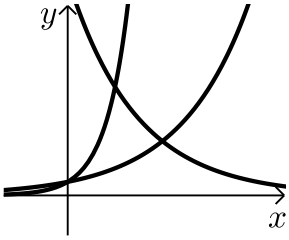

**8)** נתונות הפונקציות: $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לישר $x=\ln 3$.




**9)** נתונה הפונקציה: $f(x)=3^x$.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר $y=9$ וציר ה- $y$.

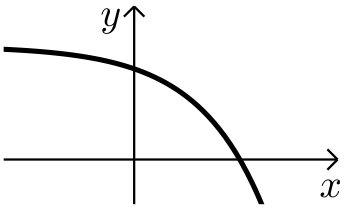



**10)** נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{2x}-e^{x}$.
לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק והישר $x=2$.




**11)** נתונות הפונקציות:
$f(x)=e^{x}$ , $g(x)=e^{3x}$ , $h(x)=16e^{-x}$.
חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.

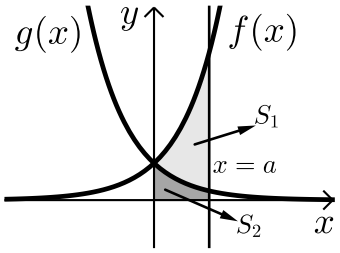
**12)** נתונה הפונקציה: $f(x)=5-e^{x}$.
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין
הפונקציה, המשיק וציר ה-$x$.
ניתן להשאיר $e$ ו-$\ln$ בתשובה.




**13)** נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{bx}$ , $(0<b)$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר
בראשית הצירים וציר ה-$y$ הוא $\frac{e-2}{4}$.
מצא את ערכו של הפרמטר $b$.

**14)** נתונות הפונקציות: $g(x)=e^{-x}$ , $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$.
מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ בربיע הראשון הורידו אנך לשני
הצירים. המשך האנך לציר ה-$y$ חותך את הפונקציה $f(x)$ ומנקודת החיתוך
יורד אנך נוסף לציר ה-$x$ כך שנוצר מלבן.
הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

**15)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=e^{2x}$ ו- $g(x)=e^{-2x}$.



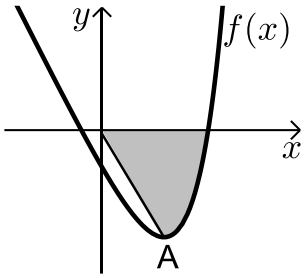

מעבירים אנך לציר ה-$x$ את הישר $x=a$ , $a>0$ כמתואר באיור.

אנך זה יוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$.

ידוע כי השטח $S_1$ גדול פי 3 מהשטח $S_2$.

מצא את $a$.

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$.




הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

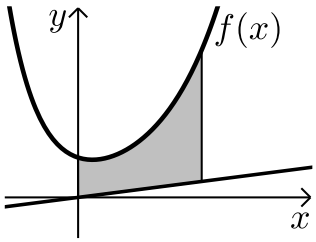
א. מצא את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה-$x$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=1.7$.

**17)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$.




ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.

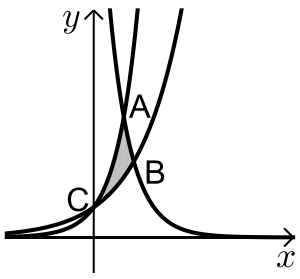
א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והישר: $y=0.1x$.

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר $y$ והאנך: $x=2$.

**18)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש פונקציות:

I. $f(x)=2^x$ II. $g(x)=4^x$ II. $h(x)=2^{4-2x}$




א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A , B ו-C (נקודות החיתוך שבין הגרפים).

ג. חשב את השטח המסומן באיור.

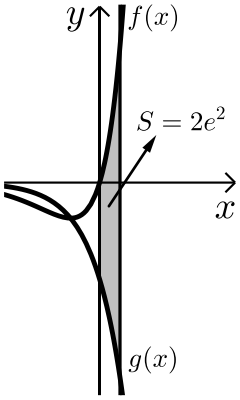
**19)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה: $y=e^x(x-1)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $g(x)=-e^x$ , $f(x)=xe^x$.

מעבירים ישר $x=a$ $(a>0)$ , החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$ והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$. מצא את $a$.



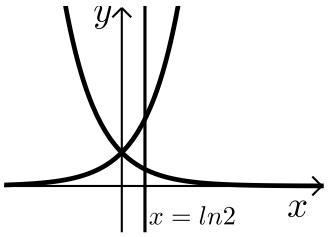

**חישובי נפחים:**

**20)** נתונות הפונקציות: $g(x)=e^{-x}$ , $f(x)=e^x$.

השטח הכלוא בין הפונקציות והישר: $x=\ln 2$

מסתובב סביב ציר ה- $x$.

חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



## תשובות סופיות:

**1)** א. $5e^x-\frac{e^{3x}}{3}-e^{-x}+x+c$ ב. $\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{5^{2x}}{2\ln 5}+c$

ג. $3e^{2x-\frac{1}{2}}+c$ ד. $\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+c$

**2)** א. $e^x+x+c$ ב. $\frac{3e^{2x}}{2}-2e^x+2x+c$

**3)** א. $\frac{1}{4}e^{4x}-e^{-x}+c$ ב. $\frac{1}{2}e^{2x+2}+c$

ג. $\frac{0.4^x}{\ln 0.4}+\frac{3.2^x}{\ln 3.2}+\frac{200^x}{\ln 200}+c$ ד. $8\sqrt{e^x}-\frac{3}{4}e^{\frac{-4x}{3}}+c$

**4)** א. $2\sqrt{e^x+3}+c$ ב. $\frac{1}{e^x-3x}+c$ ג. $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

**5)** $f(x)=2e^x+e^{-x}-1.25$

**6)** $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+e^x-2x-1$

**7)** $f(x)=2e^{x^3}+\frac{1}{x}+1$

**8)** $1\frac{1}{3}$ יח"ש $=S$

**9)** $10.72$ יח"ש $=S$

**10)** $18.41$ יח"ש $=S$

**11)** $3\frac{1}{3}$ יח"ש $=S$

**12)** $0.192$ יח"ש $=S$

**13)** $b=2$

**15)** $a=\ln 2$

**16)** א. $A(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=4.744$ יח"ש

**17)** א. $a=-2$ , $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. $1.52$

**18)** ב. $C(0,1)$ , $A(1,4)$ , $B\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$ ג. $S=1.03$ יח"ש

**19)** א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

**20)** $1\frac{1}{8}\pi$ יח"נ.

# פונקציה לוגריתמית:

## סיכום כללי:

### אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות:

| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$ | $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$ |

## שאלות:

### אינטגרל כללי:

**1)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1}\right)dx$ ב. $\int \frac{x^2+3x-4}{x}dx$ ג. $\int \frac{x+3}{x^2-9}dx$

**2)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{x^2+3x+5}{x+1}dx$ ב. $\int \frac{x^3-x^2+5x-6}{x-2}dx$ ג. $\int \frac{x^4+3}{x+1}dx$

**3)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{2x}{x^2-3}dx$ ב. $\int \frac{x-1}{x^2-2x}dx$ ג. $\int \frac{e^x}{e^x+5}dx$

ד. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ ה. $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

### אינטגרל מסוים:

**4)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - \frac{1}{x-4}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(5,28)$.

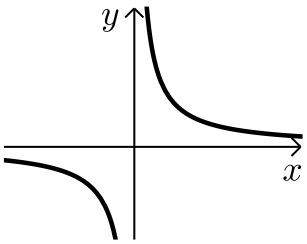
**5)** נתונה נגזרת שנייה של פונקציה: $f''(x)=6x-\frac{1}{x^2}$. מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(1,-2)$ וששיפועה בנקודה זו הוא 3.

**חישובי שטחים:**

**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}$.

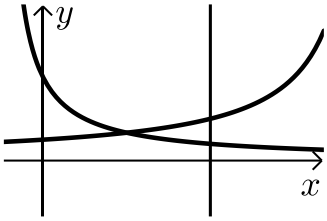
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו-$x=-4$ וציר ה-$x$.

ניתן להשאיר ln בתשובה.




**7)** נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{4}{8-x}$ , $f(x)=\frac{2}{x+1}$.

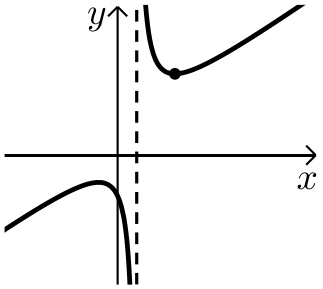
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר $x=4$ והצירים.




**8)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$ ואנך לציר ה-$x$ העובר בנקודת המינימום של הפונקציה.

אפשר להשאיר ביטוי עם ln בתשובה.



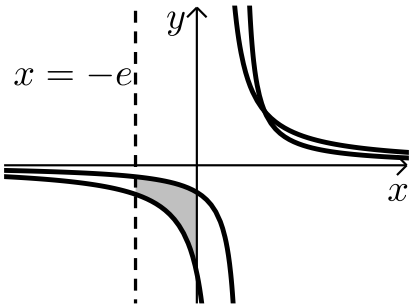

**9)** באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{a}{x-1}$

ו-$g(x)=\frac{a-1}{x-2}$ בתחום: $x<0$.

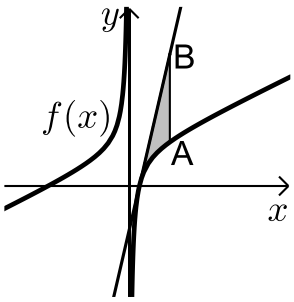
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצא את $a$ וכתוב את שתי הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-$y$ והישר $x=-e$



**10)** נתונה הפונקציה: $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.



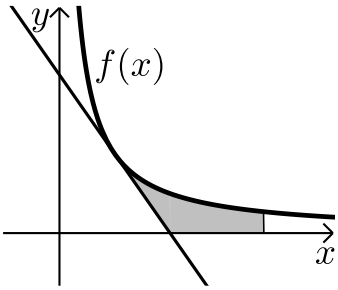

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$ היא: $y=18x-9$.

א. מצא את $a$ ו-$b$ וכתוב את הפונקציה.
מעבירים ישר המקביל לציר ה-$y$ שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק בנקודה B.
אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

**11)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.

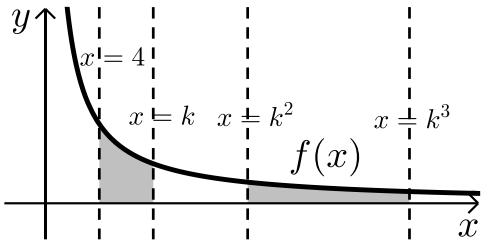



משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$ היא: $y=4-x$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק בתחום: $x>0$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה-$x$ והישר $x=e^2$.

**12)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{x}$



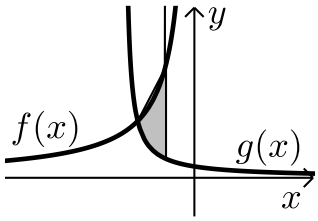

בתחום: $x>0$. מעבירים את הישרים:
$x=4$ , $x=k$ , $x=k^2$ , $x=k^3$
כמתואר $x>4$.

א. הבע באמצעות $k$ את השטחים: $S_1$ ו-$S_2$.

ב. הראה כי ההפרש: $S_2-S_1$ אינו תלוי ב-$k$ וחשב את ערכו.

ג. נתון כי השטח $S_2$ גדול פי 3 מהשטח $S_1$. מצא את $k$.

**13)** נתונות הפונקציות: $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו- $g(x)=\frac{k}{2x+5}$.



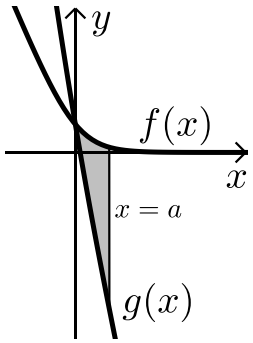

גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=0.4$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=-1$.

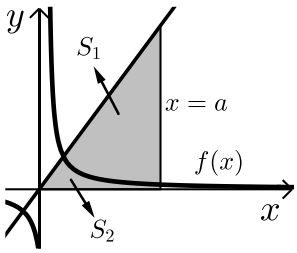
**14)** באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$
בתחום: $(x\geq 0)$.




א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$.

ב. מעבירים ישר $x=a$ , $(a>1)$ המאונך לציר ה- $x$ אשר חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח $S$ (ראה איור).
מצא את ערכו של $a$ עבורו מתקיים: $S=4$.

**15)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{3x-1}$ והישר: $y=x$.




א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.

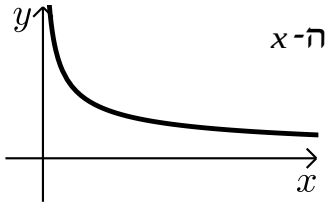
מעבירים אנך לציר ה- $x$ - $x=a$ הנמצא מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.
האנך החותך את הגרפים ויוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$ המתוארים האיור.

ב. מצא את הערך של $a$ עבורו השטח $S_2$ יהיה שווה ל- $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 7$.

ג. עבור ערך ה- $a$ שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.

**חישובי נפחים:**

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.




השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=1$ ו-$x=3$ וציר ה-$x$ מסתובב סביב ציר ה-$x$.
מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה.
אפשר להשאיר ln בתשובה.

**17)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר $x=\ln\sqrt{3}$
מסתובב סביב ציר ה-$x$. חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

**18)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=a$ ו-$x=a+3$ $(a>0)$,
וציר ה-$x$ מסתובב סביב ציר ה-$x$.
חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן הזה.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $3\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}+c$ ב. $\frac{x^2}{2}+3x-4\ln|x|+c$ ג. $\ln|x-3|+c$

**2)** א. $\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x+1|+c$ ב. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x+8\ln|x-2|+c$

ג. $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+4\ln|x+1|+c$

**3)** א. $\ln|x^2-3|+c$ ב. $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x|+c$ ג. $\ln|e^x+5|+c$

ד. $\ln|e^x+e^{-x}|+c$ ה. $\ln|\sin x|+c$

**4)** $f(x)=x^2-\ln|x-4|+3$

**5)** $f(x)=x^3+\ln|x|-x-2$

**6)** $S=$ יח"ש $\ln 4$

**7)** $S=$ יח"ש $2.17$

**8)** $S=$ יח"ש $4\ln 2-2$

**9)** א. $a=2$ , $g(x)=\frac{1}{x-2}$ , $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ב. $S=$ יח"ש $1.76$

**10)** א. $b=-4$ , $a=2$ , $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}$ ב. $x=2$

ג. $S=6+\ln 256\approx$ יח"ש $11.54$

**11)** א. $f(x)=\frac{4}{x}$ ב. $S=$ יח"ש $6-4\ln 2$

**12)** א. $S_2=2\ln k$ , $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

**13)** א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=$ יח"ש $\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$

**14)** ב. $a=2$

**15)** א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\frac{S_1}{S_2}=5.955$

**16)** $V=$ יח"נ $\pi\ln 3$

**17)** $V=$ יח"נ $\frac{\pi}{2}\ln 2$

**18)** $V=$ יח"נ $\pi\left(19\frac{1}{2}+4\ln 4\right)$

# פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

## סיכום כללי:

### אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx=\int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)}+c$ | $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx=\int x^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n}\neq -1$ .

## שאלות:

### אינטגרל של פונקצית חזקה:

**1)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

ב. $\int \left(4x-2\sqrt[4]{x}\right)dx$

ג. $\int \left(x\cdot\sqrt[5]{x}\right)dx$

ד. $\int \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

ה. $\int \frac{x+4}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

ו. $\int \frac{x^3-3x+5}{\sqrt{x}}\,dx$

ז. $\int \sqrt[3]{2x-3}\,dx$

ח. $\int \sqrt[4]{5-x}\,dx$

ט. $\int \frac{3}{\sqrt[8]{7x+12}}\,dx$

י. $\int \frac{7}{\sqrt[5]{14-2x}}\,dx$

**2)** חשב את ערכי האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^8 \left(x+\sqrt[5]{4x}\right)dx$

ב. $\int_3^{16} \left(\sqrt[4]{5x+1}\right)dx$

ג. $\int_{-10}^{5} \frac{2}{\sqrt[4]{6-x}}\,dx$

**אינטגרל מסוים:**

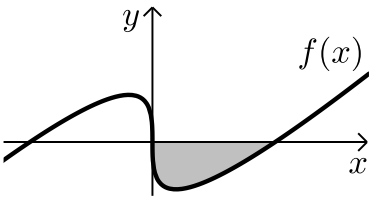
**3)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=2x-\sqrt[3]{4x}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.
מצא את הפונקציה.

**4)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\sqrt[3]{5x+7}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=4$.
מצא את הפונקציה.

**5)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{x+1}}+(x-1)^2$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-6$.
מצא את הפונקציה.

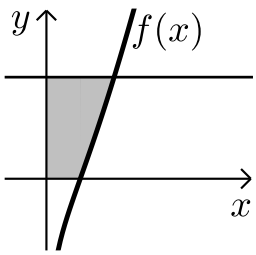
**חישובי שטחים:**

**6)** באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה: $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.



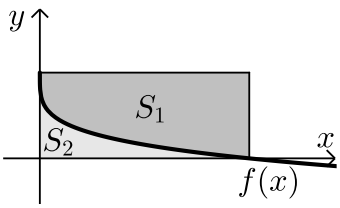

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.
ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

**7)** באיור שלפניך מצויר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.




א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.
ג. מעבירים אנך לציר ה-$y$ מהנקודה $(4,6)$.
חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים.

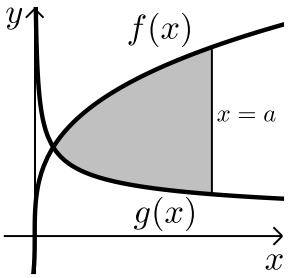
**8)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.




מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.
מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים: ב-$S_1$ ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב-$S_2$.

מצא את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

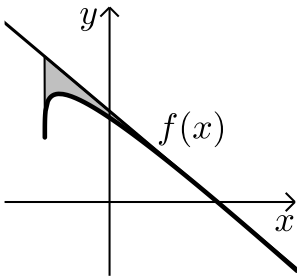
**9)** באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות הבאות: $f(x)=4\sqrt[3]{x}$ , $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.




א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום: $x>0$.

ב. מעבירים אנך לציר ה-$x$ , $x=a$ , ($a$ פרמטר).
ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך הוא: $42\frac{3}{16}$ סמ"ר.
מצא את $a$.

**10)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$ , ($a$ פרמטר).
ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=2$.




א. מצא את הפרמטר $a$ וכתוב את הפונקציה.

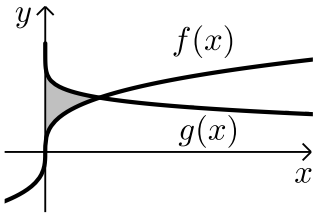
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.

ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$.

ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'.
חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

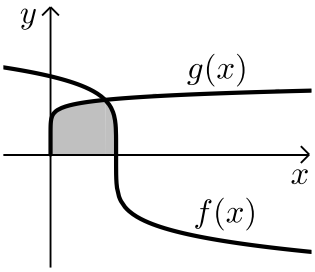
**11)** באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\sqrt[3]{x}$ , $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$ .




א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$ .

**12)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$ .

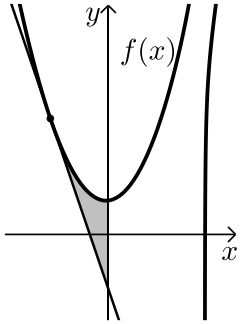



ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה: $x=1.2$ .

א. מצא את הפונקציה $f(x)$ .

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ ,
גרף הפונקציה: $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה- $x$ .

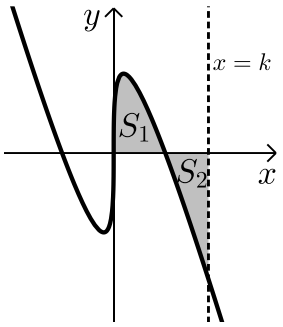
**13)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$ .




א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה
בנקודה שבה $x=-3$ .

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ ,
המשיק וציר ה- $y$ .

**14)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$ .




א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע
הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה
וציר ה- $x$ יסומן ב- $S_1$ .
מעבירים ישר $x=k$ אשר יוצר את השטח $S_2$ כמתואר.
מצא את $k$ אם ידוע כי: $S_1=S_2$ .

## תשובות סופיות:

**1)** א. $0.75\sqrt[3]{x^4}+c$ ב. $2x^2-1.6\sqrt[4]{x^5}+c$ ג. $\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}}+c$

ד. $4.5\sqrt[3]{x^2}+c$ ה. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}+\frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3}+c$ ו. $\frac{2}{7}\sqrt{x^7}-2\sqrt{x^3}+10\sqrt{x}+c$

ז. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4}+c$ ח. $-0.8\sqrt[4]{(5-x)^5}+c$ ט. $\frac{24}{49}\sqrt[8]{(7x+12)^7}+c$

י. $-\frac{35}{8}\sqrt[5]{(14-2x)^4}+c$

**2)** א. $45\frac{1}{3}$ ב. $33.76$ ג. $18\frac{2}{3}$

**3)** $f(x)=x^2-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4}+2$

**4)** $f(x)=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}-12.15$

**5)** $f(x)=12.5\sqrt[5]{(x+1)^4}+\frac{1}{3}(x-1)^3-18\frac{1}{6}$

**6)** א. $(0,0)\ ;\ (8,0)$ ב. יח"ש $S=16$

**7)** א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. יח"ש $S=18.149$

**8)** $\frac{S_1}{S_2}=4$

**9)** א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

**10)** א. $a=1$ , $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq -1.2$ ג. $(-1.2,1.2)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. יח"ש $S=0.48$

**11)** א. $(1,1)$ ב. יח"ש $S=\frac{11}{28}$

**12)** א. $f(x)=(6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. יח"ש $S=1\frac{5}{66}$

**13)** א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=4.56$ יח"ש

**14)** א. כל $x$ ב. $\left(-\frac{1}{8},0\right)$ , $\left(\frac{1}{8},0\right)$ , $(0,0)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$