

## מתמטיקה למדעים 2



## תוכן העניינים

1	פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות
14	מטריצות
42	דטרמיננטות
61	מרחבים וקטורים
89	מערכת משוואות ליניאריות
93	שדות
100	מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות
117	קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב
144	פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה
152	גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים
159	נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות
170	כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים
174	נגזרת מכוונת וגרדיאנט
179	נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלם
180	קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')
183	קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה
184	קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים
186	וקטורים גיאומטרים
196	וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב
227	העתקות ליניאריות
237	מספרים מרוכבים - הסברים ותרגולים נוספים

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 1 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות ..... 1
2. חקירת מערכת משוואות ליניאריות (עם פרמטר) ..... 6
3. שימושים של מערכת משוואות ליניאריות ..... 9
4. פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות ..... 11

## פתרון מערכת משוואות ליניאריות

### שאלות

(1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

$$\begin{array}{llll}
 2x + y = 4 & x - y = 0 & x - 4y = -7 & x + 10y = 11 \\
 x + y = 3 & 2x + y = 3 & x - y = -1 & 2x - 2y = 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \cdot \text{ד} \\
 \cdot \text{ג} \\
 \cdot \text{ב} \\
 \cdot \text{א}
 \end{array}$$

(2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{llll}
 x = 3 & x - 4y + z = -7 & x + 10y = 11 & \\
 2x + y + z = 3 & x - y = -1 & 2x - 2 = 0 & \\
 x - z = 0 & x + y + z = 5 & x + y = 3 & \\
 2x + y = 4 & & & \\
 z + t = 8 & & & 
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \cdot \text{ד} \\
 \cdot \text{ג} \\
 \cdot \text{ב} \\
 \cdot \text{א}
 \end{array}$$

בשאלות 3-5 בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll}
 \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \text{(4)} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} & \text{(3)} \\
 R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\
 R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3
 \end{array}$$

(6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

$$\begin{array}{l}
 \text{א.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
 \text{ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

בשאלות 7-15 הביאו את המטריצות הבאות לצורה מדורגת  
 (בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה מדורגת קנונית):

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (10) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (14) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$$

\* בשאלה 15 יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה  $\mathbb{C}$  ופעם מעל השדה  $\mathbb{R}$ .

בשאלות 16-27 פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= 20 \\ 3x + 6y &= 15 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 5x - 4y &= -3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 32 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 8x - 4y &= 10 \\ -6x + 3y &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 4x + 6y + 16z &= 8 \\ 3x + 2y + 17z &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -11 \\ 2x + 3y - z &= -5 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 4x - 7y &= 0 \\ 8x - 14y &= 2 \\ -16x + 28y &= 4 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 2x + y &= -1 \\ x - y &= -2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2t &= 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t &= 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t &= 8 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -9x + 6y &= -3 \\ 6x - 4y &= 2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ 2x + 8y + 12z &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

28) פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל השדה  $\mathbf{F}$ :

$$z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 = 1 + 4i$$

$$iz_1 + z_2 + (1+i)z_3 = 2 + i$$

$$(-1+3i)z_1 + (3-i)z_2 + (2+4i)z_3 = 5 - i$$

א.  $\mathbf{F} = \mathbb{R}$

ב.  $\mathbf{F} = \mathbb{C}$

## תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ א.} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} (5) \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} (3)$$

6) א.  $R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2$  ב.  $R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1$  ג.  $R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} (9)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (10)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (11)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$F=\mathbb{R}$                        $F=\mathbb{C}$

$$\phi \quad (18) \quad (x, y) = (5 - 2t, t) \quad (17) \quad (x, y) = (1, 2) \quad (16)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (20) \quad \phi \quad (19)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (22) \quad (x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (21)$$

$$(x, y) = \left( \frac{1+2t}{3}, t \right) \quad (24) \quad \phi \quad (23)$$

$$\phi \quad (26) \quad (x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (25)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (27)$$

$$(z_1, z_2, z_3) = ((-1+i)t + 1 + i, 3, t) \quad \text{ב} \quad (28) \quad (z_1, z_2, z_3) = (2, 3, -1) \quad \text{א} \quad (28)$$

$F=\mathbb{C}$                        $F=\mathbb{R}$

## חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר)

### שאלות

בשאלות 1-6 מצאו לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \quad (2) \\ kx+y+z=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 5x-7y+(k^2+3)z=k^2+1 \quad (1) \\ 3x-y+(k+3)z=3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ x+2y-z=0 \quad (4) \\ 5x+(1-k)y+k^2z=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x+2ky+z=0 \\ 3x+y+kz=2 \quad (3) \\ x+9ky+5z=-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+ky+3z=2 \\ kx-y+z=4 \quad (6) \\ 3x+y+(2+k)z=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} kx-y=1 \\ (k-2)x+ky=-2 \quad (5) \\ (k^2-1)z=9 \end{array}$$

בשאלות 7-9 מצאו לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} 2x-3y+z=1 \\ 4x+(k^2-5k)y+2z=k \quad (8) \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x+ky=3 \\ (k+3)x+2y=k^2+5 \quad (7) \\ 6x+3ky=7k^2+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x+4y-z=2 \\ kx-2y+z=-1 \\ x+8y-3z=k \quad (9) \\ 2x+6y-2z=0.5k+1 \end{array}$$

בשאלות 10-12 מצאו לאילו ערכים של  $a$  ושל  $b$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x+y-z+t=1 \\ ax+y+z+t=b \quad (12) \\ 3x+2y+at=1+a \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x+4y+az=-1 \\ x+2y+4z=-4 \\ x+2y-4z=0 \\ x+2y+6z=-2b \end{array} \quad \begin{array}{l} x+2y-4z=b \\ 7x-10y+16z=7 \quad (10) \\ 2x-ay+3z=1 \end{array}$$

$$x + az = 1$$

$$y + 2z = 2 \quad (13) \text{ נתונה מערכת המשוואות:}$$

$$bx + cy + dz = 3$$

- א. מצאו תנאי עבור  $a, b, c, d$ , כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.  
 ב. מצאו תנאי עבור  $b, c, d$ , כך שלכל  $a$ , למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

$$(14) \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

- א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.  
 ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.  
 ג. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת:  
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.  
 ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.  
 ה. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון שבו  $z = 0$ .  
 ו. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון יחיד שבו  $z = 0$ .  
 ז. מצאו עבור איזה ערך של  $k$  פתרון של המשוואה השלישית הוא  $(1, 2, 3)$ .  
 האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.  
 ח. מצאו לאיזה ערך של  $k$ , הוא הפתרון היחיד של המערכת.

$$(15) \text{ נתונות המשוואות של 3 מישורים: } \begin{cases} 3x + my = 3 \\ mx + 2y - mz = 1 \\ -x + mz = -1 \end{cases}$$

- בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של  $m$  שלוש המישורים:  
 א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).  
 ב. לא נפגשים באף נקודה.  
 ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).  
 ד. האם קיים ערך של  $m$  עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?

## תשובות סופיות

(1) 1.  $k \neq 1, k \neq -2$  .2  $k = 1$  .3  $k = -2$

(2) 1.  $k \neq 1, k \neq -2$  .2  $k = -2$  .3  $k = 1$

(3) 1.  $k \neq -1, k \neq \frac{4}{7}$  .2  $k = \frac{4}{7}$  .3  $k = -1$

(4) 1.  $k \neq 1, k \neq -0.4$  .2  $k = 1, k = -0.4$

(5) 1.  $k \neq \pm 1, k \neq -2$  .2  $k = \pm 1, k = -2$

(6) 1.  $k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2$  .3  $k = -1, k = -3, k = 2$

(7) 1.  $k = -1$  .2  $k \neq \pm 1$  .3  $k = 1$

(8) 1.  $k = 3$  .2  $k = 3$  .3  $k \neq 3$

(9) 1.  $k \neq 1$  .2  $k = 1$

(10) 1.  $a \neq 2$  .2  $a = 2, b \neq -3$  .3  $a = 2, b = -3$

(11) 1.  $a \neq -6$  או  $b \neq 2.5$  .2  $a = -6, b = 2.5$  .3

(12) 1.  $a = 2, b \neq 2$  .2  $a \neq 2$  או  $a = 2, b = 2$  .3

(13) א.  $ab + 2c \neq d$  .ב.  $b = 0, c = 1.5, d = 3$

(14) א.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix}$  .ב.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix}$

ג. 1.  $k \neq 2, k \neq -1$  .2.  $k = -1$  .3.  $k = 2$  .ד.  $(x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$

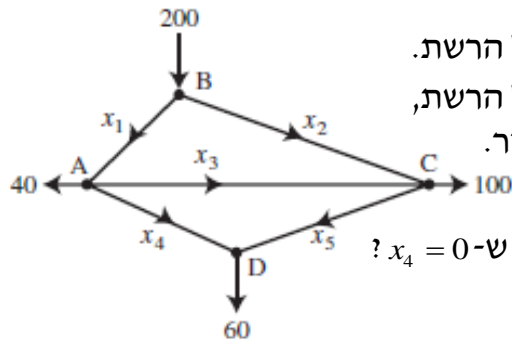
ה.  $k = \pm 2$  .ו.  $k = -2$  .ז.  $k = 2$ , לא. ח.  $k = -2$

(15) א.  $m \neq 0, -2, 3$  .ב.  $m = -2, 3$  .ג.  $m = 0$  .ד. לא.

## שימושים של מערכת משוואות ליניאריות

### שאלות

1) באיור שלהלן רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.



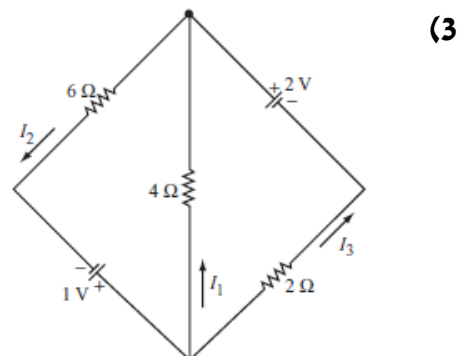
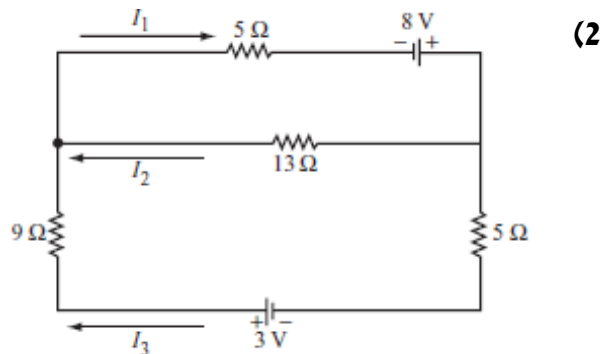
א. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

ב. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת,

אם ידוע שהכביש שהזרם שלו  $x_4$  סגור.

ג. מהו הערך המינימלי של  $x_1$ , אם ידוע ש- $x_4 = 0$ ?

בשאלות 2-3 מצאו את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):



\* בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות בנוגע מערכת משוואות ליניאריות.

## תשובות סופיות

(1) א.  $x_3$  ו-  $x_5$  חופשיים.  $x_1 = 100 + x_3 - x_5$ ,  $x_2 = 100 - x_3 + x_5$ ,  $x_4 = 60 - x_5$ .

ב.  $x_3$  חופשי.  $x_1 = 40 + x_3$ ,  $x_2 = 160 - x_3$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 60$ . ג. 40.

(2) א.  $I_1 = \frac{255}{317}$ ,  $I_2 = \frac{97}{317}$ ,  $I_3 = \frac{158}{317}$

(3)  $I_1 = -\frac{5}{22}$ ,  $I_2 = \frac{7}{22}$ ,  $I_3 = \frac{6}{11}$

## פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות

### שאלות

$$(1) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ 4x - 2y + 5z = 12 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(2) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(3) \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y - z = k \\ 2x + my + z = 3 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

- א. מצאו את ערכי  $m$ , עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.  
 ב. עבור ערך  $m$  שנמצא ב-א, מצאו את ערכי  $k$ , עבורם למערכת פתרון.  
 ג. עבור ערכי  $m, k$  שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

(4) נתון שהחמישייה  $(4t - 2s + 4, -t + s, 2, t, s)$  מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

- א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.  
 ב. החמישייה  $(4, 0, 2, 0, 0)$ , היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.  
 ג. החמישייה  $(4, 0, 2, 1, 1)$ , היא פתרון של המערכת הנתונה.  
 ד. לכל  $a$  ממשי, החמישייה  $(4a, 0, 2a, 0, 0)$  אינה פתרון של המערכת הנתונה.  
 ה. החמישייה  $(4t - 2s, -t + s, 0, t, s)$ , היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.  
 ו. החמישייה  $(0, 1, 0, 1, 2)$ , היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.  
 ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

$$(5) \quad \begin{cases} 3x + my = 0 \\ mx + 2y - mz = 0 \\ -x + mz = 0 \end{cases}$$

יהי  $W$  אוסף הפתרונות של המערכת.  
 עבור אילו ערכים של הקבוע  $m$  (אם בכלל)  $W$  הוא:  
 א. נקודה (מצאו נקודה זו).  
 ב. ישר (מצאו ישר זה).  
 ג. מישור (מצאו מישור זה).

$$(6) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$$

נסמן ב- $A'$  את הצורה המדורגת של  $A$ .  
 ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.  
 מצאו את  $A$ .

## תשובות סופיות

- (1) פתרון כללי של המערכת  $(4 - \frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t + 2, t)$ .
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא  $(-\frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t, t)$ .
- (2) למערכת פתרון יחיד  $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ .
- למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד  $(0, 0, 0)$ .
- (3) א.  $m = -3$     ב.  $k = -2$     ג. פתרון כללי של המערכת  $(x, y, z) = (t, t - 1, t)$ .
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא  $(t, t, t)$ .
- (4) א. הטענה לא נכונה.    ב. הטענה נכונה.    ג. הטענה לא נכונה.  
ד. הטענה לא נכונה.    ה. הטענה נכונה.    ו. הטענה לא נכונה.  
ז. הטענה לא נכונה.
- (5) א.  $m \neq 0, -2, 3$ . הנקודה היא  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .
- ב. אם  $m = 0$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(0, 0, 1)$  אם  $m = 2$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(2, -1, 1)$ ,
- אם  $m = 3$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(3, -3, 1)$ .
- ג. אין ערכים של  $m$  עבורם נקבל מישור.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{pmatrix} \quad (6)$$

## מתמטיקה למדעים 2

### פרק 2 - מטריצות

#### תוכן העניינים

14	1. מטריצות
19	2. המטריצה ההופכית
26	3. מטריצה אלמנטרית
28	4. פירוק LU
29	5. בחזרה למערכת משוואות ליניארית
36	6. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות
37	7. דרגה של מטריצה
41	8. שיטת הריבועים הפחותים - רגרסיה ליניארית

## מטריצות

## שאלות

1 נתונות המטריצות הבאות:  $A_{4 \times 6}$ ,  $B_{4 \times 6}$ ,  $C_{6 \times 2}$ ,  $D_{4 \times 2}$ ,  $E_{6 \times 4}$ .  
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.  
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

- א.  $A+B$       ב.  $AB$       ג.  $AC-D$       ד.  $AE-B$   
ה.  $B+AB$       ו.  $E(B+A)$       ז.  $(E+A^T)D$       ח.  $E^T B$   
ט.  $E(AC)$       י.  $E(B-A)$

2 מצאו את  $x, y, z$ , אם ידוע כי:  $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3 א.  $E+D$       ב.  $E-D+I_3$

ג.  $5C$       ד.  $2D+4EI_3$

4  $2tr(D^2 - 2E)$

5 א.  $4C^T + A$       ב.  $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

6  $I_2 BC$

7  $tr(C^T C)$

8  $DABC$

- (9) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .  
נתון כי  $(A-I)(A+I) = 0$ .  
הוכיחו או הפריכו:  $A = I$  או  $A = -I$ .

(10) אפיינו את כל המטריצות  $A_{2 \times 2}$  שמקימות  $A^2 = -4I$ .

(11) הוכיחו כי לכל  $n$  טבעי מתקיים  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

- (12) שתי מטריצות  $A$  ו- $B$  יקראו מתחלפות אם  $AB = BA$ .  
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות  $A$  ו- $B$  מתחלפות עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז המטריצות

$A$  ו- $B$  מתחלפות.

ב. אם המטריצה  $A$  מתחלפת עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז  $A^T = -A$ .

- (13) תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .  
נתון כי  $AA^T = 0$ . הוכיחו כי  $A = 0$ .

האם הטענה נשארת נכונה אם איברי  $A$  מרוכבים?  
אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

- (14) יהיו  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות המקיימות  $AB = BA$  (מטריצות מתחלפות).  
א. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $AB^k = B^k A$ .  
ב. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $(AB)^k = A^k B^k$ .

(15) לפי נוסחת הבינום של ניוטון  $(A+B)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$ , כאשר

$$A, B \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$$

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות מסדר  $\ell$ ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות  $A$  ו- $B$ , על מנת שנוסחת הבינום תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של  $(A+I)^n$  ו- $(A-I)^n$ , כאשר  $A$  ו- $I$  ריבועיות מסדר  $\ell$ .

**16** א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.  
 ב. נניח ש- $A$  ו- $B$  מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.  
 הוכיחו שגם המטריצות  $AB$  ו- $A+B$  נילפוטנטיות.

**17** תהי  $A_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $a_{ij} = \min\{i, j\}$ .  
 תהי  $B_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = n + 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .

א. כתבו את המטריצות  $A$  ו- $B$  בצורה מפורשת.  
 ב. המטריצה  $C$  מקיימת  $C = A \cdot B$ .  
 חשבו את  $C$  ומצאו נוסחה עבור  $c_{ij}$  לכל  $1 \leq i, j \leq n$ .

**18** מצאו מטריצה ממשית  $A$ , כך שיתקיים  $A - \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \right)^T = A - A^T$ .

## תשובות סופיות

- (1) א.  $4 \times 6$     ב. לא.    ג.  $4 \times 2$     ד. לא.    ה. לא. ו.  $6 \times 6$   
 ז.  $6 \times 2$     ח. לא

(2)  $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א.  $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$     ב.  $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$     ג.  $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד.  $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א.  $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$     ב.  $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6)  $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8)  $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(9) שאלת הוכחה.

(10)  $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) א+ב. שאלת הוכחה.

$$(A+I)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1} + \binom{n}{2}A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}A^1 + \binom{n}{n}I$$

$$(A-I)^n = \binom{n}{0}A^n - \binom{n}{1}A^{n-1} + \binom{n}{2}A^{n-2} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n-1}A^1 + (-1)^n \binom{n}{n}I$$

(16) שאלת הוכחה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א. (17)}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \dots & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & \dots & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } c_{ij} = \min\{i, n+1-j\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(18)}$$

## המטריצה ההופכית

## שאלות

בשאלות 1-9 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה. בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(1)} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(4)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(7)} \end{array}$$

(10) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$  הפיכה?

(11) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  איננה הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר  $n$ , וחלצו את  $X$ :

(12) א.  $AXC = D$  ב.  $A^{-1}XC = A^{-1}DC$  ג.  $P^{-1}X^T P = A$

(13) א.  $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$  ב.  $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

(14)  $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

(15) נתון  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ .

חשבו את  $X$ , אם ידוע כי  $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$ .

$$(16) \text{ נתון } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ , חשבו את } Y \text{ , אם ידוע כי } BYB^T = B^{-1} + B$$

$$(17) \text{ נתון } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{חשבו את } B \text{ , אם נתון בנוסף כי : } 5A^T B(I+2A)^{-2} = (7A)^{-2}$$

(18) ענו על הסעיפים הבאים :

א. נתון :  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^2 - 5A - 2I = 0$

הוכיחו כי  $A$  הפיכה ובטאו את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

ב. נתון :  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $(A-3I)(A+2I) = 0$

הוכיחו כי  $A$  הפיכה ובטאו את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

$$(19) \text{ נתון כי } p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48 \text{ , } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את  $p(A)$ .

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- $A$  הפיכה, ובטאו את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$  ו- $I$  בלבד.

(20) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^4 = 0$

א. הוכיחו כי  $A$  לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה  $I - A$  הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

$$(21) \text{ נתון כי } \begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$$

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה  $D$ , כך ש- $D^{-1}AD = C$

\* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.  
 \*\* לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך :  
 הוכיחו : אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $B$  דומה ל- $C$ , אז  $A$  דומה ל- $C$ .  
 (כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

הערה : בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

**(22)** תהיינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר  $n \geq 2$ . הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א.  $AB = BA$ .  
 ב. אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $B$  הפיכה.  
 ג. אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $A$  הפיכה.  
 ד. אם  $(AB)^{100} = I$ , אז בהכרח  $(BA)^{100} = I$ .  
 ה. אם  $(AB)^{100} = 0$ , אז בהכרח  $(BA)^{101} = 0$ .

**(23)** תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , עבורן  $A^2 + AB = I$ .

- א. הוכיחו ש- $AB = BA$ .  
 ב. אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$  היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם  $B$  היא מטריצת האפס.

**(24)** תהיינה  $A, B$  מטריצות כלשהן.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. אם  $AB = I$  אז  $B = A^{-1}$ .  
 ב. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה ריבועית, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.  
 ג. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה הפיכה, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.  
 ד. המכפלה  $AB$  לא הפיכה.  
 ה. אם  $A$  מטריצה ריבועית והמכפלה  $AB$  מוגדרת, אזי  $B$  מטריצה ריבועית.

**(25)** מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא אידמפוטנטית אם  $A^2 = A$ . הוכיחו:

- א. למעט המקרה בו  $A = I$ , מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.  
 ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.  
 ג. אם  $A$  מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2, אז  $\text{tr}(A) = 1$  או ש- $A$  מטריצה אלכסונית.  
 ד.  $A$  אידמפוטנטית  $\Leftrightarrow A^n = A$ , לכל  $n$  טבעי.

$$(26) \text{ נתונה } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

מצאו תנאי על הקבועים  $a, b, c, d$  כך ש- $M$  תהיה הפיכה ומצאו את  $M^{-1}$  במקרה זה.

$$(27) \text{ נתון כי } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \text{ הפיכה.}$$

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \alpha_{13}$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \alpha_{23} \quad \text{א.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y = \alpha_{33}$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + w = 0$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z - 4w = 1 \quad \text{ב.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + 3w = -4$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z = 3$$

$$\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z = 1$$

(28) תהינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ .

הוכיחו:

א. אם  $BA = I - A^2$  וגם  $B^2 = -AB$ , אז  $B = 0$ .

ב. אם  $A^2 = 2I$ , אז  $A + I$  ו- $A - I$  הפיכות.

(29) תהינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , כך ש- $B^2A = -2B^3$  וגם

$$(2) \quad B^3 + AB^2 = 3I$$

הוכיחו ש- $A$  ו- $B$  הפיכות, ובטאו את  $A^{-1}$  ו- $B^{-1}$  באמצעות  $B$ .

(30) תהינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , כך ש- $BA + 2I = B$ .

א. הוכיחו ש- $B$  הפיכה.

ב. ידוע ש- $B$  סימטרית.

הוכיחו כי  $A$  סימטרית.

(31) תהי  $A$  מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים  $n$  טבעי כך ש- $A^n = 0$ ).

א. הוכיחו כי  $A$  לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי  $I - A$  ו- $I + A$  הפיכות.

ג. נגדיר:  $e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$

הוכיחו: אם  $e^A = I$  אז  $A = 0$ .

**(32)** נתונות שתי מטריצות,  $A$  ו- $B$ , מסדר  $n$ .

סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

- א. ל- $A$  ול- $A^T$  יש אותה צורה מדורגת קנונית.
- ב. אם  $A, B$  מדורגות קנונית, אז  $A+B$  מדורגת קנונית.
- ג. אם  $A, B$  מדורגות קנונית, אז  $A-B$  מדורגת קנונית.
- ד. אם בצורה המדורגת קנונית של  $B$  יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של  $AB$  יש שורת אפסים.

## תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \text{ג.} \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1}A \quad \text{ג.} \quad A \quad \text{ב.} \quad CD^2 - A \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad \text{ג.} \quad A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ג.} \quad B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ב.} \quad (19)$$

$$f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ג.} \quad (I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ב.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (21)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (22)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (23)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (24)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (25)$$

$$((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)) \quad M^{-1} = \frac{1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)} M^T \quad (26)$$

- 27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.  
28) שאלת הוכחה.  
29) שאלת הוכחה.  
30) שאלת הוכחה.  
31) שאלת הוכחה.  
32) ד

## מטריצה אלמנטרית

### שאלות

(1) רשמו את המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(2) רשמו את המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$  כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(3) הוכיחו או הפריכו כל אחד מסעיפים א-ד.  
נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית, ו- $B$  מתקבלת מ- $A$  ע"י סדרת פעולות דירוג.  
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א.  $A^2$  מ- $B^2$ .

ב.  $BA$  מ- $A^2$ .

ג.  $BA$  מ- $B^2$ .

ד.  $AB$  מ- $B^2$ .

(4) תהי  $A \in M_3[R]$ , כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.

נגדיר את המטריצות האלמנטריות  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה  $E_2 E_1 A$ ?

**פתרו בשתי דרכים:**

**דרך א'** – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.

**דרך ב'** – בעזרת כפל מטריצות.

## תשובות סופיות

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{e_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \quad (1)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \bullet \quad (2)$$

$$\bullet \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_5} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_6} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_7} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{e_8} = A$$

(3) שאלת הוכחה.

(4) -3

## פירוק LU

## שאלות

$$(1) \text{ רשמו את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ רשמו את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{ רשמו את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

## תשובות סופיות

$$(1) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_U$$

$$(2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_U$$

$$(3) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$$

## בחזרה למערכת משוואות ליניארית

### שאלות

1) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות  $A$ ,  $\underline{x}$  ו- $\underline{b}$ , המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה  $A\underline{x} = \underline{b}$ :

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4 \quad \text{ב.}$$

$$y + z + t = 1$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x + y - z = 3$$

$$\text{א. } x + 2y - 4z = 5$$

$$6x + 4y + z = 2$$

בשאלות 2-6 נתון כי  $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$   $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

בטאו כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות ליניאריות:

$$A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (4)$$

$$A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (3)$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad (2)$$

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (6)$$

$$A\underline{x} = \underline{x} \quad (5)$$

$$2x - y + z = 3$$

7) פתרו את מערכת המשוואות  $3x - 2y + 2z = 5$ ,

$$5x - 3y + 4z = 11$$

בעזרת המטריצה ההפוכה.

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

8) פתרו את מערכת המשוואות

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

בעזרת המטריצה ההפוכה.

9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$$(x, y, z) = (-1, 4, -2), \quad (x, y, z) = (2, -8, 4)$$

הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

**10** למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים :  
 $(x, y, z) = (2, 3, 4)$  ,  $(x, y, z) = (-1, 4, -2)$   
 מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(11) \text{ נתונה המערכת } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$ , למערכת :  
 א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

\* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

$$(12) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

ידוע כי  $rank(A) = 3$ , וידוע כי למערכת  $Ax = b$  יש פתרון.  
 מצאו את הקבועים  $k, m$ .

**13** נתונה מטריצה ריבועית  $A$ , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה 0.  
 הוכיחו ש- $A$  מטריצה לא הפיכה.

**14** נתונה מטריצה ריבועית הפיכה  $A$ , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה  $k$ .  
 הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.  
 בטאו קבוע זה בעזרת  $k$ .

$$(15) \text{ מטריצה } A \text{ מקיימת } A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

הוכיחו כי הווקטור  $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$  הוא פתרון של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

- 16** יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ . עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.
- א. אם למערכת  $(AB)x = 0$  קיימים שני פתרונות שונים, אז בהכרח  $A$  לא הפיכה.
- ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת  $(AB)x = 0$ , אז למערכת  $(BA)x = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.
- ג. אם למערכת  $Ax = 0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$ .
- ד. אם למערכת  $(A^t A)x = 0$  קיים פתרון יחיד, אז  $A$  לא הפיכה.
- ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית  $(AB)x = 0$ , אז למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.

- 17** נתונה מערכת משוואות מעל  $\mathbb{R}$ :  $Ax = d$  ( $d \neq 0$ ). נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת  $\text{rank}(A) = 2$ . ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
- $$u = (x_1, x_2, 6, 7), \quad v = (y_1, y_2, 1, 2), \quad w = (z_1, z_2, 4, 3)$$
- מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
- א.  $x = au + bv + cw$
- ב.  $x = (a + b + 1)u - av - bw$
- ג.  $x = au + bv + w$
- ד.  $x = (a - b)u + (b - c)v + (c - a)w$
- ה.  $x = (a + b)u - (av + bw + u)$ , כאשר  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

- הערה:** בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים: בהינתן מערכת הומוגנית  $Ax = 0$ :
- אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
  - מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות. בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

- 18** נתונה מערכת  $A_{m \times n} \cdot x = b$ . הוכיחו או הפריכו:
- א. אם  $u$  וגם  $\lambda u$  ( $\lambda \neq 1$ ) פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.
- ב. אם  $u$  ו- $v$  וגם  $\alpha u + \beta v$  ( $\alpha, \beta \neq 0$ ) פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.
- ג. אם הווקטורים  $(1, 2, \dots, n)$ ,  $(n, \dots, 2, 1)$  פותרים את המערכת והווקטור  $(n+1, \dots, n+1)$  לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.

**19** תהי  $A$  מטריצה כך שלמערכת  $Ax=0$  פתרון יחיד. הוכיחו או הפריכו:

- $A$  הפיכה.
- למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A^T$  פתרון יחיד.
- לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A$  פתרון יחיד.

**20** תהי  $A_{m \times n}$  מטריצה ממשית כך ש- $m < n$ . הוכיחו או הפריכו:

- ממד מרחב הפתרונות של המערכת  $Ax=0$  הוא  $n-m$ .
- למערכת  $(A^T A)x=0$  יש אינסוף פתרונות.
- ייתכן מצב בו למערכת  $(A^T A)x=0$  יש פתרון יחיד.
- ייתכן מצב בו למערכת  $(AA^T)x=0$  יש פתרון יחיד.

**21** תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ , כך שלכל מטריצה ריבועית  $B \neq 0$  מסדר  $n$ , מתקיים  $AB \neq 0$ . הוכיחו ש- $\text{rank}(A) = n$ .

**22** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $m \times n$ .

לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.

- אם למערכת  $Ax=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ , אז בהכרח למערכת  $A^T x=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ .
- עבור  $m=n$ , אם למערכת  $Ax=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ , אז בהכרח למערכת  $A^T x=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ .
- אם למערכת ההומוגנית  $Ax=0$  יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח  $m < n$ .
- ייתכן ש- $A^T A = I_n$  וגם  $AA^T = I_m$ .
- אם  $m \neq n$  ואם למערכת  $Ax=0$  יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית  $Ax=b$  עם יותר מפתרון אחד.

**23** תהא  $A \in M_{4 \times 4}(R)$  ויהי  $b \in R^4$ .

ידוע כי  $u$  ו- $v$  פתרונות של המערכת הלא הומוגנית  $Ax=b$ .

- נגדיר  $w = \alpha u + \beta v$ .
- הוכיחו כי אם גם  $w$  פתרון של המערכת  $Ax=b$ , אז  $\alpha + \beta = 1$ .
- נניח בנוסף כי  $w = -u + 2v$  הוא פתרון של המערכת  $A^2 x = b$ .
- הוכיחו כי  $A-I$  לא הפיכה.

$$(24) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 3 & -8 & -8 \end{pmatrix}, \text{ ויהי } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

א. הראו כי  $v = (2, -1, 1, -1, 1)^T$  הוא פתרון של המערכת  $Ax = b$ .

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

ג. מצאו  $C, D \in M_{5 \times 2}(\mathbb{R})$ , כך ש- $C \neq D$  ו- $AC = AD = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ .

## תשובות סופיות

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{א. (1)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$4x - 2y + 4z = 1$$

$$x - y + z = 2 \quad \text{(2)}$$

$$x - 6y + 3z = 3$$

$$-2y + 4z = 1$$

$$x - 5y + z = 2 \quad \text{(3)}$$

$$x - 6y - z = 3$$

$$(4+k)x - 2y + 4z = 1$$

$$x + (k-1)y + z = 2 \quad \text{(4)}$$

$$x - 6y + (3+k)z = 3$$

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{(5)}$$

$$x - 6y + 2z = 0$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-2x - 3y - 6z = 6 \quad \text{(6)}$$

$$4x + y + z = 9$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad \text{(7)}$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad \text{(8)}$$

(9) שאלת הוכחה.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{(10)}$$

(11) אם  $k \neq 2$  או  $k \neq -1$ , אז יש פתרון אחד.

אם  $k = 2$ , אז יש אינסוף פתרונות.

אם  $k = -1$ , אז אין פתרונות.

$$m = 5, k = 9 \quad \text{(12)}$$

(13) שאלת הוכחה.

14) סכום האיברים בכל שורה של  $A^{-1}$  הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$ .

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) א. שאלת הוכחה. ב.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t, -2s, s, -t, -t, t)$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (t=s=0) \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (t=s=1) \text{ ג.}$$

## מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

### שאלות

מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא סימטרית אם  $A^T = A$ , ואנטי-סימטרית אם  $A^T = -A$ .

(1) ידוע ש- $A$  מטריצה ריבועית.  
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):

1.  $AA^T$  סימטרית.
2.  $A + A^T$  סימטרית.
3.  $A - A^T$  אנטי-סימטרית.

(2) ידוע ש- $A$  ו- $B$  אנטי-סימטריות מאותו סדר.  
מי מבין הבאים נכון:

1.  $BABABA$  אנטי-סימטרית.
2.  $A^2 - B^2$  סימטרית.
3.  $A^2 + B$  סימטרית.

(3) ידוע ש- $A$  ו- $B$  סימטריות מאותו סדר ונתון כי  $AB = -BA$ .  
מי מבין הבאים נכון:

1.  $AB^3$  אנטי-סימטרית.
2.  $AB^2$  סימטרית.
3.  $(A - B)^2$  סימטרית.

(4) ידוע ש- $A$  סימטרית ו- $B$  אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי  $AB = BA$ .  
הוכיחו:

1.  $AB$  אנטי-סימטרית.
2.  $AB + B$  אנטי-סימטרית.

(5) נתון:  $A, B, AB$  סימטריות מאותו סדר.  
הוכיחו כי  $A^4 B^4 = B^4 A^4$ .

### תשובות סופיות

- (1) 1,2,3
- (2) 2
- (3) 1,2,3
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.

## דרגה של מטריצה

## שאלות

(1) אמתו את המשפט  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$ ,

$$. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{על המטריצה}$$

(2) אמתו את המשפט  $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$ ,

$$. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{עבור}$$

$$. A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix} \quad \text{(3) נתונה המטריצה}$$

חשבו את  $\text{rank}(A)$ .

(4) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n > 1$ . הוכיחו או הפריכו:

א.  $\text{rank}(A) = n-1 \Rightarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

ב.  $\text{rank}(A) = n-1 \Leftarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

(5) נתון כי  $A, B$  מטריצות ריבועיות מסדר  $n > 1$ . הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $\text{rank}(A) = \text{rank}(AB)$ , אז בהכרח  $B$  הפיכה.

ב. ייתכן ש- $\text{rank}(A) < \text{rank}(AB)$ .

ג. אם  $\text{rank}(A) > \text{rank}(B)$ , אז  $\text{rank}(AB) > \text{rank}(B)$ .

$$(6) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את  $\text{rank}(A)$ ,  $\text{rank}(B)$ .

ב. חשבו את  $\text{rank}(B^{10}A^{14})$ .

(7) נניח כי  $A, B$  שתי מטריצות ריבועיות מסדר  $n$ .

הוכיחו כי  $\text{rank} \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \leq 2\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ .

(8) תהי  $A_{8 \times 7}$  מטריצה, כך ש- $\text{rank}(A) = 3$ .

הוכיחו כי קיימות 3 מטריצות  $A_1, A_2, A_3$ , שלכל אחת מהן דרגה 1,

כך ש- $A = A_1 + A_2 + A_3$ .

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר  $m \times n$  שדרגתה  $k$ .

(9) נתונות שתי מטריצות  $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$ .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א.  $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$ .

ב.  $\text{rank}(AB) \neq \text{rank}(BA)$ .

ג. המטריצה  $BA$  לא הפיכה.

(10) תהי  $A$  מטריצה מסדר  $m \times n$ , ותהי  $B$  מטריצה מסדר  $n \times m$ . הוכיחו:

א. אם  $AB = I_m$  אז  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = m$ .

ב. אם  $BA = I_n$  אז  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$ .

ג. אם  $AB = I_m$  וגם  $BA = I_n$  אז בהכרח  $m = n$ .

ד. אם  $A$  לא ריבועית אז לא ייתכן שגם  $AA^T = I_m$  וגם  $A^T A = I_n$ .

(11) בשדה  $F$  נתונים  $a_1, a_2, \dots, a_m$  איברים, שלא כולם אפס, ו- $b_1, b_2, \dots, b_n$  איברים, שלא כולם אפס.

קבעו מהי דרגתה של המטריצה  $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ , כאשר  $m_{ij} = a_i b_j$ .

**12** תהי  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $a_{ij} = b_i^2 - b_j^2$ ,

כאשר  $b_1, b_2, \dots, b_n$  מספרים ממשיים שונים ו-  $n \geq 3$ .

א. הוכיחו שהמטריצה לא הפיכה.

ב. האם הטענה תישאר נכונה אם נשנה את הנתון ל-  $n \geq 2$ ?

הוכיחו או הפריכו.

**13** תהיינה  $A, B$  מטריצות מעל  $\mathbb{R}$ , מסדר  $m \times n$ , כך שלכל  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{x} \neq \underline{0}$ ,

מתקיים  $A\underline{x} \neq B\underline{x}$ .

מה הדרגה של המטריצה  $A - B$ ?

**14** תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ .

א. נתון שכל פתרון של המערכת  $(AB)\underline{x} = \underline{0}$ , הוא פתרון של המערכת

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

הוכיחו שהדרגה של  $AB$  שווה לדרגה של  $A$ .

ב. הוכיחו: אם  $A$  הפיכה, אז  $\rho(AB) = \rho(A)$ .

ג. הוכיחו שאם  $\rho(AB) < \rho(A)$ , אז  $A$  לא הפיכה.

**15** תהי  $A$  מטריצה מסדר  $n \times n$ .

א. הוכיחו כי  $P(A) \subseteq P(A^2)$ .

ב. נתון כי  $\rho(A^2) < \rho(A)$ .

הוכיחו שקיים  $v \in \mathbb{R}^n$ , כך ש-  $Av \neq 0$  וגם  $A^2v = 0$ .

### תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) אם  $k=1$ , אז  $\text{rank}(A)=2$ . אם  $k=4, k=10$ , אז  $\text{rank}(A)=3$ .
- אם  $\text{rank}(A)=4$   $k \neq 1, 4, 10$ .
- (4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
- (5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה. ג. הטענה אינה נכונה.
- (6) א.  $\text{rank}(A)=2$ ,  $\text{rank}(B)=3$ . ב.  $\text{rank}(B^{10}A^{14})=2$ .
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) 1
- (12) שאלת הוכחה.
- (13)  $n$
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.

## שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה לינארית

## שאלות

- (1) נתונות חמש נקודות במישור:  $(-4, -1)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(4, 5)$ ,  $(5, 6)$ . מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.
- (2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.



$price(x)$	$Demand / sales(y)$
49\$	124
69\$	95
89\$	71
99\$	45
109\$	18

- א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.
- ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54\$.
- ג. מה משמעות השיפוע של הישר?
- ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ"ל.

## תשובות סופיות

- (1)  $f(x) = 0.8x + 2$
- (2) א.  $f(x) = -1.7x + 211$  ב. 119.2 יחידות.
- ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1\$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש.
- ד. 14.41

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 3 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג. 42
2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n. 47
3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות. 52
4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות. 54
5. מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה. 55
6. שימושי הדטרמיננטה. 60

## חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

### שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

בשאלות 6-7 חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

$$(6) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ ב.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ א. (7)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ ג.}$$

בשאלות 8-10 חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix} \text{ (8)}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} \text{ (9)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix} \text{ (10)}$$

בשאלות 11-12 הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix} \text{ ג.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \text{ ב.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ א. (11)}$$

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \cdot \text{ב.} \quad \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{א. (12)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \text{ד.} \quad \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \quad \text{בשאלות 13-15 נתון כי:}$$

חשבו:

$$\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{(16) הוכיחו כי:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \quad \text{(17) הוכיחו כי:}$$

$$\text{det} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(18) חשבו:}$$

(19) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות  $A$  ו- $B$  מסדר  $n$  הנבדלות ביניהן רק בשורה ה- $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ).
- תהי  $C$  מטריצה הזוהה למטריצות  $A$  ו- $B$  אך נבדלת מהן בשורה ה- $k$ , שם היא שווה לסכום השורה ה- $k$  של  $A$  והשורה ה- $k$  של  $B$ .
- הוכיחו כי  $|A| + |B| = |C|$ .

$$\text{ב. חשבו:} \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

## תשובות סופיות

- (1) א.  $ad - bc$     ב. 29    ג. -1
- (2) א. -1    ב. -3    ג. -14
- (3) א. 24    ב. 234    ג. -300
- (4) 9
- (5) 6
- (6) א. 0    ב. 0    ג. 3
- (7) א. 24    ב. 44    ג. 104
- (8) 120
- (9) 114
- (10) 6
- (11) פתרונות באתר: [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)
- (12) פתרונות באתר.
- (13) -8
- (14) 16
- (15) 9
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18)  $(k-1)^4(k+4)$
- (19) א. שאלת הוכחה.    ב. 0

חישוב דטרמיננטה כללית מסדר  $n$ 

## שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j < n \\ a & 1 \leq i \leq n, j = n \\ a & 1 \leq j \leq n, i = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים  $a_0, \dots, a_{n-1}$ , המטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{הפיכה: ?}$$

(2) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} j & i = j + 1 \\ n & i = 1, j = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

האם קיים ערך של  $n$  עבורו דרגת המטריצה קטנה מ- $n$ ?(3) חשבו את  $|A|$  כאשר המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases}$$

(4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה ע"י:  $a_{ij} = |i - j|$ .(5) חשבו את  $|A|$  כאשר המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i \neq j \end{cases}$$

(6) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר  $n$ , כאשר  $n \geq 1$ :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

(7) חשבו את  $|A|$  כאשר המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \min\{i, j\} \quad \text{א.}$$

$$a_{ij} = \max\{i, j\} \quad \text{ב.}$$

(8) המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{3(i-1), 3(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את  $|A|$ .

(9) המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{k(i-1), k(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את  $|A|$  ומצאו עבור אילו ערכים של  $k$  המטריצה הפיכה.

(10) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר  $n$ , כאשר  $n \geq 3$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & 2 \leq i \leq n, j = 1 \\ 1 & 2 \leq j \leq n, i = 1 \\ x & \text{else} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

(11) תהי  $A = (a_{ij})$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i = j \end{cases}$$

חשבו את  $D_n = |A_{n \times n}|$ .

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$(12) \text{ המטריצה } A = (a_{ij}) \text{ נתונה על ידי: } a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i = j+1 \\ c & j = i+1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב  $D_n = |A_{n \times n}|$ .

ב. הניחו כי  $a=3, b=1, c=2$  וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.

2. את הדטרמיננטה עבור  $n=20$ .

(13) נתונה מטריצה  $A_{n \times n}$ .

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:  
מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה  
הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.

בסוף התהליך מקבלים מטריצה  $B$ .

חשבו את  $|B|$  במונחי  $|A|$ .

$$(14) \text{ חשבו את } D_n = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(15) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & & 1 \\ & \ddots & 2 \\ n & & 2 \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} i & i+j = n+1 \\ 2 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(16) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & b \\ b & & a \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} b & i+j = n+1 \\ a & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

(17) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה של  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \min\{i, n-j+1\}$$

$$\begin{vmatrix}
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1
 \end{vmatrix}$$

(18) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר  $n$ , כאשר  $n \geq 2$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } |A| = a - (n-1)a^2 \quad \text{ב. } A \text{ הפיכה אם ורק אם } a_0 \neq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } (-1)^{n+1} n! \quad \text{ב. לא.}$$

$$(3) \quad |A| = n!$$

$$(4) \quad |A| = (-1)^{n+1} (n-1) 2^{n-2}$$

$$(5) \quad |A| = (a-b)^{n-2} [a + (n-1)b]$$

$$(6) \quad (-3)^{n-1} (2n-3)n!$$

$$(7) \quad \text{א. } |A| = 1 \quad \text{ב. } |A| = (-1)^{n+1} n$$

$$(8) \quad |A| = 2 \cdot 3^{n-2}$$

$$(9) \quad |A| = (k-1) \cdot k^{n-2} \text{ והמטריצה הפיכה אם ורק אם } k \neq 1 \text{ וגם } k = 0$$

$$(10) \quad |A| = (-1)^{n-1} x^{n-2} (n-1)$$

$$(11) \quad D_n = 1 + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$(12) \quad \text{א. } D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-1}, D_2 = a^2 - bc, D_3 = a^3 - 2abc$$

$$\text{ב.1. } D_n = 2^{n+1} - 1 \quad \text{ב.2. } D_{20} = 2^{21} - 1$$

$$(13) \quad |B| = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} |A| & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} |A| & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(14) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(15) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+2}{2}} 2(n-2)! & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2(n-2)! & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(16) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(17) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \\ (-1)^{\frac{n-2}{2} + n-1} & n \text{ even} \end{cases}$$

$$(18) \quad D_n = \begin{cases} a_n (-1)^{\frac{n}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ even} \\ a_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ odd} \end{cases}$$

## חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

### שאלות

בשאלות 1-2 נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות מסדר 3,  $|B|=2$ ,  $|A|=4$ .  
 חשבו:

$$(1) \quad \text{א. } |ABA^{-1}B^T| \quad \text{ב. } |4A^2B^3|$$

$$(2) \quad \text{א. } |-A^{-2}B^T A^3| \quad \text{ב. } |-2A^2 A^T \text{adj}B|$$

$$(3) \quad \text{נתון: } (PQ)^{-1}APQ = B. \text{ הוכיחו: } |A|=|B|.$$

$$(4) \quad \text{נתון: } A \text{ ו-} B \text{ מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-} 2AB+3I=0, |A|=2. \text{ חשבו את } |B|.$$

$$(5) \quad \text{נתון: } A \text{ ו-} B \text{ מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-} B^2-2A^{-1}=0, A+3B=0. \text{ חשבו את } |A|, |B|.$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו: 1. } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \text{2. } |\text{adj}(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}.$$

$$(7) \quad \text{נתון כי } A \text{ מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי. הוכיחו ש-} |A|=0.$$

$$(8) \quad \text{נתון: } A \text{ מטריצה מסדר } n, |A|=128, 2AB=B^T A^2, \text{ ו-} B \text{ הפיכה. מצאו את } n.$$

$$(9) \quad \text{נתון: } \det(A_{n \times n}) = 2, \det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{חשבו: } \det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|.$$

$$(10) \text{ נתון } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי  $\det(M) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ .

### תשובות סופיות

(1) א. 4      ב.  $2^{13}$

(2) א. -8      ב.  $-2^{11}$

(3) שאלת הוכחה.

(4)  $\frac{81}{32}$

(5)  $|A|=18, |B|=-2/3$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) 7

(9)  $4^n$

(10) שאלת הוכחה.

## כלל קרמר

## שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{l} x+2z+5t=8 \\ -2x-6y=-8 \\ 5x+3y-7z+4t=5 \\ 2x+5y+44z=51 \end{array} \quad (3) \quad \begin{array}{l} x+z=3 \\ 4x+y+8z=21 \\ 2x+3z=8 \end{array} \quad (2) \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ 3x+4y=11 \end{array} \quad (1)$$

$$kx+y+z+t+r=1$$

$$x+ky+z+t+r=1$$

(4) נתונה מערכת המשוואות:  $x+y+kz+t+r=1$

$$x+y+z+kt+r=1$$

$$,x+y+z+t+kr=1$$

א. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{2}$ ?

ג. האם קיים  $k$  עבורו למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{5}$ ?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש-

$$.x=y=z=t=r$$

(5) יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ .

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית  $Ax=0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש-  $A^2=0$ .

ב. אם למערכת ההומוגנית  $(A^t A)x=0$  קיים פתרון יחיד, אז  $|A|=0$ .

ג. אם למערכת ההומוגנית  $(AB)x=0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש-  $|A|=0$ .

## תשובות סופיות

$$(1) \quad x=1, y=2$$

$$(2) \quad x=1, y=1, z=2$$

$$(3) \quad x=y=z=t=1$$

$$(4) \quad \text{א. } k \neq 1, k \neq -4$$

$$\text{ב. } k = -2 \quad \text{ג. לא.} \quad \text{ד. הוכחה.}$$

$$(5) \quad \text{א. לא נכונה.} \quad \text{ב. לא נכונה.} \quad \text{ג. לא נכונה.}$$

## מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

### שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את הצמודה הקלאסית  $adj(A)$ , ובעזרתה את  $A^{-1}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \text{נתון:}$$

א. חשבו:  $(adjA)_{1,5}$ .

ב. חשבו:  $(A^{-1})_{1,5}$ .

(5) א. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה הפיכה  $A$  שווה ל- $\pm 1$ , כאשר כל איברי

$A$  ו- $A^{-1}$  הם מספרים שלמים.

ב. הוכיחו שאם  $|A|=1$  וכל איברי  $A$  הם מספרים שלמים,

אזי כל איברי  $A^{-1}$  גם הם מספרים שלמים.

(6) נתון ש- $A$  מטריצה משולשית תחתונה והפיכה.

הוכיחו ש- $A^{-1}$  משולשית תחתונה.

(7) נתון ש- $A$  הפיכה.

הוכיחו שגם  $adj(A)$  וגם  $A^T$  הפיכות.

(8) נתון כי  $A, B$  הפיכות ו- $C, D$  לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות?

א.  $C+D$     ב.  $A+B$     ג.  $AD$     ד.  $CD$     ה.  $AB$

9) מצאו את ערכי  $k$  עבורם המטריצה

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

לא הפיכה.

10) ידוע ש- $A, B$  מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B \neq 0$ . הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם  $AB = 0$ , אז  $A = 0$ .
- ב. אם  $|AB| = 0$ , אז  $A = 0$ .
- ג. אם  $|AB| = 0$ , אז  $|A| = 0$ .
- ד. אם  $AB = 0$ , אז  $|A| = 0$ .

11) נתונות שתי מטריצות  $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$ . הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א.  $|AB| = |BA|$
- ב.  $adj(AB) \neq adj(BA)$

12) אם  $B$  מתקבלת ממטריצה  $A_{3 \times 3}$  על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4, אז  $|adj(A) \cdot B|$  שווה ל:

- א.  $4^3 |A|^3$
- ב.  $4^3 |B|^3$
- ג.  $4 |B|^3$
- ד.  $4 |A|^3$

13) נתונה מטריצה ריבועית  $A = (a_{ij})$  מסדר  $n \geq 3$  המקיימת  $a_{ij} = i + j - 1$ . הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א.  $|A| = 4$
- ב.  $A$  הפיכה.
- ג.  $adj(A) = 0$
- ד.  $|A| = 0$

- 14) אם  $G$  היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית  $A$ , אז:
- בהכרח  $\det(A) = \det(G)$  וגם  $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$ .
  - בהכרח  $\det(A) = \det(G)$ , אך ייתכן ש  $\text{adj}(A) \neq \text{adj}(G)$ .
  - ייתכן ש  $\det(A) \neq \det(G)$ , אך בהכרח  $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$ .
  - אף תשובה אינה נכונה.

15) תהי  $A = (a_{ij})$  מטריצה ריבועית מסדר  $n \geq 2$ , כך ש- $a_{ij} = \begin{cases} i & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$ .

לכל  $1 \leq i, j \leq n$ , אז בהכרח מתקיים:

א.  $|A| = n! - 1$

ב. הפיכה  $A$ .

ג.  $\text{adj}(A)$  לא הפיכה.

ד. אם  $n = 4$ , אז  $|\text{Adj}(A)| > 214$ .

16) תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n \geq 4$ .

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם  $\text{rank}(A) = n - 2$ , אז בהכרח  $\text{adj}(A) = 0$ .

ב. אם  $A$  אנטי-סימטרית, אז בהכרח  $\text{adj}(A)$  אנטי-סימטרית.

ג. אם  $\text{adj}(A) = 0$ , אז בהכרח  $A = 0$ .

17)  $A$  מטריצה ריבועית,  $B$  מתקבלת מ- $A$  ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4, אז  $\text{adj}B$  מתקבלת מ- $\text{adj}A$  ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 4.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 4.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

18) תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת  $|\text{Adj}((-1+i)A)| = i$ .

חשבו  $|\det(A)|$ .

19) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ . הוכיחו את הטענות הבאות:

א.  $A$  הפיכה  $\Leftrightarrow Adj(A)$  הפיכה.

ב.  $Adj(A^{-1}) = (Adj(A))^{-1}$

ג.  $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$

## תשובות סופיות

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$adj(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

א. 240      ב. 0.5      (4)

שאלת הוכחה.      (5)

שאלת הוכחה.      (6)

שאלת הוכחה.      (7)

א. לא ניתן לדעת.      ב. לא ניתן לדעת.      ג. לא הפיכה.      (8)

ד. לא הפיכה.      ה. הפיכה.

אם ורק אם  $k = 0$ .      (9)

שאלת הוכחה.      (10)

שאלת הוכחה.      (11)

ד      (12)

שאלת הוכחה.      (13)

ד      (14)

ד      (15)

שאלת הוכחה.      (16)

ד      (17)

$\frac{-5}{2^2}$       (18)

שאלת הוכחה.      (19)

## שימושי הדטרמיננטה

### שאלות

- 1) א. חשבו את שטח המקבילית שקדקודיה:  $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$  .1  
 2.  $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$  .  
 ב. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו:  $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$  .  
 ג. מצאו משוואת מישור העובר דרך הנקודות:  $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$  .  
 ד. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו:  $(1,2), (3,4), (5,8)$  .  
הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה יש להשתמש בדטרמיננטות.

### תשובות סופיות

- 1) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג.  $3x - y + 4z + 2 = 0$ . ד. 2

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 4 - מרחבים וקטורים

תוכן העניינים

- 61 ..... 1. מרחבים ותת-מרחבים.
- 65 ..... 2. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית.
- 69 ..... 3. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה.
- 73 ..... 4. חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים.
- 78 ..... 5. וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס.
- 80 ..... 6. תרגילי תיאוריה מתקדמים.

## מרחבים ותת-מרחבים

### סימון

- $R^n$  - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד  $n$  מעל השדה הממשי  $R$ .
- $M_n[R]$  - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר  $n$  מעל השדה הממשי  $R$ .
- $P_n[R]$  - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- $n$  מעל השדה  $R$ .
- $F[R]$  - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות ( $f: R \rightarrow R$ ) מעל השדה  $R$ .

### שאלות

בשאלות 1-7 בדקו האם  $W$  תת-מרחב של  $R^3$ :

$$W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\} \quad (1)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c\} \quad (2)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\} \quad (3)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a < b < c\} \quad (4)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c^2\} \quad (5)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid c - b = b - a\} \quad (6)$$

כלומר,  $a, b$  ו- $c$  מהווים סדרה חשבונית.

$$W = \{(a, b, c) \mid b = a \cdot q, c = a \cdot q^2\} \quad (7)$$

כלומר,  $a, b$  ו- $c$  מהווים סדרה הנדסית.

בשאלות 8-15 בדקו האם  $W$  תת-מרחב של  $M_n[R]$  :

(8)  $W$  מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר,  $W = \{A \mid A = A^T\}$ .

(9)  $W$  מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה  $B$ . כלומר,  $W = \{A \mid AB = BA\}$ .

(10)  $W$  מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס. כלומר,  $W = \{A \mid |A| = 0\}$ .

(11)  $W$  מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר,  $W = \{A \mid A^2 = A\}$ .

(12)  $W$  מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

(13)  $W$  מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה  $B$  הוא אפס. כלומר,  $W = \{A \mid AB = 0\}$ .

(14)  $W$  מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר,  $W = \{A \mid \text{tr}(A) = 0\}$ .

(15)  $W$  מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות 16-21 בדקו האם  $W$  הוא תת-מרחב של  $P_n[R]$  :

(16)  $W$  מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר,  $W = \{p(x) \mid p(4) = 0\}$ .

(17)  $W$  מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

(18)  $W$  מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה  $\geq 4$ . כלומר,  $W = \{p(x) \mid \deg(p) \leq 4\}$ .

(19)  $W$  מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של  $x$ .

(20)  $W$  מורכב מכל הפולינומים ממעלה  $n$ , כאשר  $4 \leq n \leq 7$ .

(21)  $W = \{p(x) \mid p(0) = 1\}$

בשאלות 22-30 בדקו האם  $W$  הוא תת-מרחב של  $F[R]$  :

(22)  $W$  מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.  
כלומר, לכל  $x$  ממשי  $W = \{f(x) \mid f(-x) = f(x)\}$ .

(23)  $W$  מורכב מכל הפונקציות החסומות.  
כלומר, לכל  $x$  ממשי  $W = \{f(x) \mid |f(x)| \leq M\}$ .

(24)  $W$  מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

(25)  $W$  מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

(26)  $W$  מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

(27)  $W = \left\{ f(x) \mid \int_0^1 f(x) dx = 4 \right\}$  (הנח ש- $f$  אינטגרבילית ב- $[0,1]$ ).

(28)  $W = \{f(x) \mid f'(x) = 0\}$  (הנח ש- $f$  גזירה לכל  $x$ ).

(29)  $W = \{f(x) \mid f'(x) = 1\}$  (הנח ש- $f$  גזירה לכל  $x$ ).

(30)  $W = \{f(x) \mid f(x) = f(x+1)\}$

(31) בדקו האם  $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_2 = \bar{z}_1, z_3 = z_1 + \bar{z}_1\}$  הוא תת-מרחב של  $C^3$  :

א. מעל השדה הממשי  $\mathbb{R}$ .

ב. מעל שדה המרוכבים  $\mathbb{C}$ .

(32) נתונה המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

א. מצאו וקטור  $b$ , כך שלמערכת  $Ax = b$  אין פתרון.

ב. מהי קבוצת כל הווקטורים  $b$ , כך שלמערכת  $Ax = b$  אין פתרון?

ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של  $R^5$ ?

- (33)** יהי  $V$  מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה  $F$ .
- א. מצאו תנאי על  $k$ , עבורו הקבוצה  $W = \{p \in V \mid p(0) = p(1) = p(2) = k\}$ , הינה תת-מרחב של  $V$ .
- ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- $V$ , שפורשים את  $W$ .

הערה: לפתרון סעיף זה עברו קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית'.

### תשובות סופיות

- |      |                          |  |    |      |    |      |    |      |    |
|------|--------------------------|--|----|------|----|------|----|------|----|
| (1)  | כן                       | (2)  | כן | (3)  | כן | (4)  | לא | (5)  | לא |
| (6)  | כן                       | (7)  | לא | (8)  | כן | (9)  | כן | (10) | לא |
| (11) | לא                       | (12)   | כן | (13) | כן | (14) | כן | (15) | כן |
| (16) | כן                       | (17)   | לא | (18) | כן | (19) | כן | (20) | לא |
| (21) | לא                       | (22)   | כן | (23) | כן | (24) | כן | (25) | כן |
| (26) | כן                       | (27)   | לא | (28) | כן | (29) | לא | (30) | כן |
| (31) | א. כן                    | ב. לא  |    |      |    |      |    |      |    |
| (32) | א. $u = (1, 0, 0, 0, 0)$ | ב. $B = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \mid -b_1 + b_2 + 2b_3 \neq 0\}$ |    |      |    |      |    |      |    |
|      | ג. לא.                   |  |    |      |    |      |    |      |    |
| (33) | א. $k = 0$               | ב. $W = \text{span}\{2x - 3x^2 + x^3, 6x - 7x^2 + x^4\}$             |    |      |    |      |    |      |    |

## צירופים לינאריים, פרישה לינארית ותלות לינארית

### שאלות

בשאלות 1-7 נתונים הווקטורים הבאים :

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), \quad u_2 = (0, 11, -5, 3), \quad u_3 = (2, -5, 3, 1), \quad u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

- (1) א. האם  $u_1$  הוא צירוף לינארי של  $u_4$  ?  
 ב. האם  $u_1$  שייך ל-  $Sp\{u_4\}$  ?  
 ג. האם הקבוצה  $\{u_1, u_4\}$  תלויה לינארית?
- (2) א. האם  $u_3$  הוא צירוף לינארי של  $u_1$  ו-  $u_2$  ?  
 ב. האם  $u_3$  שייך ל-  $Sp\{u_1, u_2\}$  ?  
 ג. האם הקבוצה  $\{u_1, u_2, u_3\}$  תלויה לינארית?  
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- (3) א. האם  $u_4$  הוא צירוף לינארי של  $u_1$  ו-  $u_2$  ?  
 ב. האם  $u_4$  שייך ל-  $Sp\{u_1, u_2\}$  ?  
 ג. האם הקבוצה  $\{u_1, u_2, u_4\}$  תלויה לינארית?  
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- (4) נתון  $v = (4, 12, k, -2k)$ .  
 א. מה צריך להיות ערכו של  $k$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה צירוף לינארי של  $u_1$  ו-  $u_2$  ?  
 ב. מה צריך להיות ערכו של  $k$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה שייך ל-  $Sp\{u_1, u_2\}$  ?  
 ג. מה צריך להיות ערכו של  $k$ , על מנת שהקבוצה  $\{u_1, u_2, v\}$  תהיה תלויה לינארית?
- (5) נתון  $v = (a, b, c, d)$ .  
 א. מה התנאים על  $a, b, c, d$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה צירוף לינארי של  $u_1$  ו-  $u_2$  ?  
 ב. מה התנאים על  $a, b, c, d$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה שייך ל-  $Sp\{u_1, u_2\}$  ?  
 ג. מה התנאים על  $a, b, c, d$ , על מנת שהקבוצה  $\{u_1, u_2, v\}$  תהיה תלויה לינארית?

6) הביעו את הווקטור  $v = (10, 8, 0, 14)$  כצירוף לינארי של  $u_1, u_2, u_3$  ו- $u_4$ .  
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

7) הביעו את הווקטור  $v = (7, 10, -2, 11)$  כצירוף לינארי של  $u_1, u_2, u_3$  ו- $u_4$ .  
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

8) נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

א. בדקו האם המטריצות תלויות ליניארית מעל  $M_2[R]$ .  
ב. במידה והמטריצות תלויות, רשמו כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.

ג. האם המטריצה  $A$  שייכת ל- $Sp\{B, C\}$ ?

9) נתונים הפולינומים הבאים:  $p_1(x) = 4 + x + x^2 + 5x^3$ ,  $p_2(x) = 11x - 5x^2 + 3x^3$ ,  
 $p_3(x) = 2 - 5x + 3x^2 + x^3$ ,  $P_4(x) = 1 + 3x - x^2 + 2x^3$

א. בדקו האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל  $P_3[R]$ .  
ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשמו כל פולינום כצירוף לינארי של שאר הפולינומים.

ג. האם הפולינום  $p_2$  שייך ל- $Sp\{p_1, p_4\}$ ?

10) עבור איזה ערכים של  $a, b, c$ , הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:

$$\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$$

בשאלות 11-13 נתון כי קבוצת הווקטורים  $\{u, v, w\}$  בלתי תלויה ליניארית ב- $V[F]$ .  
בדקו האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית,  
ובמידה וכן רשמו כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

$$\{u - v, u - w, u + v - 2w\} \quad (11)$$

$$\{u + 2v + 3w, 4u + 5v + 6w, 7u + 8v + 9w\} \quad (12)$$

$$\{u + v, v + w, w\} \quad (13)$$

בשאלות 14-15 בדקו האם הווקטורים  $\{(1, i, i-1), (i+1, i-1, -2)\}$  תלויים ליניארית ב-  $C^3$  :

(14) מעל  $C$  .

(15) מעל  $R$  .

(16) נתבונן ב-  $V = R$  כמרחב וקטורי מעל השדה  $Q$  . הוכיחו כי הקבוצה  $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$  היא בת"ל ב-  $R$  , כשהוא מרחב וקטורי מעל  $Q$  .

(17) תהי  $A_{m \times n}$  מטריצה, שעמודותיה  $A_1, A_2, \dots, A_n$  . הוכיחו את הטענה הבאה :

למערכת  $Ax = b$  יש פתרון אם ורק אם  $b \in \text{span}\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  .

(18) להלן 3 תת-קבוצות של  $R^4$  :

$$U = \text{span}\{(1, 2, 2, 1), (1, 1, -1, -1), (0, 0, 1, 1)\}$$

$$W = \text{span}\{(1, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 0), (1, 3, 3, 1)\}$$

$$V = \text{span}\{(2, 3, 1, 0), (1, 2, 1, 0), (1, 4, 3, 1)\}$$

א. האם  $U = W$  ?

ב. האם  $U = V$  ?

## תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. כן. ב. כן. ג. כן,  $u_1 = 2u_3 + u_2$ ,  $u_2 = u_1 - 2u_3$ .
- (3) א. כן. ב. כן. ג. כן,  $u_1 = 4u_4 - u_2$ ,  $u_2 = 4u_4 - u_1$ .
- (4) א+ב+ג.  $k = -4$ .
- (5)  $a = 5t + 3s$ ,  $b = 4t - 13s$ ,  $c = 7s$ ,  $d = 7t$ .
- (6) אינסוף,  $v = 2u_1 + u_2 + u_3$ .
- (7) אינסוף,  $v = \frac{7}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2$ .
- (8) א. המטריצות תלויות. ג. כן.  $A = B + 2C$ .
- ב.  $A = B + 2C$ ,  $B = A - 2C$ ,  $C = 0.5A - 0.5B$ ,  $D = 0.25A + 0.25B$ .
- (9) א. הפולינומים תלויים. ג.  $p_2 = 4p_4 - p_1$ .
- ב.  $p_1 = p_2 + 2p_3$ ,  $p_2 = p_1 - 2p_3$ ,  $p_3 = 0.5p_1 - 0.5p_2$ ,  $p_4 = 0.25p_1 + 0.25p_2$ .
- (10) לכל ערך של  $a, b, c$ .
- (11) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים:  $x = 2y - z$ ,  $y = 0.5x + 0.5z$ ,  $z = 2y - x$ .
- (12) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים:  $x = 2y - z$ ,  $y = 0.5x + 0.5z$ ,  $z = 2y - x$ .
- (13) בלתי תלויים ליניארית.
- (14) תלויים.
- (15) בלתי תלויים ליניארית.
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א. כן. ב. לא.

## בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

### שאלות

(1) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $R^3$  :

א.  $\{(1,0,1), (0,0,1)\}$

ב.  $\{(1,1,2), (1,2,3), (3,3,4), (2,2,1)\}$

ג.  $\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)\}$

(2) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2 \times 2}[R]$  :

א.  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

ב.  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$

ג.  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(3) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$  :

א.  $\{1+x, x^2+2x+3\}$

ב.  $\{1+x, x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג.  $\{1+2x+3x^2, 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

(4) נתונה קבוצת וקטורים ב- $R^3$  :  $T = \{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), (2,3,4)\}$ .

א. האם  $T$  בסיס ל- $R^3$  ?

ב. מצאו קבוצה  $T'$ , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים,

בלתי תלויה ליניארית ב- $T$ .

ג. השלימו את  $T'$  לבסיס של  $R^3$ .

**מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית**

(5) להלן 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

$$\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \cdot 3 \quad \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \cdot 2 \quad \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \cdot 1$$

1. נסמן ב- $W$  את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות

2. נסמן ב- $U$  את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות

3. נסמן ב- $V$  את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות

מצאו בסיס וממד ל- $U$ ,  $W$  ו- $V$ .

(6) נתון  $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = c, b = d\}$

מצאו בסיס וממד ל- $U$ .

(7) נתון  $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a + b, d = b + c\}$

מצאו בסיס וממד ל- $U$ .

(8) נתון  $U = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot (1, -1, 1, -1) = 0\}$

מצאו בסיס וממד ל- $U$ .

(9) נתון  $U = \{A \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}] \mid A = A^T\}$

מצאו בסיס וממד ל- $U$ .

(10) נתון  $U = \left\{ A \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}] \mid A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

מצאו בסיס וממד ל- $U$ .

(11) נתון  $U = \{p(x) \in P_3[\mathbb{R}] \mid p(1) = 0\}$

מצאו בסיס וממד ל- $U$ .

**מציאת בסיס וממד לתת-מרחב**

(12) להלן שני תתי מרחבים של המרחב  $R^4$  :

$$U = \text{span}\{(1,1,-1,2), (3,-1,7,4), (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = \text{span}\{(1,-1,1,1), (1,0,2,-1), (1,1,3,-3), (5,1,5,8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $U$ .

ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $V$ .

(13) להלן תת-מרחב של המרחב  $M_{2 \times 2}[R]$  :

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס וממד ל- $U$ .

(14) להלן תת-מרחב של המרחב  $P_3[R]$  :

$$U = \text{span}\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצאו בסיס וממד ל- $U$ .

**מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה**

בשאלות 15-16 מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציינו את דרגת המטריצה (rank) :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

## תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. לא. ב. לא. ג. כן.
- (3) א. לא. ב. לא. ג. כן.
- (4) א. לא. ב.  $T' = \{(1,2,3), (4,5,6)\}$ . ג.  $T' = \{(1,2,3), (4,5,6), (0,0,1)\}$ .
- (5) א.  $W$  - בסיס:  $\{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\}$ , ממד: 2.
- $U$  - בסיס:  $\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$ , ממד: 2.
- $V$  - בסיס:  $\{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$ , ממד: 3.
- (6) בסיס:  $\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}$ , ממד: 2.
- (7) בסיס:  $\{(-1, 1, 0, 1), (2, -1, 1, 0)\}$ , ממד: 2.
- (8) בסיס:  $\{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$ , ממד: 3.
- (9) בסיס:  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ , ממד: 3.
- (10) בסיס:  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ , ממד: 0.
- (11) בסיס:  $\{p_1(x) = -1 + x^3, p_2(x) = -1 + x^2, p_3(x) = -1 + x\}$ , ממד: 3.
- (12) א. בסיס:  $\{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2)\}$ , ממד: 2.
- ב. בסיס:  $\{(1, -1, 1, 1), (0, -1, 1, -2), (0, 0, -2, 5)\}$ , ממד: 3.
- (13) בסיס:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \right\}$ , ממד: 2.
- (14) בסיס:  $\{1 + x - x^2 + 2x^3, -3x + 3x^2 - 7x^3\}$ , ממד: 2.
- (15) מרחב שורה: בסיס:  $\{(4, 1, 1, 5), (0, 11, -5, 3)\}$ , ממד: 2.
- מרחב עמודה: בסיס:  $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , ממד: 2, דרגה: 2.
- (16) מרחב שורה: בסיס:  $\{(1, 2, 1, 3, 5), (0, 11, -5, -4), (0, 0, 0, 1, 1)\}$ , ממד: 3.
- מרחב עמודה: בסיס:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \\ 37 \end{pmatrix} \right\}$ , ממד: 3, דרגה: 3.

## חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים

### שאלות

(1) להלן 3 מערכות של משוואות לינאריות הומוגניות:

$$1) \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

נסמן ב-  $V, U, W$  את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 1, 2 ו-3 בהתאמה.

א. מצאו בסיס וממד ל-  $U, W$  ו-  $V$ .

ב. מצאו בסיס וממד ל-  $U + V$ .

ג. מצאו בסיס וממד ל-  $U \cap V$ .

(2) להלן שני תת-מרחבים של המרחב  $R^4$ :

$$U = sp\{(1, 1, -1, 2), (3, -1, 7, 4), (-5, 3, -15, -6)\}$$

$$V = sp\{(1, -1, 1, 1), (1, 0, 2, -1), (1, 1, 3, -3), (5, 1, 5, 8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל-  $U$ .

ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל-  $V$ .

ג. מצאו בסיס וממד ל-  $U + V$ .

ד. מצאו בסיס וממד ל-  $U \cap V$  (פתרו בשתי דרכים שונות).

ה. האם  $U + V = R^4$ ?

ו. האם  $U \oplus V = R^4$ ?

(3) להלן שני תת-מרחבים של המרחב  $P_3[R]$ :

$$U = sp\{1 + x - x^2 + 2x^3, 3 - x + 7x^2 + 4x^3, -5 + 3x - 15x^2 - 6x^3\}$$

$$V = sp\{1 - x + x^2 + x^3, 1 + 2x^2 - x^3, 1 + x + 3x^2 - 3x^3, 5 + x + 5x^2 + 8x^3\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל-  $U + V$ .

ב. מצאו בסיס וממד ל-  $U \cap V$ .

(4) להלן שני תת-מרחבים של המרחב  $P_3[R]$ :

$$U = sp\{1 + x + x^3, 1 + 2x + x^2 + 2x^3, -1 + 2x + 3x^2 + 2x^3\}$$

$$V = \{p(x) \in P_3[R] \mid p(1) = p(-1) = 0\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל-  $U + V$ .

ב. מצאו בסיס וממד ל-  $U \cap V$ .

$$U = sp\{1+x, x+x^2, 1+x^3\} \quad (5) \quad \text{להלן שני תת-מרחבים של המרחב } P_3[R] :$$

$$V = \{p(x) \in P_3[R] \mid p'(0) = 0\}$$

מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$ .

$$(6) \quad \text{להלן שני תת-מרחבים של המרחב } M_2[R]$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x+3y-5z & x-y+3z \\ -x+7y-15z & 2x+4y-6z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in R \right\}$$

$$W = sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \right\}$$

- מצאו בסיס וממד ל- $U$  ול- $W$ .
- מצאו בסיס וממד ל- $U+W$ .
- מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$ .
- אשרו את משפט הממד עבור תרגיל זה.

$$(7) \quad \text{להלן שני תת-מרחבים של המרחב } V = M_2[R] :$$

$$U = \{A \in V \mid A = -A^T\}, \quad W = \left\{ A \in V \mid A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

- מצאו בסיס וממד ל- $U$  ול- $W$ .
- מצאו בסיס וממד ל- $U+W$ .
- מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$ .
- האם  $U+W=V$ ?
- האם  $U \oplus W=V$ ?

$$(8) \quad \text{להלן שני תת-מרחבים של המרחב } V = M_3[R] :$$

$$U = \{A \in V \mid A = A^T\}, \quad W = \{A \in V \mid A \text{ משולשית עליונה}\}$$

- מצאו בסיס וממד ל- $U$ .
- מצאו בסיס וממד ל- $W$ .
- מצאו בסיס וממד ל- $U+W$ .
- מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$ .
- האם  $U \oplus W=V$ ?

$$(9) \quad \text{יהיו } U \text{ ו-} W \text{ שני תת-מרחבים מממד 2 של } R^3.$$

הוכיחו כי  $\dim(U \cap W) \neq 0$ .

- 10** יהי  $V$  מרחב וקטורי מממד 10. יהיו  $U$  ו- $W$  שני תת-מרחבים שונים של  $V$  מממד 9. א. הוכיחו כי  $U + W = V$ . ב. חשבו  $\dim(U \cap W)$ .
- 11** יהי  $V$  מרחב וקטורי מממד 10. יהיו  $U$  ו- $W$  שני תת-מרחבים שונים של  $V$  מממד 7. מצאו את המימדים האפשריים של  $U \cap W$  ו- $U + W$ .
- 12** יהי  $V$  מרחב וקטורי מממד 7. יהיו  $U$  ו- $W$  שני תת-מרחבים של  $V$ , כך ש- $\dim U = 4$ ,  $\dim W = 5$ ,  $(U \not\subseteq W)$ . מצאו את המימדים האפשריים של  $U \cap W$  ו- $U + W$ .
- 13** יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $F$ .  $\phi \neq A, B \subseteq V$ . נגדיר:  $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ . הוכיחו או הפריכו:
- $sp(A + B) = sp(A) \cup sp(B)$
  - $sp(A \cup B) = sp(A) \cup sp(B)$
  - $sp(A \cup B) = sp(A) + sp(B)$
  - $sp(A + B) = sp(A) + sp(B)$
  - $sp(A \cap B) = sp(A) \cap sp(B)$
- 14** יהיו  $U$  ו- $W$  תת-מרחבים של  $R^3$ , המוגדרים על ידי:  $U = \{(a, b, c) \mid a = b = c\}$ ,  $W = \{(0, b, c)\}$ . הוכיחו כי  $U \oplus W = R^3$ .
- 15** יהי  $V = M_n[R]$ .
- יהי  $U$  תת-מרחב של  $V$  המכיל את כל המטריצות הסימטריות. יהי  $W$  תת-מרחב של  $V$  המכיל את כל המטריצות האנטי-סימטריות. הוכיחו כי  $U \oplus W = V$ .
  - יהי  $U$  תת-מרחב של  $V$  המכיל את כל המטריצות המשולשות העליונות. יהי  $W$  תת-מרחב של  $V$  המכיל את כל המטריצות המשולשות התחתונות. הוכיחו כי  $U \oplus W \neq V$ .

## תשובות סופיות

$$B_W = \{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\} \quad , \quad \dim W = 2 \quad \text{א. (1)}$$

$$B_U = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\} \quad , \quad \dim U = 2$$

$$B_V = \{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\} \quad , \quad \dim V = 3$$

$$B_{U+V} = \{(0, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\} \quad \dim(U+V) = 3 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap V} = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 2 \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} -3x + 5y + 2z = 0 \\ -3x - y + 2t = 0 \end{cases} \quad , \quad B_U = \{(1, 1, -1, 2), (0, 2, -5, 1)\} \quad , \quad \dim U = 2 \quad \text{א. (2)}$$

$$-8x - y + 5z + 2t = 0 \quad , \quad B_V = \{(1, -1, 1, 1), (0, 1, 1, -2), (0, 0, 2, -5)\} \quad , \quad \dim V = 3 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U+V} = \{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \quad , \quad \dim(U+V) = 4 \quad \text{ג.}$$

$$B_{U \cap V} = \{(5, 1, 5, 8)\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 1 \quad \text{ד.} \quad \text{ה. כן.} \quad \text{ו. לא.}$$

$$U+V = sp\{1+x-x^2+2x^3, 2x-5x^2+x^3, x^2, x^3\} \quad , \quad \dim(U+V) = 4 \quad \text{א. (3)}$$

$$B_{U \cap V} = \{5+x+5x^2+8x^3\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 1 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U+V} = \{1+x+x^3, x+x^2+x^3, x^2+2x^3\} \quad , \quad \dim(U+V) = 3 \quad \text{א. (4)}$$

$$B_{U \cap V} = \{-1+x^2\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 1 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap V} = \{-1+x^2, 1+x^3\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 2 \quad \text{ב. (5)}$$

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \dim(U) = 2 \quad \text{א. (6)}$$

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 15 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \dim(W) = 3$$

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \dim(U+W) = 4 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \dim(U \cap W) = 1 \quad \text{ג.}$$

ד. ראו בסרטון.

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \dim U = 1, \quad B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \dim W = 2. \quad \text{א. (7)}$$

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U+W) = 3. \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U \cap W) = 0. \quad \text{ג.}$$

ד. לא. ה. לא.

א. (8)

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim U = 6$$

ב.

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim W = 6$$

ג.

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(U+W) = 9$$

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U \cap W) = 3. \quad \text{ד.}$$

ה. לא.

שאלת הוכחה. (9)

א. שאלת הוכחה. ב. 8 (10)

$$\dim(U+W) = 8, 9 \text{ or } 10, \quad \dim(U \cap W) = 4, 5, 6 \text{ or } 7 \quad \text{(11)}$$

$$\dim(U \cap W) = 2, 3 \text{ or } 4, \quad \dim(U+W) = 6 \text{ or } 7 \quad \text{(12)}$$

שאלת הוכחה. (13)

שאלת הוכחה. (14)

שאלת הוכחה. (15)

## וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

(1) נתונים שני בסיסים של  $R^3$  :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_1$ .

סמנו וקטור זה ב-  $[v]_{B_1}$ .

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_2$ .

סמנו וקטור זה ב-  $[v]_{B_2}$ .

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס  $B_1$  לבסיס  $B_2$ .

סמנו מטריצה זו ב-  $[M]_{B_1}^{B_2}$ .

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס  $B_2$  לבסיס  $B_1$ .

סמנו מטריצה זו ב-  $[M]_{B_1}^{B_2}$ .

ה. אשרו את הטענות הבאות :

$$1. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$$

$$2. [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$$

$$3. [M]_{B_1}^{B_2} = \left( [M]_{B_2}^{B_1} \right)^{-1}$$

(2) נתונים שני בסיסים של  $P_2[R]$  :

$$B_1 = \{1+x, x, x+x^2\}, \quad B_2 = \{1+x^2, x+x^2, x^2\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_1$ .

סמנו וקטור זה ב-  $[v]_{B_1}$ .

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_2$ .

סמנו וקטור זה ב-  $[v]_{B_2}$ .

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס  $B_1$  לבסיס  $B_2$ .

סמנו מטריצה זו ב-  $[M]_{B_1}^{B_2}$ .

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3) \quad \text{נתונים שני בסיסים של } M_2[R]$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B$ .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_B$ .

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $E$ .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_E$ .

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס  $B$  לבסיס  $E$ .

סמנו מטריצה זו ב- $[M]_B^E$ .

(4) יהי  $V$  מרחב וקטורי ויהי  $B$  בסיס של  $V$ .

הוכיחו כי הווקטורים  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  בת"ל,

אם ורק אם וקטורי הקואורדינטות שלהם,

לפי הבסיס  $B$ ,  $\{[u_1], [u_2], \dots, [u_m]\}$ , הם בת"ל.

הסבירו כיצד השתמשנו בטענה זו רבות במהלך הקורס.

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (x, y-x-z, z) \quad \text{ב. } (x, y, z-x-y) \quad \text{ג. } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ד. } [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ה. הוכחה.}$$

$$(2) \quad \text{א. } (a, b-a-c, c) \quad \text{ב. } (a, b, c-a-b) \quad \text{ג. } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א. } (x, y-x, z-y+x, t-z+y-x) \quad \text{ב. } (x, y, z, t) \quad \text{ג. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) שאלת הוכחה.

## תרגילי תיאוריה מתקדמים

### שאלות הוכחה

- (1) יהי  $V$  מרחב, ותהי  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  קבוצה;  $b \in V$ .  
 הוכיחו כי:  $b \in sp(A) \Leftrightarrow sp(A \cup \{b\}) = sp(A)$ .
- (2) יהיו  $u, v, w$  וקטורים, כך ש-  $\{u, v\}$  בלתי-תלויה ליניארית ו-  $u \in sp(\{v, w\})$ .  
 א. הוכיחו ש-  $w \in sp(\{u, v\})$ .  
 ב. נתון גם כי עבור וקטור נוסף  $z$ , הקבוצה  $\{u, w, z\}$  בלתי-תלויה ליניארית.  
 הוכיחו שגם הקבוצה  $\{u, v, z\}$  בלתי-תלויה ליניארית.
- (3) יהי  $U$  מרחב, תהי  $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subseteq U$  ויהי  $u \in U$  וקטור כלשהו.  
 הוכיחו כי אם  $u \in sp(A)$  וכן  $u \notin sp(A - \{u_n\})$ , אז  $u_n \in sp(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u)$ .
- (4) יהי  $V$  מרחב,  $b \in V$  ו-  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$  בלתי-תלויה ליניארית.  
 הוכיחו כי  $A \cup \{b\} = \{v_1, v_2, \dots, v_k, b\}$  בת"ל  $\Leftrightarrow b \notin sp(A)$ .
- (5) יהי  $V$  מרחב  $n$  מימדי, תהי  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$  ויהי  $b \in sp(A)$ .  
 למשוואה  $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = b$  אין פתרון יחיד.  
 הוכיחו או הפריכו:  
 א.  $k \geq n$ .  
 ב.  $A$  פורשת את  $V$ .  
 ג.  $A$  בהכרח תלויה ליניארית.
- (6) יהי  $V$  מרחב,  $b \in V$  ו-  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$  בלתי-תלויה ליניארית.  
 הוכיחו או הפריכו:  
 א. אם  $b \notin sp(A)$ , אז הקבוצה  $B = \{v_1 + b, v_2 + b, \dots, v_n + b\}$  היא בת"ל.  
 ב. אם  $b \in sp(A)$ , אז הקבוצה  $B = \{v_1 + b, v_2 + b, \dots, v_n + b\}$  היא בת"ל.  
 ג. אם  $b \in sp(A)$ , אז הקבוצה  $B = \{v_1 + b, v_2 + b, \dots, v_n + b\}$  היא ת"ל.

- (7) יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{R}$ , ויהיו  $v_1, v_2, v_3 \in V$ .  
 נסמן:  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $T = \{av_1 + v_2 + v_3, v_1 + av_2 + v_3, v_1 + v_2, av_3\}$ .  
 הוכיחו או הפריכו:  
 א.  $spS \subseteq spT$ .  
 ב. אם  $S$  בלתי תלויה ליניארית ואם  $a \neq -2, 1$ , אז בהכרח  $sp(T) = sp(S)$ .  
 ג.  $\dim(spT) \leq 2$ .  
 ד.  $\dim(sp(T)) = \dim(sp(S))$ .
- (8) יהי  $V$  מרחב ותהיינה  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ,  $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  קבוצות וקטורים ב- $V$ .  
 הוכיחו או הפריכו:  
 א.  $sp(A \cup B) = sp(A) + sp(B)$ .  
 ב. אם  $A \cup B$  בת"ל, אז  $A, B$  שתיהן בת"ל.  
 ג. אם  $\dim V = m+k$  וגם  $A, B$  שתיהן בת"ל, אז  $A \cup B$  בת"ל.  
 ד. אם  $A \cup B$  בת"ל, אז  $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$ .
- (9) יהי  $V$  מרחב ויהיו  $U, W \subseteq V$  תמריים.  
 תהיינה  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq U$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  שתי קבוצות בת"ל.  
 הוכיחו כי אם  $U \cap W = \{0\}$ , אז  $A \cup B$  בת"ל.
- (10) יהי  $V$  מרחב ויהיו  $U, W$  תמריים שלו.  
 הוכיחו כי  $U \cup W$  מרחב  $\Leftrightarrow W \subseteq U$  או  $U \subseteq W$ .

לפתרונות המלאים בסרטוני וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## שאלות אמריקאיות

11) תהינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר  $n \geq 2$ .  
 אז בהכרח מתקיים:

- א. מרחב השורות של  $A^2$  מוכל במרחב השורות של  $A$ .  
 ב. אם  $AB$  משולשית עליונה, אז בהכרח  $A$  משולשית עליונה או  $B$  משולשית עליונה.  
 ג. אם  $AB = 0$ , אז בהכרח  $B = 0$  או  $A = 0$ .  
 ד. אף תשובה אינה נכונה.

$$(12) \text{ נסמן } W = Sp \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\}, U = Sp \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\}$$

שני תת-מרחבים של  $\mathbb{R}^3$ .  
 אזי בהכרח מתקיים:

- א.  $U = W$   
 ב.  $\dim U = \dim W$   
 ג.  $U \subseteq W$   
 ד. אם  $U + W = \mathbb{R}^3$ , אז  $U \cap W = \{0\}$ .  
 ה. אף תשובה אינה נכונה.

13) תהי  $A$  קבוצה בת 6 פולינומים במרחב  $\mathbb{R}_5[x]$  מעל  $\mathbb{R}$  (מרחב הפולינומים

ממעלה עד וכולל 5), ונניח בנוסף ש- $Sp(A) = \mathbb{R}_5[x]$ .  
 אזי בהכרח מתקיים:

- א. ייתכן ש- $A$  מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 4.  
 ב. ייתכן ש- $A$  מכילה בדיוק 5 פולינומים ממעלה 3.  
 ג. שני תת-מרחבים של  $\mathbb{R}_5[x]$  מאותו מימד בהכרח שווים.  
 ד.  $A$  תלויה ליניארית.  
 ה. אף תשובה אינה נכונה.

14) במרחב וקטורי  $\mathbb{R}^2$  מעל שדה  $\mathbb{R}$ ,

תהי  $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  קבוצה סדורה של 2 וקטורים מ- $\mathbb{R}^2$ .

אז מטריצה  $P$  המקיימת  $[v]_A = Pv$  לכל  $v \in \mathbb{R}^2$ , שווה ל:

א.  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

ב.  $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

ג.  $P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ד.  $P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

15) יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $F$ , ותהיינה  $A, B$  קבוצות שונות לא ריקות

וזרות של וקטורים מ- $V$ . אז בהכרח מתקיים:

א. אם  $A \cup B$  בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח  $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$ .

ב. אם  $A \cup B$  תלויה לינארית,

אז בהכרח  $A$  תלויה לינארית או  $B$  תלויה לינארית.

ג. אם  $A, B$  בלתי תלויות לינארית, אז בהכרח  $A \cup B$  בלתי תלויה לינארית.

ד. אם  $sp(A) \cup sp(B) = sp(A \cup B)$ , אז בהכרח  $A \cup B$  תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

16) אם  $W$  תת מרחב של מרחב וקטורי  $V$ , אז:

א. כל בסיס של  $V$  מכיל בסיס כלשהו של  $W$ , וכל בסיס של  $W$  מוכל בבסיס כלשהו של  $V$ .

ב. כל בסיס של  $V$  מכיל בסיס כלשהו של  $W$ , אבל לא כל בסיס של  $W$  מוכל בהכרח בבסיס כלשהו של  $V$ .

ג. לא כל בסיס של  $V$  מכיל בהכרח בסיס כלשהו של  $W$ , אבל כל בסיס של  $W$  מוכל בבסיס כלשהו של  $V$ .

ד. אף תשובה אינה נכונה.

(17) יהיו  $U, W$  שני תתי-מרחבים של מרחב  $V$ ,

כך ש- $\dim V = n, \dim U = \dim W = n - 1$ .

אז:

א.  $n - 2 \leq \dim(U \cap W)$

ב. אם  $U \neq W$ , ייתכן ש- $U \subset W$ .

ג. קיים  $v \in V$ , כך ש- $V = U + \text{sp}\{v\}$  ו- $U \cap \text{sp}\{v\} = \{0\}$ .

ד. אם  $U + \text{sp}\{v\} = V$  ו- $U \cap \text{sp}\{v\} = \{0\}$ , אז  $v \in W$ .

(18) נניח כי  $v_1, v_2, v_3, v_4$  הם וקטורים במרחב ליניארי  $V$ .

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם  $\text{Span}\{v_1, v_2\} \cap \text{Span}\{v_3, v_4\}$  והווקטורים  $v_1, v_2, v_3, v_4$  שונים זה מזה,

אז הווקטורים  $v_1 - v_2$  ו- $v_3 - v_4$  הם בת"ל.

ב. אם  $v_1, v_2$  בת"ל וגם  $v_3, v_4$  בת"ל, וכן  $\text{Span}\{v_1, v_2\} \cap \text{Span}\{v_3, v_4\} = \{0\}$ ,

אז  $v_1, v_2, v_3, v_4$  הם בת"ל.

(19) אם  $V, W$  תת מרחבים של מרחב וקטורי  $U$ , ומתקיים:

$$\dim U = 6, \dim V = 5, \dim W = 3$$

אז  $\dim(V \cap W)$  יכול להיות:

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. 3

ה. 4

ו. 5

(20)  $V, W$  תת-מרחבים ממימד 3 של  $\mathbb{R}^7$ ,  $\{w_1, w_2, w_3\}$  בסיס של  $W$  ו- $\{v_1, v_2, v_3\}$

בסיס של  $V$ , אז:

א.  $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$  בלתי תלוי לינארית.

ב.  $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$  פורשת את  $V + W$ .

ג.  $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$  בת"ל.

ד.  $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$  פורשת את  $V + W$ .

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(21) אם  $A$  מטריצה לא ריבועית, אז בהכרח:

- מרחב השורות של  $A^t$  שווה למרחב השורות של  $A$ .
- מרחב השורות של  $A^t$  שונה ממרחב השורות של  $A$ .
- ממד מרחב השורות של  $A^t$  שווה לממד מרחב השורות של  $A$ .
- ממד מרחב השורות של  $A^t$  שונה מממד מרחב השורות של  $A$ .
- אף תשובה אינה נכונה.

(22) תהינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר  $n \geq 2$ .

אזי בהכרח מתקיים:

- מרחב השורות של  $AB$  מוכל במרחב השורות של  $A$ .
- אם  $AB = 0$ , אז בהכרח  $B = 0$  או  $A = 0$ .
- אם  $AB$  משולשית עליונה, אז בהכרח  $A$  משולשית עליונה או  $B$  משולשית עליונה.
- אם  $AB = 2I_n$ , אז בהכרח  $BA = 2I_n$ .
- אף תשובה אינה נכונה.

(23) תהי  $A$  קבוצה בת 6 פולינומים במרחב  $\mathbb{R}_5[x]$  מעל  $\mathbb{R}$  (מרחב הפולינומים

ממעלה עד וכולל 6), ונניח בנוסף ש-  $\mathbb{R}_5[x] = Sp(A)$ .

אזי בהכרח מתקיים:

- ייתכן ש-  $A$  מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 2.
- ייתכן ש-  $A$  מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 1.
- שני תת-מרחבים של  $\mathbb{R}_5[x]$  מאותו מימד בהכרח שווים.
- $A$  בלתי תלויה לינארית.
- אף תשובה אינה נכונה.

$$(24) \text{ יהי } a \text{ מספר ממשי ויהיו } U = Sp \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \right\}, W = Sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

שני תתי-מרחבים של  $\mathbb{R}^4$ . בהכרח מתקיים:

- $U \cap W = \{0\}$  לכל ערכי  $a$ .
- $U \cap W \neq \{0\}$  לכל ערכי  $a$ .
- $\dim(U \cap W) = 3$  לכל ערכי  $a \neq \pm 1$ .
- $\dim(U \cap W) = 1$  לכל ערכי  $a \neq \pm 1$ .
- אף תשובה אינה נכונה.

$$(25) \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

אז בהכרח מתקיים:

א.  $\text{rank}(T) = 1, \text{rank}(R) = 2$

ב.  $\text{rank}(R^3 T^5) = 1$

ג. מרחב השורות של  $R^3 T^5$  שווה למרחב השורות של  $T^5$ .

ד.  $T^{100} = 0$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(26) יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $F$ , ותהי  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  קבוצה של וקטורים

מ- $V$  ( $1 \leq n$ ). נניח בנוסף ש- $\dim(V) = n$ . אזי בהכרח מתקיים:

א. אם  $A$  בלתי תלויה לינארית, אז  $A$  פורשת את  $V$ .

ב. אם  $A$  קבוצה פורשת ל- $V$ , אז  $A$  בלתי תלויה לינארית.

ג. ייתכנו מקרים בהם  $A$  פורשת את  $V$ , אך  $A$  תלויה לינארית.

ד. ייתכנו מקרים בהם  $A$  בלתי תלויה לינארית, אך  $A$  אינה פורשת את  $V$ .

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(27) יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $F$ , ותהיינה  $A, B$  קבוצות שונות לא ריקות של

וקטורים מ- $V$ . אז בהכרח מתקיים:

א. אם  $A \cup B$  בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח  $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$ .

ב. אם  $A, B$  תלויות לינאריות, אז בהכרח  $A \cap B$  תלויה לינארית.

ג. אם  $A, B$  בלתי תלויות לינאריות, אז בהכרח  $A \cup B$  בלתי תלויה לינארית.

ד. אם  $sp(A) \cup sp(B) = sp(A \cup B)$ , אז בהכרח  $A \cup B$  תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(28) וקטור הקואורדינטות של הפולינום  $2x^3 + 12x^2 - x + 11$ ,

ביחס לבסיס  $\{2x^3 + 3x^2 + 2, x + 1, x^3 + x^2, 2x^2 + 2\}$ , הוא:

א.  $(2, 2, -2, 4)$

ב.  $(4, -2, -1, 2)$

ג.  $(2, -1, -2, 4)$

ד.  $(4, -1, 2, 2)$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**(29)** תהי  $A$  מטריצה כלשהי. אזי בהכרח:

- אם שורות  $A$  בת"ל, אזי עמודות  $A$  בת"ל.
- אם שורות  $A$  בת"ל ועמודות  $A$  בת"ל, אזי בהכרח  $A$  מטריצה ריבועית.
- אם שורות  $A$  בת"ל ועמודות  $A$  בת"ל, אזי בהכרח  $A$  מטריצה הפיכה.
- אם שורות  $A$  בת"ל, אזי בהכרח למערכת  $Ax=0$  יש פתרון יחיד.
- אף תשובה אינה נכונה.

**(30)** נתונים תת-מרחבים של  $\mathbb{R}^4$  מעל  $\mathbb{R}$ :

$$U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+b+c=d\}$$

$$W = sp\{(1,0,1,1), (0,2,1,0), (0,1,1,1), (1,1,1,0)\}$$

- מצאו בסיס וממד עבור  $U, W, U \cap W$ .
- עבור תת מרחבים  $K, L$  של מרחב וקטורי  $V$ , הגדירו את  $K+L$ .

**(31)**  $A$  מטריצה לא ריבועית, כך שלמערכת המשוואות ההומוגנית  $Ax=0$  פתרון יחיד, אז:

- יש מערכת לא הומוגנית  $Ax=b$  ללא פתרון.
- יש מערכת לא הומוגנית  $Ax=b$  עם יותר מפתרון אחד.
- יש מערכת לא הומוגנית  $A^t y=c$  ללא פתרון.
- יש מערכת לא הומוגנית  $A^t y=c$  עם יותר מפתרון אחד.
- אף תשובה אינה נכונה.

**(32)** נתונות מטריצות ממשיות  $A$  מסדר  $2 \times 4$  ו- $B$  מסדר  $4 \times 4$ , כך ש- $rank(A)=2, rank(B)=3$ .

הוכיחו כי  $AB \neq 0$ .

**(33)**  $A$  מטריצה  $3 \times 3$ , כך ש- $A^2=0$  אבל  $A \neq 0$ , אז הדרגה של  $A$  יכולה להיות:

- 0
- 1
- 2
- 3

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**(34)** תהיינה  $A$  מטריצה מסדר  $3 \times 5$  ו- $B$  מטריצה  $5 \times 3$  אז:

- $AB$  הפיכה אם ורק אם  $BA$  הפיכה.
- $AB$  בהכרח לא הפיכה.
- $BA$  בהכרח הפיכה.
- אם  $AB=0$ , אז  $rank(A)+rank(B) \leq 5$ .

- (35)** אם  $A$  מטריצה, כך שלמערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A$  פתרון יחיד, אז בהכרח:
- $A$  הפיכה.
  - למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A'$  פתרון יחיד.
  - לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A$  פתרון יחיד.
  - מרחב העמודות של  $A$  שונה ממרחב הפתרונות של  $A$ .

### תשובות סופיות

- |          |          |          |             |
|----------|----------|----------|-------------|
| (11) א   | (12) ב   | (13) א   | (14) ד      |
| (15) ד+א | (16) ג   | (17) א+ג | (18) הוכחה. |
| (19) ד+ג | (20) ב   | (21) ב+ג | (22) ד      |
| (23) ה   | (24) ב+ד | (25) ב+ג | (26) א+ב    |
| (27) א   | (28) ג   | (29) ג   |             |
- $$B_U = \{(-1, 1, 00), (-1, 010), (1, 001)\}$$
- $$B_W = \{(100-1), (010-1), (0012)\}$$
- $$U \cap W = sp\{(1, 0, 2, 3), (0, 1, 2, 3)\}$$
- $$\dim U = 3, \quad \dim W = 3, \quad \dim(U \cap W) = 2$$
- |        |             |        |
|--------|-------------|--------|
| (31) ד | (32) הוכחה. | (33) ב |
| (34) ד | (35) ד      |        |

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 5 - מערכת משוואות לינאריות

תוכן העניינים

89	1. חזרה מאלגברה לינארית - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים
	2. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת הלכסון
91	

## חזרה מאלגברה לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

### שאלות

בשאלות הבאות מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של  $A$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

## תשובות סופיות

$$x = 0, x = 1, x = 2, v_{x=0} = (-1, 0, 1), v_{x=1} = (0, 1, 0), v_{x=2} = (1, 0, 1) \quad (1)$$

$$x = 6, x = 2, x = -4, v_{x=6} = (0, 0, 1), v_{x=2} = (1, 1, 1), v_{x=-4} = (-1, 1, 0) \quad (2)$$

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 3, v_{x=2} = (1, 1, 1), v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), v_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0) \quad (3)$$

$$x = 1, x = 3, x = -2, v_{x=1} = (-1, 4, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=-2} = (-1, 1, 1) \quad (4)$$

$$x = 1, x = 4, x = -1, v_{x=1} = (1, -2, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=-1} = (-1, 0, 1) \quad (5)$$

$$x = -1, x = 3, v_{x=-1} = (-1, 2), v_{x=3} = (1, 2) \quad (6)$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i, v_{x=1+2i} = (1 + i, 2), v_{x=1-2i} = (1 - i, 2) \quad (7)$$

$$x = 1, x = 1 + \sqrt{3}i, x = 1 - \sqrt{3}i, v_{x=1} = (1, 1, 1),$$

$$v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i, -2), v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -2) \quad (8)$$

## מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלכסון

### שאלות

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 1-2:

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (1)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ כד ש-}, \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

הוכיחו כי  $z(t) = y(t)$ .

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 4-5:

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z \\ y' = 3x + 2y - z \\ z' = 2x + y - z \end{cases} \quad (4)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (5)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ כד ש-}, \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} + \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0 \quad \text{חשבו:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} y_1' + 5y_1 - 2y_2' = 0 \\ 3y_2' - 4y_1' - 5y_2 = 0 \end{cases} \quad \text{פתרו את מערכת המשוואות:}$$

$$(8) \quad \text{פתרו: } \bar{x}'(t) = A \cdot \bar{x}(t), \text{ כאשר } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: בשאלות 7 ו-8 יש להגיע לפתרון המרוכב מהפתרון ממשי.

### תשובות סופיות

$$(1) \quad \underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \underline{x}(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad z(t) = y(t)$$

$$(4) \quad \underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad \underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(6) 0

$$(7) \quad \underline{x}(t) = c_1 e^t \left[ \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 e^t \left[ \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$(8) \quad \underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left[ \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ c_3 e^t \left[ \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 6 - שדות

תוכן העניינים

93	.....1. חזרה על מושגים מתורת הקבוצות.
97	.....2. שדות.

## חזרה על מושגים מתורת הקבוצות

### שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א.  $\forall x \forall y: (x+y)^2 > 0$

ב.  $\forall x \exists y: (x+y)^2 > 0$

ג.  $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד.  $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה.  $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$  ( $n$  ו- $k$  טבעיים).

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון  $x^2 > 4$ , הוא  $x > 2$  או  $x < -2$ .

ב. אי השוויון  $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל  $x$ .

ג. לכל מספר טבעי  $n$ , המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר  $x$ ,  $|x| < 1$  אם ורק אם  $-1 < x < 1$ .

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה.  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו.  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן

בצורה:  $A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א.  $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב.  $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג.  $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד.  $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה.  $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה  $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$ .

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א.  $5 \in A$       ב.  $2 \in A$       ג.  $\{2\} \in A$

ד.  $\{2\} \subseteq A$       ה.  $\{\{2\}\} \subseteq A$       ו.  $\emptyset \in A$

ז.  $\emptyset \subseteq A$       ח.  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$       ט.  $\{2, 4\} \subseteq A$

י.  $\{2, 4\} \in A$       יא.  $\{\{2, 4\}\} \in A$       יב.  $\{2, 5\} \subseteq A$

יג.  $\{2, 5\} \in A$       יד.  $\{1, 4\} \in A$

(7) מצאו שתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , המקיימות:

א.  $A \in B$

ב.  $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות:

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}, E = \{7, 8\}$$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה  $X$ :

א.  $X \subseteq A$  וגם  $X \not\subseteq D$ .

ב.  $X \subseteq D$  וגם  $X \not\subseteq C$ .

ג.  $X \subseteq E$  וגם  $X \not\subseteq A$ .

(9) הוכיחו:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .

10 נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את:

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

## תשובות סופיות

- (1) א. לכל  $x$  ולכל  $y$  מתקיים  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ב. לכל  $x$  קיים  $y$ , כך ש- $(x+y)^2 > 0$ . הטענה נכונה.  
 ג. לכל  $x$  ולכל  $y$  קיים  $z$  כך ש- $xz = \frac{y}{4}$ . הטענה אינה נכונה.  
 ד. לכל  $x$  חיובי ולכל  $y$  חיובי מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . הטענה נכונה.  
 ה. לכל  $n$  טבעי המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א.  $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$ . ב.  $\forall x: x^2 + 4 > 0$ .  
 ג.  $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$ . ד.  $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ .
- (3) א.  $A = (-4, 4)$ , בקבוצה אינסוף איברים.  
 ב.  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , בקבוצה 7 איברים.  
 ג.  $C = \{1, 2, 3\}$ , בקבוצה 3 איברים. ד.  $D = \{-3, -2, -1, 0\}$ , בקבוצה 4 איברים.  
 ה.  $E = \{0, 1\}$ , בקבוצה 2 איברים.  
 ו.  $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , בקבוצה 9 איברים.
- (4) א.  $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$ . ב.  $B = \{11, 13, 17, 19\}$ .  
 ג.  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ . ד.  $D = \{1, 4, 9, 16\}$ .
- (5) הקבוצות  $A, B$  ו- $C$  שוות זו לזו, והקבוצות  $D$  ו- $E$  שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.  
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.  
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7)  $A = \{1, 2\}$   $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א.  $A, C$ . ב.  $E, D$ . ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10)  $1) A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $2) A \cap B = \{4, 6, 8\}$ ,  $3) (A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$   
 $4) (B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$ ,  $5) (B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$

## שדות

## שאלות

- 1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור ( $\oplus$ ) וכפל ( $\otimes$ ) על  $R$ .  
בדקו, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y + 4 \\ x \otimes y &= 2xy \end{aligned} \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y \\ x \otimes y &= 2xy \end{aligned} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= y \\ x \otimes y &= y^2 \end{aligned} \quad \text{ג.}$$

- 2) נתונה הקבוצה  $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ .

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

הוכיחו שהקבוצה  $Q[\sqrt{2}]$ , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

- 3) נתונה הקבוצה  $C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ .

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

הוכיחו שהקבוצה  $C$ , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.  
באיזה שדה מפורסם מדובר?

- 4) ענו על הסעיפים הבאים:

- הוכיחו שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.
- הוכיחו שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.
- הוכיחו שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.
- הוכיחו שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

(5) יהיו  $a, b$  איברים בשדה.

א. הוכיחו כי  $a + a = a \Leftrightarrow a = 0$ .

ב. הוכיחו כי  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ .

ג. הוכיחו כי  $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ .

(6) יהיו  $a$  ו- $b$  איברים של שדה.

הוכיחו כי:

א.  $(-1) \cdot a = -a$

ב.  $(-a)b = a(-b) = -ab$

(7) הוכיחו שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.

כלומר, הוכיחו כי  $ab = cb \Rightarrow a = c$  לכל  $a, b, c$ , בשדה ( $b \neq 0$ ).

(8) הוכיחו שלכל שלושה איברים בשדה  $a, b, c, 0 \neq$ ,

קיים בשדה איבר יחיד  $x$ , כך ש- $ax + b = c$ .

(9) נתון  $F$  שדה, ויהיו  $x, y \in F$ , כך ש- $xy \neq 0, 1$ .

הוכיחו, בעזרת אקסיומות השדה, כי  $(x - xyx)^{-1} = x^{-1} + (y^{-1} - x)^{-1}$ , וכי שני האגפים של המשוואה לעיל מוגדרים היטב.

(10) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור וכפל על  $R^2$ .

א.  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$

ב.  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$

האם  $(R^2, +, \cdot)$  שדה?

(11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הקבוצה  $A = \{f : R \rightarrow R \mid \forall x, f(x) \neq 0\}$

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

האם הקבוצה  $A$ , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

ב. נתונה הקבוצה  $B = \{f : R \rightarrow R\}$

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור וכפל כמו בסעיף א'.

האם הקבוצה  $B$ , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

(12) יהי  $F$  שדה בעל מספר סופי של איברים.

הראו שלכל איבר  $a \neq 0$  ב- $F$ , קיים  $k$  טבעי, כך ש- $a^k = 1_F$ .

(13) נתון השדה  $Z_7$ .

א. רשמו את כל איברי השדה והגדירו את פעולות החיבור והכפל בשדה.

ב. מצאו את האיבר הנגדי לאיבר 3 ולאיבר 5 בשדה.

ג. מצאו את האיבר ההופכי לאיבר 4 ולאיבר 5 בשדה.

(14) נתונה הקבוצה  $Z_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}$ , מספר ראשוני.

כאשר  $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{p}$ , ו- $\bar{a} = \{x \in Z \mid a \equiv x \pmod{p}\}$ .

לכל  $\bar{a}, \bar{b}$  בקבוצה, נגדיר פעולות חיבור וכפל באופן הבא:

$$\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b}, \quad \bar{a} \otimes \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

הוכיחו ש- $(Z_p, \oplus, \otimes)$  מהווה שדה.

בקיצור, הוכיחו כי קבוצת השאריות מודולו  $p$ , כאשר  $p$  ראשוני, מהווה שדה.

## תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.

(11) בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) א. שאלת הוכחה.

ב. האיבר הנגדי לאיבר  $\bar{3}$  הוא  $\bar{4}$ , והאיבר הנגדי לאיבר  $\bar{5}$  הוא  $\bar{2}$ .

ג. האיבר ההופכי לאיבר  $\bar{4}$  הוא  $\bar{2}$ , והאיבר ההופכי לאיבר  $\bar{5}$  הוא  $\bar{3}$ .

(14) שאלת הוכחה.

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 7 - מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות

תוכן העניינים

100	1. מספרים מרוכבים - הכרות ותכונות בסיסיות
102	2. הצמוד המרוכב
105	3. הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית
107	4. נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב
109	5. תרגול נוסף במספרים מרוכבים
112	6. חילוק פולינומים
113	7. פתרון משוואות פולינומיאליות ממעלה גבוהה
114	8. שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה לינארית

## מספרים מרוכבים – היכרות ותכונות בסיסיות

### שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את המשוואות ומצאו את  $z$  :

$$(1) \quad z^2 + 9 = 0 \quad (2) \quad z^2 - 4z + 5 = 0 \quad (3) \quad z^2 - 6z + 13 = 0$$

בשאלות 4-7 חשבו :

$$(4) \quad (i\sqrt{2})^6 \quad (5) \quad (i^5 - i^{13})^2$$

$$(6) \quad (4+i) - (2+10i) \quad (7) \quad (-4-i)(2-3i)$$

(8) נתונים שני מספרים מרוכבים  $z_1 = a_1 + b_1i$  ו-  $z_2 = a_2 + b_2i$ .

ידוע כי  $z_1 + z_2$  ממשי וכי  $z_1 - z_2$  מדומה.

א. מצאו קשר בין  $a_1$  ל-  $a_2$  ובין  $b_1$  ל-  $b_2$ .

ב. הראו כי המכפלה  $z_1 \cdot z_2$  היא ממשית.

(9) יהיו  $z_1, z_2, \dots, z_n$  מספרים מרוכבים.

א. הוכיחו כי  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

ב. הוכיחו כי  $|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$

ג. הוכיחו כי  $|z_1^n| = |z_1|^n$

(10) יהי  $z$  מספר מרוכב.

הוכיחו: אם  $z^{11} = 1$  אז  $z + \frac{1}{z}$  מספר ממשי.

(11) יהי  $z$  מספר מרוכב.

הוכיחו: אם  $|z+1| = |z-1|$  אז  $iz$  מספר ממשי.

**תשובות סופיות**

- (1)  $\pm 3i$
- (2)  $2 \pm i$
- (3)  $3 \pm 2i$
- (4)  $-8$
- (5)  $0$
- (6)  $2 - 9i$
- (7)  $-11 + 10i$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.

## הצמוד המרוכב

### שאלות

בשאלות 1-3 חשבו (כתבו את התוצאה בצורה  $z = x + yi$ ):

$$\frac{i}{1-i} - \frac{1}{(i+1)^2} \quad (3)$$

$$\frac{1+i}{1-3i} \quad (2)$$

$$\frac{5}{2+i} \quad (1)$$

פתרו את המשוואות בשאלות 4-6 ומצאו את המספר המרוכב  $z$ :

$$(1+i)z^2 + 2z - i + 1 = 0 \quad (6)$$

$$\bar{z}z - 5\bar{z} = 10i \quad (5)$$

$$2z - 6i = \bar{z} - 1 \quad (4)$$

7 פתרו את מערכת המשוואות הבאה (כאשר  $z$  ו- $w$  משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases} 3z + iw = 5 - 4i \\ 5iz - 2w = 5 + 8i \end{cases}$$

8 חשבו את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א.  $\sqrt{5-12i}$

ב.  $\sqrt{8+6i}$

9 פתרו את המשוואות הריבועיות הבאות:

א.  $(1-i)z^2 - 2z + i + 1 = 0$

ב.  $(-2+i)z^2 - (6+12i)z + 10 - 25i = 0$

בשאלות 10-11 פתרו את המשוואות:

$$iz^2 - 2(1-i)z + 6 + 15i = 0 \quad (10)$$

$$z^2 - i\bar{z} + 6 = 0 \quad (11)$$

12 הוכיחו שהמספר הבא הוא מספר מדומה  $\frac{\bar{z}}{z^2} - \frac{z}{\bar{z}^2}$  כאשר  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**13** נתון מספר מרוכב  $z \neq 0$  המקיים:  $|z-i|=1$ .  
 הוכח:

א.  $|z|^2 = 2 \operatorname{Im}(z)$

ב.  $\frac{z-2i}{iz} \in \mathbb{R}$

**14** המספר  $\frac{3+4i}{a-i}$  הוא ממשי טהור.  
 מצאו את  $a$ .

**15** נתונים שני מספרים מרוכבים  $z_1 = a_1 + b_1i$  ו-  $z_2 = a_2 + b_2i$ .

הראו כי כדי שתוצאת החילוק  $\frac{z_1}{z_2}$  תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

## תשובות סופיות

(1)  $2 - i$

(2)  $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

(3)  $-\frac{1}{2} + i$

(4)  $z = -1 + 2i$

(5)  $z = 1 + 2i, z = 4 + 2i$

(6)  $z = i, z = -1$

(7)  $z = 2 - 3i, w = 5 + i$

(8) א.  $z = \pm(3 - 2i)$  ב.  $z = \pm(3 + i)$

(9) א.  $z_{1,2} = i, 1$  ב.  $z_{1,2} = -2 - i, 2 - 5i$

(10)  $z_1 = -2 - 5i, z_2 = 3i$

(11)  $z_1 - 3i, z_2 = 2i$

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14)  $a = -\frac{3}{4}$

(15) שאלת הוכחה.

## הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית

### שאלות

כתבו את המספרים בשאלות 1-8 בצורה קוטבית:

- (1)  $1 + \sqrt{3}i$     (2)  $-1 - i$     (3)  $-3 - \sqrt{3}i$     (4)  $1 - i$   
 (5)  $1 + i$     (6)  $\sqrt{3} - i$     (7)  $\sqrt{3}i$     (8)  $-8$

(9) נתון המספר המרוכב  $z = Rcis\theta$ .

הביעו באמצעות  $R$  ו- $\theta$  את המספרים:

- א.  $\bar{z}$   
 ב.  $\frac{1}{z}$   
 ג.  $-z$   
 ד.  $-\frac{1}{z}$   
 ה.  $iz$   
 ו.  $z \cdot \bar{z}$

(10) הראו כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

- א.  $z + \bar{z}$   
 ב.  $z \cdot \bar{z}$   
 ג.  $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$

(11) הראו כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

- א.  $z^2 - \bar{z}^2$   
 ב.  $\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$

(12) הוכיחו:

- א.  $z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz}$   
 ב.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

## תשובות סופיות

$$2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \quad (2)$$

$$\sqrt{12} \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad (5)$$

$$2 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \quad (6)$$

$$\sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \quad (7)$$

$$8(\cos \pi + i \sin \pi) \quad (8)$$

$$R \operatorname{cis}(180^\circ + \theta) \quad \text{ג.} \quad \frac{1}{R} \operatorname{cis}(-\theta) \quad \text{ב.} \quad R \operatorname{cis}(-\theta) \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$R^2 \quad \text{ו.} \quad R \operatorname{cis}(90^\circ + \theta) \quad \text{ה.} \quad \frac{1}{R} \operatorname{cis}(180^\circ + \theta) \quad \text{ד.}$$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

## נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב

### שאלות

בשאלות 1-6 חשבו:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100} \quad (3) \qquad (1 + \sqrt{3}i)^9 \quad (2) \qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{-8} \quad (6) \qquad \sqrt[5]{1} \quad (5) \qquad \sqrt[6]{-8} \quad (4)$$

(7) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו את הזהויות הבאות:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

(8) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו כי:  $\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}}$

## תשובות סופיות

$$\frac{1}{32}i \quad (1)$$

$$-2^9 \quad (2)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$8^{\frac{1}{6}} \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{6} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad (4)$$

$$1^{\frac{1}{5}} \left( \cos \frac{0 + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{5} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

$$8^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2 \quad (6)$$

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

## תרגול נוסף במספרים מרוכבים

### שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה  $z^4 + z^2 + 1 = 0$ .  
 ב. הראו כי אם  $z$  הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי:  $z^6 = 1$ .

(2) נתונה המשוואה  $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$ .

- א. מצאו את פתרונות המשוואה הנתונה.  
 ב. הוכיחו כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר מדומה טהור.

(3) פתרו את המשוואה  $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$ .

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מצאו את שלושת הפתרונות של המשוואה  $z^3 = i$ .  
 ב. הראו שמכפלת שלושת הפתרונות היא  $i$ .  
 ג. הראו שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת שני הפתרונות האחרים.

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. פתרו את המשוואה  $z^5 = -16(\sqrt{3} - i)$ .  
 ב. הוכיחו כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצאו את מנת הסדרה.  
 הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה  $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$ , כאשר  $q$  מנת הסדרה.

(6) נתון  $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ .

- א. מצאו את פתרונות המשוואה  $z^3 = w^3$ .  
 ב. הראו כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא  $w^3$ .

(7) נתונה המשוואה  $(z-1)^3 = 1$ .  
הוכיחו שסכום שורשיה הוא 3.

(8) נתונה המשוואה  $z^3 = -\sqrt{3} + i$ .  
א. מצאו את שורשי המשוואה:  $z_1, z_2, z_3$ .  
ב. מצאו את הסכום  $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3$ .  
ג. הראו כי הסכום  $(z_1)^9 + (z_2)^9 + (z_3)^9$  הוא מספר מדומה טהור.

(9) נתונה המשוואה  $z^2 + |z|^2 - 2ti = 18s^2$ , כאשר  $z$  הוא מספר מרוכב,  
 $s$  ו- $t$  הם מספרים ממשיים שונים מאפס ו- $z_1, z_2$  הם פתרונות המשוואה.  
א. הביעו את פתרונות המשוואה באמצעות  $s$  ו- $t$ .  
ב. נתון  $z_1 \cdot z_2 = -18i$ . מצאו את הפרמטרים  $s$  ו- $t$ .

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. פתרו את המשוואה  $\bar{z} \cdot i + (\bar{z})^2 + |z|^2 + z + \bar{z} = 0$ .  
ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית,  
שכל איבריה שונים מאפס.  
הפרש סדרה זו הוא  $1 + \frac{1}{16}i$ .  
האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.  
חשבו את האיבר הראשון בסדרה.  
הערה: סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה:  $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d$ ,  
כאשר  $d$  נקרא הפרש הסדרה.

## תשובות סופיות

- (1) א.  $z_1 = cis60^\circ, z_2 = cis240^\circ, z_3 = cis120^\circ, z_4 = cis300^\circ$ . ב. שאלת הוכחה.
- (2) א.  $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = -\sqrt{3} + i, z_3 = -1 - \sqrt{3}i, z_4 = \sqrt{3} - i$ . ב. שאלת הוכחה.
- (3)  $z = 0, z = 1, z = -1$
- (4) א.  $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_3 = -i$ . ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.
- (5) א.  $z_n = 2cis[30^\circ + (n-1)72^\circ]$   $n = 1, 2, 3, 4, 5$ . ב.  $q = cis72^\circ$
- (6) א.  $z_1 = cis45^\circ, z_2 = cis165^\circ, z_3 = cis285^\circ$ . ב. שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) א.  $z_1 = \sqrt[3]{2}cis50^\circ, z_2 = \sqrt[3]{2}cis170^\circ, z_3 = \sqrt[3]{2}cis290^\circ$ . ב. 6. ג. שאלת הוכחה.
- (9) א.  $z_1 = -3s - \frac{t}{3s}i, z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i$ . ב.  $t = 9, s = \pm 1$
- (10) א.  $z_1 = 0, z_2 = -0.5 + 0.5i, z_3 = -8.5$ . ב.  $a_1 = -8.5$

## חילוק פולינומים

### שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים הבאים :

$$\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad (2)$$

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad (1)$$

$$\frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} \quad (4)$$

$$\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2} \quad (3)$$

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3} \quad (6)$$

$$\frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1} \quad (5)$$

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5} \quad (8)$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3} \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$x^2 + 1 \quad (1)$$

$$0 \quad (2)$$

$$4x + 9 + \frac{17}{x - 2} \quad (3)$$

$$x - 7 \quad (4)$$

$$x^2 + 2x + 5 \quad (5)$$

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 1 \quad (6)$$

$$x^2 - x - 3 \quad (7)$$

$$x^2 - 4 \quad (8)$$

## פתרון משוואות פולינומיאליות ממעלה גבוהה

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0 \quad (1)$$

$$k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0 \quad (2)$$

$$k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0 \quad (3)$$

$$k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0 \quad (4)$$

$$k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0 \quad (5)$$

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \quad (6)$$

$$k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0 \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3, \quad k_4 = -5 \quad (1)$$

$$k_1 = -4, \quad k_{2,3} = 1 \pm 2i \quad (2)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = -1 \quad (3)$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 2 \quad (4)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = 1, \quad k_6 = -1 \quad (5)$$

$$k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \pm i \quad (6)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_{3,4} = \pm 2i \quad (7)$$

## שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה לינארית

### שאלות

בשאלות 1-4 נתון  $u = (3 - 2i, 4i, 1 + 6i)$ ,  $v = (5 + i, 2 - 3i, 7 + 2i)$   
מצאו:

(1) א.  $4u + v$       ב.  $2i \cdot u - v$       (2)  $u \cdot v$

(3) א.  $u \cdot u$       ב.  $|u|$

(4)  $|v|$

בשאלות 5-6 פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס,

$$z_1 + iz_2 + (1 - i)z_3 = 1 + 4i$$

מעל השדה  $\mathbf{F}$ :  $iz_1 + z_2 + (1 + i)z_3 = 2 + i$  , כאשר:

$$(-1 + 3i)z_1 + (3 - i)z_2 + (2 + 4i)z_3 = 5 - i$$

(5)  $\mathbf{F} = \mathbb{R}$

(6)  $\mathbf{F} = \mathbb{C}$

בשאלות 7-8 בדקו האם  $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_2 = \bar{z}_1, z_3 = z_1 + \bar{z}_1\}$   
הוא תת-מרחב של  $C^3$ :

(7) מעל השדה הממשי  $\mathbb{R}$ .

(8) מעל שדה המרוכבים  $\mathbb{C}$ .

בשאלות 9-10 בדקו האם הווקטורים  $\{(1, i, i - 1), (i + 1, i - 1, -2)\}$   
תלויים ליניארית ב- $C^3$ :

(9) מעל  $\mathbb{C}$ .

(10) מעל  $\mathbb{R}$ .

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **11-13** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה. כלומר, מצאו מטריצה הפיכה  $P$ , כך ש- $P^{-1}AP = D$ , באשר  $D$  מטריצה אלכסונית. פתרו פעם מעל  $\mathbb{C}$  ופעם מעל  $\mathbb{R}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(12)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(11)}$$

$$\text{(13) נתונה מטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

מצאו את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של המטריצה.

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (17 - 7i, 2 + 13i, 11 + 26i) \quad \text{ב. } (-1 + 5i, -10 + 3i, -19)$$

$$(2) \quad \text{א. } 20 + 35i \quad \text{ב. } 66$$

$$(3) \quad \sqrt{66}$$

$$(4) \quad \sqrt{92}$$

$$(5) \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{R}} = (2, 3, -1)$$

$$(6) \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{C}} = ((-1+i)t + 1 + i, 3, t)$$

$$(7) \quad \text{כן}$$

$$(8) \quad \text{לא}$$

$$(9) \quad \text{תלויים.}$$

$$(10) \quad \text{בלתי תלויים.}$$

$$(11) \quad \text{אין פתרונות מעל } \mathbb{R}, \text{ ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.}$$

$$\text{מעל } \mathbb{C} : x = 1 \pm 2i, \mathbf{v}_{x=1-2i} = \langle 1-i, 2 \rangle, \mathbf{v}_{x=1+2i} = \langle 1+i, 2 \rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

$$(12) \quad \text{ערכים עצמיים : } x = 3, \text{ וקטורים עצמיים : } \mathbf{v}_{x=3} = \langle -1, 1 \rangle. \text{ לא ניתנת ללכסון.}$$

$$(13) \quad \mathbf{v}_{x=1+\sqrt{3}i} = \langle 1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i, -2 \rangle, \mathbf{v}_{x=1} = \langle 1, 1, 1 \rangle, x = 1, x = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\mathbf{v}_{x=1-\sqrt{3}i} = \langle 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -2 \rangle$$

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 8 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

117	1. קווים ותחומים במישור.....
121	2. קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית.....
127	3. קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית).....
132	4. משטחים במרחב.....
(ללא ספר)	5. משטחים במרחב בהצגה פרמטרית.....
134	6. גופים במרחב.....
137	7. קואורדינטות גליליות וכדוריות.....
141	8. נספח – משטחים ממעלה שנייה.....

## קווים ותחומים במישור

### שאלות

1) שרטטו במישור את התחומים הבאים :

א.  $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומים הבאים :

א.  $S = \{(x, y) \mid x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid |y - 2x| \leq 1\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid |x| + y < 4\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid (x + y)^2 \leq 4, x > 1\}$

3) מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים :

א.  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

ב.  $x^2 + y^2 - 8y = -15$

ג.  $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א.  $y = \sqrt{1 - x^2}$

ב.  $y = -\sqrt{1 - x^2}$

ג.  $x = \sqrt{1 - y^2}$

ד.  $x = -\sqrt{1 - y^2}$

ה.  $0 \leq x \leq 1, y = \sqrt{1 - x^2}$

ו.  $-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}, y = \sqrt{1 - x^2}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א.  $y = 2 + \sqrt{1 - (x-3)^2}$

ב.  $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

ג.  $x \geq 3.5, \quad x = 4 - \sqrt{1 - y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

ה.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ו.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$

ז.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ח.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y + 1 \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$

ה.  $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו.  $S = \{(x, y) \mid |x - 1| \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2}\}$

10) נתונה המשוואה  $25x^2 + 4y^2 - 50x + 16y = 59$ .

- א. הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.  
 ב. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.  
 ג. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.  
 ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?  
 ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א.  $S = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 \geq 0\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{2}y + 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq -x^2\}$

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq -x^2\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid y^2 - 2 \leq x \leq -y^2\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 1 - y\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$

ב.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$

ג.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, y \geq \frac{1}{4}x^2 \right\}$

ד.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1, x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$

### תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית

### שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א.  $x = t^2 + 1, y = t^2, t \geq 0$

ב.  $x = \sin t, y = \cos^2 t, 0 \leq t \leq \pi$

ג.  $x = \cos t, y = 4 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$

2) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.

על ידי חילוץ של הפרמטר  $t$ , מצאו משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים  $x$  ו- $y$  בלבד:

א.  $x = t - 4, y = t^2$

ב.  $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג.  $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד.  $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה.  $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו.  $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$  (קבוע  $k$ ).

3) נתון המעגל  $x^2 + y^2 = 8$ .

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה  $A(2,2)$  לנקודה  $B(-2,-2)$ .

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום  $D$ , המוגבל מעל הישר  $AB$  ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום  $E$ , המוגבל בין המעגל הנתון למעגל  $x^2 + y^2 = 16$ .

$$(4) \quad \text{נתונים שני מעגלים } (x-8)^2 + (y-4)^2 = 25 \text{ ו- } x^2 + y^2 = 25.$$

- א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתחום הכלוא בכל אחד מהמעגלים.
- ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, A ו-B, ותהי הנקודה A בעלת ערך ה- $y$  הגדול יותר.
- מצאו את ההצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין A לבין B. הפרידו לשני מקרים.
- ג. מצאו הצגה אלגברית לתחום החסום בין שני המעגלים.

$$(5) \quad \text{נתונות משוואות של שתי אליפסות: } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

- א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצגתן הפרמטרית.
- ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.
- ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות.
- מצאו את ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

$$(6) \quad \text{נתונה היפרבולה } 4x^2 - y^2 = 4.$$

- א. ההיפרבולה מורכבת משתי מסילות.
- מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ב. הציגו באופן פרמטרי את התחום המוגבל בין ההיפרבולה לבין האסימפטוטות שלה.

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } 3x^2 - y^2 = 3.$$

- א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.
- ב. הקו מסעיף א' מורכב משתי מסילות.
- מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ג. המסילה C היא חלק של הקו הנתון מהנקודה A(-2, -3) לנקודה B(-1, 0).
- כתבו את C בצורה פרמטרית.
- ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- $y$  למסילה C.

$$(8) \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad \text{חשבו את אורך העקום} \quad .0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(9) \quad \begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases} \quad \text{חשבו את אורך העקום} \quad .-\pi \leq t \leq 2\pi$$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } y = (x+4)^2 \quad \text{ב. } (x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

$$(3) \quad \begin{cases} x(t) = \sqrt{8} \cos t \\ y(t) = \sqrt{8} \sin t \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{א. } 0 \leq t \leq 2\pi \\ \text{ב. } \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4} \end{matrix}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{8}u \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{8}u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{ד. } \begin{cases} x(u, v) = u \cos v \\ y(u, v) = u \sin v \end{cases} \quad \sqrt{8} \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$(4) \quad \text{א. המעגל } x^2 + y^2 = 25 \text{ : מרכז } (0, 0) \text{ . רדיוס : } 5.$$

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של המעגל}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = 5u \cos v \\ y(u, v) = 5u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של העיגול}$$

$$\text{המעגל } (x-8)^2 + (y-4)^2 = 25 \text{ : מרכז } (8, 4) \text{ . רדיוס : } 5.$$

$$\begin{cases} x(t) = 8 + 5 \cos t \\ y(t) = 4 + 5 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של המעגל}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = 8 + 5u \cos v \\ y(u, v) = 4 + 5u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של העיגול}$$

$$\text{ב. מקרה 1 : } \begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{מקרה 2 - } \begin{cases} x = 8 + 5 \cos t \\ y = 4 + 5 \sin t \end{cases}, \quad \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \pi$$

$$\text{ג. } \{(x, y) \mid -\sqrt{25 - (y-4)^2} + 8 \leq x \leq \sqrt{25 - y^2}\}$$

$$(5) \quad \begin{cases} x(t) = 2 \cos t, y(t) = \sqrt{2} \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ x(t) = \sqrt{2} \cos t, y(t) = 2 \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\text{ב. } A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), D\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad : DA \text{ המסילה}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \quad : BC \text{ המסילה}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \arctan(\sqrt{2}) \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi \quad : AB \text{ המסילה}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi \quad : CD \text{ המסילה}$$

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

$$D_1: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}u \cos v \\ y(u, v) = 2u \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_3: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}u \cos v \\ y(u, v) = 2u \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi$$

$$D_2: \begin{cases} x(u, v) = 2u \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}u \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi$$

$$D_4: \begin{cases} x(u, v) = 2u \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}u \sin v \end{cases} \quad \cdot \uparrow$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi$$

$$(6) \quad \text{א. אלגברית: ימנית } x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}, \text{ שמאלית } x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}$$

$$\cdot \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} : \text{שמאלית}, \begin{cases} x = \cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} : \text{ימנית}$$

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1 : \begin{cases} x(u, v) = u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R} \quad \text{ב.}$$

$$D_2 : \begin{cases} x(u, v) = -u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R}$$

$$(7) \quad \text{א. היפרבולה. ב. אלגברית: ימנית } x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}, \text{ שמאלית } x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}$$

$$\cdot \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} : \text{וענף שמאלי}, \begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} : \text{ענף ימני}$$

$$1. \tau \quad C : \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} \quad \ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0 \quad \text{ג.}$$

8 (8)

6π√29 (9)

## קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

### שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית  $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$  לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית  $(-1, -1)$  לנקודה קוטבית.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית  $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$  לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית  $(0, -4)$  לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית  $(-2, 2)$  לנקודה קוטבית.

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה  $4x - x^2 = 1 + xy$  לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה  $r = -4\cos\theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה  $x^2 + y^2 = 4y$  לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה  $x = 10$  לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה  $y = 4$  לקואורדינטות פולריות.

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה  $r = 4$  לקואורדינטות קרטזיות.

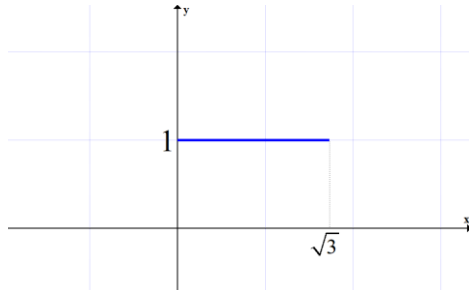
ב. המירו את המשוואה  $\theta = \pi/4$  לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשוואה  $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

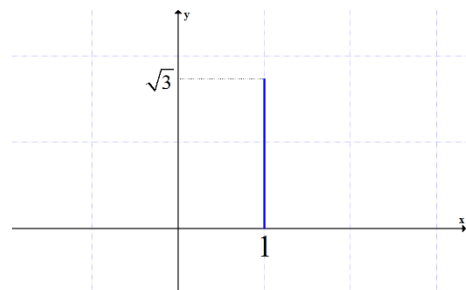
ד. המירו את המשוואה  $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

6) להלן שני איורים, שבכל אחד מהם קו. כתבו כל אחד מהקווים בהצגה פולרית.

איור ב



איור א



7) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. כתבו אותו בהצגה פולרית.

א.  $y = \sqrt{1-x^2}$

ב.  $y = -\sqrt{1-x^2}$

ג.  $x = \sqrt{1-y^2}$

ד.  $x = -\sqrt{1-y^2}$

ה.  $y = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$

ו.  $y = \sqrt{1-x^2}, -\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$

8) בסעיפים א-ג הוכיחו שכל אחד מהקווים מתאר חלק ממעגל. שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א.  $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$

ב.  $x = -\sqrt{6y-y^2}$

ג.  $y = -1 + \sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מתאים. מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

10) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

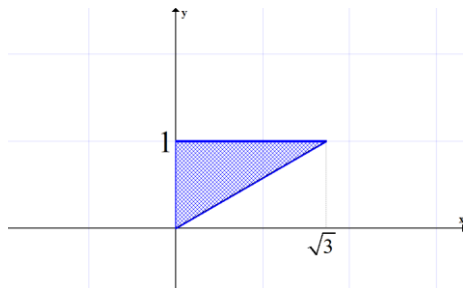
ב.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

12) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית:  $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

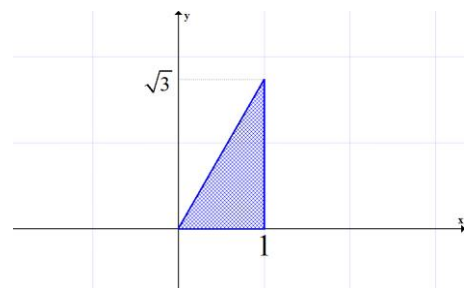
13) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית:  $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x - x^2}\}$

14) להלן שני איורים, ובכל איור תחום. כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור ב



איור א



## תשובות סופיות

$$(r, \theta) = \left( \sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right) \text{ ב. } (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ א. (1)}$$

$$(r, \theta) = \left( \sqrt{8}, \frac{3\pi}{4} \right) \text{ ג. } (r, \theta) = \left( 4, \frac{3\pi}{2} \right) \text{ ב. } (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ א. (2)}$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב. } 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ א. (3)}$$

$$r \sin \theta = 4 \text{ ג. } r \cos \theta = 10 \text{ ב. } r = 4 \sin \theta \text{ א. (4)}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג. } y = x \text{ ב. } x^2 + y^2 = 4^2 \text{ א. (5)}$$

$$6(\sqrt{x^2 + y^2})^3 \cdot y = 4\sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ד.}$$

$$r = \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ ב. } r = \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ א. (6)}$$

$$\begin{cases} r=1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ג. } \begin{cases} r=1 \\ \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ ב. } \begin{cases} r=1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ א. (7)}$$

$$\begin{cases} r=1 \\ \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left( -\frac{4}{3} \right) + \pi \end{cases} \text{ ו. } \begin{cases} r=1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ה. } \begin{cases} r=1 \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \text{ ד.}$$

$$r = 6 \sin \theta, 0.5\pi \leq \theta \leq \pi \text{ ב. } r = 4 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \text{ א. (8)}$$

$$r = -\frac{1}{\sin \theta}, 1.25\pi \leq \theta \leq 1.75\pi \text{ ד. } \begin{cases} r = -2 \sin \theta \\ \pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ or } 1.75\pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ ג.}$$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} \text{ ג. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ ב. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ א. (9)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ ג. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ ב. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ א. (10)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ ד.}$$

$$0 \leq r \leq 2, 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ ב. } 1 \leq r \leq 2 \text{ א. (11)}$$

$$0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2$$

$$\frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \text{ (12)}$$

$$\arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left( -\frac{3}{4} \right) + \pi$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ב.} \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{א.} \quad (14)$$

## משטחים במרחב

### שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

זהו ושרטטו את המשטחים הבאים :

$$z = 4x^2 + y^2 + 1 \quad \text{א.}$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \text{ב.}$$

זהו כל אחד מהמשטחים הבאים :

$$25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100 \quad \text{א.}$$

$$25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0 \quad \text{ג.}$$

מצאו את החיתוך בין המשטח  $x^2 + y^2 + z^2 = 169$  לבין המשטח  $z = 12$ .  
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$  :

א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר  $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$ .

מצאו את החיתוך בין המשטחים  $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$  ו-  $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ .  
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח  $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$  :

א. זהו את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

- 10 נתונים שני משטחים:  $R: x^2 - y^2 + 2z^2 = 3$ ,  $Q: 2x^2 - y^2 + z^2 = 3$ .
- זהו את המשטחים ושרטטו אותם.
  - הראו כי החיתוך בין  $R$  ו- $Q$  הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.
  - המסילה  $C$  היא חלק של החיתוך בין  $R$  ל- $Q$ . נתון כי  $A(-2, -3, 2)$  היא נקודת התחלה של  $C$  ו- $B(-1, 0, 1)$  היא נקודת סיום של  $C$ . כתבו את  $C$  בצורה פרמטרית.
  - מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- $y$  למסילה  $C$ .

• בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

### תשובות סופיות

- אליפסואיד.
- פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
- היפרבולואיד חד יריעתי.
- א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 1)$  ונפתח כלפי מעלה.  
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 3)$  ונפתח כלפי מטה.
- א. אליפסואיד.  
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(1, 2, 0)$  ונפתח כלפי מעלה.  
ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 10)$ .
- החיתוך הוא מעגל  $x^2 + y^2 = 25$ , שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 12)$ .
- א. ספירה שמרכזה  $(4, 1, -10)$  ורדיוסה  $\sqrt{14}$ .
- נקודות החיתוך הן  $A(7, 0, -12)$ ,  $B\left(\frac{59}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9}\right)$ .
- החיתוך הוא המעגל  $x^2 + y^2 = 15$ , שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 7)$ .
- א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- $y$ .  
ב.  $\ell_1: (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$   $\ell_2: (x, y, z) = (3, 2t, t)$
- א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי. ב.  $z = -x, z = x$ .  
ג.  $\ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0$   $C: x = -\cosh t, y = \sqrt{3} \sinh t, z = \cosh t$ . ד.  $\sqrt{2}$

## גופים במרחב

### שאלות

1 שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

ו.  $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 0\}$

ז.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$

2 שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג.  $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ד.  $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$

ה.  $V = \{(x, y, z) \mid 1 \leq z \leq 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\}$

3 שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3(x^2+y^2)}\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2+y^2 \leq 1\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 3, x \geq 0, z \geq 0, x^2+z^2 \leq 4\}$

ה.  $V = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 36, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$

4) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

5) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב.  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

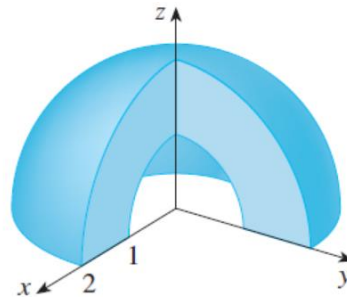
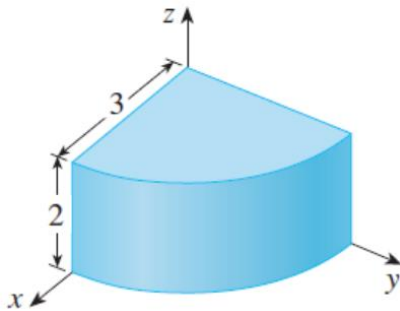
ה.  $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף  $V$  במרחב.

תארו במילים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית  $V = \{(x, y, z) \mid \dots\}$ .

א.

ב.



7) נתונים המשטחים  $z = x^2 + y^2$  ו-  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

(8) נתונים שני משטחים:  $z = x^2 + y^2 + z^2$  ו-  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית

$$V = \{(x, y, z) \mid ? \leq z \leq ??\}$$

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

$$M : x^2 - y^2 + 2z^2 \leq 3$$

$$N : 2x^2 - y^2 + z^2 \leq 3$$

(9) תחומים תלת-ממדיים  $M$  ו-  $N$  נתונים על ידי

תחום תלת-ממדי  $W$  הוא החיתוך בין  $M$  ל-  $N$ .  
 שרטטו את  $D$ , החיתוך של  $W$  עם המישור  $y=1$  (במערכת צירים  $xz$ ),  
 וכתבו את  $D$  בהצגה פרמטרית.

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## קואורדינטות גליליות וכדוריות

### שאלות

- (1) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית. מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית. מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.
- א.  $z = 3$   
 ב.  $z = 4x^2 + 4y^2$   
 ג.  $x^2 + y^2 = 4$
- (2) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית. מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית. מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.
- א.  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$   
 ב.  $2x + 3y + 4z = 1$   
 ג.  $x^2 = 16 - z^2$   
 ד.  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
- (3) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת גלילית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.
- א.  $r = 3$   
 ב.  $z = r^2$   
 ג.  $z = r$   
 ד.  $\theta = \frac{\pi}{4}$   
 ה.  $r = 4 \sin \theta$   
 ו.  $r^2 \cos 2\theta = z$

- 4) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א.  $r = 3$

ב.  $\theta = \frac{\pi}{3}$

ג.  $\phi = \frac{\pi}{4}$

ד.  $r = 2 \sec \phi$

ה.  $r = 4 \cos \phi$

- 5) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א.  $r \sin \phi = 1$

ב.  $r \sin \phi = 2 \cos \theta$

ג.  $r - 2 \sin \phi \cos \theta = 0$

- 6) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}\}$

- 7) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

- 8) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד.  $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

## תשובות סופיות

1 א. מערכת גלילית:  $z = 3$ . מערכת כדורית:  $r = \frac{3}{\cos \phi}$ . שם המשטח: מישור.

ב. מערכת גלילית:  $z = 4r^2$ . מערכת כדורית:  $r = \frac{\cos \phi}{4 \sin^2 \phi}$ .

שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת גלילית:  $r = 2$ . מערכת כדורית:  $r = \frac{2}{\sin \phi}$ . שם המשטח: גליל.

2 א. מערכת גלילית:  $r^2 + z^2 = 9$ . מערכת כדורית:  $r = 3$ . שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת גלילית:  $r(2 \cos \theta + 3 \sin \theta) + 4z = 1$ .

מערכת כדורית:  $r(2 \cos \theta \sin \phi + 3 \sin \theta \sin \phi + 4 \cos \phi) = 1$ .

שם המשטח: מישור.

ג. מערכת גלילית:  $r^2 \cos^2 \theta + z^2 = 16$ . מערכת כדורית:  $r^2(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) = 16$ .

שם המשטח: גליל.

ד. מערכת גלילית:  $z = r$ . מערכת כדורית:  $\phi = \frac{\pi}{4}$ . שם המשטח: חרוט.

3 א. מערכת קרטזית:  $x^2 + y^2 = 9$ . שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית:  $z = x^2 + y^2$ . שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת קרטזית:  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית:  $y = x$ . שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית:  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ . שם המשטח: גליל.

ו. מערכת קרטזית:  $z = x^2 - y^2$ . שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

4 א. מערכת קרטזית:  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ . שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת קרטזית:  $y = \sqrt{3}x$ . שם המשטח: מישור.

ג. מערכת קרטזית:  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית:  $z = 2$ . שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית:  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$ .

שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה  $(0, 0, 2)$  ורדיוסה 2.

5 א. מערכת קרטזית:  $x^2 + y^2 = 1$ . שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית:  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ . שם המשטח: גליל.

ג. מערכת קרטזית:  $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ . שם המשטח: ספירה.

6 א.  $V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 2 - r^2\}$

ב.  $V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq \sqrt{6 - r^2}\}$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{0.5}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq 1 - r^2\} \quad \text{א. (7)}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi, 0 \leq z \leq 4 - r^2\} \quad \text{ב.}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\} \quad \text{א. (8)}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\} \quad \text{ב.}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\} \quad \text{ג.}$$

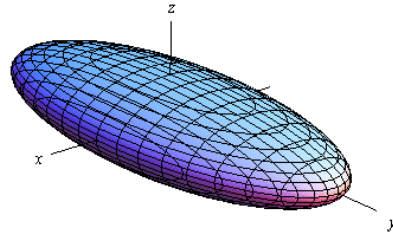
$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 10 - r \sin \theta\} \quad \text{ד.}$$

## נספח – משטחים ממעלה שנייה

### אליפסואיד

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

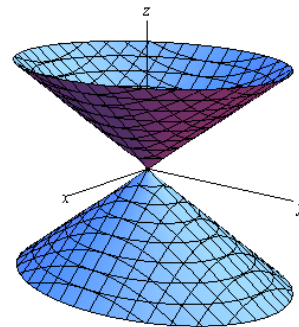
תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם  $a=b=c$ , נקבל כדור עם רדיוס  $a$  והחתכים הנ"ל הם מעגלים.



### חרוט אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

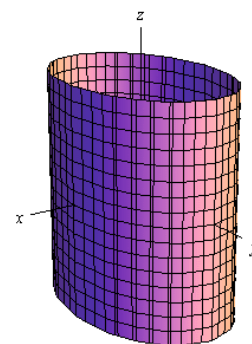
תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. \* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.



### גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא  $x^2 + y^2 = r^2$ , החתכים הנ"ל הם מעגלים. \* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

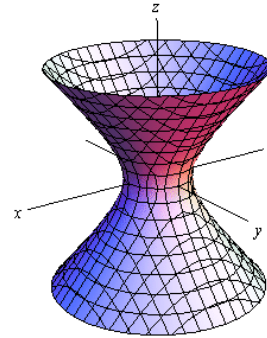


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

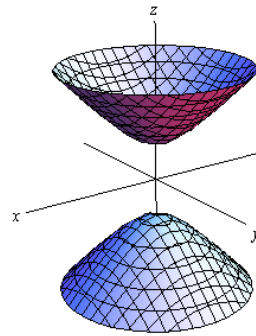
\* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

**תיאור:** למשטח זה אין חתך במישור  $xy$ ; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

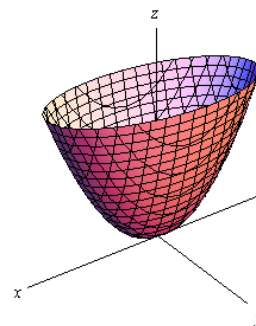
פרבולואיד אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

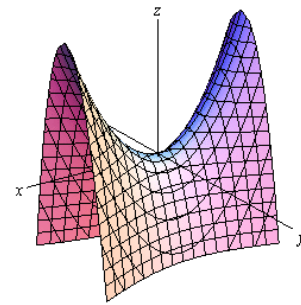
**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



### פרבולואיד היפרבולי



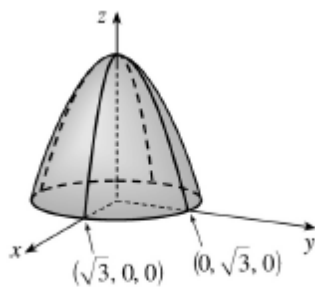
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם היפרבולות; אלו שמעל למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $x$  ואלו שמתחת למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $y$ . החתכים במישור  $xz$  ו- $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

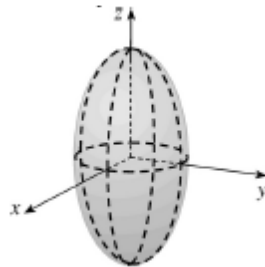
\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

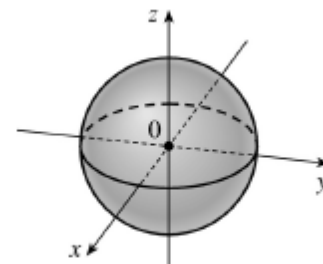
### דוגמאות שונות



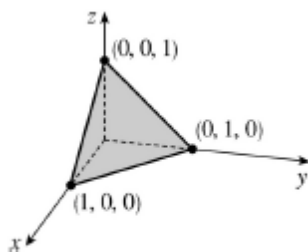
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



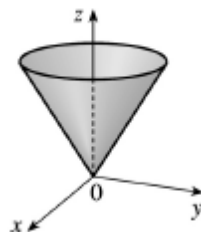
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



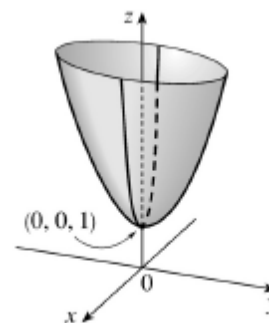
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 9 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים

1. מבוא לפונקציה של שני משתנים ..... 144
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים ..... 146
3. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים ..... 148
4. נספח – משטחים ממעלה שנייה ..... 149

## מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה  $D$  של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיזה של הקבוצה  $D$ .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x + y}{x - y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x + 4y} + \sqrt{x - 4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x + 4y}} + \frac{1}{\sqrt{x - 4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y + 4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left( \frac{x - 4y}{x + 4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln[x \ln(y - 4x)] \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (11)$$

(ענו על סעיף א בלבד)

$$f(x, y) = \tan \frac{y}{x} \quad (12)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

$$f(x, y) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)} \quad (13)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

### תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x + 1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x + 1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (12)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \neq 2 < 4 \right\} \quad (13)$$

## קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטטו מפת קווי גובה:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטטו את קו הגובה  $k$ :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

- א. שרטטו את קו הגובה  $f(x, y) = 0$ .
- ב. לאילו ערכי  $C$  קו הגובה  $f(x, y) = C$  הוא קו רציף?  
 ציירו את קו הגובה במקרה זה.

### הערות

- \* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
- \*\* קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

### תשובות סופיות

- (1)  $x \neq 0$ , המישור ללא ציר ה- $y$ .
- (2)  $x > 0, y > 0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור.
- (4)  $x^2 + y^2 \leq 1$ , עיגול היחידה.
- (5)  $y < x^2$
- (6)  $y \geq 0$ , חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר: [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

### שאלות

- (1) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} - z$ . מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטטו אותו.
- (2) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = z + x^2 + y^2$ . מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטטו אותו.
- (3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את משטחי הרמה:  
 א.  $f(x, y, z) = 4^{x+y-z}$   
 ב.  $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$
- (4) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$ . מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.
- (5) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2$ . מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

### תשובות סופיות

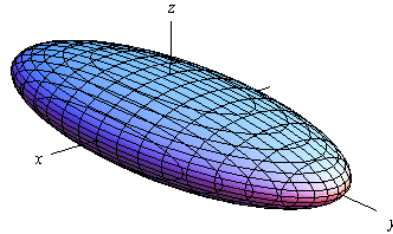
- (1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה  $(0, 0, -2)$  ורדיוסה 2.
- (2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 4)$  ונפתח כלפי מטה.
- (3) א. מישורים.  
 ב. משטח רמה  $k$  הוא פרבולואיד אליפטי, שמרכזו בנקודה  $(0, 0, k)$  ונפתח כלפי מעלה.
- (4) עבור  $k < 0$  לא קיים משטח רמה  $k$ .  
 עבור  $k = 0$  נקודה  $(0, 0, 0)$ . עבור  $k = 1$  מישורים.  
 עבור  $k > 1$  חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- $y$ .  
 עבור  $0 < k < 1$  חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- $z$ .
- (5) עבור  $k < 0$  היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור  $k = 0$  חרוט אליפטי.  
 עבור  $k < 0$  היפרבולואיד דו-יריעתי.

## נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

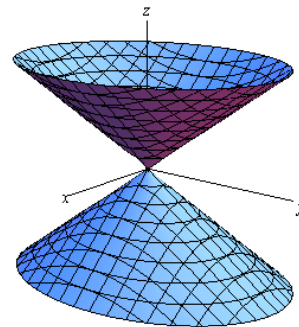
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם  $a=b=c$ , נקבל כדור עם רדיוס  $a$  והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

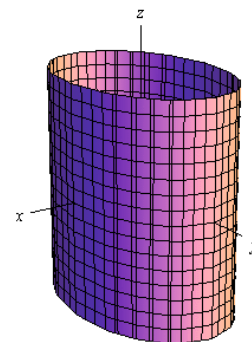
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. \* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא  $x^2 + y^2 = r^2$ , החתכים הנ"ל הם מעגלים. \* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

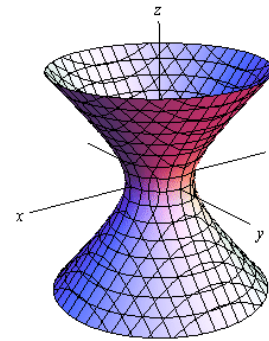


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

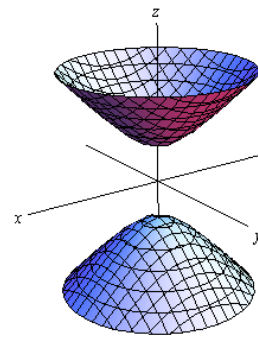
\* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

**תיאור:** למשטח זה אין חתך במישור  $xy$ ; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

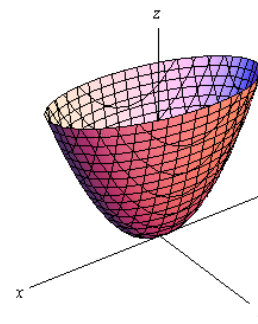
פרבולואיד אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

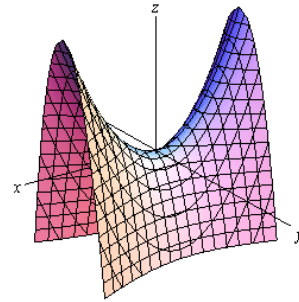
**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



### פרבולואיד היפרבולי



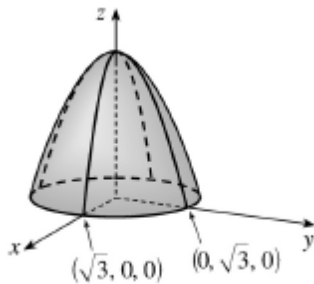
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם היפרבולות; אלו שמעל למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $x$  ואלו שמתחת למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $y$ . החתכים במישור  $xz$  ו- $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

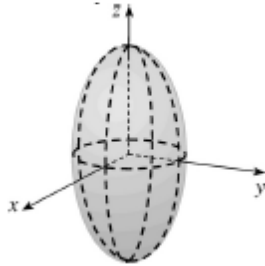
\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

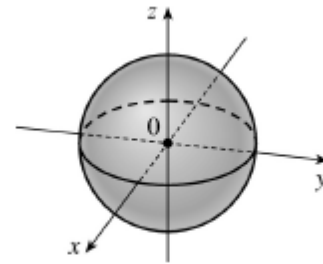
### דוגמאות שונות



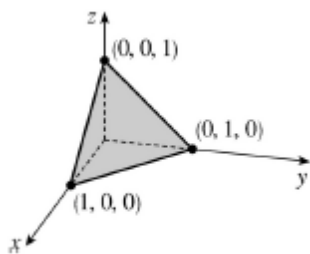
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



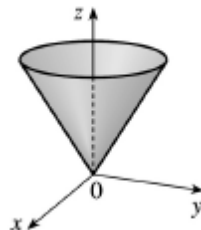
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



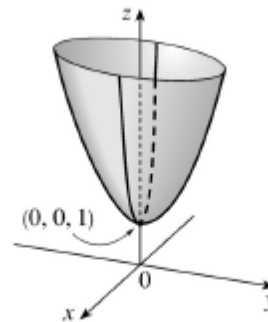
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 10 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

152	.....	1. גבול של פונקציה של שני משתנים
155	.....	2. רציפות של פונקציה של שני משתנים
158	.....	3. נוסחאות – גבולות

## גבול של פונקציה של שני משתנים

### שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-9:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy - 6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x + y - 3)}{\ln(x + y - 2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1^+, 1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x + 2y - 3})}{x + 2y - 3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x + y - 3} - 1}{2x + y - 4} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (7)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2 + z^2))}{xy^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (9)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 10-17 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (11)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (10)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (13)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (17)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (16)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 18-25 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (19)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (18)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (21)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (20)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 y - 5y^4}{x^2 + 4y^2} \quad (23)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (22)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (25)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (24)$$

\* בשאלות 18, 20-23 ו-25 מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

(26) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^3 + y^2}$

ב. היעזרו בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ , וחשבו את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 + y^2}$

ג. היעזרו בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ , וחשבו את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^3 + y^2}$

ד. היעזרו בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$ , וחשבו את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3 y + 1)}{x^3 + y^2}$

\* קחו בחשבון שייתכן שהגבול הידוע לא יינתן בגוף השאלה.

(27) הוכיחו לפי ההגדרה כי  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sin x + \cos y) = 1$ .

(28) הוכיחו לפי ההגדרה כי  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} x^2 y = 4$ .

(29) הוכיחו לפי ההגדרה כי  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 4}} 2x^2 y = 8$ .

### תשובות סופיות

1 (1)

 $\frac{1}{12}$  (2)

1 (3)

0 (4)

(5) אינסוף.

 $\frac{1}{2}$  (6)

2 (7)

5 (8)

0 (9)

(10) – (17) אין לפונקציה גבול.

0 (18)

0 (19)

0 (20)

0 (21)

3 (22)

0 (23)

0 (24)

0 (25)

(26) א-ד. 0

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

## רציפות של פונקציה של שני משתנים

### שאלות

בשאלות 1-3 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה  $(0,0)$ .  
 במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,  
 האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

בשאלות 4-5 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה  $(1,4)$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + 5y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \quad \text{נתון}$$

כאשר  $m$  קבוע.

עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה רציפה בראשית?

7 נתונה פונקציה ממשית רציפה  $f = f(x)$ , שאינה פונקציה קבועה,

$$g(x, y) = \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ונגדיר פונקציה חדשה האם הפונקציה  $g$  רציפה בנקודה  $(0, 0)$ ?

8 הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, y)$  לכל  $y$ ,

וגם  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = f(x, 0)$  לכל  $x$ ,

אז  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$ .

9 פונקציה  $f(x, y)$  מקיימת  $|f(x, y)| \leq \sin^2(x^4 + y^4)$ , לכל  $(x, y)$ .

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .

10 מה צריך להיות הערך של הקבוע  $k$  (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ k & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

תהיה רציפה בכל המרחב?

11 נתון כי:

לכל  $x$  מתקיים  $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq |y_2 - y_1|$  (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה  $y$ ).

לכל  $y$  מתקיים  $|f(x_2, y) - f(x_1, y)| \leq |x_2 - x_1|$  (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה  $x$ ).

הוכיחו כי  $f(x, y)$  רציפה בכל המישור.

12 הוכיחו או הפריכו:

נתון כי  $f(x, y)$  רציפה בכל המישור.

$$z(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{(x-y)^2 - 100}}$$

ידוע כי  $z(1, 14) < 0$ ,  $z(14, 1) > 0$ .

אז בתחום ההגדרה של  $z$  קיימת נקודה  $(c_1, c_2)$ , כך ש-  $z(c_1, c_2) = 0$ .

**תשובות סופיות**

- (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר  $f(0,0) = 1$ , הפונקציה תהיה רציפה.
- (2) הפונקציה רציפה.
- (3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (4) הפונקציה רציפה.
- (5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (6) עבור  $m > 1$  הפונקציה רציפה, ועבור  $m \leq 1$  הפונקציה לא רציפה.
- (7) הפונקציה לא רציפה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10)  $k = 0$
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.

## נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	$e$	(from right) 1	$e$
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	$e$	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 11 - נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות

תוכן העניינים

159	1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון
161	2. נגזרות חלקיות מסדר שני
165	3. נגזרות חלקיות לפי הגדרה
167	4. דיפרנציאביליות

## נגזרות חלקיות מסדר ראשון

## שאלות

בשאלות 1-10 חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3) \text{ (רק } f_x \text{)}$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8) \qquad f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin(ut) \quad (10) \qquad f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (9)$$

$$z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad (11) \text{ נתון}$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \text{ הוכיחו כי}$$

$$f(x, y, z) = e^x \left( y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad (12) \text{ נתון}$$

$$\text{חשבו } \frac{\partial f}{\partial x} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial y} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial z} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right)$$

## הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

## תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \qquad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \qquad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \qquad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \qquad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \qquad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \qquad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \qquad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \qquad f_y = 2xyz^3 \qquad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \qquad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \qquad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

שאלת הוכחה. (11)

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) = 4 \quad (12)$$

## הערת סימון

$$\begin{array}{l}
 f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{array}$$

## נגזרות חלקיות מסדר שני

### שאלות

בשאלות 1-14 חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (13)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (14)$$

15) חשבו  $f'_{xy}(1,1)$ , עבור  $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$ .

16) חשבו  $f'_{xy}(1,1)$ , עבור  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ .

17) חשבו  $f'_{xy}(1,1)$ , עבור  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

18) נתון  $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$

חשבו  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, e)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, e)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, e)$ .

### הערת סימון

$$\begin{array}{l}
 f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{array}$$

## תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll}
 f_y = -2x^2y + 10 & f_{xx} = 8 - 2y^2 & f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \\
 f_{yx} = -4xy & f_{xy} = -4xy & f_{yy} = -2x^2 \\
 f_y = \frac{x^4}{y} & f_{xx} = 12x^2 \ln y & f_x = 4x^3 \ln y \quad (2) \\
 f_{yx} = \frac{4x^3}{y} & f_{xy} = \frac{4x^3}{y} & f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \\
 f_y = 3y^2 - 6x & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 - 6y \quad (3) \\
 f_{yx} = -6 & f_{xy} = 6 & f_{yy} = 6y \\
 f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4) \\
 & f_{xy} = -3 & f_{yy} = 6y - 6 \\
 f_y = x^2 - 2xy & f_{xx} = 2y & f_x = 2xy - y^2 \quad (5) \\
 & f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y & f_{yy} = -2x \\
 & f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] & (6) \\
 & f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0] \\
 & f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] & f_{xx} = 2[8y - 0 - 24] \\
 & & f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0] \\
 & f_y = e^{xy}(x^2 + xy + 1) & f_x = e^{xy}(xy + y^2 + 1) \quad (7) \\
 f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy} & f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy} \\
 & f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy} \\
 f_y = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) & f_x = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) & (8) \\
 & , f_{xx} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y} \\
 & f_{yy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y} \\
 & f_{xy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y} \\
 f_y = e^{-x^2-y^2}(4y - 2x^2y - 4y^3) & f_x = e^{-x^2-y^2}(2x - 2x^3 - 4xy^2) & (9) \\
 & f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}
 \end{array}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x+4y) \qquad f_x = 10 \cos(10x+4y) \quad (13)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x+4y) \qquad f_y = 4 \cos(10x+4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x+4y) \qquad f_{xy} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xz} = y \qquad f_{xy} = z \qquad f_{xx} = 0 \qquad f_x = yz \quad (14)$$

$$f_{yz} = x \qquad f_{yy} = 0 \qquad f_{yx} = z \qquad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \qquad f_{zy} = x \qquad f_{zx} = y \qquad f_z = xy$$

$$-2 \quad (15)$$

$$-1 \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e}\right) \quad (18)$$

16

## נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

### שאלות

$$(1) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה  $(0, 0)$ .  
 ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה  $(0, 0)$ ?  
 ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$(2) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{מצאו את הנגזרות החלקיות של}$$

בנקודה  $(0, 0)$ .

$$(3) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y + x^2)^2}{y^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{מצאו את הנגזרות החלקיות של}$$

בנקודה  $(0, 0)$ .

$$(4) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .  
 ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה  $(0, 0)$  וחשבו אותן.

$$(5) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.  
 ב. האם הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה  $(0, 0)$ ?

$$6 \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. בדקו האם  $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ , על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה  $(0, 0)$ ?

ג. האם  $f_{xyxy}(1, 4) = f_{xyyx}(1, 4)$ .

הערה

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

### תשובות סופיות

1 (א.  $f_x(0, 0) = 0$ ,  $f_y(0, 0) = 0$ . ב. לא רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .)

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2  $f_x(0, 0) = 1$ ,  $f_y(0, 0) = 0$

3  $f_x(0, 0) = 0$ ,  $f_y(0, 0) = 0$

4 א. שאלת הוכחה. ב.  $f_x(0, 0) = 0$ ,  $f_y(0, 0) = 0$ .

$$5 \quad \text{א.} \quad f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ב. לא רציפות.

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6 א.  $f_{xy}(0, 0) = -1 \neq f_{yx}(0, 0) = 1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה  $(0, 0)$ . ג. כן.

## דיפרנציאביליות

### שאלות

בשאלות 1-4 בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה  $(0,0)$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x + y}{y + 4x} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (5) \text{ בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \text{ נתון } m, \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה רציפה בראשית?  
 ב. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה גזירה חלקית בראשית?  
 ג. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

$$(7) \quad \text{נתון } m, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^m} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה רציפה בראשית?  
 ב. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה גזירה חלקית בראשית?  
 ג. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

(8) תהי  $f$  פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$ .

$$\phi(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \text{ נגדיר פונקציה חדשה}$$

$$\text{נתון } f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = f(0, 0) = 0$$

הוכיחו ש- $\phi$  דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$ .

$$(9) \quad \text{בדקו דיפרנציאביליות } f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z \sin(xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

בנקודה  $(0, 0, 0)$ .

$$(10) \quad \text{נתונה } f: R^n \rightarrow R \text{ המוגדרת על ידי } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \|x\|^2} - 1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0.5 & x = 0 \end{cases}$$

האם  $f$  דיפרנציאבילית בנקודה  $x = 0$ ?

**תשובות סופיות**

- (1) לא דיפרנציאבילית.
- (2) דיפרנציאבילית.
- (3) לא דיפרנציאבילית.
- (4) לא דיפרנציאבילית.
- (5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
- (6) א.  $m > 1$       ב.  $m > 0$       ג.  $m > 2$
- (7) א.  $m < 1$       ב. לכל  $m$       ג.  $m < 0.5$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) דיפרנציאבילית.
- (10) כן.

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 12 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים ..... 170

## כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

### שאלות

(1) נתון:  $x = 2u - v$ ,  $y = u^2 + v^2$ ,  $z = \ln(x^2 - y^2)$   
 חשבו:  $z_u$ ,  $z_v$ .

(2) נתון:  $v = 4t + k$ ,  $u = t^2 + 4m$ ,  $z = e^{u-v}$   
 חשבו:  $z_t$ ,  $z_m$ ,  $z_k$ .

(3) נתון:  $z = f(x^2 - y^2)$   
 הוכיחו:  $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$

(4) נתון:  $z = f(xy)$   
 הוכיחו:  $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$

(5) נתון:  $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$   
 הוכיחו:  $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$

(6) נתון:  $z = f(x - y, y - x)$   
 הוכיחו:  $z_x + z_y = 0$

(7) נתון:  $w = f(x - y, y - z, z - x)$   
 הוכיחו:  $w_x + w_y + w_z = 0$

(8) נתון:  $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$   
 הוכיחו:  $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$

$$(9) \text{ נתון: } z = y \cdot f(x^2 - y^2)$$

$$\text{הוכיחו: } \frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$$

$$(10) \text{ נתון: } z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{הוכיחו: } x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$$

$$(11) \text{ נתון: } u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

$$\text{הוכיחו: } xu_x + yu_y + zu_z = 2u$$

$$(12) \text{ נתון: } h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$$

$$\text{הוכיחו: } h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$$

$$(13) \text{ נתון: } u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$$

הוכיחו:

$$א. u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$$

$$ב. u_{xy} = u_{yx}$$

$$ג. \text{ חשבו את } u_{xy}(1, \pi), \text{ אם ידוע ש-} g'(0) = 1, f'(0) = 2$$

$$(14) \text{ נתון: } u = f(x, y), x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$א. \text{ הוכיחו: } (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$$

$$ב. \text{ הוכיחו: } u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$$

$$ג. \text{ הוכיחו: } f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$$

**15** נתון  $z = h(u, v)$ , ונתון כי  $u = f(x, y)$ ,  $v = g(x, y)$  מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ . הוכיחו כי:

א.  $u, v$  מקיימות את משוואת לפלס.

כלומר,  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  וכן  $v_{xx} + v_{yy} = 0$ .

ב.  $h_{xx} + h_{yy} = \left( (u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$ .

**16** נתון:  $y = r \sinh s$ ,  $x = r \cosh s$ ,  $u = f(x, y)$ .

הוכיחו כי:  $(u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$ .

**17** פונקציה  $f(x, y)$  תיקרא הומוגנית מסדר  $n$ , אם  $f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y)$ . הוכיחו כי אם  $f$  הומוגנית, אז:

א.  $x \cdot f_x + y \cdot f_y = n \cdot f(x, y)$ .

ב.  $x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} + 2xy f_{xy} = n(n-1) \cdot f(x, y)$ .

**18** נתונה הפונקציה  $z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה  $(0, 0)$ .

ב. נתון  $x = 2t, y = t$ .

חשבו את  $z'(0)$  באופן ישיר.

ג. נתון  $x = 2t, y = t$ .

חשבו את  $z'(0)$  לפי כלל השרשרת.

ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

## תשובות סופיות

$$z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot 2u \quad (1)$$

$$z_t = e^{u-v} (1) \cdot 2t + e^{u-v} (-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1} (1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v} (-1) \cdot 1 \quad (2)$$

$$-e \quad \text{ג.} \quad (13)$$

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad \text{א.} \quad (18) \quad \text{ב.} \quad \frac{4}{5} \quad \text{ג.} \quad 0 \quad \text{ד.} \quad \text{לא דיפרנציאבילית.}$$

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 13 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

1. נגזרת מכוונת וגרדיאנט ..... 174

## נגזרת מכוונת וגרדיאנט

### שאלות

(1) תהי  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

א. חשבו את הגרדיאנט של  $f$  ואת אורכו בנקודה  $(3, 4)$ .  
 מהי משמעות התוצאה?

ב. הראו שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של  $f$ , העובר דרך  $(3, 4)$ .

(2) תהי  $f(x, y) = 3x^2y$ .

חשבו את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(1, 2)$ , בכיוון הווקטור  $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ .

(3) תהי  $f(x, y) = x - \sin(xy)$ .

חשבו את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

בכיוון הווקטור  $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ .

(4) תהי  $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$ .

חשבו את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(1, 2)$ , בכיוון וקטור היחידה, היוצר זווית של  $45^\circ$  עם החלק החיובי של ציר ה- $x$ .

(5) תהי  $f(x, y) = xy^2$ .

חשבו את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(1, 3)$  בכיוון לנקודה  $(4, 5)$ .

(6) תהי  $f(x, y, z) = x^2y^2z$ .

חשבו את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(2, 1, 4)$ ,

בכיוון הווקטור  $\vec{u} = 1\cdot\mathbf{i} + 2\cdot\mathbf{j} + 2\cdot\mathbf{k}$ .

(7) אם הפוטנציאל החשמלי  $V$  בנקודה  $(x, y)$ , נתון על ידי  $V = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ , מצאו את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה  $(3, 4)$  בכיוון לנקודה  $(2, 6)$ .

(8) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של  $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$  בנקודה  $(0, 0)$  היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

9 מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה  $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$  בנקודה  $(1, 2, -1)$  היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

10 אם הטמפרטורה נתונה על ידי  $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$ , ואני נמצא בנקודה  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$  ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

11 נתונה הפונקציה  $f(x, y) = 4x^2y$ .

- א. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה  $(1, 2)$ , בכיוון וקטור היוצר זווית של  $30^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .
- ב. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה  $(1, 2)$ , בכיוון וקטור היוצר זווית של  $30^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $y$ .
- ג. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $(1, 2)$ , בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12 נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = x^2yz^4$ .

- מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה  $(1, 2, -1)$ , בכיוון וקטור היוצר זווית של  $60^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ , ו- $60^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $z$ . הניחו שהזווית עם ציר ה- $y$  חדה.

13 נתונה הפונקציה  $f(x, y) = xy^2 - x^2y^{-3}$  ונתונה הנקודה  $Q(1, 1)$ .

- א. חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה  $Q$ , בכיוון וקטור שיוצר זווית של  $60^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

ב. מצאו וקטור  $\vec{u}$ , כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 0$ .

ג. האם קיים וקטור  $\vec{u}$ , כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 6$ ?

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + 4y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .
- ב. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה  $(0, 0)$ .
- ג. חשבו את  $\nabla f(0, 0)$ .
- ד. בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה  $(0, 0)$ .
- ה. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה  $f$  בנקודה  $(0, 0)$ , בכיוון הווקטור  $\vec{u} = (1, -1)$ .
- ו. הסבירו מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

$$(15) \text{ הפונקציה } f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2, \text{ מתארת טמפרטורה בנקודה } (x, y, z)$$

- א. מהי הטמפרטורה בנקודה  $(2, 4, 1)$ ?
- ב. אוסף הנקודות  $(x, y, z)$ , בהן הטמפרטורה שווה  $20^\circ$ , מהווה משטח מפורסם. מהו?
- ג. נמלה שנמצאת בנקודה  $(2, 4, 1)$  רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר. באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?
- ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור  $z=1$ ), בנקודה  $(2, 4, 1)$ . כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר, אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן. באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

$$(16) \text{ גֵּלָה מוחזקת בנקודה } (2, 1, 14), \text{ שעל המשטח } z = 20 - x^2 - 2y^2$$

- שחררו את הגֵּלָה והיא התחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.
- א. מהו המשטח הנתון?
- ב. מצאו את הווקטור  $\vec{u} = (a, b, c)$ , המתאר את כיוון הנפילה של הגֵּלָה.

$$(17) \text{ תהי } f = f(x, y) \text{ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:}$$

$$1. \text{ לכל } x, f(x, x^2) = \frac{x^2}{2} + x^4.$$

$$2. \text{ הנגזרת המכוונת של } f(x, y), \text{ בנקודה } (1, 1), \text{ בכיוון הווקטור } \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right),$$

שווה 1.

חשבו את הגרדיאנט של  $f$  בנקודה  $(1, 1)$ .

18 נתונה  $f = f(x, y, z)$  דיפרנציאבילית, המקיימת  $f(x, y, x^2 + y^2) = 2x + y$ .

נתון כי  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 2, 4) = -\frac{5}{3}$ , כאשר  $\vec{u} = (-2, 1, 2)$ .  
חשבו את  $\nabla f(0, 2, 4)$ .

19 נתונה הפונקציה  $f(x, y) = 12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ .

א. חשבו את  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8, 1)$ , בכיוון הווקטור  $\vec{u} = (3, 4)$ .

ב. בדקו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$ .

ג. חשבו  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ , בכיוון וקטור  $\vec{v}$ , היוצר זווית  $\alpha$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

ד. באיזה כיוון  $\alpha$ , הנגזרת המכוונת  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$  תהיה מקסימלית?

מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

20 נתונה הפונקציה  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + 20x + 21y & x \neq 0 \\ 21y & x = 0 \end{cases}$

א. עבור אלו ערכים של  $m$  מתקיים  $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) < m$ , לכל וקטור יחידה  $\hat{u}$ ?

ב. מצאו וקטור יחידה  $\hat{u}$ , המקיים  $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) = 0$ .

### הערות סימון

1 במישור  $\mathbb{R}^2$ :  $\mathbf{i} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1)$ , ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:

$$\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \text{ או } \vec{u} = (x, y)$$

$$\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

במרחב  $\mathbb{R}^3$ :  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ ,

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים:  $\vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  או  $\vec{v} = (x, y, z)$ .

$$\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j} + 5 \cdot \mathbf{k}$$

2 יש המסמנים וקטור  $\vec{u}$  גם  $\underline{u}$  או  $\mathbf{u}$ .

3 וקטור יחידה יסומן  $\hat{u}$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. הגרדיאנט  $(6, 8)$ . ב. אורך הגרדיאנט 10.
- (2)  $\frac{48}{5}$  (3)  $\frac{1}{2}$  (4)  $7.5\sqrt{2}$
- (5)  $3\sqrt{13}$  (6)  $\frac{88}{3}$  (7)  $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
- (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור  $(1, 1)$  ושווה ל- $\sqrt{2}$ .
- (9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור  $(12, 14, -12)$  ושווה ל-22.
- (10) בכיוון הווקטור  $(-2, 2, -2)$ .
- (11) א.  $8\sqrt{3} + 2$ . ב.  $8 + 2\sqrt{3}$ . ג.  $\ell: (1, 2, 4) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 8 + 2\sqrt{3}\right)$
- (12)  $\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$
- (13) א.  $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}$ . ב.  $\vec{u} = (5, 1)$  (יש עוד). ג. לא.
- (14) א. הוכחה. ב.  $f_x = 1, f_y = 0$ . ג.  $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$
- (15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור  $(8, 32, 2)$ .
- ד. בכיוון הווקטור  $(8, 32)$ .
- (16) א. פרבולואיד. ב.  $\vec{u} = (4, 4, -32)$
- (17)  $\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (18)  $\nabla f(0, 2, 4) = (2, -3, 1)$
- (19) א.  $\frac{67}{5}$ . ב. לא דיפרנציאבילית. ג.  $12(\cos \alpha - \cos^3 \alpha)^{\frac{1}{3}}$
- ד.  $\text{Max} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = 12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}, \alpha = 54.73^\circ$
- (20) א.  $m > 29$ . ב.  $\hat{u} = (21/29, -20, 29)$  (יש אחרים).

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 14 - נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלם

תוכן העניינים

1. הדיפרנציאל השלם - נוסחת הקירוב הליניארי.....179

## הדיפרנציאל השלם – נוסחת הקירוב הליניארי

### שאלות

- (1) חשבו בקירוב:  $\ln(0.01^2 + 0.99^2)$ .
- (2) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצאו בקירוב את הערך של  $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$ .
- (3) נחשב את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו. ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%, ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.
- (4) נתונות שתי צלעות במלבן  $a = 10\text{ cm}$ ,  $b = 24\text{ cm}$ . חשבו את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך אלכסון המלבן אם את הצלע  $a$  יאריכו ב-4 mm ואת הצלע  $b$  יקצרו ב-1 mm.
- (5) נמדוד את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על 5%. העריכו את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

### תשובות סופיות

- (1)  $\cong -0.01$
- (2)  $2\frac{7}{3200}$
- (3) 8%
- (4) שינוי מדויק: 0.06472, שינוי מקורב: 0.06153.
- (5) 5%

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 15 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז') ..... 180

## קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

### שאלות

מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות בשאלות 1-4, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\max \{xy\} \quad s.t. \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$\max \{2x + y\} \quad s.t. \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

כאשר  $x, y \geq 0$ .

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(7) \quad \text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12,$$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$(8) \quad \text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2,$$

שמרחקהן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן

מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$(9) \quad \text{מיושליה קונה בשוק } x \text{ ק"ג מלפפונים ו- } y \text{ ק"ג עגבניות.}$$

התועלת מצריכת הסל,  $(x, y)$ , נתונה על ידי  $u(x, y) = \ln x + \ln y$ .

מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מיושליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת  $\ln 16$ ,

והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.

נסחו ופתרו את בעיית מיושליה.

- 10** דני קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות.  
 התועלת מצריכת הסל  $(x, y)$  נתונה על ידי  $u(x, y) = xy$ .  
 מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.  
 לדני תקציב של 12 ש"ח.  
 נסחו ופתרו את בעיית דני.
- 11** עקומת התמורה בין מנגו,  $(x)$ , ואננס,  $(y)$ , היא  $x^2 + y^2 = 13$ .  
 לדני תועלת  $f(x, y) = 4x + 6y$ .  
 דני מחפש את הסל (אננס, מנגו)  $(x, y)$ , על עקומת התמורה,  
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.  
 נסחו ופתרו את הבעיה.
- 12** ליצרן פונקציית ייצור  $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$ .  
 המחירים ליחידת  $K$  ו- $L$  הם  $P_K = 2, P_L = 1$ .  
 היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף  $(K^*, L^*)$ ,  
 המביא למינימום את העלות.  
 נסחו את בעיית היצרן (אל תפתרו).

**תשובות סופיות**

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \text{(1)}$$

$$\max(0, \pm 1) \quad \min(\pm 1, 0) \quad \text{(2)}$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad \text{(3)}$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad \text{(4)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(5)}$$

$$\max(9, 36) \quad \text{(6)}$$

$$(6, 2) \quad \text{(7)}$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \text{(8)}$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad \text{(9)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(10)}$$

$$\max(2, 3) \quad \text{(11)}$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad \text{(12)}$$

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 16 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה ..... 183

## קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

### שאלות

- (1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה  $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור בצורת משולש שקודקודיו הם  $(0, 5), (3, 0), (0, 0)$ .
- (2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה  $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור בצורת ריבוע שקודקודיו הם  $(2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0)$ .
- (3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא העיגול  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
- (4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור  $R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$ .
- (5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור  $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$ .

### תשובות סופיות

- |                                      |                                  |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| (1) מקסימום מוחלט 7.                 | מינימום מוחלט -11.               |
| (2) מקסימום מוחלט 3.                 | מינימום מוחלט -1.                |
| (3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$ .   | מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$ .   |
| (4) מקסימום מוחלט 6.                 | מינימום מוחלט -1.                |
| (5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$ . | מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$ . |

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 17 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים ..... 184

## קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

### שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-8, מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

(9) נתון משטח  $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$ . מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה (1, 2, 3) למישור  $-2x - 2y + z = 0$ , וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

- 12** יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק אומד את הביקוש  $Q_1$  למחשבון בארץ, ואת הביקוש  $Q_2$  למחשבון בסין, על ידי:  $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$ ,  $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$ . כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים,  $P_1$  ו-  $P_2$ , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

- 13** נתונה הפונקציה  $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$ .
- א. הוכיחו שהנקודה  $(0, 0)$  היא נקודה קריטית.
- ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של  $a$  הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכלף, או שלא ניתן לדעת.

- 14** מצאו שני מספרים,  $b > a$ , כך ש-  $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$  יהיה מקסימלי.

### תשובות סופיות

- 1**  $(-0.5, 1)$  אוכלף;  $(1.5, -3)$  מינימום.
- 2**  $(1, 2)$  מינימום;  $(-1, -2)$  מקסימום;  $(-1, 2)$ ,  $(1, -2)$  אוכלף.
- 3**  $(0, 0)$  אוכלף;  $(1, 1)$  מינימום.
- 4**  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  מינימום;  $(1, 0)$  מקסימום;  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, 0)$  אוכלף.
- 5**  $(0, 2)$  מקסימום.
- 6**  $(4, 4)$  מקסימום.
- 7**  $(-0.5, 4)$  מקסימום.
- 8** אין נקודות קריטיות.
- 9**  $z = 4$ ,  $z = 3$
- 10** רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- 11** מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר  $(1/3, 4/3, 10/3)$ .
- 12**  $P_1 = 10\$$ ,  $P_2 = 12\$$  רווח מקסימלי \$288.
- 13** א. שאלת הוכחה. ב. עבור  $a = 2$ ,  $a = -2$ , לא ניתן לדעת;  $a > 2$ ,  $a < -2$  אוכלף;  $-2 < a < 2$  מינימום.
- 14**  $a = -6$ ,  $b = 4$

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 18 - וקטורים גיאומטרים

תוכן העניינים

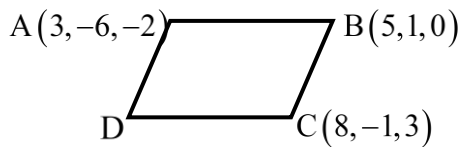
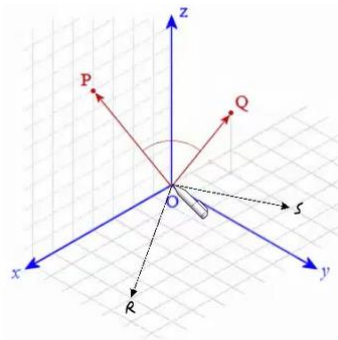
186	.....	1. וקטורים
193	.....	2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת
195	.....	3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

## וקטורים

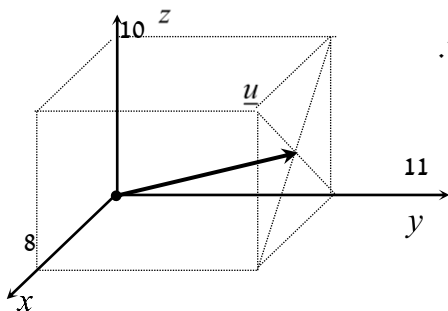
**הערת סימון:** נסמן את הווקטור  $u$  כך  $\underline{u}$ . סימונים מקובלים נוספים הם:  $\vec{u}, \vec{u}$ .  
 את גודל הווקטור  $\underline{u}$  נסמן כך  $|\underline{u}|$ . סימון מקובל נוסף הוא  $\|\underline{u}\|$ .  
 גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

### שאלות

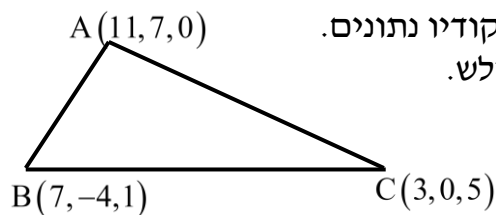
(1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים  $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$  שבאיור. הניחו שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



(2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצאו את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



(3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים. מצאו מהו הווקטור  $\underline{u}$  על פי השרטוט.



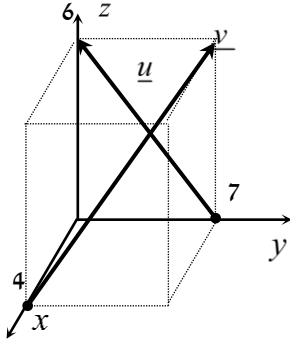
(4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור  $\overline{EF}$ , אם נתונות הנקודות  $E(2,0,-3)$  ו-  $F(7,-1,-3)$ .

ב. מצאו את שיעורי הנקודה  $N$ , אם נתונה הנקודה  $M(0,-4,1)$

והווקטור  $\overline{MN} = (-1,-1,9)$ .



(6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.

מצאו מהו הווקטור  $\underline{u}$  ומהו הווקטור  $\underline{v}$ .

(7) מצאו את  $x$ ,  $y$  ו-  $z$ , אם נתון ש-  $\underline{u} = \underline{v}$ , כאשר  $\underline{u} = (4, -1, 2)$ ,

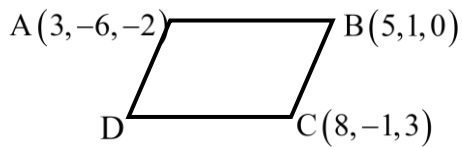
$\underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$ .

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$ ,  $B(3,7,-4)$ ,  $C(6,9,0)$ ,  $D(7,4,10)$ ,  $E(9,11,4)$

א. הראו כי:  $\overline{AB} = \overline{DE}$ .

ב. האם ניתן לומר כי גם  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ? נמק.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצאו את שיעורי הקדקוד  $D$ .

\* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים:  $\underline{w} = (2, 6, -5)$ ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$ ,  $\underline{u} = (-3, 1, 4)$ .  
 \* בשאלות 13, 14, 16 הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו:

א.  $2\underline{u}$       ב.  $-0.5\underline{v}$       ג.  $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשבו:

א.  $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$       ב.  $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12)  $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13)  $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14)  $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15)  $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16)  $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות:  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(4, 2, -1)$ ,  $C(3, -1, 2)$ ,  
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17)  $\overline{AC} + \overline{AB}$

(18)  $2\overline{AC} - 4\overline{AB}$

(19)  $2\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$A(-4, 2, 1)$ ,  $B(0, 2, -1)$ ,  $C(-3, -5, 0)$ ,  $D(-7, -5, 2)$

הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

- (21)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :  
 $A(1, 2, 0)$  ,  $B(-2, 5, 3)$  ,  $C(-1, 8, 4)$  ,  $D(4, 3, -1)$   
 א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.  
 ב. האם הטרפז שווה שוקיים?
- (22)** חשבו את הזווית שבין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  , כאשר :  
 א.  $\underline{u} = (-2, 2, 5)$  ,  $\underline{v} = (4, 0, 1)$   
 ב.  $\underline{u} = (6, -3, 1)$  ,  $\underline{v} = (2, 5, 3)$   
 ג.  $\underline{u} = (-2, 1, 3)$  ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$
- (23)** מצאו את שטחו של משולש ABC , שקדקודיו הם :  
 $A(-3, 2, 1)$  ,  $B(0, 3, 2)$  ,  $C(5, -1, 0)$
- (24)** נתונים הווקטורים :  $\underline{u} = (2, -1, 0)$  ,  $\underline{v} = (5, 0, 3)$   
 מצאו וקטור  $\underline{w}$  , שמכפלתו ב- $\underline{u}$  היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$  היא 0 ,  
 אם ידוע שגודלו הוא  $\sqrt{70}$  .
- (25)** מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים  $(3, 2, 1)$  ו- $(1, -1, 2)$  ,  
 ושמרחקו מהווקטור  $(1, 1, 0)$  הוא  $\sqrt{3}$  .
- (26)** ענו על שני הסעיפים הבאים :  
 א. הוכיחו כי  $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}|$   
 הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.  
 ב. הוכיחו כי  $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2$   
 הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.
- (27)** ענו על חמשת הסעיפים הבאים :  
 א. הוכיחו כי  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$   
 ב. הוכיחו כי  $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$   
 ג. הוכיחו כי  $(\underline{u} - \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) = |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2$   
 ד. הוכיחו כי  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 + |\underline{u} - \underline{v}|^2 = 2|\underline{u}|^2 + 2|\underline{v}|^2$   
 תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.  
 ה. הוכיחו כי  $\frac{1}{4}(|\underline{u} + \underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

**(28)** יהיו  $u, v \in \mathbb{R}^n$  וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה. נגדיר  $a = u - 2v$ ,  $b = 3u + v$ .  
 אם  $\alpha$  היא הזווית בין  $a$  ל- $b$ , אז  $\cos \alpha$  שווה ל-?

**(29)** יהיו  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$  וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה  $k$ . יהי  $v = \alpha w_1 + \frac{3}{4} w_2$  וקטור שמרחקו מ- $2w_2$  שווה למרחקו מ- $w_1$ .  
 מהו המרחק של  $v$  מ- $w_1$ ?

**(30)** יהיו  $u, v \in \mathbb{R}^n$  וקטורי יחידה המקיימים  $\|u - v\| = 2$ .  
 הוכיחו ש- $u$  ו- $v$  הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

## תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \vec{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left( \frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\text{א.} \quad \alpha = 97.277^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ג.} \quad \alpha = 180^\circ \quad (22)$$

$$S_{\triangle ABC} = 10.173 \quad \text{יח"ש.} \quad (23)$$

$$(-3, -6, 5) \quad (24)$$

$$v = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{or} \quad v = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (25)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (26)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{50}} \quad (28)$$

$$\frac{5}{4}k \quad (29)$$

(30) שאלת הוכחה.

## מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

### שאלות

$$(1) \text{ נתון: } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

חשבו:  $(u \times v) \times w$ .

$$(2) \text{ חשבו את שטח המשולש, שקדקודיו: } A(8, 2, 3), B(4, -1, 2), C(-8, 0, 4)$$

(3) נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.

$$\text{ידוע כי: } |u| \neq 0, \quad u \cdot w = 0, \quad u \times v = 0,$$

$$\text{הוכיחו כי: } v \cdot w = 0.$$

(4) נתונים שני וקטורים  $u, v$  במרחב.

$$\text{ידוע כי: } |v| = 4, \quad |u| = 1, \quad u \perp v$$

$$\text{חשבו: } |(u+v) \times (u-v)|$$

$$(5) \text{ נתון } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

חשבו:

$$\text{א. } u \cdot (v \times w) \quad \text{ב. } v \cdot (w \times u) \quad \text{ג. } (u \times v) \cdot w$$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו  $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$

ב. חשבו את נפח הפירמידה שקדקודה  $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$

(7) חשבו את נפח הפירמידה שקדקודה  $A(2, 2, 5), B(1, -1, -4), C(3, 3, 10), D(8, 6, 3)$

8 נתון מקבילון הבנוי על וקטורים  $a, b, c$ .  
הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים  $a, a-b, a+b-4c$ ,  
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9 נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.  
הוכיחו כי  $[(u+v) \times (v+w)](u+w) = 2w \cdot (u \times v)$ .

10 נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.  
ידוע כי:  $u \cdot (v \times w) = 4$ .  
חשבו:

א.  $u \cdot (w \times v)$

ב.  $(v \times w) \cdot u$

ג.  $w \cdot (u \times v)$

ד.  $v \cdot (u \times w)$

11 נתונים שלושה וקטורים  $a, b, c$  במרחב.  
מהי הנוסחה עבור  $a \times b \times c$ ?

### תשובות סופיות

(1)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2)  $S = 22.5$

(3) שאלת הוכחה.

(4) 8

(5) א. -3      ב. -3      ג. -3

(6) א. -6      ב. 1

(7)  $9\frac{1}{3}$

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) א. -4      ב. 4      ג. 4      ד. 4

(11) אין לו נוסחה.

## שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

### שאלות

(1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:  
 $A = (1, 2, 1)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C = (2, 1, 2)$ ,  $D(2, 2, 2)$

(2) מצאו את מרחק הנקודה  $A(3, -2, 1)$  מהישר  $L: (-10, 8, -8) + t(2, -1, 2)$ .

(3) נתונים שני ישרים:

$$L_1: \frac{x-2}{2} = 3-y = \frac{z-4}{3}, \quad L_2: x+7 = y-5, z=3$$

- א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.  
 ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

### תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2)  $\sqrt{26}$

(3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 19 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

תוכן העניינים

196	1. הצגה פרמטרית של ישר
199	2. מצב הדדי בין ישרים
201	3. הצגה פרמטרית של מישור
202	4. משוואת מישור
203	5. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור
204	6. מישורים המקבילים לצירים
205	7. מצב הדדי בין ישר ומישור
206	8. מצב הדדי בין מישורים
207	9. ישר חיתוך בין מישורים
(ללא ספר)	10. חישובי זוויות שונות
208	11. זווית בין שני ישרים
209	12. זווית בין ישר ומישור
210	13. זווית בין שני מישורים
(ללא ספר)	14. חישובי מרחקים
211	15. מרחק בין שתי נקודות במרחב
212	16. מרחק בין נקודה לישר
213	17. מרחק בין נקודה למישור
214	18. מרחק בין ישרים מקבילים
215	19. מרחק בין ישר למישור
216	20. מרחק בין מישורים מקבילים
217	21. מרחק בין ישרים מצטלבים
(ללא ספר)	22. סיכום מרחקים
218	23. שאלות מסכמות

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

## הצגה פרמטרית של ישר

### שאלות

- (1) האם הנקודה  $A(7,0,3)$  נמצאת על הישר  $\ell : \underline{x} = (4,3,0) + t(1,-1,1)$  ?
- (2) האם הנקודה  $B(4,-2,-10)$  נמצאת על הישר  $\ell : \underline{x} = t(2,-1,5)$  ?
- (3) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות  $A(-5,-2)$  ו-  $B(1,6)$ .
- (4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות  $C(3,0,-2)$  ו-  $D(4,1,1)$ .
- (5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה  $G(2,-7,1)$  ומקביל לישר  $\ell : \underline{x} = (0,3,-1) + t(-4,2,1)$ .
- (6) מצאו במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה  $(1,2,3)$  ומאונך לישר  $\ell : \underline{x} = (1,2,0) + s(1,-2,4)$ .
- (7) ענו על הסעיפים הבאים:
  - א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר  $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(4,5,6)$ . כתבו את ההצגה בעזרת הקואורדינטות  $x, y$  ו-  $z$ .
  - ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות  $x = 1 + 2t, y = 10, z = 4 - t$ . כתבו את ההצגה הפרמטרית שלו.
- (8) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ציר ה-  $y$  במרחב.
- (9) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה  $M(3,-1,4)$  ומקביל לציר ה-  $z$ .
- (10) מצאו את נקודת החיתוך של הישר  $\ell : \underline{x} = (1,-2,6) + t(-2,1,2)$  עם המישור  $[xy]$ .

**11** ישר עובר בנקודה  $(1, -1, 4)$  וכיוונו  $(4, 10, 2)$ .  
 מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א.  $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(4, 10, 2)$

ב.  $\underline{x} = (3, 4, 5) + t(4, 10, 2)$

ג.  $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 5, 1)$

ד.  $\underline{x} = (5, 9, 6) + t(8, 20, 4)$

ה. כל התשובות נכונות.

**12** ישר עובר דרך הנקודות  $A(1, -1, 2)$  ו-  $B(4, 0, 1)$ .  
 תארו את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נק' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

**13** הציגו כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

א.  $\ell: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2t \\ z = 2 + 10t \end{cases}$

ב.  $\ell: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 10t \end{cases}$

ג.  $\ell: \frac{x-1}{2} = y+1 = z-4$

ד.  $\ell: x-1 = y+10, z = 4$

ה.  $\ell: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$

## תשובות סופיות

(1) כן.

(2) לא.

(3)  $\ell : \underline{x} = (-5, -2) + t(6, 8)$

(4)  $\ell : \underline{x} = (4, 1, 1) + t(1, 1, 3)$

(5)  $\ell : \underline{x} = (2, -7, 1) + s(-4, 2, 1)$

(6)  $\ell : \underline{x} = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$

(7) א.  $x = 1 + 4t, y = 2 + 5t, z = 3 + 6t$  ב.  $\ell : \underline{x} = (1, 10, 4) + t(2, 0, -1)$

(8)  $\ell : \underline{x} = t(0, 1, 0)$

(9)  $\ell : \underline{x} = (3, -1, 4) + t(0, 0, 1)$

(10)  $(7, -5, 0)$

(11) ה

(12) א.  $\ell : \underline{x} = (1, -1, 2) + t \cdot (3, 1, -1)$  ב.  $\ell : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$

ג.  $\ell : \frac{x-1}{3} = y+1 = 2-z$  ד.  $\ell : \begin{cases} x-3y=4 \\ y+z=1 \end{cases}$

(13) א.  $\underline{x} = (1, 0, 2) + t(-4, 2, 10)$  ב.  $\underline{x} = (1, 4, 0) + t(1, 0, 10)$

ג.  $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 1, 1)$  ד.  $(x, y, z) = (1, -10, 4) + t(1, 1, 0)$

ה.  $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t(-2, -1, 1)$

## מצב ההדדי בין ישרים

### שאלות

- (1) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_1 : \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2)$  ,  $l_2 : \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$
- (2) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_3 : \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1)$  ,  $l_4 : \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$
- (3) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_5 : \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1)$  ,  $l_6 : \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$
- (4) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_7 : \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5)$  ,  $l_8 : \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$
- (5) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_9 : \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1)$  ,  $l_{10} : \underline{x} = s(6, 0, -2)$
- (6) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_{11} : \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$  ,  $l_{12} : \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$
- (7) מצאו את ערכו של הפרמטר  $k$ , שבעבורו הישרים:  
 $l_1 : \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$  ,  $l_2 : \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$   
 א. מקבילים.  
 ב. מתלכדים.
- (8) נתונות הנקודות  $A(3, -1, 5)$  ,  $B(k, -1, 3)$  ,  $C(-6, 3, -1)$  ,  $D(-2, 3, k)$   
 הראו כי לכל ערך של  $k$ , הישרים  $l_{AB}$  ו- $l_{CD}$  מצטלבים.

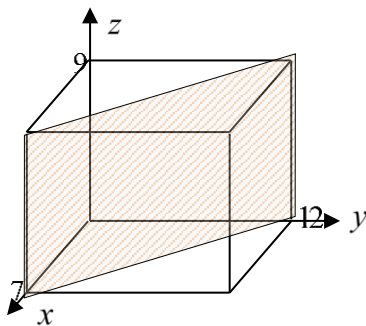
**תשובות סופיות**

- (1) מתלכדים.
- (2) מקבילים.
- (3) נחתכים,  $(1, 5, 0)$ .
- (4) מצטלבים.
- (5) מקבילים.
- (6) נחתכים,  $(1, 8, -1)$ .
- (7) א.  $k = 2$  . ב.  $k = -2$ .
- (8) שאלת הוכחה.

## הצגה פרמטרית של מישור

### שאלות

- (1) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבאות:  
 $A(1, -4, 0)$ ,  $B(3, 6, 2)$ ,  $C(0, -3, 1)$ .
- (2) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה  $Q(6, 7, -1)$ , ומכיל את הישר  $\ell : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$ .
- (3) נתונים שני ישרים:  $\ell_1 : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$ ,  $\ell_2 : \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$ . הראו שהישרים נחתכים ומצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.
- (4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה  $D(5, -2, -1)$  ומכיל את ציר ה- $x$ .
- (5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור  $[xz]$ .



- (6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלהלן. מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.

### תשובות סופיות

- (1)  $\pi : \underline{x} = (1, -4, 0) + t(2, 10, 2) + s(-1, 1, 1)$
- (2)  $\pi : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4) + s(8, 9, -6)$
- (3)  $\pi : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3) + s(0, 1, -6)$
- (4)  $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(5, -2, -1)$
- (5)  $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1)$
- (6)  $\pi : \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 9) + s(-7, 12, 0)$

## משוואת מישור

---

### שאלות

- (1) קבעו האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור  $\pi : 2x - y + 3z - 6 = 0$  :
- א.  $D(5, 7, 1)$
- ב.  $E(2, -1, 1)$
- (2) מצאו את ערכו של  $k$  שבעבורו הנקודה  $A(1, k, -1)$  נמצאת על המישור  $\pi : kx - 2y + (1+k)z + 7 = 0$ .
- (3) נתונה משוואת מישור  $\pi : 3x + 2y - z - 9 = 0$ . מצאו את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.
- (4) נתונה משוואת מישור  $\pi : 4x + y - 2z + 8 = 0$ . מצאו הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור  $[yz]$ .

### תשובות סופיות

- (1) א. על המישור. ב. לא על המישור.
- (2)  $k = 3$
- (3)  $(3, 0, 0)$ ,  $(0, 4\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(0, 0, -9)$
- (4)  $\ell : \underline{x} = (0, -8, 0) + t(0, 2, 1)$

## מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

### שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור:  $\pi : 2x + 3z - 12 = 0$ . כתבו הצגה פרמטרית של המישור.
- (2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור:  $\pi : \underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$ . מצאו את משוואת המישור.
- (3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור:  $\pi : \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$ . מצאו את משוואת המישור.
- (4) המישור  $\pi$  עובר בנקודות:  $A(1, 0, -3)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(4, -1, 0)$ . מצאו את משוואת המישור.
- (5) ענו על הסעיפים הבאים:
- א. לפניך הנקודות הבאות:  $(2, 0, 5)$ ,  $(0, 1, -2)$ ,  $(1, 1, 0)$ .
- הראו ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד, ומצאו הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
  - מצאו את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.
- ב. מצאו שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.
- ג. האם הנקודה  $(4, 2, 1)$  נמצאת על המישור שנמצא בסעיף א'?

### תשובות סופיות

- (1)  $\pi : \underline{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, 0) + s(6, 0, -4)$
- (2)  $\pi : -2x + 3y + z + 19 = 0$
- (3)  $\pi : x - 3y + 8z = 0$
- (4)  $\pi : 3x + 6y - z - 6 = 0$
- (5) א.  $\pi : \underline{x} = (1, 1, 0) + t(-1, 0, -2) + s(1, -1, 5)$ .  $-2x + 3y + z - 1 = 0$ . ב. למשל:  $(0, 0, 1)$ ,  $(-0.5, 0, 0)$ . ג. לא.

## מישורים המקבילים לצירים

---

### שאלות

(1) נתונה משוואת המישור  $\pi : (k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$   
 לאיזה ערך של  $k$  המישור מקביל לציר ה- $y$  (ולא מכיל אותו)?

(2) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$   
 ו-  $x+3y+2z-6=0$ .  
 מצאו את נפח הטטראדר.

### תשובות סופיות

(1)  $k=3$

(2) 6 יח"נ.

## מצב ההדדי בין ישר ומישור

- (1) נתונים הישר והמישור  $\ell : \underline{x} = (5, 0, 1) + t(4, 1, -2)$  ,  $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$  .  
 קבעו את המצב ההדדי שביניהם.  
 אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.
- (2) נתונים הישר והמישור  $\ell : \underline{x} = (2, -1, 6) + t(-1, 1, 2)$  ,  $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$  .  
 קבעו את המצב ההדדי שביניהם.  
 אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.
- (3) נתונים הישר והמישור  $\ell : \underline{x} = (-6, 1, 0) + t(3, 0, -1)$  ,  $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$  .  
 קבעו את המצב ההדדי שביניהם.  
 אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.
- (4) נתונים הישר והמישור  $\ell : \underline{x} = (1, a, 3) + t(4, 1 - b, 0)$  ,  $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$  .  
 מצאו את ערכי  $a$  ו- $b$  , עבורם הישר מוכל במישור.

### תשובות סופיות

- (1) הישר חותך,  $(1, -1, 3)$  .
- (2) מקבילים.
- (3) הישר מוכל.
- (4)  $a = 1$  ,  $b = -7$

## מצב הדדי בין מישורים

---

### שאלות

(1) בכל סעיף נתונים שני מישורים. קבעו את המצב ההדדי ביניהם.

א.  $\pi_1 : 2x - y + 4z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב.  $\pi_3 : x + 3y - z + 1 = 0$ ,  $\pi_4 : 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג.  $\pi_5 : 5x - 2y - 2z + 3 = 0$ ,  $\pi_6 : 2x + 3y + z - 5 = 0$

(2) נתונים שני מישורים

$$\pi_1 : 2x + (k^2 + k)y - 2z + 1 = 0, \pi_2 : 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$$

מצאו את ערכי  $k$  עבורם המישורים:

א. נחתכים      ב. מקבילים      ג. מתלכדים

### תשובות סופיות

(1) א. מתלכדים.      ב. מקבילים.      ג. נחתכים.

(2) א.  $k \neq 2, -3$       ב.  $k = -3$       ג.  $k = 2$

## ישר חיתוך בין מישורים

### שאלות

(1) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_1 : 4x + y - 2z + 2 = 0$ ,  $\pi_2 : 2x - y + z + 10 = 0$ . מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(2) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_3 : 8x + 2y - 3z + 2 = 0$ ,  $\pi_4 : 2x - 3y + z + 4 = 0$ . מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(3) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_5 : 3x - 3y + z + 2 = 0$ ,  $\pi_6 : 5x - 2z + 20 = 0$ . מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(4) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_7 : x - 2y - z + 6 = 0$ ,  $\pi_8 : z - 2 = 0$ . מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(5) מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור  $\pi : 6x - 5y + z + 18 = 0$  עם המישור  $[xz]$ .

(6) נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$ . מצאו הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

### תשובות סופיות

$$\ell : \underline{x} = (-2, 6, 0) + t(2, 16, 12) \quad (1)$$

$$\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(1, 2, 4) \quad (2)$$

$$\ell : \underline{x} = (0, 4, 10) + t\left(4, 7\frac{1}{3}, 10\right) \quad (3)$$

$$\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(4, 2, 0) \quad (4)$$

$$\ell : \underline{x} = (-3, 0, 0) + t(3, 0, -18) \quad (5)$$

$$\ell : \underline{x} = t(1, 9, 13) \quad (6)$$

## זווית בין שני ישרים

### שאלות

- (1) מצאו את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:
- א.  $\ell_1 : \underline{x} = (4, 0, 0) + t(6, 8, 1)$  ,  $\ell_2 : \underline{x} = s(-4, 2, -4)$
- ב.  $\ell_1 : \underline{x} = (10, 17, -18) + t(3, 0, -6)$  ,  $\ell_2 : \underline{x} = (6, 5, 4) + s(0, 4, 0)$
- (2) מצאו את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות  $A(3, 4, 6)$  ,  $B(6, 0, -2)$  וישר העובר דרך הנקודות  $C(6, 5, 1)$  ,  $D(-1, 4, 2)$  וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.
- (3) נתונות הנקודות  $A(1, -3, 0)$  ,  $B(4, 2, -1)$  ,  $C(3, -1, 2)$ .
- א. מצאו הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:
1. A ו-B.
2. B ו-C.
3. A ו-C.
- ב. מי מבין הנקודות  $D(4, 2, -1)$  ו- $E(7, 7, -3)$  נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?
- ג. חשבו את הזווית שבין הישר AB והישר BC.
- (4) נתון מישור שמשוואתו:  $3x - 4y + 6 = 0$ . הנקודות  $A(x, 6, 1)$  ,  $B(-2, y, -1)$  נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור  $[yz]$  ומקיימת:  $z_C = 11$ . מצאו את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא  $\sqrt{\frac{13}{76}}$ .

### תשובות סופיות

- (1) א.  $78.521^\circ$  ב.  $90^\circ$
- (2)  $63.37^\circ$ . הישרים מצטלבים.
- (3) א. 1.  $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(3, 5, -1)$  א. 2.  $\ell : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(-1, -3, 3)$
- א. 3.  $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(2, 2, 2)$  ב. הנקודה D. ג.  $35.477^\circ$
- (4) C(0, 2, 11) או C(0, 28.45, 11)

## זווית בין ישר ומישור

### שאלות

- (1) מצאו את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:  
 $\ell : \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2)$  ,  $\pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$
- (2) נתונות הנקודות  $A(1, -1, 2)$  ,  $B(0, 2, -1)$  ,  $C(1, 2, 5)$  ,  $D(-7, 3, -1)$ .  
 מצאו את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.
- (3) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה  $2x + y - 2z - 6 = 0$ ,  
 וקדקוד הפירמידה הוא  $S(3, 1, -2)$ .  
 מצאו את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,  
 אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים  $x_B = z_B = -1$ .

### תשובות סופיות

- (1)  $18.87^\circ$
- (2)  $44.83^\circ$
- (3)  $14.9^\circ$

## זווית בין שני מישורים

---

### שאלות

(1) מצאו את הזווית שבין המישורים הבאים :  $\pi_1 : 4x + 3y + z - 12 = 0$   
 $\pi_2 : 4x - 7y + 5z + 3 = 0$

(2) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקדקודיה הם :  
 $A(0, 2, -5)$  ,  $B(3, -1, 1)$  ,  $C(7, -1, -5)$  ,  $D(3, 2, 0)$   
 מצאו את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

(3) מצאו את הזווית בין מישור שמשוואתו  $3x + 5y - z + 4 = 0$  למישור  $[xz]$ .

### תשובות סופיות

(1)  $90^\circ$

(2)  $87.539^\circ$

(3)  $32.312^\circ$

## מרחק בין שתי נקודות במרחב

---

### שאלה

- (1) נתונות הנקודות  $A(2, 4, -5)$ ,  $B(0, -2, 6)$  ו-  $C(k, -1, 13-k)$ . מצאו ערכי  $k$  עבורם המשולש  $ABC$  יהיה שווה שוקיים, כך ש-  $AB = AC$ .

### תשובה

- (1)  $k = 8$  או  $k = 12$ .

## מרחק בין נקודה לישר

---

### שאלות

- (1) מצאו את המרחק שבין הנקודה  $A(13, -1, -19)$  לישר  $\ell : \underline{x} = t(2, 0, -7)$ .
- (2) נתונות הנקודות  $A(1, 6, -1)$ ,  $B(2, -1, 0)$ ,  $C(6, -4, 0)$ .  
חשבו את שטח המשולש  $ABC$ .
- (3) על הישר  $\ell : \underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$  מונחת הצלע  $AB$  של ריבוע  $ABCD$ .  
אחד מקודקודי הריבוע הוא  $D(5, 4, 2)$ .  
מצאו את שיעורי הקדקוד  $B$  (שתי אפשרויות).

### תשובות סופיות

- (1)  $\sqrt{54}$
- (2) 12.75 יח"ש.
- (3)  $B(5, 4, -6)$  או  $B(5, -4, 2)$ .

## מרחק בין נקודה למישור

---

### שאלות

- (1) מצאו את מרחקו של המישור  $4x - 2y - 4z + 15 = 0$  מראשית הצירים.
- (2) מצאו משוואת מישור המאונך לישר  $\ell : \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$  ונמצא במרחק  $\sqrt{14}$  מהנקודה  $A(4, 5, -9)$ .
- (3) נתונים ישר ומישור  $\ell : \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$ ,  $\pi : 2x + 4y - 4z + 15 = 0$ . מצאו את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

### תשובות סופיות

- (1)  $2\frac{1}{2}$
- (2)  $\pi : 3x - 2y + z - 7 = 0$  או  $\pi : 3x - 2y + z + 21 = 0$
- (3)  $(1, -9, 5)$  או  $(4, 5, 1)$

## מרחק בין ישרים מקבילים

---

### שאלות

(1) נתונות הנקודות  $A(15,0,-4)$ ,  $B(12,-5,2)$ ,  $C(6,1,4)$ ,  $D(12,11,-8)$ .

א. מצאו את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B

ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצאו את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

(2) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x} = (2, 0, -1) + t(1, -2, 1) \quad , \quad l_2: \underline{x} = (-8, -1, 19) + s(-4, 1, 6)$$

$$l_3: \underline{x} = (-2, 7, -11) + r(-2, 4, -2) \quad , \quad l_4: \underline{x} = (-2, 1, 5) + q(4, -1, -6)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצאו את שטח המלבן.

### תשובות סופיות

(1) א. מקבילים. ב.  $\sqrt{76}$  יח"א.

(2) א. שאלת הוכחה. ב.  $\sqrt{824}$  יח"ש.

## מרחק בין ישר למישור

### שאלות

- (1) נתונה משוואת המישור  $4x - z + 6 = 0$ .
- א. מצאו את המצב ההדדי בין ציר ה- $y$  ובין המישור הנתון.  
 ב. מצאו את המרחק בין ציר ה- $y$  ובין המישור הנתון.
- (2) נתונים ישר ומישור  $\pi: 3x + 12y - 4z + k - 10 = 0$ ,  $l: \underline{x} = (1, k - 1, 5) + t(4, -2, -3)$ .
- א. הוכיחו שהישר מקביל למישור או מוכל בו.  
 ב. מצאו את ערכו של הפרמטר  $k$  שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

### תשובות סופיות

- (1) א. הישר מקביל למישור. ב.  $\frac{6}{\sqrt{17}}$
- (2) א. שאלת הוכחה. ב.  $k = 2, 4$

## מרחק בין מישורים מקבילים

### שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור:  $\pi: 3x - 4y + 5z - 10 = 0$ . מצאו משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק  $\sqrt{8}$  ממנו.
- (2) נתונים שני מישורים מקבילים:  $\pi_1: x - 2y - 2z + 6 = 0$ ,  $\pi_2: x - 2y - 2z - 12 = 0$ . מצאו את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.
- (3) נתונים שישה מישורים:  
 $\pi_1: 2x + y - 2z - 11 = 0$ ,  $\pi_2: x + 2y + 2z + 5 = 0$ ,  $\pi_3: 2x - 2y + z + 3 = 0$   
 $\pi_4: 2x + y - 2z + 7 = 0$ ,  $\pi_5: x + 2y + 2z - 1 = 0$ ,  $\pi_6: kx + qy + z + p = 0$   
 מצאו את ערכי הפרמטרים  $k, q, p$ , שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.
- (4) כדור שמרכזו בנקודה  $O(3, 8, -1)$  חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו  $12x + 4y - 3z - 6 = 0$ . מצאו את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

### תשובות סופיות

- (1)  $\pi_1: 3x - 4y + 5z + 10 = 0$ ,  $\pi_2: 3x - 4y + 5z - 30 = 0$
- (2)  $\pi_3: x - 2y - 2z - 3 = 0$
- (3)  $k = 2, q = -2, p = 18, -12$
- (4)  $12x + 4y - 3z - 136 = 0$

## מרחק בין ישרים מצטלבים

### שאלות

- (1) נתונים שני ישרים,  $l_1 : \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$  ו- $l_2 : \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$ .  
הראו שהישרים מצטלבים ומצאו את המרחק שביניהם.
- (2) נתונים שני ישרים מצטלבים,  $l_1 : \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$  ו- $l_4 : \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$ .  
מצאו את המרחק שביניהם.
- (3) מצאו את מרחק הישר  $l : \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$  מציר ה- $z$ .

### תשובות סופיות

- (1)  $\frac{10}{\sqrt{6}}$  יח"א.
- (2) 1.567 יח"א.
- (3)  $\sqrt{2}$  יח"א.

## שאלות מסכמות

- (1) נתונות הנקודות  $A(1,1,3)$ ,  $B(1,2,0)$ ,  $C(1,1,1)$ .
- מצאו הצגה פרמטרית של הישר המחבר את  $B$  עם  $C$ . הראו כי הנקודה  $A$  לא נמצאת על הישר הזה.
  - חשבו את המרחק בין הנקודה  $A$  לבין הישר המחבר את  $B$  עם  $C$ .
  - מצאו את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה  $A$  והמאונך לישר המחבר את  $B$  עם  $C$ .
- (2) מצאו את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבעו אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
- במקרה בו הישרים נחתכים, מצאו גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
- במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצאו גם את המרחק ביניהם.
- $\underline{x} = (1,0,1) + t(1,2,0)$ ,  $\underline{x} = (1,1,0) + s(2,4,0)$
  - $\underline{x} = (-2,2,4) + u(6,6,1)$ ,  $\underline{x} = (1,-1,0) + s(12,-3,1)$
  - $\underline{x} = (1,1,2) + t(1,2,-1)$ ,  $\underline{x} = (2,3,1) + s(2,4,-2)$
  - $\underline{x} = (1,-1,0) + t(0,2,-4)$ ,  $\underline{x} = (2,0,3) + s(-1,-3,1)$
- (3) מצאו את המצב ההדדי של המישור והישר וקבעו אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
- במקרה שהישר חותך את המישור, מצאו גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
- במקרה בו הישר מקביל למישור מצאו את מרחק הישר מהמישור.
- $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ ,  $\underline{x} = (1,0,2) + t(-1,2,2)$
  - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$ ,  $\underline{x} = (-3,0,4) + t(4,-2,-6)$
  - $2x - 14y + 10z = -6$ ,  $\underline{x} = (2,1,-2) + t(-2,2,0)$
- (4) מצאו את המצב ההדדי של המישורים וקבעו אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים.
- במקרה בו המישורים מקבילים מצאו את המרחק ביניהם.
- במקרה בו הם נחתכים מצאו את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.
- $x - 2y + 2z - 10 = 0$ ,  $2x + y + 2z - 4 = 0$
  - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$ ,  $4x - 10y + 6z - 8 = 0$
  - $2x - 14y + 10z = -6$ ,  $x - 7y + 5z = -3$

- (5) נתונה קובייה  $ABCD A'B'C'D'$ , שנפחה הוא 8.  
 משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא  $\pi_1 : 4x + y + 3z - 28 = 0$ .  
 משוואת המישור שעליו מונחת הפאה  $ABB'A'$  היא  $\pi_2 : x + 2y - 2z + 6 = 0$ .  
 מצאו הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).
- (6) הנקודה  $A(4, 0, -1)$  נמצאת על כדור, שמרכזו  $O(1, 1, 2)$ .  
 מצאו את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.
- (7) נתונים מישור וישר  $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ ,  $\ell : \underline{x} = (1, 5, 5) + t(1, 1, 0)$ ,  
 מצאו נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- $z$ , הנמצאת במרחקים שווים  
 מהמישור ומהישר.
- (8) נתונים שני מישורים  $\pi_1 : 2x - 4y + 4z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 1 = 0$ .  
 מצאו הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור  $\pi_1$  ובמרחק 6  
 ממישור  $\pi_2$  (מצאו הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).
- (9) נתונים ישר ומישור  $\pi : 6x + 2y - z + 5 = 0$ ,  $\ell_1 : \underline{x} = (0, -3, 0) + t(1, 1, -8)$ .  
 ישר נוסף,  $\ell_2$ , המקביל למישור  $\pi$ , עובר בנקודה  $P(1, 0, -4)$  וחותך את הישר  
 $\ell_1$  בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור  $\pi$ , הנקודה P' היא הקרובה ביותר  
 לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.  
 מצאו את שטח המלבן PQQ'P'.  
 (הדרכה: הביעו באמצעות  $t$  את וקטור הכיוון של  $\ell_2$ )
- (10) נתונים שני מישורים  $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 3x + y + 2z + 11 = 0$ .  
 $\ell_1$  הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.  
 המישור  $\pi_3$  מכיל את הישר  $\ell_1$  ויוצר זווית של  $60^\circ$  עם הישר  
 $\ell_2 : \underline{x} = (1, 3, -4) + t(1, 1, 0)$ .  
 מצאו את משוואת המישור  $\pi_3$ .

## תשובות סופיות

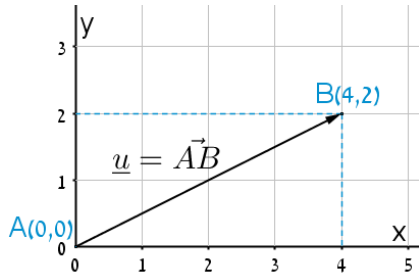
- (1) א.  $\underline{x} = (1, 2, 0) + t(0, -1, 1)$  ב.  $\sqrt{2}$  ג.  $y - z + 2 = 0$
- (2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07. ג. מתלכדים. ד. נחתכים בנקודה  $(1, -3, 4)$ . הזווית היא:  $47.6^\circ$ .
- (3) א. מקביל, 0.9284. ב. מוכל. ג. חותך בנקודה  $(3.5, -0.5, -2)$ , הזווית היא:  $40.78^\circ$ .
- (4) א. נחתכים. ישר חיתוך:  $\underline{x} = (0, -2, 3) + t(3, -1, -2.5)$ , זווית:  $63.6^\circ$ . ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.
- (5)  $\ell: \underline{x} = (0, 2.5, 8.5) + t(2, -2.75, -1.75)$ ,  $\ell: \underline{x} = (0, 7, 7) + t(8, -11, -7)$
- (6)  $\pi: -3x + y + 3z + 15 = 0$
- (7)  $(0, 0, 4)$  או  $(0, 0, 14\frac{4}{5})$
- (8)  $\ell: \underline{x} = (0, -14, -15\frac{3}{4}) + t(-14, 14, 21)$
- (9) 10.467 יח"ש.
- (10)  $\pi_3: 2x + y + z - 5 = 0$  או  $\pi_3: x + 2y - z - 58 = 0$

## סיכום כללי

---

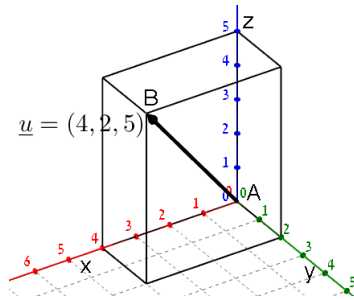
### הגדרה כללית

וקטור שמוצאו בראשית הצירים  $(0,0)$  וסופו בנקודה  $(x, y)$  במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא:  $\underline{u} = (x, y)$ .



דוגמאות:

- הוקטור  $\underline{u} = (4, 2)$  נמצא במישור  $[xy]$ , מוצאו בנקודה  $A(0, 0)$  וסופו בנקודה  $B(4, 2)$ .



- הוקטור:  $\underline{u} = (4, 2, 5)$  נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים  $A(0, 0, 0)$  וסופו בנקודה:  $B(4, 2, 5)$ .

### וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

וקטור שמוצאו בנקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  וסופו בנקודה  $B(x_2, y_2, z_2)$  ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא:  $\underline{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ .

### אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע  $M$  שקצותיו הם  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$  הוא:  $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$ .
- שיעורי נקודה  $P$  המחלקת קטע שקצותיו  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$  ביחס של  $k:l$  הם:  $x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}; y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}; z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k+l}$ .

### מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

מכפלה סקלרית של שני וקטורים  $\alpha$  ו-  $\beta$  תסומן:  $\underline{u} \cdot \underline{v}$  ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:  $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$  כאשר  $\alpha$  היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים:  $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$  תחושב באופן הבא:  $\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ .

גודלו של וקטור  $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$  נתון ע"י:  $|\underline{u}| = \sqrt{u^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ .

### הצגה פרמטרית של ישר

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.

הווקטור  $\underline{a}$  נקרא **ווקטור ההעתקה**.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.

הווקטור  $\underline{u}$  נקרא **ווקטור הכיוון של הישר**.

זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.

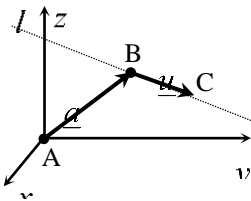
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י:  $\ell: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$

כאשר  $t$  הוא מספר ממשי כלשהו ו-  $\underline{x}$  הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירה של  $t$  שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר  $l$ .

**דוגמא:** עבור הנקודות:  $A(0,0,0)$ ,  $B(5,3,1)$  ו-  $C(7,0,10)$  נקבל את הווקטורים

הבאים:  $\underline{a} = \overline{AB} = B - A = (5,3,1)$ ;  $\underline{u} = \overline{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא:  $l: \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$



**\*הערות:**

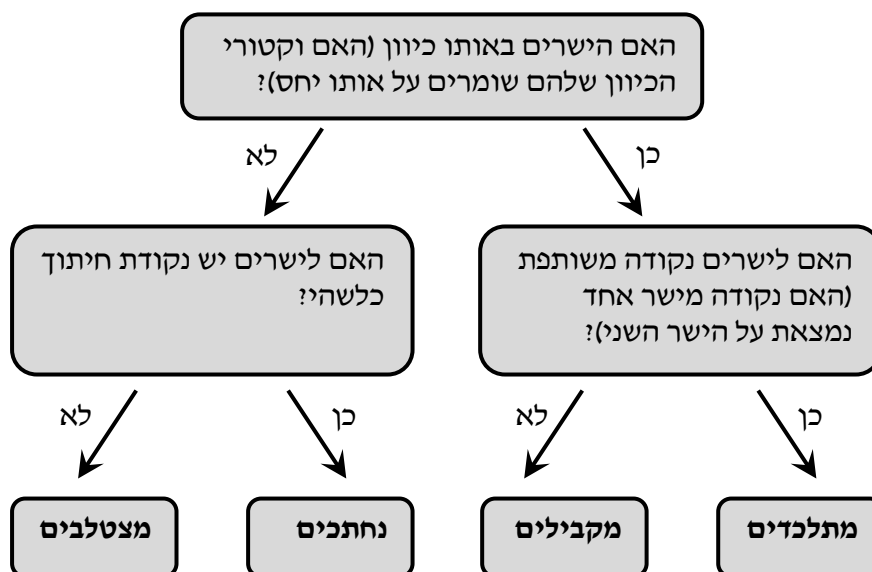
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
- ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא:  $l: \underline{x} = (7, 0, 10) + t(-6, 9, -27)$
- הווקטור  $\underline{x}$  המתקבל ע"י הצבת  $t_0$  בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת  $t_1$  בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור  $\underline{a}$  ומוצאו של הווקטור  $\underline{u}$ .
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור  $\underline{u}$  (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור  $\underline{a}$ .
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

**מצב הדדי בין ישרים**

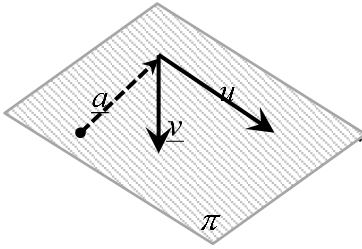
ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



## הצגה פרמטרית של מישור



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.

הווקטור  $\underline{a}$  הוא ווקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  הם וקטורי הכיוון של המישור.

אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י:  $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר  $t, s$  הם מספרים ממשיים כלשהם ו- $\underline{x}$  הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר

מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור  $\pi$ .

## משוואת מישור

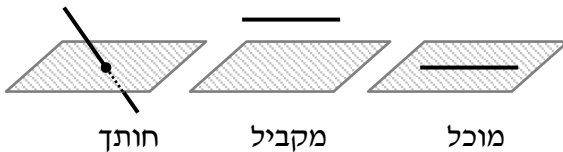
ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא:  $\pi: ax + by + cz + d = 0$ ,

כאשר:  $(x, y, z)$  היא נקודה על המישור והמקדמים  $a, b, c$  הם שיעורי ווקטור הנורמל

של המישור המסומן:  $\underline{h} = (a, b, c)$ .

## מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:



- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

## מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך וקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים:  $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  ו-  $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

נקבעו את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

נחתכים	מקבילים	מתלכדים
כל מצב אחר	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

## חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית  $\alpha$  בין שני וקטורים  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  תחושב ע"י:  $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$ .
- זווית חדה  $\alpha$  בין שני ישרים  $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$  ו-  $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$  תחושב:  $\cos \alpha = \left| \frac{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|} \right|$ .
- זווית חדה  $\alpha$  בין ישר  $l = \underline{a} + t\underline{u}$  ומישור  $\pi: ax + by + cz + d = 0$  תחושב ע"י הנוסחה הבאה:  $\sin \alpha = \left| \frac{\underline{u} \cdot \underline{h}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|} \right|$ .
- זווית חדה  $\alpha$  בין שני מישורים:  $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  ו-  $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  תחושב ע"י:  $\cos \alpha = \left| \frac{\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2}{|\underline{h}_1| \cdot |\underline{h}_2|} \right|$ .

### חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$  במרחב יחושב באופן הבא:  $d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ .
2. מרחק בין נקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  לישר הנתון בהצגה פרמטרית:  $l: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$  יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.
3. מרחק בין נקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  למישור:  $\pi: ax + by + cz + d = 0$  יחושב ע"י:  $d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$ .
4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.
5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.
6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
  - א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.
  - ב. שימוש בנוסחה:  $d = \left| \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$ .
7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 20 - העתקות ליניאריות

תוכן העניינים

- 227 ..... 1. העתקות ליניאריות
- 229 ..... 2. גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות
- 232 ..... 3. העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם
- 236 ..... 4. פעולות עם העתקות ליניאריות

## העתקות לינאריות

### שאלות

בשאלות 1-15, קבעו, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה לינארית:

$$T(x, y) = (x + y, x - y) ; T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z) ; T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

$$T(x, y, z) = (2x + z, |y|) ; T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

$$T(x, y) = (xy, y, z) ; T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4)$$

$$T(x, y, z) = (x + 1, x + y, y + z) ; T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (5)$$

$$(B \in M_n[\mathbb{R}]) \quad T(A) = BA + AB ; T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (6)$$

$$T(A) = A + A^T ; T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (7)$$

$$T(A) = |A| \cdot I ; T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (8)$$

$$T(A) = A \cdot A^T ; T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (9)$$

$$T(A) = A^{-1} ; T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (10)$$

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + bx + cx^2 ; T : P_3[\mathbb{R}] \rightarrow P_2[\mathbb{R}] \quad (11)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) ; T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_n[\mathbb{R}] \quad (12)$$

$$T(p(x)) = p'(x) + p''(x) ; T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_n[\mathbb{R}] \quad (13)$$

$$T(p(x)) = p^2(x) ; T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_{2n}[\mathbb{R}] \quad (14)$$

$$(F = \mathbb{C}, F = \mathbb{R}) \quad T(z) = \bar{z} ; T : C[F] \rightarrow C[F] \quad (15)$$

**16** עבור איזה ערך של הקבוע  $m$  (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה ליניארית:  
 $T(x, y) = (m^2 x^{2m}, y^{2m} + x)$  ;  $T: R^2 \rightarrow R^2$  ?

בשאלות **17-20**, קבעו האם קיימת העתקה ליניארית המקיימת את הנתון.  
 אם כן, מצאו את ההעתקה וקבעו האם היא יחידה. אם לא, נמקו מדוע.

**17**  $T: R^3 \rightarrow R^3$  כך ש-  $T(1,1,0) = (1,2,3)$ ,  $T(0,1,1) = (4,5,6)$ ,  $T(0,0,1) = (7,8,9)$

**18**  $T: R^3 \rightarrow R^3$  כך ש-  $T(1,0,1) = (1,1,0)$ ,  $T(0,1,1) = (1,2,1)$ ,  $T(0,0,1) = (0,1,1)$

**19**  $T: R^4 \rightarrow R^3$  כך ש-

$T(1,2,-1,0) = (0,1,-1)$ ,  $T(-1,0,1,1) = (1,0,0)$ ,  $T(0,4,0,2) = (2,2,-2)$

**20**  $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$  כך ש-  $T(1) = 4$ ,  $T(4x + x^2) = x$ ,  $T(1-x) = x^2 + 1$

$T(1,0,0) = (a_1, a_2, a_3)$

**21** נתונה העתקה ליניארית  $T: R^3 \rightarrow R^3$ , המקיימת:

$T(0,1,0) = (b_1, b_2, b_3)$

$T(0,0,1) = (c_1, c_2, c_3)$

א. הוכיחו שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ב. נסחו והוכיחו טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור  $T: R^n \rightarrow R^m$

**22** נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$

הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$  קבוצה בת"ל, אז  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  קבוצה בת"ל.

ב. אם  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  קבוצה בת"ל, אז  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$  קבוצה בת"ל.

## תשובות סופיות

(1) כן	(2) כן	(3) לא	(4) לא	(5) לא
(6) כן	(7) כן	(8) לא	(9) לא	(10) לא
(11) כן	(12) כן	(13) כן	(14) לא	(15) לא
(16) כן	(17) כן	(18) כן	(19) כן	(20) כן

(21) שאלת הוכחה. (22) שאלת הוכחה.

## גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-6, מצאו:

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

$$T(x, y, z, t) = (x + y, y - 4z + t, 4x + y + 4z - t), \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - 4y - z, x + y, y - z, x + 4z), \quad T: R^3 \rightarrow R^4 \quad (2)$$

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A, \quad T: M_2[R] \rightarrow M_2[R] \quad (4)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) - p(x+4), \quad T: P_2[R] \rightarrow P_2[R] \quad (5)$$

$$D(p(x)) = p'(x), \quad D: P_3[R] \rightarrow P_3[R] \quad (6)$$

(7) מצאו העתקה ליניארית  $T: R^3 \rightarrow R^3$ ,  
אשר תמונתה נפרשת על ידי:  $\{(4, 1, 4), (-1, 4, 1)\}$ .

(8) מצאו העתקה ליניארית  $T: R^4 \rightarrow R^3$ ,  
אשר הגרעין שלה נפרש על ידי:  $\{(0, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}$ .

נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow U$ .

(9) הוכיחו כי אם  $\dim \text{Im}(T) = \dim \text{Ker}(T)$  אז הממד של  $V$  זוגי.

(10) הוכיחו או הפריכו:

א. קימת העתקה ליניארית  $T: R^5 \rightarrow R^5$  שעבורה  $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$ .

ב. קימת העתקה ליניארית  $T: R^4 \rightarrow R^4$  שעבורה  $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$ .

**11** ידוע שהעתקה לינארית  $T: V \rightarrow W$ , מקיימת:  $\dim \text{Im}(T) = \dim \text{Ker}(T)$ ,  $\dim(W) = 4$ .  
 מי מבין הבאים יכול להיות הממד של  $V$ ?

א. 10

ב. 9

ג. 7

ד. 6

ה. כל התשובות לא נכונות.

**12** הוכיחו או הפריכו:א. לכל העתקה לינארית  $T: V \rightarrow V$  מתקיים  $\text{Im}(T^2) \subseteq \text{Im}(T)$ .ב. לכל העתקה לינארית  $T: V \rightarrow V$  שמקיימת:

$$T = T^2, \text{Im}(T) = \text{Im}(T^2), \text{Ker}(T) = \text{Ker}(T^2)$$

ג. לכל העתקה לינארית  $T: V \rightarrow V$ , המקיימת  $\text{Im}(T) \subseteq \text{Ker}(T)$ ,אז בהכרח  $T = 0$ .**13** מטריצה  $A_{m \times n}$  מגדירה העתקה  $T: R^n \rightarrow R^m$ ;  $T(x) = Ax$ ,ואילו  $A_{n \times m}^T$  מגדירה העתקה  $S: R^m \rightarrow R^n$ ;  $S(y) = A^T y$ .הראו כי  $\text{Im}(T) = (\text{Ker}(S))^\perp$ .

## תשובות סופיות

(1) גרעין – בסיס :  $\{(0,0,1,4)\}$  , מימד : 1 . תמונה – כל בסיס של  $\mathbb{R}^3$  , מימד : 3 .

(2) גרעין – בסיס :  $\{(0,0,0)\}$  , מימד : 0 .

תמונה – בסיס :  $\{(1,1,0,1), (0,5,1,4), (0,0,-6,21)\}$  , מימד : 3 .

(3) גרעין – בסיס :  $\{(1,-2,1,0), (-7,3,0,1)\}$  , מימד : 2 .

תמונה – בסיס :  $\{(1,1,2), (0,1,2)\}$  , מימד : 2 .

(4) גרעין – בסיס :  $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  , מימד : 2 .

תמונה – בסיס :  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$  , מימד : 2 .

(5) גרעין – בסיס :  $\{p(x)=1\}$  , מימד : 1 .

תמונה – בסיס :  $\{p(x)=2x+5, p(x)=1\}$  , מימד : 2 .

(6) גרעין – בסיס :  $\{p(x)=1\}$  , מימד : 1 .

תמונה – בסיס :  $\{p(x)=x^2, p(x)=x, p(x)=1\}$  , מימד : 3 .

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$T(x, y, z, t) = (-x - y + z, -2x - y + t, 0) \quad (8)$$

(9) שאלת הוכחה.

(10) לא.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

## העתקות לינאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

### שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-4, קבעו האם היא חח"ע<sup>1</sup>, האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה. כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצאו אותה.

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, z - x) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, x + 2z) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (2)$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b + c, a - b, b - 2c) \quad , \quad T: P_2[R] \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3 \quad , \quad T: M_2[R] \rightarrow P_3[R] \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית } T: R^4 \rightarrow R^3 ?$$

$$(6) \quad \text{נתונה העתקה לינארית } T: U \rightarrow V \text{ הוכיחו:}$$

א. אם  $\dim(U) < \dim(V)$ , אז  $T$  לא על.

ב. אם  $\dim(U) > \dim(V)$ , אז  $T$  לא חח"ע.

ג. אם  $\dim(U) = \dim(V)$ , אז  $T$  חח"ע  $\Leftrightarrow T$  על.

$$(7) \quad \text{נתונה העתקה לינארית } T: V \rightarrow W \text{ הוכיחו או הפריכו:}$$

א. אם  $\dim \text{Ker}(T) \neq 0$ , אז ההעתקה  $T$  אינה על.

ב. אם  $\dim \text{Ker}(T) = 0$  ו- $\dim(V) \leq \dim(W)$ , אז ההעתקה  $T$  היא על.

ג. אם  $\dim \text{Ker}(T) = 0$  ו- $\dim(V) \geq \dim(W)$ , אז ההעתקה  $T$  היא על.

ד. אם  $\dim(V) < \dim(W)$ , אז ההעתקה  $T$  חח"ע.

<sup>1</sup> הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.

**(8)** נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow W$ ;  $\{v_1, \dots, v_n\}$  בסיס של  $V$ .  
הוכח או הפרך:

- א. אם  $\dim(V) > \dim(W)$  ואם  $T(v_1) = 0$ , אז ייתכן מקרה שבו  $T$  חח"ע.  
ב. אם  $\dim(V) > \dim(W)$ , הקבוצה  $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  בת"ל.

**(9)** נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow W$ .

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  קבוצה בת"ל ב- $V$ .

הוכיחו או הפריכו:

- א. אם  $T$  חח"ע, אז הקבוצה  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$  בת"ל ב- $W$ .  
ב. אם הקבוצה  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$  בת"ל ב- $W$ , אז  $T$  חח"ע.

**(10)** נתונה העתקה ליניארית  $T: R^n \rightarrow R^m$ .

הוכיחו או הפריכו:

- א. אם  $T$  היא איזומורפיזם אז  $m = n$ .  
ב. אם  $m > n$ , אז  $T$  חח"ע.  
ג. אם  $T(v) = Av$  לכל  $v$ , אז למטריצה  $A$  יש  $n$  שורות ו- $m$  עמודות.

**(11)** נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$ , המקיימת  $\text{Im}(T) = \text{Ker}(T)$ .

הוכיחו או הפריכו:

- א. אם  $T$  על, אז בהכרח  $V = \{0\}$ .  
ב. אם  $T$  חח"ע, אז בהכרח  $V = \{0\}$ .  
ג.  $T$  היא איזומורפיזם.  
ד.  $T$  היא העתקת האפס.

**(12)** נתונה העתקה ליניארית  $T: R^n \rightarrow R^m$ , ונתונה מטריצה  $A_{m \times n}$ ,

כך ש- $T(v) = Av$ , לכל  $v \in R^n$ .

הוכיחו או הפריכו:

- א. אם  $v \in \text{Ker}(T)$ , אז  $v \in \text{rowsp}(A)$ .  
ב. אם  $v \in \text{rowsp}(A)$ , אז  $v \in \text{Ker}(T)$ .  
ג. אם  $v \in \text{colsp}(A)$ , אז  $v \in \text{Im}(T)$ .  
ד. אם  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ , אז  $n < m$ .

**13** נתונה העתקה ליניארית  $T: R^n \rightarrow R^n$ , ונתונה מטריצה  $A$ ,

כך ש-  $T(v) = Av$ , לכל  $v \in R^n$ .

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם  $\text{rank}(A) = n$ , אז  $T$  חח"ע.

ב. אם  $\text{rank}(A) = n$ , אז  $T$  על.

ג. אם  $T^2(v) = 0$ , אז  $\text{Im}(T) \subseteq \text{Ker}(T)$ .

ד. אם  $T^2(v) = 0$ , אז  $\text{rank}(A) \leq \frac{n}{2}$ .

**14** נתונה העתקה ליניארית  $T: P_3[R] \rightarrow R$ , המוגדרת על ידי  $T(p(x)) = p(1)$ .

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. ענו על הסעיפים הקודמים עבור  $T: P_n[R] \rightarrow R$ .

**15** נתונה העתקה ליניארית  $T: M_n[R] \rightarrow M_n[R]$ , המוגדרת על ידי  $T(A) = A^T$ .

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. מצאו את ההעתקה ההפוכה של  $T$ .

## תשובות סופיות

(1) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(x, y, z) = \left( \frac{1}{3}(x + y - 2z), \frac{1}{3}(2y - z - x), \frac{1}{3}(z + x + y) \right)$$

(2) לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

(3) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a, b, c) = 0.4a + 0.6b + 0.2c + (-0.4a + 0.4b + 0.2c)x + (-0.4c - 0.2b + 0.2a)x^2$$

(4) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} b + c - d & -a + b + c - d \\ b - d & d \end{pmatrix}$$

(5) לא.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) א.  $\text{Ker}(T) = \text{span}\{-1 + x, -1 + x^2, -1 + x^3\}$ ,  $\dim \text{Ker}(T) = 3$ .

$$\text{Im}(T) = \text{span}\{1\}, \dim \text{Im}(T) = 1$$

ב. לא חח"ע, כן על.

א.  $\text{Ker}(T) = \text{span}\{-1 + x, -1 + x^2, \dots, -1 + x^n\}$ ,  $\dim \text{Ker}(T) = n$ .

$$\text{Im}(T) = \text{span}\{1\}, \dim \text{Im}(T) = 1$$

לא חח"ע, כן על.

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{Im}(T) = M_n[\mathbb{R}] \quad \text{א. (15)}$$

ב. חח"ע ועל. ג.  $T^{-1}(A) = A^T$ .

## פעולות עם העתקות לינאריות

### שאלות

בשאלות 1-9, תהינה  $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ו- $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  העתקות לינאריות המוגדרות על ידי:  $S(x, y, z) = (x - z, y)$ ,  $T(x, y, z) = (x, 4x - y, x + 4y - z)$ .

מצאו נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

- |           |              |              |           |          |
|-----------|--------------|--------------|-----------|----------|
| (1) $S+T$ | (2) $4S$     | (3) $4S-10T$ | (4) $TS$  | (5) $ST$ |
| (6) $T^2$ | (7) $T^{-1}$ | (8) $T^{-2}$ | (9) $S^2$ |          |

### תשובות סופיות

- (1) לא ניתן להגדיר.
- (2)  $4S = 4(x - z, y)$
- (3) לא ניתן להגדיר.
- (4) לא ניתן להגדיר.
- (5)  $ST: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ;  $St(x, y, z) = (z - 4y, 4x - y)$
- (6)  $T^2(x, y, z) = (x, y, 16x - 8y + z)$
- (7)  $T^{-1}(x, y, z) = (x, 4x, -y, 17x - 4y - z)$
- (8)  $T^{-2}(x, y, z) = (x, y, -16x + 8y + z)$
- (9) לא ניתן להגדיר.

## מתמטיקה למדעים 2

פרק 21 - מספרים מרוכבים - הסברים ותרגולים נוספים

תוכן העניינים

237	1. הגדרת המספר המרוכב
240	2. המספר הצמוד
243	3. חקירת משוואה ריבועית מרוכבת
244	4. מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב
248	5. נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב
250	6. שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים
251	7. שאלות שונות עם מספרים מרוכבים

## הגדרת המספר המרוכב:

**סיכום כללי:**

**הגדרות כלליות:**

ע"י הסימון:  $i = \sqrt{-1}$  מגדירים את המספר מהצורה:  $z = a + bi$  כמספר מרוכב בעל חלק ממשי  $a$  וחלק מדומה  $b$ . המספרים  $a$  ו- $b$  הם ממשיים.  
 $a$  נקרא הרכיב הממשי של  $z$  ומסומן גם  $\text{Re}(z)$  (מלשון: Real).  
 $b$  נקרא הרכיב המדומה של  $z$  ומסומן גם  $\text{Im}(z)$  (מלשון: Imaginary).

**שאלות:**

(1) רשום עם  $i$ :

א. $\sqrt{-1} =$	ב. $\sqrt{-4} =$	ג. $\sqrt{-25} =$
ד. $\sqrt{-3} =$	ה. $\sqrt{-5} =$	

(2) חשב:

א. $i =$	ב. $i^2 =$	ג. $i^3 =$
ד. $i^4 =$	ה. $i^5 =$	ו. $i^{17} =$

(3) רשום את ערכם של  $a$  ו- $b$  בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2 + 5i$	ב. $3 - i$	ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
ד. $7i$	ה. $-4$	ו. $0$

(4) כתוב מספר מרוכב  $z$  לפי הדרישות הבאות:

א.  $\text{Re}(z) = -3, \text{Im}(z) = 2$ .

ב.  $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(5) מספר מרוכב מסוים  $z$  מקיים:  $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 4$  ו-  $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) = -1$ . מצא את  $z$ .

(6) פתור את המשוואות הבאות:

א.  $x^2 = -1$       ב.  $x^2 + 36 = 0$       ג.  $x^2 - 2x + 5 = 0$

(7) פתור את המשוואה הבאה:  $x^2 + x + 1 = 0$ .

(8) פתור את המשוואה הבאה:  $z^2 + iz + 6 = 0$ .

(9) נתון:  $z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = 5 - 2i$ . חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א.  $z_1 + z_2 =$       ב.  $z_1 - z_2 =$       ג.  $z_1 \cdot z_2 =$

(10) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $(-2 + 6i) + (1 - i)$       ב.  $(4 + 4i) - \left(3 + \frac{1}{2}i\right)$   
 ג.  $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$       ד.  $5 - (3 - 2i)$   
 ה.  $(i - 3) + 6i$       ו.  $(i + 2) - (3i - 2) + (7 - 5i)$

(11) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $(1 + 4i) \cdot (8 - 2i)$       ב.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$   
 ג.  $(4i - 3) \cdot (4i + 3)$       ד.  $i \cdot (i - 1)$   
 ה.  $(2i + 3) \cdot i$       ו.  $(5i - 1)^2$

**(12)** נתונים שני מספרים מרוכבים  $z_1 = a_1 + b_1i$  ו-  $z_2 = a_2 + b_2i$ .

ידוע כי  $z_1 + z_2$  הוא ממשי וכי  $z_1 - z_2$  הוא מדומה.

א. מצא קשר בין  $a_1$  ל-  $a_2$  וקשר בין  $b_1$  ו-  $b_2$ .

ב. הראה כי המכפלה  $z_1 \cdot z_2$  היא ממשית.

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $i$     ב.  $2i$     ג.  $5i$     ד.  $\sqrt{3}i$     ה.  $\sqrt{5}i$
- (2) א.  $i$     ב.  $-1$     ג.  $-i$     ד.  $1$     ה.  $i$     ו.  $i$
- (3) א.  $a = 2, b = 5$     ב.  $a = 3, b = -1$     ג.  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = -\frac{1}{2}$     ד.  $a = 0, b = 7$     ה.  $a = -4, b = 0$     ו.  $a = 0, b = 0$
- (4) א.  $z = -3 + 2i$     ב.  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- (5)  $z = 1.5 + 2.5i$
- (6) א.  $x = \pm i$     ב.  $x = \pm 6i$     ג.  $x = 1 + 2i, 1 - 2i$
- (7)  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- (8)  $z = 2i, -3i$
- (9) א.  $7 + i$     ב.  $-3 + 5i$     ג.  $16 + 11i$
- (10) א.  $-1 + 5i$     ב.  $1 + 3\frac{1}{2}i$     ג.  $-\sqrt{3}i$     ד.  $2 + 2i$     ה.  $-3 + 7i$     ו.  $11 - 7i$
- (11) א.  $16 + 30i$     ב.  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$     ג.  $-25$     ד.  $-1 - i$
- (12) א.  $a_1 = a_2, b_1 = -b_2$     ב. הוכחה.    ג.  $-2 + 3i$     ו.  $-24 - 10i$

## המספר הצמוד:

סיכום כללי:

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב  $z = a + bi$  קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$  וערכו:  $\bar{z} = a - bi$ .

שאלות:

(13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2 + 5i$	ב. $3 - i$	ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
ד. $7i$	ה. $-4$	ו. $0$

(14) חשב:

א. $\frac{11 + 2i}{2 - i}$	ב. $\frac{3 + 7i}{2 - 5i}$	ג. $\frac{19 - 9i}{2 - 3i}$
----------------------------	----------------------------	-----------------------------

(15) נתון מספר  $z = 5 - 2i$ . חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$	ב. $\frac{z}{z + 3}$	ג. $\frac{z + i}{z - i}$
------------------	----------------------	--------------------------

(16) המספר  $\frac{3 + 4i}{a - i}$  הוא ממשי טהור. מצא את  $a$ .

(17) נתונים שני מספרים מרוכבים  $z_1 = a_1 + b_1i$  ו- $z_2 = a_2 + b_2i$ .

הראה כי כדי שתוצאת החילוק  $\frac{z_1}{z_2}$  תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים:  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ .

(18) פתור את המשוואה הבאה:  $3z - 11 = iz - 7i$ .

(19) פתור את המשוואה הבאה:  $iz + 5 = 4i$ .

(20) פתור את מערכת המשוואות הבאה ( $z$  ו- $w$  משתנים מרוכבים):  

$$\begin{cases} 3z + iw = 5 - 4i \\ 5iz - 2w = 5 + 8i \end{cases}$$

(21) פתור את המשוואות הבאות שבהן  $a$  ו- $b$  ממשיים:

ב.  $3a - 8 + 5bi = 2b - ai - 3i$

א.  $2a - 3i = 10 + bi$

(22) פתור את המשוואה הבאה:  $2z + 7i = iz + \bar{z} - 3$ .

(23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

ב.  $\sqrt{8 + 6i}$

א.  $\sqrt{5 - 12i}$

(24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א.  $(1 - i)z^2 - 2z + i + 1 = 0$

ב.  $(-2 + i)z^2 - (6 + 12i)z + 10 - 25i = 0$

(25) פתור את המשוואה הבאה:  $iz^2 - 2(1 - i)z + 6 + 15i = 0$ .

(26) פתור את המשוואה הבאה:  $z^2 - i\bar{z} + 6 = 0$ .

**תשובות סופיות:**

(13) א.  $2-5i$     ב.  $3+i$     ג.  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$     ד.  $-7i$     ה.  $-4$     ו.  $0$

(14) א.  $4+3i$     ב.  $-1+i$     ג.  $.5+3i$

(15) א.  $\frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$     ב.  $\frac{11}{17} - \frac{3}{34}i$     ג.  $\frac{14}{17} + \frac{5}{17}i$

(16)  $a = -\frac{3}{4}$

(17) שאלת הוכחה.

(18)  $z = 4 - i$

(19)  $z = 4 + 5i$

(20)  $z = 2 - 3i, w = 5 + i$

(21) א.  $a = 5, b = -3$     ב.  $a = 2, b = -1$

(22)  $z = -\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}i$

(23) א.  $z = \pm(3 - 2i)$     ב.  $z = \pm(3 + i)$

(24) א.  $z_{1,2} = i, 1$     ב.  $z_{1,2} = -2 - i, 2 - 5i$

(25)  $z_1 = -2 - 5i, z_2 = 3i$

(26)  $z_1 = -3i, z_2 = 2i$

## חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

שאלות:

(27) נתונה המשוואה הבאה:  $(mi-2)z^2 - 2(m+2i)z + 1 = 0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב  $m$  למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

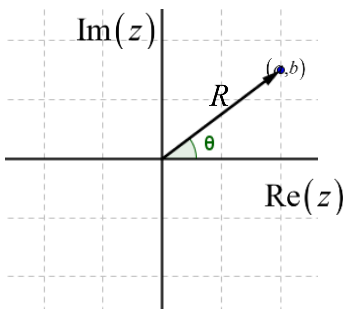
תשובות סופיות:

(27) א.  $m = -i$  ב.  $m = -2i$ .

## מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

### סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב  $z$  ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה- $x$  מייצג את  $a$ , גודל הערך הממשי של  $z$ , וציר ה- $y$  מייצג את  $b$ , גודל הערך המדומה של  $z$ . מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג  $(a, b)$  או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ- $(0, 0)$ ) והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס. הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב ויסומן:  $(R, \theta)$ . מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$$z = R \cos \theta + i \cdot R \sin \theta = R(\cos \theta + i \sin \theta) = R \operatorname{cis} \theta$$

### נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית):  $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\tan \theta = \frac{b}{a}$ .
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית:  $a = R \cos \theta$ ,  $b = R \sin \theta$ .
- גודל של מספר מרוכב  $z$  יסומן  $|z|$  ויחושב:  $|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

### פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים:  $z_1 \cdot z_2 = (R_1 \operatorname{cis} \theta_1) \cdot (R_2 \operatorname{cis} \theta_2) = R_1 R_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ .
- חילוק מספרים מרוכבים:  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \operatorname{cis} \theta_1}{R_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{R_1}{R_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$ .

**שאלות:**

**(28)** כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

- |                             |                           |                           |
|-----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| א. $2\text{cis}60^\circ$    | ב. $6\text{cis}135^\circ$ | ג. $4\text{cis}330^\circ$ |
| ד. $4\text{cis}(-30^\circ)$ | ה. $4\text{cis}690^\circ$ | ו. $8\text{cis}90^\circ$  |
| ז. $3\text{cis}270^\circ$   | ח. $\text{cis}180^\circ$  | ט. $\text{cis}0^\circ$    |

**(29)** הפוך להצגה קוטבית:

- |           |                 |                                       |
|-----------|-----------------|---------------------------------------|
| א. $1+i$  | ב. $\sqrt{3}-i$ | ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ |
| ד. $3+4i$ | ה. $6i$         | ו. $-i$                               |
| ז. $4$    | ח. $-1$         | ט. $1$                                |
| י. $0$    |                 |                                       |

**(30)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |  |   |
|--|---|
| א. $2\text{cis}120^\circ \cdot 3\text{cis}60^\circ$    | ב. $\text{cis}210^\circ \cdot 5\text{cis}(-40^\circ)$ |
| ג. $\frac{12\text{cis}315^\circ}{3\text{cis}90^\circ}$ | ד. $\frac{1}{2\text{cis}40^\circ}$                    |
| ה. $6\text{cis}30^\circ + 2\text{cis}210^\circ$        |   |

**(31)** נתון המספר המרוכב  $z = R\text{cis}\theta$ . הבע באמצעות  $R$  ו- $\theta$  את המספרים:

- |                   |          |                      |
|-------------------|----------|----------------------|
| א. $\bar{z}$      | ב. $1/z$ | ג. $-z$              |
| ד. $-\frac{1}{z}$ | ה. $iz$  | ו. $z \cdot \bar{z}$ |

**(32)** הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

- |                  |                      |  |
|------------------|----------------------|--|
| א. $z + \bar{z}$ | ב. $z \cdot \bar{z}$ | ג. $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$ |
|------------------|----------------------|--|

**(33)** הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

- |                      |                                      |
|----------------------|--------------------------------------|
| א. $z^2 - \bar{z}^2$ | ב. $\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$ |
|----------------------|--------------------------------------|

(34) הוכח את הטענות הבאות:

א.  $z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz}$       ב.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו  $\sqrt{2}$  במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

(36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא  $1 + \sqrt{3}i$ . מצא את קדקודיו האחרים.

(37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי המשולש הוא  $1 + \sqrt{3}i$ . מצא את קדקודיו האחרים.

(38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא  $30^\circ$  חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא  $1 + \sqrt{3}i$ . מצא את קדקודיו האחרים.

(39)  $z$  הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה. קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א.  $\bar{z}$       ב.  $\frac{1}{z}$       ג.  $\frac{z}{\bar{z}}$       ד.  $z \cdot \bar{z}$

**תשובות סופיות:**

- (28) א.  $1 + \sqrt{3}i$     ב.  $-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$     ג.  $2\sqrt{3} - 2i$     ד.  $2\sqrt{3} - 2i$
- ה.  $2\sqrt{3} - 2i$     ו.  $8i$     ז.  $-3i$     ח.  $-1$     ט.  $1$
- (29) א.  $\sqrt{2}\text{cis}45^\circ$     ב.  $2\text{cis}330^\circ$     ג.  $\text{cis}240^\circ$     ד.  $5\text{cis}53.13^\circ$
- ה.  $6\text{cis}90^\circ$     ו.  $\text{cis}270^\circ$     ז.  $4\text{cis}0^\circ$     ח.  $\text{cis}180^\circ$     ט.  $\text{cis}0^\circ$
- (30) א.  $-6$     ב.  $5\text{cis}170^\circ$     ג.  $4\text{cis}225^\circ$     ד.  $\frac{1}{2}\text{cis}(-40^\circ)$
- ה.  $4\text{cis}30^\circ$
- (31) א.  $R\text{cis}(-\theta)$     ב.  $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$     ג.  $R\text{cis}(180^\circ + \theta)$
- ד.  $\frac{1}{R}\text{cis}(180^\circ + \theta)$     ה.  $R\text{cis}(90^\circ + \theta)$     ו.  $R^2$
- (32) שאלת הוכחה.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) שאלת הוכחה.
- (35)  $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$
- (36)  $-\sqrt{3}+i, -1-\sqrt{3}i, \sqrt{3}-i$
- (37)  $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2$
- (38)  $1+\sqrt{3}i, -1+\sqrt{3}i, 2$
- (39) א. מחוץ למעגל.    ב. בתוך המעגל    ג. על המעגל    ד. מחוץ למעגל.

## נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב  $z$  בחזקת  $n$  נעזר בקשר:  $(R\text{cis}\theta)^n = R^n\text{cis}(n\theta)$ .

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש  $n$ -י של מספר מרוכב  $z$  השווה למספר מרוכב אחר  $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

$$\cdot z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 / \sqrt[n]{\phantom{x}} \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{R_0} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) : 1 \leq k \leq n$$

שאלות:

40 חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א.  $(2\text{cis}30^\circ)^3$       ב.  $(2\text{cis}14^\circ)^5$       ג.  $(1+i)^4$

ד.  $(\sqrt{3}-i)^3$       ה.  $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

41 פתור את המשוואות הבאות:

א.  $z^2 = 36\text{cis}120^\circ$       ב.  $z^4 = (9\text{cis}80^\circ)^2$       ג.  $z^5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

42 מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

43 נתון המספר המרוכב  $z = x+iy$ .

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה:  $|z|=2$ .

(44) נתון המספר המרוכב  $z = x + iy$ .

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה:  $|z - 3i| = 5$ .

(45) נתון המספר המרוכב  $z = x + iy$ . מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס

המתקבל בעבור המשוואה:  $|z + i| + |\bar{z} + i| = |1 + 3i|$ .

### תשובות סופיות:

(40) א.  $8i$       ב.  $32\text{cis}70^\circ$       ג.  $-4$       ד.  $-8i$       ה. 1.

(41) א.  $z_0 = 6\text{cis}60^\circ, z_1 = 6\text{cis}240^\circ$ .

ב.  $z_0 = 3\text{cis}40^\circ, z_1 = 3\text{cis}130^\circ, z_2 = 3\text{cis}220^\circ, z_3 = 3\text{cis}310^\circ$ .

ג.  $z_0 = \text{cis}12^\circ, z_1 = \text{cis}84^\circ, z_2 = \text{cis}156^\circ, z_3 = \text{cis}228^\circ, z_4 = \text{cis}300^\circ$ .

(42) סכום: 0, מכפלה: -1.

(43)  $x^2 + y^2 = 4$ .

(44)  $x^2 + (y - 3)^2 = 25$ .

(45)  $\frac{2x^2}{3} + \frac{2y^2}{5} = 1$ .

## שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

### שאלות:

(46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא  $a_7 = 13 + 3i$  והאיבר השלישי הוא  $a_3 = 5 - 9i$ . מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

(47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא  $a_5 = 32 + 16i$  והאיבר השני הוא  $a_2 = 2 - 4i$ .  
 א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.  
 ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

(48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי  $4i$  מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

### תשובות סופיות:

$$S_{10} = 100 - 15i \quad (46)$$

$$S_5 = 20 + 25i \quad \text{ב.} \quad a_1 = 2 + i, q = -2i \quad \text{א.} \quad (47)$$

$$2, 2i, -2 \quad \text{או} \quad 2, 4 - 2i, 6 - 8i \quad (48)$$

## שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

### שאלות:

(49) פתור את המשוואה:  $z - \bar{z} + |z| = |2 - i|^2 - 4i + \text{Im}(z)$ .

(50) פתור את המשוואה:  $|2 - 3^{x^2 - x - 1}i| = \sqrt{13}$ .

(51) פתור את המשוואה:  $z^3 = \bar{z}$ .

(52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

(53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים. הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

(54) נתון מספר מרוכב  $z$ , שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.

הוכח כי אם  $z - \frac{1}{\bar{z}}$  ממשי אז  $z$  על מעגל היחידה.

(55) הוכח את הנוסחה הבאה:  $R_1 \text{cis} \theta_1 \cdot R_2 \text{cis} \theta_2 = R_1 R_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ .

(56)  $z$  הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.

נתון:  $|z^4 - z^3| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ . מצא את  $\arg(z)$ .

(57)  $z$  הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.

מצא את ערך הביטוי  $z + iz$ , אם ידוע שהוא ממשי.

(58)  $z_1$  ו- $z_2$  הם פתרונות המשוואה הבאה:  $z^2 - 2\cos\theta \cdot z + 1 = 0$ .  
 הבע באמצעות  $\theta$  את גודל הזווית  $\angle z_1 O z_2$  (O ראשית הצירים).

### תשובות סופיות:

(49)  $z_1 = 3 - 4i$ ,  $z_2 = -3 - 4i$

(50)  $x = 2$ ,  $-1$

(51)  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = i$ ,  $z_3 = -i$ ,  $z_4 = 1$ ,  $z_5 = -1$

(52) שאלת הוכחה.

(53) שאלת הוכחה.

(54) שאלת הוכחה.

(55) שאלת הוכחה.

(56)  $\arg(z) = 30^\circ$

(57)  $z + iz = \sqrt{2}$ ,  $-\sqrt{2}$

(58)  $2\theta$