מתמטיקה ללמידת מכונה

תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית 1
2. קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט 13
3. מטריצות אורתוגונליות, העתקות אורתוגונליות, לכסון אורתוגונלי 21
4. פירוקים של מטריצה (פירוק UL, פירוק DVS, פירוק RQ) 31
5. מילון ..... (ללא ספר)
6. הקדמה וצעדים ראשונים ..... (ללא ספר)
7. משתנים ואופרטורים ..... (ללא ספר)
8. מרחב הזיכרון בפייתון ..... (ללא ספר)
9. תנאים ..... (ללא ספר)
10. מחרוזות ..... (ללא ספר)
11. טאפל (elput) ..... (ללא ספר)
12. לולאות ..... (ללא ספר)
13. רשימות ..... (ללא ספר)
14. פונקציות ..... (ללא ספר)
15. סט (tes) ..... (ללא ספר)
16. ספריית yPmuN ..... (ללא ספר)
17. מבוא לעיבוד תמונה ותמונות דיגיטליות באמצעות ספריית yPmuN ..... (ללא ספר)
18. אמידה נקודתית 42

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 1 - מרחבי מכפלה פנימית

תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית 1
2. הנורמה והמרחק 3
3. אי שוויון קושי-שוורץ, זווית בין וקטורים 5
4. אורתוגונליות 8
5. משלים אורתוגונלי 11

מרחבי מכפלה פנימית

שאלות

1) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$, ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_2y_2 .$$

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

2) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$, ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + kx_2y_2 .$$

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

3) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2,x_3)$, $v=(y_1,y_2,y_3)$, ב- $\mathbb{R}^3$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1 + kx_1y_3 + x_2y_2 + kx_3y_1 + x_3y_3 .$$

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$?

4) לכל שני וקטורים $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$, ב- $\mathbb{R}^n$,

נגדיר: $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} k_i u_i v_i$, כאשר $k_1,\ldots,k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.

הראו כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$.

מהי המכפלה המתקבלת אם $k_i = 1$, לכל $1 \le i \le n$?

5) לכל שתי מטריצות A, B ב- $M_{mxn}[R]$, נגדיר: $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.

tr מייצג את המילה trace (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

6) לכל שתי פונקציות f, g ב- $C[a,b]$, נגדיר: $\langle f,g\rangle = \int_a^b f\cdot g\,dx$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה מכפלה פנימית על R^3 , שעבורה הקבוצה $B=\{(1,1,0),(1,1,0),(1,0,0)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי.
חשבו את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle$.

תשובות סופיות

1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.

2) $k>9$

3) $-1<k<1$

4) עבור $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$, נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב-$M_{mxn}[R]$.

6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב-$C[a,b]$.

7) $$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הנורמה והמרחק

שאלות

1) נתונים שלושה וקטורים ב-$\mathbb{R}^3$: $u=(1,-2,2),\ v=(3,-2,6),\ w=(5,3,-2)$.

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב-$\mathbb{R}^3$, חשבו:

א. $\langle u,v\rangle$ ב. $\langle u,w\rangle$ ג. $\langle v,w\rangle$ ד. $\langle u+v,w\rangle$

ה. $\|u\|$ ו. $\|v\|$ ז. $\|u+v\|$ ח. $d(u,v)$

ט. $\hat{u}$ י. $\hat{v}$

2) נתונות שלוש מטריצות ב-$M_{2\times3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10&9&8\\7&6&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}.$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$ ב-$M_{2\times3}[R]$,

חשבו:

א. $\langle A,B\rangle$ ב. $\langle A,C\rangle$ ג. $\langle A,B+C\rangle$

ד. $\langle B,C\rangle$ ה. $\langle 4A+10B,11C\rangle$ ו. $\|A\|$

ז. $\|B\|$ ח. $d(A,B)$ ט. $\hat{A}$

3) נתונים שלושה פולינומים ב-$C[0,1]$:

$$p(x)=x+3,\ q(x)=3x+1,\ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)\,dx$,

חשבו:

א. $\langle p,q\rangle$ ב. $\langle p,r\rangle$ ג. $\langle p,q+r\rangle$

ד. $\|p\|$ ה. $d(p,q)$ ו. $\hat{r}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) הוכיחו: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

5) הוכיחו: $\|u-v\|^2=\|u\|^2-2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

6) הוכיחו: $\langle u-v,u+v\rangle=\|u\|^2-\|v\|^2$.

7) הוכיחו: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=+2\|u\|^2+2\|v\|^2$.

8) הוכיחו: $\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\langle u,v\rangle$.

9) יהי V ממ"פ ויהיו $u,v\in V$ וקטורים המקיימים: $\|u\|=a,\ \|u+v\|=b,\ \|u-v\|=c$.
מצאו את $\|v\|$ ואת $\langle u,v\rangle$.

תשובות סופיות

1) א. 19 ב. -5 ג. -3 ד. -8
ה. 3 ו. 7 ז. $\sqrt{96}$ ח. $\sqrt{20}$
ט. $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ י. $\left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$

2) א. 185 ב. -12 ג. 173 ד. -24 ה. -3168
ו. $\sqrt{355}$ ז. $\sqrt{139}$ ח. $\sqrt{124}$ ט. $\frac{1}{\sqrt{355}}\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}$

3) א. 9 ב. -9.5833 ג. -0.5833 ד. $\sqrt{\frac{37}{3}}$
ה. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ו. $\frac{x^2-4x-1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) $\langle u,v\rangle=\frac{b^2-c^2}{4}$, $\|v\|=\sqrt{\frac{b^2+c^2-2a^2}{2}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

שאלות

1) הוכיחו כי אם u,v תלויים לינארית, אז $\left|\langle u,v\rangle\right|=\|u\|\cdot\|v\|$.

2) יהיו $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ו- $y_1,y_2,\ldots,y_n$ מספרים ממשיים.
הוכיחו כי $\left(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\right)^2\le\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right)$.

3) יהיו f,g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.
הוכיחו כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\right)\left(\int_a^b g^2(x)\right)$.

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נניח כי $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$ שני וקטורי יחידה ב- R^n.
הוכיחו כי $\left|u_1v_1+\ldots+u_nv_n\right|\le 1$.
ב. נניח ש- $u=(u_1,\ldots,u_n)\in R^n$.
הוכיחו כי $\left(u_1+\ldots+u_n\right)^n\le n\left(u_1^2+\ldots+u_n^2\right)$.

5) נניח ש- $a_1,a_2,\ldots,a_n$ מספרים חיוביים כך ש- $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$.
הוכיחו כי $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}\le\sqrt{n}$.

6) הוכיחו את אי השוויון $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\le\sqrt{\frac{n^2+n}{2}}$.

7) נתון כי $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$.
הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\ge\frac{1}{2}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

ב. נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$.

9) נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i - b_i)^2}{a_i + b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)}$.

ב. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}$.

11) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u = (1,2,2)$, $v = (-2,1,2)$,
ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$.

12) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u = (3,4)$, $v = (1,2)$,
ביחס למכפלה הפנימית $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2) \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$, ב- $\mathbb{R}^2$.

13) מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $p(x) = 2x - 1$ ו- $q(x) = x^2$,
בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle p,q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x)\,dx$ שב- $C[0,1]$.

14) מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,
בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B \rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2\times 2}[R]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) $\theta=63.61°$
12) $\theta=9.44°$
13) $\cos\theta=0.173°$
14) $\cos\theta=0.00036°$
15) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אורתוגונליות

שאלות

1) הוכיחו כי הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(4,7,-6)$ אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצאו את ערכו של הקבוע k, עבורו הווקטורים $u=(1,k,3),\ \ v=(4,7,-6)$ יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

3) מצאו וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(2,5,7)$ ב- $\mathbb{R}^3$.

4) הוכיחו כי הפולינומים $p(x)=2x-1,\ \ q(x)=6x^2-6x+1$
אורתוגונליים בקטע $[0,1]$ (ביחס למכפלה הפנימית $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$).

5) במרחב $P_n[R]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $n\geq$ מעל $\mathbb{R}$), נגדיר מכפלה פנימית:

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{k=0}^{n}p(k)q(k)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+\ldots+p(n)q(n).$$

הראו כי הפולינומים:

$$p(x)=x(x-2)(x-4)(x-6),\ \ q(x)=x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[R]$, עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.

6) נתונות שתי מטריצות: $B=\begin{pmatrix}4&-1\\2&3\end{pmatrix},\ \ A=\begin{pmatrix}k&1\\3&-1\end{pmatrix}$.

בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$ ב- $M_{2\times2}[R]$,
מצאו את הערך של הקבוע k, עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

7) הוכיחו כי: $u\perp v\Leftrightarrow\|u+v\|=\|u-v\|$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$?

8) הוכיחו כי: $u\perp v\Leftrightarrow\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) הוכיחו כי : $\|u\|=\|v\| \Leftarrow (u-v)\perp(u+v)$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

10) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו- $(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

11) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם α היא הזווית בין a ל- b, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

12) יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1.
מהו המרחק של v מ- w_1?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) $k=2$

3) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) $k=0.5$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) $v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ or\ \ v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

11) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

12) $\frac{5}{4}k$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משלים אורתוגונלי

שאלות

1) יהי $W = span\{(1,2,-1,1),(2,5,3,1)\}$.

מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.

הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

2) יהי $w = span\{(1,1,1)\}$.

מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.

הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

3) יהי $W = span\{x\} \subseteq P_2[R]$.

מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

4) יהי $W = span\{x, x^2\} \subseteq P_2[R]$.

מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

5) יהי $W = span\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_{2\times 2}[R]$.

מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$

ב- $M_{2\times 2}[R]$.

6) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

7) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A\cdot \underline{x} = 0$.

יהי U מרחב הפתרונות של המערכת.

תנו פירוש אפשרי ל- U בעזרת המושג משלים אורתוגונלי,

והמושג מרחב השורות של המטריצה A.

9) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.

הוכיחו כי: $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכיחו כי: $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

11) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכיחו כי: $W = W^{\perp\perp}$ (אם V מממד סופי).

12) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

13) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

תשובות סופיות

1) $W^{\perp} = span\{(-3,1,0,1),(11,-5,1,0)\}$

2) $W^{\perp} = span\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$

3) $W^{\perp} = span\left\{\left(-\frac{2}{3}+x\right),\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)\right\}$

4) $W^{\perp} = span\{(1.5x^2-6x+5)\}$

5) $W^{\perp} = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$

6) $$B_W = \left\{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

7) $B_{W^{\perp}} = \left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

8) הסבר בווידאו.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 2 - קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט

תוכן העניינים

1. בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל 13
2. ההיטל של וקטור 17
3. תהליך גרם-שמידט 20

בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל

שאלות

1) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

א. הראו שהקבוצה S אורתוגונלית.

ב. נרמלו את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.

ג. ללא חישוב, הוכיחו שהקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

2) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשמו את הווקטור $(13,-1,7)$, כצירוף לינארי של איברי S.

3) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

רשמו את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו $v=(a,b,c)$ ב- $\mathbb{R}^3$, ביחס לבסיס S.

4) נניח ש- $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- V.

הוכיחו שלכל $v\in V$, אז $v=\frac{\langle v,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1+\frac{\langle v,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2+\ldots+\frac{\langle v,u_n\rangle}{\langle u_n,u_n\rangle}u_n$.

הערה: הקבוע $a_i=\frac{\langle v,u_i\rangle}{\langle u_i,u_i\rangle}$ נקרא מקדם פורייה של v ביחס ל- u_i, או הרכיב של v ביחס ל- u_i.

5) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\ldots\}$ ב- $V=C[0,\pi]$.

האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית,
נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

6) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots\}$ ב- $V=C[0,2\pi]$.

האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.
האם הקבוצה מהווה בסיס?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה קבוצה $S=\{(2,4,4),(4,-1,-1),(0,2,-2)\}$ ב-$\mathbb{R}^3$.

בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.

8) נתונה קבוצה $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ ב-$P_3[R]$.

בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב-$[0,1]$)

9) נתונה קבוצה $S=\{1,2x-1,6x^2-6x+1\}$ ב-$P_2[R]$.

בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב-$[0,1]$)

10) נתונה הקבוצה $S=\left\{\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}\subseteq M_3[R]$.

בדקו: האם הקבוצה S אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי?
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
ענו ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות.

11) נסחו והוכיחו את שוויון פרסבל.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של R^2.

אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^2$.

ב. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),(0,0,1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של R^3.

אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^3$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) יהי $D=\left\{A_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},A_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},A_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$.

א. הוכיחו ש- D מהווה בסיס אורתונורמלי של $M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=tr\left(B^TA\right)$.

ב. כתבו את שוויון פרסבל עבור מטריצה כללית $A\in M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית לעיל.

14) במרחב $C([-\pi,\pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1(x)=\cos x,\ f_2(x)=\sin x\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

אמתו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x & x\geq 0\\0 & x<0\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.

15) במרחב $C([-\pi,\pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1=\sin x,f_2=\sin(2x),...,f_{60}=\sin(60x)\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

כתבו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\0 & x=0\\1 & 0<x<\pi\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. $S\left\{\frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}},\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}},\frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}}\right\}$

ג. שאלת הוכחה.

2) $(13,-1,7)=\frac{-1}{7}(2,1,4)+3(1,2,1)+\frac{24}{7}(3,-2,1)$

3) $\frac{2a+b-4c}{21}(2,1,4)+\frac{a+2b+c}{6}(1,2,1)+\frac{3a-2b+c}{14}(3,-2,1)$

4) שאלת הוכחה.

5) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}},\ldots\right\}$$

6) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ldots\right\}$$

7) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{36}}(2,4,4),\frac{1}{\sqrt{8}}(4,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{18}}(0,2,-2)\right\}$

8) הקבוצה לא אורתוגונלית.

9) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,

$$S=\left\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\right\}$$

10) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{80}}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) $2\geq\frac{16}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{59^2}\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

ההיטל של וקטור

שאלות

1) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,2,2)$ לאורך $w=(0,1,-1)$, ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,-2,2,0)$ לאורך $w=(0,2,-1,2)$, ב- $\mathbb{R}^4$.
מקובל לסמן גם $\text{proj}(v,w)$.

3) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $p(x)=2x-1$ לאורך $q(x)=x^2$,
במרחב הפולינומים עם המכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$.

4) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ לאורך $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,
במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

5) יהי $V=R^3$ ויהי $W=span\{w_1=(1,2,1),w_2=(1,-11)\}$ תת מרחב של V.
מצאו את ההיטל של הווקטור $v=(-2,2,2)$ על תת המרחב W לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $V=R^3$.
בנוסף, רשמו את v כסכום $v=v_{\parallel}+v_{\perp}$, כאשר $v_{\parallel}\in W,\ v_{\perp}\in W^{\perp}$.

6) יהי $V=R^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
ויהי $W=span\{w_1=(1,1,0,-1),w_2=(1,0,11),w_3=(0,-1,1,-1)\}$ תת מרחב של V.
מצאו את הווקטור הקרוב ביותר לווקטור $v=(3,4,5,6)$ בתת המרחב W.
בנוסף, כתבו את v כסכום של וקטור מ- W ווקטור מ- $W^{\perp}$.

7) יהי $V=C([0,1])$ מרחב הפונקציות הרציפות על הקטע $[0,1]$.
ויהי $W=span\left\{w_1=1,w_2=x-\frac{1}{2}\right\}$ תת מרחב של V.
מצאו את ההיטל של $v=4x^2-4$ על W עם המכפלה הפנימית האינטגרלית הסטנדרטית. בנוסף, כתבו את v כסכום של וקטור מ- W ווקטור מ- $W^{\perp}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון המרחב $C([-1,1])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-1,1])$: $W=sp\{f_1=|x|+x, f_2=|x|-x\}$.

מצאו את ההיטל של $f(x)=x^2$ על W.

9) נתון המרחב $C([-\pi,\pi])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-\pi,\pi])$:

$W=sp\{f_1=\sin x, f_2=\sin(2x),...,f_{60}=\sin(60x)\}$.

ידוע שהקבוצה $\{f_i\}_{i=1}^{60}$ היא קבוצה אורתונורמלית.

מצאו את ההיטל של $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$ על W.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $\text{proj}(v,w)=cw=0,\quad c=0$

2 $\text{proj}(v,w)=cw=-\frac{2}{3}(0,2,-1,2),\quad c=\frac{-2}{3}$

3 $\text{proj}(p,q)=c\cdot q(x)=\frac{5}{6}x^2,\quad c=\frac{5}{6}$

4 $\text{proj}(A,B)=cB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad c=\frac{1}{6}$

5 $v=v_{\parallel}+v_{\perp}=(0,2,0)+(-2,0,2)\ ,\pi(v)=(0,2,0)$

6 $(3,4,5,6)=v_{\parallel}+v_{\perp}=(5,2,3,6)+(-2,2,2,0)\ ,\pi(v)=(5,2,3,6)$

7 $v=v_{\parallel}+v_{\perp}=\left(-\frac{14}{3}+4x\right)+\left(4x^2-4x+\frac{2}{3}\right)\ ,\pi(v)=-\frac{14}{3}+4x$

8 $proj_W f=\frac{3}{4}|x|$

9 $proj_W f=\frac{4\sin(x)}{\pi}+\frac{4\sin(3x)}{3\pi}+\frac{4\sin(5x)}{5\pi}+\ldots+\frac{4\sin(59x)}{59\pi}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תהליך גרם-שמידט

שאלות

1) נתון: $U = span\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U.

2) נתון: $U = span\{(2,2,2,2),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U.

3) נתון: $U = span\{4,x,x^2,x^3\} \subseteq P_3[x]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U,
בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[-1,1]$.

4) נתון: $U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U,
בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

תשובות סופיות

1) $$B_{orthonormal} = \left\{\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3),\frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,2)\right\}$$

2) $$B_{orthonormal} = \left\{w_1 = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1,-1,0,2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1,3,-6,2)}{\sqrt{50}}\right\}$$

3) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}}\right\}$$

4) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}}{\sqrt{30}}, \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix}7 & 14\\ -9 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{330}}, \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{33}}\right\}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 3 - מטריצות אורתוגונליות, העתקות אורתוגונליות, לכסון אורתוגונלי

תוכן העניינים

1. מטריצות אורתוגונליות 21
2. העתקות אורתוגונליות 26
3. דמיון ולכסון אורתוגונלי 29

מטריצות אורתוגונליות

שאלות

1) ציינו אילו מבין המטריצות הבאות הן אורתוגונליות.
במידה והמטריצה אורתוגונלית, מצא עבורה את המטריצה ההופכית:

א. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) הוכיחו את המשפטים הבאים:

א. מטריצה ריבועית A היא אורתוגונלית אם ורק אם $A^TA=I$.

ב. מטריצה אורתוגונלית A היא הפיכה ומתקיים $A^{-1}=A^T$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה אורתוגונלית.
הוכיחו כי המטריצות A^T, A^{-1} אורתוגונליות.

ב. הוכיחו כי מכפלת מטריצות אורתוגונליות (מאותו סדר), היא מטריצה אורתוגונלית.

ג. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונלית היא 1 או -1.

ד. האם סכום מטריצות אורתוגונליות הוא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?

ה. האם מכפלה של מטריצה אורתוגונלית בסקלר היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?

ו. הראו כי אם מטריצה אורתוגונלית היא משולשת, אז היא אלכסונית.

4) תהי A מטריצה מסדר n.
הוכיחו או הפריכו:

א. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתונורמלי ל-R^n, אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל-R^n.

ב. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתוגונלי ל-R^n, אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתוגונלי ל-R^n.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה מסדר n, אשר עמודותיה, $\{v_1,...,v_n\}$, מהוות בסיס **אורתוגונלי** ל-R^n. נסמן $v_iv_i=\lambda_i$.
הוכיחו כי $A^TA=\text{diag}\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$.

ב. הוכיחו: כדי להפוך מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתוגונלי, יש לחלק כל עמודה בסכום ריבועי איבריה ולשחלף לאחר מכן.

ג. הפכו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&4&0\\2&0&1\end{pmatrix}$.

ד. הפכו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&\sqrt{2}\\2&2&-\sqrt{8}\\-\sqrt{0.5}&\sqrt{0.5}&0\end{pmatrix}$.

6) הוכיחו את המשפט:
יהיו B ו-C שני בסיסים אורתונורמליים של המרחב R^n.
אז מטריצת המעבר מ-B ל-C היא מטריצה אורתוגונלית.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצת המעבר מבסיס אורתונורמלי B לבסיס C, של המרחב R^n.
הוכיחו כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס C גם אורתונורמלי.

ב. תהי A מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס אורתונורמלי C, של המרחב R^n.
הוכיחו כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס B גם אורתונורמלי.

8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי אם A מטריצה אורתוגונלית מסדר n,
אז קיימים שני בסיסים אורתונורמליים B ו-C, של המרחב R^n,
כך ש-A משמשת מטריצת המעבר מ-B ל-C.

ב. יהי $v\in R^n$, כך ש-$\|v\|=1$.
הוכיחו שקיימת מטריצה אורתוגונלית, שהעמודה הראשונה שלה היא הווקטור v.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית וסימטרית.
נגדיר $B = I + A$.
א. הוכיחו כי $B^2 = 2B$.
ב. ידוע ש- $|B| = 1024$.
מצאו את n.

10) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצאו את מטריצת הסיבוב בזווית 30^0 ב- R^2.
ב. מצאו את מטריצת השיקוף ביחס לישר $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ ב- R^2.
ג. מצאו את מטריצת השיקוף ביחס לישר $y = \sqrt{3}x$ ב- R^2.

11) בכל אחד מהסעיפים הבאים תארו את פעולת המטריצה מבחינה גיאומטרית. השתמשו במושגים שיקוף וסיבוב.
א. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
ב. $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$
ג. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

12) הוכיחו שהמטריצה $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ מסובבת וקטור במישור ב- θ מעלות נגד כיוון השעון, כאשר $0 \le \theta \le \pi$.
כלומר, הוכיחו שהזווית בין כל וקטור $v \in \mathbb{R}^2$ לבין Rv היא θ.

13) נסמן: $\text{Ref}_{\theta/2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, $\text{Rot}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
הוכיחו כי:
א. $\text{Rot}_\theta \cdot \text{Rot}_\phi = \text{Rot}_{\theta+\phi}$
ב. $\text{Ref}_{\theta/2} \cdot \text{Ref}_{\phi/2} = \text{Rot}_{\theta-\phi}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) תהי $A_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מטריצה אורתוגונלית.

הוכיחו ש- A היא בהכרח מטריצת סיבוב או מטריצת שיקוף.

15) יהי $v_{n\times 1}\in\mathbb{R}^n$ וקטור יחידה.

נגדיר מטריצה $H_{n\times n}$ על ידי: $H=I-2v\cdot v^T$ (נקראת גם מטריצת האוסהולדר).

הוכיחו:

א. H מטריצה סימטרית.

ב. H מטריצה אורתוגונלית ו- $H^2=I$.

ג. המטריצה H עבור $v=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ היא מטריצת שיקוף ביחס לישר $y=-x$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ ב. $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

ג. לא אורתוגונלית.

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה.

5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

ג. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0.2 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.25 & 0\\ -0.4 & 0 & 0.2\end{pmatrix}$ ד. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0.25 & 0.125 & -\sqrt{0.5}\\ 0.25 & 0.125 & \sqrt{0.5}\\ \sqrt{0.125} & -\sqrt{0.125} & 0\end{pmatrix}$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) א. שאלת הוכחה. ב. $n=10$

10) א. $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

11) א. המטריצה מתארת שיקוף ביחס לישר $y=0.4142x$.

ב. המטריצה מתארת שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

ג. המטריצה מתארת סיבוב של 90° במישור.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

העתקות אורתוגונליות

שאלות

1) תהי $T:R^n\to R^n$ העתקה לינארית.
הוכיחו את המשפט: T אורתוגונלית $\Leftrightarrow \forall u\in R^n \ \ \|T(u)\|=\|u\|$.

2) תהי $T:R^n\to R^n$ העתקה לינארית אורתוגונלית.
א. הוכיחו כי T איזומורפיזם.
ב. הוכיחו כי גם T^{-1} אורתוגונלית.

3) ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי A מטריצה אורתוגונלית מסדר n.
נגדיר העתקה לינארית $T:R^n\to R^n$, על ידי $T(u)=Au$.
הוכיחו כי T היא העתקה אורתוגונלית.
ב. הוכיחו שכל העתקה אורתוגונלית $T:R^n\to R^n$,
ניתן להציג בצורה $T(u)=Au$, כאשר A אורתוגונלית.

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו שהערכים העצמיים היחידים של **העתקה** אורתוגונלית הם ± 1.
ב. הוכיחו שהערכים העצמיים היחידים של **מטריצה** אורתוגונלית הם ± 1.

5) הוכיחו שמכפלת העתקות אורתוגונליות היא העתקה אורתוגונלית.

6) ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי $T:R^n\to R^n$ העתקה אורתוגונלית,
ויהי $\{u_1,...,u_n\}$ בסיס אורתונורמלי כלשהו של R^n.
הוכיחו ש-$\{T(u_1),...,T(u_n)\}$ אף הוא בסיס אורתונורמלי של R^n.
ב. תהי $T:R^n\to R^n$ העתקה לינארית,
ונניח שיש בסיס אורתונורמלי $\{u_1,...,u_n\}$ של R^n,
כך שגם הקבוצה $\{T(u_1),...,T(u_n)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי של R^n.
הוכיחו כי T היא העתקה אורתוגונלית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמטריצה, שמייצגת העתקה אורתוגונלית לפי בסיס אורתונורמלי, היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית.

ב. הוכיחו שכל העתקה לינארית, שהמטריצה המייצגת שלה בבסיס אורתונורמלי כלשהו היא אורתוגונלית, היא בהכרח העתקה אורתוגונלית.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו את הנוסחה עבור ההעתקה T:

א. $T:R^2\to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

ב. $T:R^2\to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\sqrt{3}x$.

ג. $T:R^2\to R^2$ העתקת הסיבוב בזווית 30^0 ב-R^2.

9) בכל אחד מהסעיפים הבאים תארו את פעולת ההעתקה מבחינה גיאומטרית.
השתמשו במושגים שיקוף וסיבוב.

א. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ב. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ג. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ד. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

* את סעיף ד' פתרו בשתי דרכים שונות.

10) תהי $T:R^2\to R^2$ העתקה לינארית, שמסובבת וקטור ב-θ מעלות נגד כיוון השעון.
מצאו נוסחה עבור ההעתקה T.

11) תהי $T:R^2\to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\tan\frac{\theta}{2}x$.

מצאו נוסחה עבור ההעתקה T.

12) תהי $T:R^2\to R^2$ העתקה אורתוגונלית.
הוכיחו ש-T היא בהכרח העתקת סיבוב, או העתקת שיקוף.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) א. $T(x,y)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)$ ב. $T(x,y)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$

ג. $T(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$

9) א. שיקוף ביחס לישר $y=0.4142x$. ב. שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

ג. סיבוב של 90 מעלות במישור.

ד. דרך I: סיבוב של 90 מעלות ולאחריו שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

דרך II: שיקוף ביחס לישר $y=-\frac{1}{3}x$.

10) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

11) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

12) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

דמיון ולכסון אורתוגונלי

שאלות

1) A,B,C מטריצות ריבועיות.
הוכיחו את התכונות הבאות של יחס הדמיון האורתוגונלי:

א. A דומה אורתוגונלית לעצמה (רפלקסיביות).

ב. אם A דומה אורתוגונלית ל- B אז B דומה אורתוגונלית ל- A (סימטריות).

ג. אם A דומה אורתוגונלית ל- B ו- B דומה אורתוגונלית ל- C אז A דומה אורתוגונלית ל- C (טרנזיטיביות).

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמטריצה סימטרית יכולה להיות דומה אורתוגונלית רק למטריצה סימטרית.

ב. הביאו דוגמה לשתי מטריצות דומות שאינן דומות אורתוגונלית.

3) לכסנו אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1\\-1&0&-1&-1\\-1&-1&0&-1\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix}$.
כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית P, כך ש- $P^TAP=D_{iagonal}$.

4) לכסנו אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.
כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית P, כך ש- $P^TAP=D_{iagonal}$.

5) לכסנו אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$.
כלומר, מצא מטריצה אורתוגונלית P, כך ש- $P^TAP=D_{iagonal}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) א. שאלת הוכחה. ב. $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}$

3) $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{6}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$

4) $P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

5) $P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 4 - פירוקים של מטריצה (פירוק LU, פירוק SVD, פירוק QR)

תוכן העניינים

1. פירוק LU 31
2. פירוק SVD 32
3. פירוק QR 36

פירוק LU

שאלות

1) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}$.

2) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}$.

3) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

1)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{U}$$

2)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&-1&1&0\\3&-2&2&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&2&-4\\0&0&0&3\end{pmatrix}}_{U}$$

3)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\\frac{3}{2}&-2&1&0&0\\-3&2&0&1&0\\4&-3&0&0&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\0&-7&5\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{U}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פירוק SVD

שאלות

1) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים השמאליים והימניים של המטריצה.

2) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **הימניים** של המטריצה.

3) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

4) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ \sqrt{2} & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

5) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

6) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

8) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

9) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ \sqrt{2} & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

10) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$.

11) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $\sigma_1=5,\ \sigma_2=3\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\ ;\ v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ v_2=\frac{1}{\sqrt{18}}\begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix},\ v_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$

2 $\sigma_1=\sqrt{3},\ \sigma_2=1\ ;\ v_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\ v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ v_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

3 $\sigma_1=\sqrt{3},\ \sigma_2=1\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

4 $\sigma_1=\sqrt{8},\ \sigma_2=\sqrt{2}\ \ ;\ \ u_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\ u_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

5 $\sigma_1=3,\ \sigma_2=2\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{1.25}}\begin{bmatrix}-0.5\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

6 $\sigma_1=2\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$

7
$$\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

8
$$\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

9
$$\begin{bmatrix}0&1&1\\\sqrt{2}&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{8}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{6}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&0&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$ **(10**

$$\begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$ **(11**

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פירוק QR

שאלות

בשאלות **1-4** הפעילו את תהליך גרם-שמידט על הקבוצה הנתונה, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך וסמנו קבוצה זו ב- W.

1) $U=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(0,1,1),\ u_3=(1,0,1)\}$

2) $U=\{u_1=(1,0,1),\ u_2=(2,1,0),\ u_3=(0,1,1)\}$

3) $U=\{u_1=(1,3),\ u_2=(2,4)\}$

4) $U=\{u_1=(2,2,2,2),\ u_2=(1,1,2,4),\ u_3=(1,2,-4,-3)\}$

בשאלות **5-7**:

א. הפעילו את תהליך גרם-שמידט על הקבוצה הנתונה, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך, וסמנו קבוצה זו ב- W.

ב. השלימו את הקבוצה W מסעיף א' לקבוצה אורתונורמלית של 3 וקטורים.

5) $U=\{u_1=(1,1,1),\ u_2=(2,2,2),\ u_3=(2,3,4)\}$

6) $U=\{u_1=(1,2,3),\ u_2=(4,5,6),\ u_3=(7,8,9)\}$

7) $U=\{u_1=(1,1,1),\ u_2=(2,2,2),\ u_3=(3,3,3)\}$

8) א. הפעילו את גרם-שמידט על הקבוצה $U=\{u_1=(2,3),\ u_2=(4,6)\}$, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך, וסמנו קבוצה זו ב- W.
ב. השלימו את הקבוצה W מסעיף א' לקבוצה אורתונורמלית של 2 וקטורים.

9) א. הפעילו את גרם-שמידט על הקבוצה
$U=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(0,1,1),\ u_3=(1,2,1),\ u_4=(1,3,2)\}$, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך, וסמנו קבוצה זו ב- W.
ב. השלימו את הקבוצה W מסעיף א' לקבוצה אורתונורמלית של 2 וקטורים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) הפעילו את תהליך גרם-שמידט על הקבוצה:

$U=\{u_1=(1-i,1+i),\ u_2=(1+2i,1-2i)\}$.

נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך וסמנו קבוצה זו ב-W.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מספרים מרוכבים.

11) א. מצאו פירוק QR למטריצה: $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$.

ב. בעזרת הפירוק מסעיף א' פתרו את המערכת: $\begin{cases}x+2y=3\\y+z=-1\\x+z=-1\end{cases}$.

12) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$.

13) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\2&1&2\\2&2&-4\\2&4&-3\end{bmatrix}$.

14) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}$.

15) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$.

16) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&2&2&0\\1&3&4&0\\0&4&4&1\end{bmatrix}$.

17) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}2&4\\3&6\end{bmatrix}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

19) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1-i & 1+2i\\ 1+i & 1-2i\end{bmatrix}$.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד על מטריצות אוניטריות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\}$

2) $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)\right\}$

3) $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1)\right\}$

4) $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{4}(2,2,2,2)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,0,2),\ \hat{w}_3=\frac{1}{5\sqrt{2}}(1,3,-6,2)\right\}$

5) א. $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,01)\right\}$

ב. $\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}$

6) א. $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3),\hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{21}}(4,1,-2)\right\}$

ב. $\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{21}}(4,1,-2),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}$

7) א. $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$

ב. $\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}$

8) א. $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{13}}(2,3)\right\}$ ב. $\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{13}}(2,3),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{13}}(-3,2)\right\}$

9) א. $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\right\}$

ב. $\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\}$

10) $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{2}(1-i,1+i),\ \frac{1}{2}(1+i,1-i)\right\}$

11) א.
$$\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{\frac{3}{2}}\end{bmatrix}$$

ב. $(x,y,z)=(1,1,-2)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{10} & \frac{14}{\sqrt{10}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$$ **(12**

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -4\\ 2 & 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{50}}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{50}}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-6}{\sqrt{50}}\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{50}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 4 & -2\\ 0 & \sqrt{6} & \frac{-9}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$ **(13**

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{14}{\sqrt{14}} & \frac{32}{\sqrt{14}} & \frac{50}{\sqrt{14}}\\ 0 & \frac{9}{\sqrt{21}} & \frac{18}{\sqrt{21}}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ **(14**

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{3}} & \frac{9}{\sqrt{3}}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ **(15**

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{7\sqrt{2}} & \frac{-8}{7\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\\ 0 & \frac{4}{7\sqrt{2}} & \frac{-22}{7\sqrt{13}} & \frac{-1}{\sqrt{13}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{7\sqrt{2}} & \frac{8}{7\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}}\\ 0 & \frac{8}{7\sqrt{2}} & \frac{5}{7\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{11}{7\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{13}}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ **(16**

$$\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}}\\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{13} & 2\sqrt{13}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$ **(17**

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&2&3\\0&1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{3}{\sqrt{2}}&\frac{4}{\sqrt{2}}\\0&\frac{3}{\sqrt{6}}&\frac{3}{\sqrt{6}}&\sqrt{6}\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad \textbf{(18}$$

$$\begin{bmatrix}1-i&1+2i\\1+i&1-2i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\\\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i&\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\end{bmatrix} \quad \textbf{(19}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 5 - מילון

תוכן העניינים

1. הסברים ..... (ללא ספר)
2. תרגילים ..... (ללא ספר)

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 6 - הקדמה וצעדים ראשונים

תוכן העניינים

1. הקדמה לקורס ול-Python ..... (ללא ספר)
2. צעדים ראשונים ..... (ללא ספר)

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 7 - משתנים ואופרטורים

תוכן העניינים

1. משתנים ואופרטורים ..... (ללא ספר)
2. תרגילים ..... (ללא ספר)

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 8 - מרחב הזיכרון בפייתון

תוכן העניינים

1. מרחב הזיכרון ..... (ללא ספר)

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 9 - תנאים

תוכן העניינים

1. משפטי תנאי ..... (ללא ספר)

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 10 - מחרוזות

תוכן העניינים

1. מחרוזות ..... (ללא ספר)
2. טבלת ASCII ..... (ללא ספר)
3. תרגילים ..... (ללא ספר)

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 11 - טאפל (tuple)

תוכן העניינים

1. הסבר ..... (ללא ספר)

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 12 - לולאות

תוכן העניינים

1. לולאות ..... (ללא ספר)
2. תרגילים ..... (ללא ספר)

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 13 - רשימות

תוכן העניינים

1. רשימות - lists ..... (ללא ספר)
2. תרגילים ..... (ללא ספר)

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 14 - פונקציות

תוכן העניינים

1. פונקציות - functions ..... (ללא ספר)
2. תרגילים ..... (ללא ספר)

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 15 - סט (set)

תוכן העניינים

1. הסבר ..... (ללא ספר)

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 16 - ספריית NumPy

תוכן העניינים

1. pip ..... (ללא ספר)
2. הסברים ..... (ללא ספר)
3. תרגילים ..... (ללא ספר)

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 17 - מבוא לעיבוד תמונה ותמונות דיגיטליות באמצעות ספריית NumPy

תוכן העניינים

1. הקדמה והגדרות לפרק ..... (ללא ספר)
2. מניפולציות על תמונות ..... (ללא ספר)
3. רעש ושיטות לניקוי רעש ..... (ללא ספר)
4. תרגילים ..... (ללא ספר)

מתמטיקה ללמידת מכונה

פרק 18 - אמידה נקודתית

תוכן העניינים

1. אומד חסר הטייה 42
2. אומד ניראות מקסימלית 49
3. MSE 57
4. אומד חסר הטיה בעל שונות מינימלית 60
5. אומד נראות מקסימלית לשני פרמטרים (דו ממדי) 62
6. שאלות מסכמות 67

אומד חסר הטייה:

רקע:

$\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל-θ, אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל-θ: $E(\hat{\theta})=\theta$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

המשתנה X הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

X	1	2	3
הסתברות	2θ	$1-60\theta$	4θ

מעוניינים לאמוד את θ על סמך שתי תצפיות מההתפלגות: X_1 ו-X_2.

א. הראו שהאומד: $T_1=\frac{2X_1+X_2}{2}$, הוא אומד מוטה ל-θ.

הטיה של אומד היא: $E(\hat{\theta})-\theta$. כמובן שלאומד חסר הטיה אין הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד T_1?

ג. תקנו את T_1, כך שיהיה אומד חסר הטיה.

אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא: $T_3=1.5X_1-X_2-1$.

האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג'?

אם $\hat{\theta}$ אומד חסר הטיה ל-θ, אז $g(\hat{\theta})$ יהיה אומד חסר הטיה עבור $g(\theta)$, רק אם g תהיה לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל: $P(X=3)$.

אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה σ^2: $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}$.

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של X.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תזכורות חשובות:

אם: $Y=aX+b$, אזי: $E(Y)=aE(X)+b$, $V(Y)=a^2\cdot V(X)$, $\sigma_Y=|a|\sigma_x$.

אם: $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ משתנים מקריים, אזי:

$$E(T)=E(X_1+X_2+\ldots\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots\ldots+E(X_n).$$

אם: $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T)=V(X_1+X_2+\ldots\ldots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\ldots\ldots+V(X_n).$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) הציון במבחן מסוים של תלמידי כתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת μ וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת μ, נלקח מדגם של 5 ציונים: $X_1,\ldots,X_5$.

שלושה חוקרים הציעו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

חוקר א' הציע: $T_1=\frac{X_1+\ldots+X_5}{5}$.

חוקר ב' הציע: $T_2=\frac{2X_1-X_3+X_4}{2}$.

חוקר ג' הציע: $T_3=\frac{2X_1+X_3}{2}$.

א. איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?

ב. הציעו תיקון לאומד המוטה כך שיהיה חסר הטיה.

ג. במדגם התקבלו הציונים הבאים: 65, 78, 58, 82, 100.
חשבו את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי ההטיה.

ד. איזה מבין שני האומדים חסרי ההטיה עדיף? נמקו.

2) כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של $2n$ נשים. נסמן את שונות הגובה ב- σ^2. הוצעו שני אומדים למשקל על סמך מדגם זה: $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $T_2=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$.

א. בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.

ב. איזה אומד עדיף? נמקו.

3) $X\sim B(n,p)$. כלומר, X הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר P (סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל n.

א. פתחו אומד חסר הטיה ל- P.

ב. מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד?

ג. מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$?

ד. מצאו אומד חסר הטיה ל- $E(X^2)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) בתיק מניות שתי מניות. מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר לא ידוע: θ, $0 \le \theta \le 2$.
פונקציית ההסתברות של X - מספר המניות שיעלו ביום מסוים:
$P(X=2)=\frac{\theta}{6}$, $P(X=1)=\frac{\theta}{3}$, $P(X=0)=1-\frac{\theta}{2}$.

א. מְצאו אומד בלתי מוטה ל-θ, שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.

ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל-θ, שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום, במשך שלושה ימים - X_1, X_2, X_3 (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל והם בלתי תלויים).

5) בקרב המטפלות בת"א, מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מקרי בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ באופן הבא:
הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחד בלבד הוא 3θ,
הסיכוי שמטפלת תטפל ב-2 תינוקות הוא $1-4\theta$,
הסיכוי שמטפלת תטפל ב-3 תינוקות הוא θ.
במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת"א, נמצא כי שתים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד, אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.

א. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת.

ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך 4 תצפיות.

ג. מהו האומדן לפרמטר θ על סמך תוצאות המדגם.

ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת"א תטפל בתינוק בודד אחד.

ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מת"א. חשבו אומדנים.

6) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ, אז $5T$ אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר 5θ.

ב. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ, אז T^2 אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר θ^2.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) במפעל שתי מכונות המייצרות מוצרים. במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא p, ובמכונה השנייה ההסתברות שמכשיר תקין היא $2p$.
דוגמים 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה.
נסמן ב- X את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה, וב- Y את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה השנייה.
איזה מבין האומדים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל- p ?

א. $\frac{X}{20}$.

ב. $\frac{Y}{20}$.

ג. $\frac{X+Y}{60}$.

ד. $\frac{2X+Y}{80}$.

8) יהיו T_1 ו- T_2 אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר θ.

א. מצאו אומד חסר הטיה ל- θ^2, המתבסס על T_1 ו- T_2.

ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta(1-\theta)$, המתבסס על T_1 ו- T_2.

9) נתון ש- X הינו משתנה מקרי עם תוחלת μ ושונות σ^2.
נדגמו n תצפיות בלתי תלויים מאותה אוכלוסיה.

א. הראו ש- $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ אומד חסר הטייה ל- μ, כאשר: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות: $X_1 \cdot X_2$.

הראו שהוא אומד חסרי הטיה ל- μ^2.

10) $X_i \sim N(\mu,1)$, כאשר: $i = 1,2...,n$.
נתון שהתצפיות הינן בלתי תלויות זו בזו.
מצאו אומד חסר הטיה ל- μ^2.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

11) נתונות n תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות בעלת הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1+\beta x}{2} & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}.$$

א. הראו כי האומד $3\bar{X}$ הנו אומד בלתי מוטה ל-β.

ב. מצאו את השונות של האומד מהסעיף הקודם.

12) $X_1,X_2,...,X_n$ הינם משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעלי פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}X\cdot A & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}.$$

א. בטאו את ערכו של A באמצעות θ, כדי שפונקציית הצפיפות תהיה לגיטימית.

ב. מצאו אומד חסר הטיה ל-θ, על סמך n התצפיות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. T_1 ו- T_2. ב. $\frac{2}{3}T_3$. ג. $T_1 = 76.6$, $T_2 = 110$ ד. T_1.

2) א. ראו בווידאו. ב. T_2.

3) א. $\frac{x}{n}$. ב. $1-\frac{x}{n}$. ג. X. ד. θ.

4) א. $\frac{3x}{2}$. ב. $\frac{3\overline{x}}{2}$.

5) א. $1-\frac{x}{2}$. ב. $1-\frac{1}{2}\overline{x}$. ג. 0.125. ד. $3\left(1-\frac{1}{2}\overline{x}\right)$.
ה. לשונות 0.917.

6) א. נכון. ב. לא נכון.

7) ב'.

8) א. $T_1 \cdot T_2$. ב. $T_1 - T_1 \cdot T_2$.

9) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

10) $\overline{X}^2 - \frac{1}{n}$.

11) א. שאלת הוכחה. ב. $V\left(3\overline{X}\right) = \frac{3-\beta^2}{n}$.

12) א. $A = \frac{2}{\theta^2}$. ב. $\theta = \frac{3}{2}\overline{X}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

אומד נראות מקסימלית:

רקע:

להלן נלמד את שיטת הנראות המקסימלית למציאת אומדים.

נניח ש- X משתנה מקרי בדיד עם פונקציית הסתברות $P(x,\theta)$,

כאשר θ הפרמטר הבלתי ידוע.

יהיו: $X_1, X_2, ..., X_n$ תוצאות מדגם מקרי בגודל n הנלקח מאוכלוסייה זו.

נבנה את פונקציית ההסתברות המשותפת (פונקציית הדגימה).

אם אנו יודעים את תוצאות המדגם, ולא את הפרמטר, קוראים לפונקציית הנראות שהיא פונקציה של הפרמטר.

נגדיר את פונקציית הנראות:

$$L(\theta) = P(x_1,\theta)\cdot P(x_2,\theta)\cdot ...\cdot P(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i,\theta).$$

פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את התצפית הראשונה (כפונקציה של θ), כפול ההסתברות לקבל את התצפית השנייה, וכולי. כלומר, המשמעות של פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את המדגם שהתקבל, כפונקציה של הפרמטר המבוקש θ.

אם מדובר במשתנה רציף, נכפיל את פונקציות הצפיפות ולא את פונקציות ההסתברות:

$$L(\theta) = f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdot ...\cdot f(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta).$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסיכוי של שחקן כדורסל לקלוע לסל הוא p (לא ידוע). השחקן זורק כדורים לסל עד שהוא קולע בפעם הראשונה. נניח כי הזריקות בלתי תלויות זו בזו.
הכדור נכנס לסל לראשונה בניסיון השלישי.
השחקן חוזר על התהליך שוב, והפעם הכדור נכנס לסל בניסיון החמישי.
מצאו את פונקציית הנראות של p.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

אומד נראות מקסימלית עבור θ הוא האומד $\hat{\theta}$, שממקסם את פונקציית הנראות $L(\theta)$.
כלומר, אנו מחפשים את האומד שיגרום לכך שהמדגם המקרי שקיבלנו יהיה כמה שיותר סביר.

שלבים למציאת אומד נראות מקסימלית:

- לוקחים את פונקציית ההסתברות המשותפת של המדגם (או צפיפות משותפת אם המשתנה רציף).
- מציבים את תוצאות המדגם ומקבלים את פונקציית הנראות (פונקציה של הפרמטר הנחקר).
- מוצאים מקסימום לפונקציית הנראות (לעיתים כדאי להוסיף ln כדי להקל על המלאכה).

המשך דוגמה:

חשבו את אומדן הנראות המקסימלית עבור p.

משפט: אם $\hat{\theta}$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור θ, אזי $g\left(\hat{\theta}\right)$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור $g\left(\hat{\theta}\right)$, בהנחה והפונקציה היא חד-חד ערכית (אינווריאנטיות).

המשך דוגמה:

מצאו אומדן נראות מקסימלית לסיכוי של שחקן הכדורסל לקלוע לסל פעמיים ברצף.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) הסיכוי של שחקן לנצח במשחק הוא p (לא ידוע).
השחקן משחק במשחק עד אשר הוא מנצח בפעם הראשונה.
נתון שהשחקן ניצח לראשונה רק במשחק השני.

א. חשבו את פונקציית הנראות של p, וציירו גרף שלה.

ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור p.

ג. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל-p, אם ביום אחד הוא נאלץ לשחק 4 פעמים וביום אחר הוא נאלץ לשחק 5 פעמים, עד אשר ניצח.

2) מספר הלקוחות שנכנסים לחנות מסוימת, מתפלג פואסונית עם תוחלת של λ לקוחות ביום.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל-λ, על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ביום מסוים.

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל-λ, על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ב-n ימים מסוימים.

3) הזמן שלוקח לאדם לחכות בתור מתפלג מעריכית עם פרמטר λ.
דגמו 4 אנשים מקריים שחיכו בתור ומדדו את זמני ההמתנה שלהם.
התוצאות שהתקבלו בדקות הן: 3, 7,5 ו-3.

א. פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר זה על סמך n תצפיות כלשהן.

ב. מהו האומדן לפרמטר?

4) משך זמן הכנת שיעורי הבית (בשעות) של בני נוער, ביום אחד, מתפלג אחיד: $U(0,q)$.

כדי לאמוד את θ, נשאלו ביום מסוים מספר בני נוער כמה שעות הם הכינו שיעורי-בית באותו יום.

א. אלעד הכין ביום מסוים שעורי בית במשך שעה שלמה. חשבו את פונקציית הנראות של θ המתבססת על תצפית זו, וציירו את הגרף שלה.

ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל-θ על סמך התצפית.

ג. משכי הכנת שיעורי בית (שעות) של 3 בני נוער היו 1,3,1.5.
מצאו אומדן נראות מקסימלית ל-θ על סמך המדגם הזה.

ד. מצאו באופן כללי אומד נראות מקסימלית ל-θ, על סמך מדגם של n בני נוער – $X_1,\ldots,X_n$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) הגובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם תוחלת ידועה של 170 ס"מ ושונות σ^2 לא ידועה.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית עבור השונות על סמך מדגם $X_1,\ldots,X_n$ מתצפיות מהאוכלוסייה.

ב. נדגמו 5 אנשים בלתי תלויים בעלי הגבהים: 170, 182, 165, 174, 174. מהו האומדן לשונות הגבהים באוכלוסייה?

6) פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר p בהתפלגות הבינומית, על סמך מדגם בגודל n, בו X הוא מספר ההצלחות במדגם.

7) X הוא משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות: $f(x)=\begin{cases}2\theta xe^{-\theta x^2} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל-θ על סמך n תצפיות בלתי תלויות: $X_1,\ldots,X_n$.

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל-θ^2.

8) בכד א' 10 כדורים שחורים ו-10 לבנים ובכד ב' 5 כדורים שחורים ו-15 לבנים. דוגמים באקראי כדור, בלי לדעת מאיזה כד.

א. מצא אומד נראות מקסימלית לכד שממנו הוצא הכדור על סמך הצבע של הכדור.

ב. מהו האומדן אם הצבע הוא שחור?

9) הזמן שלוקח ליוסי לפתור תשבץ מתפלג מעריכית עם תוחלת לא ידועה. נתנו ליוסי לפתור חמישה תשבצים ובממוצע לקח לו 32 דקות לפתור אותם.

א. מה אומדן הנראות המקסימלית לתוחלת זמן הפתרון של תשבץ על ידי יוסי (אין חובה לפתח).

ב. מה אומדן הנראות המקסימלית לסיכוי שייקח לו לפחות חצי שעה לפתור את התשבץ הבא?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

10) מספר הלקוחות הממתינים בתור במוקד טלפוני הוא משתנה מקרי X, בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ, באופן הבא:

X	0	1	2
$P(X)$	$4\theta^2$	$4\theta-8\theta^2$	$1-4\theta+4\theta^2$

בחמישה זמנים שונים שנבחרו באקראי נמצאו: 0, 0, 0, 1, 0 לקוחות ממתינים בתור.

א. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית עבור הפרמטר θ, על-סמך המדגם הנתון.

ב. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לסיכוי שלא יהיו לקוחות בתור.

11) אדם מחזיק בידו שני מטבעות: מטבע הוגן ומטבע שאינו הוגן – שהסיכוי לקבל בו תוצאה של עץ הוא 0.2. האדם מטיל את אחד המטבעות פעמיים ומודיע לך כמה פעמים הוא קיבל עץ. אתה צריך לנחש איזה מטבע הוא הטיל: את ההוגן או את זה שאינו הוגן.

א. מצא אומד בשיטת הנראות המקסימלית לסוג המטבע שהוטל.

ב. מהו האומדן אם האדם קיבל פעמיים עץ?

12) מעוניינים לאמוד את אחוז המובטלים באוכלוסייה.
דוגמים 50 אנשים אקראיים ומתקבל ש-4 מהם מובטלים.

א. מצא אומדן נראות מקסימלית לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

ב. מצא אומדן לשיעור העובדים באוכלוסייה.

ג. מצא אומדן ליחס בין שיעור העובדים לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

13) במשחק מחשב שלוש רמות משחק:
ברמה 1 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.9.
ברמה 2 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.7.
ברמה 3 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.4.
יוסי בחר ברמה מסוימת, אך אינו יודע באיזו רמה הוא בחר.
הוא משחק במשחק ברמה שבחר פעמיים.

א. הציעו א.נ.מ. לרמה של המשחק שיוסי שיחק, על סמך מספר הפעמים שסיים את המשחק.

ב. אם יוסי סיים את שני המשחקים, מה יהיה האומדן לרמה?

ג. מהו א.נ.מ. לסיכוי, שמתוך שני משחקים הוא יצליח בדיוק משחק אחד?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

14) $X_1, X_2, ..., X_n$ מתפלגים אחיד בקטע: $[-\theta, \theta]$.
מצא אומד נראות מקסימלית לפרמטר θ.

15) $X_1, X_2, ..., X_n$ מתפלגים בדיד לפי פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P(X=k)=\frac{\binom{2}{k}\cdot P^k\cdot(1-P)^{2-k}}{1-(1-P)^2} \qquad K=1,2$$

הוכח שא.נ.מ ל-P, הינו: $2-\frac{2}{\overline{X}}$.

16) במכשיר חשמלי יש 2 סוללות שפועלות באופן ב"ת זו בזו, והוא מפסיק לפעול ברגע שאחת הסוללות מפסיקה לעבוד. הסיכוי של סוללה לתפקד לפחות חודש הוא P. כאשר המכשיר מפסיק לפעול מחליפים את שתי הסוללות שלו. בתחילת הניסוי נלקחו 80 מכשירים כאלה עם סוללות חדשות ולאחר חודש נמצא ש-30 מהם עדיין פועלים.

א. מצא אומדן נראות מקסימלית עבור P.

ב. רשמו את האומד שבו השתמשתם בחלק א' באופן כללי, עבור מדגם של n מכשירים שמתוכם נמצאו Y מכשירים שעדיין פועלים לאחר חודש אחד.

ג. בהנחה שאורך החיים (בחודשים) של סוללה בודדת הוא מעריכי, עם פי צפיפות: $f(t)=\theta e^{-\theta t}$ עבור $t>0$.
מצא א.נ.מ. עבור θ, המבוסס על Y.
מהו האומדן המתאים מן המדגם הנתון?

17) חיוג אוטומטי של מכשיר טלפון משדר אות אחת לשתי דקות. אם לאחר 20 דקות (10 אותות חיוג) המספר שאליו מטלפנים עדיין תפוס, החיוג האוטומטי נפסק.

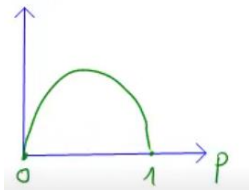
א. רשמו את פונקציית ההסתברות של המשתנה X – מספר הפעמים שהחייגן האוטומטי מחייג למספר הטלפון המבוקש, אם ההסתברות לקבלת צליל "פנוי" בשידור אחד של אות חיוג הוא P.

ב. מתוך 12 ניסיונות חיוג אוטומטי למשרד הרישוי בזמנים שונים במשך 5 ימים, התקבלו התוצאות הבאות: בשני ניסיונות הופסק החיוג האוטומטי ובשאר הניסיונות שבהם הצליח המטלפן להשיג את המספר המבוקש, מספר החיוגים האוטומטיים עד לקבל צליל "פנוי" היו: 1, 6, 2, 7, 3, 8, 2, 2, 1, 5.
מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור P, על סמך התוצאות שהתקבלו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. $L(p)=(1-p)\cdot p$. להלן גרף:



ב. 0.5. ג. $\frac{2}{9}$.

2) א. X. ב. $\overline{X}$.

3) א. $\frac{1}{\overline{X}}$. ב. $\frac{2}{9}$.

4) א. 1. ב. 1. ג. 3. ד. $\hat{\theta}=\max\{X_1,\ldots,X_n\}$.

5) א. $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-170)^2}{n}$. ב. 40.2.

6) $\frac{x}{n}$.

7) א. $\frac{n}{\sum X_i^2}$. ב. $\left(\frac{n}{\sum X_i^2}\right)^2$.

8) א. ראה סרטון. ב. כד א'.

9) א. 32. ב. 0.3916.

10) א. 0.45. ב. 0.81.

11) א. ראה סרטון. ב. הוגן.

12) א. 0.08. ב. 0.92. ג. 11.5.

13) א. $\hat{\theta}=\begin{cases}3 & X=0,1\\ 1 & X=2\end{cases}$. ב. 1. ג. $\hat{p}=\begin{cases}2\cdot 0.4\cdot 0.6 & X=0,1\\ 2\cdot 0.9\cdot 0.1 & X=2\end{cases}$.

14) $\max|X_i|$.

15) שאלת הוכחה.

16) א. 0.6124. ב. $\hat{p}=\sqrt{\frac{y}{n}}$. ג. 0.49.

17) א. $P(x)=\begin{cases}(1-p)^{x-1}p & 1\le x\le 9\\ (1-p)^9 & x=10\end{cases}$. ב. 0.1818.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

נספח:
התפלגויות רציפות

ההתפלגות	פונקציית הצפיפות	פונקציית ההתפלגות המצטברת	תוחלת	שונות	הערות	אנ"מ
$X \sim U(a,b)$	$f(x)=\frac{1}{b-a}$ $a \le x \le b$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$		$b=\max(X_i)$ $a=\min(X_i)$
$X \sim \exp(\lambda)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$	$1-e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים. λ - הוא ממוצע האירועים ביחידת זמן.	$\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{X}}$
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi(t)$	μ	σ^2	$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$	$\hat{\mu}=\bar{X}$ $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

התפלגויות בדידות

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות $P(X=k)$	תוחלת	שונות	הערות	אנ"מ
בינומית $B(n,p)$ $0 \le p \le 1$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots,n$	np	$np(1-p)$	(1)	$\hat{P}=\frac{Y}{n}$
גיאומטרית $G(p)$ $0 < p \le 1$	$(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\ldots,\infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	(2)	$\hat{P}=\frac{1}{\bar{X}}$
אחידה $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a+1}$ $K=a,\ldots,b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	(3)	$b=\max(X_i)$ $a=\min(X_i)$
פואסונית $P(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $k=0,1,\ldots,\infty$	λ	λ	(4)	$\hat{\lambda}=\bar{X}$

(1) מספר ההצלחות ב- n ניסויי ברנולי ב"ת. p - ההסתברות להצלחה.

(2) מספר הניסויים עד להצלחה הראשונה בסדרת ניסויי ברנולי ב"ת, p - ההסתברות להצלחה.

(3) בחירה אקראית של מספר בין a ו- b.

(4) מספר אירועים ביחידת זמן, λ - קצב האירועים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

קריטריון MSE – תוחלת ריבוע הטעות:

רקע:

הקריטריון הנפוץ ביותר כדי לבדוק את טיב האומד הוא קריטריון MSE:
Mean Squared Error – תוחלת ריבוע טעות האמידה.

$$MSE\left(\hat{\theta}\right)=E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2=V\left(\hat{\theta}\right)+\left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)^2 .$$

כאשר: $V\left(\hat{\theta}\right)$ - הינה שונות האומד.

$E\left(\hat{\theta}\right)-\theta$ - הינה ההטיה של האומד.

אם T_1 ו- T_2 הינם אומדים לפרמטר θ, האומד העדיף יהיה זה עם MSE קטן יותר.
כלומר, אם: $MSE\left(T_1\right)>MSE\left(T_2\right)$, אז T_2 עדיף על T_1.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתון משתנה X המתפלג אחיד רציף באופן הבא: $X\sim U\left(3,\theta\right)$.

מוצעים שני אומדים לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת: $T_1=2X-3$ ו- $T_2=\frac{3X-3}{2}$.

איזה אומד עדיף לאמידת הפרמטר θ?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מעוניינים לאמוד את התוחלת של התפלגות מסוימת.
מוצעים שני אומדים אפשריים ממוצע של שתי תצפיות וממוצע של שלוש תצפיות.
לפי קריטריון תוחלת ריבוע הטעות (MSE), איזה אומד עדיף? הסבירו.

2) בעיר מסוימת בשוויץ בכל θ דקות רכבת מגיעה לתחנה מסוימת.
דוד מגיע לתחנה בזמן אקראי ומודד את זמן ההמתנה לרכבת - X.

א. הצע אומד חסר הטיה ל-θ, על סמך X.

ב. סטטיסטיקאי הציע לאמוד את θ על סמך האומד: $1.5X$.
האם האומד הנ"ל מוטה?

ג. איזה אומד מבין האומדים בסעיפים א' ו-ב' עדיף?

3) חוקר מעוניין לאמוד את הסיכוי לחלות במחלת השפעת בחורף (להלן: הפרמטר P). הוא דוגם חמישה אנשים בריאים, ומתבונן בסטטיסטי X - מספר האנשים שחלו בשפעת בחורף.
הוא מתלבט בין שני אומדים: $T_1=\frac{X}{5}$ ו- $T_2=\frac{X+1}{7}$.

א. מי מבין האומדים הללו הוא חסר הטיה?

ב. מי מבין האומדים עדיף אם $P=0.5$?

ג. מי מבין האומדים עדיף אם $P=0.1$?

4) מספר השריפות המתרחשות בארץ בחודש אוקטובר מתפלג פואסונית עם תוחלת λ. נלקח מדגם של 10 חודשי אוקטובר. להלן שני אומדים אפשריים:
$\hat{\lambda}_1=\frac{\sum_{i=1}^{10}X_i}{10}$ ו- $\hat{\lambda}_2=\frac{2\cdot\sum_{i=1}^{5}X_i+2\cdot\sum_{i=6}^{10}X_i}{10}$.
כאשר: X_i = מספר השריפות בחודש אוקטובר ה-i.
איזה מהאומדים עדיף, לצורך אמידת הפרמטר λ?

5) הוכח ש: $E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2=V\left(\hat{\theta}\right)+\left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) שלוש תצפיות.

2) א. $2x$. ב. אומד מוטה. ג. סעיף ב.

3) א. T_1. ב. T_2. ג. T_1.

4) $\hat{\lambda}_1$.

5) שאלת הוכחה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

אומד חסר הטיה בעל שונות מינימלית:

אומד חסר הטיה יעיל ביותר – MVUE (Minimum-variance unbiased estimator).

רקע:

T יהיה MVUE, אם מתקיים ש- T אומד חסר הטיה ל- θ, ובנוסף מתקיים ש:
$V(T)\le V\left(\hat{\theta}\right)$, לכל $\hat{\theta}$ חסר הטיה אחר.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

לרשת חנויות ישנם שני סניפים. מספר הלקוחות הנכנסים לכל סניף ביום מתפלג פואסונית עם קצב של λ בסניף A וקצב של 2λ בסניף B.
נדגמו n ימים מכל סניף, ונבדק בכל יום:

X_i - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף A ביום i.

Y_j - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף B ביום j.

על מנת לאמוד את λ, מוצע האומד: $\alpha\bar{X}+\beta\bar{Y}$.

א. מה התנאי, שצריך להתקיים על α ו- β, כדי שהאומד יהיה חסר הטיה?

ב. מה צריכים להיות αו- β כדי שהאומד יהיה גם בעל שונות מינימלית?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) T_1 ו- T_2 הינם אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר θ.

כמו כן, נגדיר: $T = aT_1 + bT_2$.

א. מה צריך להיות התנאי על a ו- b, כדי ש- T יהיה אומד חסר הטיה?

ב. σ_1^2 ו- σ_2^2 הם השונויות של T_1 ו- T_2, בהתאמה.

מצאו a ו- b, כך ש- T יהיה אומד חסר הטיה ל- θ, ובעל שונות מינימלית.

2) במפעל 3 מכונות המייצרות את אותו חלק.

תוחלת הקוטר של החלקים המיוצרים בכל מכונה זהה.

השונויות של כל מכונה שונות, ומקיימות: $\sigma_2^2 = 2\sigma_1^2$, $\sigma_3^2 = 3\sigma_1^2$.

הוחלט לדגום n חלקים מכל מכונה, ולחשב את ממוצע הקוטר המתקבל.

$\overline{X}_i$ - יהיה הממוצע המתקבל במכונה i.

יהי: $W = \sum_{i=1}^{3} a_i \overline{X}_i$ האומד לתוחלת קוטר החלקים המיוצרים על ידי מכונה כלשהי.

א. מה התנאי שצריך להתקיים על המשקלים a_i, כדי שהאומד המוצע יהיה בלתי-מוטה?

ב. נניח ש- $a_1 = a_2$.

מה במקרה זה המשקלים המביאים את האומד להיות MVUE?

תשובות סופיות:

1) א. $a+b=1$.

ב. $a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$, $b = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

2) א. $\sum_{i=1}^{3} a_i = 1$.

ב. $a_1 = a_2 = 0.4$, $a_3 = 0.2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

אומד נראות מקסימלית דו-ממדי (לשני פרמטרים):

רקע:

בהינתן פונקציית הסתברות למשתנה בדיד או פונקציית צפיפות למשתנה רציף, אשר תלויות בשני פרמטרים שאינם ידועים, נרצה למצוא אומד נראות מקסימלית דו-ממדי. כלומר, אומד נראות מקסימלית לשני הפרמטרים שאינם ידועים.

דוגמה:

בעוגייה המיוצרת על ידי חברת "עוגית" יש סוכריות כחולות וצהובות.
מספר הסוכריות הכחולות בעוגייה של החברה מתפלג פואסונית עם תוחלת α
ומספר הסוכריות הצהובות מתפלג פואסונית עם תוחלת $\alpha+\beta$.
אין תלות בין מספר הסוכריות הכחולות למספר הסוכריות הצהובות בכל עוגייה, וכמו כן אין תלות בין מספר הסוכריות בעוגייה אחת למספרן בעוגייה אחרת.
דגמו באקראי 4 עוגיות וספרו את מספר הסוכריות הכחולות ומספר הסוכריות הצהובות בכל אחת מהן. להלן התוצאות שהתקבלו:

# עוגייה	מספר הסוכריות הכחולות	מספר הסוכריות הצהובות
1	15	20
2	17	24
3	15	26
4	17	22

- מה הם הפרמטרים שאינם ידועים?

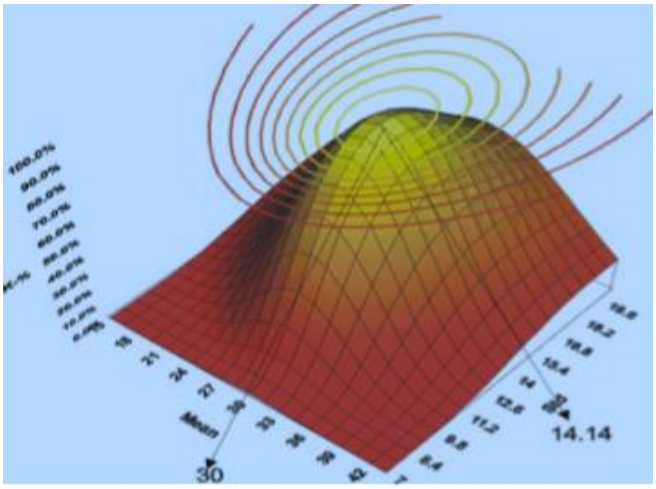
בדומה למציאת אומד נראות מקסימלית לפרמטר אחד, גם במקרה זה נרצה לבנות פונקציית הסתברות משותפת, כשמדובר במשתנה מקרי בדיד, או פונקציית צפיפות משותפת, כשמדובר במשתנה מקרי רציף. אחרי שנציב את תוצאות המדגם בפונקציה, נקבל את פונקציית הנראות.

בהמשך לדוגמה:

- בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.
- הציבו את תוצאות המדגם ומצאו את פונקציית הנראות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

אומד הנראות המקסימלית (אנ"מ) יהיה שני הערכים של הפרמטרים הלא ידועים המביאים את פונקציית הנראות לקבל ערך מקסימלי. בשרטוט שלפניכם דוגמה לפונקציית נראות לשני פרמטרים לא ידועים שהתקבלה בבעיה כלשהי:



כדי למצוא את נקודת המקסימום, יש להיזכר כיצד מוצאים נקודת מקסימום מקומית לפונקציה בשני משתנים:

<u>שלב א</u> - נתונה $f(x,y)$ שיש לה קיצון מקומי. נפתור את מערכת המשוואה הבאה: $f_y=0$, $f_x=0$. נקבל נקודה (x_0,y_0) החשודה כקיצון מקומי.

<u>שלב ב</u> - $f(x,y)$ היא בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר שני סביב הנקודה החשודה (x_0,y_0).

נסמן: $\Delta = f_{xx}(x_0,y_0)\,f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^{\,2}(x_0,y_0)$.

(א) אם: $\Delta>0$ ו- $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ או: $f_{YY}(x_0,y_0)>0$, אז ל- f יש מינימום מקומי ב- (x_0,y_0).

(ב) אם: $\Delta>0$ ו- $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ או $f_{YY}(x_0,y_0)<0$, אז ל- f יש מקסימום מקומי ב- (x_0,y_0).

(ג) אם: $\Delta<0$, אז ל- f יש נקודת אוכף ב- (x_0,y_0).

(ד) אם: $\Delta=0$, מבחן זה אינו מספק מידע על (x_0,y_0).

הערה: אם לפונקציה בשני משתנים יש מקסימום מקומי יחיד בתחום מסוים, אז בתחום זה המקסימום המקומי יהיה המקסימום המוחלט. אם לפונקציה בשני משתנים אין מקסימום מקומי בתחום מסוים, המקסימום המוחלט יהיה בקצוות של הפונקציה.

בהמשך לדוגמה:

- מצאו אומדן נראות מקסימלית לפרמטרים α ו- β על סמך תוצאות המדגם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) זמן ההמתנה לקו אוטובוס 33 מתפלג מעריכית עם פרמטר λ.
זמן ההמתנה לקו אוטובוס 44 מתפלג מעריכית עם פרמטר $\beta-\lambda$.
זמן ההמתנה לקו אוטובוס 33 אינו תלוי בזמן ההמתנה לקו אוטובוס 44.
יוסי המתין 8 דקות לקו אוטובוס 33. לקו אוטובוס 44 הוא המתין 3 דקות.
מצאו אומדן נראות מקסימלית לפרמטרים β ו- λ.

2) בהגרלה אפשר לזכות ב-20, 50 או 100 ₪, לפי פונקציית ההסתברות הבאה:

X	20	50	100
$P(X)$	p	Q	$1-p-q$

כדי לאמוד את הפרמטרים p ו- q, השתתפו בהגרלה 6 פעמים וקיבלו את התוצאות הבאות:

i	1	2	3	4	5	6
X_i	20	50	20	20	100	50

מצאו אנ"מ דו-ממדי לפרמטרים p ו- q.

3) נתון ש- $X_i \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, כאשר: $i=1,2...,n$. שני הפרמטרים, μ ו- σ^2, אינם ידועים.
מצאו אומד נראות מקסימלית לשני הפרמטרים הלא ידועים, על סמך מדגם מקרי בגודל n.

4) נתונה אוכלוסייה בעלת התפלגות אחידה רציפה עם הפרמטרים α ו- β.
שאינם ידועים. מצאו אנ"מ דו-ממדי לשני הפרמטרים על סמך מדגם מקרי של n תצפיות מהאוכלוסייה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) במודל רגרסיה ליניארית פשוטה מגדירים את הקשר: $Y_i = \beta \cdot X_i + \alpha + \varepsilon_i$,
כאשר X_i הוא משתנה בלתי תלוי ו-Y_i הוא משתנה שתלוי בו.
כמו כן, נתון ש-$\varepsilon_i \sim N\left(0,\sigma^2\right)$.

הרעיון במודל הוא שלכל X_i ידוע, אפשר לקבל התפלגות של Y_i.

א. בטאו את התוחלת של Y_1 עבור X_1 ידוע באמצעות הפרמטרים: α, β ו-σ^2.

ב. מהי ההתפלגות של Y_1 עבור X_1 ידוע?

ג. מבצעים מדגם בגודל n, שבו מקבלים זוגות בלתי תלויים $\left(X_i,Y_i\right)$
לכל: $i=1,2,\ldots,n$. בנו את פונקציית הנראות.

ד. מצאו אומד נראות מקסימלית לפרמטרים α ו-β, בהנחה שהפרמטר σ^2 ידוע.

6) במודל רגרסיה ליניארית פשוטה, ללא חותך, מגדירים את הקשר: $Y_i = \beta \cdot X_i + \varepsilon_i$,
כאשר X_i הוא משתנה בלתי תלוי ו-Y_i הוא משתנה שתלוי בו.
כמו כן, נתון ש-$\varepsilon_i \sim N\left(0,\sigma^2\right)$.

הרעיון במודל הוא, שלכל X_i ידוע אפשר לקבל התפלגות של Y_i.

א. בטאו את התוחלת של Y_1 עבור X_1 ידוע באמצעות X_1 והפרמטרים β ו-σ^2.

ב. מהי ההתפלגות של Y_1 עבור X_1 ידוע?

ג. מבצעים מדגם מקרי בגודל n, שבו מקבלים זוגות בלתי תלויים $\left(X_i,Y_i\right)$
לכל: $i=1,2,\ldots,n$.
בנו את פונקציית הנראות.

ד. מצאו אומד נראות מקסימלית לפרמטרים β ו-σ^2.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) $\hat{\beta}=\frac{11}{24}$, $\hat{\lambda}=\frac{1}{8}$.

2) $\hat{q}=\frac{1}{3}$, $\hat{p}=\frac{1}{2}$.

3) $\hat{\mu}=\bar{X}$, $S^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n}$.

4) $\hat{\beta}=X_{\max}$, $\hat{\alpha}=X_{\min}$.

5) א. $E\left(Y_1\right)=\beta\cdot X_1+\alpha$.

ב. $Y_1\left|X=X_1\sim N\left(\beta X_1+\alpha,\sigma^2\right)\right.$.

ג. $L\left(\alpha,\beta\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\cdot e^{-\frac{\left(Y_1\beta X_1-\alpha\right)^2+\left(Y_2\beta X_2-\alpha\right)^2+\ldots}{2\sigma^2}}$.

ד. $\hat{\beta}=\frac{\operatorname{cov}\left(x,y\right)}{S_x^2}$, $\hat{\alpha}=\bar{Y}-\hat{\beta}\cdot\bar{X}$.

6) א. $E\left(Y_1\right)=\beta\cdot X_1$.

ב. $Y_1\sim N\left(\beta X_1,\sigma^2\right)$.

ג. $L\left(\beta,\sigma^2\right)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}n}\cdot e^{-\frac{\left(Y_1-\beta X_1\right)^2+\left(Y_2-\beta X_2\right)^2+\ldots}{2\sigma^2}}$.

ד. $\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_iY_i}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$, $\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(Y_i-\hat{\beta}X_i\right)^2}{n}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות מסכמות:

שאלות:

1) במפעל מייצרים מוצרים בשלוש מכונות שונות ובלתי תלויות.
במכונה הראשונה הסיכוי שמוצר יהיה תקין הוא P , במכונה השנייה ההסתברות שמוצר יהיה תקין הוא P^2 ובמכונה השלישית הסיכוי הוא $2P$.
דוגמים 20 מוצרים מכל מכונה.
נסמן ב- X את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה הראשונה,
ב- Y את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השנייה
וב- Z את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השלישית.

א. מהם הערכים האפשריים של הפרמטר P ?

ב. מצאו אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר P , על סמך X ו- Z .

ג. אם התקבל ש- $Y=3$, $X=6$, מהו אומדן נראות מקסימלית ל- P ?

2) מספר תאונות הדרכים בקטע כביש א' מתפלג פואסונית עם קצב של λ תאונות בחודש, ומספר תאונות הדרכים בקטע כביש ב' מתפלג פואסונית עם קצב של 2λ תאונות בחודש.
הוחלט לספור את כמות התאונות בחודש בכל אחד מקטעי הכביש.
נסמן ב- X את מספר התאונות בחודש בקטע א' וב- Y בקטע ב'.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית לפרמטר λ, על סמך X ו- Y .

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית, לסיכוי שבקטע כביש א תהיה לפחות תאונה אחת בחודש.

ג. האם האומד שמצאת בסעיף א הוא חסר הטיה ל- λ ?

3) זמן הייצור של מוצר מסוים בתהליך ייצור מתפלג נורמאלית, עם תוחלת ושונות שאינן ידועות.

א. הציעו אומדים חסרי הטיה לתוחלת והשונות של זמן הייצור של המוצר.

ב. הציעו אומדי נראות מקסימלית לתוחלת ולשונות של זמן הייצור של המוצר.

ג. הציעו אומד נראות מקסימלית לריבוע התוחלת של זמן הייצור.

ד. האם האומד מהסעיף הקודם הוא גם חסר הטיה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) בקזינו משחק, ובו 4 תאים ממוספרים מ-1 עד 4.
מפעיל המשחק שם כסף באחד מארבעת התאים והאדם המשתתף צריך לנחש באיזה תא הכסף מוחבא. מפעיל הקזינו מודיע שהסיכוי להחביא את הכסף בכל אחד משלושת התאים הראשונים שווה, אך לא בהכרח שווה לסיכוי להחביא אותו בתא הרביעי.
יש לאמוד את הסיכוי להחביא את הכסף בתא הראשון: P.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפרמטר P.

יעל שיחקה את המשחק 3 פעמים וקיבלה שפעם אחת הכסף הוחבא בתא מספר 1 ובפעמים האחרות בתא מספר 2.

ב. מצאו אומדן ל-P על סמך התוצאות הללו בשיטת הנראות המקסימלית.

ג. מצאו אומד חסר הטיה ל-P. מהו האומדן לפי התוצאות של יעל?

ד. מצאו אומדן חסר הטיה ונראות מקסימלית לסיכוי שהכסף יוחבא בתא מספר 4 על סמך התוצאות של יעל.

5) יהי: $X_1, X_2, \ldots X_n$ מדגם מקרי מתוך ההתפלגות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\theta-1} & 0<x<\lambda,\ \theta>0\\ 0 & else\end{cases}$$

א. מצא אח"ה ל-λ (כאשר θ קבוע ידוע).

ב. מצא אנ"מ ל-θ (כאשר λ קבוע ידוע).

ג. מצא אנ"מ ל-λ (כאשר θ קבוע ידוע).

6) X - משך זמן הפרסומות בערוץ 2 מתפלג אחיד רציף בתחום $(0,\theta)$.

Y - משך זמן הפרסומות בערוץ 10 מתפלג אחיד רציף בתחום $(0,2\theta)$.

א. מצא אומד חסר הטיה ל-θ, המשתמש במשך זמן אקראי של פרסומת בודדת בערוץ 2 ופרסומת בודדת בערוץ 10.

ב. מוצע האומד: $T_2=X+0.5Y$. האם האומד הנ"ל הוא חסר הטיה?

ג. איזה אומד יותר עדיף זה של סעיף א או זה של סעיף ב'?

ד. מצא אומד נראות מקסימלית ל-θ על סמך X ו-Y.

7) נדגמו 2 תצפיות, X_1, X_2, בלתי תלויות מהתפלגויות אחידות רציפות התלויות בפרמטר θ.
ידוע כי: $X_1 \sim U(0,\theta)$, $X_2 \sim U(0,a\theta)$ (כאשר a קבוע ידוע וחיובי).

א. מצא אנ"מ ל-θ, על סמך 2 התצפיות הנ"ל.

ב. חשב את תוחלת ושונות האנ"מ מסעיף א'. האם האנ"מ מוטה?

ג. מצא אח"ה ל-θ על סמך סכומן של 2 התצפיות הנ"ל. מהי שונותו?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. $0 \le P \le 0.5$. ב. $\hat{p} = \frac{x+z}{60}$. ג. 0.345.

2) א. $\frac{x+y}{3}$. ב. $1-e^{-\frac{x+y}{3}}$. ג. כן.

3) א. מאחר ולא התבקשתם לפתח, הרי שהאומד זהה לנוסחה הכללית (ראו נספח).
ב. כנ"ל. ג. כנ"ל (ראו הפרק על אומד נראות מקסימלי). ד. לא.

4) א. $0 \le P \le \frac{1}{3}$. ב. $\frac{1}{3}$. ג. 0.389. ד. -0.167.

5) א. אח"ה יהיה: $\hat{\lambda} = \frac{\theta+1}{\theta}\bar{x}$. ב. $\hat{\theta} = \frac{n}{n\ln\lambda - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$.

ג. $\hat{\lambda} = X_{\max}$.

6) א. $T_1 = (x+y)\frac{2}{3}$. ב. כן. ג. ב'. ד. $\hat{\theta} = \max\left\{x, \frac{1}{2}y\right\}$.

7) א. $\hat{\theta} = \max\left(X_1, \frac{X_2}{a}\right)$. ב. $E(\hat{\theta}) = \frac{2}{3}\theta$, $V(\hat{\theta}) = \frac{1}{18}\theta^2$.

ג. $\tilde{\theta} = \left(\frac{2}{1+a}\right)(X_1 + X_2)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

נספח: אומדי נראות מקסימלית ואומדים חסרי הטיה בהתפלגויות השונות:

מודל בינומי

נתון מדגם של משתנה בינומי: $X \sim B(n,p)$.

א.נ.מ עבור p הוא: $\hat{p} = \frac{X}{n}$, והוא גם א.ח.ה.

מודל אחיד (בדיד)

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים אחידים: $X_i \sim U(1,N)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור N הוא: $\hat{N} = \max\{X_1, ..., X_n\}$, ואינו א.ח.ה.

מודל פואסוני

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים פואסוניים: $X_i \sim P(\lambda)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור λ הוא: $\hat{\lambda} = \overline{X}$ וגם א.ח.ה.

מודל גיאומטרי

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים גיאומטריים: $X_i \sim G(p)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור p הוא $\hat{p} = \frac{1}{\overline{X}}$, אינו א.ח.ה. א.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{p}$, הוא $\overline{X}$ והינו א.ח.ה.

מודל נורמלי

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים נורמליים: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור μ, הוא: $\hat{\mu} = \overline{X}$.

כאשר μ ידוע, א.נ.מ עבור σ^2 הוא: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ (אומד חסר-הטיה).

כאשר μ לא-ידוע, א.נ.מ עבור σ^2 הוא: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ (אומד מוטה!!!).

אומד חסר-הטיה עבור σ^2:

כאשר μ ידוע: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$.

כאשר μ לא-ידוע: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מודל מעריכי

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים מעריכיים: $X_i \sim \exp(\theta)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור θ הוא: $\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}$ - מהווה אומד מוטה, וא.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{\theta}$ הוא $\overline{X}$ א.ח.ה.

מודל אחיד (רציף)

נתון מדגם: $X_1, X_2, ..., X_n$ של משתנים אחידים: $X_i \sim U(0,\theta)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור θ הוא: $\hat{\theta} = \max\{X_1, ..., X_n\}$ אינו א.ח.ה.

בכל התפלגות:

א.ח.ה עבור μ הוא: $\hat{\mu} = \overline{X}$.

אומד חסר-הטיה עבור σ^2:

כאשר μ ידוע: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$.

כאשר μ לא-ידוע: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל