

מתמטיקה לכלכלנים ב



תוכן העניינים

1.	גבול של פונקציה.	1
12.	רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים.	12
22.	הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות.	22
28.	חישוב נגזרת של פונקציה.	28
41.	חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות.	41
42.	משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי.	42
53.	כלל לופיטל.	53
59.	חקירת פונקציה.	59
76.	חקירת פונקציה ("שאלות מסביב").	76
80.	בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון).	80
86.	מציאת מספר הפתרונות של משוואה (משפטי קושי ורול).	86
89.	משפט לגראנז'.	89
93.	גמישות הביקוש.	93
95.	אינטגרלים מיידיים ואינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים".	95
101.	אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים.	101
103.	אינטגרלים בשיטת ההצבה.	103
105.	אינטגרלים של פונקציות רציונליות.	105
109.	האינטגרל המסוים, סכומי רימן.	109
114.	שימושי האינטגרל המסוים (שטח-אורך קשת).	114
125.	פונקציות של שני משתנים.	125
133.	נגזרות חלקיות.	133
139.	כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים.	139
141.	פונקציות סתומות.	141

תוכן העניינים

24.	קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים	142
25.	קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')	144
26.	פונקציות הומוגניות-משפט אוילר	147
27.	פתרון בחינות לדוגמא בר אילן	(ללא ספר)

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 1 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי (ללא ספר)
2. הצבה 1
3. צמצום 2
4. הכפלה בצמוד 3
5. פונקציה שואפת לאינסוף 4
6. x שואף לאינסוף 5
7. הגבול של אוילר 7
8. כלל הסנדוויץ' 8
9. גבול של פונקציה מפוצלת 9
10. גבול לפי הגדרה 10

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים :

א. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

תשובה

א. 21

ב. $\frac{11}{12}$

ג. 2

ד. 20

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

תשובות סופיות

(5) -3	(4) $n-1$	(3) 6	(2) $\frac{10}{8.5}$	(1) $\frac{5}{6}$
	(9) $\frac{8}{17}$	(8) 27	(7) 3	(6) 32

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$4 \quad (2)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

ϕ (4)	$-\infty$ (3)	ϕ (2)	ϕ (1)
ϕ (8)	∞ (7)	∞ (6)	$-\infty$ (5)
	ϕ (11)	1 (10)	0 (9)

x שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (23)$$

תשובות סופיות

- (1) 0 (2) 4 (3) $-\infty$ (4) 0
- (5) -5 (6) 1 (7) -1 (8) -3
- (9) 1.5 (10) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11) $\frac{1}{4}$ (12) 0
- (13) 4 (14) $\frac{1}{9}$ (15) 2 (16) $\ln 3$
- (17) $e^{\frac{1}{3}}$ (18) 0
- (19) אם $b \neq 0$: $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$. אם $b = 0, a > 0$: ∞ . אם $b = 0, a < 0$: $-\infty$.
- (20) 2.5 (21) $\frac{k}{2}$ (22) $\frac{1}{2}$ (23) $-\frac{1}{2}$
- (24) $\frac{1}{2}$

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

(היעזרו בגבול של אוילר : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x} \quad (7)$$

תשובות סופיות

e^{-1} (4)	e^2 (3)	1 (2)	$e^{\frac{1}{2}}$ (1)
	e^{30} (7)	e^{-12} (6)	e^3 (5)

כלל הסנדוויץ'

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{נתונה פונקציה } z: R \rightarrow R, \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4,$$

ונתונה פונקציה $f: R \rightarrow R$, המקיימת $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$, לכל x .

חשבו את הגבולות $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2)$

תשובות סופיות

(3) 0

(2) 1

(1) 4

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16 \quad (4)$$

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

$$(a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=0), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (2)$$

$$(a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות

- (1) $\emptyset$ (2) $\emptyset$ (3) 1 (4) -1
- (5) א. אין גבול. ב. $\frac{1}{6}$

גבול לפי הגדרה

שאלות

בשאלות 1-5, על פי הגדרת הגבול, הוכיחו:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(6) \quad \text{חשבו על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

הוכיחו על פי הגדרת הגבול, את המקרים 7-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1 \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1} = 3 \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-4x}{2x+1} = -2 \quad (9)$$

$$(11) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכיחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו כך שעבור כל $x > M$, מתקיים $f(x) < -4$.

$$(12) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכיחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו כך שעבור כל $x > M$, מתקיים $f^2(x) > 16$.

$$(13) \quad \text{נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{הוכיחו שמתקיים } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1 : \text{נתון הגבול הבא:}$$

מצאו ערך של $M > 0$ עבורו לכל $x > M$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול

עד כדי 0.1. במילים אחרות, מצאו M , כך ש- $|f(x) - L| < 0.1$: $\forall x > M$.

$$(15) \quad \text{מגדירים את הפונקציה הבאה: } f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Z} \end{cases}$$

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$(16) \quad \text{בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2}, \text{ מצאו } \delta > 0 \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } |x-1| < \delta, \text{ מתקיים אי-השוויון } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100}$$

(17) הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם: } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם: } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם: } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L, \text{ אז: הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L.$$

$$\text{ד. אם הגבולות: } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

תשובות סופיות

$$(6) \quad \pm \infty$$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר GOOL.co.il

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 2 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

12	1. רציפות של פונקציה
16	2. משפט ערך הביניים
19	3. שיטת החצייה
20	4. תכונות נוספות של פונקציות רציפות – רמה מתקדמת

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות 1-2 בדקו את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר" שלכן, ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3) \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

א. בדקו את רציפות הפונקציה בנקודות התפר שלה.

ב. עבור כל נקודת אי רציפות, קבעו מאיזה סוג היא.

בשאלות 4-7, מה צריך להיות הערך הקבוע של k , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (5) \quad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (7) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (6)$$

הערה: שאלה 7 ניתן לפתור רק לאחר שנלמד הנושא 'כלל לופיטל'.

¹ נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות 8-10, מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלות 9-10 ניתן לפתור רק לאחר שנלמד הנושא 'כלל לופיטל'.

(11) הוכיחו או הפריכו:

- סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

(12) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה.

האם $f+g$ רציפה? הוכיחו זאת.

(13) נתונה הפונקציה $f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$.

הוכיחו או הפריכו:

- א. הפונקציה f חסומה לכל x .
- ב. הפונקציה f רציפה לכל x .
- ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x .
- ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x .

(14) תהי $f(x) = \begin{cases} |x| - 1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$.

- א. שרטטו את גרף הפונקציה.
- ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).
- ג. תהי $g(x) = x + \frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x .
- האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x ?

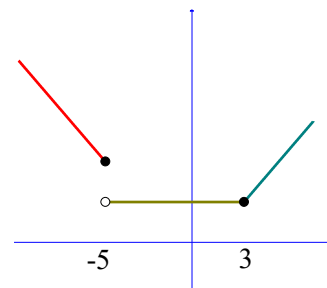
(15) תהי f פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.

תהי g הפונקציה המוגדרת בקטע $(0,2)$, על ידי $g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$.

- א. האם ניתן שהנקודה $x_0 = 1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g ? נמקו.
- ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.

תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) א. רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$. ב. סליקה.
- (4) $k=1$
- (5) $k=4$
- (6) $k=\frac{2}{3}$
- (7) $k=-1$
- (8) $a=2, b=1$ או $a=1, b=2$
- (9) $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (10) $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.
- (14) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל $x \neq -5$. ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (15) א. לא. ב. כן.

משפט ערך הביניים

שאלות

בשאלות 1-3 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

$$(1) \quad x^3 + 4x - 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 = -\ln x$$

$$(3) \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

בשאלות 4-5 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

$$(4) \quad e^x - 5x = 0$$

$$(5) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$$

(6) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

בו למשוואה $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$ יש פתרון.

$$(7) \quad \text{נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}.$$

א. חשבו את $f(0)$, $f(2)$.

ב. האם ניתן להסיק, לפי משפט ערך הביניים, שלמשוואה $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$

יש פתרון בקטע $(0, 2)$?

(8) תהיינה f, g פונקציות רציפות ב- $[a, b]$, המקיימות:

$$f(a) < g(a), f(b) > g(b).$$

הוכיחו שקיימת נקודה $a < c < b$, שבה $f(c) = g(c)$.

9 נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$, שהוא חלקי לתחום הגדרתה. נניח ש- $f([a, b]) \subseteq [a, b]$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [a, b]$, כך ש- $f(c) = c$.
נקודה c כנ"ל נקראת "נקודת שִׁבְת" של הפונקציה.

10 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [0, 1]$, כך ש- $f(c) = c^{1.5}$.

11 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $f(0) = f(1)$.
א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [0, 0.5]$, כך ש- $f(c) = f(c + 0.5)$.
ב. הוכיחו כי קיימות נקודות $c, d \in [0, 1]$, כך ש- $f(c) = f(d)$.

12 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $f(0) < f(2) < f(1)$.
הוכיחו כי קיימים $c_1, c_2 \in [0, 2]$, כך ש- $f(c_1) = f(c_2)$.

13 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $f(0) = f(8)$.
הוכיחו כי קיימות נקודות $c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0, 8]$, כך ש-
 $f(c_1) = f(c_2), f(c_3) = f(c_4)$.

14 יהיו $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$ קבועים המקיימים $a_1 + \dots + a_n = 1$.
הוכיחו כי למשוואה $|x - a_1| + \dots + |x - a_n| = \frac{n}{2}$ יש לפחות פתרון אחד.

15 יהי P פולינום ממעלה זוגית, מהצורה $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$,
ונניח כי $a_0 < 0$.

הוכיחו כי ל- P ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

16 יהיו f, g פונקציות רציפות המקיימות:
 $0 < k \in \mathbb{R}$ כאשר $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -k, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = k$.
הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x) = g(x)$.

17 ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) , ותהיינה $x_1, \dots, x_n$ (כאשר $n > 1$)

נקודות כלשהן ב- (a, b) .

הוכיחו שקיימת נקודה c בקטע (a, b) ,

$$\text{כך ש-} f(c) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n)).$$

ב. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) .

האם לכל $c \in (a, b)$, ניתן למצוא נקודות $x_1, \dots, x_n$, שונות זו מזו,

$$\text{כאשר } n > 1, \text{ כך ש-} f(c) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n))?$$

הוכיחו זאת.

תשובות סופיות

$$\text{6} \quad [0.1, 1]$$

$$\text{7} \quad \text{א. } f(0) = -1, f(2) = 5. \quad \text{ב. לא.}$$

שאלות 1-5 ושאלות 8-17 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

שיטת החצייה

שאלות

- (1) נתונה המשוואה $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.
 בעזרת שיטת החצייה בקטע $[-2, 3]$, מצאו שורש מקורב של המשוואה על ידי
 6 איטרציות. מהו קירוב השורש?
- (2) נתונה המשוואה $x^3 - x - 2 = 0$.
 א. מצאו קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.
 ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של
 השורש בדיוק של 0.001?
 ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.
 הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

תשובות סופיות

- (1) 0.07
 (2) א. $[1, 2]$ ב. 10 ג. $x = 1.520$

תכונות נוספות של פונקציות רציפות – רמה מתקדמת

שאלות

1) קבעו בכל סעיף, האם הטענה נכונה או לא נכונה, והוכיחו זאת.
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$, שהיא :

- א. חח"ע, אבל לא מונוטונית.
- ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
- ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
- ד. חסומה, אבל לא רציפה.
- ה. רציפה, אבל לא חסומה.
- ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
- ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
- ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
- ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
- י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
- יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע $[0,1]$, על ידי f , היא קטע.

1) תהי $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(x) > 0$ לכל $x \in [a,b]$.
הוכיחו שקיים $\alpha > 0$, כך ש- $f(x) \geq \alpha$ לכל $x \in [a,b]$.

2) תהי $f:[0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נניח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים.
הוכיחו ש- f חסומה.

3) תהי $f:[0,1] \rightarrow (0,1)$ פונקציה על.
הוכיחו ש- f לא רציפה ב- $[0,1]$.

(4) תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a, b) , ונניח שקיים קבוע ממשי K , כך שלכל שתי נקודות, x_1 ו- x_2 , בקטע (a, b) , מתקיים **תנאי ליפשיץ**:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$$

הוכיחו כי $f(x)$ רציפה בקטע (a, b) .
* נסו להוכיח בשתי דרכים שונות.

(5) הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f(x)$ רציפה בנקודה c , אז $|f(x)|$ רציפה בנקודה c .

ב. אם $|f(x)|$ רציפה בנקודה c , אז $f(x)$ רציפה בנקודה c .

(6) הוכיחו: אם f רציפה ב- x_0 , אז קיימת סביבה של x_0 , בה f חסומה.

תשובות סופיות

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 3 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

1. הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה 22
2. נגזרות חד-צדדיות 25

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

שאלות*

בשאלות 1-5 חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

$$(1) \quad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (2) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (3) \quad f(x) = e^x$$

$$(4) \quad f(x) = \ln x \quad (5) \quad f(x) = \sqrt{x+10}$$

$$(6) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44).$$

$$(7) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}.$$

$$(8) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x \cdot z(x) \text{ כאשר } z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4.$$

$$(9) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x > 0 \\ -(x+1)^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

(10) חשבו את הגבולות הבאים:

$$א. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4+x) - \ln 4}{x} \quad ב. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x} - e}{x}$$

(11) נתון כי f גזירה בנקודה x_0 . הוכיחו כי:

$$א. \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$ב. \quad 2x_0 f(x_0) - x_0^2 f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 f(x_0) - x_0^2 f(x)}{x - x_0}$$

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

(12) נתון כי f גזירה וזוגית.
הוכיחו כי f' אי זוגית.

(13) נתונה פונקציה המוגדרת ב- $[a, b]$ ומקיימת לכל x, y ב- $[a, b]$:
 $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$
הוכיחו כי f גזירה ב- $[a, b]$ וחשבו את נגזרתה.

(14) נתונה הפונקציה
 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

(15) נתונה הפונקציה
 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

(16) הוכיחו או הפריכו:

- א. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 ,
אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
ב. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 ,
אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
ג. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 ,
אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .
ד. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 ,
אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

(17) הוכיחו או הפריכו:

- א. אם f גזירה, אז $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$.
ב. אם הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

(18) הוכיחו או הפריכו:

- א. אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$.
ב. אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$.

תשובות סופיות

$$f'(x) = 2x + 4 \quad (1)$$

$$f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f'(x) = e^x \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (5)$$

$$!44 \quad (6)$$

$$2 \quad (7)$$

$$4 \quad (8)$$

(9) א. רציפה לכל x . ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.

$$(10) \text{ א. } \frac{1}{4} \quad \text{ב. } e$$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה. $f' = 0$

(14) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים $f'(0) = 0$.

(15) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$, ומתקיים $f'(1) = 0$.

(16) שאלת הוכחה.

(17) שאלת הוכחה.

(18) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות חד-צדדיות

שאלות

(1) תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases}$, על מנת להדגים שתי שיטות אלה. בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת מהשיטות.

בשאלות 2-7 בדקו גזירות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו. בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (3) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (5) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (7) \quad f(x) = 2 + 4|x-1| \quad (6)$$

(8) בדקו האם הפונקציה משאלה 5 גזירה פעמיים בנקודה $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad (9) \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x = -1$?

ב. עבור ערך ה- a שנמצא בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x = -1$. האם קיים משיק בנקודה זו?

(10) מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax + b & x > e \end{cases} \quad \text{התפר:}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

11 מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases} \quad \text{התפר:}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

תזכורת (הערך השלם)

פונקציית הערך השלם $[x]$ מחזירה לכל מספר ממשי x את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- x (מעגלת כלפי מטה). למשל: $[-4.1] = -5$, $[4.1] = 4$.

12 נתונה הפונקציה $f(x) = [x] - [-x]$.
חשבו את $f'(x)$.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = 4 \ (x > 1) \ , \ f'(x) = -4 \ (x < 1) \quad (6)$$

$$f'(x) = 8x \ (x \geq 0) \ , \ f'(x) = 4x \ (x < 0) \quad (7)$$

$$(8) \text{ לא גזירה פעמיים בנקודה } x=0.$$

$$(9) \text{ א. } a=1 \text{ ב. לא גזירה. לא קיים משיק.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} \ln^2 x & 0 < x < e \\ \frac{3}{e} & x \geq e \end{cases} \quad a = 3/e \quad b = -2 \quad (10)$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x < 1 \\ e & x \geq 1 \end{cases} \quad a = e \quad b = 0 \quad (11)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (12)$$

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 4 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה	(ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה	28
3. גזירה סתומה	31
4. כלל השרשרת	33
5. גזירה לוגריתמית	36
6. נגזרת הפונקציה ההפוכה	37
7. תרגילים נוספים לפי סוגים	38

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 22-24 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$y = x^{\sqrt{x}} \quad (21) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (24) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (23) \quad y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} (\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (20)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1\right) \quad (21)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (22)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x \right) \quad (23)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (24)$$

גזירה סתומה

שאלות

- 1) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2 + y^5 - 1 = 1$.
- 2) גזרו את הפונקציה הסתומה $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$.
- 3) גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$.
- 4) מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$, בנקודה $(3, 4)$.
- 5) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה $(1, 1)$.
- 6) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2 y + e^{y^2 - 4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה $(1, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 7) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy + y} + x^2 y = xy^2$, דרך הנקודה $(1, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 8) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$, דרך הנקודה $(0, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 9) נתונה הפונקציה הסתומה $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$.
 א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y = 0$.
 ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.
- 10) גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y - xy = 10$.
- 11) גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y - y^x = 1$.
- 12) נתונה פונקציה סתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$.
 מצאו את ערך y^n בנקודה בה $y = 1$.

(13) נתון כי המשוואה $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$,

מגדירה את $y = y(x)$ כפונקציה סתומה של x .

נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.

הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (7)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (8)$$

$$(0,0), (1,0) \text{ א.} \quad (9)$$

ב. בראשית הצירים: $y = -x$, המשוואה השנייה: $y = x - 1$.

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (10)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (11)$$

$$-1 \quad (12)$$

(13) הוכחה.

כלל השרשרת

שאלות

- (1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4) = 10$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f(x^2)$.
חשבו את $g'(2)$.

- (2) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(2) = 4$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
א. חשבו את $g'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכיחו כי g יורדת.

- (3) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = x^2 + f(\ln x)$.
א. חשבו את $g'(e)$.

ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודה $x = e$.

ג. חשבו את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$.

- (4) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$, $f(1) = -2$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f^2(\ln x)$.
א. חשבו את $g'(e)$.

ב. האם g עולה או יורדת, בנקודה $x = e$?

ג. נתון כי f שלילית ועולה. מה ניתן לומר על g ?

(5) נתונה פונקציה, $f(x)$, יורדת וחיובית.

$$g(x) = \sqrt{f(x^2 + 4)}$$

מי מהבאים נכון?

א. g עולה לכל x .

ב. g יורדת לכל x .

ג. g עולה לכל $x > 0$.

ד. g יורדת לכל $x > 0$.

$$(6) \quad g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי $f(10) = f'(10) = 4$. חשבו $g'(100)$.

$$(7) \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$.

חשבו $g'(1)$.

$$(8) \quad g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$$

ידוע כי $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$.

חשבו $g'(1)$.

$$(9) \quad g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$$

ידוע כי $f(4) = 1$, $f'(4) = 2$.

חשבו $g'(1)$.

$$(10) \quad g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$.

חשבו $g'(1)$.

תשובות סופיות

- | | | |
|--------------------------|---------------------|--------|
| | | 40 (1) |
| ב. שאלת הוכחה. | א. -16 (1) | |
| ג. $2e+1$ ב. שאלת הוכחה. | א. $2e+1$ (2) | |
| ג. $g'(x) < 0$ ב. יורדת. | א. -4 (3) | |
| | ד (4) | |
| | $\frac{17}{80}$ (5) | |
| | 36 (6) | |
| | $\frac{8}{9}$ (7) | |
| | 44 (8) | |
| | -2 (9) | |

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות :

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt[10]{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1} \right)^{2x} \quad (1)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$y' = y \left[\frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left((10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

נגזרת הפונקציה ההפוכה

שאלה

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחה הבאה :

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

לתשובה מלאה בסרטון וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

(1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3$	ב. $f(x) = x^7$	ג. $f(x) = x^2$
ד. $f(x) = x^1$	ה. $f(x) = x^{-3}$	ו. $f(x) = x^{-1}$
ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

(2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x^3$	ב. $f(x) = 3x^7$	ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$	ה. $f(x) = 8x^1$	ו. $f(x) = 3x^{-2}$
ז. $f(x) = \frac{4}{x}$	ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

הנגזרת של קבוע

(3) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 12$	ב. $f(x) = \frac{7}{8}$
----------------	-------------------------

הנגזרת של סכום והפרש

(4) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$	ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$
---------------------------------	---

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x-2)^3$ ב. $f(x) = (x^3+6)^5$ ג. $f(x) = 3(x-x^2)^2$

ד. $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3}{x}$ ב. $f(x) = \frac{2}{x}$ ג. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ד. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ה. $f(x) = \frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x) = \frac{2}{3-x}$ ז. $f(x) = \frac{6}{x+5}$

הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x+1)(x-3)$

ב. $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x) = x^3(6-x)^4$

הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x) = \frac{1}{x}$ ו. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$ ב. $f(x) = 4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x) = \sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x) = x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f'(x) = 3x^2 & \text{ב.} & f'(x) = 7x^6 & \text{ג.} & f'(x) = 2x \\ \text{ד.} & f'(x) = 1 & \text{ה.} & f'(x) = 3x^{-4} & \text{ו.} & f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \text{ז.} & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f'(x) = 6x^2 & \text{ב.} & f'(x) = 21x^6 & \text{ג.} & f'(x) = 2x^3 \\ \text{ד.} & f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ה.} & f'(x) = 8 & \text{ו.} & f'(x) = -\frac{6}{x^3} \\ \text{ז.} & f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} \end{array}$$

0. ב.

0. א. (3)

$$\text{א. (4)} \quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\text{א. (5)} \quad f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4$$

$$\text{א. (6)} \quad f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ד.} \quad f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{3}{4}(5-x)^2 \quad \text{ז.} \quad f'(x) = 6(x-x^2)(1-2x)$$

$$\text{א. (7)} \quad f'(x) = 10x - 14 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = (5x+1)^2(20x-44) \quad \text{ג.} \quad f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x) \\ \text{א. (8)} \quad f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{5x^2 - 24x - 5}{(5x-12)^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} \\ \text{ד.} \quad f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{ח.} \quad f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ט.} \quad f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2}$$

$$\text{א. (9)} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \\ \text{ד.} \quad f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 5 - חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות

תוכן העניינים

1. נגזרת הפונקציה ההפוכה.....41

נגזרת הפונקציה ההפוכה

שאלות

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 6 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

תוכן העניינים

42	1. המשיק
44	2. בעיות משיקים
46	3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק
50	4. הנורמל
51	5. זווית שבין שתי עקומות
52	6. נוסחת הקירוב הליניארי - דיפרנציאל שלם

המשיק

שאלות

- (1) מצאו את שיפוע הפונקציה
 - א. $f(x) = 2x^3 - 7x$, בנקודה $(2, 2)$.
 - ב. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$, בנקודה $x = -2$.
- (2) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, כאשר $a > 0$.
 המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$, הוא בעל שיפוע 1.
 מצאו את הקבוע a .
- (3) הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x) = 3\sqrt{x}$.
 מצאו את נקודת ההשקה.
- (4) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$, בנקודה $(1, 15)$, הוא $21\ln 3$.
 מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$, בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$, הוא $\frac{e}{3}$.
 מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (6) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$, לגרף הפונקציה
 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$?
 לכל ערך k כזה מצאו את נקודת ההשקה.
- (7) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
 - א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות $x = 1$ ו- $x = 3$.
 - ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א',
 עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(8) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}$.

מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(9) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$.

מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(10) פונקציה $f(x)$ גזירה ברציפות ב-0 ומקיימת $f(0) = 0$.

ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x היא 30° .

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

(11) מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , בנקודות $x=1$ ו- $x=0$.

תשובות סופיות

(1) א. 17 ב. 4

(2) $a = 2$

(3) $(1, 3)$

(4) $a = 2, b = -1$

(5) $a = 2, b = -2$

(6) לערך $k = 6$, בנקודה $x = 1$; לערך $k = \frac{158}{27}$, בנקודה $x = \frac{1}{3}$.

(7) א. ראו באתר. ב. $\alpha = 63.43^\circ, \beta = 116.56^\circ$

(8) $x = 5, x = -1$

(9) $x = 1, x = \frac{1}{3}$

(10) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(11) $\alpha = 33.69^\circ, \beta = 90^\circ$

בעיות משיקים

שאלות

(1) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצאו את a ו- c .

(4) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(5) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.

בשאלות 6-7 מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

(6) $(2, -3)$, $y = x^2 - 2x + 1$

(7) $(-3, 1)$, $y = \sqrt{x}$

(8) מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות $y = x^2$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

(9) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצאו את k ואת נקודת ההשקה.

10 נתון כי f גזירה לכל x .

א. הוכיחו כי הפונקציה $z(x) = x^2 f(3x-2)$ גזירה לכל x .

ב. הישר $2y = 10x + 11$ משיק לגרף הפונקציה $z(x)$ בנקודה $x = -1$.

מצאו את השיפוע של $f(x)$ בנקודה $x = -5$.

תשובות סופיות

1 נקודת ההשקה היא $(-1, 5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.

2 נקודת ההשקה היא $(4, 12)$ ו- $b = 4$.

3 נקודת ההשקה היא $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

4 נקודת ההשקה היא $(0, 1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.

5 משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.

6 $y = 6x - 15, (4, 9)$; $y = -2x + 1, (0, 1)$

7 המשיק $\left(9, 3\right), y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

8 $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

9 $k = 1.5$, נקודת ההשקה $(1, 1)$.

10 א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.

בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

שאלות

(1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$, בנקודה $x = -1$.

(2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$, ששיפועו 2.

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$, בנקודה $x = 0$.

(4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$, בנקודה $x_1 = 1$.

(5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$, בנקודה $y = 2$, הוא -4 .
מצאו את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$, היוצרים זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$, ששיפועו -2.

(8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$,
בנקודה $x_1 = 2$.

(9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$, בנקודה $(1,6)$, הוא -6 .
מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b , ואת משוואת המשיק.

(10) נתונה הפונקציה $y = e^{2x} + 3ex$, והעבירו לה משיק בנקודה $x = 2$.
מצאו את משוואת המשיק.

11) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$, בנקודה $x = 0$.

12) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$, בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.

13) לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$. מצאו את משוואת המשיק.

14) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$, בנקודה $x = 1$.

15) הגרפים של $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1 - x$ נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק. מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

16) מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$, בנקודה $(3, 4)$.

17) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה $(1, 1)$.

18) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה $(1, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

19) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy+y} + x^2y = xy^2$, דרך הנקודה $(1, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

20) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$, דרך הנקודה $(0, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה הסתומה $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$.

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y = 0$.

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

תשובות סופיות

(1) $y = 24x + 22$

(2) $y = 2x - 3$

(3) $y = 1$

(4) $y = -12x + 9$

(5) $a = 2, y = -4x - 2$

(6) $y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3}$

(7) $y = -2x + 8$

(8) $y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16}$

(9) $a = 6, b = 2, y = -6x + 12$

(10) $y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4$

(11) $y = 3x + 1$

(12) $y = (-e^2 + e)x + e^2, y = (e - 1)x + e$

(13) $y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$

(14) $y = (\ln 2 + 1)x - 1$

(15) $y = \frac{1}{e}x$

(16) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

(17) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

(18) $y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5}$

(19) $y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6}$

(20) $y = \frac{4}{3}x + 2$

(21) א. $(0,0), (1,0)$ ב. בראשית הצירים: $y = -x$, המשוואה השנייה: $y = x - 1$.

הנורמל

שאלות

- (1) מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x-2}$, בנקודה $(3, 2)$.
- (2) מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^4$, המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5, 0)$ ו- $(2, 4)$.
- (3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, בנקודה מסוימת, היא $4y + x = 6$. מצאו את הנקודה.

תשובות סופיות

- (1) $y = -2x + 8$
- (2) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$
- (3) $(2, 1)$

זווית שבין שתי עקומות

שאלות

(1) מצאו את הזווית בין הפונקציות $y = f(x) = x^2$ ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$.

(2) מצאו את הזווית בין המעגל $x^2 + y^2 = 8$ והפרבולה $y^2 = 2x$.

(3) הוכיחו שהאליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$ וההיפרבולה $x^2 - y^2 = 2$ נחתכות בזווית ישרה.

תשובות סופיות

(1) 71.57°

(2) 71.56°

(3) שאלת הוכחה.

נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

שאלות

(1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
 $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$

(2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
 $\ln 2, \sqrt[3]{9}$

תשובות סופיות

$$\sqrt{5} \approx 2.25, \sqrt{8} \approx 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \approx 1, \sqrt[3]{9} \approx 2\frac{1}{12} \quad (2)$$

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 7 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף 53
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף 55
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף 56
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף 57
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל 58

גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

שאלות

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ ו- } \frac{0}{0} \text{ גבולות מהצורה}$$

חשבו את הגבולות בשאלות 1-3 (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 4-8 (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 9-12 (פונקציות חזקה):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 13-15 (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (20)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{6}$ (5)	4 (4)	$n-1$ (3)	$\frac{20}{17}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\ln \frac{a}{b}$ (10)	1 (9)	$-\frac{3}{2}$ (8)	$\frac{5}{6}$ (7)	$\frac{3}{2}$ (6)
1 (15)	2 (14)	$-\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{6}$ (12)	$\frac{1}{2}$ (11)
0 (20)	0 (19)	∞ (18)	$\frac{1}{2}$ (17)	$\frac{1}{2}$ (16)

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (7)$$

תשובות סופיות

0 (4)

0 (3)

0 (2)

∞ (1)

$\frac{5}{2}$ (7)

6 (6)

0 (5)

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty - \infty$

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: $1^{\pm\infty}$, $0^{\pm\infty}$, ∞^0

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, \quad (a > 0) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$e \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

הגבולות הבאים הם מהצורה $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים, ולבסוף, חשבו את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 8 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד	(ללא ספר)
2. חקירת פולינום	59
3. חקירת פונקציה רציונלית	61
4. חקירת פונקציה מעריכית	65
5. חקירת פונקציה לוגריתמית	68
6. חקירת פונקציה עם שורשים	72
7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט	73

שלבי עבודה והערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
 - תחום הגדרה ורציפות.
 - נקודות חיתוך עם הצירים.
 - זוגיות ואי-זוגיות.
 - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
 - תחומי עלייה וירידה.
 - נקודות קיצון.
 - תחומי קמירות וקעירות.
 - נקודות פיתול.
 - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קמורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק הרלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

חקירת פולינום

שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

תשובות סופיות

(1) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 9 .

נקודות קיצון: מינימום: $(9, 0)$, מקסימום: $(3, 108)$.

תחום עלייה: $x < 3$ or $x > 9$, ירידה: $3 < x < 9$.

תחום קמירות: $x > 6$, קעירות: $x < 6$.

נקודת פיתול: $(6, 54)$.

(2) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 2 .

נקודות קיצון: מינימום: $\left(1.5, \frac{-27}{16}\right)$.

תחום עלייה: $x > 1.5$, ירידה: $x < 1.5$.

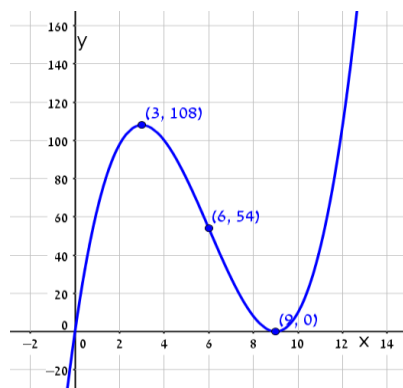
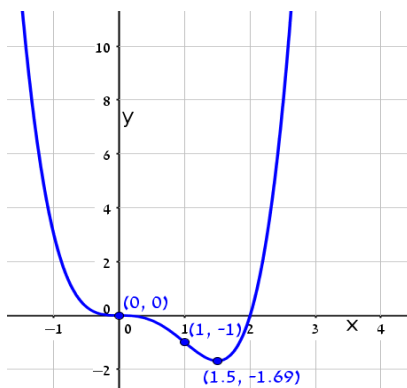
תחום קמירות: $x > 1$ or $x < 0$, קעירות: $0 < x < 1$.

נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(1, -1)$.

גרפים

(1)

(2)



חקירת פונקציה רציונלית

שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (7)$$

הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן, קיבלנו שם אסימפטוטה משופעת $y = x - 1$.

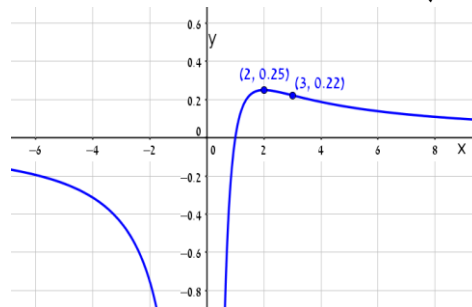
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2, 0.25)$. נקודת פיתול: $\left(3, \frac{2}{9}\right)$.
תחום עלייה: $0 < x < 2$, ירידה: $x > 2$ or $x < 0$.
תחום קמירות: $x > 3$, קעירות: $0 < x < 3$ or $x < 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, 0)$. נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$.
תחום עלייה: $x < -1$ or $x > 0$, ירידה: $-1 < x < 0$.
תחום קמירות: $-1 < x < \frac{1}{2}$ or $x < -1$, קעירות: $x > \frac{1}{2}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$, מקסימום: $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$.
תחום עלייה: $x < -\sqrt{12}$ or $x > \sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$, $x \neq \pm 2$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $-2 < x < 0$ or $x > 2$, קעירות: $0 < x < 2$ or $x < -2$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$.
תחום עלייה: $x < -3$ or $x > -1$, ירידה: $-3 < x < -1$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $x > 0$, קעירות: $-1 < x < 0$ or $x < -1$.

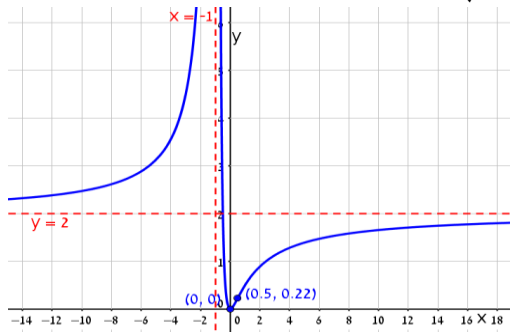
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : -1 .
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$.
תחום קמירות: $-3 < x < -1$ & $x > 1$, קעירות: $-1 < x < 1$ or $x < -3$.
(6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$, $x \neq 5$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{10}$, עם ציר ה- x : ± 1 .
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78, -3.88)$, מינימום: $(0.36, -0.11)$.
תחום עלייה: $0.36 < x < 2$ or $2 < x < 2.78$,
ירידה: $x < 0.36$ or $2.78 < x < 5$ or $x > 5$. נקודת פיתול: $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1 < x < 2$ or $x > 5$, קעירות: $2 < x < 5$ or $x < -1$.
(7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{3}{4}$, עם ציר ה- x : $x=1$, $x=3$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(0.85, -0.09)$.
תחום קמירות: $0.85 < x < 2$ or $x < -2$, קעירות: $-2 < x < 0.85$ or $x > 2$.
(8) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$, $x \neq -1$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-2, -4)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $-2 < x < -1$ or $-1 < x < 0$.
נקודת פיתול: אין.
תחום קמירות: $-1 < x < 1$ or $x > 1$, קעירות: $x < -1$.

גרפים

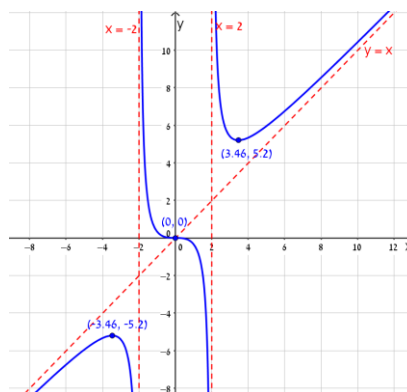
(1)



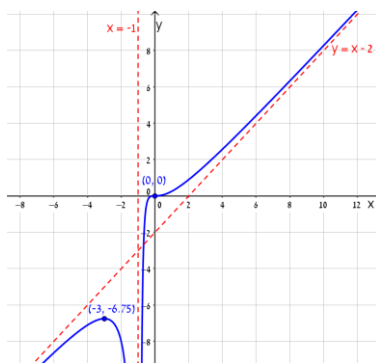
(2)



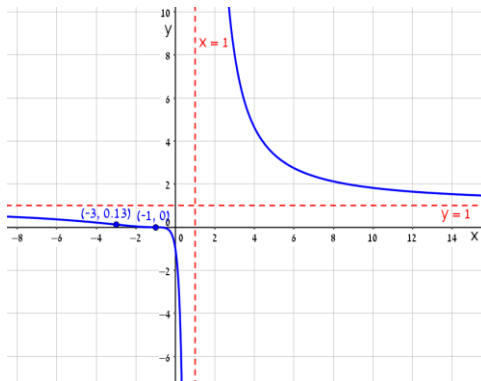
(3)



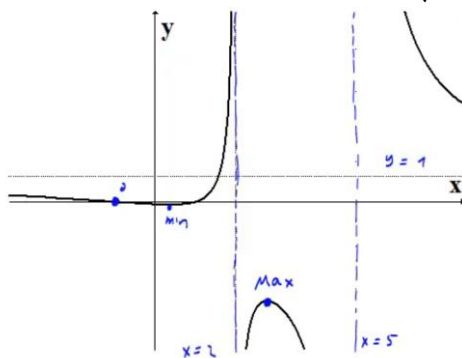
(4)



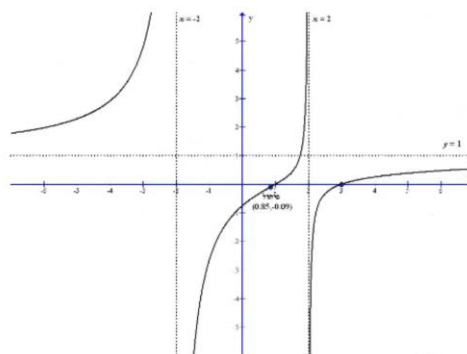
(5)



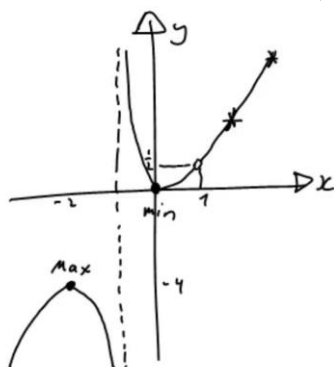
(6)



(7)



(8)



חקירת פונקציה מעריכית

שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

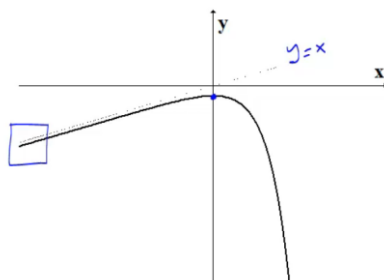
$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

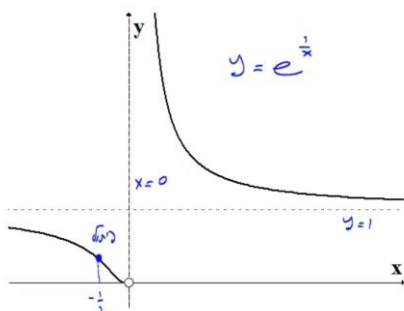
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : אין (ראו בהרחבה בסרטון).
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y = x$ ב- $-\infty$ בלבד.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0, -1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.
 נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל x .
 (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- $\pm\infty$.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
 נקודת פיתול: $(-0.5, e^{-2})$.
 תחום קמירות: $x > 0$ or $-0.5 < x < 0$, תחום קעירות: $x < -0.5$.
 (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : -2 .
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת: הישר $y = x + 3$ ב- $\pm\infty$.
 אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $(-1, e^{-1})$, מינימום: $(2, 4e^{\frac{1}{2}})$.
 תחום עלייה: $x > 2$ or $x < -1$, ירידה: $-1 < x < 0$ or $0 < x < 2$.
 נקודת פיתול: $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$.
 תחום קמירות: $x > 0$ or $-0.4 < x < 0$, תחום קעירות: $x < -0.4$.
 (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y = 0$ ב- $\pm\infty$.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$, מינימום: $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$.
 תחום עלייה: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, ירידה: $x > \frac{1}{2}$ or $x < -\frac{1}{2}$.
 נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$, $(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$.
 תחום קמירות: $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$ or $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$, תחום קעירות: $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$ or $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$.

גרפים

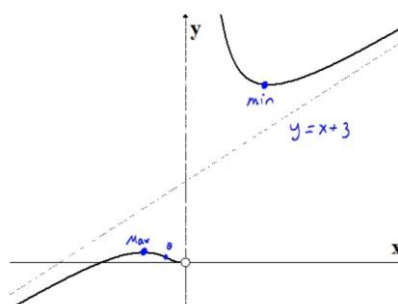
(1)



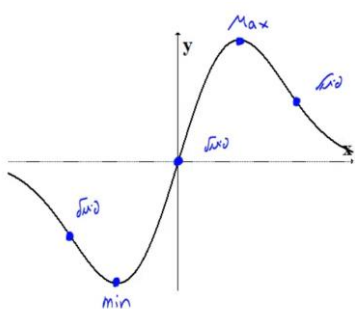
(2)



(3)



(4)



חקירת פונקציה לוגריתמית

שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

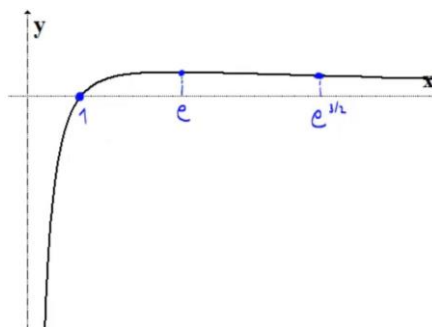
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e$, ירידה: $x > e$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
 תחום קמירות: $x > e^{1.5}$, קעירות: $0 < x < e^{1.5}$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e^2$, ירידה: $x > e^2$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt[8]{e^3}}\right)$. תחום קמירות: $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x > e^{\frac{8}{3}}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x < 2$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{2} \ln 2$, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -e^{-1})$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

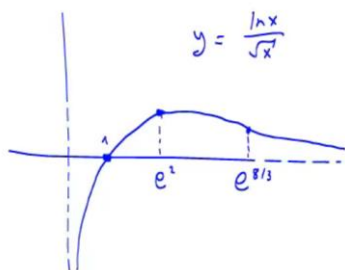
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^1$, $x = e^{-3}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -4)$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(1, -3)$. תחום קמירות: $x > 1$, קעירות: $0 < x < 1$.
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^{1.5}$, $x = e^{-0.5}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{\frac{1}{2}}, -4\right)$.
 תחום עלייה: $x > e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$.
 נקודת פיתול: $(e^{1.5}, 0)$. תחום קמירות: $0 < x < 1.5$, קעירות: $x > 1.5$.
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$, $x \neq 1$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 1$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, 2)$, $(e, 2)$.
 תחום עלייה: $e^{-1} < x < 1$ or $x > e$, ירידה: $1 < x < e$ or $x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(5.15, 3.06)$.
 תחום קמירות: $0 < x < 1$ or $1 < x < 5.15$, קעירות: $x > 5.15$.

גרפים

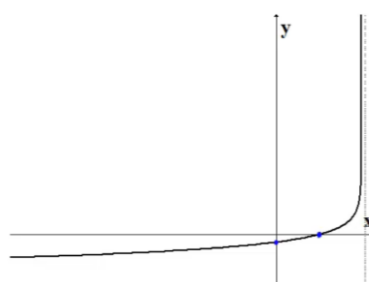
(1)



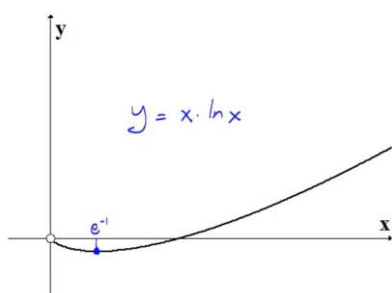
(2)



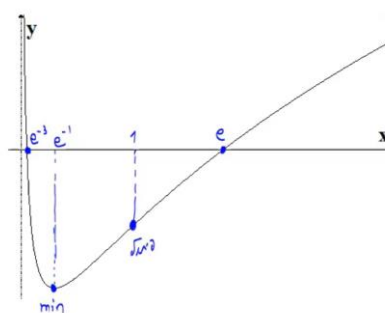
(3)



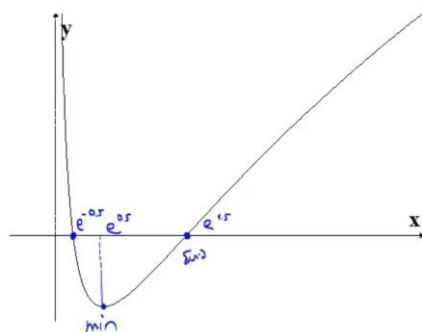
(4)



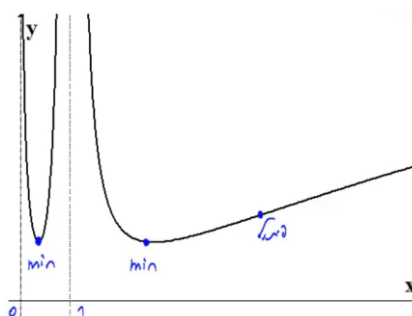
(5)



(6)



(7)



חקירת פונקציה עם שורשים

שאלה

1) חקרו את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

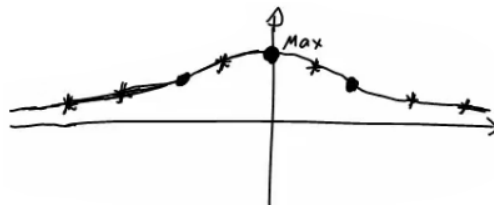
תשובה

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = 1$, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y = 0$.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.

נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

תחום קמירות: $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$ or $x < \sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$.

גרף:



חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1 \quad (3)$$

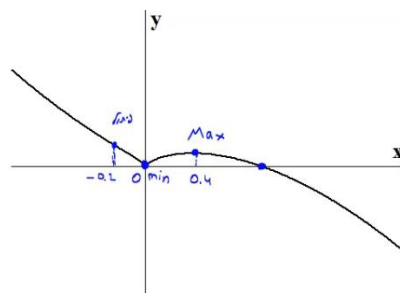
$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

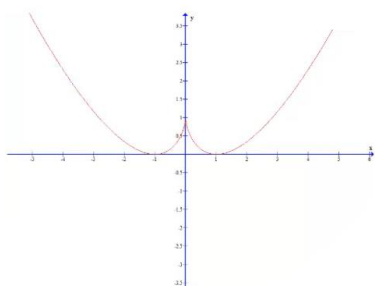
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 או 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$, מינימום: $(0, 0)$.
תחום עלייה: $0 < x < \frac{2}{5}$, ירידה: $x < 0$ or $x > \frac{2}{5}$.
נקודות פיתול: $(-0.2, 0.41)$.
תחום קמירות: $x < -0.2$, קעירות: $-0.2 < x < 0$ or $x > 0$.
(2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 1 , עם ציר ה- x : -1 או 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0, 1)$, מינימום: $(-1, 0)$, $(1, 0)$.
תחום עלייה: $-1 < x < 0$ or $x > 1$, ירידה: $0 < x < 1$ or $x < -1$.
נקודות פיתול: אין.
תחום קמירות: קמורה לכל x .
(3) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : ± 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, -1)$.
תחום עלייה: $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $-1 < x < 0$ or $x < -1$.
נקודות פיתול: $(-1, 0)$, $(1, 0)$.
תחום קמירות: $-1 < x < 1$, קעירות: $x > 1$ or $x < -1$.
(4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1.5 , עם ציר ה- x : 3 .
אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$,
משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- ∞ , ו- $y = -1$ ב- $-\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(3, 0)$.
תחום עלייה: $x > 3$, ירידה: $2 < x < 3$ or $x < 2$.
נקודות פיתול: $(3, 0)$.
תחום קמירות: $2 < x < 3$, קעירות: $x > 3$ or $x < 2$.

גרפים

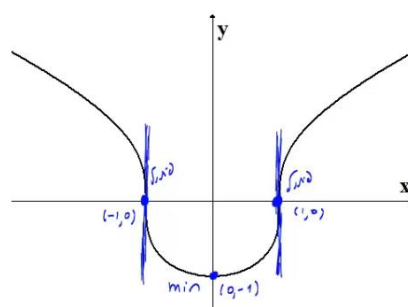
(1)



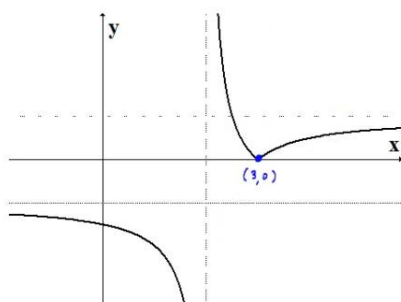
(2)



(3)



(4)



מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 9 - חקירת פונקציה ("שאלות מסביב")

תוכן העניינים

1. חקירת פונקציה - שאלות מסביב 76
2. הוכחת אי שוויונים 79

חקירת פונקציה – "שאלות מסביב"

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון. מצאו את הקבוע a .

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון. מצאו את הקבועים a, b .

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת פיתול. מצאו את הקבוע a .

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת פיתול. מצאו את הקבועים a, b .

(5) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=3$ הוא 33. מצאו את a .

(6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3,9)$ הוא 12. מצאו את a, b .

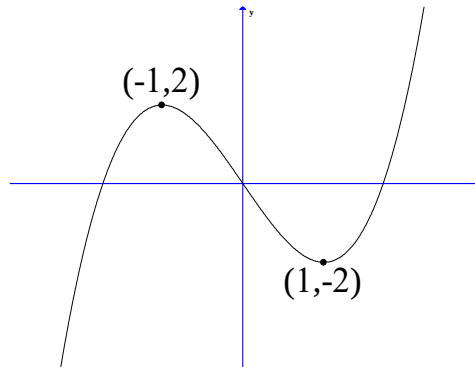
(7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y=4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a .

(8) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y = 0.5x + 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a ואת b .

(9) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$.

ידוע שהישר $x=1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a .

שאלות 10-17 מתייחסות לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$:



(10) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?

(11) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?

(12) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?

(13) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד?

(14) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות?

(15) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

(16) האם קיים ערך של k , עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

(17) מצאו את התחומים בהם הפונקציה היא חז"ע.

תשובות סופיות

$$a = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$a = -4, b = 6 \quad (2)$$

$$a = -\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$a = -1, b = 3 \quad (4)$$

$$a = 1 \quad (5)$$

$$a = \frac{2}{3}, b = -1 \quad (6)$$

$$a = 8 \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 1 \quad (8)$$

$$a = -7 \quad (9)$$

$$1 \quad (10)$$

$$2 \quad (11)$$

$$3 \quad (12)$$

$$k < -2, k > 2 \quad (13)$$

$$k = \pm 2 \quad (14)$$

$$-2 < k < 2 \quad (15)$$

$$\text{לא} \quad (16)$$

$$x < -1, -1 < x < 1, x > 1 \quad (17)$$

הוכחת אי שוויונים

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים, לגבי התחום הרשום לידם:

$$(1) \quad (-\infty < x < \infty), \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2$$

$$(2) \quad (x > 0), \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$$

$$(3) \quad (x \geq 0), \quad \ln(x+1) \leq x$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 10 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

1. הסבר כללי על בעיות קיצון (ללא ספר)
2. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון 80

שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x .
- נוודא שערך ה- x מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

שאלות

- 1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת x ליטר שוקו ליום, היא יכולה לקבל מחיר של $p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$ שקל לליטר.
- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
 - מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
 - מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
 - שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
 - פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.
- 2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.
- מצאו את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
 - אם $x = 20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
 - אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?
- 3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x) = -0.08x^2 + 40x$.
- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
 - שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
 - מצאו את פונקציית הביקוש ושרטטו את הגרף שלה.
- 4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$.
- מצאו את תחום הפונקציה.
 - מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
 - מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
 - לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?
- 5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.
- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
 - אם $x = 40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
 - מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?

6 פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

- א. מצאו את המחיר, הנותן את הפדיון המקסימלי.
- ב. מהו הביקוש במקרה זה?
- ג. מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאנו? מה משמעותו?

7 פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר x קפה ביום, היא $C(x) = 5x + 150$.

- א. שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
- ב. מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.
- ג. מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?
- ד. מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

8 פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.

- א. חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.
- ב. כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
- ג. חשבו את העלות השולית ליום, עבור $x = 100$. איזו מסקנה ניתן להסיק?

9 פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.

- א. חשבו את העלות, כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
- ב. חשבו את העלות השולית, כאשר $x = 100$.
- ג. חשבו כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x = 100$ ל- $x = 101$, והשוו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?
- ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

10 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$,

ופונקציית עלות כוללת $TC(Q) = 200 + 4Q$.

- מהי הכמות, Q , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
- מהו המקסימום במקרה זה?

11 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 20$,

ופונקציית עלות $TC(Q) = 300 + 2Q^2$.

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
- מהו המקסימום במקרה זה?

12 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$,
 ופונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

13 ליצרן פונקציית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$,
 ופונקציית עלות $TC(Q) = 200 + 4Q$.
 מהי הכמות, Q , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

14 ליצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$,
 אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

15 ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבר את המשמעות הגרפית.

ב. הוכיחו שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה שולית שווה למחיר המוצר.

16 $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $C'(x)$ – הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעות.

א. האם ייתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?

ב. האם ייתכן להפך?

ג. הוכיחו כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

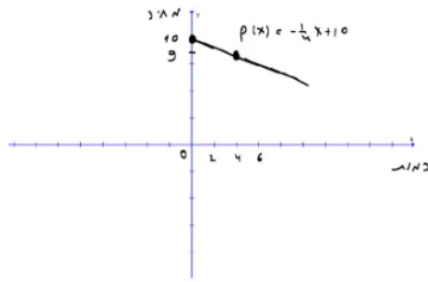
17 מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי הייצור.
 נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- p_1 וב- p_2 , בהתאמה.
 אם נשתמש ב- x יחידות מג"י אחד וב- y יחידות מג"י 2,
 המפעל מייצר $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל A ₪.

א. הוכיחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי

$$\text{כאשר מתקיימת הנוסחה } \frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}.$$

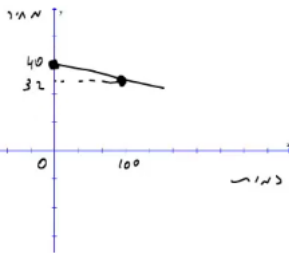
ב. חשבו x ו- y , עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:
 $p_1 = 100$ ₪, $p_2 = 372,000$ ₪, $A = 3,000$.

תשובות סופיות

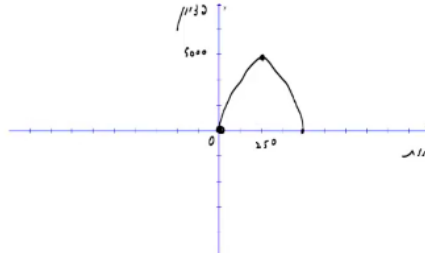


(1) א. 9 ב. 7 ג. 16 ה. $x(p) = 40 - 4p$ ד.

(2) א. $R(x) = -0.6x^2 + 120x$, בתחום: $x \geq 0$ ב. 2,160 ג. 2,160



(3) א. $x \geq 0$ ב. ג.



(4) א. $x \geq 0$ ב. פונקציית הפדיון: $R(x) = -0.04x^2 + 100x$

הפדיון הממוצע: $AR(x) = -0.4x + 100$, $x > 0$ ג. $R'(x) = -0.08x + 100$

ד. 1,250; הפדיון המקסימלי: 62,500.

(5) א. פונקציית הפדיון: $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x$

הפדיון השולי: $R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$ ב. לא.

ג. 30; הפדיון המקסימלי: 108,000.

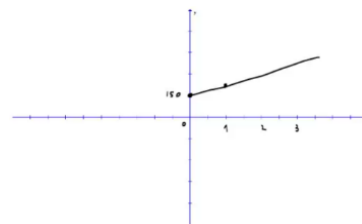
(6) א. $33\frac{1}{3}$ ב. $Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג. $-3\frac{1}{3}$; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

(7) א. ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל,

גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. 250 ד. $MC(x) = 5$



(8) א. 21.6 ב. 100 ג. 18 ש; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה

אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ש בערך.

(9) א. $C(100) = 1240$, $C(101) = 1250.804$ ב. 10.8

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדל.

(10) הכמות: 800, המקסימום: 38,200.

(11) הכמות: 5, המקסימום: -250.

(12) 25**(13)** הכמות : 800, המקסימום : 38,200.

(14) $TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5$

(15) שאלת הוכחה.**(16)** א. כן. ב. לא. ג. שאלת הוכחה.**(17)** א. שאלת הוכחה. ב. $x = 4, y = 3600$.

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 11 - מציאת מספר הפתרונות של משוואה (משפטי קושי ורול)

תוכן העניינים

1. מציאת מספר הפתרונות של משוואה 86
2. משפט רול 88

מציאת מספר הפתרונות של משוואה

שאלות

הוכיחו שלמשוואות בשאלות 1-3 יש בדיוק פתרון אחד :

$$x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 = -\ln x \quad (2)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (3)$$

(4) נתונה המשוואה $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ונתון כי $b^2 < 3ac$. מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכיחו זאת.

עבור כל אחת מהמשוואות 5-6, מצאו את מספר הפתרונות ופתרו אותה :

$$e^{x-1} = x \quad (5)$$

$$\ln(x+5) - 4 = x \quad (6)$$

הוכיחו שלמשוואות בשאלות 7-9 יש בדיוק שני פתרונות :

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (9) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (8) \quad e^x - 5x = 0 \quad (7)$$

בכל אחת מהמשוואות 10-12, מצאו קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הניחו שכל הפרמטרים שונים מאפס) :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (10)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (11)$$

$$(n > 4, \text{ odd}) \quad ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0 \quad (12)$$

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) פתרון יחיד.

(5) $x=1$ (6) $x=-4$

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) $b^2 - 4ac = 0$ (11) $4b^2 - 12ac < 0$ (12) $b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0$

משפט רול

(1) בדקו האם הפונקציה $f(x)$ בקטע הנתון מקיימת את תנאי משפט רול,

ומצאו את כל ערכי c המקיימים את מסקנת משפט רול:

א. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ $[0, 2]$

ב. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ $[-1, 1]$

(2) נתון ש- $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$.

הראו ש- $f(1) = f(5)$, אך אין נקודה c , כך ש- $f'(c) = 0$.

האם הדבר סותר את משפט רול? נמקו.

(3) הוכיחו שלמשוואה $x^2 + x^3 + 5x = 1$ יש לפחות פתרון אחד, ולכל היותר פתרון אחד.

(4) נתון כי f גזירה פעמיים.

נתון כי f פונקציה זוגית שיש לה מינימום מקומי בנקודה $x_0 = 2$.

הוכיחו כי יש שתי נקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

תשובות סופיות

(1) א. כן, $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. ב. כן, $2 - \sqrt{3}$.

(2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x = 3$.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 12 - משפט לגראנז'

תוכן העניינים

- 1. הוכחת אי שוויונים בקטע $[a,b]$ 89
- 2. הוכחת אי שוויונים בקטע $[0,x]$ 90
- 3. הוכחת אי שוויונים עם מספרים 91
- 4. שאלות כלליות 92

הוכחת אי שוויונים בקטע $[a, b]$

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} \quad (1)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}} \quad (2)$$

$$(0 < a < b) \quad \sqrt[n]{b} \cdot \frac{b-a}{n \cdot b} < \sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} \cdot \frac{b-a}{n \cdot a} \quad (3)$$

$$(1 < a < b) \quad \frac{2b(b-a)}{b^2+1} < \ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) < \frac{2a(b-a)}{a^2+1} \quad (4)$$

$$(1 < a < b < 3) \quad \ln b - \ln a + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \leq \frac{1}{4}(b-a) \quad (5)$$

$$(a < b) \quad (a-b)e^{-a} < e^{-b} - e^{-a} < (a-b)e^{-b} \quad (6)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הוכחת אי שוויונים בקטע $[0, x]$

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$(x > 0) \quad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (1)$$

$$(x > 0) \quad 1+x < e^x < 1+xe^x \quad (2)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הוכחת אי שוויונים עם מספרים

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים:

$$\frac{1}{3} < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2} < 1.5 \quad (2)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

שאלות כלליות

שאלות

(1) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x , המקיימת $|f'(x)| \leq 5$.

ידוע כי $f(1) = 3$, $f(4) = 18$.

הוכיחו כי $f(2) = 8$.

(2) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x , המקיימת $|f'(x)| \leq 7$.

ידוע כי $f(1) = 3$, $f(4) = 18$.

הוכיחו כי $4 \leq f(2) \leq 10$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 13 - גמישות הביקוש

תוכן העניינים

1. גמישות הביקוש 93

גמישות הביקוש

שאלות

1) חשבו את גמישות הביקוש של הפונקציות הבאות :

א. $f(x) = x^2 + 4x$

ב. $f(x) = xe^x$

ג. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

ד. $f(x) = \ln(\ln x)$

2) פונקציית הביקוש נתונה על ידי $D(p) = 10 - p$.

מצאו את גמישות הביקוש, אם $p = 4$.

3) פונקציית הביקוש נתונה על ידי $D(p) = a - bp$, $a, b > 0$.

א. מצאו את המחיר, p , בו $\eta_D = 0$.

ב. מצאו את המחיר, p , בו $\eta_D = -1$.

4) פונקציית הביקוש נתונה על ידי $x = a \cdot \sqrt{b - p}$,

כאשר: x – כמות, p – מחיר, $a, b > 0$ קבועים.

מצאו את x ו- p , עבורם גמישות הביקוש שווה -1 .

5) הוכיחו כי $\eta_{\ln f} = \frac{\eta_f}{\ln f(x)}$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } \frac{2x+4}{x+4} \quad \text{ב. } 1+x \quad \text{ג. } \frac{x^2}{x^2+4} \quad \text{ד. } \frac{1}{\ln x \cdot \ln(\ln x)}$$

$$(2) \quad -\frac{2}{3}$$

$$(3) \quad \text{א. } p=0 \quad \text{ב. } p=\frac{a}{2b}$$

$$(4) \quad p=\frac{2b}{3}, \quad x=a\sqrt{\frac{b}{3}}$$

$$(5) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 14 - אינטגרלים מידיים ואינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים 95
2. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים" 98
3. מציאת פונקציה קדומה 99

אינטגרלים מידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 12-1 :

(פתירה על ידי הכלל : $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$)

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4 dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 20-13 :

(פתירה על ידי הכלל : $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$)

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26 :

(פתירה על ידי הכלל : $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

(פתירה על ידי הכלל : $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$)

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

(30) חשבו את האינטגרל : $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

(פתירה על ידי הכלל : $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c$)

(31) חשבו את האינטגרל : $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$

תשובות סופיות

- $$\begin{aligned} & 4x + c \quad (1) & \frac{x^5}{5} + c \quad (2) & -\frac{1}{x} + c \quad (3) \\ & \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4) & -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) & \frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) \\ & \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7) & -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8) & \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) \\ & \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10) & -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) & \frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) \\ & \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13) & \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) & -\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) \\ & \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16) & 10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) & -\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19) \\ & -\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18) & \frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21) & \ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) \\ & \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20) & \frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24) & x + \ln|x+2| + c \quad (25) \\ & x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23) & \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27) & \frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28) \\ & 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26) & \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30) & 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29) \\ & -\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (31) \end{aligned}$$

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$\int \frac{1}{x \ln x} dx$ (3)	$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$ (2)	$\int \frac{2x}{x^2+1} dx$ (1)
$\int e^{-2x^2} x dx$ (6)	$\int e^{x^2} 2x dx$ (5)	$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx$ (4)
$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx$ (9)	$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ (8)	$\int \frac{\ln x}{x} dx$ (7)
	$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ (11)	$\int x^2 \sqrt{x^3+4} dx$ (10)

תשובות סופיות

$\ln \ln x + c$ (3)	$\frac{1}{3} \ln x^3+1 + c$ (2)	$\ln x^2+1 + c$ (1)
$-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c$ (6)	$e^{x^2} + c$ (5)	$e^2 \ln e^x+1 + c$ (4)
$\frac{2}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c$ (9)	$2\sqrt{x^2+1} + c$ (8)	$\frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$ (7)
	$\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$ (11)	$\frac{2}{9} (x^3+4)^{\frac{3}{2}} + c$ (10)

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

- (1) נתונה הנגזרת $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.
 ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2, 3)$.
 מצאו את הפונקציה.
- (2) נתונה הנגזרת $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 4$.
 מצאו את הפונקציה.
- (3) נתונה הנגזרת $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -6$.
 מצאו את הפונקציה.
- (4) נתונה הנגזרת $f'(x) = 2x - 6$.
 ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
 מצאו את הפונקציה.
- (5) נתונה הנגזרת $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.
 שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y = 5\frac{2}{3}$, הוא 3.
 מצאו את הפונקציה.
- (6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה $f''(x) = 6x + 6$.
 שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,
 וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
 מצאו את הפונקציה.
- (7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.
 המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y = -4$.
 מצאו את הפונקציה.

(8) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = 0$ וכן לכל x_0 ממשי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$$

- א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.
- ב. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ או קבעו שהוא אינו קיים.
- ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.
- ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$. חשבו את הנגזרת $(G(x) - f(x))'$.

תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12 \frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12 \frac{1}{2} \sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3} (x-1)^3 - 18 \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

(8) א. רציפה לכל x . ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.

ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. 0.

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 15 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים 101

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 :

$$\int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (4) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (3)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (6) \qquad \int \ln x dx \quad (5)$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (8) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (7)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (10) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (9)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (12) \qquad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (11)$$

(13) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$, באשר n טבעי.

(14) חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (3)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (4)$$

$$x \ln x - x + c \quad (5)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln|x-2| \right) \right) + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (8)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (10)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (11)$$

$$\frac{2}{9} (x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99} (x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (12)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (13)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (14)$$

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 16 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה 103

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (6) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (5) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (4)$$

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (9) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (8) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (12) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (11) \quad \int \ln^3 x dx \quad (10)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (15) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (14) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (13)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (5)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x}^2 - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (8)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (9)$$

$$x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6) + c \quad (10)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (11)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} \right| + c \quad (14)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (15)$$

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 17 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

- 1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 105
- 2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 107
- 3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית..... 108

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x - 1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x + 4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x - 1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x - 1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x - 2| + \frac{1}{4} \ln|x + 2| + c \quad (5)$$

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}}$$
 (1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$$
 (2)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx$$
 (3)

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$
 (4)

$$\int \sqrt{1+e^x} dx$$
 (5)

תשובות סופיות

$$-1.5 \ln |1 - \sqrt[3]{x}| + c$$
 (1)

$$6 \left(\frac{(1+\sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1+\sqrt[6]{x})}{2} + 3(1+\sqrt[6]{x}) - \ln |1+\sqrt[6]{x}| \right) + c$$
 (2)

$$4 \left(\frac{(1+\sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1+\sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1+\sqrt[4]{x-1}) - \ln |1+\sqrt[4]{x-1}| \right) + c$$
 (3)

$$-\ln |1+e^x| + x + c$$
 (4)

$$2\sqrt{1+e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right| + c$$
 (5)

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 18 - האינטגרל המסוים, סכומי רימן

תוכן העניינים

109	1. האינטגרל המסוים
111	2. אי שוויונים עם אינטגרלים
112	3. סכומי רימן

האינטגרל המסוים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-6 :

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (6)$$

(7) נתונה פונקציה רציפה f . הוכיחו :

$$\text{א. אם } f \text{ זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

תשובות סופיות

(1) -6

(2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3) $-2e^{-1} + 1$

(4) $\frac{1}{5}$

(5) $\frac{17}{12}$

(6) $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(7) שאלת הוכחה.

אי שוויונים עם אינטגרלים

הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (1)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (2)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (5)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (6)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

סכומי רימן

חשבו את הגבולות בשאלות 1-5:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (5)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים על פי ההגדרה (של רימן).

תוכל להיעזר בזהויות הבאות:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= 0.5n(n+1) \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (8)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (7)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$\ln(1+\sqrt{2}) \quad (4)$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (6)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{1}{4} \quad (8)$$

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 19 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

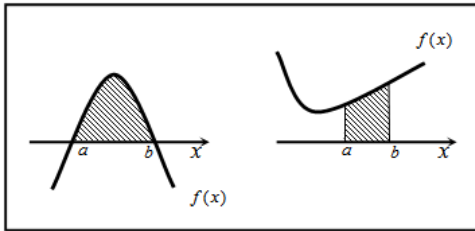
תוכן העניינים

114	1. חישוב שטחים
123	2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y
124	3. אורך קשת

חישוב שטחים

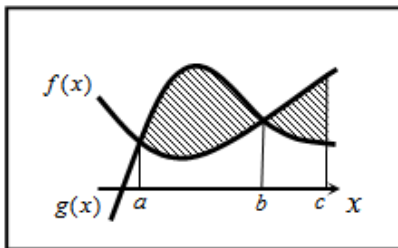
חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

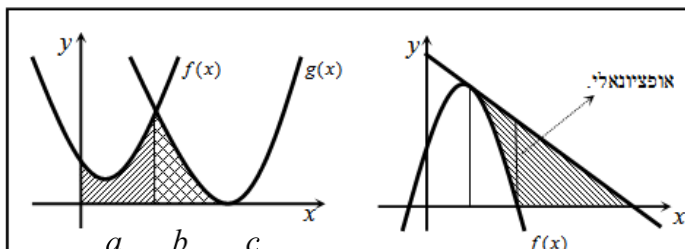


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

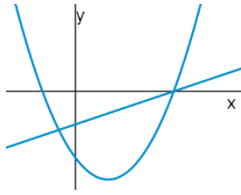
$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :

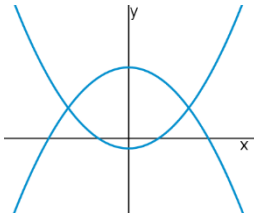


$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

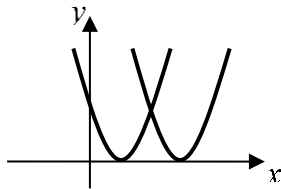
שאלות



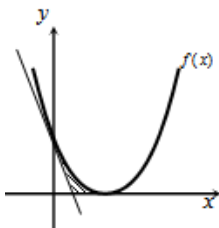
- (1) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ו- $g(x) = x - 6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות.



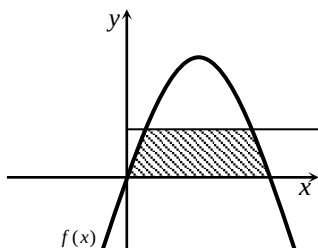
- (2) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות.



- (3) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x .

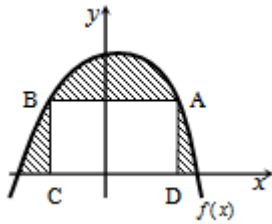


- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$.
מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y מעבירים משיק.
א. מצאו את משוואת המשיק.
ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = kx - x^2$.
הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות החיתוך הוא $x = 9$.
א. מצאו את ערך הפרמטר k .
ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).

6 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיור שלהלן,



היא $f'(x) = 3 - 2x$. ישר AB, שמשוואתו $y = 6$,

חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.

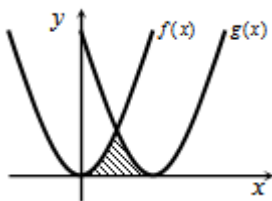
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x ,

כך שנוצר מלבן ABCD.

ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא 4.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x .



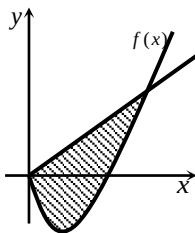
7 באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x) = x^2$,

את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x = 2$.

הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x) = 2x - 8$.

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (המסומן).



8 באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 2x$.

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = 2x - 6$,

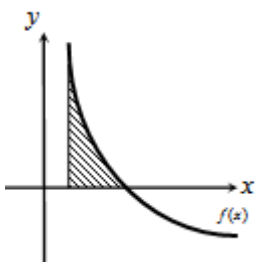
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה

בנקודה שבה ערך ה- y הוא 16.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.



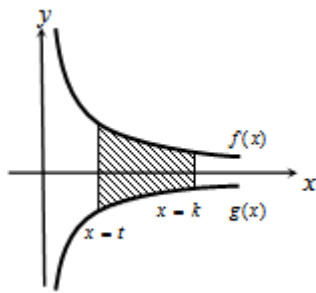
9 גרף הפונקציה $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2}$ (a קבוע)

חותך את ציר ה- x בנקודה $(6, 0)$.

א. מצאו את a וכתוב את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והישר $x = 2$.



10 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} \text{ ו- } g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$$

העבירו שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

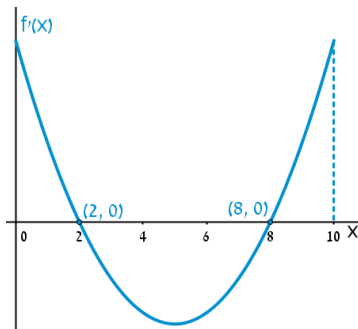
ידוע כי $AB = 2CD$.

א. הראו כי $k = 4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים $x=k$ ו- $x=t$,

הוא $S = 12$.

מצאו את t .



11 הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

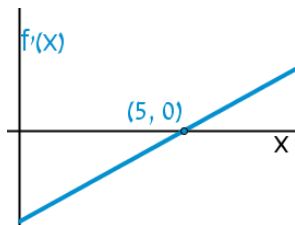
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

$$\text{אם } f(5) = 0, f(0) = -4, f(2) = 6$$

וכן $f(10) > 0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים

ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x = 2$.



12 להלן גרף הפונקציה $f'(x)$.

הגרף המתואר חותך את ציר ה- x

בנקודה אחת בלבד והיא $(5, 0)$.

א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

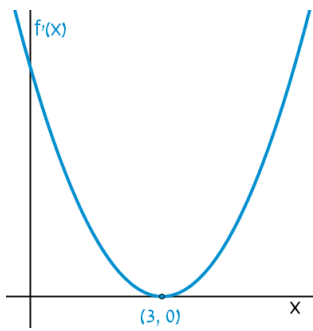
ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y

שלה הוא -2 .

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- y כאשר $y = 8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.



13 הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור.

א. האם ל- $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

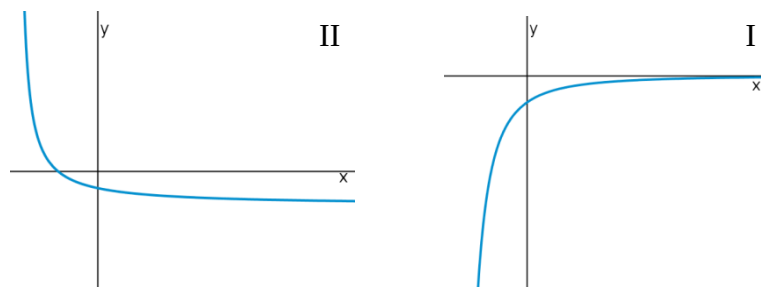
אם ידוע כי $f(3) = 4$ וכי היא חותכת את

ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.

14 באיורים שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:

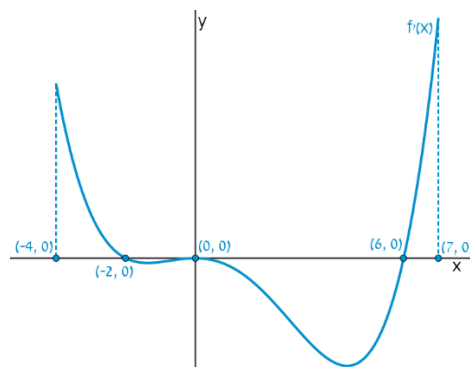


א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון כי $f(10) = -3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$.

מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

15 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:



א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$, בתחום $-4 \leq x \leq 7$,

לפי הנתונים $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.

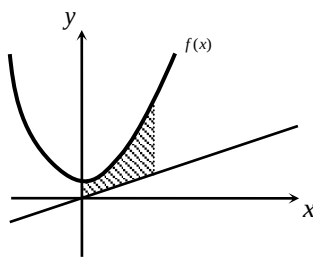
ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



16 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1, \frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.

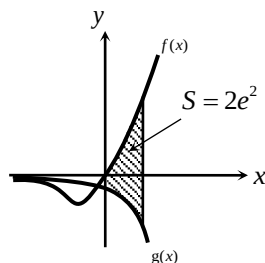
א. מצאו את a וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$,

והישר $y = 0.1x$.

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- y

והאנך $x = 2$.



17 ענו על הסעיפים הבאים:

א. גזרו את הפונקציה $y = e^x(x-1)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של

הפונקציות $f(x) = xe^x$, $g(x) = -e^x$.

העבירו ישר $x = a$, $(a > 0)$ החותך את

הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את

השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר.

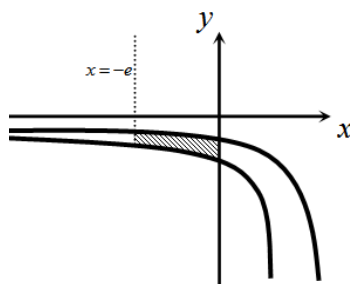
ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.

מצאו את a .

פונקציות לוגריתמיות

אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$

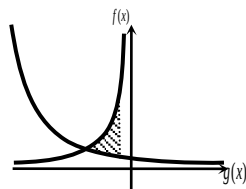


18) באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x < 0$.

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 3$.

- מצאו את a וכתבו את שתי הפונקציות.
- חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.



19) נתונות הפונקציות $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.

גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה $y = 0.4$.

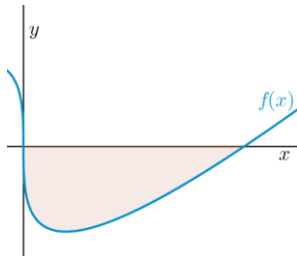
- מצאו את הפונקציה $g(x)$.
- מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.
- חשבו את השטח המוגבל על ידי שני הגרפים והישר $x = -1$.

פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

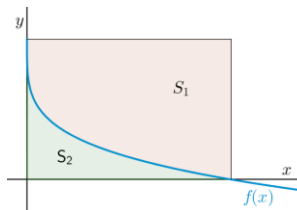
אינטגרלים מיידיים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

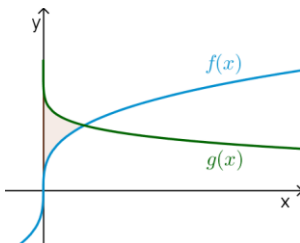
תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n} \neq -1$.



- (20)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$.
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 - חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



- (21)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$.
- העבירו אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.
 - מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- S_1 ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2 .
- מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.



- (22)** באיור שלהלן נתונים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ו- $g(x) = 2 - \sqrt[6]{x}$.
- מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.
 - חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y .

תשובות סופיות

- (1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש. (2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש. (3) $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (4) א. $y = -4x + 4$ ב. $(1, 0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (5) א. $k = 10$ ב. $(1, 9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (6) א. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (7) א. $g(x) = (x - 4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (8) א. $f(x) = x^2 - 6x$ ב. $(0, 0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (9) א. $a = 36$, $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.
- (10) א. הוכחה ב. $t = 1$.
- (11) א. 10 יח"ש.
- (12) א. חיובית: $x > 5$, שלילית: $x < 5$. ב. עולה: $x > 5$, יורדת: $x < 5$.
 ג. $\min(5, -2)$ ד. הוכחה ה. 10 יח"ש.
- (13) א. לא. הנקודה $(3, 0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
 ב. הוכחה ג. 9 יח"ש.
- (14) א. $f(x): \mathbb{II}$, $f'(x): \mathbb{I}$ ב. 1 יח"ש.
- (15) א. הוכחה ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (16) א. $a = -2$, $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52.
- (17) א. $y' = xe^x$ ב. $a = 2$.
- (18) א. $a = 2$, $g(x) = \frac{1}{x-2}$, $f(x) = \frac{2}{x-1}$ ב. $S = 1.76$ יח"ש.
- (19) א. $g(x) = \frac{2}{2x+5}$ ב. $(-2, 2)$ ג. $S = \ln 5 \approx 1.674$ יח"ש.
- (20) א. $(0, 0)$, $(8, 0)$ ב. $S = 16$ יח"ש.
- (21) $\frac{S_1}{S_2} = 4$
- (22) א. $(1, 1)$ ב. $S = \frac{11}{28}$ יח"ש.

חישוב שטחים ביחס לציר ה-y

שאלות

(1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

(2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $y = x - 8$.

תשובות סופיות

(1) $20\frac{5}{6}$

(2) $20\frac{5}{6}$

אורך קשת

שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(1 \leq x \leq 8), y = x^{2/3} \quad (2)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5)$$

$$(1 \leq x \leq 8), x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6)$$

$$(0 \leq y \leq 4), x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \ln x \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{1097}{480} \quad (3)$$

$$21 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}3^{1.5} \right\} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

$$\frac{8}{243} \{82^{1.5} - 1\} \quad (7)$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad (8)$$

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 20 - פונקציות של שני משתנים

תוכן העניינים

- 1. מבוא לפונקציה של שני משתנים 125
- 2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים 127
- 3. נספח - משטחים ממעלה שנייה 129

מבוא לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות :

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x+4y} + \sqrt{x-4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y+4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left(\frac{x-4y}{x+4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln [x \ln(y - 4x)] \quad (10)$$

$$(11) \quad u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (\text{ענו על סעיף א בלבד})$$

תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x+1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x+1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות 1-6, מצאו תחום הגדרה, ושרטטו אותו ואת מפת קווי הגובה/רמה.

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטטו מפת קווי גובה :

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטטו את קו הגובה k :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

- א. שרטטו את קו הגובה $f(x, y) = 0$.
 ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x, y) = C$ הוא קו רציף?
 ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

- * בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
 ** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

- (1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .
- (2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור.
- (4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.
- (5) $y < x^2$
- (6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.

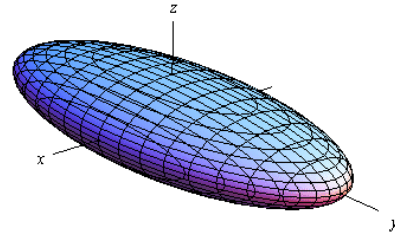
לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר GooL.co.il

נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

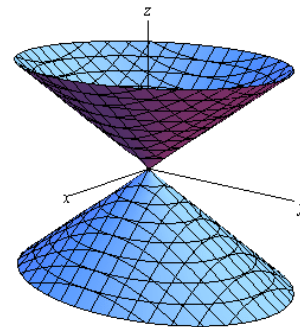
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a = b = c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

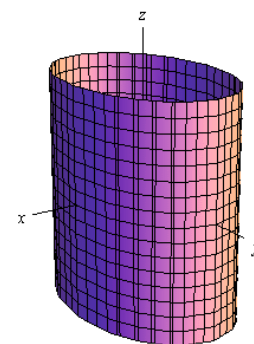
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. * מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים. * מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע

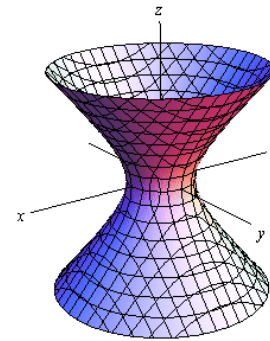


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

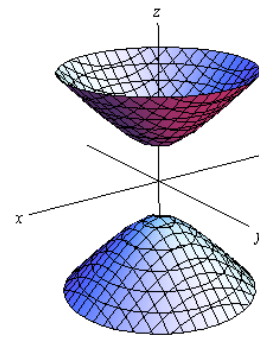
* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים

**היפרבולואיד דו-יריעתי**

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים

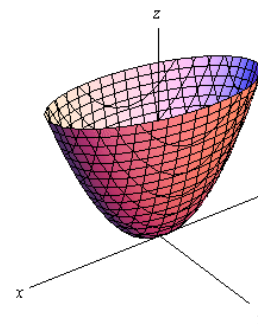
**פרבולואיד אליפטי**

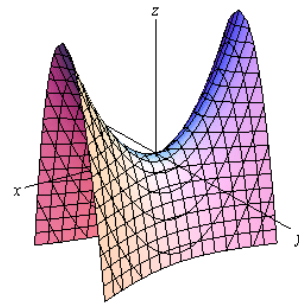
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$



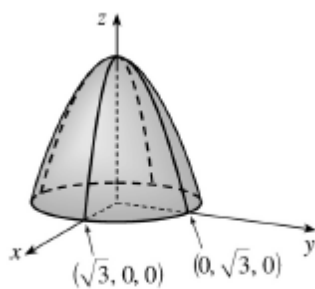
פרבולואיד היפרבולי

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \quad \text{משוואה:}$$

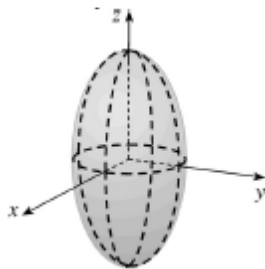
תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

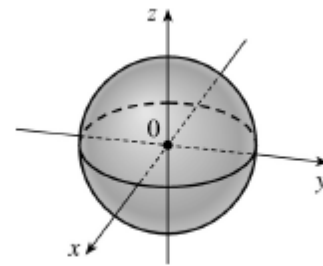
* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$

דוגמאות שונות

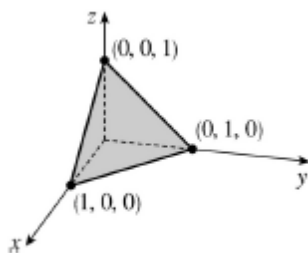
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



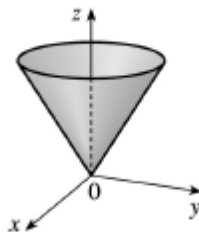
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



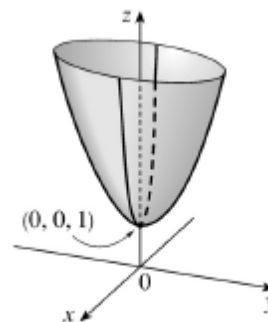
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 21 - נגזרות חלקיות

תוכן העניינים

- 1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון 133
- 2. נגזרות חלקיות מסדר שני 135

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות 1-6 חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1) \quad f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3) \quad (רק f_x)$$

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (6) \quad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad (7) \quad \text{נתון:}$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \quad \text{הוכיחו כי}$$

$$f(x, y, z) = e^x \left(y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad (8) \quad \text{נתון:}$$

$$\text{חשבו: } \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right)$$

הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (6)$$

(7) שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = 4 \quad (8)$$

הערת סימון

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f = f(x, y) &\Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{aligned}$$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות 1-13 חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (13)$$

14) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$.

15) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

16) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

17) נתון: $f(x,y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$.

חשבו: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,e)$.

הערת סימון

$$\begin{array}{lcl}
 f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & & f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x,y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & & f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & & f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{array}$$

תשובות סופיות

$$f_y = -2x^2y + 10 \quad f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1)$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy \quad f_{yy} = -2x^2$$

$$f_y = \frac{x^4}{y} \quad f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$$

$$f_y = 3y^2 - 6x \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 - 6y \quad (3)$$

$$f_{yx} = -6 \quad f_{xy} = 6 \quad f_{yy} = 6y$$

$$f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4)$$

$$f_{xy} = -3 \quad f_{yy} = 6y - 6$$

$$f_y = x^2 - 2xy \quad f_{xx} = 2y \quad f_x = 2xy - y^2 \quad (5)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y \quad f_{yy} = -2x$$

$$f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] \quad (6)$$

$$f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0]$$

$$, f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$$

$$f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

$$f_y = e^{xy}(x^2 + xy + 1) \quad f_x = e^{xy}(xy + y^2 + 1) \quad (7)$$

$$f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy}$$

$$f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy}$$

$$f_y = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) \quad f_x = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) \quad (8)$$

$$f_{xx} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y}$$

$$f_{yy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y}$$

$$f_{xy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y}$$

$$f_y = e^{-x^2-y^2}(4y - 2x^2y - 4y^3) \quad f_x = e^{-x^2-y^2}(2x - 2x^3 - 4xy^2) \quad (9)$$

$$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_y = xz \qquad f_{xz} = y \qquad f_{xy} = z \qquad f_{xx} = 0 \qquad f_x = yz \quad (13)$$

$$f_{zx} = y \qquad f_z = xy \qquad f_{yz} = x \qquad f_{yy} = 0 \qquad f_{yx} = z$$

$$f_{zz} = 0 \qquad f_{zy} = x$$

$$-2 \quad (14)$$

$$-1 \quad (15)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (16)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) \quad (17)$$

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 22 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים 139

כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

(1) נתון: $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^3$, $z = \ln(x^2 - y^2)$
 חשבו: z_u , z_v

(2) נתון: $v = 4t + k$, $u = t^2 + 4m$, $z = e^{u-v}$
 חשבו: z_t , z_m , z_k

(3) נתון: $z = f(x^2 - y^2)$
 הוכיחו: $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$

(4) נתון: $z = f(xy)$
 הוכיחו: $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$

(5) נתון: $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$
 הוכיחו: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$

(6) נתון: $z = f(x - y, y - x)$
 הוכיחו: $z_x + z_y = 0$

(7) נתון: $w = f(x - y, y - z, z - x)$
 הוכיחו: $w_x + w_y + w_z = 0$

(8) נתון: $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$
 הוכיחו: $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$

$$(9) \quad \text{נתון: } z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{הוכיחו: } x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$$

תשובות סופיות

$$z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot 2u \quad (1)$$

$$z_t = e^{u-v} (1) \cdot 2t + e^{u-v} (-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1} (1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v} (-1) \cdot 1 \quad (2)$$

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר: GooL.co.il

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 23 - פונקציות סתומות

תוכן העניינים

1. פונקציות סתומות 141

פונקציות סתומות

שאלות

- (1) מצאו את y' , כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$.
חשבו את $y'(0)$.
- (2) מצאו את $y'(1)$, כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.
- (3) מצאו את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x + \ln y = 1$.
- (4) נתון $z^3 - 2xz + y = 0$ ($z = z(x, y) \geq 0$).
מצאו $z_{xx}(1, 1)$.
- (5) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2, 1, -2)$.
מצאו:
- א. $z_{xx}(2, 1)$
ב. $z_{xy}(2, 1)$
ג. $z_{yy}(2, 1)$

תשובות סופיות

- (1) $y'(0) = \frac{1}{5}$
- (2) $y'(1) = 5$
- (3) $y'(e) = -\frac{2}{e^2}$, $y''(e) = \frac{6}{e^3}$
- (4) $z_x(1, 1) = -16$
- (5) $z_{xx}(2, 1) = z_{xy}(2, 1) = 1$, $z_{yy}(2, 1) = 4$

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 24 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים 142

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-7, מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

(8) נתון משטח $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$. מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(9) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(10) יצרן מוכר מחשבוני, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין, על ידי: $Q_1 = 144 + 16P_1 - 24P_2$, $Q_2 = 116 - 30P_1 + 20P_2$. כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוני, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

$$(11) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = x^2 + y^2 + axy.$$

א. הוכיחו שהנקודה $(0, 0)$ היא נקודה קריטית.

ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a , הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכלף, או שלא ניתן לדעת.

תשובות סופיות

- (1) $(-0.5, 1)$ אוכלף; $(1.5, -3)$ מינימום.
- (2) $(1, 2)$ מינימום; $(-1, -2)$ מקסימום; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוכלף.
- (3) $(0, 0)$ אוכלף; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ מינימום; $(1, 0)$ מקסימום; $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$ אוכלף.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום.
- (6) $(4, 4)$ מקסימום.
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום.
- (8) $z = 4$, $z = 3$
- (9) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (10) $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$ רווח מקסימלי 288\$.
- (11) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = -2$, $a = 2$, לא ניתן לדעת; $a > 2$, $a < -2$ אוכלף; $-2 < a < 2$ מינימום.

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 25 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז') 144

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות בשאלות 1-4, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$$

$$(2) \quad f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$(3) \quad f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13$$

$$(4) \quad f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6$$

$$(5) \quad \max \{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(6) \quad \max \{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \quad x, y \geq 0$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(7) \quad \text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12,$$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$(8) \quad \text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצאו את הנקודות}$$

שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן

מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$(9) \quad \text{מוישליה קונה בשוק } x \text{ ק"ג מלפפונים ו-} y \text{ ק"ג עגבניות.}$$

התועלת מצריכת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$.

מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,

והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.

נסחו ופתרו את בעיית מוישליה.

- 10** דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = xy$.
 מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
 לדני תקציב של 12 ש"ח.
 נסחו ופתרו את בעיית דני.
- 11** עקומת התמורה בין מנגו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$.
 לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$.
 דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) על עקומת התמורה,
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
 נסחו ופתרו את הבעיה.
- 12** ליצרון פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$.
 המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2, P_L = 1$.
 היצרון נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) ,
 המביא למינימום את העלות.
 נסחו את בעיית היצרון (אל תפתרו).

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (1)$$

$$\max(0, \pm 1) \quad \min(\pm 1, 0) \quad (2)$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3)$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad (4)$$

$$\max(6, 2) \quad (5)$$

$$\max(9, 36) \quad (6)$$

$$(6, 2) \quad (7)$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (8)$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad (9)$$

$$\max(6, 2) \quad (10)$$

$$\max(2, 3) \quad (11)$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (12)$$

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 26 - פונקציות הומוגניות-משפט אוילר

תוכן העניינים

147	1. פונקציות הומוגניות.....
150	2. משפט אוילר.....

פונקציות הומוגניות

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאיזה סדר :

$$f(x, y) = x^3 \sqrt{y} + y^3 \sqrt{x} \quad (1)$$

$$h(x, y) = \frac{\ln(e^{5x})}{\sqrt[3]{ex^6 - 7y^6}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \ln(4^x) \cdot g\left[\frac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right] \quad (3)$$

(4) נתון כי $z(x, y)$ פונקציה הומוגנית מסדר 3.

$$\text{בדקו האם הפונקציה } f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} + \frac{1}{z(x, y)} - 4 \text{ הומוגנית.}$$

במידה ואינה הומוגנית, השמיטו ממנה חלק, כך שתתקבל פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות של הפונקציה במקרה זה?

(5) מצאו עבור איזה ערך של הפרמטר α , כל אחת מהפונקציות הבאות הומוגניות. כמו כן, מצאו את סדר ההומוגניות עבור ה- α שנמצאה.

$$f(x, y) = \frac{x^4 y + xy^\alpha}{4x + 10y} \quad \text{א.}$$

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}} (\ln \alpha x - \ln y) \quad \text{ב.}$$

(6) בתרגיל זה נדגים את התכונה הבאה של פונקציות הומוגניות :
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n , אז אם נחלק אותה ב- x^n ,

$$\text{נקבל פונקציה של } \frac{y}{x}.$$

א. הדגימו את הטענה על הפונקציות הבאות :

$$1. f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$$

$$2. f(x, y) = \sqrt{x+y}$$

ב. הוכיחו את הטענה לעיל.

הערה

ניסוח פורמלי של הטענה לעיל הוא :

אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n , אז קיימת פונקציה $g(t)$, כך ש- $t = \frac{y}{x}$,

$$\text{המקיימת } \frac{f(x, y)}{x^n} = g(t).$$

(7) תהיינה f ו- g פונקציות ב- n משתנים, והומוגניות מסדר r_1 ו- r_2 , בהתאמה.
קבעו, לכל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא הומוגנית ומאיזה דרגה :

$$\text{א. } f \cdot g \quad \text{ב. } \frac{f}{g} \quad \text{ג. } \frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}} \quad \text{ד. } f + g$$

(8) נתון כי f פונקציה הומוגנית מסדר 4.

$$\text{ידוע כי } f(1, 2) = 4, \quad f_x(1, 2) = 10.$$

$$\text{חשבו את } f(2, 4), f(0.5, 1), f_x(2, 4), f_x(1.5, 3).$$

(9) נתונה פונקציה $f(x, y) = x^4 + y^2 z(x, y)$.

$$\text{ידוע כי } z \text{ פונקציה הומוגנית מסדר 2 וכי } f(4, 10) = 1.$$

$$\text{א. חשבו את } f(2, 5).$$

$$\text{ב. ידוע כי } f_x(1, 1) = 4.$$

$$\text{חשבו את } f_x(a, a), \text{ לכל קבוע } a.$$

תשובות סופיות

- (1) הומוגנית מסדר 3.5.
- (2) הומוגנית מסדר -1.
- (3) הומוגנית מסדר 1.
- (4) הפונקציה לא הומוגנית. על ידי השמטת חלקים מהפונקציה אפשר לקבל:
- $$f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{1}{z(x, y)} \quad \text{הומוגנית מסדר } -3.$$
- $$f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} \quad \text{הומוגנית מסדר } -2.$$
- $$f(x, y) = -4 \quad \text{הומוגנית מסדר } 0.$$
- (5) א. עבור $\alpha = 4$ הפונקציה הומוגנית מסדר 4. ב. הומוגנית מסדר 0 לכל $\alpha > 0$.
- (6) א. 1. $g(t) = 1 - t + 2t^2$ 2. $g(t) = \sqrt{1+t}$ ב. הוכחה.
- (7) א. הומוגנית מדרגה $r_1 + r_2$. ב. הומוגנית מדרגה $r_1 - r_2$.
- ג. הומוגנית מדרגה $2r_1 - \frac{r_2}{n}$.
- ד. הומוגנית מדרגה r_1 רק אם $r_1 = r_2$. אחרת לא הומוגנית.
- (8) $f_x(2, 4) = 80$, $f_x(1.5, 3) = 33.75$, $f(2, 4) = 64$, $f(0.5, 1) = \frac{1}{4}$
- (9) א. $f(2, 5) = \frac{1}{16}$ ב. $f_x(a, a) = 4a^3$

משפט אוילר

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$.

- א. הוכיחו שהפונקציה הומוגנית ומצאו את דרגתה.
ב. הראו שמשפט אוילר מתקיים.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נניח ש- $f = f(x, y)$ הומוגנית מסדר 0.

הוכיחו כי $\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y}{x}$.

ב. נתון כי $f(x, y) = \frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{(x-y)(\ln x - \ln y)}$.

הוכיחו כי $x \cdot f_x = -y \cdot f_y$.

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי פונקציית התועלת $u(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית.

הניחו כי m קבוע חיובי.

ב. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a, a) = u_y(1, 1)$.

ג. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2, 2) + u_y(1, 1) = 1$.

(4) תהי f פונקציה הומוגנית מסדר 2.

נגדיר $h(x, y) = x^2 - y^2 + f\left(\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x}\right)$.

א. הוכיחו כי h הומוגנית מסדר 2.

ב. נתון $f(8, 1) = 16$, $h'_x(6, 3) = 9$.

מצאו את $h(2, 1)$ ואת $h'_y(2, 1)$.

(5) g ו- h הינן פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאמה. נגדיר:

$$f(x, y) = (x + y)h(x, y) + \frac{\sqrt{g(x, y)}}{x^2 + y^2}$$

א. הוכיחו כי f הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון: $f'_y(1, 8) = 3$, $h(4, 32) = 16$, $f'_x(2, 16) = 12$,

מצאו את: $f(1, 8)$ ואת $g(1, 8)$.

(6) f הומוגנית מסדר 4, g הומוגנית מסדר 2 ו- h הומוגנית מסדר 0.

מגדירים את הפונקציה: $p(x, y) = f(x, y) + g(x, y) - h(x, y)$.

נתון: $f'_x(2, 4) = 64$, $f'_y(-1, -2) = -4$, $h\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{5}{2}$, $p(1, 2) = \frac{7}{2}$

חשבו את $g\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

(7) הפונקציה $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 3, והנתונים בשרטוט.

א. מצאו את שיעורי הנקודה B.

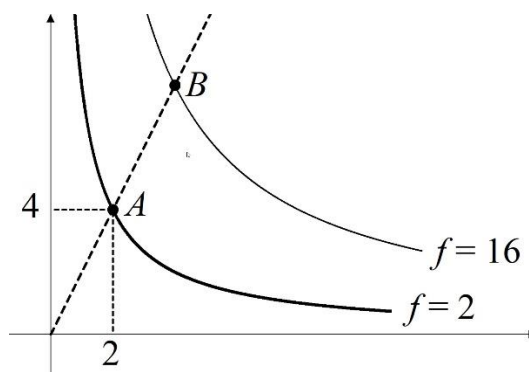
ב. מצאו את ערך הסכום $f_x(4, 8) + 2f_y(4, 8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x, y)$, על ידי $u(x, y) = (f(x, y))^2$.

1. לפי כללי הגזירה, מתקיים $u_x(x, y) = 2 \cdot f(x, y) \cdot f'_x(x, y)$.
הסבירו זאת בקצרה.

2. הוכיחו כי $x \cdot u_x(x, y) + y \cdot u_y(x, y) = 6(f(x, y))^2$.

היעזרו בתת-הסעיף הקודם ובנתונים על f .



(8) תהי $f(x, y)$ פונקציה הומוגנית מסדר m ,

המקיימת $f(6, 3) = 243$ ו- $f(2, 1) = 27$.

א. מצאו את סדר ההומוגניות m .

ב. בנקודה $(2, 1)$ עוברת עש"ע של f .

העבירו משיק לעש"ע בנקודה הנ"ל.

המשיק הוא $2x + 3y = 7$.

מצאו את $f_x(2, 1)$, $f_y(2, 1)$, $f_x(1, 0.5)$.

(9) תהי $g(t)$ פונקציה של משתנה אחד.

על הפונקציה g ידוע, כי $g'(8) = 2$, $g(1) = 3$, $g(4) = 5$.

המשתנה t תלוי במשתנים החיוביים (x, y) , כך: $t = \frac{4y}{x}$.

נגדיר תועלת u כפונקציה של המשתנים (x, y) , באופן הבא:

$$u(x, y) = g(t) = g\left(\frac{4y}{x}\right)$$

א. באיור שלהלן קרן עם שיפוע 1.

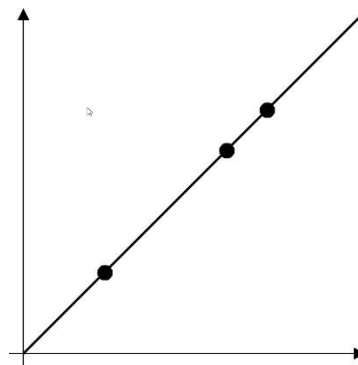
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?

ב. הוכיחו כי הקרן $4y - x = 0$ היא עקומת אדישות של התועלת.

ציירו את הקרן הזאת ורשמו באיור מה הערך של התועלת.

ג. הוכיחו כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכיחו כי $u_x(1, 2) = -16$.



(10) נניח ש- $f = f(x, y)$ הומוגנית מסדר 1.

הוכיחו כי $x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0$.

(11) מפעל מייצר x חולצות ו- y מכנסיים.

הרווח השולי, המתקבל מייצור כל אחד מהמוצרים, נתון על ידי :

$$f_x(x, y) = 4x + 8y, \quad f_y(x, y) = 8x + 20y$$

מצאו את פונקציית הרווח של המפעל, אם ידוע שפונקציה זו הומוגנית.

(12) לחברת 'מזון בריא' יש 300 מכונות :

x מכונות לייצור שוקולד ו- y מכונות לייצור גלידה.

ידוע כי התפוקה השולית, המתקבלת מייצור כל אחד מהמוצרים,

$$\text{נתונה על ידי } f_x(x, y) = 6x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}, \quad f_y(x, y) = 3x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$$

א. מצאו את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.

ב. מצאו כמה מכונות מכל סוג על המפעל להחזיק, כדי לקבל את התפוקה

הכוללת המקסימלית.

הערה: סעיף ב אינו קשור להומוגניות ועוסק בנושא "בעיות קיצון תחת אילוץ".

(13) בחברת 'שוקולד פנדה' בדקו ומצאו, כי התפוקה השולית, המתקבלת משימוש

ב- x טון סוכר ו- y טון קקאו, נתונה על ידי $f_x(x, y) = 3x^2y^2$, $f_y(x, y) = 2x^3y$.

מחירי המוצרים הם 6,000 ₪ לטון סוכר ו-4,000 ₪ לטון קקאו,

והתקציב לקניית המוצרים הוא 100,000 ₪.

א. מצאו את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.

ב. מצאו את כמות הסוכר והקקאו בהם מתקבלת תפוקה מקסימלית.

מהי התפוקה במקרה זה?

ג. כיצד תשתנה התשובה, אם מחירי הסוכר והקקאו יהיו שניהם 5,000 ₪

לטון?

הערה: סעיפים ב-ג אינם קשורים להומוגניות ועוסקים בנושא "בעיות קיצון תחת אילוץ".

(14) הוכיחו או הפריכו :

א. אם $f_x(x, y)$ הומוגנית מסדר 4, אז $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 5.

ב. אם פונקציה $f(x, y)$ מקיימת $f(2, 4) = 2^3 f(1, 2)$,

אז הפונקציה הומוגנית מסדר 3.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) א. שאלת הוכחה. ב. $h(2,1) = 4$ $h'_y(2,1) = 8$
- (5) א. שאלת הוכחה. ב. $g(1,8) = 0$, $f(1,8) = 9$
- (6) $-\frac{3}{4}$
- (7) א. $B(4,8)$ ב. 12 ג. הוכחה והסבר.
- (8) א. 2 ב. $f_x(1,0.5) = \frac{54}{7}$, $f_y(2,1) = \frac{3\left(\frac{108}{7}\right)}{2}$, $f_x(2,1) = \frac{108}{7}$
- (9) א. 5 ב-ד. שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) $f(x, y) = 2x^2 + 8xy + 10y^2$
- (12) א. $f(x, y) = 9x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ ב. על המפעל להחזיק 200 מכונות לייצור שוקולד ו-100 מכונות לייצור גלידה, כדי לקבל תפוקה מקסימלית.
- (13) א. $f(x, y) = x^3y^2$ ב. אם המפעל ישתמש ב-10 טון סוכר ו-10 טון קקאו, הוא יקבל תפוקה מקסימלית השווה ל- $f(10,10) = 10^3 10^2 = 100000$ חפיסות שוקולד.
- ג. התשובה לא תשתנה.
- (14) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 27 - פתרון בחינות לדוגמא בר אילן

תוכן העניינים

1. סמסטר ב מועד א תשסח (ללא ספר)
2. סמסטר ב מועד ב תשסח (ללא ספר)
3. סמסטר ב מועד א תשסט (ללא ספר)
4. סמסטר ב מועד ב תשסט (ללא ספר)