

מתמטיקה לכלכלנים א



תוכן העניינים

1	הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות
27	גבול של פונקציה
45	רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים
60	הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות
73	חישוב נגזרת של פונקציה
86	חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות
90	משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי
101	כלל לופיטל
107	חקירת פונקציה
136	מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה
141	בעיות מקסימום ומינימום כלכליות
147	הוכחות של משפטים נבחרים בקורס
149	טור הנדסי וטור חשבוני
169	משוואות אלגבריות
191	חוקי החזקות והשורשים
201	בעיות גדילה ודעיכה
214	מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומאליות
231	משוואות ואי-שוויונים מעריכיים
241	חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 1 - הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה (ללא ספר)
8. תחום הגדרה של פונקציה 1
9. הרכבת פונקציות 3
10. הפונקציה ההפוכה 6
11. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית 10
12. פונקציה מפוצלת 12
13. תרגילים משולבים 13
14. מבוא לתורת הקבוצות 17

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$(1) \quad y = x^3 - x^2 - 4x + 1$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$(3) \quad y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1}$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x^3 - x}$$

$$(5) \quad y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$$

$$(6) \quad y = \sqrt{x - 4}$$

$$(7) \quad y = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

$$(8) \quad y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$$

$$(9) \quad y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}}$$

$$(10) \quad y = \ln(x^2 + x - 2)$$

$$(11) \quad y = \log x + \frac{1}{\log x}$$

$$(12) \quad y = e^{x^2 + x + 1}$$

$$y = \log_x (x + 4) \quad (13)$$

תשובות סופיות

- (1) כל x .
- (2) $x \neq \pm 2$
- (3) כל x .
- (4) $x \neq 0, 1, -1$
- (5) $x \neq 2, -1$
- (6) $x \geq 4$
- (7) $x \leq -2, x \geq 1$
- (8) כל x .
- (9) $-1 < x < 1$
- (10) $x < -2, x > 1$
- (11) $x > 0, x \neq 1$
- (12) כל x .
- (13) $x > 0, x \neq 1$

הרכבת פונקציות

שאלות

(1) נתונות הפונקציות $h(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$
 ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

(2) נתון $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו את $f(f(x))$ עבור $x=3$.

(3) נתון $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$, $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו את $f(g(x)) + g(f(x))$ עבור $x=8$.

(4) נתון $f(x) = x^2 - 7x$, $g(x) = \ln x$

חשבו את $f(g(x))$ עבור $x = e^2$.

(5) נתון $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \ln x$

חשבו את $f(g(x))$ עבור $x=2$.

(6) נתון $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו את $f(g(x))$, $g(f(x))$

נתונות הפונקציות

א. $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$ ב. $g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x) = g(f(x))$.

8) נתונות הפונקציות

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x) = f(g(x))$.

ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$ ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

1. $n \leq -3$

2. $n \geq 1$

3. n אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

9) נתון $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

מצאו את $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ Times}}$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad 69/13$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$(6) \quad f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(7) \quad z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(8) \quad \text{א. } -\sqrt{3} \leq x < 1 \quad \text{ב. } n \leq -3 \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(9) \quad f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בשאלות 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בשאלות 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \quad \text{נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}.$$

האם הפונקציה היא חח"ע?
מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3}; \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x}; \quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2}; \quad f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = x^2 - 4; \quad f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ד.}$$

13 עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ב. $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$ $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ג. $f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1]$ $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

14 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$. תהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. הוכיחו או הפריכו:

- אם f ו- g חח"ע אז h חח"ע.
- אם f ו- g חח"ע אז h על.
- אם f ו- g על אז h על.
- אם f ו- g על אז h חח"ע.
- אם f חח"ע ו- g על אז h חח"ע.
- אם f חח"ע ו- g על אז h על.
- אם f על ו- g חח"ע אז h חח"ע.
- אם f על ו- g חח"ע אז h על.

15 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$. תהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. נתון כי h על. הוכיחו או הפריכו:

- f חח"ע.
- f על.
- g חח"ע.
- g על.

16) תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$.

תהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$.

נתון כי h חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

א. g על.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. f חח"ע.

תשובות סופיות

- (1) $f^{-1}(x) = 3x + 1$, כל y .
- (2) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$, $y \neq 1$.
- (3) $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$, $y \neq 3$.
- (4) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$, $y \geq -4$.
- (5) לא חח"ע. תמונה: $y \leq -2$ או $y \geq 2$.
- (6) לא חח"ע. תמונה: $y \geq -\frac{1}{4}$.
- (7) לא חח"ע. תמונה: $0 \leq y \leq 1$.
- (8) כן חח"ע. תמונה: $y > 0$. פונקציה הפוכה: $x > 0$, $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
- (9) לא חח"ע. תמונה: $y \geq 2.3$ או $y \leq -1.3$.
- (10) כן חח"ע. תמונה: $y \neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$.
- (11) לא חח"ע. תמונה: $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$.
- (12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: $\mathbb{R}$; על.
 ב. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; לא על.
 ג. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; על.
 ד. תחום הגדרה $[0, \infty)$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $[-4, \infty)$; לא על.
- (13) א. תחום הגדרה וטווח: $\mathbb{R}$, תמונה: $(0, 1]$; לא על.
 ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}$, טווח ותמונה: $(0, 1]$; על.
 ג. תחום הגדרה $(1, \infty]$, טווח $(0, 1]$, תמונה: $(0, 0.5)$; לא על.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.

פונקציה זוגית ואי זוגית

שאלות

מצאו איזה מבין הפונקציות בשאלות 1-6 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$(1) \quad y = 4x^3 \quad (2) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (3) \quad y = 1$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x} \quad (5) \quad y = 2^x \quad (6) \quad y = \ln x + x^2$$

(7) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{ונסמן } k(x) = -f(x), \quad z(x) = f(x^2).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(8) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, פונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{ונסמן } z(x) = -f(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.

טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, פונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{ונסמן } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), \quad z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית

ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

תשובות סופיות

שאלות 1-6: זוגית: 2,3; אי-זוגית: 1,4; כללית: 5,6.

(7) k אי-זוגית, z זוגית.

(8) טענה ב'.

(9) k אי-זוגית, z זוגית.

(10) שאלת הוכחה.

פונקציה מפוצלת

שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשבו $f(1)$, $f(4)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(7)$.

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

תשובות סופיות

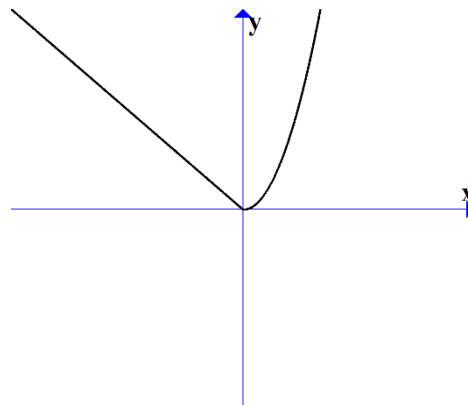
$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

(5) א. $f(1)=1$, $f(4)=16$, $f(-4)=4$, $f(0)=0$, $f(7)=\text{undefind}$
 ב. ג. כללית.



תרגילים משולבים

שאלות

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על $\mathbb{R}$.

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על $\mathbb{R}$.

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ג': $h(x) = k(x)z(x)$ זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות, $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$.

נתון ש- f מונוטונית עולה ממש, ואילו g מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

איזו טענה נכונה?

א. h יורדת חלש.

ב. h עולה ממש.

ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד. h אינה חסומה בהכרח.

$$(5) \text{ נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

א. מצאו את h בקטע $[-2,0)$.

ב. קבעו האם h חח"ע בקטע $[-2,0)$.

ג. קבעו האם h חסומה בקטע $[-2,0)$.

ד. קבעו האם $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$ היא על.

* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

(6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x) = x^3$, $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

$$\text{הפונקציה } h(x) = f(g(x)) \text{ היא:}$$

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x) = x^3$, $g(x) = -\lfloor x \rfloor$.

א. בדקו את מונוטוניות $z(x) = f(g(x))$.

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x) = g(f(x))$.

ג. בדקו האם $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$ אז הפונקציה f יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$:
 $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחח"ע.

9 מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

קבעו את תחום הגדרתה והוכיחו שהפונקציה על $\mathbb{R}$.
 הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א. $h(x) = x^2$ ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
- ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; תחום הגדרתה: כל x .
- (10) ראו באתר.
- (11) א. $-1 \leq x \leq 2$ ב. $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ ג. שאלת הוכחה.
- ד. $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2} < x \leq 2$ ירידה.

מבוא לתורת הקבוצות

סיכום כללי

הגדרות יסודיות

- גרירה חד כיוונית $A \Rightarrow B$ פירושו: אם A מתקיים, אז גם B מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית $A \Leftrightarrow B$ (אם ורק אם). פירושו: $A \Rightarrow B$ וגם $B \Rightarrow A$.
- הסימן 'או' $\vee$.
- הסימן 'וגם' $\wedge$.

קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
 - על מנת לציין שהאיבר a שייך לקבוצה A נרשום $a \in A$.
 - על מנת לציין שהאיבר a אינו שייך לקבוצה A נרשום $a \notin A$.

שוויון בין קבוצות

- שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.
- פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא: $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

הקבוצה ריקה

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב- $\emptyset$, כלומר $\emptyset = \{ \}$.

קבוצה סופית ואינסופית

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.

עוצמה של קבוצה

מספר האיברים של קבוצה A נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן $|A|$.

תת-קבוצה

אם קבוצה A מוכלת בקבוצה B , נסמן $A \subseteq B$.

תמיד מתקיים:

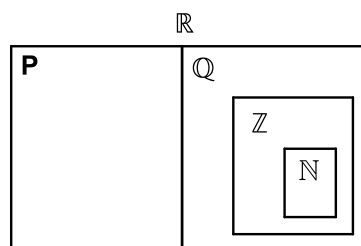
$$A \subseteq A$$

$$\emptyset \subseteq A$$

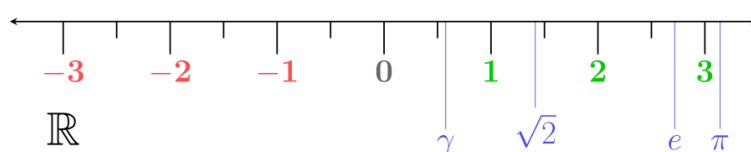
עבור שוויון קבוצות נדרוש $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ או $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

קבוצות מספרים מיוחדות

- קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$.
- קבוצת המספרים הרציונאליים: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$.
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט $\mathbb{P}$).
- קבוצת המספרים הממשיים: $\mathbb{R}$ (כוללת את $\mathbb{Q}$ ואת $\mathbb{P}$).

**ציר המספרים**

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:



קטעים על ציר המספרים

סימון קטעים	סימון קבוצות	תיאור מילולי
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	הקטע הפתוח מ- a ל- b לא כולל נקודות הקצה
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	הקטע הסגור מ- a ל- b וכולל נקודות קצה
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את a ולא את b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את b ולא את a
(a, ∞)	$\{x \mid a < x < \infty\}$	הקרן הפתוחה מ- a עד ∞ ללא a
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x < \infty\}$	הקרן הסגורה מ- a עד ∞ כולל a
$(-\infty, b)$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	הקרן הפתוחה מ- $-\infty$ עד b ללא b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid -\infty < x \leq b\}$	הקרן הסגורה מ- $-\infty$ עד b כולל b

קבוצת החזקה של קבוצה נתונה

קבוצת כל תתי-הקבוצות של A , נקראת קבוצת החזקה של A , ומסומנת $P(A)$.

איחוד וחיתוך קבוצות

- איחוד קבוצות A ו- B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת $A \cup B$.
- חיתוך קבוצות A ו- B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת $A \cap B$.

תכונות החיתוך	תכונות האיחוד
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
	$A \subseteq A \cup B$

הדיסטריביוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

הפרש קבוצות

ההפרש של שתי קבוצות A ו- B , המסומן $A - B$, הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי A שאינם איברי B , כלומר $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

משלים של קבוצה

ההפרש $U - A$ מסומן ב- A^c או ב- A' ונקרא **המשלים** של A , כאשר U היא הקבוצה האוניברסלית.

כללי דה-מורגן

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \bullet$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \bullet$$

דיאגרמת וון

תיאור גרפי של קבוצות והיחסים ביניהן.

שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y: (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y: (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ (k ו- n טבעיים).

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x .

ג. לכל מספר טבעי n , המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x , $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה: $A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$.

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב. $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד. $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה. $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5 \in A$ ב. $2 \in A$ ג. $\{2\} \in A$

ד. $\{2\} \subseteq A$ ה. $\{\{2\}\} \subseteq A$ ו. $\emptyset \in A$

ז. $\emptyset \subseteq A$ ח. $\{2, \{2\}\} \subseteq A$ ט. $\{2, 4\} \subseteq A$

י. $\{2, 4\} \in A$ יא. $\{\{2, 4\}\} \in A$ יב. $\{2, 5\} \subseteq A$

יג. $\{2, 5\} \in A$ יד. $\{1, 4\} \in A$

7) מצאו שתי קבוצות, A ו- B , המקיימות:

א. $A \in B$

ב. $A \subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}, E = \{7, 8\}$$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X :

א. $X \subseteq A$ וגם $X \not\subseteq D$

ב. $X \subseteq D$ וגם $X \not\subseteq C$

ג. $X \subseteq E$ וגם $X \not\subseteq A$

9) הוכיחו: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

10 נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

א. $A \cup B$ ב. $A \cap B$ ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$ ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

11 נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \mid 2^x = 0\}$$

רשמו את :

א. $A \cup B$ ב. $A \cap B$ ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$ ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

12 נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשבו את $(A - B) - C$.

ב. חשבו את $A - (B - C)$.

13 נתון : $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$, $A = \{12, 15, 18\}$, $B = \{13, 15, 17\}$

הדגימו את כלל דה מורגן $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

14 הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.**15** מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות :

א. $A = [1, \infty)$

ב. $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

16 הציגו באמצעות דיאגרמת וון את הקבוצות הבאות :

- א. $A \cap B$ ב. $A \cup B$
 ג. A^c ד. $A \cap B^c$
 ה. $A^c \cap B$ ו. $A \cup B^c$
 ז. $A^c \cup B$ ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$
 ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

17 ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו כי $A \setminus B = A \cap B^c$.
 הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת וון.
 ב. נסמן: $X = C \setminus (A \cap B)$, $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
 הוכיחו כי $X = Y$.
 ג. נסמן: $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
 הוכיחו כי $X = Y$.

18 תהיינה X, Y, Z קבוצות כלשהן.

- טענה א': $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$.
 טענה ב': $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$.
 טענה ג': $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup Z$.
 איזו טענה נכונה לכל בחירה של X, Y, Z ?

19 נתונה הקבוצה $A = \{\emptyset, 4, \{4\}\}$.

רשמו את $P(A)$.

20 הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית :

- א. לכל קבוצה A מתקיים $A \subseteq P(A)$.
 ב. לכל קבוצה A מתקיים $A \not\subseteq P(A)$.

21 הוכיחו כי: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$.

תשובות סופיות

- (1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.
 ב. לכל x קיים y , כך ש- $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.
 ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz = \frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.
 ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.
 ה. לכל n טבעי המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א. $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$ ב. $\forall x: x^2 + 4 > 0$
 ג. $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$ ד. $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א. $A = (-4, 4)$, בקבוצה אינסוף איברים.
 ב. $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, בקבוצה 7 איברים.
 ג. $C = \{1, 2, 3\}$, בקבוצה 3 איברים.
 ד. $D = \{-3, -2, -1, 0\}$, בקבוצה 4 איברים.
 ה. $E = \{0, 1\}$, בקבוצה 2 איברים.
 ו. $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, בקבוצה 9 איברים.
- (4) א. $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$ ב. $B = \{11, 13, 17, 19\}$
 ג. $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ ד. $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7) $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א. A, C ב. E, D ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.

$$A \cap B = \{4, 6, 8\} \quad \text{ב.} \quad A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{א. (10)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\} \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\} \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\} \quad \text{ה.}$$

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{ב.} \quad A \cup B = (-2, 4) \quad \text{א. (11)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1) \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = (0, 4) \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1) \quad \text{ה.}$$

$$\{4, 5, 6\} \quad \text{ב.} \quad \emptyset \quad \text{א. (12)}$$

(13) ללא פתרון.

(14) שאלת הוכחה.

$$C^c = [1, 4] \quad \text{ג.} \quad B^c = [1, 4] \quad \text{ב.} \quad A^c = (-\infty, 1) \quad \text{א. (15)}$$

$$D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4] \quad \text{ד.}$$

(16) ראו סרטון.

(17) שאלת הוכחה.

(18) טענה ב.

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{4\}, \{\{4\}\}, \{\emptyset, 4\}, \{4, \{4\}\}, \{\emptyset, \{4\}\}, \{\emptyset, 4, \{4\}\}\} \quad \text{(19)}$$

(20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 2 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי	(ללא ספר)
2. הצבה	27
3. צמצום	28
4. הכפלה בצמוד	29
5. גבולות טריגונומטריים	30
6. פונקציה שואפת לאינסוף	33
7. איקס שואף לאינסוף	34
8. הגבול של אוילר	36
9. כלל הסנדויץ	37
10. גבול של פונקציה מפוצלת	39
11. גבול לפי הגדרה	42

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים :

א. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

תשובות סופיות

-3 (5)	$n-1$ (4)	6 (3)	$\frac{10}{8.5}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\frac{1}{5}$ (10)	$\frac{8}{17}$ (9)	27 (8)	3 (7)	32 (6)

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x - 6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x - 4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} + x - 1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

גבולות טריגונומטריים

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1 - x)}{x^2 - 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x} \quad (17)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{2}$ (5	$\frac{1}{2}$ (4	$\frac{1}{2}$ (3	$\frac{3}{4}$ (2	$\frac{3}{4}$ (1
	$\frac{1}{4}$ (9	4 (8	$\frac{1}{8}$ (7	$\frac{1}{2}$ (6
$\frac{1}{\cos^2 a}$ (13	$-\sin a$ (12	$\cos a$ (11	$-\frac{1}{2}$ (10	
1 (17	$\frac{2}{\pi}$ (16	$\frac{1}{2}$ (15	$\frac{4}{10}$ (14	$-\frac{1}{12}$ (18

זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\ \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \\ \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a \end{cases}$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

תשובות סופיות

ϕ (4)	$-\infty$ (3)	ϕ (2)	ϕ (1)
ϕ (8)	∞ (7)	∞ (6)	$-\infty$ (5)
$-\infty$ (12)	ϕ (11)	1 (10)	0 (9)
			$-\infty$ (13)

X שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x] \quad (29)$$

תשובות סופיות

$-\infty$ (4	4 (3	$-\frac{\pi}{2}$ (2	0 (1
-1 (8	1 (7	-5 (6	0 (5
$\frac{1}{4}$ (12	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11	1.5 (10	-3 (9
2 (16	$\frac{1}{9}$ (15	4 (14	0 (13
	0 (19	$e^{\frac{1}{3}}$ (18	$\ln 3$ (17
(20) אם $b \neq 0$: $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$. אם $b = 0, a > 0$: ∞ . אם $b = 0, a < 0$: $-\infty$.			
$-\frac{1}{2}$ (24	$\frac{1}{2}$ (23	$\frac{k}{2}$ (22	2.5 (21
$\frac{5}{4}$ (28	$\frac{3^4}{2^{10}}$ (27	$\frac{a-b}{2}$ (26	$\frac{1}{2}$ (25
			$\ln(6e)$ (29

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$e^3 \quad (5)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$e^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$e \quad (9)$$

$$e^{30} \quad (8)$$

$$e^{-12} \quad (7)$$

$$e \quad (6)$$

כלל הסנדוויץ'

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-10 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

$$(11) \text{ נתונה פונקציה } z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4,$$

ונתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$, לכל x .

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)), \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x}$$

$$(12) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

(13) ענו על הסעיפים הבאים :

$$\text{א. הוכח: } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$$

$$\text{ב. האם נכונה גם הטענה: } \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm 1$$

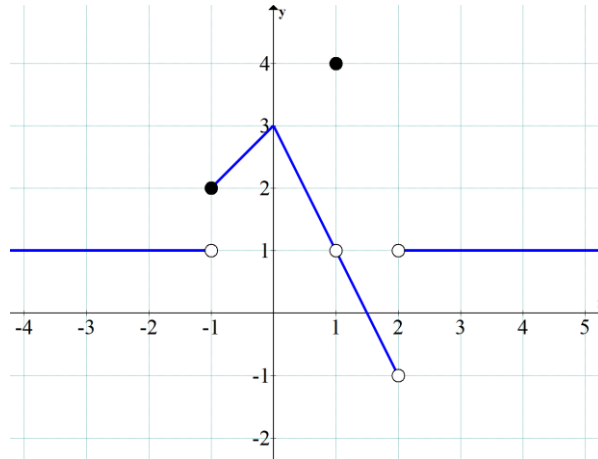
תשובות סופיות

- 0 (5 3 (4 $\frac{3}{4}$ (3 0 (2 0 (1
- 0 (10 1 (9 4 (8 $\frac{3}{4}$ (7 0 (6
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16$ (11
- $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) = \tan 4$
- 0 (12
- (13 א. שאלת הוכחה. ב. לא.

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

א. $1. \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ $2. \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ $3. \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ב. $1. \lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2)$ $2. \lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2)$

ג. $1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4-f}$ $2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-f}$

$$2) \text{ נגדיר פונקציה } f(x) : f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 1 - x^2 & 0 < x < 2 \\ 1.5x - 6 & x \geq 2 \end{cases}$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim_{x \rightarrow 2} [4(f(x))^2 + 10f(x)]$.

$$(3) \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x) : \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ \cos x & 0 < x < \pi \\ -0.5 & x \geq \pi \end{cases}$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim_{x \rightarrow \pi} [2(f(x))^2 + 3f(x)]$.

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

$$(4) \quad (a=0), f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases}$$

$$(5) \quad (a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases}$$

$$(6) \quad (a=0), f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$(7) \quad (a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$(8) \quad (a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$(9) \quad \text{א. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2}$$

$$\text{ב. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2}$$

תשובות סופיות

- (1) א. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, 2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \cancel{\exists}$, 3. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \cancel{\exists}$
 ב. $\lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) = 2$, 2. $\lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) = 2$
 ג. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4 - f(x)} = \frac{1}{3}$, 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - f(x)} = \cancel{\exists}$
- (2) א. ראו בסרטון. ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$ ג. 6
- (3) א. ראו בסרטון. ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\cancel{\exists} \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ ג. -1
- (4) 4
- (5) ϕ
- (6) ϕ
- (7) 1
- (8) -1
- (9) א. אין גבול. ב. $\frac{1}{6}$

גבול לפי הגדרה

שאלות

בשאלות 1-6, על פי הגדרת הגבול, הוכיחו:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(7) \quad \text{חשבו, על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

הוכיחו על פי הגדרת הגבול את מקרים 8-11:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1} = 3 \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-4x}{2x+1} = -2 \quad (10)$$

$$(12) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכיחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x > M$ מתקיים $f(x) < -4$.

$$(13) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכיחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x > M$ מתקיים $f^2(x) > 16$.

$$(14) \quad \text{נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{הוכיחו שמתקיים } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1 \quad \text{נתון הגבול}$$

מצאו ערך של $M > 0$, עבורו לכל $x > M$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול

עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצאו M , כך ש- $|f(x) - L| < 0.1$).

$$(16) \quad \text{נגדיר את הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Z} \end{cases}$$

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$(17) \quad \text{בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2}, \text{ מצאו } \delta > 0, \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } |x-1| < \delta, \text{ אי-השוויון } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100} \text{ מתקיים.}$$

(18) הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L, \text{ אז : הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L.$$

$$\text{ד. אם הגבולות } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

$$(19) \quad \text{יש להוכיח כי } 1 \neq \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(20) \quad \text{יש להוכיח כי } 1 \neq \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1}{x+10} \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(21) \quad \text{הוכיחו שאם } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3, \text{ אז קיימת סביבה נקובה של 0 שבה } f(x) > 2.$$

(22) הוכיחו שאם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > L$, אז קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה $f(x) > L$.

(23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$.

ב. האם נכונה גם הטענה: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |k|$: $(k \neq 0)$.

תשובות סופיות

(7) $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר: GOOL.co.il

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 3 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

45	1. רציפות של פונקציה
52	2. משפט ערך הביניים
56	3. תכונות נוספות של פונקציות רציפות
59	4. שיטת החצייה

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות 1-6: בדקו את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר" ¹ שלהן, ובשאלות 1 ו-2, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 3-6: רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא. בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות 8-11: מה צריך להיות הערך הקבוע של k , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלה 11 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

¹ נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות 12-15: מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (12)$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^x - 2}{2^x + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (15)$$

הערה: שאלות 14-15 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

16) הוכיחו או הפריכו:

- א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

(17) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f+g$ רציפה? הוכיחו זאת.

(18) תהי $f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי $g(x) = x + \frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x .

האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x ?

(19) תהי f פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.

תהי g הפונקציה המוגדרת בקטע $(0,2)$, על ידי $g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

א. האם ניתן שהנקודה $x_0 = 1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g ? נמקו.

ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.

(20) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y) = f(x)f(y)$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.

הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

(21) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y) = [f(x)f(y)]^2$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.

הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

(22) נתונה הפונקציה $f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f חסומה לכל x .

ב. הפונקציה f רציפה לכל x .

ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x .

ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x .

(23) ענו על הסעיפים הבאים :

א. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x = 0$.

ב. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq \sin x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

(24) הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל x .

ידוע כי עבור $x \neq \pm 1$, $f(x)$ נתונה על ידי הנוסחה $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$.

מצאו את הנוסחה של $f(x)$ לכל x .

(25) הפונקציות $f(x)$ ו- $3g(x) + 2f(x)$ רציפות לכל x .

הוכיחו שהפונקציה $|f(x) - g(x)|$ רציפה לכל x .

(26) תהי $f(x)$ מוגדרת לכל x ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)(1-f(x))] = 0$.

א. הוכיחו או הפריכו: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ או $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

(27) תהי f מוגדרת לכל x .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. אם $f(\sin x)$ רציפה לכל x , אז f רציפה לכל x .

ב. אם $\sin(f(x))$ רציפה לכל x , אז f רציפה לכל x .

ג. אם לכל x_0 מתקיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$, אזי $f(x) = 4$ לכל x .

כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי f רציפה לכל x ?

(28) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$1. \min\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) - |x-y|]$$

$$2. \max\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) + |x-y|]$$

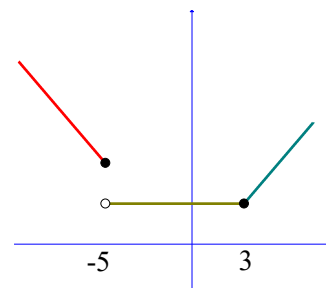
ב. הוכיחו כי אם f, g רציפות ב- $\mathbb{R}$ אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב- $\mathbb{R}$:

$$1. z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

$$2. z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.
- (4) רציפה בנקודות $x=0,1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.
- (5) לא רציפה.
- (6) לא רציפה.
- (7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.
- (8) $k=1$
- (9) $k=4$
- (10) $k=\frac{2}{3}$
- (11) $k=-1$
- (12) $a=0, b=\frac{1}{2}$
- (13) $a=2, b=1$ או $a=1, b=2$
- (14) $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (15) $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל $x \neq -5$. ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (19) א. לא. ב. כן.
- (20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

(23) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & x = -1 \\ \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x \neq \pm 1 \\ \pi & x = 1 \end{cases} \quad \textbf{(24)}$$

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

משפט ערך הביניים

שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

$$(1) \quad x^3 + 4x - 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 = -\ln x$$

$$(3) \quad x - 0.25 \sin x = 7$$

$$(4) \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

בשאלות 5-6 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

$$(5) \quad e^x - 5x = 0$$

$$(6) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי f פונקציה רציפה לכל x , המקיימת: $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

הוכיחו שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow [-4, 4]$ פונקציה רציפה.

הוכיחו שלמשוואה $2x + f(x) = 1$ יש לפחות פתרון אחד.

(8) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

בו למשוואה $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$ יש פתרון.

$$(9) \quad \text{נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}.$$

א. חשבו את $f(0)$, $f(2)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$

יש פתרון בקטע $(0, 2)$?

10 תהיינה f, g פונקציות רציפות ב- $[a, b]$ המקיימות $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$. הוכיחו שקיימת נקודה $a < c < b$ שבה $f(c) = g(c)$.

11 נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$ שהוא חלקי לתחום הגדרתה. נניח ש- $f([a, b]) \subseteq [a, b]$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [a, b]$ כך ש- $f(c) = c$.
נקודה c כנ"ל נקראת "נקודת שִׁבְת" של הפונקציה.

12 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [0, 1]$ כך ש- $f(c) = c^{1.5}$.

13 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = f(1)$.
א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [0, 0.5]$ כך ש- $f(c) = f(c + 0.5)$.
ב. הוכיחו כי קיימות נקודות $c, d \in [0, 1]$ כך ש- $f(c) = f(d)$.

14 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) < f(2) < f(1)$.
הוכיחו כי קיימים $c_1, c_2 \in [0, 2]$ כך ש- $f(c_1) = f(c_2)$.

15 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = f(8)$.
הוכיחו כי קיימות נקודות $c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0, 8]$ כך ש-
 $f(c_1) = f(c_2), f(c_3) = f(c_4)$.

16 הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x + \sin x$ היא על $\mathbb{R}$.

17 הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x \cdot \sin x$ היא על $\mathbb{R}$.

18 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור 2π .
הוכיחו שקיים $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש- $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$.

19 יהיו $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$ קבועים המקיימים $a_1 + \dots + a_n = 1$.
הוכיחו כי למשוואה $|x - a_1| + \dots + |x - a_n| = \frac{n}{2}$ יש לפחות פתרון אחד.

(20) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ורציפה.

הוכיחו כי f עולה ממש או יורדת ממש.

ב. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ פונקציה חח"ע ועל.

הוכיחו כי f לא רציפה ב- $\mathbb{R}$.

(21) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ פונקציה רציפה.

הוכיחו כי קיימים אינסוף ערכים של x , שעבורם $f(x) = \sin x$.

(22) יהי P פולינום ממעלה זוגית, מהצורה $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$,

ונניח כי $a_0 < 0$.

הוכיחו כי ל- P ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

(23) יהיו f, g פונקציות רציפות המקיימות :

$$0 < k \in \mathbb{R} \text{ כאשר } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -k, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = k$$

הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x) = g(x)$.

(24) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) , ותהיינה $x_1, \dots, x_n$ (כאשר $n > 1$)

נקודות כלשהן ב- (a, b) .

הוכיחו שקיימת נקודה c בקטע (a, b) , כך ש-

$$f(c) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

ב. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) .

האם לכל $c \in (a, b)$, ניתן למצוא נקודות $x_1, \dots, x_n$, שונות זו מזו,

$$\text{כאשר } n > 1, \text{ כך ש- } f(c) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n)) ?$$

הוכיחו זאת.

(25) תהי f פונקציה רציפה בקטע פתוח (a, b) .

$$\text{נניח כי: } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$$

הראו כי תמונת הקטע (a, b) היא $\mathbb{R}$.

(26) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(0) = -1$, $f(1) = 4$.

תהי $S = \{x \in [0,1] \mid f(x) = 0\}$.

א. הוכיחו ש- S לא ריקה.

ב. הוכיחו שלקבוצה S יש חסם עליון, שנסמנו α .

ג. הוכיחו כי $\alpha \in (0,1]$.

ד. הוכיחו כי $f(\alpha) = 0$.

(27) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, כך ש- $f(a) = f(b)$.

הוכיחו שקיימים $a < x_1 < x_2 < b$, כך ש- $f(x_1) = f(x_2)$.

(28) תהי $z(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ויהי $0 \leq r \leq 1$.

הוכיחו שיש c בקטע, עבורו מתקיים $z(c) = rz(a) + (1-r)z(b)$.

(29) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי למשוואה $A \sin x + B \cos x = C \sin 2x$ יש פתרון.

ב. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(0) > 0$, $f(4) > 2f(2)$.

הוכיחו שקיים c כך ש- $f(2c) = 2f(c)$.

ג. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

הוכיחו שקיים a כך ש- $f(a) = \frac{1}{a}$.

(30) פונקציה f מוגדרת לכל x .

לפונקציה יש את התכונה הבאה:

כל ערך ממשי מתקבל על ידי הפונקציה בדיוק פעמיים.

הוכיחו כי הפונקציה אינה יכולה להיות רציפה.

תשובות סופיות

(8) $[0,1]$

(9) א. $f(0) = -1$, $f(2) = 5$. ב. לא.

שאלות 1-7 ושאלות 10-30 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

תכונות נוספות של פונקציות רציפות

שאלות

- 1 קבעו בכל סעיף האם הטענה נכונה או לא נכונה, והוכיחו זאת.
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$, שהיא :
 - א. חח"ע, אבל לא מונוטונית.
 - ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
 - ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
 - ד. חסומה, אבל לא רציפה.
 - ה. רציפה, אבל לא חסומה.
 - ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
 - ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
 - ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
 - ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
 - י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
 - יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע $[0,1]$, על ידי f , היא קטע.
- 2 תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(x) > 0$ לכל $x \in [a,b]$.
הוכיחו שקיים $\alpha > 0$, כך ש- $f(x) \geq \alpha$ לכל $x \in [a,b]$.
- 3 תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונניח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים.
הוכיחו ש- f חסומה.
- 4 יהיו $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות רציפות. נתון שלכל שתי נקודות x_1, x_2 , המקיימות $x_1 < x_2$, קיימת נקודה x_3 ש- $x_1 < x_3 < x_2$, שעבורה $f(x_3) = g(x_3)$.
הוכיחו כי $f(x) = g(x)$ לכל x .
- 5 תהי $f: [0,1] \rightarrow (0,1)$ פונקציה על.
הוכיחו ש- f לא רציפה ב- $[0,1]$.
- 6 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שמקיימת $f(x) = f(x^2)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
הוכיחו ש- f פונקציה קבועה.

(7) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שמקיימת $f(x+y) = f(x) + f(y)$, לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

הוכיחו כי $f(x) = f(1)x$, לכל $x \in \mathbb{R}$.

(8) תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a, b) , ונניח שקיים קבוע ממשי K , כך שלכל שתי נקודות, x_1 ו- x_2 , בקטע (a, b) , מתקיים תנאי ליפשיץ:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$$

הוכיחו כי $f(x)$ רציפה בקטע (a, b) .

* נסו להוכיח בשתי דרכים שונות.

(9) הוכיחו שלכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת מינימום מוחלט. באריכות:

הוכיחו שאם f פולינום ממעלה זוגית, אז קיימת נקודה $x_0 \in \mathbb{R}$, כך ש- $f(x) \geq f(x_0)$, לכל $x \in \mathbb{R}$.

(10) בסעיפים א ו-ב הוכיחו:

א. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של רציונליים שמתכנסת אליו.

ב. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של אי-רציונליים שמתכנסת אליו.

ג. תהי $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$.

הערה: פונקציה זאת נקראת פונקציית דיריכלה.

(11) הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f(x)$ רציפה בנקודה c , אז $|f(x)|$ רציפה בנקודה c .

ב. אם $|f(x)|$ רציפה בנקודה c , אז $f(x)$ רציפה בנקודה c .

בשאלות 12-13 הוכיחו:

(12) אם f רציפה ב- x_0 , אז קיימת סביבה של x_0 , בה f חסומה.

(13) אם f רציפה ב- x_0 , ואם $f(x_0) > 0$, אז קיימת סביבה של x_0 , שבה $f(x) > 0$.

14 יהיו $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $f(a) \neq g(a)$, עבור a ממשי מסוים. הראו שקיימת סביבה של a , שבה $f(x) \neq g(x)$.

הערה

תרגיל זה מכיל בתוכו גם את הטענה הבאה:
תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $f(a) \neq 0$, עבור a ממשי מסוים. הראו שקיימת סביבה של a , שבה $f(x) \neq 0$.
פשוט לקחנו $g(x) = 0$.
בטענה זו נשתמש בשאלה האחרונה תחת הנושא 'משפט ערך הביניים', בסעיף האחרון.

15 הוכיחו כי אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה a , אזי הפונקציה $g(x)$,

$$g(x) = \begin{cases} -c & f(x) < -c \\ f(x) & |f(x)| \leq c \\ c & f(x) > c \end{cases}$$

המוגדרת על ידי $|f(x)| \leq c$, גם רציפה בנקודה a (כאשר c מספר חיובי כלשהו).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \geq 1 \\ e^{-x} - e^{-1} & x < 1 \end{cases}$$

16 נתונה הפונקציה

בדקו האם f הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את $f^{-1}(x)$.

17 הוכיחו כי אם $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ו- $f(x) > 0$ לכל $x \in [a, b]$ אז יש $c > 0$ כך ש-
 $f(x) > c$ לכל $x \in [a, b]$.

18 הוכיחו כי אם f, g רציפות ב- $\mathbb{R}$ אז גם הפונקציה $z(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ רציפה ב- $\mathbb{R}$.

הערה: יש להוכיח לפי ההגדרה (בלשון (ε, δ)).
השוו לשאלה 28 בנושא הראשון בפרק זה.

תשובות סופיות

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ -\ln(x + e^{-1}) & x > 0 \end{cases} \quad (16)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

שיטת החצייה

שאלות

(1) נתונה המשוואה $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. בעזרת שיטת החצייה בקטע $[-2, 3]$, מצאו שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות. מהו קירוב השורש?

(2) נתונה המשוואה: $x^3 - x - 2 = 0$.
 א. מצאו קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.
 ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של 0.001?
 ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.

הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

תשובות סופיות

(1) 0.07
 (2) א. $[1, 2]$ ב. 10 ג. $x = 1.520$

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 4 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

1. הגדרת הנגזרת וגזירות של פונקציה 60
2. נגזרות חד צדדיות 68

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

שאלות*

בשאלות 1-6 חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

$$(1) \quad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (2) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (3) \quad f(x) = \sin 4x$$

$$(4) \quad f(x) = e^x \quad (5) \quad f(x) = \ln x \quad (6) \quad f(x) = \sqrt{x+10}$$

$$(7) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-44).$$

$$(8) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}.$$

$$(9) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x \cdot z(x) \text{ כאשר } z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4.$$

$$(10) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x > 0 \\ -(x+1)^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

$$(11) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (n \text{ טבעי}).$$

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

$$(12) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \arctan \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (n \text{ טבעי}).$$

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x = 0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x = 0$?

(13) חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4+x) - \ln 4}{x} \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x} - e}{x}$$

(14) נתון כי f גזירה בנקודה x_0 . הוכח כי:

$$\text{א. } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{ב. } 2x_0 f(x_0) - x_0^2 f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 f(x_0) - x_0^2 f(x)}{x - x_0}$$

(15) נתון כי f גזירה וזוגית. הוכיחו כי f' אי זוגית.

(16) נתונה פונקציה המוגדרת ב- $[a, b]$ ומקיימת לכל x, y ב- $[a, b]$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

הוכיחו כי f גזירה ב- $[a, b]$ וחשבו את נגזרתה.

$$(17) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

$$(18) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

$$(19) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = |\sin^5 x|$$

א. חשבו את $f'(x)$.

ב. מצאו את כל הנקודות עבורן $f'(x) = 0$.

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

(20) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ב. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ג. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ד. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

(21) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם f גזירה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x)$.
- ב. אם הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

(22) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$.
- ב. אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$.

(23) נתון כי $f(x)$ רציפה ב- $x = 4$, ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \pi - 10(x - 4)}{x - 4} = 0$

הוכיחו ש- f גזירה ב- $x = 4$, וחשבו את $f'(4)$.

(24) תהי f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה $x = 0$ המקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

א. הוכיחו כי $f(0) = 0$.

ב. הוכיחו כי f גזירה ב- $x = 0$ ו- $f'(0) = 0$.

(25) תהי f פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי $f(0) = 0$ ו- $f'(0) = k$.

הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = k$

(26) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה x_0 .

א. אם $f(x_0) \neq 0$, הוכיחו שגם $|f|$ גזירה ב- x_0 .

ב. אם $f(x_0) = 0$, הראו שייתכן כי $|f|$ גזירה ב- x_0 וייתכן שלא.

(27) תהייה $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות גזירות בנקודה x_0 .

נגדיר $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הראו שאם $f(x_0) \neq g(x_0)$, אז h גזירה ב- x_0 .

(28) תהי f פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו כי אם f גזירה ב-0, אז $f'(0) = 0$.

הערה: פתרו בשתי דרכים שונות.

(29) נתונה פונקציה $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(xy) = f(x) + f(y)$,

לכל $x, y \in (0, \infty)$.

נתון כי f גזירה בנקודה $x=1$.

א. הוכיחו כי $f(1) = 0$ ו- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

ב. הראו כי f גזירה, ושלכל $x > 0$, $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$.

(30) נתון כי f פונקציה גזירה המקיימת $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$.

הוכיחו ש- f פונקציה לינארית.

(31) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את הטענה הבאה:

אם f גזירה ב- x_0 , אז $f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + a_n) - f(x_0)}{a_n}$

לכל סדרה $a_n \rightarrow 0$.

ב. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0 = 1$, ו- $f(1) = 1$.

הראו שאם $k \in \mathbb{N}$, אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{k}{n}\right) - k \right] = \frac{k(k+1)}{2} f'(1)$$

ג. חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{10}{n}} - 10 \right]$.

32) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = (x-1)^2 D(x)$ גזירה רק בנקודה $x=1$.

33) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq x^2$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה גזירה ב- $x=0$.

34) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq \sin^2 x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

35) תהי f פונקציה גזירה ב- x_0 .

א. הוכיחו כי $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה f , באופן שהגבול בסעיף א' קיים,

אך $f'(x_0)$ אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות $f'(x_0)$ את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-2h) - f(x_0+3h)}{h}$.

36) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- x_0 .

א. הוכיחו כי $f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה f , באופן שהגבול בסעיף א' קיים,

אך $f''(x_0)$ אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לופיטל'.

37) נתון כי $f(x)$ רציפה בנקודה $x=a$, ונגדיר פונקציה חדשה $z(x) = (x-a)f(x)$. הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה $z(x)$ גזירה בנקודה $x=a$.

ב. $z'(x)$ רציפה ב- $x=a$.

38) נניח ש- f גזירה ב- c ו- $f(c) = 0$.

הוכיחו:

א. אם $f'(c) = 0$ אז $|f(x)|$ גזירה ב- c .

ב. אם $|f(x)|$ גזירה ב- c אז $f'(c) = 0$.

(39) יהיו f, g פונקציות גזירות ב- c ונניח כי $f(c) = g(c)$.

א. הוכיחו כי $|f(x) - g(x)|$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c) = g'(c)$.

ב. הוכיחו כי $z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c) = g'(c)$.

ג. הוכיחו כי $z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c) = g'(c)$.

(40) נניח ש- $|f(x)|$ גזירה ב- c ו- f רציפה ב- c .

הוכיחו כי f גזירה ב- c .

תשובות סופיות

- (1) $f'(x) = 2x + 4$ (2) $f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$ (3) $f'(x) = 4 \cos 4x$
- (4) $f'(x) = e^x$ (5) $f(x) = \frac{1}{x}$ (6) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}}$
- (7) $44!$ (8) 2 (9) 4
- (10) א. רציפה לכל x . ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.
- (11) א. $n > 1$. ב. $n > 2$
- (12) א. $n > 1$. ב. $n > 1$
- (13) א. $\frac{1}{4}$. ב. e
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה. $f' = 0$
- (17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים: $f'(0) = 0$.
- (18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$, ומתקיים: $f'(1) = 0$.
- (19) א. $f'(x) = \begin{cases} 5 \sin^4 x \cos x & 2n\pi < x < (2n+1)\pi \\ 0 & x = n\pi \\ -5 \sin^4 x \cos x & (2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi \end{cases}$ ב. $x = \frac{\pi}{2}n$
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) שאלת הוכחה.
- (22) שאלת הוכחה.
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) שאלת הוכחה.
- (25) שאלת הוכחה.
- (26) שאלת הוכחה.
- (27) שאלת הוכחה.
- (28) שאלת הוכחה.
- (29) שאלת הוכחה.
- (30) שאלת הוכחה.
- (31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55
- (32) שאלת הוכחה.

(33) שאלת הוכחה.

(34) שאלת הוכחה.

(35) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x) = |x|$ ג. $-5f'(x_0)$ (36) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

(37) שאלת הוכחה.

(38) שאלת הוכחה.

(39) שאלת הוכחה.

(40) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות חד-צדדיות

שאלות

1) תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases}$ על מנת להדגים שתי שיטות אלה. בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת משיטות אלה.

בשאלות 2-9 בדקו את גזירות הפונקציות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו. בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (7)$$

$$f(x) = 2 + 4|x-1| \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

10) בדקו האם הפונקציה משאלה 5 גזירה פעמיים בנקודה $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad (11) \text{ נתונה הפונקציה}$$

- א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x = -1$?
- ב. עבור ערך ה- a שקיבלת בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x = -1$. האם קיים משיק בנקודה זו?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

12 מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$\text{התפר: } f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax + b & x > e \end{cases}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

13 מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$\text{התפר: } f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

$$\text{14 נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + 4x & x < 0 \\ px + q & x \geq 0 \end{cases}$$

קבעו עבור אילו ערכים של הקבועים p ו- q הפונקציה הנתונה:
א. רציפה. ב. גזירה.

15 חשבו את $f'(0)$, עבור הפונקציה: $f(x) = |x^4 - x^3 + \sin(10x) - 1|$

$$\text{16 נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt{|\cos \pi x|} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

הוכיחו שהפונקציה לא גזירה לכל x ממשי.

תזכורת (הערך השלם)

פונקציית הערך השלם $[x]$ מחזירה לכל מספר ממשי x את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- x (מעגלת כלפי מטה). למשל: $[-4.1] = -5$, $[4.1] = 4$.

17 נתונה הפונקציה $f(x) = [x] - [-x]$.
חשבו את $f'(x)$.

18 נתונה הפונקציה $f(x) = [x] \sin(\pi x)$.
חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

19 נתונה הפונקציה $f(x) = [x](1 - \cos(\pi x))$.
חשבו את $f'(x)$.

(20) הוכיחו שאם f היא פונקציה המקיימת $|f(x)| \leq x^2$ לכל x , אז f גזירה ב- $x=0$.

(21) תהי f פונקציה רציפה ב- $x_0=0$. הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=|x|f(x)$ גזירה ב- $x_0=0$ אם ורק אם $f(0)=0$.

(22) יהיו f ו- g שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה של $x_0 \in \mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f(x_0)=g(x_0)$ ו- $f'_-(x_0)=g'_+(x_0)$,

אז הפונקציה z , המוגדרת על ידי $z(x)=\begin{cases} f(x) & x \leq x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases}$, גזירה ב- x_0 .

ב. אם $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ לא גזירה ב- x_0 ו- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ב- $\mathbb{R}$, אז $g \circ f$ איננה גזירה ב- $\mathbb{R}$.

ג. אם g גזירה מימין ב- x_0 והפונקציה f מוגדרת בסביבה מלאה של $g(x_0)$ וגזירה מימין ב- $g(x_0)$, אזי $f \circ g$ גזירה מימין ב- x_0 .

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

(23) תהיינה f ו- g פונקציות המוגדרות ב- $\mathbb{R}$. נתון ש- g היא פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$, ולכל $x > y$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

הוכיחו כי f גזירה ב- $\mathbb{R}$, ושלכל x ממשי מתקיים $f'(x)=g(x)$.

$$\textbf{(24) נתונה הפונקציה } f(x)=\begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \geq 1 \\ \frac{\pi}{4} - \arctan x & x < 1 \end{cases}$$

א. בדקו את רציפות וגזירות f .

ב. בדקו האם f הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את $f^{-1}(x)$.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = 4 \ (x > 1) \ , \ f'(x) = -4 \ (x < 1) \quad (6)$$

$$f'(x) = 8x \ (x \geq 0) \ , \ f'(x) = 4x \ (x < 0) \quad (7)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

(10) לא גזירה פעמיים בנקודה $x = 0$.

(11) א. $a = 1$ ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} \ln^2 x & 0 < x < e \\ \frac{3}{e} & x \geq e \end{cases} \quad a = 3/e \quad b = -2 \quad (12)$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x < 1 \\ e & x \geq 1 \end{cases} \quad a = e \quad b = 0 \quad (13)$$

$$q = 0, p = 4 \quad \text{ב.} \quad q = 0 \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$-10 \quad (15)$$

(16) שאלת הוכחה.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (17)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x] \cos(\pi x) \pi & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (18)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x] \sin \pi x & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z}, x \text{ even} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z}, x \text{ odd} \end{cases} \quad (19)$$

לפתרונות מלאים בוידאו של שאלות 20-23 היכנסו לאתר www.GooL.co.il

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) & 0 < x < \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad (24) \quad \text{א. רציפה לכל } x \text{ וגזירה לכל } x \neq 1.$$

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 5 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה	(ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה	73
3. תרגילים נוספים לפי סוגים	76
4. גזירה סתומה	79
5. כלל השרשרת	81
6. גזירה לוגריתמית	84
7. נגזרת הפונקציה ההפוכה	85

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 22-24 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$y = x^{\sqrt{x}} \quad (21) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (24) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (23) \quad y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} (\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (20)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1\right) \quad (21)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (22)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x\right) \quad (23)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (24)$$

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3$	ב. $f(x) = x^7$	ג. $f(x) = x^2$
ד. $f(x) = x^1$	ה. $f(x) = x^{-3}$	ו. $f(x) = x^{-1}$
ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x^3$	ב. $f(x) = 3x^7$	ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$	ה. $f(x) = 8x^1$	ו. $f(x) = 3x^{-2}$
ז. $f(x) = \frac{4}{x}$	ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

הנגזרת של קבוע

3) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 12$	ב. $f(x) = \frac{7}{8}$
----------------	-------------------------

הנגזרת של סכום והפרש

4) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$	ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$
---------------------------------	---

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x-2)^3$ ב. $f(x) = (x^3+6)^5$ ג. $f(x) = 3(x-x^2)^2$

ד. $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3}{x}$ ב. $f(x) = \frac{2}{x}$ ג. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ד. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ה. $f(x) = \frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x) = \frac{2}{3-x}$ ז. $f(x) = \frac{6}{x+5}$

הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x+1)(x-3)$

ב. $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x) = x^3(6-x)^4$

הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x) = \frac{1}{x}$ ו. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$ ב. $f(x) = 4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x) = \sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x) = x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f'(x) = 3x^2 & \text{ב. } f'(x) = 7x^6 & \text{ג. } f'(x) = 2x \\ \text{ד. } f'(x) = 1 & \text{ה. } f'(x) = 3x^{-4} & \text{ו. } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \text{ז. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ח. } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ט. } f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f'(x) = 6x^2 & \text{ב. } f'(x) = 21x^6 & \text{ג. } f'(x) = 2x^3 \\ \text{ד. } f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ה. } f'(x) = 8 & \text{ו. } f'(x) = -\frac{6}{x^3} \\ \text{ז. } f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ח. } f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ט. } f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} \end{array}$$

0. ב.

0. א. (3)

$$\text{א. } f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{ב. } f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\text{א. } f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{ב. } f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4$$

$$\text{א. } f'(x) = 6(x - x^2)(1 - 2x) \quad \text{ב. } f'(x) = -\frac{3}{4}(5 - x)^2 \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3}$$

$$\text{א. } f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ד. } f'(x) = -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{א. } f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2}$$

$$\text{א. } f'(x) = 10x - 14 \quad \text{ב. } f'(x) = (5x+1)^2(20x-44)$$

$$\text{ג. } f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x)$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

גזירה סתומה

שאלות

- 1 גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2 + y^5 - 1 = 1$.
- 2 גזרו את הפונקציה הסתומה $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$.
- 3 גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$.
- 4 מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$, בנקודה $(3, 4)$.
- 5 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה $(1, 1)$.
- 6 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2 y + e^{y^2 - 4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה $(1, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 7 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy + y} + x^2 y = xy^2$, דרך הנקודה $(1, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 8 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$, דרך הנקודה $(0, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 9 נתונה הפונקציה הסתומה $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$.
א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y = 0$.
ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.
- 10 גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y - xy = 10$.
- 11 גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y - y^x = 1$.
- 12 נתונה פונקציה סתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$. מצאו את ערך y^n בנקודה בה $y = 1$.

(13) נתון כי המשוואה $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$,

מגדירה את $y = y(x)$ כפונקציה סתומה של x .

נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.

הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (7)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (8)$$

$$(0,0), (1,0) \text{ א.} \quad (9)$$

ב. בראשית הצירים: $y = -x$, המשוואה השנייה: $y = x - 1$.

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (10)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (11)$$

$$-1 \quad (12)$$

(13) הוכחה.

כלל השרשרת

שאלות

- (1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4) = 10$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f(x^2)$.
חשבו את $g'(2)$.

- (2) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(2) = 4$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
א. חשבו את $g'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכיחו כי g יורדת.

- (3) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = x^2 + f(\ln x)$.
א. חשבו את $g'(e)$.

ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודה $x = e$.

ג. חשבו את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$.

- (4) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$, $f(1) = -2$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f^2(\ln x)$.
א. חשבו את $g'(e)$.

ב. האם g עולה או יורדת, בנקודה $x = e$?

ג. נתון כי f שלילית ועולה. מה ניתן לומר על g ?

(5) נתונה פונקציה, $f(x)$, יורדת וחיובית.

$$g(x) = \sqrt{f(x^2 + 4)}$$

מי מהבאים נכון?

א. g עולה לכל x .

ב. g יורדת לכל x .

ג. g עולה לכל $x > 0$.

ד. g יורדת לכל $x > 0$.

$$(6) \quad g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי $f(10) = f'(10) = 4$. חשבו $g'(100)$.

$$(7) \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$.

חשבו $g'(1)$.

$$(8) \quad g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$$

ידוע כי $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$.

חשבו $g'(1)$.

$$(9) \quad g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$$

ידוע כי $f(4) = 1$, $f'(4) = 2$.

חשבו $g'(1)$.

$$(10) \quad g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$.

חשבו $g'(1)$.

תשובות סופיות

- | | | |
|--------------------|---------------------|--------|
| | | 40 (1) |
| ב. שאלת הוכחה. | א. -16 (1) | |
| ג. $2e+1$ (2) | א. $2e+1$ (2) | |
| ב. שאלת הוכחה. | א. -4 (3) | |
| ג. $g'(x) < 0$ (3) | ב. יורדת. | |
| | ד (4) | |
| | $\frac{17}{80}$ (5) | |
| | 36 (6) | |
| | $\frac{8}{9}$ (7) | |
| | 44 (8) | |
| | -2 (9) | |

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות :

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt[10]{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1} \right)^{2x} \quad (1)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$y' = y \left[\frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left((10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

נגזרת הפונקציה ההפוכה

שאלה

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחה הבאה :

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

לתשובה מלאה בסרטון וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 6 - חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות

תוכן העניינים

1. נגזרת הפונקציה ההפוכה 86
2. נגזרת מסדר גבוה 87
3. נוסחת לייבניץ 88
4. גזירה פרמטרית 89

נגזרת הפונקציה ההפוכה

שאלות

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

נגזרת מסדר גבוה

שאלות

חשבו את הנגזרת ה- n , $f^{(n)}(x)$, של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x+a} \quad (1)$$

$$y = \frac{2x+3}{x^2-3x+2} \quad (2)$$

$$y = \frac{x}{(x^2-1)(x-2)} \quad (3)$$

$$y = \frac{x^4}{x^2-1} \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot (x+a)^{-n-1} \quad (1)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot \left(-5(x-1)^{-n-1} + 7(x-2)^{-n-1} \right) \quad (2)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot \left(-\frac{1}{2}(x-1)^{-n-1} - \frac{1}{6}(x+1)^{-n-1} + \frac{2}{3}(x-2)^{-n-1} \right) \quad (3)$$

$$y' = 2x - \frac{1}{2} \left((x-1)^{-2} - (x+1)^{-2} \right), \quad y'' = 2 + \left((x-1)^{-3} - (x+1)^{-3} \right) \quad (4)$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}(-1)^n \cdot n! \cdot \left((x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1} \right), (n > 2)$$

נוסחת לייבניץ

שאלות

חשבו את הנגזרת העשירית, $y^{(10)}$, של הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 e^x \quad (1)$$

$$y = x^3 \sin 5x \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$(e^x \cdot x^3)^{(10)} = e^x [x^3 + 103x^2 + 456x + 120 \cdot 6] \quad (1)$$

$$(\sin 5x \cdot x^3)^{(10)} = -5^{10} x^3 \sin 5x + 6 \cdot 5^{10} x^2 \cos 5x + 54 \cdot 5^9 x \sin 5x - 24 \cdot 5^9 \cos 5x \quad (2)$$

גזירה פרמטרית

שאלה

1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה הבאה,

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases} \quad \text{הנתונה בצורה פרמטרית}$$

תשובה

$$y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3} \quad (1)$$

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 7 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

תוכן העניינים

90	1. המשיק
92	2. בעיות משיקים
94	3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק
98	4. הנורמל
99	5. זווית שבין שתי עקומות
100	6. נוסחת הקירוב הליניארי - דיפרנציאל שלם

המשק

שאלות

- (1) מצאו את שיפוע הפונקציה
 - א. $f(x) = 2x^3 - 7x$, בנקודה $(2, 2)$.
 - ב. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$, בנקודה $x = -2$.
- (2) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, כאשר $a > 0$.
 המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$, הוא בעל שיפוע 1.
 מצאו את הקבוע a .
- (3) הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x) = 3\sqrt{x}$.
 מצאו את נקודת ההשקה.
- (4) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$, בנקודה $(1, 15)$, הוא $21 \ln 3$.
 מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$, בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$, הוא $\frac{e}{3}$.
 מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (6) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$, לגרף הפונקציה
 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$?
 לכל ערך k כזה מצאו את נקודת ההשקה.
- (7) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
 - א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות $x = 1$ ו- $x = 3$.
 - ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א',
 עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(8) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}$.

מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(9) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$.

מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(10) פונקציה $f(x)$ גזירה ברציפות ב-0 ומקיימת $f(0) = 0$.

ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x היא 30° .

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

(11) מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , בנקודות $x = 1$ ו- $x = 0$.

תשובות סופיות

(1) א. 17 ב. 4

(2) $a = 2$

(3) $(1, 3)$

(4) $a = 2, b = -1$

(5) $a = 2, b = -2$

(6) לערך $k = 6$, בנקודה $x = 1$; לערך $k = \frac{158}{27}$, בנקודה $x = \frac{1}{3}$.

(7) א. ראו באתר. ב. $\alpha = 63.43^\circ, \beta = 116.56^\circ$

(8) $x = 5, x = -1$

(9) $x = 1, x = \frac{1}{3}$

(10) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(11) $\alpha = 33.69^\circ, \beta = 90^\circ$

בעיות משיקים

שאלות

(1) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצאו את a ו- c .

(4) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(5) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.

בשאלות 6-7 מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

(6) $(2, -3), y = x^2 - 2x + 1$

(7) $(-3, 1), y = \sqrt{x}$

(8) מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות $y = x^2$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

(9) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצאו את k ואת נקודת ההשקה.

10 נתון כי f גזירה לכל x .

א. הוכיחו כי הפונקציה $z(x) = x^2 f(3x-2)$ גזירה לכל x .

ב. הישר $2y = 10x + 11$ משיק לגרף הפונקציה $z(x)$ בנקודה $x = -1$.

מצאו את השיפוע של $f(x)$ בנקודה $x = -5$.

תשובות סופיות

1 נקודת ההשקה היא $(-1, 5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.

2 נקודת ההשקה היא $(4, 12)$ ו- $b = 4$.

3 נקודת ההשקה היא $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

4 נקודת ההשקה היא $(0, 1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.

5 משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.

6 $y = 6x - 15, (4, 9)$; $y = -2x + 1, (0, 1)$

7 המשיק $\left(9, 3\right), y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

8 $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

9 $k = 1.5$, נקודת ההשקה $(1, 1)$.

10 א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.

בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

שאלות

(1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$, בנקודה $x = -1$.

(2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$, ששיפועו 2.

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$, בנקודה $x = 0$.

(4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$, בנקודה $x_1 = 1$.

(5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$, בנקודה $y = 2$, הוא -4 .
מצאו את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$, היוצרים זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$, ששיפועו -2.

(8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$, בנקודה $x_1 = 2$.

(9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$, בנקודה $(1,6)$, הוא -6 .
מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b , ואת משוואת המשיק.

(10) נתונה הפונקציה $y = e^{2x} + 3ex$, והעבירו לה משיק בנקודה $x = 2$.
מצאו את משוואת המשיק.

11) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$, בנקודה $x = 0$.

12) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$, בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.

13) לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$. מצאו את משוואת המשיק.

14) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$, בנקודה $x = 1$.

15) הגרפים של $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1 - \ln x$ נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק. מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

16) מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$, בנקודה $(3, 4)$.

17) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה $(1, 1)$.

18) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה $(1, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

19) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy+y} + x^2y = xy^2$, דרך הנקודה $(1, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

20) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$, דרך הנקודה $(0, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה הסתומה $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$.

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y = 0$.

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

תשובות סופיות

(1) $y = 24x + 22$

(2) $y = 2x - 3$

(3) $y = 1$

(4) $y = -12x + 9$

(5) $a = 2, y = -4x - 2$

(6) $y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3}$

(7) $y = -2x + 8$

(8) $y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16}$

(9) $a = 6, b = 2, y = -6x + 12$

(10) $y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4$

(11) $y = 3x + 1$

(12) $y = (-e^2 + e)x + e^2, y = (e - 1)x + e$

(13) $y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$

(14) $y = (\ln 2 + 1)x - 1$

(15) $y = \frac{1}{e}x$

(16) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

(17) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

(18) $y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5}$

(19) $y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6}$

(20) $y = \frac{4}{3}x + 2$

(21) א. $(0,0), (1,0)$ ב. בראשית הצירים: $y = -x$, המשוואה השנייה: $y = x - 1$.

הנורמל

שאלות

- (1) מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x-2}$, בנקודה $(3, 2)$.
- (2) מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^4$, המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5, 0)$ ו- $(2, 4)$.
- (3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, בנקודה מסוימת, היא $4y + x = 6$. מצאו את הנקודה.

תשובות סופיות

- (1) $y = -2x + 8$
- (2) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$
- (3) $(2, 1)$

זווית שבין שתי עקומות

שאלות

(1) מצאו את הזווית בין הפונקציות $y = f(x) = x^2$ ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$.

(2) מצאו את הזווית בין המעגל $x^2 + y^2 = 8$ והפרבולה $y^2 = 2x$.

(3) הוכיחו שהאליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$ וההיפרבולה $x^2 - y^2 = 2$ נחתכות בזווית ישרה.

תשובות סופיות

(1) 71.57°

(2) 71.56°

(3) שאלת הוכחה.

נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

שאלות

(1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
 $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$

(2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
 $\ln 2, \sqrt[3]{9}$

תשובות סופיות

$$\sqrt{5} \approx 2.25, \sqrt{8} \approx 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \approx 1, \sqrt[3]{9} \approx 2\frac{1}{12} \quad (2)$$

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 8 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף..... 101
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף..... 103
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף..... 104
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף..... 105
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל..... 106

גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

שאלות

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ ו- } \frac{0}{0} \text{ גבולות מהצורה}$$

חשבו את הגבולות בשאלות 1-3 (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 4-8 (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 9-12 (פונקציות חזקה):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 13-15 (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (20)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{6}$ (5)	4 (4)	$n-1$ (3)	$\frac{20}{17}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\ln \frac{a}{b}$ (10)	1 (9)	$-\frac{3}{2}$ (8)	$\frac{5}{6}$ (7)	$\frac{3}{2}$ (6)
1 (15)	2 (14)	$-\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{6}$ (12)	$\frac{1}{2}$ (11)
0 (20)	0 (19)	∞ (18)	$\frac{1}{2}$ (17)	$\frac{1}{2}$ (16)

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (7)$$

תשובות סופיות

0 (4)

0 (3)

0 (2)

∞ (1)

$\frac{5}{2}$ (7)

6 (6)

0 (5)

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty - \infty$

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: $1^{\pm\infty}$, $0^{\pm\infty}$, ∞^0

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, \quad (a > 0) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$e \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

הגבולות הבאים הם מהצורה $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים, ולבסוף, חשבו את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 9 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

107	1. מושגי יסוד
108	2. חקירת פולינום
109	3. חקירת פונקציה רציונלית
113	4. חקירת פונקציה מעריכית
116	5. חקירת פונקציה לוגריתמית
120	6. חקירת פונקציה עם שורשים
121	7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט
124	8. חקירת פונקציה טריגונומטרית
128	9. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות
130	10. חקירת פונקציה – שאלות כלליות
135	11. הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים :
 - תחום הגדרה ורציפות.
 - נקודות חיתוך עם הצירים.
 - זוגיות ואי-זוגיות.
 - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
 - תחומי עלייה וירידה.
 - נקודות קיצון.
 - תחומי קמירות וקעירות.
 - נקודות פיתול.
 - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינוכית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

חקירת פולינום

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

תשובות סופיות

(1) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 9 .

נקודות קיצון: מינימום: $(9, 0)$, מקסימום: $(3, 108)$.

תחום עלייה: $x > 9$ or $x < 3$, ירידה: $3 < x < 9$.

תחום קמירות: $x > 6$, קעירות: $x < 6$.

נקודת פיתול: $(6, 54)$.

(2) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 2 .

נקודות קיצון: מינימום: $\left(1.5, \frac{-27}{16}\right)$.

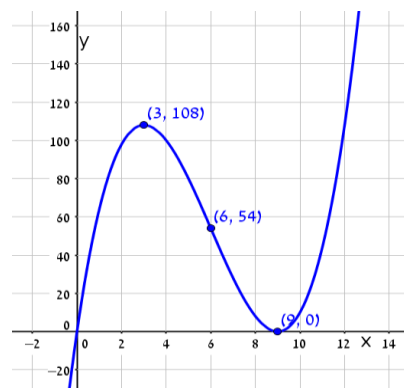
תחום עלייה: $x > 1.5$, ירידה: $x < 1.5$.

תחום קמירות: $x > 1$ or $x < 0$, קעירות: $0 < x < 1$.

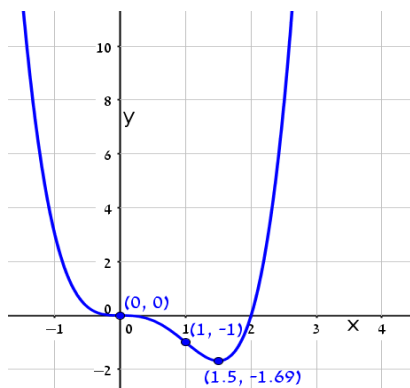
נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(1, -1)$.

גרפים

(1)



(2)



חקירת פונקציה רציונלית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (7)$$

הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת $y = x - 1$.

תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2, 0.25)$. נקודת פיתול: $(3, \frac{2}{9})$.
תחום עלייה: $0 < x < 2$, ירידה: $x > 2$ or $x < 0$.
תחום קמירות: $x > 3$, קעירות: $0 < x < 3$ or $x < 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, 0)$. נקודת פיתול: $(\frac{1}{2}, \frac{2}{9})$.
תחום עלייה: $x < -1$ or $x > 0$, ירידה: $-1 < x < 0$.
תחום קמירות: $-1 < x < \frac{1}{2}$ or $x < -1$, קעירות: $x > \frac{1}{2}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$, מקסימום: $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$.
תחום עלייה: $x < -\sqrt{12}$ or $x > \sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$, $x \neq \pm 2$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $-2 < x < 0$ or $x > 2$, קעירות: $0 < x < 2$ or $x < -2$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-3, -\frac{27}{4})$.
תחום עלייה: $x < -3$ or $x > -1$, ירידה: $-3 < x < -1$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $x > 0$, קעירות: $-1 < x < 0$ or $x < -1$.

(5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : -1 .

אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.

נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

נקודות פיתול: $(-1, 0)$, $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$.

תחום קמירות: $-3 < x < -1$ & $x > 1$, קעירות: $-1 < x < 1$ or $x < -3$.

(6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$, $x \neq 5$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{10}$, עם ציר ה- x : ± 1 .

אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.

נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78, -3.88)$, מינימום: $(0.36, -0.11)$.

תחום עלייה: $0.36 < x < 2$ or $2 < x < 2.78$,

ירידה: $x < 0.36$ or $2.78 < x < 5$ or $x > 5$. נקודת פיתול: $(-1, 0)$.

תחום קמירות: $-1 < x < 2$ or $x > 5$, קעירות: $2 < x < 5$ or $x < -1$.

(7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{3}{4}$, עם ציר ה- x : $x=1$, $x=3$.

אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.

נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.

תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

נקודת פיתול: $(0.85, -0.09)$.

תחום קמירות: $0.85 < x < 2$ or $x < -2$, קעירות: $-2 < x < 0.85$ or $x > 2$.

(8) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$, $x \neq -1$.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .

אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.

נקודות קיצון: מקסימום: $(-2, -4)$, מינימום: $(0, 0)$.

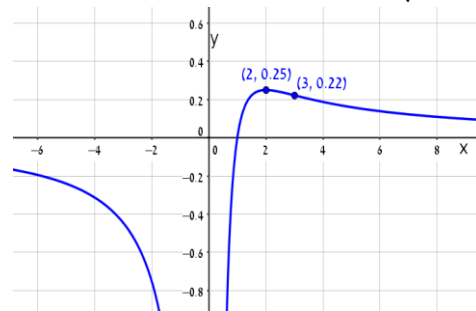
תחום עלייה: $x < -2$ or $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $-1 < x < 0$ or $-2 < x < -1$.

נקודת פיתול: אין.

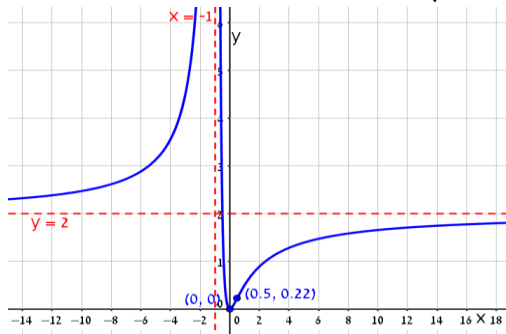
תחום קמירות: $-1 < x < 1$ or $x > 1$, קעירות: $x < -1$.

גרפים

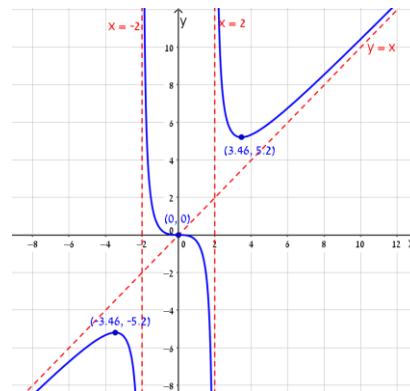
(1)



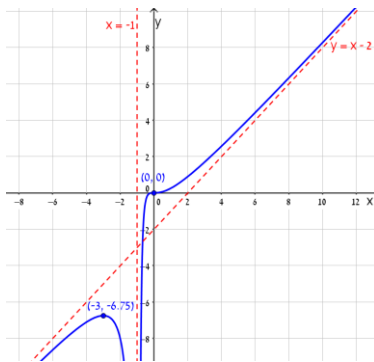
(2)



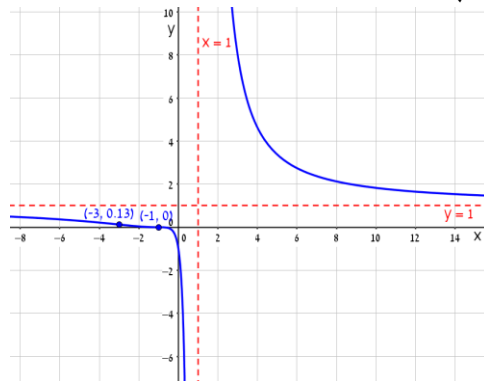
(3)



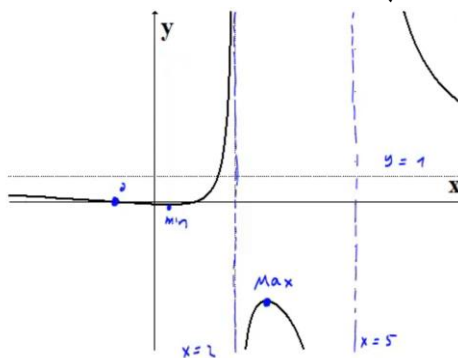
(4)



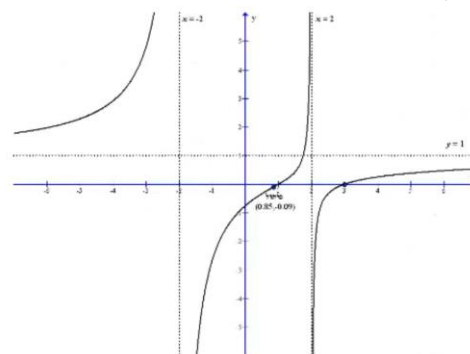
(5)



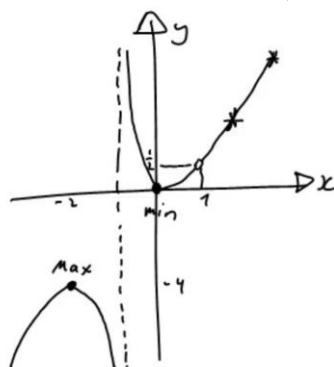
(6)



(7)



(8)



חקירת פונקציה מעריכית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

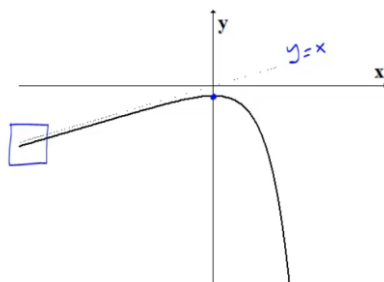
$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

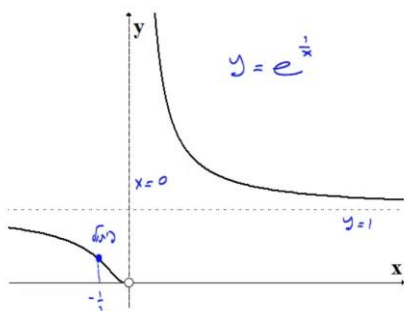
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : אין (ראו בהרחבה בסרטון).
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y = x$ ב- $-\infty$ בלבד.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0, -1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל x .
(2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(-0.5, e^{-2})$.
תחום קמירות: $x > 0$ or $-0.5 < x < 0$, תחום קעירות: $x < -0.5$.
(3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : -2 .
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת: הישר $y = x + 3$ ב- $\pm\infty$.
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $(-1, e^{-1})$, מינימום: $(2, 4e^{\frac{1}{2}})$.
תחום עלייה: $x > 2$ or $x < -1$, ירידה: $-1 < x < 0$ or $0 < x < 2$.
נקודת פיתול: $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$.
תחום קמירות: $x > 0$ or $-0.4 < x < 0$, תחום קעירות: $x < -0.4$.
(4) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y = 0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$, מינימום: $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$.
תחום עלייה: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, ירידה: $x > \frac{1}{2}$ or $x < -\frac{1}{2}$.
נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$, $(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$.
תחום קמירות: $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$ or $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$, תחום קעירות:
 $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$ or $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$.

גרפים

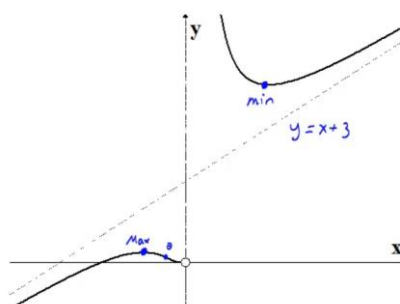
(1)



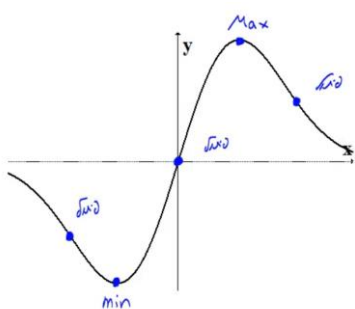
(2)



(3)



(4)



חקירת פונקציה לוגריתמית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

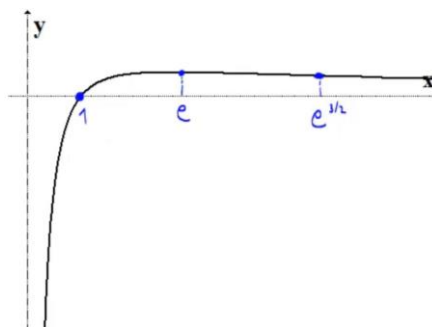
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e$, ירידה: $x > e$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
 תחום קמירות: $x > e^{1.5}$, קעירות: $0 < x < e^{1.5}$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x = 0$,
 משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e^2$, ירידה: $x > e^2$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt[8]{e^3}}\right)$. תחום קמירות: $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x > e^{\frac{8}{3}}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x < 2$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{2} \ln 2$, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -e^{-1})$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

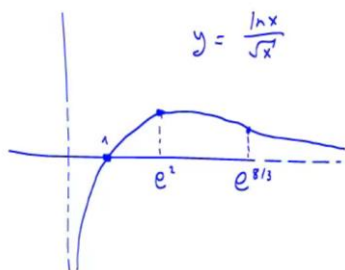
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^1$, $x = e^{-3}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -4)$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(1, -3)$. תחום קמירות: $x > 1$, קעירות: $0 < x < 1$.
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^{1.5}$, $x = e^{-0.5}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{\frac{1}{2}}, -4)$.
 תחום עלייה: $x > e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$.
 נקודת פיתול: $(e^{1.5}, 0)$. תחום קמירות: $0 < x < 1.5$, קעירות: $x > 1.5$.
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$, $x \neq 1$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 1$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, 2)$, $(e, 2)$.
 תחום עלייה: $x > e$ or $e^{-1} < x < 1$, ירידה: $1 < x < e$ or $x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(5.15, 3.06)$.
 תחום קמירות: $1 < x < 5.15$ or $0 < x < 1$, קעירות: $x > 5.15$.

גרפים

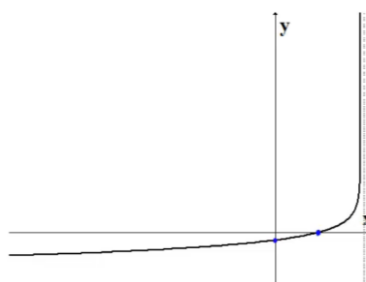
(1)



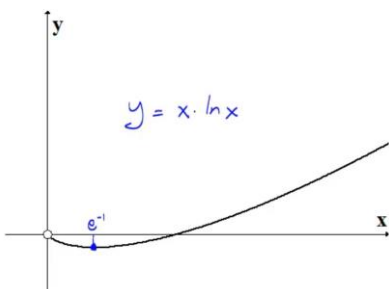
(2)



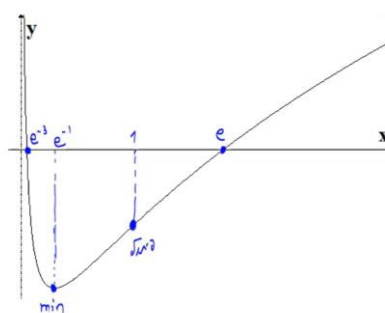
(3)



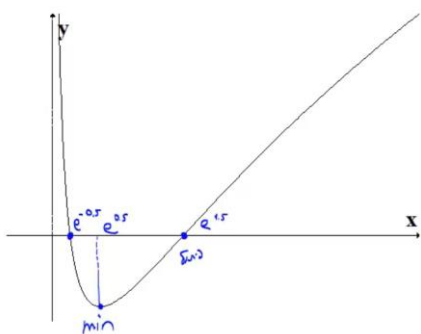
(4)



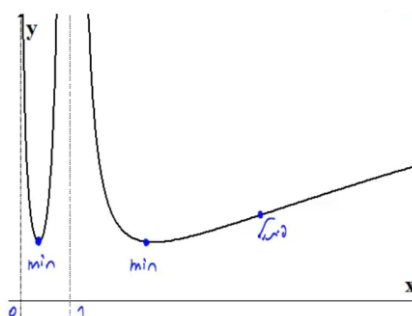
(5)



(6)



(7)



חקירת פונקציה עם שורשים

שאלה

(1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

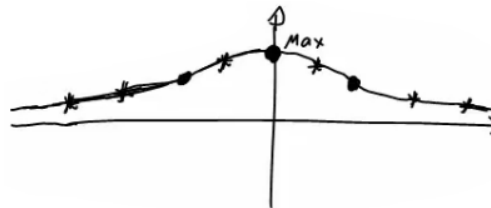
תשובה

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = 1$, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y = 0$.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.

נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

תחום קמירות: $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$ or $x < \sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$.

גרף:



חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (3)$$

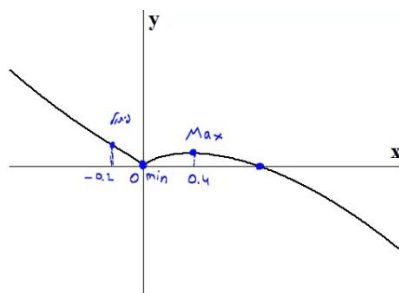
$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

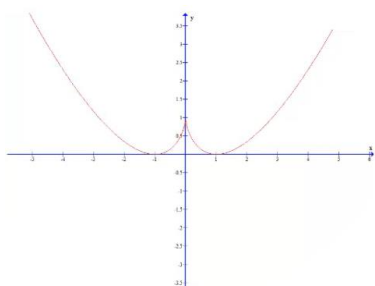
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 או 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$, מינימום: $(0, 0)$.
תחום עלייה: $0 < x < \frac{2}{5}$, ירידה: $x < 0$ or $x > \frac{2}{5}$.
נקודות פיתול: $(-0.2, 0.41)$.
תחום קמירות: $x < -0.2$, קעירות: $-0.2 < x < 0$ or $x > 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 1 , עם ציר ה- x : -1 או 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0, 1)$, מינימום: $(-1, 0)$.
תחום עלייה: $-1 < x < 0$ or $x > 1$, ירידה: $x < -1$ or $0 < x < 1$.
נקודות פיתול: אין.
תחום קמירות: קמורה לכל x .
תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : ± 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, -1)$.
תחום עלייה: $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $x < -1$ or $-1 < x < 0$.
נקודות פיתול: $(1, 0)$, $(-1, 0)$.
תחום קמירות: $-1 < x < 1$, קעירות: $x > 1$ or $x < -1$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1.5 , עם ציר ה- x : 3 .
אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$,
משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- ∞ , ו- $y = -1$ ב- $-\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(3, 0)$.
תחום עלייה: $x > 3$, ירידה: $2 < x < 3$ or $x < 2$.
נקודות פיתול: $(3, 0)$.
תחום קמירות: $2 < x < 3$, קעירות: $x > 3$ or $x < 2$.

גרפים

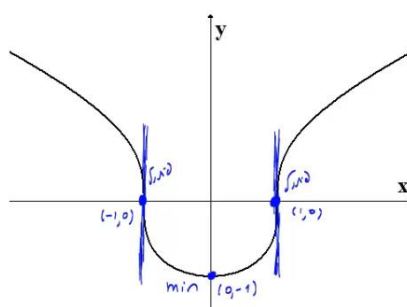
(1)



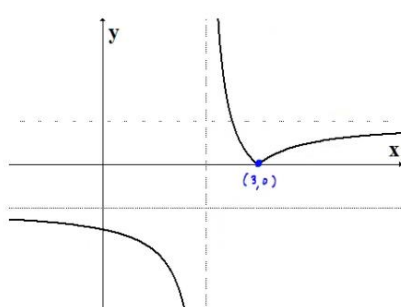
(2)



(3)



(4)



חקירת פונקציה טריגונומטרית

שאלות

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2\cos x$ בתחום $[0, 2\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x - 3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

- חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
 - תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
 - מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
 - מציאת אסימפטוטות אנכיות.
 - מציאת נקודות פיתול.
 - מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
 - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0, \pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה הבאה: $y = (\sin x + 1) \cdot \cos x$ בתחום: $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$ בתחום הנתון?

(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$.

- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0, \pi]$.
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi, \pi]$.

(7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi < x < 0.25\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

(8) $f(x) = 8 \cos x + 2 \cos 2x - 3$, $[0, 2\pi]$,

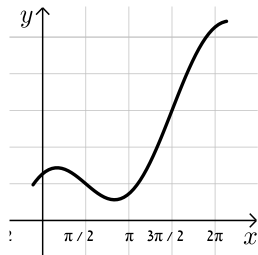
(9) $f(x) = 2 \cos^2 x - \sin 2x$, $[0, \pi]$,

תשובות סופיות

(1) א. $0 < x < 2\pi$.

ב. $\max(2\pi, 2\pi + 2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$, $\min(0, 2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.



ד. $(0, 2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$,

קעירות כלפי מטה: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ או $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

(2) א. $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$.

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi, 13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right)$ קצה.

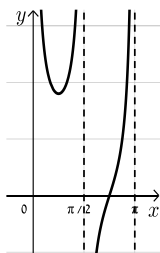
ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$.



ד. $(0, 0)$. ה. אנכית: $x = \frac{\pi}{2}$. ו. $(0, 0)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0$,

קעירות כלפי מטה: $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

(3) א. $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.

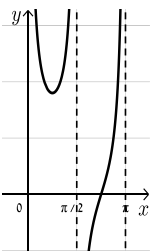
ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

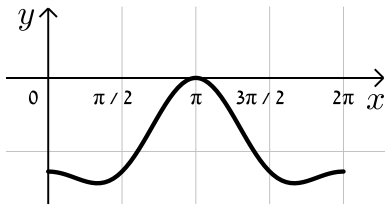
ד. $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$. ה. אנכית: $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$.

(4) א. $(\pi, 0), (0, -2)$.

ב. $\max\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right), \max(2\pi, -2), \max(0, -2), \min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right), \max(\pi, 0)$.

ג. עולה: $\frac{\pi}{3} < x < \pi, 1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$, יורדת: $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$, $0 < x < \frac{\pi}{3}$. גרף:

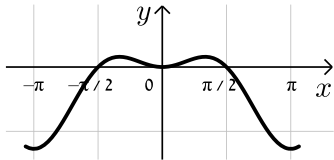




5 א. $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), (0, 1)$

ב. $(0, 1), \left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right), \left(\frac{5\pi}{6}, -1.29\right), (1.5\pi, 0)$

ד. 2 פתרונות.

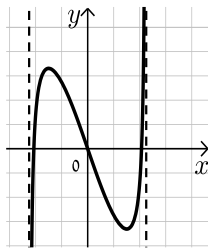


6 א. חיתוך: $(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, קיצון: $\min(\pi, -2)$ קצה,

$\min(0, 0), \max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$ קצה.

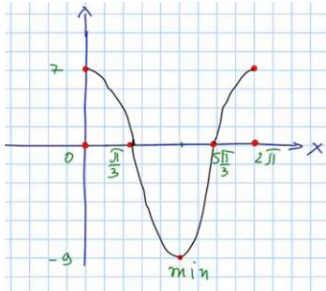
7 א. $(0, 0), (\pm 0.23\pi, 0)$ ב. $x = \pm 0.25\pi$

ג. $\min\left(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}\right), \max\left(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27}\right)$



8 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 7 , עם ציר ה- x : $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}, x = 7$

נקודות קיצון: מינימום: $(\pi, -9)$, מקסימום: $(0, 7), (2\pi, 7)$



נקודות פיתול: $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$

תחום קמירות: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

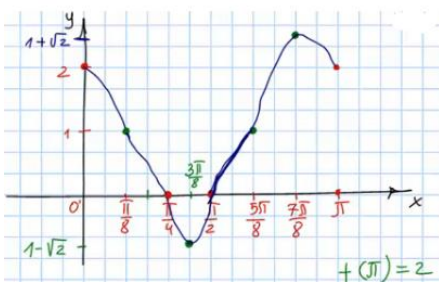
קעירות: $0 < x < \frac{\pi}{3}$ or $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

תחום עלייה: $x > 3$, ירידה: $x < 2$ or $2 < x < 3$

9 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 2 , עם ציר ה- x : $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}$

נקודות קיצון: מינימום: $\left(\frac{3\pi}{8}, 1 - \sqrt{2}\right)$, מקסימום: $\left(\frac{7\pi}{8}, 1 + \sqrt{2}\right)$

תחום עלייה: $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$, ירידה: $\frac{7\pi}{8} < x < \pi$ or $0 < x < \frac{3\pi}{8}$



נקודות פיתול: $\left(\frac{\pi}{8}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{8}, 1\right)$

תחום קמירות: $\frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}$

קעירות: $0 < x < \frac{\pi}{8}$ or $\frac{5\pi}{8} < x < \pi$

חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

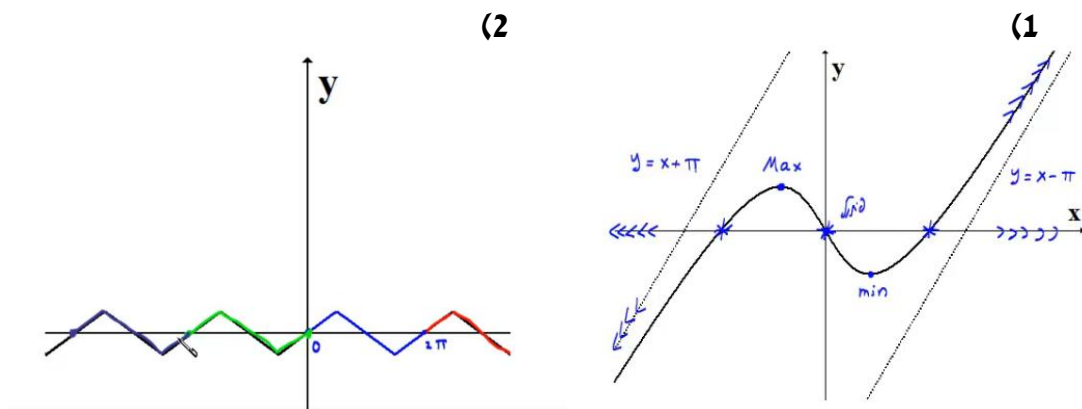
$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (2)$$

$$f(x) = x - 2 \arctan x \quad (1)$$

תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 .
 אסימפטוטה אנכית: אין,
 משופעת: הישר $y = x + \pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(-1, 0.575)$, מינימום: $(1, -0.575)$.
 תחום עלייה: $x < -1$ or $x > 1$, ירידה: $-1 < x < 1$.
 נקודות פיתול: $(0, 0)$.
 תחום קמירות: $x > 0$, קעירות: $x < 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית.
 מחזוריות: כן, ממחזור 2π .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : $x = 0, \pi, 2\pi$.
 אסימפטוטה אנכית: אין,
 משופעת: הישר $y = x + \pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, מינימום: $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$.
 תחום עלייה: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ or $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, ירידה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.
 נקודות פיתול: אין.

גרפים



חקירת פונקציה – שאלות כלליות

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$, וידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון. מצאו את הקבוע a .

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$, וידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון. מצאו את הקבועים a, b .

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$, וידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת פיתול. מצאו את הקבוע a .

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$, וידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת פיתול. מצאו את הקבועים a, b .

(5) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 3$ הוא 33. מצאו את a .

(6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3, 9)$ הוא 12. מצאו את a, b .

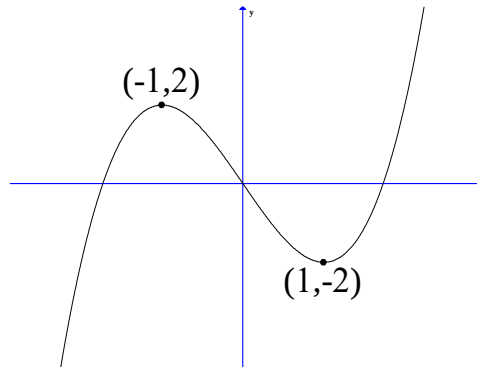
(7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y = 4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a .

(8) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y = 0.5x + 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a ואת b .

(9) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$.

ידוע שהישר $x=1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a .

שאלות 10-17 מתייחסות לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$:



(10) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?

(11) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?

(12) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?

(13) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד?

(14) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות?

(15) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

(16) האם קיים ערך של k , עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

(17) מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.

(18) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(2) = 4$.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

א. חשבו $z'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכיחו כי z יורדת.

(19) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1) = 2$, $f'(1) = e$.

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{x}$$

נגדיר פונקציה חדשה

א. האם z עולה או יורדת בנקודה $x = e$?

ב. נתון בנוסף כי f שלילית ועולה.

מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של z ?

(20) נתונה פונקציה $f(x)$ חיובית ויורדת.

$$z(x) = \sqrt{f(x^2) + 4}$$

נגדיר פונקציה חדשה

מי מהבאים בהכרח נכון?

א. z עולה לכל x .

ב. z יורדת לכל x .

ג. z עולה לכל $x > 0$.

ד. z יורדת לכל $x > 0$.

(21) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$.

$$g(x) = x^2 + f(\ln x)$$

נגדיר פונקציה חדשה:

א. חשבו את $g'(e)$.

ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודה $x = e$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$$

חשבו את הגבול

(22) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ידוע שנקודת החיתוך היחידה של $f(x)$ עם ציר ה- x היא ב- $x = 0$.

$$g(x) = (f(x))^2$$

נגדיר $g(x) = (f(x))^2$. איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה**:

א. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.

ב. אם f יורדת בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.

ג. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g אין נקודת קיצון.

(23) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה פעמיים לכל x ומקיימת $f''(x) = a \cdot f(x)$, כאשר $a < 0$.

איזו מבין הטענות הבאות בהכרח לא נכונה:

- א. בתחום בו $f(x)$ שלילית, $f(x)$ קמורה (קעורה כלפי מעלה).
- ב. אם $f(x)$ חיובית בתחום מסוים אז $f'(x)$ יורדת באותו התחום.
- ג. אם בתחום מסוים $f(x)$ עולה וחותכת את ציר x בנקודה $(n, 0)$, אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = n$ הוא המקסימלי באותו התחום.
- ד. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אז $f(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

תשובות סופיות

$$a = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$a = -4, b = 6 \quad (2)$$

$$a = -\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$a = -1, b = 3 \quad (4)$$

$$a = 1 \quad (5)$$

$$a = \frac{2}{3}, b = -1 \quad (6)$$

$$a = 8 \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 1 \quad (8)$$

$$a = -7 \quad (9)$$

$$1 \quad (10)$$

$$2 \quad (11)$$

$$3 \quad (12)$$

$$k < -2, k > 2 \quad (13)$$

$$k = \pm 2 \quad (14)$$

$$-2 < k < 2 \quad (15)$$

$$\text{לא} \quad (16)$$

$$x < -1, -1 < x < 1, x > 1 \quad (17)$$

$$z'(0.5) = -16 \quad \text{א.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad (18)$$

$$\text{א. עולה.} \quad \text{ב. יורדת.} \quad (19)$$

$$\text{ד} \quad (20)$$

$$2e+1 \quad \text{א.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג.} \quad 2e+1 \quad (21)$$

$$\text{ג} \quad (22)$$

$$\text{ד} \quad (23)$$

הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

$$(1) \quad (-\infty < x < \infty), \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2$$

$$(2) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right), \quad x < 2 \sin x$$

$$(3) \quad (x > 0), \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$$

$$(4) \quad (x \geq 0), \quad \ln(x+1) \leq x$$

$$(5) \quad \text{נתון כי } f \text{ רציפה לכל } x \geq 0, \quad f'(x) > 0 \text{ לכל } x > 0, \text{ וכן } f(0) = 0.$$

$$\text{הוכיחו כי לכל } x > 0 \text{ מתקיים } f(x) - \frac{1}{2}(f(x))^2 < \ln(1 + f(x)).$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 10 - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

תוכן העניינים

1. מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה 136
2. שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי 139
3. הוכחת אי שוויונים 140

מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

שאלות

בשאלות 1-7 מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות, בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

$$(-1 \leq x \leq 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2)$$

$$(-1 \leq x \leq 20) \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}(20 - x) \quad (3)$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right] \quad f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x < 1 \\ (x - 2)(x - 3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$(-5 \leq x \leq 1) \quad f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-5 < x < -1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x + 1} \quad (6)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

$$(8) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = x^x \text{ בתחום } x > 0.$$

א. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. דני טוען שהפונקציה הפיכה בקטע $(0, 0.5)$. הוכיחו שדני טועה.

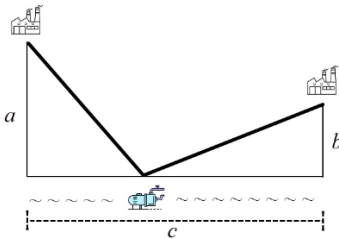
$$(9) \quad \text{מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה } f(x) = x^2 + |\ln x|.$$

$$(10) \quad \text{מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של } f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x \text{ ב-} \mathbb{R}. \text{ הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.}$$

11 מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$,

ב- $\mathbb{R}$ וב- $[1, 3]$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.



12 לחברת מי עדן יש שני מפעלים.

האחד מרוחק a ק"מ מהמעין.

השני מרוחק b ק"מ מהמעין.

המרחק האופקי בין המפעלים הוא c ק"מ.

החברה מעוניינת להקים תחנת שאיבה במעין

בין שני המפעלים. התחנה מחוברת למפעלים.

מהו האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך?

הראו שהאורך המינימלי מתקבל כאשר הזווית בין כל צינור למעין שוות.

13 גליל חסום בכדור.

הוכיחו, מבין כל הגלילים האפשריים הגדול ביותר בנפחו הוא זה שגובהו פי

$\sqrt{2}$ מרדיוס הבסיס שלו.

תשובות סופיות

- (1) $(-1, -7)$ מינימום מוחלט, $(3, 9)$ מקסימום מוחלט.
- (2) $(-1, 0)$ מינימום מוחלט, $(5, 0)$ מינימום מוחלט, $(2, 3)$ מקסימום מוחלט.
- (3) $(0, 0)$ מינימום מוחלט, $(20, 0)$ מינימום מוחלט, $(8, 48)$ מקסימום מוחלט.
- (4) $(2.5, -0.25)$ מינימום מוחלט, $(1, 2)$ מקסימום מוחלט.
- (5) $(-3, 1)$ מינימום מוחלט, $(-5, 17)$ מקסימום מוחלט.
- (6) $(-2, -4)$ מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.
- (7) אין מקסימום ואין מינימום מוחלטים.
- (8) א. אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט הוא $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$. ב. שאלת הוכחה.
- (9) אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט $0.5(1 + \ln 2)$.
- (10) מקסימום מוחלט 1, מינימום מוחלט $\frac{1}{2}$.
- (11) ב- $\mathbb{R}$: $(3, 0)$, $(1, 0)$ מינימום מוחלט, מקסימום מוחלט לא קיים.
- ב- $[1, 3]$: $(3, 0)$, $(1, 0)$ מינימום מוחלט, $(2, 1)$ מקסימום מוחלט.
- (12) האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך הוא $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$.
- (13) שאלת הוכחה.

שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי

שאלות

- (1) תהי f פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) .
נניח שקיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $(f(c) - f(a))(f(b) - f(c)) < 0$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $d \in (a, b)$ כך ש- $f'(d) = 0$.
- (2) פונקציה $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע $[a, b]$.
ידוע כי $f(x)$ מקיימת $f(x) - f'(x) = f''(x)$ לכל x , וכן $f(a) = f(b) = 0$.
הוכיחו כי $f(x) = 0$ לכל x בקטע.
- (3) הפונקציה f גזירה פעמיים ומקיימת $f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$ עבור פונקציה g מסוימת.
הוכיחו: אם הפונקציה f מקבלת את הערך 0 בשתי נקודות, אז היא שווה אפס בכל הקטע בין הנקודות.
- (4) תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה פעמיים בקטע (a, b) , כך ש-
 $f''(x) < 0$ בקטע זה.
נתון כי $f(a) = f(b) = 0$.
א. הוכיחו כי $f(x) > 0$ בקטע (a, b) .
ב. האם סעיף א' נשאר נכון אם מורידים את דרישת הרציפות? הוכיחו או הפריכו.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.

הוכחת אי שוויונים

שאלות

בשאלות 1-3 הוכיחו את אי-השוויונים שמימין, לגבי התחום שבסוגריים משמאל:

$$(1) \quad x^3 e^{-x} \leq \frac{27}{e^3} \quad (\text{לכל } x)$$

$$(2) \quad x e^{-\sqrt{x}} \leq 1 \quad (x \geq 0),$$

$$(3) \quad 0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1 \quad (x \leq 1),$$

(4) יהיו a ו- b מספרים חיוביים. הוכיחו שאי-השוויונים הבאים לא יכולים להתקיים בעת ובעונה אחת:

$$(1) \quad a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad (2) \quad b(1-a) > \frac{1}{4}$$

הערת סימון: $[a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$; $(a, b) \Leftrightarrow a < x < b$; $[a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 11 - בעיות מקסימום ומינימום כלכליות

תוכן העניינים

1. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון 141

שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x .
- נוודא שערך ה- x מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

שאלות

1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת x ליטר שוקו ליום, היא יכולה לקבל מחיר של $p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$ שקל לליטר.

- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
- מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
- פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.

2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
- אם $x = 20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
- אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x) = -0.08x^2 + 40x$.

- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
- מצאו את פונקציית הביקוש ושרטטו את הגרף שלה.

4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$.

- מצאו את תחום הפונקציה.
- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
- מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
- לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?

5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם $x = 40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?

6 פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

- מצאו את המחיר, הנותן את הפדיון המקסימלי.
- מהו הביקוש במקרה זה?
- מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאנו? מה משמעותו?

7 פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר x קפה ביום, היא $C(x) = 5x + 150$.

- שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
- מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.
- מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?
- מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

8 פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.

- חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.
- כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
- חשבו את העלות השולית ליום, עבור $x = 100$. איזו מסקנה ניתן להסיק?

9 פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.

- חשבו את העלות, כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
- חשבו את העלות השולית, כאשר $x = 100$.
- חשבו כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x = 100$ ל- $x = 101$, והשוו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?
- מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

10 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$,

ופונקציית עלות כוללת $TC(Q) = 200 + 4Q$.

- מהי הכמות, Q , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

11 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 20$,

ופונקציית עלות $TC(Q) = 300 + 2Q^2$.

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

12 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$,
ופונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

13 ליצרן פונקציית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$,
ופונקציית עלות $TC(Q) = 200 + 4Q$.
מהי הכמות, Q , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

14 ליצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$,
אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

15 ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבר את המשמעות הגרפית.

ב. הוכיחו שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה שולית שווה למחיר המוצר.

16 $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $C'(x)$ – הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעות.

א. האם ייתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?

ב. האם ייתכן להפך?

ג. הוכיחו כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

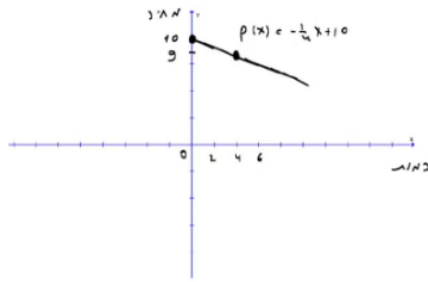
17 מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי הייצור.
נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- p_1 וב- p_2 , בהתאמה.
אם נשתמש ב- x יחידות מג"י אחד וב- y יחידות מג"י 2,
המפעל מייצר $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל A ₪.

א. הוכיחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי

$$\text{כאשר מתקיימת הנוסחה } \frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}.$$

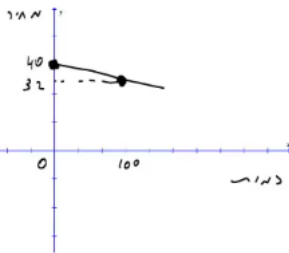
ב. חשבו x ו- y , עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:
 $p_1 = 100$ ₪, $p_2 = 372,000$ ₪, $A = 3,000$.

תשובות סופיות

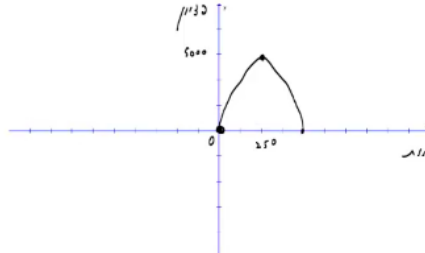


(1) א. 9 ב. 7 ג. 16 ה. $x(p) = 40 - 4p$ ד.

(2) א. $R(x) = -0.6x^2 + 120x$, בתחום: $x \geq 0$ ב. 2,160 ג. 2,160



(3) א. $x \geq 0$ ב. ג.



(4) א. $x \geq 0$ ב. פונקציית הפדיון: $R(x) = -0.04x^2 + 100x$

הפדיון הממוצע: $AR(x) = -0.4x + 100$, $x > 0$ ג. $R'(x) = -0.08x + 100$

ד. 1,250; הפדיון המקסימלי: 62,500.

(5) א. פונקציית הפדיון: $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x$

הפדיון השולי: $R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$ ב. לא.

ג. 30; הפדיון המקסימלי: 108,000.

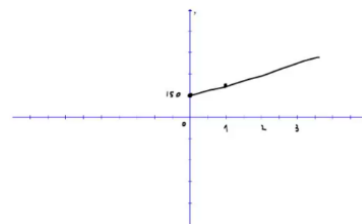
(6) א. $33\frac{1}{3}$ ב. $Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג. $-3\frac{1}{3}$; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

(7) א. ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל,

גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. 250 ד. $MC(x) = 5$



(8) א. 21.6 ב. 100 ג. 18 ש; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה

אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ש בערך.

(9) א. $C(100) = 1240$, $C(101) = 1250.804$ ב. 10.8

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדל.

(10) הכמות: 800, המקסימום: 38,200.

(11) הכמות: 5, המקסימום: -250.

(12) 25**(13)** הכמות : 800, המקסימום : 38,200.

(14) $TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5$

(15) שאלת הוכחה.**(16)** א. כן. ב. לא. ג. שאלת הוכחה.**(17)** א. שאלת הוכחה. ב. $x = 4, y = 3600$.

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 12 - הוכחות של משפטים נבחרים בקורס

תוכן העניינים

1. הוכחות של משפטים נבחרים 147

הוכחות של משפטים נבחרים

הוכיחו את המשפטים הבאים:

גזירות גוררת רציפות

אם הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 , אזי היא רציפה בנקודה זו.

כלל השרשרת

תהי $y = g(x)$ פונקציה גזירה בנקודה x , ותהי $f(g(x))$ גזירה בנקודה $g(x)$.
אזי הפונקציה המורכבת $f(g(x))$ גזירה בנקודה x , ומתקיים

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

כלל לופיטל

נניח ש- g ו- f פונקציות גזירות ובעלות נגזרות רציפות בנקודה x_0 ,

ונניח כי $f(x_0) = g(x_0) = 0$ וכן $g'(x_0) \neq 0$, אז $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

משפט לגראנז'

אם הפונקציה $f(x)$

א. רציפה בקטע הסגור $[a, b]$,

ב. גזירה בקטע הפתוח (a, b) ,

אז קיימת נקודה $a < b < c$, כך ש- $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

משפט פרמה

נניח ש- f פונקציה המוגדרת בתחום המכיל את הנקודה x_0 .
אם f גזירה בנקודה x_0 וגם x_0 נקודת מקסימום מקומית, אז $f'(x_0) = 0$.

משפט רול

אם הפונקציה $f(x)$

א. רציפה בקטע הסגור $[a, b]$,

ב. גזירה בקטע הפתוח (a, b) ,

ג. מקיימת $f(a) = f(b)$,

אז קיימת נקודה $a < b < c$, כך ש- $f'(c)$.

נגזרת הפונקציה ההפוכה

תהי $y = f(x)$ פונקציה הפיכה ורציפה בסביבת הנקודה x_0 .

אם $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 וגם $f'(x_0) \neq 0$, אז גם הפונקציה ההפוכה שלה,

$$x = g(y), \text{ פונקציה גזירה בנקודה } y_0 = f(x_0), \text{ ומתקיים השוויון } g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

להוכחות המלאות היכנסו לאתר Gool.co.il

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 13 - טור הנדסי וטור חשבוני

תוכן העניינים

1. הקדמה כללית	(ללא ספר)
2. סדרה חשבונית	149
3. סדרה הנדסית	156
4. סדרות מעורבות	161
5. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת	163

סדרה חשבונית:

סיכום כללי:

- נוסחת האיבר הכללי:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר a_1 והפרשה הוא d נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- כלל נסיגה של סדרה חשבונית:

כלל נסיגה של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

- נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$$

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים:

שאלות:

- (1) נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7, \dots$. מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.
- (2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.
- (3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, \dots, 49.5$.

- (4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24.
מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.
- (5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?
- (6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?
- (7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $91, 88, 85, 82, \dots$.
- (8) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3, 3x-4, x^2-1$.
- (9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$
הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.
- (10) בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.
א. הוכח: $a_5 = 0$.
ב. נתון: $a_3 - a_{11} = 24$. מצא את a_1 ואת d .
ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n = 2a_n - 3$.
מצא את ערך האיבר השלישי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.
- (11) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3, 2, 7, 12, \dots$.

- (12) נתונה הסדרה החשבונית : $5, -1, -7, -13, \dots$. כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?
- (13) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?
- (14) נתונה הסדרה החשבונית : $-63, -67, -71, \dots$. כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?
- (15) נתונה הסדרה החשבונית : $4, 13, 22, 31, \dots$. בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.
- (16) נתונה הסדרה החשבונית : $4, 9, 14, 19, \dots, 599$. מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.
- (17) סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב-1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.
א. בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d .
ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?
- (18) נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.
א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.
ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.
- (19) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5, ה-7, וה-16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.
א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.
ב. מצא את האיבר השלישי הראשון בסדרה.
ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

$$(20) \quad \begin{cases} 150, 144, 138, \dots \\ 90, 93, 96, \dots \end{cases} \quad \text{נתונים שני טורים חשבוניים:}$$

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

ב. מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

(21) נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה

$$\text{הוא } d_2. \text{ ידוע כי: } d_1 = -2d_2.$$

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n .

א. מצא את הפרש הסדרה $a_n - d_1$.

ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50} .

מצא את a_1 ואת b_1 .

(22) נתונה הסדרה החשבונית: $-21, -17, -13, \dots$

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(23) בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות

האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.

הוכח כי $nd = 60$.

(24) בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים,

גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים

במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

(25) לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את x .

ii. מצא את הפרש הסדרה.

ב. ידוע כי: $a_{12} = 0$. מצא את a_1 .

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 308$.

מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

(26) בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים

העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6.

האיבר הראשון אינו אפס.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. $a_1 = -4d$.

ii. $S_9 = 0$.

ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.

מצא את a_1 ואת d .

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים

במקומות הזוגיים הוא 504.

(27) בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66

מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח כי $nd = 66$.

ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים

הראשונים.

ג. סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן

ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

(28) אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.

ההצעה הראשונה :

לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום

הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.

ההצעה השנייה :

לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום

הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.

ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים

שבהצעה הראשונה.

א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.

ב. מה מחיר הרכב?

תשובות סופיות:

- (1) $a_{43} = -235$
- (2) $d = 4, a_1 = -5$
- (3) 20 איברים.
- (4) 48 איברים.
- (5) 15 קפיצות.
- (6) 58 מספרים.
- (7) 31 איברים חיוביים.
- (8) $x = 4, x = 1$
- (9) $a_{19} = 59$
- (10) א. הוכחה.
- (11) $S_{14} = 413$
- (12) 21 איברים.
- (13) 16 דקות.
- (14) 37 איברים.
- (15) 3647
- (16) 23920
- (17) א. $n = \sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.
- (18) א. $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$ ב. $d = 4$
- (19) א. $a_1 = 50, d = -6$ ב. $a_{10} = -4$ ג. $n = 6$
- (20) א. $n = 81$ ב. $n = 16$
- (21) א. $d_1 = 4$ ב. $a_1 = -52, b_1 = 95$
- (22) אי-זוגיים: $S = 99$ זוגיים: $S = 135$
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) 29 איברים.
- (25) א. i. $x = -50$ ii. $d = 11$ ב. $a_1 = -121$ ג. $S = 2156$
- (26) א. הוכחה. ב. $a_1 = -8, d = 2$ ג. $n = 36$
- (27) א. הוכחה. ב. $S = 22a_1 + 693$ ג. $a_9 = 1$
- (28) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 נח.

סדרה הנדסית:

סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר a_1 ומנתה היא q נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה הנדסית:**

כלל נסיגה של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:**

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה

$$\text{הראשון הוא } a_1 \text{ נתון ע"י: } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

שאלות:

$$(1) \quad \text{נתונה הסדרה ההנדסית: } \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$$

מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

$$(2) \quad \text{מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: } \frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{64}{81}$$

$$(3) \quad \text{בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.}$$

$$(4) \quad \text{בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.}$$

- (5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
- (6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?
- (7) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית: $x-6, x+4, 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.
- (8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.
- (9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: 5, 10, 20, 40, ...
- (10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?
- (11) סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?
- (12) בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.
- (13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

(14) המספרים: $2x-3$, $x-9$, $x-13$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

- א. מצא את x .
 - ב. ענה על הסעיפים הבאים:
 - i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.
 - ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.
 - ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 5^{11}$.
- מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

(15) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, 4, 12, 36, \dots, a_{n+1}$. מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6}, \quad b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6}, \quad b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6}, \quad \dots, \quad b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}$$

- א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.
- ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n ובין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.
- ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ- a_8 .

(16) נתונה הסדרה ההנדסית: $7, 14, 28, \dots$. בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(17) בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

(18) נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים. בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

(19) בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

(20) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.
- בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.
- ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.
- ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

(21) בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

- ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8.
- מצא את האיבר הראשון בסדרה.
- ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

(22) באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה :

תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא : כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת, כנגד השנייה - שתי אבנים, כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...

המלך הסכים להצעה.

- א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?
- ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.
- ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא : תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים, כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

תשובות סופיות:

(1) $a_9 = 729$

(2) $n = 7$

(3) $a_1 = \pm \frac{1}{4}, q = \pm 2$

(4) $a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3$

(5) $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5$

(6) 5 דקות.

(7) $x = -\frac{2}{3} \rightarrow q = -\frac{1}{2}, x = 11 \rightarrow q = 3$

(8) $a_8 = 384$

(9) $S_9 = 2555$

(10) 5 דקות.

(11) $n = 4$, יש 12 איברים בסדרה.

(12) $q = 2$

(13) $n = 6$

(14) א. $x = 14$ ב. i. $a_n = 5^{n-1}$ ב. ii. a_6, a_7 ג. $S_7^* = 61,034,375$

(15) א. $q = 3$ ג. b_5, b_6

(16) אי-זוגיים: $S = 595$, זוגיים: $S = 1190$

(17) $q = 4$

(18) $\frac{q+1}{q}$

(19) $a_1 = \frac{3}{8}$

(20) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$ ב. $a_n = 3^{n-1}$ ג. a_5, a_6

(21) א. $q = 2$ ב. $a_1 = 1$ ג. $S_{6(p)} = 2730$

(22) א. $a_{25} = 16,777,216$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו

לו 20,000,000 אבנים. ג. $2^{24}, 4, 16, 64, \dots, 22,369,620$ $S_n =$

סדרות מעורבות:

שאלות:

- (1) נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 3. אם נכפול את המספר הראשון ב-3, נוסיף למספר השני 4 ונחסיר מהמספר השלישי 4 תתקבל סדרה חשבונית. מצא את המספרים.
- (2) נתונות שתי סדרות שמתחילות במספר 2 ובשתייהן 3 איברים. סדרה אחת היא חשבונית והשנייה הנדסית. האיבר השלישי בשתי הסדרות זהה והאיבר השני בסדרה ההנדסית קטן ב-4 מהאיבר השני בסדרה החשבונית. מצא את מנת הסדרה ההנדסית.
- (3) נתונים ארבעה מספרים בעלי התכונות הבאות:
 הראשון, השני והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 2.
 הראשון, השלישי והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית
 וסכומם $22\frac{1}{2}$. מצא את ארבעת המספרים.
- (4) ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה.
 האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית.
 האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.
 א. מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.
 ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום 60.
 ג. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.
- (5) נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית: $a_1, a_2, a_3, \dots$ וסדרה הנדסית: $b_1, b_2, b_3, \dots$. ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה. האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.
 א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.
 ב. נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.
 ג. בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

תשובות סופיות:

- (1) המספרים הם: 2, 6, 18.
- (2) $q = -1$ או $q = 3$.
- (3) המספרים הם: 3, 6, 7.5, 12.
- (4) א. 8, 10, 12 ב. 5 ג. 6.
- (5) א. $q = -2$ ג. $a_1 = 2$.

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

סיכום כללי:

• הגדרה:

סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q| < 1$, $(q \neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

• נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

$$S = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{מתקבל הכלל הבא:}$$

• סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

○ כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

○ כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה

$$S_n = \frac{a_k(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{באופן הבא:}$$

שאלות:

(1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12, 4, 1\frac{1}{3}, \dots$

(2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

(3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

(4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

*הערה: שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.

(5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n שמנתה q , $(q \neq 0, |q| < 1)$, מגדירים שלוש סדרות חדשות: b_n , c_n ו- d_n באופן הבא:

הסדרה:	b_n	c_n	d_n
הכלל:	$b_1 = a_1$	$c_1 = a_2^2 - a_1^2$	$d_1 = S_a + a_1$
	$b_2 = a_1 + a_2$	$c_2 = a_3^2 - a_2^2$	$d_2 = S_a + a_2$
	$b_3 = a_1 + a_2 + a_3$	$c_3 = a_4^2 - a_3^2$	$d_3 = S_a + a_3$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_{a(n)}$	$c_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$	$d_n = S_a + a_n$

הסכום S_a הוא סכום הסדרה a_n , והסכום $S_{a(n)}$ הוא סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n .

- א. קבע אלו מבין הסדרות b_n , c_n ו- d_n הן הנדסיות והבע את מנתן ע"י q .
- ב. הבע באמצעות a_1 בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.
- ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א' ב- $S_{(s)}$. הוכח כי לא קיים ערך של q עבורו סכום ריבועי האיברים $S_{(s)}$, שווה לסכום הסדרה הנ"ל בריבוע.

(6) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: a_n שמנתה q . מגדירים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q}, b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q}, b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q}, \dots, b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q}, \dots$$

כאשר: S_n^* מייצג את סכום הסדרה a_n החל מהאיבר a_n (ועד אינסוף).

- א. הוכח כי הסדרה b_n היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות a_1 ו- q .
- ב. ידוע כי סכום הסדרה b_n הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה a_n גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה b_n . מצא את a_1 ו- q .
- ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים: $b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = 42$.
- ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n .
- ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n .
- ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^* . חשב את סכום הסדרה b_n^* .
- ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^{**} . חשב את סכום הסדרה b_n^{**} .
- ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה b_n . מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(s)}$ (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית b_n ב- S_b . הראה כי: $S_b^2 \neq S_{(s)}$.
- ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה a_n וסכום איברי הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

- (7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$.
- הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.
 - ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.
 - מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.
- (8) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
- מצא את מנת הסדרה.
 - מחברים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n .
 - הוכח כי הסדרה b_n גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.
 - הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n .
 - סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n .
- (9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שמנתה היא q , $(0 < q < 1)$.
- נגדיר את הסכומים הבאים: $T = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10} + \dots$, $V = a_3 + a_7 + a_{11} + \dots$. נתון כי: $T = 6V$.
 - מצא את מנת הסדרה q .
 - פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?
 - מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.
- (10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ שמנתה היא q .
- בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{2n}^2$.
 - הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.
 - בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
 - מצא את מנת הסדרה.
 - מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו.
 - ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר a_n .

- (11)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שמנתה היא q , $(q \neq 0, |q| < 1)$.
 נגדיר את הסכומים הבאים: $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13} + \dots$, $V = a_2 + a_7 + a_{12} + \dots$.
 נתון כי: $V = 0.3T$.
 א. מצא את מנת הסדרה q .
 מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.
 ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.
 ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

תשובות סופיות:

$$S = 18 \quad (1)$$

$$a_1 = 24 \quad (2)$$

$$q = \frac{4}{5}, a_1 = 12 \frac{1}{2} \text{ או } q = \frac{1}{5}, a_1 = 50 \quad (3)$$

$$S = 18 \frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{q-1}}{\frac{a_n(q^n-1)}{q-1}} = \frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{a_n(q^n-1)} = q \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q^n-1} : b_n \text{ הסדרה } (5)$$

היות והיא תלויה ב- n היא אינה הנדסית.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^4 - a_n^2 q^2}{a_n^2 q^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^2 (q^2 - 1)}{a_n^2 (q^2 - 1)} = q^2 : c_n \text{ הסדרה } c_n \text{ הנדסית}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S + a_{n+1}}{S + a_n} = \frac{\frac{a_1}{1-q} + a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q} + a_n} = \frac{a_1 + (1-q)a_{n+1}}{a_1 + (1-q)a_n} = \frac{a_1(1 + (1-q)q^n)}{a_1(1 + (1-q)q^{n-1})} = \frac{q^n - q^{n+1} + 1}{q^{n-1} - q^n + 1} : d_n \text{ הסדרה}$$

$$S_{(c_n)} = \frac{c_1}{1-q_c} = \frac{a_2^2 - a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^2(q^2-1)}{1-q^2} = -a_1^2. \text{ ב. } S_{(c_n)} \text{ היא אינה הנדסית.}$$

ג. מההשוואה: $S_{(s)} = S^2$ מקבלים כי פתרון המשוואה הוא: $q = 0, \pm 1$.

כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה a_n היא שבר.

עבור $|q| > 1$ הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של q עבורו השוויון יתקיים. מש"ל.

$$b_n = \frac{a_1}{1-q} q^{n-1} \quad \text{א. } (6) \quad a_1 = 56, q = \frac{1}{3} \quad \text{ב.} \quad \text{ג. הוכחה.} \quad \text{ד. } 31.5$$

$$\text{ה. } 94.5 \quad \text{ו. } -63 \quad \text{ז. } 63 \quad \text{ח. } 7938$$

$$S^2 : \text{משמעו: } (b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots)^2$$

$$S_{(s)} : \text{משמעו: } b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + \dots \text{ ברור כי הביטויים אינם שווים.}$$

$$q = \frac{1}{3}, a_1 = 16 \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה.} \quad (7)$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{a_{2n-1} + a_{2n}} = q^2 \quad \text{ב.} \quad q = 0.6 \quad \text{א.} \quad (8) \quad a_1 = 200 \quad \text{ז.}$$

$$q = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad (9) \quad \text{ב. פי 5} \quad \text{ג. } a_1 = 1024$$

$$a_5 = 20 \quad \text{ג.} \quad q = 0.5 \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה.} \quad (10)$$

$$S = 288 \quad \text{ג.} \quad a_1 = -16 \quad \text{ב.} \quad q = \frac{1}{3} \quad \text{א.} \quad (11)$$

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 14 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

169	1. משוואות ממעלה ראשונה
171	2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה
174	3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון
175	4. משוואה ממעלה שנייה
177	5. משוואות דו-ריבועיות
179	6. משוואות עם פרמטרים
181	7. משוואות עם שורשים
183	8. משוואות עם ערך מוחלט
184	9. מערכת משוואות ממעלה שנייה
186	10. משוואות מתקדמות מסכמות
189	11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax = b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x = \frac{b}{a}$ כאשר $a \neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| א. $6x + 2 = 8$ | ב. $7 - 2x = 7$ |
| ג. $2x + x = 24$ | ד. $2x + 6 = 8 + x$ |
| ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$ | ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$ |
| ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$ | ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$ |

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| א. $3(x - 1) - 4 = 2$ | ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$ |
| ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$ | ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$ |
| ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$ | ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$ |

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4$ ב. $\frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1$ ג. $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15}$ ד. $\frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1$ ה. $\frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2$ ו. $5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1$	א. $\frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0$ ב. $\frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0$ ג. $\frac{3}{x} = \frac{1}{x+2}$ ד. $\frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2}$ ה. $\frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}$ ו. $\frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}$
---	---

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15}$ ב. $\frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0$ ג. $\frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0$ ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12$	א. $\frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0$ ב. $\frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0$ ג. $\frac{3}{x} = \frac{1}{x+2}$ ד. $\frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2}$ ה. $\frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}$ ו. $\frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}$
--	---

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|--------------------|--------------------|---------------------|--------------------|------------|--------------------|
| א. $x=1$ | ב. $x=0$ | ג. $x=8$ | ד. $x=2$ | ה. $x=2$ | ו. $x=-3$ |
| ז. $x=\frac{1}{2}$ | ח. $x=4$ | | | | |
| א. $x=3$ | ב. $x=\frac{1}{2}$ | ג. $x=2\frac{1}{4}$ | ד. $x=1$ | ה. $x=4$ | ו. $x=-1$ |
| א. $x=-18$ | ב. $x=-30$ | ג. $x=-1$ | ד. $x=1$ | ה. $x=-10$ | ו. $x=-21$ |
| א. $x=8$ | ב. $x=-1$ | ג. $x=-3$ | ד. $x=-2$ | ה. $x=2$ | ו. $x=\frac{1}{2}$ |
| א. $x=-6$ | ב. $x=-7$ | ג. $x=-7$ | ד. $x=6, x \neq 3$ | | |

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1, b_1, c_1 ו- a_2, b_2, c_2 הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x+3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

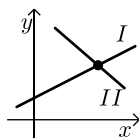
פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

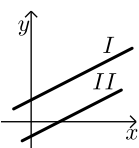
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



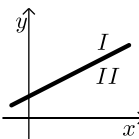
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
- פתרון ע"י השוואת מקדמים:
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$\begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases}$.ג.	$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$.ב.	$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases}$.א.
$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases}$.ו.	$\begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases}$.ה.	$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$.ד.

(2) פתור את המשוואות הבאות:

$\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases}$.ב.	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$.א.
$\begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases}$.ד.	$\begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases}$.ג.

(3) פתור את המשוואות הבאות:

$\begin{cases} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{cases}$.ב.	$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases}$.א.
--	---

(4) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

(6) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

תשובות סופיות:

(1) א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3).

(2) א. $(4, \frac{1}{3})$ ב. $(-\frac{4}{5}, 9)$ ג. (4,1.6) ד. (-2,7).

(3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

(4) א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2).

(5) א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1).

(6) א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4).

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax = b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x = \frac{b}{a}$.

כאשר $a = 0$ מתקבלת המשוואה $0 \cdot x = b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b = 0$ את המשוואה היא $0x = 0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b \neq 0$ את המשוואה היא $0x = b \neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(1) \quad x + 4 = 6 + x \quad (2) \quad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2$$

$$(3) \quad 6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (4) \quad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

- א. איזה מספר יש להציב ב- $\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
- ב. איזה מספר יש להציב ב- $\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
- ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
- ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5) א. -8 ב. -1 ג. $-7x - 1$ ד. $-7x + k$ כאשר k הוא מספר כלשהו השונה מ-1.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), נקראת משוואה ריבועית.
פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2 + 5x - 4 = 0$.
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2 + 4x + 4 = 0$.
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2 + x + 4 = 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x^2 + 10x - 16 = 0$

ד. $2x^2 - 6x + 5 = 0$

א. $x^2 + 3x - 10 = 0$

ג. $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

ד. $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

א. $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ג. $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } x^2 - 36 = 0 & \text{ב. } 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג. } 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 & \text{ד. } (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } -7x^2 - 14x = 0 & \text{ב. } 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג. } 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 & \text{ד. } (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} & \text{ב. } \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג. } \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -5 & \text{ב. } x_1 = 2, x_2 = 8 \\ \text{ג. } x = \frac{2}{5} & \text{ד. אין פתרון.} \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1 & \text{ב. } x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4} \\ \text{ג. } x_1 = 1, x_2 = -10 & \text{ד. } x_1 = 0.6, x_2 = -2 \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } x = \pm 6 & \text{ב. } x = \pm \frac{3}{4} \\ \text{ג. } x = \pm 3 & \text{ד. } x = \pm 1 \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } x_1 = 0, x_2 = -2 & \text{ב. } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5} \\ \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6} & \text{ד. } x_1 = 0, x_2 = -2 \end{array}$$

$$\text{ד. } x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8}$$

$$(5) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1.2 & \text{ב. } x = 5, x \neq -3 \\ \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = -5 & \text{ד. } x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7} \end{array}$$

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ כאשר הנעלם הוא x .
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$ באמצעות פרמטר: $t = x^2 - 1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2 + 3t - 2 = 0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x .
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- (1) $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$
- (2) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
- (3) $13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
- (4) $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$
- (5) $x^6 + x^3 = 56$
- (6) $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$
- (7) $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$
- (8) $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$
- (9) $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$
- (10) $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$
- (11) $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$
- (12) $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$
- (13) $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$
- (14) $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$
- (15) $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$
- (16) $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$
- (17) $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$
- (18) $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$
- (19) $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$
- (20) $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$

תשובות סופיות:

(1) $x = \pm 1$

(2) $x = \pm 1, \pm \sqrt{2}$

(3) $x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}$

(4) $x = \pm 2, \pm 5$

(5) $x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2$

(6) $x = -2, \sqrt[3]{4}$

(7) $x_1 = 4, x_2 = 49$

(8) $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1$

(9) $x = 5, -1$

(10) $x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2}$

(11) $x = -1$

(12) $x_{1,2} = 1, 3$

(13) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06$

(14) $x_1 = 0, x_2 = -2$

(15) אין פתרונות.

(16) $x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}}$

(17) $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3$

(18) $x = -1, 2$

(19) $x = 3, -1$

(20) $x = \pm 1, 4, 6$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx = 4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר m .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m \neq 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b+1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות :

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \text{ א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$(2) \text{ א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left(\frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left(m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$(3) \text{ א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x} = a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$.

הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x} = a$ שבה $a < 0$ אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|--|---|
| (2) $\sqrt{x+2} = x$ | (1) $\sqrt{2x+5} = 7$ |
| (4) $\sqrt{2x+7} + 4 = x$ | (3) $\sqrt{3x+1} + x = 13$ |
| (6) $\sqrt{10x+6} + 9 = x$ | (5) $\sqrt{x-1} + 3 = x$ |
| (8) $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$ | (7) $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$ |
| (10) $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$ | (9) $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$ |
| (12) $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$ | (11) $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$ |
| (14) $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$ | (13) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ |
| (16) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$ | (15) $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$ |
| (18) $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ | (17) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$ |
| | (19) $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$ |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2 | $x = 22$ (1 |
| $x = 9$ (4 | $x = 8$ (3 |
| $x = 25$ (6 | $x = 5$ (5 |
| $x = 3.75$ (8 | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10 | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12 | $x = 6$ (11 |
| $x = 5$ (14 | $x = 3$ (13 |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15 |
| $x = 1$ (18 | $x = 6$ (17 |
| | $x = 2$ (19 |

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x| = a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| $ 3x - 24 = x$ (2) | $ 3x + 14 = 7$ (1) |
| $2x - 8 - x = 10$ (4) | $ 12 - x = 3x$ (3) |
| $ 14 - 3x = 2 x + 5 $ (6) | $ 4x - 5 = 2x + 13 $ (5) |
| $ x + 2 + 6 = 2x - 4 $ (8) | $ x + 7 = 2x $ (7) |
| $ 10 - 3x - x + 4 = 2x - 6 $ (10) | $ x + 2 + 2x - 6 = 4x + 8 $ (9) |

תשובות סופיות:

- | | | | |
|-----------------------------|-----------------|---------------------------|----------------------------|
| $x = 6$ (4) | $x = 3$ (3) | $x = 6, 12$ (2) | $x = -\frac{7}{3}, -7$ (1) |
| $x = 12, -1\frac{1}{3}$ (8) | $x = \pm 7$ (7) | $x = 24, \frac{4}{5}$ (6) | $x = 9, -1\frac{1}{3}$ (5) |
| | | $x = 0$ (10) | $x = 0, -12$ (9) |

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12) \qquad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

תשובות סופיות:

- (1) $(2,4), (4,2)$
- (2) $(\pm 4, -2)$
- (3) $(\pm 2, \pm 1)$
- (4) $(5, -2), (-5, 2)$
- (5) $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$
- (6) $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$
- (7) $(7, 4)$
- (8) $(5, -3)$
- (9) $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$
- (10) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$
- (11) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
- (12) $(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3)$
- (13) $(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7)$
- (14) $(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5)$

משוואות מסכמות מתקדמות:

סיכום כללי:

תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.
- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.
- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.
- משוואה עם פרמטר/ים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטר/ים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטר/ים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 (1) & x + \sqrt{x+6} - 6 = 0 \\
 (2) & x^2 + 5x - \sqrt{x^2 + 5x} - 30 = 0 \\
 (3) & 4x^2 + 16x - 4\sqrt{x^2 + 4x} - 3 = 0 \\
 (4) & 2x^2 + 6x - \sqrt{x^2 + 3x + 5} = 5 \\
 (5) & x^2 - \sqrt{16x^2 + 48} + 7 = 0 \\
 (6) & x^2 - \sqrt{6x^2 - 15} = 1 \\
 (7) & \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x \\
 (8) & \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5} = \frac{7}{\sqrt{x-1}} \\
 (9) & \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \\
 (10) & \sqrt{x + \sqrt{14x - 49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x - 49}} = \sqrt{14} \\
 (11) & \sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}} - \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 2 \\
 (12) & \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x}
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות עבור $a > 0$:

$$\begin{array}{ll}
 (13) & x^2 + ax - 2a\sqrt{x^2 + ax - a^2} = 0 \\
 (14) & x^2 + ax - 2a\sqrt{3x^2 + 3ax - 9a^2} = 0
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 (15) & |3 - |2 - x| + |x|| = 1 \\
 (16) & |4 - |5 - x|| = |x + 3| \\
 (17) & \left| \frac{x + |3 - x|}{x + 2} \right| = 18 \\
 (18) & \sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x + 1| \\
 (19) & \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0
 \end{array}$$

$$(20) \quad \text{הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה: } \frac{|x+2|}{|x|+2} = |2-x|+2$$

תשובות סופיות:

(1) $x = 3$

(2) $x_1 = 4, x_2 = -9$

(3) $x_1 = 0.5, x_2 = -4.5$

(4) $x_1 = 1, x_2 = -4$

(5) $x_{1,2} = \pm 1$

(6) $x_{1,2} = \pm 2$

(7) $x = 1$

(8) $x = 3$

(9) $x = 2$

(10) $3.5 \leq x \leq 7$

(11) $x = 4$

(12) $x = 1, x = \frac{9}{16}$

(13) $x_1 = -2a, x_2 = a$

(14) $x_1 = -2a, x_2 = 3a$

(15) $x \leq 0$

(16) $x = -1$

(17) $x = -\frac{39}{18}, -\frac{33}{18}$

(18) $x \leq \frac{5}{4}, x = -\frac{1}{4}$

(19) $x = -\sqrt{5}$

(20) שאלת הוכחה.

ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

שאלות:

פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

$$(2y+5)^3 \quad (2) \qquad (x-3)^3 \quad (1)$$

$$8y^3 + 343 \quad (4) \qquad 8x^3 - 1 \quad (3)$$

$$x^3y^6z^9 - 1 \quad (6) \qquad a^6 - 27 \quad (5)$$

$$64mn^4 - 8m^4n^7 \quad (8) \qquad 11 + 88x^{12} \quad (7)$$

$$\frac{x^3 + 64}{x^2 + 4x} \quad (10) \qquad \frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \quad (9)$$

משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

$$125x^3 = 1 - 15x + 75x^2 \quad (12) \qquad x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \quad (11)$$

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \quad (14) \qquad x^3 + x - 30 = 0 \quad (13)$$

משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (16) \qquad 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad (15)$$

מערכת משוואות:

$$(17) \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(18) \quad \begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

$$8y^3 + 60y^2 + 150y + 125 \quad (10)$$

$$(2y + 7)(4y^2 - 17y + 49) \quad (11)$$

$$(xy^2z^3 - 1)(x^2y^4z^6 + xy^2z^3 + 1) \quad (12)$$

$$8mn^4(2 - mn)(4 + 2mn + m^2n^2) \quad (13)$$

$$\frac{x^2 - 4x + 16}{x} \quad (14)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$x_{1,2,3} = -2, -1, 3 \quad (16)$$

$$x_{1,2,3} = -2.5, -1, 1 \quad (17)$$

$$(-5, -6), (6, 5) \quad (18)$$

$$x^3 - 9x + 27x - 27 \quad (1)$$

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \quad (2)$$

$$(a^2 - 3)(a^4 + 3a^2 + 9) \quad (3)$$

$$8(1 + 2x^4)(1 - 2x^4 + 4x^8) \quad (4)$$

$$\frac{1}{x + 2} \quad (5)$$

$$x = 4 \quad (6)$$

$$x = 3 \quad (7)$$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{2}, 1, 2 \quad (8)$$

$$(3, 6), (6, 3) \quad (9)$$

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 15 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

191	1. חוקי החזקות
196	2. חוקי השורשים
200	3. כתיבה מדעית של מספרים

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad a^0 = 1 & 2. \quad a^1 = a & 3. \quad a^n \cdot a^m = a^{m+n} \\
 4. \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & 5. \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} & 6. \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \\
 7. \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & 8. \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} & 9. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m
 \end{array}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad a^2 a^6 & \text{ב.} \quad t^3 t^5 t^7 & \text{ג.} \quad b^2 b^5 b^{12} b^3 \\
 \text{ד.} \quad \frac{k^8}{k^3} & \text{ה.} \quad \frac{n^{14}}{n^9} & \text{ו.} \quad \frac{c^6}{c^2} \\
 \text{ז.} \quad \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & \text{ח.} \quad \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & \text{ט.} \quad \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} \\
 \text{י.} \quad 3^2 3^3 3^4 & \text{יא.} \quad \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & \text{יב.} \quad \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8}
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & \text{ב.} \quad \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & \text{ג.} \quad \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4}
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243 \cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים :

א. $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$	ב. $\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$
ג. $\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$	ד. $2^3 + 2^5$

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק : $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

א. $(a^2)^4$	ב. $(c^3)^{10}$	ג. $(x^3 x^{10})^2$
ד. $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$	ה. $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$	ו. $\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$
ז. $\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$	ח. $\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$	ט. $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$
י. $\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$	יא. $\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$	יב. $\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$

(6) לפניך הביטויים הבאים : $\left((3^2)^3\right)^4$ ו- $\left((3^6)^n\right)^2$. מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

א. $\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$	ב. $\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$	ג. $\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$
------------------------------	--	--

(8) פשט את הביטויים הבאים :

א. $3^2 9 \cdot 81^2$	ב. $64^2 2^3 8^2$	ג. $125 \cdot 25 \cdot 5^5$
ד. $\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$	ה. $\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$	ו. $\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$

(9) פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \\ \text{ב.} & \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \\ \text{ג.} & \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} \end{array}$$

(10) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים : $(ab)^n = a^n b^n$ ו- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & (a^2b)^3 & \text{ב.} & (m^4n^3)^5 & \text{ג.} & (x^{12}y^3)^3 \\ \text{ד.} & \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 & \text{ה.} & \left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7 & \text{ו.} & \left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3 \\ \text{ז.} & \left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6 & \text{ח.} & \left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2 & \text{ט.} & \left(\frac{(b^{12}c)^2c^{14}}{c(c^3b^5)^4b^3}\right)^2 \end{array}$$

(11) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 & \text{ב.} & \left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2 & \text{ג.} & \left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^2 7)^5}\right)^3 \end{array}$$

(12) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^6} & \text{ב.} & \frac{1}{5^3} & \text{ג.} & \frac{1}{2^{10}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{8} & \text{ה.} & \frac{1}{81} & \text{ו.} & \frac{1}{125} \end{array}$$

(13) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^{-3}} & \text{ב.} & \frac{1}{3^{-2}} & \text{ג.} & \frac{1}{5^{-3}} \end{array}$$

(14) חשב את הביטויים הבאים :

ג. $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב. $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א. $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו. $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה. $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד. $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

(15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג. $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב. $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

(16) פשט את הביטויים הבאים :

ג. $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א. $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

תשובות סופיות:

- (1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
 ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5
- (2) א. 18 ב. ab ג. $x^6 y^{10}$
- (3) $n=16$
- (4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40
- (5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
 ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5
- (6) $n=2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}
- (9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x} + x$
- (10) א. $a^6 b^3$ ב. $m^{20} n^{15}$ ג. $x^{36} y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21} b^3$
- ז. $x^{12} y^{18}$ ח. $t^4 r^{12}$ ט. $b^2 c^6$
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3
- (15) א. $5^{24} \cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & 2. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} & 3. \quad \sqrt[n]{a^n} = a \\
 4. \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & 5. \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & 6. \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot n]{a}
 \end{array}$$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } 3^{\frac{1}{4}} & \text{ב. } 2^{\frac{3}{5}} & \text{ג. } 6^{\frac{5}{6}} \\
 \text{ד. } -12^{\frac{2}{7}} & \text{ה. } -(-4)^{\frac{1}{3}} & \text{ו. } -(-3)^{\frac{3}{4}} \\
 \text{ז. } 5^{-\frac{1}{4}} & \text{ח. } 27^{-\frac{1}{3}} & \text{ט. } 64^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \sqrt{49} & \text{ב. } -\sqrt{25} & \text{ג. } \sqrt[3]{8} \\
 \text{ד. } -\sqrt[3]{128} & \text{ה. } \sqrt[3]{(-2)^6} & \text{ו. } (\sqrt[5]{1024})^2 \\
 \text{ז. } (\sqrt[5]{-243})^3 & \text{ח. } \sqrt[4]{-16} & \text{ט. } \sqrt[4]{-25^2} \\
 \text{י. } \sqrt[4]{(-25)^2} & &
 \end{array}$$

(19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

- | | | |
|---|--|---|
| א. $8^{\frac{2}{3}}$ | ב. $32^{\frac{3}{5}}$ | ג. $128^{-\frac{2}{7}}$ |
| ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ | ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ | ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$ |
| ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ | ח. $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$ | ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$ |

(20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

(21) פשט את הביטויים הבאים:

- | | | |
|---|--|--|
| א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ | ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ | ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ | ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$ |
| ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ | ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$ | ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$ |

(22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

- | | | |
|-------------------|----------------|--------------------------|
| א. $3\sqrt{2}$ | ב. $5\sqrt{3}$ | ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$ |
| ד. $2\sqrt[3]{3}$ | ה. $x\sqrt{x}$ | |

(23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| א. $2\sqrt{5}$ | ב. $4\sqrt[3]{2}$ | ג. $2\sqrt[5]{3}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ | ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$ |
| ז. $-5\sqrt[3]{2}$ | ח. $-5\sqrt[4]{2}$ | ט. $-5\sqrt[5]{-2}$ |

(24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$
- ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

(25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$
- ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$
- ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

(26) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $\sqrt{18} - \sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7} + \sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד. $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

(27) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

- (17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ
- ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16
- ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5
- (19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$
- ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$
- (20) $\sqrt{2}$
- (21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2
- ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$
- (22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$
- (23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$
- ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$
- (25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$
- ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[8]{3}$
- (26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$
- ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

(28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000	ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000	ד. 23,400,000
ה. 0.0003	ו. 0.00000042
ז. 0.000000042	ח. 0.00000000042

(29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$	ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$	ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$	ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$	ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

(28) א. $1.5 \cdot 10^7$	ב. $1.5 \cdot 10^6$	ג. $1.5 \cdot 10^{11}$	ד. $2.34 \cdot 10^7$	ה. $3 \cdot 10^{-4}$
ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$	ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$	ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$		
(29) א. $9 \cdot 10^{12}$	ב. $4 \cdot 10^{12}$	ג. $1.25 \cdot 10^{11}$	ד. $1.25 \cdot 10^{14}$	ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$
ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$	ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$	ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$		

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 16 - בעיות גדילה ודעיכה

תוכן העניינים

201	1. שאלות חימום
205	2. שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית
206	3. שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית
207	4. שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה
208	5. שאלות העוסקות במציאת הזמן
209	6. שאלות שונות

שאלות חימום:

סיכום כללי:

הגדרת בעיית גדילה ודעיכה מערכית:

הכמות לאחר פרק זמן t , המסומנת M_t , כאשר הכמות ההתחלתית היא M_0 וקצב הגידול/דעיכה הוא q ניתנת ע"י הנוסחה הבאה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

כאשר הגדילה או הדעיכה נתונים באחוזים נמצא את הבסיס לפי: $q = \frac{100 \pm p}{100}$.

שאלות:

(1) מצא את שיעור הגדילה/דעיכה מתוך אחוז הגדילה/דעיכה הנתון בבעיה.

- מחיר מוצר גדל ב-20% לשנה.
- מחיר מוצר יורד ב-40% לשנה.
- אוכלוסייה מתרבה ב-5% לשנה.
- מחיר דירה עולה ב-15% לשנה.
- כמות דבורים גדלה פי 2 כל יום.
- מחירו של פסל גדל פי 3 כל שנה.
- רכב מאבד רבע מערכו בכל שנה.
- מנייה מאבדת מחצית מערכה כל חודש.

(2) מצא את אחוזי הגדילה/דעיכה מתוך הבסיסים הבאים:

- | | |
|---------------|---------------|
| א. $q = 1.2$ | ב. $q = 1.6$ |
| ג. $q = 0.85$ | ד. $q = 0.72$ |

(3) מצא את M_0 :

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| א. $107.2 = M_0 \cdot 1.05^6$ | ב. $70.8 = M_0 \cdot 1.12^4$ |
| ג. $2213.68 = M_0 \cdot 1.4^8$ | |

(4) מצא את q :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } 25 = 10 \cdot q^6 & \text{ב. } 512.36 = 6 \cdot 10^7 \cdot q^{40} \\ \text{ג. } 10^3 = 2.4 \cdot 10^6 \cdot q^{25} & \text{ד. } 9.35 = 7 \cdot q^{10.5} \\ \text{ה. } 6.42 \cdot 10^4 = 10^7 \cdot q^{\frac{31}{3}} & \text{ו. } 13.25 = 9.2 \cdot q^{12.3} \end{array}$$

(5) מצא את t :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } 10 \cdot 1.05^t = 70 & \text{ב. } 62.08^t = 39.68 \\ \text{ג. } 7 \cdot 10^7 \cdot 0.82^t = 10^5 & \end{array}$$

(6) אוכלוסיית חיידקים מתרבה בכל דקה פי 2.
 בשעה 10:30 בדקו במעבדה מדגם ובו 50 חיידקים.
 א. כמה חיידקים יהיו כעבור דקה אחת?
 ב. כמה חיידקים יהיו כעבור שתי דקות?
 ג. כמה חיידקים יהיו בשעה 10:50?

(7) כמות של חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית בכל שבוע ב-2.8%.
 במעבדה נשקלה כמות של 2000 גרם של החומר.
 א. מה תהיה כמות החומר כעבור שבועיים?
 ב. מה תהיה כמות החומר כעבור שלושה חודשים?
 ג. האם תישאר כמות מסוימת מהחומר כעבור שנה בת 52 שבועות?

(8) מחירו של מוצר לאחר 3 שנים הוא 250 ₪. ערך המוצר יורד ב-25% מדי שנה.
 מה היה מחירו ההתחלתי?

(9) שרון רצה בכל יום מרחק הגדול ב-10% מאשר ביום הקודם.
 ידוע כי שרון רצה מרחק של 2.5 ק"מ ביום השביעי.
 כמה ק"מ רצה שרון ביום הראשון?

(10) אוכלוסייה במדינה מסוימת מתרבה בצורה מעריכית ב-3.1% בשנה.
 כיום יש במדינה זו 528,000 תושבים.
 א. כמה תושבים יהיו במדינה זו בעוד 3 שנים?
 ב. כמה תושבים היו במדינה זו לפני 4 שנים?

- 11** כמות אצות באגם מתרבה בצורה מעריכית. בכל שנה גדלה הכמות פי 4 מאשר בשנה שקדמה לה. כיום יש באגם $2 \cdot 10^5$ ק"ג אצות.
- א. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים?
 ב. מה הייתה כמות האצות לפני שנה?
 ג. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים ושלושה חודשים?
- 12** מספר תושבים במדינה מסוימת גדל בשיעור קבוע. במשך 10 שנים גדלה האוכלוסייה במדינה מ-5.4 מיליון תושבים ל-7.2 מיליון תושבים.
- א. מה הוא קצב הריבוי בכל שנה במדינה?
 ב. אם קצב הגידול של האוכלוסייה יישמר, מה יהיה מספר התושבים כעבור 10 שנים נוספות?
- 13** בגן חיות ספרו את מספר התוכים. בספירה הראשונה נספרו 1200 תוכים. בספירה השנייה, כעבור 6 חודשים, נספרו 1450 תוכים.
- א. מה הוא קצב הגידול החודשי של התוכים?
 ב. מה יהיה מספרם של התוכים כעבור שנה וחצי מהספירה הראשונה?
- 14** כמות העצים ביער גדלה בצורה מעריכית. אם כמות העצים ביער בשנת 1950 הייתה $5 \cdot 10^4$ טון עצים ובשנת 1990 הייתה 10^7 טון עצים, מה היה אחוז הגידול השנתי (בהנחה שהגידול היה קבוע)?
- 15** כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית. החומר נשקל שלוש פעמים ביום מסוים. בשעה 7:00 בבוקר היה משקל החומר 120 ק"ג. בשעה 10:30 בבוקר היה משקל החומר 95 ק"ג.
- א. מהו קצב התפרקות החומר הרדיואקטיבי לחצי שעה?
 ב. מה תהיה כמות החומר בשעה 15:00 אחר הצהריים?
- 16** מכונית מאבדת $\frac{5}{8}$ מערכה במשך 10 שנים.
- א. מהו קצב ירידת הערך של המכונית בכל שנה?
 ב. איזה אחוז מערכה תאבד המכונית כעבור 15 שנה?
- 17** מספר התושבים במדינה מסוימת גדל פי 3.5 ב-40 שנים.
- א. מצא מהו אחוז הריבוי השנתי.
 ב. מצא פי כמה יגדל מספר התושבים כעבור 58 שנים?

תשובות סופיות:

- | | | | |
|-------------------|----------------------|--------------------|--------------|
| א. 1.2 | ב. 0.6 | ג. 1.05 | ד. 1.15 |
| ה. 2 | ו. 3 | ז. 0.75 | ח. 0.5 |
| א. 20% גדילה | ב. 60% גדילה | ג. 15% דעיכה | ד. 28% דעיכה |
| א. 80 | ב. 45 | ג. 150 | |
| א. 1.165 | ב. 0.7469 | ג. 0.732 | ד. 1.028 |
| ה. 0.22 | ו. 1.03 | | |
| א. 39.88 | ב. 0.89 | ג. 33.01 | |
| א. 100 | ב. 200 | ג. 52,428,800 | |
| א. 1889.56 גרם | ב. 1422.4 גרם | ג. כן. 456.747 גרם | |
| א. 592.6 ש | | | |
| א. 1.41 ק"מ | | | |
| א. 578,642 תושבים | ב. 467,304 תושבים | | |
| א. 3,200,000 ק"ג | ב. 50,000 ק"ג | ג. 4,525,483.4 ק"ג | |
| א. 1.029 | ב. 9.6 מיליון תושבים | | |
| א. 1.032 | ב. 2117 תוכים | | |
| א. 14.16% | | | |
| א. 0.9671 | ב. 70.35 גרם | | |
| א. 0.90657 | ב. 77.1% | | |
| א. 3.18% | ב. 6.15 | | |

שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית:

שאלות:

- (1) מספר החסידות המגיעות כל שנה לאגם החולה יורד בצורה מעריכית בקצב של 2.4% בשנה. אם מספר החסידות שהגיעו השנה היה 6,000, מה יהיה מספר החסידות שיגיעו עוד 7 שנים?
- (2) מספר התושבים בהרצליה בשנת 1990 היה 80,000. אחוז הגידול באוכלוסיית העיר הוא 3% בשנה. מה יהיה מספר התושבים בהרצליה בשנת 1998?

תשובות סופיות:

- (1) 5,062 חסידות.
- (2) 101,342 תושבים.

שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית:

שאלות:

- (3) מספר הזברות בטנזניה גדל בצורה מעריכית בקצב של 1.6% בשנה. כיום יש בטנזניה 45,000 זברות. כמה זברות היו בטנזניה לפני 16 שנים?

תשובות סופיות:

- (3) 34,907 זברות.

שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה:

שאלות:

- (4) מספר הלידות בבית החולים "איכילוב" גדל בצורה מעריכית. לפני 8 שנים היו ב"איכילוב" 500 לידות בחודש והשנה יש 600 לידות בחודש. מהו אחוז הגידול במספר הלידות החודשי משנה לשנה ב"איכילוב"?
- (5) מספר התושבים ביפן גדל פי 2 תוך 20 שנים. מה אחוז הגידול השנתי באוכלוסיית יפן?
- (6) מספר החיידקים במבחנה גדל בצורה מעריכית. אם לפני 6 שעות היו במבחנה 200 חיידקים ועכשיו יש בה 500 חיידקים, כמה חיידקים יהיו בה בעוד 4 שעות?

תשובות סופיות:

- (4) 2.3%
- (5) 3.5%
- (6) 921 חיידקים.

שאלות העוסקות במציאת הזמן:

שאלות:

- (7) הריבית על תכנית חיסכון בבנק מסוים היא 2.4% בשנה. אדם הפקיד בתוכנית החיסכון 12,000 ₪. תוך כמה שנים יהיו ברשותו 15,000 ₪?
- (8) אוכלוסיית הדובים בקוטב הצפוני מכפילה את עצמה כל 18 שנה. אם היום יש בקוטב הצפוני 6,000 דובים, בעוד כמה שנים יהיו 8,000 דובים?
- (9) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 60% ממשקלו?
- (10) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 50% ממשקלו?
- (11) זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 16 ימים. תוך כמה ימים יאבד שליש ממשקלו?
- (12) בשעה 08:00 נלקחו שני חומרים רדיואקטיביים. מחומר א' נלקחו 150 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 10 שעות. מחומר ב' נלקחו 117.4 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 18 שעות. באיזו שעה משקל החומרים יהיה זהה?

תשובות סופיות:

- (7) 9.41 שנים.
 (8) 7.47 שנים.
 (9) 16.43 שעות.
 (10) 12.43 שעות.
 (11) 9.43 ימים.
 (12) 16:00

שאלות שונות:

שאלות:

(13) בנק א' נותן ריבית של 3% כל שנתיים בתוכנית חיסכון מסוימת. בנק ב' נותן ריבית של 4.5% כל 3 שנים בתוכנית חיסכון אחרת. אדם מתכוון להפקיד סכום כסף מסוים לתקופה של 18 שנה. באיזה בנק כדאי לו להשקיע את כספו?

(14) נתונות שתי תרבויות חיידקים, כל אחת גדלה בצורה מעריכית. בשעה מסוימת בתרבות א' היו 4,000 חיידקים ובתרבות ב' היו 500 חיידקים. נסמן:

t_1 - הזמן שחלף עד שבתרבות א' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבות ב'.

t_2 - הזמן שחלף עד שבתרבות ב' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבות א'.

חשב את היחס $\frac{t_1}{t_2}$.

(15) מספר החיידקים בתרבות גדל ב- $p\%$ בכל שעה. בשעה מסוימת מספר החיידקים היה m . כעבור t שעות הוציאו m חיידקים מהתרבות וכעבור עוד t שעות היו $6m$ חיידקים בתרבות. הבע את t באמצעות p .

הערה:

שאלות 16-17 עוסקות בפתרון בעיות קיצון מעריכיות.

(16) נתונה הפונקציה: $f(x) = 700 \cdot 1.08^x - 200x$. מצא את ערך ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

(17) נתונות שתי בריכות דגים. בבריכה א' קצב הריבוי של מספר הדגים הוא 10% בחודש ובבריכה ב' הוא 20% בחודש. כמות הדגים בבריכה א' גדולה פי 5 מכמות הדגים בבריכה ב'. בעוד כמה חודשים לערך ההפרש בין כמות הדגים בבריכה א' לכמות הדגים בבריכה ב' יהיה מקסימלי?

(18) כמות עצים ביער גדלה בצורה מעריכית לפי אחוז ריבוי של 15% לשנה. בשנת 1990 נספרו כמות עצים מסוימת ביער. בשנת 2000 כרתו 30,000 עצים ולאחר 5 שנים נוספות, בשנת 2005, נספרו ביער 753365 עצים. מצא כמה עצים היו ביער בשנת 1990.

- (19)** ערכה של דירה יורד מדי שנה באחוז קבוע של 6%. ידוע כי ערך הדירה לאחר 10 שנים מיום מכירתה נמוך ב-35,000 ₪ ממחירה המקורי.
- א. מצא את המחיר ההתחלתי של הדירה.
- ב. מצא לאחר כמה שנים ערך הדירה ירד מתחת ל-30,000 ₪.
- (20)** שני בנקים מציעים שתי תכניות חיסכון כלהלן:
- בנק א' מציע תכנית חיסכון ל-8 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-80%.
- בנק ב' מציע תכנית חיסכון ל-6 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-60%.
- א. באיזה בנק אחוז הריבית השנתית גבוה יותר?
- ב. דני משקיע סכום כסף k לפי תכנית חיסכון של בנק א' ובתום התוכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק ב'.
- רפי משקיע סכום כסף k לפי תכנית חיסכון של בנק ב' ובתום התכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק א'.
- למי יהיה סכום גדול יותר בתום שתי התכניות?
- נמק את תשובתך והראה חישוב מתאים.
- (21)** שווי שתי מכוניות המוצעות למכירה הוא:
- מכונית א' - 60,000 ₪ ומכונית ב' - 85,000 ₪.
- ידוע כי ערך מכונית ב' יורד ב-4% בכל שנה
- וערך מכונית א' יורד ב-2.5% בכל שנה.
- א. מצא בעוד כמה שנים יהיו המחירים של שתי המכוניות זהים.
- ב. סיגל רוצה לקנות מכונית ולרשותה עומד סכום של 40,000 ₪.
- איזו מכונית תוכל לקנות סיגל קודם ולאחר כמה שנים מיום הצעתן?
- (22)** כמות אצות בים מתרבה בצורה מעריכית. ידוע כי לאחר 40 שנים כמות אצות מכפילה את עצמה. כדי לצמצם את כמות האצות מבצעים עבודות ניקיון מדי שנה ובהן מנקים כ-200 ק"ג אצות. בחוף מסוים היו בשנת 1990 כ-1200 ק"ג אצות.
- א. מצא את קצב גידול האצות השנתי.
- ב. מצא כמה אצות יהיו בחוף המסוים בשנת 1993 לאחר הניקיון באותה שנה.
- (23)** נתונות שתי כמויות התחלתיות זהות, האחת גדלה בצורה מעריכית והשנייה קטנה בצורה מעריכית. לשתי הכמויות אחוז גדילה/דעיכה קבוע והוא 5%.
- א. האם הזמן שבו הכמות הראשונה תגדל לכמות הכפולה מהכמות ההתחלתית שלה שווה לזמן שבו תקטן הכמות השנייה למחצית מהכמות ההתחלתית שלה? נמק והראה חישוב מתאים.
- ב. ללא קשר לנתון הקודם, הראה כי כדי ששתי הכמויות יגיעו ליעדיהן באותו הזמן אז הבסיסים שלהן (q_1, q_2) צריכים להיות מספרים הופכיים.

- (24) כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית לפי אחוז קבוע p מדי שעה. ביום מסוים היו k גרם מהחומר. לאחר 3 שעות הוסיפו עוד k גרם לכמות שנותרה ולאחר 3 שעות נוספות מתברר שנשארו k גרם מהחומר. מצא את p .
- (25) ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית. ידוע כי בשנת 1980 הייתה המנייה שווה k שקלים. המנייה גדלה באחוז קבוע של 2% לשנה עד לשנת 1992 ומשם צנחה בקצב של 5% לשנה במשך 8 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה שנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא $1.5k$. מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר הצניחה שלה.
- (26) מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של 3% לשנה. בשנה מסוימת נספרו 2300 עופות בשמורה, לאחר 5 שנים הוסיפו לשמורת הטבע 1000 עופות נוספים.
- א. מצא כמה עופות יהיו בשמורה לאחר 5 שנים נוספות.
 ב. מצא תוך כמה שנים יהיה מספר העופות בשמורה זהה לזה שמצאת בסעיף א' אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים, אלא אם הייתה גדילה רציפה.
- (27) אדם מפקיד סכום של 120,000 ₪ לפי ריבית דריבית של 12% בשנה. כעבור t שנים הוא משך את כל הסכום שעמד לרשותו והפקיד אותו ל- t שנים נוספות בתוכנית חיסכון חדשה לפי ריבית דריבית של 15%. בתום תקופה זו עמד לרשותו סכום של 330,252 ₪.
- א. מצא את t .
 לאחר תקופה זו הוא מפקיד את סכום הכסף הסופי בתכנית לפי ריבית דריבית מסוימת. לאחר 5 שנים עמד לרשותו סכום של 821,772 ₪.
 ב. מצא את אחוז הריבית החדש.
- (28) ערכן של שתי חלקות אדמה יורד בצורה מעריכית. ידוע כי בזמן שערכה של אדמה א' מגיע למחצית מערכה המקורי, ערכה של אדמה ב' מגיע ל-30% מערכה המקורי. לאחר 50 שנים אדמה א' מאבדת 60% מערכה.
- א. מצא את אחוז הדעיכה של אדמה ב'.
 ב. ידוע כי לאחר 100 שנים ערכן של שתי האדמות שווה. ערכה המקורי של אדמה ב' הוא 100,000 ₪. מצא את ערכה המקורי של אדמה א'.

- (29)** מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של p אחוזים לשנה. בשנה מסוימת נספרו 3000 עופות בשמורה, לאחר 4 שנים הוסיפו לשמורה 1000 עופות נוספים.
- א. מצא את אחוז הגידול השנתי p אם ידוע כי לאחר 4 שנים נוספות היו בשמורת 5647 עופות.
- ב. מצא לאחר כמה שנים יהיו 5647 עופות אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים.
- (30)** בכוורת דבורים ידוע כי בכל 10 שעות כמות הדבורים גדלה פי 1.5.
- א. מצא באיזה אחוז גדלה כמות הדבורים בכל שעה.
- ב. מוציאים לאחר 10 שעות 3000 דבורים וידוע כי נשארו 1500 דבורים. חשב כמה דבורים היו בתחילה בכוורת.
- (31)** אדם מפקיד k שקלים בתוכנית חיסכון לפי ריבית שנתית של $p\%$. לאחר 5 שנים הוא מושך מהחיסכון k שקלים ולאחר 5 שנים נוספות מתברר כי הצטבר בפיקדון שלו סך הכול $2.5k$ ₪. מצא את p .
- (32)** ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית.
- ידוע כי בשנת 1995 הייתה המנייה שווה k שקלים.
- המנייה גדלה באחוז קבוע של 5% לשנה עד לשנת 2000 ושם צנחה בקצב של 8% לשנה במשך 6 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה בשנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא k . מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר צניחתה.

תשובות סופיות:

(13) בנק א'.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2} \quad (14)$$

$$t = \frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{100+P}{100}\right)} \quad (15)$$

(16) $x = 17.04$, מינימום.

(17) 11 חודשים.

(18) 100,000 עצים.

(19) א. 75,858.5 ₪ ב. לאחר 15 שנים.

(20) א. בנק ב' ב. לשניהם אותו הסכום.

(21) א. לאחר 22.46 שנים. ב. מכונית א' ולאחר 16 שנים.

(22) א. 1.017 ב. 653.48 ק"ג אצות.

(23) א. הכמות השנייה תגיע ליעדה לפני הראשונה.

(24) 14.82%

(25) ב-5.95%

(26) א. 4250 עופות. ב. 20.77 שנים.

(27) א. $t = 4$ ב. $p = 20\%$

(28) א. 3.13% ב. 25,909 ₪

(29) א. 5% ב. 12.96 שנים.

(30) א. ב-4.1% ב. 3000 דבורים.

(31) 16.63%

(32) ב-6.6%

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 17 - מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומאליות

תוכן העניינים

214	1. מספרים מרוכבים - הכרות ותכונות בסיסיות
216	2. הצמוד המרוכב
219	3. הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית
221	4. נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב
223	5. תרגול נוסף במספרים מרוכבים
226	6. חילוק פולינומים
227	7. פתרון משוואות פולינומאליות ממעלה גבוהה
228	8. שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה לינארית

מספרים מרוכבים – היכרות ותכונות בסיסיות

שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את המשוואות ומצאו את z :

$$(1) \quad z^2 + 9 = 0 \quad (2) \quad z^2 - 4z + 5 = 0 \quad (3) \quad z^2 - 6z + 13 = 0$$

בשאלות 4-7 חשבו :

$$(4) \quad (i\sqrt{2})^6 \quad (5) \quad (i^5 - i^{13})^2$$

$$(6) \quad (4+i) - (2+10i) \quad (7) \quad (-4-i)(2-3i)$$

(8) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2i$.

ידוע כי $z_1 + z_2$ ממשי וכי $z_1 - z_2$ מדומה.

א. מצאו קשר בין a_1 ל- a_2 ובין b_1 ל- b_2 .

ב. הראו כי המכפלה $z_1 \cdot z_2$ היא ממשית.

(9) יהיו $z_1, z_2, \dots, z_n$ מספרים מרוכבים.

א. הוכיחו כי $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

ב. הוכיחו כי $|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$

ג. הוכיחו כי $|z_1^n| = |z_1|^n$

(10) יהי z מספר מרוכב.

הוכיחו: אם $z^{11} = 1$ אז $z + \frac{1}{z}$ מספר ממשי.

(11) יהי z מספר מרוכב.

הוכיחו: אם $|z+1| = |z-1|$ אז iz מספר ממשי.

תשובות סופיות

- (1) $\pm 3i$
- (2) $2 \pm i$
- (3) $3 \pm 2i$
- (4) -8
- (5) 0
- (6) $2 - 9i$
- (7) $-11 + 10i$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.

הצמוד המרוכב

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו (כתבו את התוצאה בצורה $z = x + yi$):

$$\frac{i}{1-i} - \frac{1}{(i+1)^2} \quad (3)$$

$$\frac{1+i}{1-3i} \quad (2)$$

$$\frac{5}{2+i} \quad (1)$$

פתרו את המשוואות בשאלות 4-6 ומצאו את המספר המרוכב z :

$$(1+i)z^2 + 2z - i + 1 = 0 \quad (6)$$

$$z\bar{z} - 5\bar{z} = 10i \quad (5)$$

$$2z - 6i = \bar{z} - 1 \quad (4)$$

(7) פתרו את מערכת המשוואות הבאה (כאשר z ו- w משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases} 3z + iw = 5 - 4i \\ 5iz - 2w = 5 + 8i \end{cases}$$

(8) חשבו את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

$$\text{א. } \sqrt{5-12i}$$

$$\text{ב. } \sqrt{8+6i}$$

(9) פתרו את המשוואות הריבועיות הבאות:

$$\text{א. } (1-i)z^2 - 2z + i + 1 = 0$$

$$\text{ב. } (-2+i)z^2 - (6+12i)z + 10 - 25i = 0$$

בשאלות 10-11 פתרו את המשוואות:

$$iz^2 - 2(1-i)z + 6 + 15i = 0 \quad (10)$$

$$z^2 - i\bar{z} + 6 = 0 \quad (11)$$

(12) הוכיחו שהמספר הבא הוא מספר מדומה $\frac{\bar{z}}{z^2} - \frac{z}{\bar{z}^2}$ כאשר $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

13 נתון מספר מרוכב $z \neq 0$ המקיים: $|z - i| = 1$.
הוכח:

א. $|z|^2 = 2 \operatorname{Im}(z)$

ב. $\frac{z - 2i}{iz} \in \mathbb{R}$

14 המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור.
מצאו את a .

15 נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2 i$.

הראו כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

תשובות סופיות

(1) $2 - i$

(2) $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

(3) $-\frac{1}{2} + i$

(4) $z = -1 + 2i$

(5) $z = 1 + 2i, z = 4 + 2i$

(6) $z = i, z = -1$

(7) $z = 2 - 3i, w = 5 + i$

(8) א. $z = \pm(3 - 2i)$ ב. $z = \pm(3 + i)$

(9) א. $z_{1,2} = i, 1$ ב. $z_{1,2} = -2 - i, 2 - 5i$

(10) $z_1 = -2 - 5i, z_2 = 3i$

(11) $z_1 - 3i, z_2 = 2i$

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) $a = -\frac{3}{4}$

(15) שאלת הוכחה.

הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית

שאלות

כתבו את המספרים בשאלות 1-8 בצורה קוטבית :

- | | | | |
|---------------------|--------------------|----------------------|-------------|
| (1) $1 + \sqrt{3}i$ | (2) $-1 - i$ | (3) $-3 - \sqrt{3}i$ | (4) $1 - i$ |
| (5) $1 + i$ | (6) $\sqrt{3} - i$ | (7) $\sqrt{3}i$ | (8) -8 |

(9) נתון המספר המרוכב $z = R \operatorname{cis} \theta$.

הביעו באמצעות R ו- θ את המספרים :

- א. $\bar{z}$
- ב. $\frac{1}{z}$
- ג. $-z$
- ד. $-\frac{1}{z}$
- ה. iz
- ו. $z \cdot \bar{z}$

(10) הראו כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים :

- א. $z + \bar{z}$
- ב. $z \cdot \bar{z}$
- ג. $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$

(11) הראו כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים :

- א. $z^2 - \bar{z}^2$
- ב. $\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$

(12) הוכיחו :

- א. $z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz}$
- ב. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

תשובות סופיות

$$2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \textbf{(1)}$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \quad \textbf{(2)}$$

$$\sqrt{12} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \quad \textbf{(3)}$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \quad \textbf{(4)}$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \textbf{(5)}$$

$$2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \quad \textbf{(6)}$$

$$\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \quad \textbf{(7)}$$

$$8(\cos \pi + i \sin \pi) \quad \textbf{(8)}$$

$$\textbf{(9)} \quad \text{א. } R \operatorname{cis}(-\theta) \quad \text{ב. } \frac{1}{R} \operatorname{cis}(-\theta) \quad \text{ג. } R \operatorname{cis}(180^\circ + \theta)$$

$$\text{ד. } \frac{1}{R} \operatorname{cis}(180^\circ + \theta) \quad \text{ה. } R \operatorname{cis}(90^\circ + \theta) \quad \text{ו. } R^2$$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב

שאלות

בשאלות 1-6 חשבו :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100} \quad (3) \qquad (1 + \sqrt{3}i)^9 \quad (2) \qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{-8} \quad (6) \qquad \sqrt[5]{1} \quad (5) \qquad \sqrt[6]{-8} \quad (4)$$

(7) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו את הזהויות הבאות :

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

(8) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו כי : $\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}}$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{32}i \quad (1)$$

$$-2^9 \quad (2)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$8^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{6} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad (4)$$

$$1^{\frac{1}{5}} \left(\cos \frac{0 + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{5} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

$$8^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2 \quad (6)$$

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

תרגול נוסף במספרים מרוכבים

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
 ב. הראו כי אם z הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי : $z^6 = 1$.

2) נתונה המשוואה $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$.

- א. מצאו את פתרונות המשוואה הנתונה.
 ב. הוכיחו כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר מדומה טהור.

3) פתרו את המשוואה $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$.

4) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. מצאו את שלושת הפתרונות של המשוואה $z^3 = i$.
 ב. הראו שמכפלת שלושת הפתרונות היא i .
 ג. הראו שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת שני הפתרונות האחרים.

5) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. פתרו את המשוואה $z^5 = -16(\sqrt{3} - i)$.
 ב. הוכיחו כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצאו את מנת הסדרה.
 הערה : סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$, כאשר q מנת הסדרה.

6) נתון $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

- א. מצאו את פתרונות המשוואה $z^3 = w^3$.
 ב. הראו כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא w^3 .

(7) נתונה המשוואה $(z-1)^3 = 1$.
הוכיחו שסכום שורשיה הוא 3.

(8) נתונה המשוואה $z^3 = -\sqrt{3} + i$.
א. מצאו את שורשי המשוואה: z_3, z_2, z_1 .
ב. מצאו את הסכום $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3$.
ג. הראו כי הסכום $(z_1)^9 + (z_2)^9 + (z_3)^9$ הוא מספר מדומה טהור.

(9) נתונה המשוואה $z^2 + |z|^2 - 2ti = 18s^2$, כאשר z הוא מספר מרוכב,
 s ו- t הם מספרים ממשיים שונים מאפס ו- z_1, z_2 הם פתרונות המשוואה.
א. הביעו את פתרונות המשוואה באמצעות s ו- t .
ב. נתון $z_1 \cdot z_2 = -18i$. מצאו את הפרמטרים s ו- t .

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. פתרו את המשוואה $\bar{z} \cdot i + (\bar{z})^2 + |z|^2 + z + \bar{z} = 0$.
ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית,
שכל איבריה שונים מאפס.
הפרש סדרה זו הוא $1 + \frac{1}{16}i$.
האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.
חשבו את האיבר הראשון בסדרה.
הערה: סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d$,
כאשר d נקרא הפרש הסדרה.

תשובות סופיות

(1) א. $z_1 = \text{cis}60^\circ, z_2 = \text{cis}240^\circ, z_3 = \text{cis}120^\circ, z_4 = \text{cis}300^\circ$ ב. שאלת הוכחה.

(2) א. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = -\sqrt{3} + i, z_3 = -1 - \sqrt{3}i, z_4 = \sqrt{3} - i$ ב. שאלת הוכחה.

(3) $z = 0, z = 1, z = -1$

(4) א. $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_3 = -i$

ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

(5) א. $z_n = 2\text{cis}[30^\circ + (n-1)72^\circ] \quad n = 1, 2, 3, 4, 5$ ב. $q = \text{cis}72^\circ$

(6) א. $z_1 = \text{cis}45^\circ, z_2 = \text{cis}165^\circ, z_3 = \text{cis}285^\circ$ ב. שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) א. $z_3 = \sqrt[3]{2}\text{cis}290^\circ, z_2 = \sqrt[3]{2}\text{cis}170^\circ, z_1 = \sqrt[3]{2}\text{cis}50^\circ$ ב. 6 ג. שאלת הוכחה.

(9) א. $z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i, z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i$ ב. $t = 9, s = \pm 1$

(10) א. $z_2 = -0.5 + 0.5i, z_1 = 0$ ב. $a_1 = -8.5$

חילוק פולינומים

שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים הבאים :

$$\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad (2) \qquad \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad (1)$$

$$\frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} \quad (4) \qquad \frac{4x^2 + x - 1}{x - 2} \quad (3)$$

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3} \quad (6) \qquad \frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1} \quad (5)$$

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5} \quad (8) \qquad \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$x^2 + 1 \quad (1)$$

$$0 \quad (2)$$

$$4x + 9 + \frac{17}{x - 2} \quad (3)$$

$$x - 7 \quad (4)$$

$$x^2 + 2x + 5 \quad (5)$$

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 1 \quad (6)$$

$$x^2 - x - 3 \quad (7)$$

$$x^2 - 4 \quad (8)$$

פתרון משוואות פולינומאליות ממעלה גבוהה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0 \quad (1)$$

$$k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0 \quad (2)$$

$$k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0 \quad (3)$$

$$k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0 \quad (4)$$

$$k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0 \quad (5)$$

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \quad (6)$$

$$k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0 \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3, \quad k_4 = -5 \quad (1)$$

$$k_1 = -4, \quad k_{2,3} = 1 \pm 2i \quad (2)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = -1 \quad (3)$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 2 \quad (4)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = 1, \quad k_6 = -1 \quad (5)$$

$$k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \pm i \quad (6)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_{3,4} = \pm 2i \quad (7)$$

שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה לינארית

שאלות

בשאלות 1-4 נתון $u = (3 - 2i, 4i, 1 + 6i)$, $v = (5 + i, 2 - 3i, 7 + 2i)$
מצאו:

$$(1) \quad \text{א. } 4u + v \quad \text{ב. } 2i \cdot u - v \quad (2) \quad u \cdot v$$

$$(3) \quad \text{א. } u \cdot u \quad \text{ב. } |u|$$

$$(4) \quad |v|$$

בשאלות 5-6 פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס,

$$z_1 + iz_2 + (1 - i)z_3 = 1 + 4i$$

מעל השדה F : $iz_1 + z_2 + (1 + i)z_3 = 2 + i$, כאשר,

$$(-1 + 3i)z_1 + (3 - i)z_2 + (2 + 4i)z_3 = 5 - i$$

$$(5) \quad F = \mathbb{R}$$

$$(6) \quad F = \mathbb{C}$$

בשאלות 7-8 בדקו האם $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_2 = \bar{z}_1, z_3 = z_1 + \bar{z}_1\}$
הוא תת-מרחב של C^3 :

(7) מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.

(8) מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

בשאלות 9-10 בדקו האם הווקטורים $\{(1, i, i - 1), (i + 1, i - 1, -2)\}$
תלויים ליניארית ב- C^3 :

(9) מעל $\mathbb{C}$.

(10) מעל $\mathbb{R}$.

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 11-13 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה. כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P , כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית. פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$(13) \text{ נתונה מטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של המטריצה.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (17 - 7i, 2 + 13i, 11 + 26i) \quad \text{ב. } (-1 + 5i, -10 + 3i, -19)$$

$$(2) \quad \text{א. } 20 + 35i \quad \text{ב. } 66$$

$$(3) \quad \sqrt{66}$$

$$(4) \quad \sqrt{92}$$

$$(5) \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{R}} = (2, 3, -1)$$

$$(6) \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{C}} = ((-1+i)t + 1 + i, 3, t)$$

$$(7) \quad \text{כן}$$

$$(8) \quad \text{לא}$$

$$(9) \quad \text{תלויים.}$$

$$(10) \quad \text{בלתי תלויים.}$$

$$(11) \quad \text{אין פתרונות מעל } \mathbb{R}, \text{ ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.}$$

$$\text{מעל } \mathbb{C} : x = 1 \pm 2i, \mathbf{v}_{x=1-2i} = \langle 1-i, 2 \rangle, \mathbf{v}_{x=1+2i} = \langle 1+i, 2 \rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

$$(12) \quad \text{ערכים עצמיים : } x = 3, \text{ וקטורים עצמיים : } \mathbf{v}_{x=3} = \langle -1, 1 \rangle. \text{ לא ניתנת ללכסון.}$$

$$(13) \quad \mathbf{v}_{x=1+\sqrt{3}i} = (1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i, -2), \mathbf{v}_{x=1} = \langle 1, 1, 1 \rangle, x = 1, x = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\mathbf{v}_{x=1-\sqrt{3}i} = (1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -2)$$

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 18 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

231	1. משוואות מעריכיות יסודיות
233	2. משוואות עם חיבור וחסור איברים
235	3. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס
236	4. משוואות מסכמות שונות
237	5. משוואות עם קבוע אוילר
238	6. מערכת משוואות מעריכיות
239	7. אי שוויונים מעריכיים
240	8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך

משוואות מעריכיות יסודיות:

סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $2^x = 16$ ב. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג. $10^{x-2} = 10000^{x+1}$ ד. $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה. $(2^x \cdot 32)^3 = 8$ ו. $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז. $\frac{7^x}{343^3} = 1$ ח. $(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

(2) פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א. $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$ ב. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג. $25 \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$ ב. $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג. $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$ ד. $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה. $2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8(\sqrt{8})^{-\sqrt{x}}$ ו. $5^x \cdot \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

(4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$	ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$
ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$	ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$
ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$	ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$
ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = (2\sqrt{5})^{4-x}$	

תשובות סופיות:

א. $x = 4$	ב. $x = -\frac{1}{3}$	ג. $x = -2$	ד. $x = 2, 8$	ה. $x = -4$	(1)
ו. $x = 1, -\frac{1}{5}$	ז. $x = 9$	ח. $x = 1$			
א. $x = -1$	ב. $x = -2$	ג. $x = 3, -2$			(2)
א. $x = -\frac{1}{2}$	ב. $x = 1$	ג. $x = -\frac{8}{19}$	ד. $x = 2, -\frac{2}{3}$	ה. $x = 4, 9$	ו. $x = 25$
א. $x = 0$	ב. $x = 4$	ג. $x = 2$	ד. $x = 2$	ה. $x = 5$	(4)
ו. $x = 1.5$	ז. $x = \frac{2}{3}$				

משוואות עם חיבור וחסור איברים:

סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- t , למשל במשוואה: $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$ נסמן: $2^x = t$.
נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.
לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- x המתאימים.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב. $8^x + 3 \cdot 8^x = 256$

א. $2^x + 6 \cdot 2^x = 56$

ד. $2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$

ג. $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב. $5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$

א. $81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$

ד. $\sqrt{10000^{x+1}} - \sqrt[4]{10^{8x+1}} = \sqrt[4]{1000} \cdot (\sqrt[4]{10^7} - 1)$

ג. $(2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 15$

ו. $5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$

ה. $6^{-x} - 5 \cdot 36^{-\left(\frac{x}{2}+1\right)} = 186$

ח. $4^{x+2} - 6 \cdot 4^x = 7 \cdot 12^{x+1} + 6 \cdot 12^x$

ז. $2 \cdot 10^{x+1} + 10^{x+2} = 3 \cdot 5^{x+1}$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

ב. $16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$

א. $9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$

ד. $4^{-x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$

ג. $6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$

ו. $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} + 1 = 0$

ה. $\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

ב. $\frac{7^x}{7^x-4} + \frac{8}{7^x+5} = 3$

א. $\frac{20}{9^x+1} = 3 - \frac{8}{9^x-1}$

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

$$\text{א. } \frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0 \quad \text{ב. } 3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$$

$$\text{ג. } 36^x - 6^{x+1} \cdot 3^x + 8 \cdot 9^x = 0 \quad \text{ד. } 4 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$$

$$\text{ה. } 25 \cdot 5^{2x} + 16 \cdot 15^x = 9^{x+1} \quad \text{ו. } 9^x + 4^x - 6^x = \frac{7}{6^{1-x}}$$

$$\text{ז. } \frac{8^{2x} - 8}{7} = 4^x - 2 \quad \text{ח. } 2^{3x} - 2^{2x+2} - 2^x + 4 = 0$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x=3 \quad \text{ב. } x=2 \quad \text{ג. } x=4 \quad \text{ד. } x=1$$

$$(2) \quad \text{א. } x=\frac{1}{2} \quad \text{ב. } x=0 \quad \text{ג. } x=\frac{1}{3} \quad \text{ד. } x=\frac{1}{4}$$

$$\text{ה. } x=-3 \quad \text{ו. } x=-2 \quad \text{ז. } x=-3 \quad \text{ח. } x=-2$$

$$(3) \quad \text{א. } x=2, 3 \quad \text{ב. } x=1, -2 \quad \text{ג. } x=0 \quad \text{ד. } x=0$$

$$\text{ה. } x=0, 1 \quad \text{ו. } x=-6, -9$$

$$(4) \quad \text{א. } x=1, -\frac{1}{2} \quad \text{ב. } x=1$$

$$(5) \quad \text{א. } x=\frac{1}{2}, 1 \quad \text{ב. } x=1, 3 \quad \text{ג. } x=1, 2 \quad \text{ד. } x=1, 0$$

$$\text{ה. } x=-2 \quad \text{ו. } x=1, -1 \quad \text{ז. } x=0, \frac{1}{2} \quad \text{ח. } x=0, 2$$

משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי.
יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- x עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(\sqrt{3-x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{3-x})^x \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3-x}} \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}} = |x-3|^{-1} \quad (3)$$

תשובות סופיות:

$$x = \frac{1}{4}, 1, 2 \quad (1)$$

$$\text{אין פתרון.} \quad (2)$$

$$x = 0, 1, 2, 4 \quad (3)$$

משוואות מסכמות שונות:

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5(2^x - 2) + 2 = 4^x - 2^x \quad (1)$$

$$\frac{6}{4^{x-1} - 1} + \frac{2^{x+1}}{2^x + 2} = \frac{2^x + 4}{2^x - 2} \quad (2)$$

$$\frac{4^x}{4^x - 10} - \frac{4}{2^{2x-1} - 3} = \frac{32}{16^x - 4^{x+2} + 60} \quad (3)$$

$$3^{2x^2+2} - 3^{x^2+3} + 9 = 3^{x^2+1} \quad (4)$$

$$\sqrt{x}10 = 4 \cdot \sqrt[2]{x}10 + 60 \quad (5)$$

$$\sqrt[x-1]{8 \cdot 2^{x+1}} = (\sqrt{x}2)^2 \cdot \sqrt[x-1]{x}32 \quad (6)$$

$$10 \cdot 4^{x+2} - 16 \cdot 10^x - 90 \cdot 6^x + 36 \cdot 15^x = 0 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x = 1, 2 \quad (1)$$

$$x = 3 \quad (2)$$

$$x = 1.5 \quad (3)$$

$$x = 1, -1 \quad (4)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$x = -3 \quad (6)$$

$$x = 1, -2 \quad (7)$$

משוואות עם קבוע אוילר:

סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות e משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד. דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

$$\text{א. } e^{3x} = e^{2x-1} \quad \text{ב. } e^{5x-1} = e \cdot e^{6x+1}$$

$$\text{ג. } e^{x-5} = (e^{1-x})^3 \quad \text{ד. } e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור):

$$\text{א. } e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad \text{ב. } \sqrt[3]{e^{x+1}} \cdot e^2 = e^x \sqrt{e}$$

$$\text{ג. } e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{ד. } e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

$$\text{א. } xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x \quad \text{ב. } e^{3x} = x \cdot e^{3x}$$

$$\text{ג. } xe^{x^2} = \frac{x}{\sqrt{e^x}} \quad \text{ד. } \sqrt[3]{e^{3x-1}} \cdot x = xe^x$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = -3 \quad \text{ג. } x = 2 \quad \text{ד. } x = 1, \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = \frac{11}{4} \quad \text{ג. } x = 0 \quad \text{ד. } x = 1, -1$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0, \frac{1}{4} \quad \text{ב. } x = 1 \quad \text{ג. } x = 0, -\frac{1}{2} \quad \text{ד. } x = 0$$

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

(1,3) (4	(1,2) (3	(0,2) , (2,4) (2	(2,9) (1
(1,2) , (-1,0) (7	(-1,-2) (6	(3,2) (5	

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} & (2) \\ 3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} & (1) \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} & (4) \\ e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} & (3) \\ e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 & (6) \\ 25^x + 5 < 6 \cdot 5^x & (5) \end{array}$$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ($\ln$) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$\begin{array}{ll} e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 & (8) \\ e^x > 3 & (7) \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} & (2) \\ x < \frac{2}{3} & (1) \\ x \leq \frac{1}{8} & (4) \\ 0 \leq x < 1 & (3) \\ x = 0 & (6) \\ 0 < x < 1 & (5) \\ x < 0 \text{ או } x > \ln 4 & (8) \\ x > \ln 3 & (7) \end{array}$$

אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x) > 0$.

דרך הפתרון: אם: $f(x) > 1$ אז: $g(x) > h(x)$.

אם: $0 < f(x) < 1$ אז: $g(x) < h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(1) \quad x^{2x-1} > x^{x+2} \quad (2) \quad (x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1}$$

$$(3) \quad x^{2x-6} < 1 \quad (4) \quad x^{2x^2+2} < x^{5x}$$

$$(5) \quad (x^2-6x+13)^{x^2-2x} \geq (x^2-6x+13)^3 \quad (6) \quad (x+1)^{|x|} < x^2+2x+1$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad 0 < x < 1, x > 3$$

$$(2) \quad 3 < x < 6$$

$$(3) \quad 1 < x < 3$$

$$(4) \quad 0 < x < 0.5, 1 < x < 2$$

$$(5) \quad x \leq -1, x \geq 3$$

$$(6) \quad 0 < x < 2$$

מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 19 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

241	1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות
244	2. חוקי הלוגריתמים
248	3. חישובים עם חזקה לוגריתמית
249	4. מעבר בין בסיסים
251	5. הלוגריתם הטבעי
253	6. משוואות עם בסיסים שונים
254	7. מערכת משוואות לוגריתמיות
255	8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות
256	9. אי-שוויונים לוגריתמים
(ללא ספר)	10. אי-שוויונים לוגריתמים עם משתנה בבסיס

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a, b > 0, a \neq 1$.

הסבר:

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b .
 ערך חזקה זו הוא x . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים
 ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0, a \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

(3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \log_6(4x-2)=1 \quad \text{ב. } \log_4(4-x)=\frac{1}{2}$$

$$\text{ג. } \log_8(x^4-73)=1 \quad \text{ד. } \log_3 \frac{x+3}{3-3x}=-2$$

$$\text{ה. } \log_x(2x^2+x-12)=2 \quad \text{ו. } \log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

$$\text{א. } \log_4(\log_3 x)=1 \quad \text{ב. } 3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$$

$$\text{ג. } \log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2} \quad \text{ד. } \log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$$

(5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\text{א. } \log_2(3^x+37)=6 \quad \text{ב. } \log_3(3 \cdot 2^x-303)=4$$

$$\text{ג. } \log_5(126 \cdot 5^x-25)=2x+1 \quad \text{ד. } 3\log_2\left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x}-11 \cdot 2^{\frac{x}{3}}+3\right)=12+2x$$

(6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$\text{א. } (\log_2 x)^4=10000 \quad \text{ב. } 2(\log_3 x)^2+\log_3 x=10$$

$$\text{ג. } \frac{3 \cdot \log_{14} x + 1}{(\log_{14} x)^2} = 4 \quad \text{ד. } \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x + 2} = 2$$

תשובות סופיות:

- (1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
 ו. 4 ז. -1.5
- (2) א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 65,536$ ג. $x = 27$ ד. $x = 4$
 ה. $x = 5$ ו. $x = 4$
- (3) א. $x = 2$ ב. $x = 2$ ג. $x = \pm 3$ ד. $x = -2$ ה. $x = 3$ ו. $x = 2$
- (4) א. $x = 81$ ב. $x = 5$ ג. $x = \pm 4$ ד. $x = \pm 1$
- (5) א. $x = 3$ ב. $x = 7$ ג. $x = -1, 2$ ד. $x = -6$
- (6) א. $x = 1024, \frac{1}{1024}$ ב. $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$
 ג. $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x = \frac{1}{3}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a > 0 \neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:
- מכפלה לסכום: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
 - מנה להפרש: $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$.
 - מקדם למעריך: $\log_a b^n = n \log_a b$ (כאשר $b > 0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- | | |
|--|---|
| א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$ | ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$ |
| ג. $\log_2 200 - \log_2 100$ | ד. $\log_3 60 - \log_3 540$ |
| ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$ | ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$ |
| ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$ | ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$ |
| ט. $\frac{1}{2} \left(\log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$ | י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$ |

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- | | |
|---|--|
| א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$ | ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$ |
| ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 225 - 2}$ | ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$ |

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \log_2 x + \log_2 (x-6) = 4 & \text{ב. } \log_3 x + \log_3 (x+2) = 1 \\ \text{ג. } \log_2 (x+30) - \log_2 x = 4 & \text{ד. } \log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2 \\ \text{ה. } 2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1 & \\ \text{ו. } 2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x & \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \log_5 (4x-3) = \log_5 7 & \\ \text{ב. } 2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1 & \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3) & \\ \text{ב. } \log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x & \end{array}$$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8 & \\ \text{ב. } \log_2 \left(\frac{x}{4} \right) \cdot \log_2 (1024x) = -11 & \\ \text{ג. } \log_2 x^2 \log_2 \left(\frac{x}{16} \right) = -\log_2 (64x) & \\ \text{ד. } (\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1 & \\ \text{ה. } \log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left(\frac{81}{x} \right) + 2 & \\ \text{ו. } \frac{\log_2 \left(\frac{x^3}{32} \right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9} & \end{array}$$

שאלות הבעה:

(7) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$

ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

(8) נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

(9) נתון: $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$.

הבע באמצעות a את $\log_{18} 27$ ואת $\log_{18} 16$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

(10) $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$

(11) $2 \log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$

(12) $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

(13) $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$

תשובות סופיות:

- (1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2
 ו. -2 ז. 1 ח. 6 ט. 1.5 י. -0.5
- (2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5
- (3) א. $x=8$ ב. $x=3, \frac{1}{27}$ ג. $x=2$ ד. $x=4$ ה. $x=3$ ו. $x=4$
- (4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$
- (5) א. $x=1$ ב. $x=-2$
- (6) א. $x=16, \frac{1}{256}$ ב. $x=2, \frac{1}{512}$ ג. $x=4, 2\sqrt{2}$ ד. $x=4, \frac{1}{4}$
- ה. $x=\frac{1}{9}, \sqrt[6]{3}$ ו. $x=8, \sqrt[7]{2^{15}}$
- (7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$
- (8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (9) $4(2a-1), 3(1-a)$
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) הוכחה.

חישובים עם חזקה לוגריתמית:

סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x} = x$ כאשר $a > 0 \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית: $3 \cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = \log_4 7$ ב. $x = \log_4 \sqrt{3}$
 ג. $x = 2\log_4 0.1$ ד. $x = \sqrt{\log_2 5}$

(3) נתונה התבנית: $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = -1$ ב. $x = \log_3 5$
 ג. $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{6}} 81}$ ב. $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{6}} 5}}$

תשובות סופיות:

(1) א. 8 ב. 25

(2) א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15

(3) א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2 - 2\sqrt{6}$

(4) א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{2}{\sqrt[9]{25}}$

מעבר בין בסיסים:

סיכום כללי:

מעבר מבסיס a לבסיס m (כאשר: $a > 0 \neq 1$ ו- $m > 0 \neq 1$, וכן: $b > 0$)

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a} \quad \text{יתבצע באופן הבא:}$$

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \log_4 7 \cdot \log_7 4 \\ \text{ב.} & \log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000 \\ \text{ג.} & \log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9 \\ \text{ד.} & \log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625 \end{array}$$

(2) הוכח את השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1 \\ \text{ב.} & \log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1 \end{array}$$

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \log_2 x + \log_{32} x = 6 \\ \text{ב.} & \log_3 x \cdot \log_{27} x = 3 \\ \text{ג.} & \log_2 4x \cdot \log_8 \frac{x}{16} = -\frac{5}{3} \\ \text{ד.} & \log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1 \end{array}$$

שאלות הבעה:

(4) נתון: $\log_4 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

$$\text{א.} \log_2 3 \quad \text{ב.} \log_{32} 36 \quad \text{ג.} \log_{216} 96$$

(5) נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

$$\text{א.} \log_3 50 \quad \text{ב.} \log_2 \sqrt{30} \quad \text{ג.} \log_5 22.5$$

(6) נתון $\log_3 7 = a$, $\log 9 = 2b$. הבע באמצעות a ו- b את:

א. $\log 21$.

ב. $\log_3 \left(\frac{10}{7} \right)$.

ג. $\log_7 10$.

ד. $\log_{30} 63$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

(7) $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

(8) $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

תשובות סופיות:

(1) א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12.

(2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

(3) א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$.

(4) א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$

(5) א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$

(6) א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$.

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

הלוגריתם הטבעי:

סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי.
 למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.
 מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \rightarrow e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- b מספרים כלשהם.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 &= x \\ \text{ב. } 3\ln^2 x + \ln x &= 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} &= \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2\ln 3}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5
- (2) א. $x = e^2$ ב. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$
- (3) א. $x = 0$ ב. $x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e}$ ג. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$
- (4) א. $x = e^3, \frac{1}{e^2}$ ב. $x = \sqrt{e}, e$
- (5) א. 3 ב. 9

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$. במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$. את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$

ג. $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$ ד. $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x} = 3$ ב. $4 + 3e^x = 9$

ג. $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$ ד. $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{10}{5^x}$ ב. $\log_2(4e^{2x} + 6) - 1 = \log_2(7e^x)$

תשובות סופיות:

(1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

ג. $x = \log_7 3 = 0.564$, $x = \log_7 5 = 0.827$ ד. אין פתרון.

(2) א. $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$ ב. $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$ ג. $x = 0$, $x = -\ln 3 = -1.09$

ד. $x = \ln 16 = 2.7725$

(3) א. $x = 1$, $x = \log_5 2 = 0.43$ ב. $x_1 = \ln \frac{1}{2} = -0.693$, $x = \ln 3 = 1.098$

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (8, -5) \quad (3) & (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) & (8, 3) \quad (1) \\ \left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) & (25, 8) \quad (5) & (16, 7) \quad (4) \\ (4, 7) \quad (9) & (3, 9), (9, 3) \quad (8) & (25, 4), (625, 2) \quad (7) \end{array}$$

מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2 (4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3 (9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4 (5 - 9^y) \\ \log_2 (2^x + 3) = \log_4 (29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2 (y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) & (3, 3) & (1, 1) \\ (1, 0) & (1, 1), (2, 3) & \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \end{array}$$

אי-שוויונים לוגריתמים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|---|----------------------------------|
| $\log_6(x^2 - 5x) < 1$ (2) | $\log_2 x < \log_2(5x - 20)$ (1) |
| $\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x)$ (4) | $\log_3 x > \log_9(15 - 2x)$ (3) |
| $\ln x < 3$ (6) | $\ln x \geq \ln(x^2 - 12)$ (5) |
| $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8) | $\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---|-----------------------------|
| $-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2) | $x > 5$ (1) |
| $-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4) | $3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3) |
| $0 < x < e^3$ (6) | $2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5) |
| $x \neq 1$ וגם $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8) | $\frac{1}{e} < x < e^7$ (7) |