

מתמטיקה להנדסאי חשמל



תוכן העניינים

1	מבוא כללי - משוואות אלגבריות
18	מבוא כללי - אי שוויונים אלגבריים
27	גיאומטריה אנליטית - הישר
(ללא ספר)	פונקציות - הפונקציה הקווית
(ללא ספר)	פונקציות - הפונקציה הריבועית
39	אלגברה - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות
50	אלגברה - מטריצות
64	אלגברה - דטרמיננטות
78	גאומטריה - מבוא לגיאומטריה של המישור
(ללא ספר)	גיאומטריה - משולשים
(ללא ספר)	טריגונומטריה במשולש ישר זווית
(ללא ספר)	טריגונומטריה במישור
84	סימן הסכימה (סיגמה)
87	חוקי החזקות והשורשים
97	משוואות ואי-שוויונים מעריכיים
107	חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים
123	וקטורים גיאומטריים
137	וקטורים אלגבריים
179	מספרים מרוכבים
195	חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים
210	חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום
223	חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש
261	חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות

תוכן העניינים

279	24. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות
295	25. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות
311	26. חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי
318	27. חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים
346	28. חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה
364	29. התמרת לפלס

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 1 - מבוא כללי - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

1. משוואה ממעלה ראשונה 1
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה 3
3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון 6
4. משוואה ממעלה שנייה 7
5. משוואות דו-ריבועיות 9
6. משוואות עם פרמטרים 11
7. משוואות עם שורשים 13
8. משוואות עם ערך מוחלט 15
9. מערכת משוואות ממעלה שנייה 16

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax = b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא: $x = \frac{b}{a}$ כאשר $a \neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| א. $6x + 2 = 8$ | ב. $7 - 2x = 7$ |
| ג. $2x + x = 24$ | ד. $2x + 6 = 8 + x$ |
| ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$ | ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$ |
| ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$ | ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$ |

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| א. $3(x - 1) - 4 = 2$ | ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$ |
| ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$ | ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$ |
| ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$ | ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$ |

3 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי) :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} \quad \frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4 & \text{ב.} \quad \frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1 \\ \text{ג.} \quad \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15} & \text{ד.} \quad \frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1 \\ \text{ה.} \quad \frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2 & \text{ו.} \quad 5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1 \end{array}$$

4 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה) :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} \quad \frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0 & \text{ב.} \quad \frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0 \\ \text{ג.} \quad \frac{3}{x} = \frac{1}{x+2} & \text{ד.} \quad \frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2} \\ \text{ה.} \quad \frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x} & \text{ו.} \quad \frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2} \end{array}$$

5 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים) :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} \quad \frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} & \text{ב.} \quad \frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0 \\ \text{ג.} \quad \frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 & \text{ד.} \quad \frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12 \end{array}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$
- ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$
- (2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$
- (3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$
- (4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$
- (5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6, x \neq 3$

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1, b_1, c_1 ו- a_2, b_2, c_2 הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x + 3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

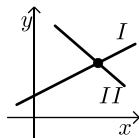
פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

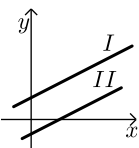
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



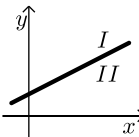
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה :
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
 - פתרון ע"י השוואת מקדמים :
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
 2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
 3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases} \quad \text{ג.}$	$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \quad \text{ב.}$	$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{א.}$
$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases} \quad \text{ו.}$	$\begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases} \quad \text{ה.}$	$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases} \quad \text{ד.}$

2) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases} \quad \text{ב.}$	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \quad \text{א.}$
$\begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases} \quad \text{ד.}$	$\begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases} \quad \text{ג.}$

3) פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases} \text{ א.} \quad \begin{cases} 2(x-y)+4y=1+x \\ 2-7y+x=3(x-y) \end{cases} \text{ ב.}$$

4) פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases} \text{ א.} \quad \begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases} \text{ ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \text{ ג.}$$

5) פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \text{ ב.} \quad \begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} \text{ ג.} \quad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \text{ א.}$$

6) פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases} \text{ ב.} \quad \begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases} \text{ א.}$$

$$\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases} \text{ ג.}$$

תשובות סופיות:

- 1) א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3)
- 2) א. $(4, \frac{1}{3})$ ב. $(-\frac{4}{5}, 9)$ ג. (4,1.6) ד. (-2,7)
- 3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.
- 4) א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2)
- 5) א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1)
- 6) א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4)

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax = b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x = \frac{b}{a}$.

כאשר $a = 0$ מתקבלת המשוואה $0x = b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b = 0$ את המשוואה היא $0x = 0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.

2. אם $b \neq 0$ את המשוואה היא $0x = b \neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(1) \quad x + 4 = 6 + x \quad (2) \quad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2$$

$$(3) \quad 6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (4) \quad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

א. איזה מספר יש להציב ב- \square על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב- \square על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- \square על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- \square על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

(1) אף פתרון.

(2) אינסוף פתרונות.

(3) אין פתרון.

(4) אינסוף פתרונות.

(5) א. -8 ב. -1 ג. $-7x - 1$

ד. $-7x + k$ (כאשר k הוא מספר כלשהו חוץ מ-1).

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), נקראת משוואה ריבועית. פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
 אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
 דוגמא: $x^2 + 5x - 4 = 0$.
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
 אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
 דוגמא: $x^2 + 4x + 4 = 0$.
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
 אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
 דוגמא: $x^2 + x + 4 = 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x^2 + 10x - 16 = 0$

א. $x^2 + 3x - 10 = 0$

ד. $2x^2 - 6x + 5 = 0$

ג. $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

א. $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ד. $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

ג. $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & x^2 - 36 = 0 \\ \text{ב.} & 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג.} & 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 \\ \text{ד.} & (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & -7x^2 - 14x = 0 \\ \text{ב.} & 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג.} & 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 \\ \text{ד.} & (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} \\ \text{ב.} & \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג.} & \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 \\ \text{ד.} & \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

תשובות סופיות:

(1) א. $x_1 = 2, x_2 = -5$ ב. $x_1 = 2, x_2 = 8$ ג. $x = \frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.

(2) א. $x_1 = 2, x_2 = -1$ ב. $x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4}$ ג. $x_1 = 1, x_2 = -10$ ד. $x_1 = 0.6, x_2 = -2$

(3) א. $x = \pm 6$ ב. $x = \pm \frac{3}{4}$ ג. $x = \pm 3$ ד. $x = \pm 1$

(4) א. $x_1 = 0, x_2 = -2$ ב. $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5}$ ג. $x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6}$ ד. $x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8}$

(5) א. $x_1 = 2, x_2 = -1.2$ ב. $x = 5, x \neq -3$ ג. $x_1 = 0, x_2 = -5$ ד. $x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7}$

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ כאשר הנעלם הוא x .
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4 כגון:
 $t = x^2 - 1$: באמצעות פרמטר: $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$
ובכך לפתור משוואה: $t^2 + 3t - 2 = 0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x .
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|--|---|
| $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (2) | $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$ (1) |
| $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$ (4) | $13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ (3) |
| $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$ (6) | $x^6 + x^3 = 56$ (5) |
| $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$ (8) | $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$ (7) |
| $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$ (10) | $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$ (9) |
| $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$ (12) | $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$ (11) |
| $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$ (14) | $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$ (13) |
| $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$ (16) | $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$ (15) |
| $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$ (18) | $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$ (17) |
| $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$ (20) | $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$ (19) |

תשובות סופיות:

$$x = \pm 1 \quad (1)$$

$$x = \pm 1, \pm \sqrt{2} \quad (2)$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$x = \pm 2, \pm 5 \quad (4)$$

$$x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2 \quad (5)$$

$$x = -2, \sqrt[3]{4} \quad (6)$$

$$x = 49 \quad (7)$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1 \quad (8)$$

$$x = 5, -1 \quad (9)$$

$$x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2} \quad (10)$$

$$x = -1 \quad (11)$$

$$x_{1,2} = 1, 3 \quad (12)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06 \quad (13)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2 \quad (14)$$

(15) אין פתרונות.

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}} \quad (16)$$

$$x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3 \quad (17)$$

$$x = -1, 2 \quad (18)$$

$$x = 3, -1 \quad (19)$$

$$x = \pm 1, 4, 6 \quad (20)$$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטרים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx = 4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא: $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר m .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות.

בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא: $m \neq 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b+1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a-3x) = \frac{1}{a}(ax-3)$$

$$\text{ג. } (x-2a)(x-2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax+x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$\text{(1) א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$\text{(2) א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left(\frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left(m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$\text{(3) א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x} = a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$.

הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x} = a$ שבה $a < 0$ אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|--|---|
| $\sqrt{x+2} = x$ (2) | $\sqrt{2x+5} = 7$ (1) |
| $\sqrt{2x+7} + 4 = x$ (4) | $\sqrt{3x+1} + x = 13$ (3) |
| $\sqrt{10x+6} + 9 = x$ (6) | $\sqrt{x-1} + 3 = x$ (5) |
| $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$ (8) | $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$ (7) |
| $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$ (10) | $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$ (9) |
| $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$ (12) | $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$ (11) |
| $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$ (14) | $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ (13) |
| $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$ (16) | $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$ (15) |
| $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ (18) | $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$ (17) |
| | $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$ (19) |

תשובות סופיות:

- | | |
|-------------------------|-------------|
| $x=2$ (2 | $x=22$ (1 |
| $x=9$ (4 | $x=8$ (3 |
| $x=25$ (6 | $x=5$ (5 |
| $x=3.75$ (8 | $x=0.25$ (7 |
| $x=5$ (10 | $x=4.25$ (9 |
| $x=4, -3$ (12 | $x=6$ (11 |
| $x=5$ (14 | $x=3$ (13 |
| $x=2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x=12$ (15 |
| $x=1$ (18 | $x=6$ (17 |
| | $x=2$ (19 |

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x| = a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| $ 3x-24 =x$ (2) | $ 3x+14 =7$ (1) |
| $2x- 8-x =10$ (4) | $ 12-x =3x$ (3) |
| $ 14-3x =2 x+5 $ (6) | $ 4x-5 = 2x+13 $ (5) |
| $ x+2 +6= 2x-4 $ (8) | $ x +7= 2x $ (7) |
| $ 10-3x - x+4 = 2x-6 $ (10) | $ x+2 + 2x-6 = 4x+8 $ (9) |

תשובות סופיות:

- | | | | |
|---------------------------|---------------|-------------------------|--------------------------|
| $x=6$ (4) | $x=3$ (3) | $x=6, 12$ (2) | $x=-\frac{7}{3}, -7$ (1) |
| $x=12, -1\frac{1}{3}$ (8) | $x=\pm 7$ (7) | $x=24, \frac{4}{5}$ (6) | $x=9, -1\frac{1}{3}$ (5) |
| | | $x=0$ (10) | $x=0, -12$ (9) |

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

תשובות סופיות:

- | | |
|---|--|
| $(\pm 4, -2)$ (2) | $(2, 4), (4, 2)$ (1) |
| $(5, -2), (-5, 2)$ (4) | $(\pm 2, \pm 1)$ (3) |
| $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$ (6) | $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$ (5) |
| $(5, -3)$ (8) | $(7, 4)$ (7) |
| $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$ (10) | $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$ (9) |
| $(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3)$ (12) | $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ (11) |
| $(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7)$ (13) | |
| $(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5)$ (14) | |

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 2 - מבוא כללי - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

- 18 1. אי-שוויונים ממעלה ראשונה.
- 19 2. אי-שוויונים ממעלה שנייה.
- 20 3. אי-שוויונים ממעלה שלישית.
- 21 4. אי-שוויונים עם מנה.
- 22 5. אי-שוויונים כפולים מערכות או, וגם.
- 23 6. שאלות מסכמות – אי-שוויונים.
- 25 7. תחום הגדרה.

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

מה מותר?

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

מה אסור?

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$6x > 2(3x-1) \quad (2) \qquad 45x-26 > 109 \quad (1)$$

$$(x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + 20 \quad (4) \qquad 2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6) \quad (3)$$

$$4(6x-8) < 8(3x-4) \quad (6) \qquad \frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3} \quad (5)$$

$$\frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7 \quad (8) \qquad \frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x \quad (7)$$

תשובות סופיות:

- | | | |
|-----------------|---------------|------------|
| $x > 3$ (1) | x כל (2) | x אף (3) |
| $x > -2$ (4) | $x < 5$ (5) | x אף (6) |
| $x \geq 12$ (7) | $x > -13$ (8) | |

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x^2 - 12x > -32 \quad (10)$$

$$x^2 < 144 \quad (9)$$

$$(x+2)(x+4) < 35 \quad (12)$$

$$(x+2)(x+5) < 0 \quad (11)$$

$$(x-3)(x-7) \geq 8x - 56 \quad (14)$$

$$-x^2 + 13x + 30 < 0 \quad (13)$$

$$(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2 \quad (16)$$

$$(x-5)^2 + x(x+2) < 89 \quad (15)$$

$$x^2 - 10x + 25 > 0 \quad (18)$$

$$-3x^2 + 12x > 0 \quad (17)$$

$$2x^2 + 2x + 24 \geq 0 \quad (20) \quad (x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x \quad (19)$$

תשובות סופיות:

$$-5 < x < -2 \quad (11)$$

$$x < 4, x > 8 \quad (10)$$

$$-12 < x < 12 \quad (9)$$

$$x \leq 7, x \geq 11 \quad (14)$$

$$x < -2, x > 15 \quad (13)$$

$$-9 < x < 3 \quad (12)$$

$$0 < x < 4 \quad (17)$$

$$-4 \leq x \leq 0 \quad (16)$$

$$-4 < x < 8 \quad (15)$$

$$x \text{ כל} \quad (20)$$

$$x < 3, x > 5 \quad (19)$$

$$x > 5, x < 5 \quad (18)$$

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x(x^2 + x + 1) > 0 \quad \text{(22)} \qquad (x-1)(x-2)(x-3) > 0 \quad \text{(21)}$$

$$x^3 - 25x \geq 0 \quad \text{(24)} \qquad (-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0 \quad \text{(23)}$$

$$(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0 \quad \text{(26)} \qquad (x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0 \quad \text{(25)}$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0 \quad \text{(28)} \qquad (x^2 - x - 6)(x - 1) < 0 \quad \text{(27)}$$

$$(x-2)(x-4)(x-1) < 0 \quad \text{(30)} \qquad (x^2 + 6)(x+3) > 0 \quad \text{(29)}$$

תשובות סופיות:

$$-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2} \quad \text{(23)} \qquad x > 0 \quad \text{(22)} \qquad 1 < x < 2, x > 3 \quad \text{(21)}$$

$$x \leq 1\frac{2}{3} \quad \text{(26)} \qquad x > 2 \quad \text{(25)} \qquad -5 \leq x \leq 0, x \geq 5 \quad \text{(24)}$$

$$x > -3 \quad \text{(29)} \qquad x \leq 0, x = 3 \quad \text{(28)} \qquad x < -2, 1 < x < 3 \quad \text{(27)}$$

$$x < 1, 2 < x < 4 \quad \text{(30)}$$

אי-שוויונים עם מנה:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\frac{x-1}{3x+2} \geq -3 \quad (32)$$

$$\frac{x-1}{x^2-9} > 0 \quad (31)$$

$$\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0 \quad (34)$$

$$\frac{1}{x^2-16} > 0 \quad (33)$$

$$\frac{1}{-3(x-1)} < 0 \quad (36)$$

$$\frac{2x-1}{x-5} \leq 0 \quad (35)$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6} < 0 \quad (38)$$

$$\frac{x-1}{x+2} \leq 1 \quad (37)$$

$$\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0 \quad (40)$$

$$\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0 \quad (39)$$

תשובות סופיות:

$$x < -4, x > 4 \quad (33)$$

$$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2} \quad (32)$$

$$-3 < x < 1, x > 3 \quad (31)$$

$$x > 1 \quad (36)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (35)$$

$$2 < x < 3, x > 3 \quad (34)$$

$$1 \leq x \leq 6 \quad (39)$$

$$2 < x < 3 \quad (38)$$

$$x > -2 \quad (37)$$

$$x < 2, x > 6 \quad (40)$$

אי-שוויונים כפולים מערכות או, וגם:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (42)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (41)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (44)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (43)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (46)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (45)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (48)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (47)$$

תשובות סופיות:

$$x > 0 \quad (43)$$

$$x > -3\frac{1}{2} \quad (42)$$

$$2 < x < 4 \quad (41)$$

$$x \geq 10 \quad (46)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (45)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (44)$$

$$\emptyset \quad (48)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (47)$$

שאלות מסכמות - אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (1)$$

$$\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \leq 0 \quad (3) \quad x(x+5) - 3x + 12 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (5) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (4)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (7) \quad x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (6)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (9) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (11) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (13) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (12)$$

$$6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (15) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (14)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (17) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

$$(18) \text{ לאלו ערכי } x \text{ נמצאת הפונקציה } f(x) = \frac{x}{x-3} \text{ מעל הפונקציה } g(x) = \frac{x+1}{x+3} ?$$

תשובות סופיות:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| $x \leq -4$ (2) | $-2 < x \leq -\frac{3}{4}$ (1) |
| $x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5$ (4) | $-4 \leq x < 2, x \geq 3$ (3) |
| $x < -3, 0 < x < 2.5$ (6) | $-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12$ (5) |
| $2.5 \leq x < 8, x > 8$ (8) | $x < -1, 2 < x < 6, x > 6$ (7) |
| $x < -3, 0 < x < 1, x > 4$ (10) | $x > 3$ (9) |
| $x > 7$ (12) | $-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3$ (11) |
| $x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4$ (14) | $x < -2, 2 < x < 4$ (13) |
| $x \neq 1$ (16) | $x \neq 7$ (15) |
| $-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3$ (18) | $x \geq 7$ (17) |

תחום הגדרה:

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{3x-4}$	ב. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$
ג. $f(x) = \sqrt{12x - x^2 - x^3}$	ד. $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$
ה. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$	ו. $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3}$	ב. $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$
ג. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$	ד. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

(3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1 \leq x \leq 4$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

(4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x > 2, x \leq -2$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, (a פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a .

תשובות סופיות:

- (1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1, x \geq 6$ ג. $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד. $-5 \leq x < -2, x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2, x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד. $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3) $a = 5$
- (4) $a = 2$
- (5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 3 - גיאומטריה אנליטית - הישר

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית 27
2. משוואת הישר 31
3. מצבים הדדיים בין ישרים 35
4. שאלות מסכמות 37

מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ יחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הוא:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

- שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הוא: $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

שאלות:

שאלות העוסקות באמצע קטע:

- (1) מצא את אמצעי הקטעים שקודקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

א. $A(1, 4), B(5, -8)$ ב. $A(-3, 0), B(3, -2)$

ג. $A(4, 5), B(-4, -5)$ ד. $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), B\left(7\frac{1}{2}, -2\right)$

ה. $A(6, -1), B(-3, -1)$ ו. $A(4, 7), B(4, -12)$

- (2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.

מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

א. $A(4, -2), M(2, 1)$ ב. $A(-6, -8), M(0, 0)$

ג. $A(13, -11), M(4, -7)$ ד. $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right), M\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

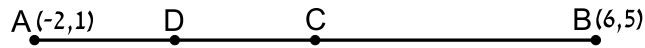
- (3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.

ידוע כי שיעורי הקודקודים B ו-C הם $B(2, -4), C(6, 1)$.

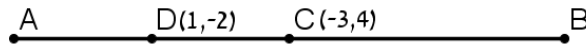
מעבירים תיכון AD לבסיס BC.

מצא את שיעורי הנקודה D.

- (4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
 ידוע כי: $A(-2,1)$, $B(6,5)$.
 מצא את שיעורי הנקודה D.



- (5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
 ידוע כי: $C(-3,4)$, $D(1,-2)$.
 מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



- (6) הנקודות $A(2,-7)$, $B(-10,4)$ ו- $C(6,11)$ הן שלושה קודקודים של מקבילית ABCD.
 מצא את שיעורי הקודקוד הרביעי.

שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:

- (7) מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:
- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| א. $A(4,7), B(-3,7)$ | ב. $A(6,2), B(1,2)$ |
| ג. $A(-3,10), B(0,6)$ | ד. $A(6,-9), B(1,3)$ |
| ה. $A(4,7), B(13,-1)$ | ו. $A(6,6), B(-9,-9)$ |
- (8) חשב את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם: $A(3,-2)$, $B(4,9)$, $C(0,14)$.
- (9) נתונות נקודות $A(14,4)$, $B(6,y)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך.
 מצא את y.
- (10) נתונות נקודות $A(x,-12)$, $B(15,-2)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך.
 מצא את x.
- (11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה-y שלה גדול פי 3 משיעור ה-x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

12 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$ יחידות אורך. שיעורי הקודקוד A הם $(0,4)$ ושיעורי ה- y של הקודקודים B ו- C הוא -2 . מצא את קודקודי המשולש B ו- C (הנח B ברביע הרביעי).

13 אורך האלכסון AC במלבן $ABCD$ הוא $d_{AC} = \sqrt{50}$ וידוע כי: $A(-3,-2)$, $B(-4,1)$. מצא את היקף המלבן.

שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:

14 מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| א. $A(5,2)$, $B(4,1)$ | ב. $A(3,-2)$, $B(-3,1)$ |
| ג. $A(7,8)$, $B(6,15)$ | ד. $A(0,5)$, $B(7,0)$ |
| ה. $A(6,9)$, $B(6,-7)$ | ו. $A(4,-1)$, $B(18,-1)$ |

15 מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו הם: $A(6,5)$, $B(2,13)$, $C(4,-7)$ מונחים עליהם.

תשובות סופיות:

- (1) א. $(3, -2)$ ב. $(0, -1)$ ג. $(0, 0)$ ד. $\left(4, -\frac{5}{8}\right)$
- ה. $(1.5, -1)$ ו. $(4, -2.5)$
- (2) א. $B(0, 4)$ ב. $B(6, 8)$ ג. $B(-5, -3)$ ד. $B\left(1, \frac{2}{3}\right)$
- (3) $D(4, -1.5)$
- (4) $D(0, 2)$
- (5) $A(5, -8)$, $B(-11, 16)$
- (6) $D(18, 0)$
- (7) א. $d_{AB} = 7$ ב. $d_{AB} = 5$ ג. $d_{AB} = 5$ ד. $d_{AB} = 13$
- ה. $d_{AB} = \sqrt{145}$ ו. $d_{AB} = 15\sqrt{2}$
- (8) $P_{ABC} \approx 33.727$ יחידות אורך
- (9) $y = -2$ או $y = 10$
- (10) $x = 39$ או $x = -9$
- (11) $B(-1, -3)$
- (12) $B(3, -2)$, $C(-3, -2)$
- (13) $P_{ABCD} = 6\sqrt{10} \approx 18.97$ יחידות אורך
- (14) א. $m_{AB} = 1$ ב. $m_{AB} = -\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB} = -7$ ד. $m_{AB} = -\frac{5}{7}$
- ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB} = 0$
- (15) $m_{AB} = -2$, $m_{BC} = -10$, $m_{AC} = 6$

משוואת הישר:

סיכום כללי:

שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x : $m = \tan \alpha$.

משוואת הישר:

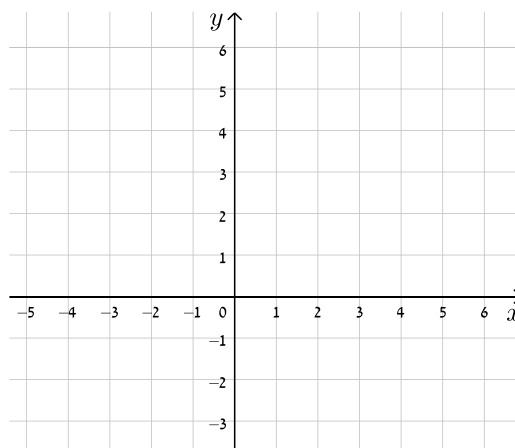
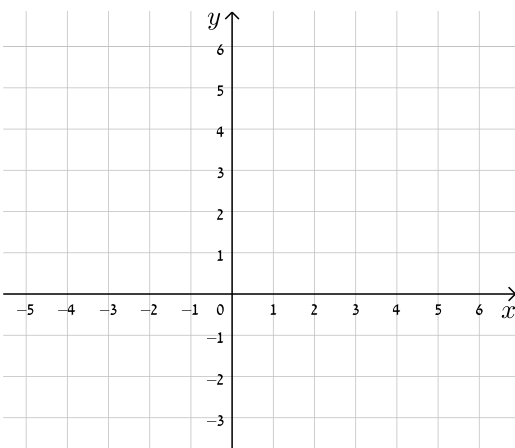
- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y = mx + n$.
כאשר: m הוא שיפוע הישר ו- n הוא שיעור ה- y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y .
- נוסחה למציאת משוואת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

שאלות:

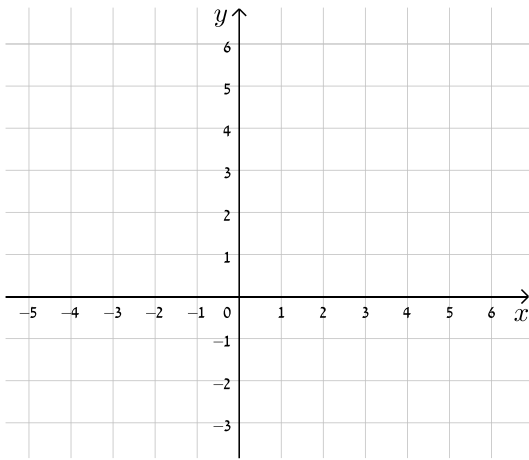
16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

א. $y = x + 4$

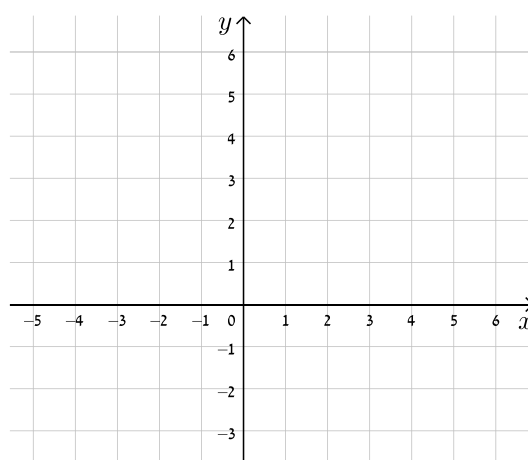
ב. $y = -x + 5$



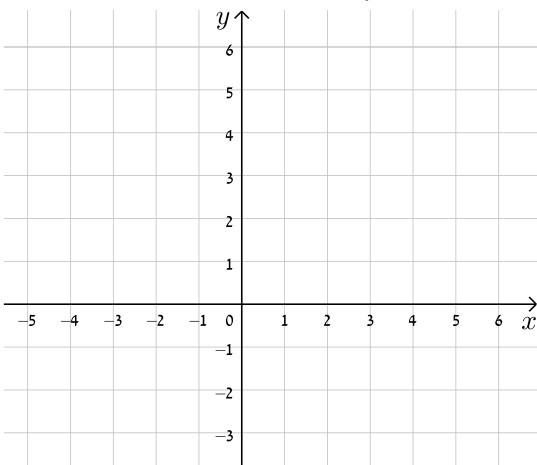
$$ד. \quad y = -3x + 5$$



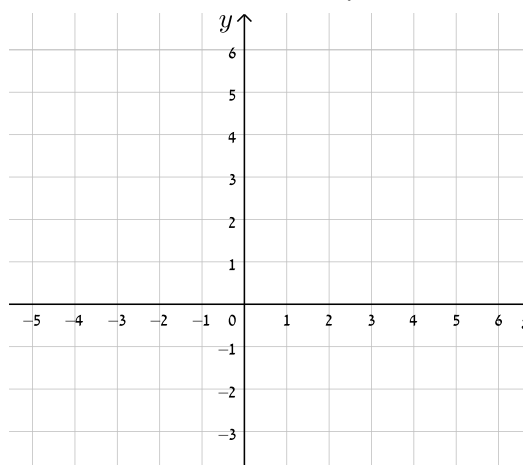
$$ג. \quad y = 2x - 3$$



$$ו. \quad y = 8 - 4x$$

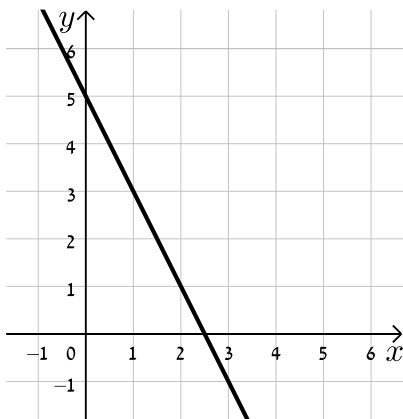


$$ה. \quad y = 3x - 1$$

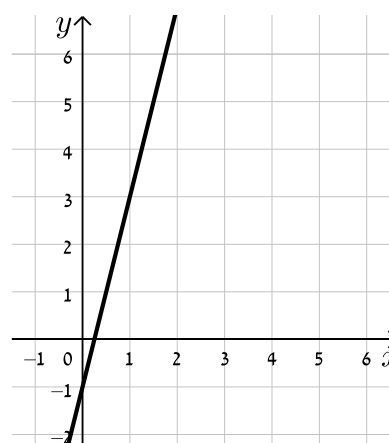


17) כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

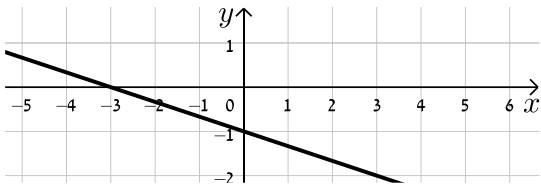
ב.



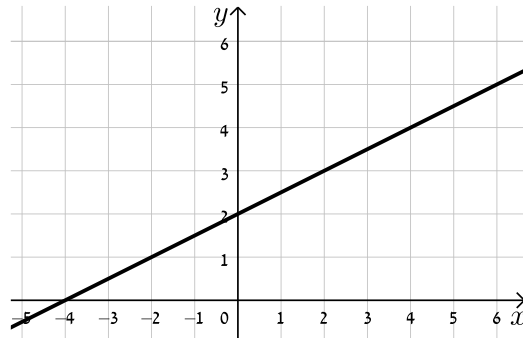
א.



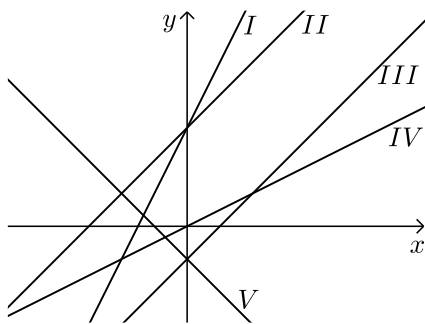
ד.



ג.



18) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:



א. $y = x + 3$

ב. $y = -x - 1$

ג. $y = 2x + 3$

ד. $y = x - 1$

ה. $y = \frac{1}{2}x$

19) נתונה משוואת הישר הבאה: $y = 2x + 3$. קבע אלו מבין הנקודות הבאות

נמצאות עליו: $A(-1,1)$, $B(3,3)$, $C(0,4)$, $D(6,15)$.

20) נתונה משוואת הישר הבאה: $y = mx - 2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4,2)$ נמצאת

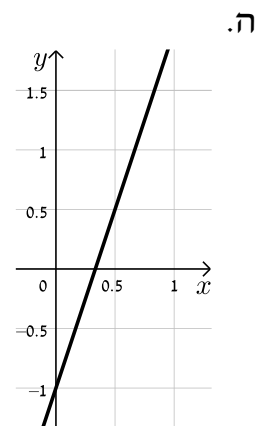
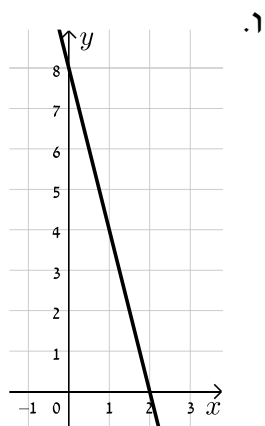
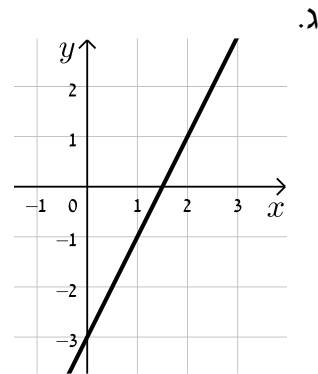
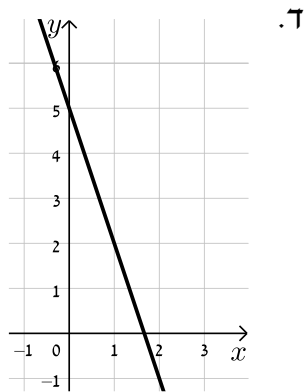
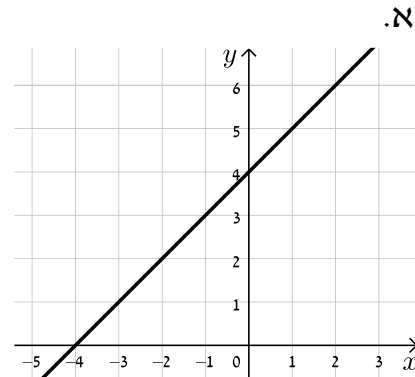
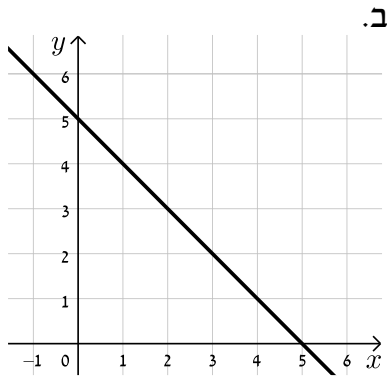
על הישר. מצא את m וקבע האם גם הנקודה $B(7,-2)$ נמצאת עליו.

21) הנקודות $A(5,-3)$, $B(4,1)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא: $y = mx + n$.

מצא את m ואת n .

תשובות סופיות:

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:



$$y = -\frac{1}{3}x - 1 \quad \text{ד. III.}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \quad \text{ג. I.}$$

$$y = -2x + 5 \quad \text{ב. V.} \quad \text{א. (17) } y = 4x - 1$$

ה. IV.

ד. III.

ג. I.

ב. V.

א. II. (18)

(19) נמצאות: A, D. לא נמצאות: B, C.

$$m = \frac{9}{8} \quad \text{ב. B לא נמצאת. (20)}$$

$$m = -4, n = 17 \quad \text{(21)}$$

מצבים הדדיים בין ישרים:

סיכום כללי:

מצב הדדי בין שני ישרים:

- ישרים מקבילים מקיימים: $m_1 = m_2, n_1 \neq n_2$.
- ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.
- ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1 = m_2, n_1 = n_2$.

שאלות:

22) מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases} \quad \text{ג.}$	$\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases} \quad \text{ב.}$	$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases} \quad \text{א.}$
---	--	---

23) קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

$\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases} \quad \text{ב.}$	$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \quad \text{א.}$
$\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases} \quad \text{ד.}$	$\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases} \quad \text{ג.}$

24) קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases} \quad \text{ב.}$	$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \quad \text{א.}$
$\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases} \quad \text{ד.}$	$\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases} \quad \text{ג.}$

25) משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y = 6x - 2$.

- מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?
- כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

(26) במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $A(5,-1)$, $B(3,7)$, $C(-5,5)$. הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

(27) מצא את משוואות הישרים הבאים:

- א. ישר העובר דרך הנקודה $A(1,3)$ ושיפועו $m=2$.
- ב. ישר העובר דרך הנקודה $A(0,-4)$ ושיפועו $m=\frac{1}{3}$.
- ג. ישר העובר דרך הנקודה $A(5,9)$ ושיפועו $m=0$.
- ד. ישר העובר דרך הנקודות $A(5,-12)$ ו- $B(6,-6)$.
- ה. ישר העובר דרך הנקודה $A(-6,4)$ ומקביל לישר: $y=2x-3$.
- ו. ישר העובר דרך הנקודה $A(3,-5)$ ומקביל לציר ה- y .
- ז. ישר העובר דרך הנקודה $A(-7,-3)$ ומאונך לישר: $y=x+3$.
- ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים: $y=11x-4$ ו- $y=3x-12$ ומקביל לישר: $y=7x+5$.

תשובות סופיות:

- (22)** א. $(-1,1)$ ב. $(-6,-18)$ ג. $(10,16)$.
- (23)** א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.
- (24)** מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.
- (25)** א. $m_{AB} = m_{CD} = 6$, $m_{BC} = m_{AD} = -\frac{1}{6}$.
- ב. הכל הפוך: $m_{BC} = m_{AD} = 6$, $m_{AB} = m_{CD} = -\frac{1}{6}$.
- (26)** שאלת הוכחה.
- (27)** א. $y=2x+1$ ב. $y=\frac{1}{3}x-4$ ג. $y=9$ ד. $y=6x-42$
- ה. $y=2x+16$ ו. $x=3$ ז. $y=-x-10$ ח. $y=7x-8$

שאלות מסכמות:

שאלות:

(28) במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.

ידוע כי: $A(3, -2)$, $B(2, 4)$, $D(-2, 2)$.

- כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.
- מצא את שיעורי הקודקוד C.
- כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

(29) נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים A(-9,1) ו-B(5,-7).

משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x + 3y + 6 = 0$.

- מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.
- מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.

(30) שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים בשרטוט:

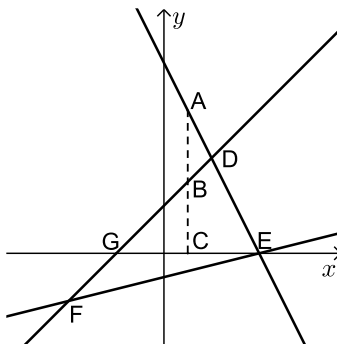
$$2x + y - 8 = 0 \text{ ו- } x - y + 2 = 0, \quad x - 4y - 4 = 0$$

הקטע AC מקביל לציר ה-y.

א. חשב את שטח המשולש DEF.

ב. נתון: $d_{BC} = 3$.

חשב את אורך הקטע AB.



(31) BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד A(-6,1).

משוואת התיכון BD היא $x - y = 1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x + 5y = 67$.

מצא את שיעורי הקודקוד C.

(32) נתון טרפז ABCD ($AB \parallel CD$) ובו משוואת השוק BC היא: $x = 2$.

משוואת הבסיס CD היא $2x + 3y = 7$ וידוע כי $A(-4, 1)$.

- מצא את משוואת הבסיס AB.
- מצא את שיעורי הקודקודים B ו-C.
- מעבירים את האלכסון AC. הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.

תשובות סופיות:

$$(28) \quad \text{א. } y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5} \quad \text{ב. } C(-6, 0) \quad \text{ג. } y = -\frac{2}{9}x - \frac{4}{3}$$

$$(29) \quad \text{א. } l_{BD} : y = 3x - 22 \quad \text{ב. } l_{BC} : y = -\frac{1}{8}x - 6\frac{3}{8}$$

$$(30) \quad \text{א. } 18 \text{ יח"ש } = S_{EDF} \quad \text{ב. } 3 \text{ יחידות אורך } = AB$$

$$(31) \quad C(14, 5)$$

$$(32) \quad \text{א. } y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \quad \text{ב. } B(2, -3), C(2, 1) \quad \text{ג. } 12 \text{ יחידות שטח} = S_{ABC}$$

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 4 - פונקציות - הפונקציה הקווית

תוכן העניינים

1. ייצוג גרפי של פונקצית הקו הישר (ללא ספר)
2. שיפוע ישר (ללא ספר)
3. הקו הישר הכללי (ללא ספר)
4. שיפוע דרך שתי נקודות (ללא ספר)
5. משוואת ישר עם שיפוע ונקודה (ללא ספר)
6. משוואת ישר המקביל לישר נתון (ללא ספר)
7. משוואת ישר דרך שתי נקודות (ללא ספר)
8. ישרים המקבילים לצירים (ללא ספר)
9. חיתוך של ישר עם הצירים (ללא ספר)
10. חיוביות ושליליות של קו ישר (ללא ספר)
11. חישובי שטחים עם הפונקציה הקווית (ללא ספר)

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 5 - פונקציות - הפונקציה הריבועית

תוכן העניינים

1. הפונקציה הריבועית היסודית $y=x^2$ (ללא ספר)
2. משפחת הפרבולות מהצורה $y=x^2+c$ (ללא ספר)
3. משפחת הפרבולות מהצורה $y=(x-p)^2$ (ללא ספר)
4. משפחת הפרבולות מהצורה $y=(x-p)^2+k$ (ללא ספר)
5. משפחת הפרבולות עם מקדם a כללי (ללא ספר)
6. משפחת הפרבולות מהצורה $y=a(x-p)^2+k$ (ללא ספר)
7. הצגה סטנדרטית של הפונקציה הריבועית (ללא ספר)
8. סרטוט של גרף הפונקציה הריבועית הכללית (ללא ספר)
9. מציאת נקודות האפס של פונקציה ריבועית עם a כללי (ללא ספר)
10. ייצוגים שונים של פונקציה ריבועית (ללא ספר)
11. חיתוך בין ישר ופרבולה (ללא ספר)
12. חיתוך בין שתי פרבולות (ללא ספר)
13. שאלות מסכמות (ללא ספר)

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 6 - אלגברה - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות 39
2. חקירת מערכת משוואות ליניאריות (עם פרמטר) 44
3. פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות 47

פתרון מערכת משוואות לינאריות

שאלות

1 מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות :

$$\begin{array}{llll} 2x+y=4 & x-y=0 & x-4y=-7 & x+10y=11 \\ x+y=3 & 2x+y=3 & x-y=-1 & 2x-2y=0 \end{array} \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

2 רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{llll} x=3 & 2x+y+z=3 & x-4y+z=-7 & x+10y=11 \\ 2x+y=4 & x-z=0 & x-y=-1 & 2x-2=0 \\ z+t=8 & & x+y+z=5 & x+y=3 \end{array} \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

בשאלות 3-5 בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \text{(4)} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} & \text{(3)} \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

6 מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל,

כדי לקבל את המטריצה מימין :

$$\begin{array}{l} \text{א.} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{ב.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{ג.} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

בשאלות 7-15 הביאו את המטריצות הבאות לצורה מדורגת
 (בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה מדורגת קנונית):

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (10) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (14) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$$

* בשאלה 15 יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה \mathbb{C} ופעם מעל השדה \mathbb{R} .

בשאלות 16-27 פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= 20 \\ 3x + 6y &= 15 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 5x - 4y &= -3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 32 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 8x - 4y &= 10 \\ -6x + 3y &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 4x + 6y + 16z &= 8 \\ 3x + 2y + 17z &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -11 \\ 2x + 3y - z &= -5 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 4x - 7y &= 0 \\ 8x - 14y &= 2 \\ -16x + 28y &= 4 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 2x + y &= -1 \\ x - y &= -2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2t &= 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t &= 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t &= 8 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -9x + 6y &= -3 \\ 6x - 4y &= 2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ 2x + 8y + 12z &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

28) פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל השדה F :

$$z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 = 1 + 4i$$

$$iz_1 + z_2 + (1+i)z_3 = 2 + i$$

$$(-1+3i)z_1 + (3-i)z_2 + (2+4i)z_3 = 5 - i$$

א. $F = \mathbb{R}$

ב. $F = \mathbb{C}$

תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

$$(2 \ 1 \ 1 \ 3) \text{ ג. } \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ ב. } \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ א. } \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \text{ (5)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ (4)} \quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \text{ (3)}$$

6) א. $R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2$ ב. $R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1$ ג. $R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ -ג } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ -ג } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ -ג } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$F=\mathbb{R}$ $F=\mathbb{C}$

$$\phi \quad (18) \quad (x, y) = (5 - 2t, t) \quad (17) \quad (x, y) = (1, 2) \quad (16)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (20) \quad \phi \quad (19)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (22) \quad (x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (21)$$

$$(x, y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t \right) \quad (24) \quad \phi \quad (23)$$

$$\phi \quad (26) \quad (x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (25)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (27)$$

$$(z_1, z_2, z_3) = ((-1+i)t + 1 + i, 3, t) \quad \text{ב} \quad (z_1, z_2, z_3) = (2, 3, -1) \quad \text{א} \quad (28)$$

$F=\mathbb{C}$ $F=\mathbb{R}$

חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר)

שאלות

בשאלות 1-6 מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \quad (2) \\ kx+y+z=1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 5x-7y+(k^2+3)z=k^2+1 \quad (1) \\ 3x-y+(k+3)z=3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ x+2y-z=0 \quad (4) \\ 5x+(1-k)y+k^2z=1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x+2ky+z=0 \\ 3x+y+kz=2 \quad (3) \\ x+9ky+5z=-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+ky+3z=2 \\ kx-y+z=4 \quad (6) \\ 3x+y+(2+k)z=0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} kx-y=1 \\ (k-2)x+ky=-2 \quad (5) \\ (k^2-1)z=9 \end{array}$$

בשאלות 7-9 מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} 2x-3y+z=1 \\ 4x+(k^2-5k)y+2z=k \quad (8) \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2x+ky=3 \\ (k+3)x+2y=k^2+5 \quad (7) \\ 6x+3ky=7k^2+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x+4y-z=2 \\ kx-2y+z=-1 \\ x+8y-3z=k \\ 2x+6y-2z=0.5k+1 \end{array} \quad (9)$$

בשאלות 10-12 מצאו לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x+y-z+t=1 \\ ax+y+z+t=b \quad (12) \\ 3x+2y+at=1+a \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2x+4y+az=-1 \\ x+2y+4z=-4 \\ x+2y-4z=0 \\ x+2y+6z=-2b \end{array} \quad (11) \qquad \begin{array}{l} x+2y-4z=b \\ 7x-10y+16z=7 \quad (10) \\ 2x-ay+3z=1 \end{array}$$

$$x + az = 1$$

$$y + 2z = 2 \quad (13) \text{ נתונה מערכת המשוואות:}$$

$$bx + cy + dz = 3$$

- א. מצאו תנאי עבור a, b, c, d , כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.
 ב. מצאו תנאי עבור b, c, d , כך שלכל a , למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

$$(14) \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

- א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
 ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
 ג. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת:
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
 ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
 ה. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z = 0$.
 ו. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z = 0$.
 ז. מצאו עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1, 2, 3)$.
 האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.
 ח. מצאו לאיזה ערך של k , הוא הפתרון היחיד של המערכת.

$$(15) \text{ נתונות המשוואות של 3 מישורים: } \begin{cases} 3x + my = 3 \\ mx + 2y - mz = 1 \\ -x + mz = -1 \end{cases}$$

- בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של m שלוש המישורים:
 א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).
 ב. לא נפגשים באף נקודה.
 ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).
 ד. האם קיים ערך של m עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?

תשובות סופיות

$$(1) \quad 1. \ k \neq 1, k \neq -2 \quad 2. \ k = 1 \quad 3. \ k = -2$$

$$(2) \quad 1. \ k \neq 1, k \neq -2 \quad 2. \ k = -2 \quad 3. \ k = 1$$

$$(3) \quad 1. \ k \neq -1, k \neq \frac{4}{7} \quad 2. \ k = \frac{4}{7} \quad 3. \ k = -1$$

$$(4) \quad 1. \ k \neq 1, k \neq -0.4 \quad 2. \ k = 1, k = -0.4$$

$$(5) \quad 1. \ k \neq \pm 1, k \neq -2 \quad 2. \ k = \pm 1, k = -2$$

$$(6) \quad 1. \ k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2 \quad 2. \ k = -1, k = -3, k = 2$$

$$(7) \quad 1. \ k = -1 \quad 2. \ k \neq \pm 1 \quad 3. \ k = 1$$

$$(8) \quad 1. \ k = 3 \quad 2. \ k = 3 \quad 3. \ k \neq 3$$

$$(9) \quad 1. \ k \neq 1 \quad 2. \ k = 1$$

$$(10) \quad 1. \ a \neq 2 \quad 2. \ a = 2, b \neq -3 \quad 3. \ a = 2, b = -3$$

$$(11) \quad 1. \ a \neq -6 \text{ או } b \neq 2.5 \quad 2. \ a = -6, b = 2.5$$

$$(12) \quad 1. \ a = 2, b \neq 2 \quad 2. \ a \neq 2 \text{ או } a = 2, b = 2$$

$$(13) \quad 1. \ ab + 2c \neq d \quad 2. \ b = 0, c = 1.5, d = 3$$

$$(14) \quad 1. \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix} \quad 2. \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(15) \quad 1. \ k \neq 2, k \neq -1 \quad 2. \ k = -1 \quad 3. \ k = 2 \quad 4. \ (x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$$

$$5. \ k = \pm 2 \quad 6. \ k = -2 \quad 7. \ k = 2, \text{ לא} \quad 8. \ k = -2$$

$$9. \ m \neq 0, -2, 3 \quad 10. \ m = -2, 3 \quad 11. \ m = 0 \quad 12. \ \text{לא}$$

פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות

שאלות

$$(1) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ 4x - 2y + 5z = 12 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(2) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(3) \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y - z = k \\ 2x + my + z = 3 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

- א. מצאו את ערכי m , עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.
 ב. עבור ערך m שנמצא ב-א, מצאו את ערכי k , עבורם למערכת פתרון.
 ג. עבור ערכי m, k שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

(4) נתון שהחמישייה $(4t - 2s + 4, -t + s, 2, t, s)$ מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

- א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.
 ב. החמישייה $(4, 0, 2, 0, 0)$, היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.
 ג. החמישייה $(4, 0, 2, 1, 1)$, היא פתרון של המערכת הנתונה.
 ד. לכל a ממשי, החמישייה $(4a, 0, 2a, 0, 0)$ אינה פתרון של המערכת הנתונה.
 ה. החמישייה $(4t - 2s, -t + s, 0, t, s)$, היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
 ו. החמישייה $(0, 1, 0, 1, 2)$, היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
 ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

$$(5) \quad \begin{cases} 3x + my = 0 \\ mx + 2y - mz = 0 \\ -x + mz = 0 \end{cases}$$

נתונה המערכת ההומוגנית

יהי W אוסף הפתרונות של המערכת.
 עבור אילו ערכים של הקבוע m (אם בכלל) W הוא:
 א. נקודה (מצאו נקודה זו).
 ב. ישר (מצאו ישר זה).
 ג. מישור (מצאו מישור זה).

$$(6) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$$

נסמן ב- A' את הצורה המדורגת של A .
 ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.
 מצאו את A .

תשובות סופיות

- (1) פתרון כללי של המערכת $(4 - \frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t + 2, t)$.
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $(-\frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t, t)$.
- (2) למערכת פתרון יחיד $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.
- למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד $(0, 0, 0)$.
- (3) א. $m = -3$ ב. $k = -2$ ג. פתרון כללי של המערכת $(x, y, z) = (t, t - 1, t)$.
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא (t, t, t) .
- (4) א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה.
ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה.
ז. הטענה לא נכונה.
- (5) א. $m \neq 0, -2, 3$. הנקודה היא $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
- ב. אם $m = 0$ נקבל ישר $\underline{x} = t(0, 0, 1)$ אם $m = 2$ נקבל ישר $\underline{x} = t(2, -1, 1)$,
- אם $m = 3$ נקבל ישר $\underline{x} = t(3, -3, 1)$.
- ג. אין ערכים של m עבורם נקבל מישור.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{pmatrix} \quad (6)$$

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 7 - אלגברה - מטריצות

תוכן העניינים

50	1. מטריצות
55	2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות
56	3. המטריצה ההופכית
59	4. דרגה של מטריצה
63	5. בחזרה למערכת משוואות ליניארית

מטריצות

שאלות

1 נתונות המטריצות הבאות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

- א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$
ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. $E^T B$
ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

2 מצאו את x, y, z , אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3 א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4 $2tr(D^2 - 2E)$

5 א. $4C^T + A$ ב. $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

6 $I_2 BC$

7 $tr(C^T C)$

8 $DABC$

- (9) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n .
 נתון כי $(A-I)(A+I) = 0$.
 הוכיחו או הפריכו: $A = I$ או $A = -I$.

(10) אפיינו את כל המטריצות $A_{2 \times 2}$ שמקימות $A^2 = -4I$.

(11) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

- (12) שתי מטריצות A ו- B יקראו מתחלפות אם $AB = BA$.
 הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות A ו- B מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז המטריצות

A ו- B מתחלפות.

ב. אם המטריצה A מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז $A^T = -A$.

- (13) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n .
 נתון כי $AA^T = 0$. הוכיחו כי $A = 0$.

האם הטענה נשארת נכונה אם איברי A מרוכבים?
 אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

- (14) יהיו A ו- B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB = BA$ (מטריצות מתחלפות).
 א. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $AB^k = B^k A$.
 ב. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $(AB)^k = A^k B^k$.

(15) לפי נוסחת הבינום של ניוטון $(A+B)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$, כאשר

$$A, B \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$$

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם A ו- B מטריצות ריבועיות מסדר ℓ ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות A ו- B , על מנת שנוסחת הבינום תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של $(A+I)^n$ ו- $(A-I)^n$, כאשר A ו- I ריבועיות מסדר ℓ .

- 16** א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
 ב. נניח ש- A ו- B מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.
 הוכיחו שגם המטריצות AB ו- $A+B$ נילפוטנטיות.

17 תהי $A_{n \times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = \min\{i, j\}$.
 תהי $B_{n \times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = n + 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

- א. כתבו את המטריצות A ו- B בצורה מפורשת.
 ב. המטריצה C מקיימת $C = A \cdot B$.
 חשבו את C ומצאו נוסחה עבור c_{ij} לכל $1 \leq i, j \leq n$.

18 מצאו מטריצה ממשית A , כך שיתקיים $A - \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \right)^T = A - A^T$.

תשובות סופיות

(1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא. ו. 6×6

ז. 6×2 ח. לא

(2) $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(9) שאלת הוכחה.

(10) $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) א+ב. שאלת הוכחה.

$$(A+I)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} A^1 + \binom{n}{n} I$$

$$(A-I)^n = \binom{n}{0} A^n - \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n-1} A^1 + (-1)^n \binom{n}{n} I$$

(16) שאלת הוכחה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א. (17)}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \dots & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & \dots & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } c_{ij} = \min\{i, n+1-j\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(18)}$$

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

(1) ידוע ש- A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):

1. AA^T סימטרית.
2. $A + A^T$ סימטרית.
3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.

(2) ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:

1. $BABABA$ אנטי-סימטרית.
2. $A^2 - B^2$ סימטרית.
3. $A^2 + B$ סימטרית.

(3) ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$.
מי מבין הבאים נכון:

1. AB^3 אנטי-סימטרית.
2. AB^2 סימטרית.
3. $(A - B)^2$ סימטרית.

(4) ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.
הוכיחו:

1. AB אנטי-סימטרית.
2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.

(5) נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר.

הוכיחו כי $A^4 B^4 = B^4 A^4$.

תשובות סופיות

- (1) 1,2,3
- (2) 2
- (3) 1,2,3
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות 1-9 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה. בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(1)} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(4)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(7)} \end{array}$$

(10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ הפיכה?

(11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ איננה הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר n , וחלצו את X :

(12) א. $AXC = D$ ב. $A^{-1}XC = A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^T P = A$

(13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$ ב. $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

(14) $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

(15) נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

חשבו את X , אם ידוע כי $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$.

$$(16) \text{ נתון } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

חשבו את Y , אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1} + B$.

$$(17) \text{ נתון } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

חשבו את B , אם נתון בנוסף כי $5A^T B(I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \lambda \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1} A \quad \text{ב.} \quad CD^2 - A \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

דרגה של מטריצה

שאלות

(1) אמתו את המשפט $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$,

$$. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \text{ על המטריצה}$$

(2) אמתו את המשפט $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$,

$$. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ עבור}$$

$$. A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix} \text{ נתונה המטריצה (3)}$$

חשבו את $\text{rank}(A)$.

(4) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר $n > 1$. הוכיחו או הפריכו:

א. $\text{rank}(A) = n-1 \Rightarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

ב. $\text{rank}(A) = n-1 \Leftarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

(5) נתון כי A, B מטריצות ריבועיות מסדר $n > 1$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\text{rank}(A) = \text{rank}(AB)$, אז בהכרח B הפיכה.

ב. ייתכן ש- $\text{rank}(A) < \text{rank}(AB)$.

ג. אם $\text{rank}(A) > \text{rank}(B)$, אז $\text{rank}(AB) > \text{rank}(B)$.

$$(6) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את $\text{rank}(A)$, $\text{rank}(B)$.

ב. חשבו את $\text{rank}(B^{10}A^{14})$.

(7) נניח כי A, B שתי מטריצות ריבועיות מסדר n .

הוכיחו כי $\text{rank} \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \leq 2\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

(8) תהי $A_{8 \times 7}$ מטריצה, כך ש- $\text{rank}(A) = 3$.

הוכיחו כי קיימות 3 מטריצות A_1, A_2, A_3 , שלכל אחת מהן דרגה 1,

כך ש- $A = A_1 + A_2 + A_3$.

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר $m \times n$ שדרגתה k .

(9) נתונות שתי מטריצות $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$.

ב. $\text{rank}(AB) \neq \text{rank}(BA)$.

ג. המטריצה BA לא הפיכה.

(10) תהי A מטריצה מסדר $m \times n$, ותהי B מטריצה מסדר $n \times m$.

הוכיחו:

א. אם $AB = I_m$ אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = m$.

ב. אם $BA = I_n$ אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$.

ג. אם $AB = I_m$ וגם $BA = I_n$ אז בהכרח $m = n$.

ד. אם A לא ריבועית אז לא ייתכן שגם $AA^T = I_m$ וגם $A^T A = I_n$.

(11) בשדה F נתונים a_1, a_2, \dots, a_m איברים, שלא כולם אפס, ו- b_1, b_2, \dots, b_n איברים,

שלא כולם אפס.

קבעו מהי דרגתה של המטריצה $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, כאשר $m_{ij} = a_i b_j$.

- (12)** תהי $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = b_i^2 - b_j^2$, כאשר b_1, b_2, \dots, b_n מספרים ממשיים שונים ו- $n \geq 3$.
- א. הוכיחו שהמטריצה לא הפיכה.
 ב. האם הטענה תישאר נכונה אם נשנה את הנתון ל- $n \geq 2$? הוכיחו או הפריכו.

- (13)** תהיינה A, B מטריצות מעל \mathbb{R} , מסדר $m \times n$, כך שלכל $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$, מתקיים $A\underline{x} \neq B\underline{x}$.
 מה הדרגה של המטריצה $A - B$?

- (14)** תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$.
- א. נתון שכל פתרון של המערכת $(AB)\underline{x} = \underline{0}$, הוא פתרון של המערכת $A\underline{x} = \underline{0}$.
 הוכיחו שהדרגה של AB שווה לדרגה של A .
 ב. הוכיחו: אם A הפיכה, אז $\rho(AB) = \rho(A)$.
 ג. הוכיחו שאם $\rho(AB) < \rho(A)$, אז A לא הפיכה.

- (15)** תהי A מטריצה מסדר $n \times n$.
- א. הוכיחו כי $P(A) \subseteq P(A^2)$.
 ב. נתון כי $\rho(A^2) < \rho(A)$.
 הוכיחו שקיים $v \in \mathbb{R}^n$, כך ש- $Av \neq 0$ וגם $A^2v = 0$.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) אם $k=1$, אז $\text{rank}(A)=2$. אם $k=4, k=10$, אז $\text{rank}(A)=3$.
- אם $\text{rank}(A)=4$ $k \neq 1, 4, 10$.
- (4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
- (5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה. ג. הטענה אינה נכונה.
- (6) א. $\text{rank}(A)=2$, $\text{rank}(B)=3$. ב. $\text{rank}(B^{10}A^{14})=2$.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) 1
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) n
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.

בחזרה למערכת משוואות ליניארית

שאלות

(1) פתרו את מערכת המשוואות הבאה,

$$2x - y + z = 3$$

בעזרת המטריצה ההפוכה: $3x - 2y + 2z = 5$

$$5x - 3y + 4z = 11$$

(2) פתרו את מערכת המשוואות הבאה,

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

תשובות סופיות

(1) $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

(2) $(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2)$

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 8 - אלגברה - דטרמיננטות

תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג..... 64
2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n..... 69
3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות..... 74
4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות..... 76
5. שימושי הדטרמיננטה..... 77

דטרמיננטות

שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

בשאלות 6-7 חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

$$(6) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right| \text{ ב.} \\
 \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right| \text{ א. (7)} \\
 \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{array} \right| \text{ ג.}
 \end{array}$$

בשאלות 8-10 חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{array} \right| \text{ (8)}$$

$$\left| \begin{array}{cccc} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{array} \right| \text{ (9)}$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{array} \right| \text{ (10)}$$

בשאלות 11-12 הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\left| \begin{array}{ccc} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{array} \right| \text{ ג.} \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{array} \right| \text{ ב.} \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{array} \right| \text{ א. (11)}$$

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \cdot \text{ב.} \quad \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{א. (12)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \text{ד.} \quad \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \text{ בשאלות 13-15 נתון כי:}$$

חשבו:

$$\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \text{ (13)}$$

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \text{ (14)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ (15)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \text{ הוכיחו כי: (16)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \quad \text{17) הוכיחו כי:}$$

בשאלות 18-19 נתון כי A ו- B מטריצות מסדר 3, $|B|=2$, $|A|=4$.
 חשבו:

18) א. $|ABA^{-1}B^T|$ ב. $|4A^2B^3|$

19) א. $| -A^{-2}B^T A^3 |$ ב. $| -2A^2 A^T \text{adj} B |$

20) נתון: $(PQ)^{-1}APQ = B$.
 הוכיחו: $|A|=|B|$.

21) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש- $2AB+3I=0$, $|A|=2$.
 חשבו את $|B|$.

22) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש- $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
 חשבו את $|A|$, $|B|$.

23) הוכיחו: 1. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 2. $|\text{adj}(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$.

24) נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
 הוכיחו ש- $|A|=0$.

25) נתון: A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^T A^2$, ו- B הפיכה.
 מצאו את n .

26) נתון: $\det(A_{n \times n}) = 2$, $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$.

חשבו: $\det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$.

תשובות סופיות

- (1) א. $ad - bc$ ב. 29 ג. -1
- (2) א. -1 ב. -3 ג. -14
- (3) א. 24 ב. 234 ג. -300
- (4) 9
- (5) 6
- (6) א. 0 ב. 0 ג. 3
- (7) א. 24 ב. 44 ג. 104
- (8) 120
- (9) 114
- (10) 6
- (11) פתרונות באתר: www.GooL.co.il
- (12) פתרונות באתר.
- (13) -8
- (14) 16
- (15) 9
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א. 4 ב. 2^{13}
- (19) א. -8 ב. -2^{11}
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) $\frac{81}{32}$
- (22) $|A|=18, |B|=-2/3$
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) שאלת הוכחה.
- (25) 7
- (26) 4^n

חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n

שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j < n \\ a & 1 \leq i \leq n, j = n \\ a & 1 \leq j \leq n, i = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים a_0, \dots, a_{n-1} , המטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{הפיכה:}$$

(2) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} j & i = j + 1 \\ n & i = 1, j = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

האם קיים ערך של n עבורו דרגת המטריצה קטנה מ- n ?

(3) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases}$$

(4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה ע"י: $a_{ij} = |i - j|$

(5) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i \neq j \end{cases}$$

(6) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n , כאשר $n \geq 1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

(7) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \min\{i, j\} \quad \text{א.}$$

$$a_{ij} = \max\{i, j\} \quad \text{ב.}$$

$$(8) \quad a_{ij} = \begin{cases} \min\{3(i-1), 3(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases} \quad \text{המטריצה } A = (a_{ij}) \text{ נתונה על ידי:}$$

חשבו את $|A|$.

$$(9) \quad a_{ij} = \begin{cases} \min\{k(i-1), k(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases} \quad \text{המטריצה } A = (a_{ij}) \text{ נתונה על ידי:}$$

חשבו את $|A|$ ומצאו עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הפיכה.

(10) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n , כאשר $n \geq 3$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & 2 \leq i \leq n, j = 1 \\ 1 & 2 \leq j \leq n, i = 1 \\ x & \text{else} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$(11) \quad \text{תהי } A = (a_{ij}) \text{ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: } a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i = j \end{cases}$$

חשבו את $D_n = |A_{n \times n}|$.

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$(12) \text{ המטריצה } A = (a_{ij}) \text{ נתונה על ידי: } a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i = j+1 \\ c & j = i+1 \end{cases}$$

- א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב $D_n = |A_{n \times n}|$.
- ב. הניחו כי $a=3, b=1, c=2$ וחשבו:
1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.
 2. את הדטרמיננטה עבור $n=20$.

(13) נתונה מטריצה $A_{n \times n}$.

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:
 מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה
 הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.
 בסוף התהליך מקבלים מטריצה B .
 חשבו את $|B|$ במונחי $|A|$.

$$(14) \text{ חשבו את } D_n = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(15) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & & 1 \\ & \ddots & 2 \\ n & & 2 \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} i & i+j = n+1 \\ 2 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(16) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & b \\ b & & a \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} b & i+j = n+1 \\ a & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

(17) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה של $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \min \{i, n-j+1\}$$

$$\begin{vmatrix}
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1
 \end{vmatrix}$$

(18) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n , כאשר $n \geq 2$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } |A| = a - (n-1)a^2 \quad \text{ב. } A \text{ הפיכה אם ורק אם } a_0 \neq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } (-1)^{n+1} n! \quad \text{ב. לא.}$$

$$(3) \quad |A| = n!$$

$$(4) \quad |A| = (-1)^{n+1} (n-1) 2^{n-2}$$

$$(5) \quad |A| = (a-b)^{n-2} [a + (n-1)b]$$

$$(6) \quad (-3)^{n-1} (2n-3)n!$$

$$(7) \quad \text{א. } |A| = 1 \quad \text{ב. } |A| = (-1)^{n+1} n$$

$$(8) \quad |A| = 2 \cdot 3^{n-2}$$

$$(9) \quad |A| = (k-1) \cdot k^{n-2} \text{ והמטריצה הפיכה אם ורק אם } k \neq 1 \text{ וגם } k = 0$$

$$(10) \quad |A| = (-1)^{n-1} x^{n-2} (n-1)$$

$$(11) \quad D_n = 1 + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$(12) \quad \text{א. } D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-1}, D_2 = a^2 - bc, D_3 = a^3 - 2abc$$

$$\text{ב.1. } D_n = 2^{n+1} - 1 \quad \text{ב.2. } D_{20} = 2^{21} - 1$$

$$|B| = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} |A| & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} |A| & n \text{ odd} \end{cases} \quad (13)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \end{cases} \quad (14)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+2}{2}} 2(n-2)! & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2(n-2)! & n \text{ odd} \end{cases} \quad (15)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ odd} \end{cases} \quad (16)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \\ (-1)^{\frac{n-2}{2} + n-1} & n \text{ even} \end{cases} \quad (17)$$

$$D_n = \begin{cases} a_n (-1)^{\frac{n}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ even} \\ a_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ odd} \end{cases} \quad (18)$$

חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

שאלות

בשאלות 1-2 נתון כי A ו- B מטריצות מסדר 3, $|B|=2$, $|A|=4$.
חשבו:

$$(1) \quad \text{א. } |ABA^{-1}B^T| \quad \text{ב. } |4A^2B^3|$$

$$(2) \quad \text{א. } |-A^{-2}B^T A^3| \quad \text{ב. } |-2A^2 A^T \text{adj}B|$$

$$(3) \quad \text{נתון: } (PQ)^{-1}APQ = B. \text{ הוכיחו: } |A|=|B|.$$

$$(4) \quad \text{נתון: } A \text{ ו-} B \text{ מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-} 2AB+3I=0, |A|=2. \text{ חשבו את } |B|.$$

$$(5) \quad \text{נתון: } A \text{ ו-} B \text{ מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-} B^2-2A^{-1}=0, A+3B=0. \text{ חשבו את } |A|, |B|.$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו: 1. } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \text{2. } |\text{adj}(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}.$$

$$(7) \quad \text{נתון כי } A \text{ מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי. הוכיחו ש-} |A|=0.$$

$$(8) \quad \text{נתון: } A \text{ מטריצה מסדר } n, |A|=128, 2AB=B^T A^2, \text{ ו-} B \text{ הפיכה. מצאו את } n.$$

$$(9) \quad \text{נתון: } \det(A_{n \times n}) = 2, \det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{חשבו: } \det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|.$$

$$(10) \text{ נתון } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי $\det(M) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

תשובות סופיות

(1) א. 4 ב. 2^{13}

(2) א. -8 ב. -2^{11}

(3) שאלת הוכחה.

(4) $\frac{81}{32}$

(5) $|A|=18, |B|=-2/3$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) 7

(9) 4^n

(10) שאלת הוכחה.

כלל קרמר

שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{l}
 x + 2z + 5t = 8 \\
 -2x - 6y = -8 \\
 5x + 3y - 7z + 4t = 5 \\
 2x + 5y + 44z = 51
 \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{l}
 x + z = 3 \\
 4x + y + 8z = 21 \\
 2x + 3z = 8
 \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{l}
 x + 2y = 5 \\
 3x + 4y = 11
 \end{array} \quad (1)$$

תשובות סופיות

$$\begin{array}{l}
 x = 1, y = 2 \quad (1) \\
 x = 1, y = 1, z = 2 \quad (2) \\
 x = y = z = t = 1 \quad (3)
 \end{array}$$

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

- 1) א. חשבו את שטח המקבילית שקדקודיה: $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$.1
 2. $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$.
 ב. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו: $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$.
 ג. מצאו משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$.
 ד. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $(1,2), (3,4), (5,8)$.
 הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה יש להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

- 1) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג. $3x - y + 4z + 2 = 0$. ד. 2

מתמטיקה להנדסאי חשמל

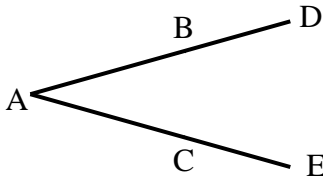
פרק 9 - גאומטריה - מבוא לגיאומטריה של המישור

תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות (ללא ספר) 78
2. חיבור וחסור קטעים 79
3. חישובי זוויות וחיבור וחסור זוויות 81
4. זוויות קדקודיות וזוויות צמודות 82
5. זוויות בין ישרים מקבילים

חיבור וחיסור קטעים:

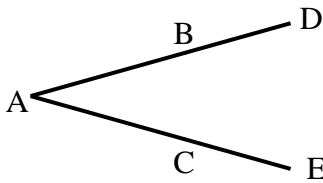
שאלות:



(1) באיור שלפניך נתון:

$AB = AC, BD = CE$

הוכח: $AD = AE$



(2) באיור שלפניך נתון:

$AD = AE, AB = AC$

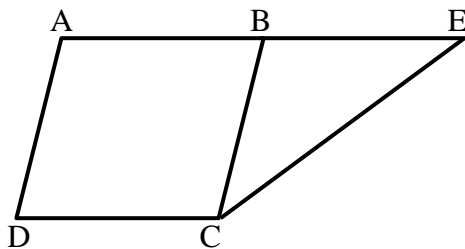
הוכח: $BD = CE$

(3) הנקודות A, M, N, K, B נמצאות על ישר אחד.



נתון כי: $AM = KB, MN = NK$

הוכח: $AN = BN$



(4) בסרטוט שלפניך נתון כי:

$BC = AB, BE + BC = 2AB$

הוכח: $AB = BE$

תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

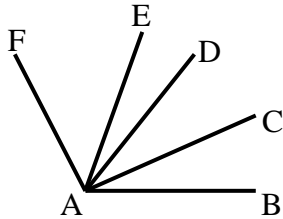
(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

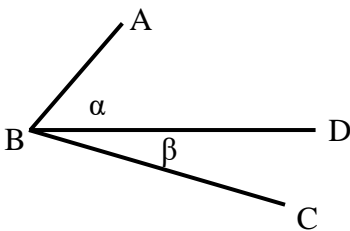
(4) שאלת הוכחה.

חישובי זוויות וחיבור וחיסור זוויות:

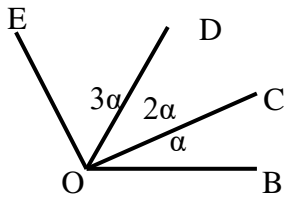
שאלות:



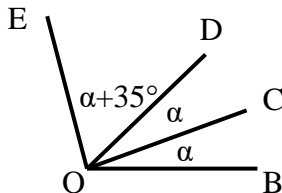
- (5) נתון: $\angle CAB = \angle DAC$, $\angle FAE = 2 \cdot \angle EAD$.
 וכן: $\angle EAB = 80^\circ$, $\angle FAD = 60^\circ$.
 חשב את הזוויות הבאות:
 $\angle FAB$, $\angle EAC$, $\angle CAB$.



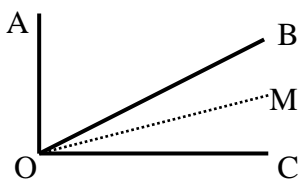
- (6) באיור שלפניך נתון: $\angle ABC = 69^\circ$.
 נתון כי: $\alpha = 2\beta$ (זוויות סמוכות).
 מצא את α ואת β .



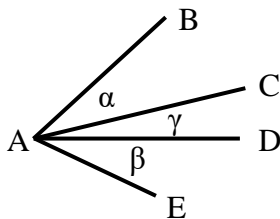
- (7) באיור שלפניך מספר קרניים היוצאים מהנקודה O.
 הנתונים הם: $\angle EOB = 138^\circ$.
 חשב את הזוויות הבאות:
 $\angle EOD$, $\angle DOC$, $\angle COB$.



- (8) באיור שלפניך נתון: $\angle EOB = 110^\circ$.
 שאר הנתונים מופיעים בתרשים.
 חשב את הזוויות הבאות:
 $\angle EOC$, $\angle DOC$.



- (9) נתון האיור הבא ובו: $\angle AOC = 90^\circ$.
 OM חוצה את זווית BOC.
 מתקיים: $\angle AOB = 3\angle MOC$.
 חשב את: $\angle AOM$, $\angle BOM$.



- (10) בסרטוט שלפניך נתון: $\alpha = \beta$.
 הוכח כי: $\angle BAD = \angle EAC$.

תשובות סופיות:

$$\text{(5) } \angle FAB = 120^\circ, \angle EAC = 50^\circ, \angle CAB = 30^\circ$$

$$\text{(6) } \alpha = 46^\circ, \beta = 23^\circ$$

$$\text{(7) } \angle BOC = 23^\circ, \angle COD = 46^\circ, \angle DOE = 69^\circ$$

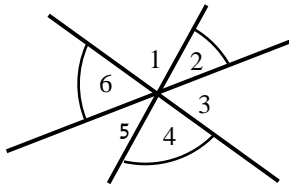
$$\text{(8) } \angle EOC = 85^\circ, \angle DOC = 25^\circ$$

$$\text{(9) } \angle AOM = 72^\circ, \angle BOM = 18^\circ$$

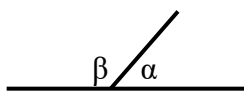
$$\text{(10) שאלת הוכחה.}$$

זוויות קדקודיות וזוויות צמודות:

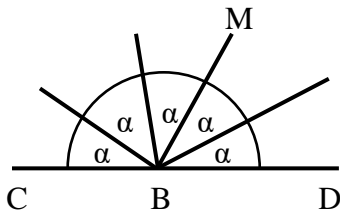
שאלות:



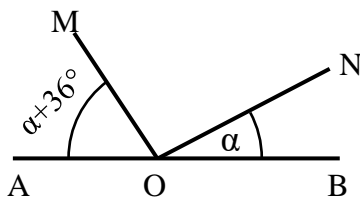
- 11) חשב את סכום הזוויות הבאות (נמק):
 $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 6$



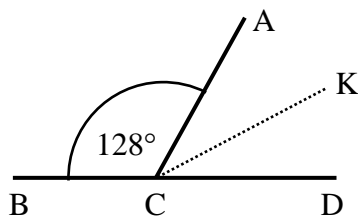
- 12) באיור שלפניך הזוויות α ו- β הן זוויות צמודות. ידוע כי: $\alpha = 63^\circ$. מצא את זווית β .



- 13) באיור שלפניך הזווית CBD היא שטוחה. כל הזוויות שוות ל- α .
 א. חשב את α .
 ב. חשב את זווית CBM.



- 14) בסרטוט שלפניך ידוע:
 הזווית AOB היא שטוחה.
 נתון: $\alpha = 27^\circ$.
 הוכח כי: $MO \perp NO$.



- 15) הזוויות $\sphericalangle ACD$ ו- $\sphericalangle ACB$ הן צמודות. ידוע כי CK חוצה זווית ACD. כמו כן: $\sphericalangle ACB = 128^\circ$. חשב את זווית BCK.

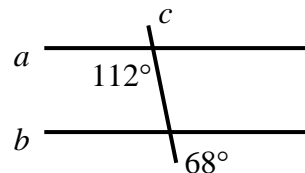
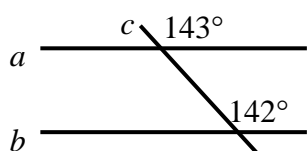
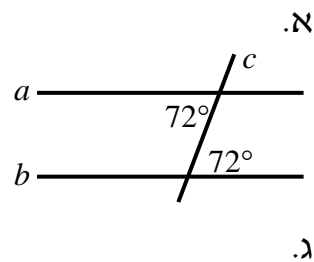
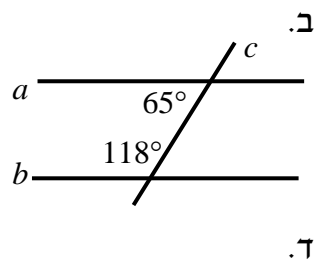
תשובות סופיות:

- 11) 180°
 12) $\beta = 117^\circ$
 13) א. $\alpha = 36^\circ$ ב. $\sphericalangle CBM = 108^\circ$
 14) שאלת הוכחה.
 15) $\sphericalangle BCK = 154^\circ$

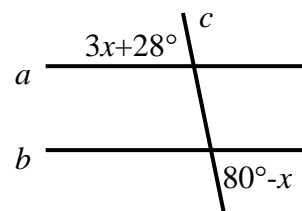
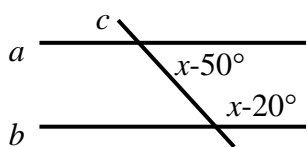
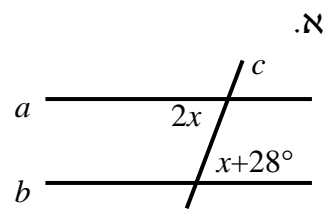
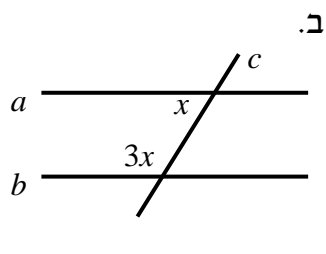
זוויות בין ישרים מקבילים:

שאלות:

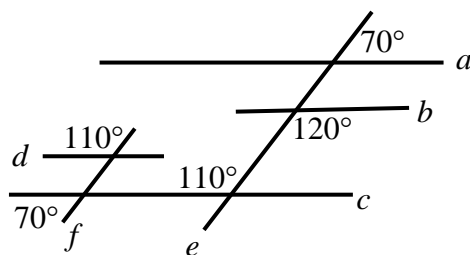
16) קבע בכל מקרה האם הישרים a ו- b מקבילים או שלא. נמק.

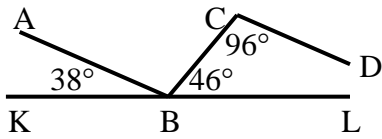


17) הישרים a ו- b מקבילים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:

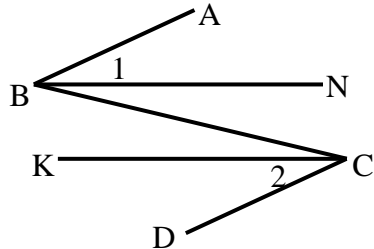


18) מצא את זוויות הישרים המקבילים בסרטוט הבא. נמק.

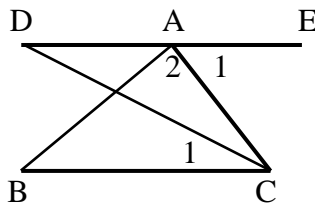




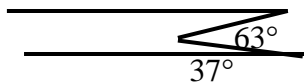
19) בסרטוט שלפניך נתון כי KL הוא קו ישר.
שאר הזוויות מופיעות בתרשים.
הוכח כי: $AB \parallel CD$.



20) באיור שלפניך נתון כי:
 $\angle B_1 = \angle C_2$, $\angle ABC = \angle BCD$
הוכח כי: $BN \parallel CK$.



21) באיור שלפניך מופיע קטע ישר DE.
מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
מחברים את BC וידוע כי $BC \parallel DE$.
מעבירים את CD – חוצה זווית C.
נתון: $\angle A_1 = 68^\circ$, $\angle A_2 = 85^\circ$.
א. חשב את הזווית $\angle C_1$.
ב. חשב את הזווית $\angle B$.



22) בסרטוט שלפניך נתון:
 $\angle D = 37^\circ$, $\angle B = 63^\circ$, $AB \parallel DE$
חשב את גודל הזווית BCD.

תשובות סופיות:

- | | | | |
|---|-----------------|---------------|------------------|
| 16) א. כן | ב. לא | ג. כן | ד. לא. |
| 17) א. 28° | ב. 45° | ג. 13° | ד. 125° . |
| 18) $a \parallel c \parallel d$, $e \parallel f$ | | | |
| 19) שאלת הוכחה. | | | |
| 20) שאלת הוכחה. | | | |
| 21) א. 34° | ב. 27° . | | |
| 22) $\angle BCD = 100^\circ$ | | | |

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 10 - גיאומטריה - משולשים

תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות (ללא ספר)
2. זוויות במשולשים (ללא ספר)
3. משולש שווה שוקיים (ללא ספר)
4. חפיפת משולשים (ללא ספר)
5. זווית חיצונית במשולש (ללא ספר)
6. משולש ישר זווית (ללא ספר)
7. קטע אמצעים במשולש (ללא ספר)
8. מפגש תיכונים במשולש (ללא ספר)

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 11 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

תוכן העניינים

1. הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות..... (ללא ספר)

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 12 - טריגונומטריה במישור

תוכן העניינים

1. טריגונומטריה במישור (ללא ספר)
2. שאלות מסכמות (ללא ספר)

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 13 - סימן הסכימה (סיגמה)

תוכן העניינים

84 1. כללי

סימן הסכימה (סיגמה):

שאלות:

1) כתוב בפירוט את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$	ב. $\sum_{k=1}^4 2k$	ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$
ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$	ה. $\sum_{t=1}^8 tx^t$	ו. $\sum_{k=4}^{10} na_k$
ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$	ח. $\sum_{k=-1}^3 (k^2 + 1)$	ט. $\sum_{l=1}^3 (l^2 - x_l - 4)$

2) כתוב את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$
ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$
ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$
ד. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8$
ה. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 44 \cdot 45$
ו. $3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + 21 \cdot 8$
ז. $5^2 + 7^2 + \dots + 27^2$
ח. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11}$
ט. $\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \frac{14}{81} + \frac{18}{243}$
י. $4 + \frac{8}{5} + \frac{12}{25} + \frac{16}{125} + \frac{20}{625}$

3) חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$	ב. $\sum_{k=1}^{10} (2k + 4k^2)$	ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$
ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3 - k}{k+1}$	ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$	ו. $\sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 1)(k-2)$

* תוכל להיעזר בנוסחאות הבאות: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

(4) חשב את הסכומים הבאים:

$$\text{א. } \sum_{k=1}^{20} \frac{5 \cdot 4^k + 8^k}{2^k} \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{11} \frac{2 \cdot 4^{k+2} + 10^k}{0.4^k} \quad \text{ג. } \sum_{k=10}^{20} 2^{2k+10}$$

$$* \text{ תוכל להיעזר בנוסחה הבאה: } \sum_{k=1}^n a^k = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1} \quad (a \neq 1)$$

(5) חשב את הסכומים הבאים:

$$\text{א. } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2 \quad \text{ב. } 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 24^2$$

$$\text{ג. } 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 22^2 \quad \text{ד. } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2$$

(6) הוכח כי:

$$\text{א. } \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+4}}{k+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{2k+6}}{k+3}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=4}^{n-3} \frac{4k+17+2^{2k}}{k+1} = \sum_{k=8}^{n+1} \frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$$

(7) חשב את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

$$\text{א. } \sum_4^{11} k^2 \quad \text{ב. } \sum_{10}^{20} 4^{2k}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + 4^8 + 4^9 + 4^{10}$$

$$\text{ב. } 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

$$\text{ג. } 4a_4 + 4a_5 + 4a_6 + 4a_7 + 4a_8 + 4a_9 + 4a_{10}$$

$$\text{ד. } 4 \cdot 7^2 a_7 + 4 \cdot 8^2 a_8 + 4 \cdot 9^2 a_9 + 4 \cdot 10^2 a_{10} + 4 \cdot 11^2 a_{11} + 4 \cdot 7^2 a_7$$

$$\text{ה. } 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + 8x^8$$

$$\text{ו. } na_5 + na_6 + na_7 + na_8 + na_9 + na_{10} + na_{11}$$

$$\text{ז. } 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n$$

$$\text{ח. } ((-1)^2 + 1) + (0^2 + 1) + (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1)$$

$$\text{ט. } (1^2 - x_2 - 4) + (2^2 - x_4 - 4) + (3^2 - x_6 - 4)$$

$$(2) \quad \text{א. } \sum_{k=0}^7 2^k \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{10} 2k \quad \text{ג. } \sum_{k=0}^9 (2k+1) \quad \text{ד. } \sum_{k=1}^7 k(k+1)$$

$$\text{ה. } \sum_{k=1}^{22} (2k-1)2k \quad \text{ו. } \sum_{k=1}^7 3k(k+1) \quad \text{ז. } \sum_{n=3}^{14} (2n-1)^2$$

$$\text{ח. } \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{ט. } \sum_{k=1}^5 \frac{4k-2}{3^k} \quad \text{י. } \sum_{k=1}^4 \frac{4k}{5^{k-1}}$$

$$(3) \quad \text{א. } 220 \quad \text{ב. } 1650 \quad \text{ג. } 255 \quad \text{ד. } 9160 \quad \text{ה. } 28 \quad \text{ו. } 4545$$

$$(4) \quad \text{א. } 5 \cdot (2^{21} - 2) + \frac{4}{3} (4^{20} - 1) \quad \text{ב. } 32 \cdot \frac{10(10^{11} - 1)}{10 - 1} + \frac{25(25^{11} - 1)}{25 - 1}$$

$$\text{ג. } 2^{10} \left[\frac{4(4^{20} - 1)}{4 - 1} - \frac{4(4^9 - 1)}{4 - 1} \right]$$

$$(5) \quad \text{א. } 2870 \quad \text{ב. } 2856 \quad \text{ג. } 2024 \quad \text{ד. } 969$$

(6) הוכחה.

$$(7) \quad \text{א. } 9 \cdot 8 + 6 \cdot \frac{8(8+1)}{2} + \frac{8(8+1)(2 \cdot 8+1)}{6} \quad \text{ב. } 4^{18} \cdot \frac{16(16^{11} - 1)}{16 - 1}$$

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 14 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

87	1. חוקי החזקות
92	2. חוקי השורשים
96	3. כתיבה מדעית של מספרים

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 a^n \cdot a^m = a^{m+n} & .3 & a^1 = a & .2 & a^0 = 1 & .1 \\
 a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m & .6 & (a^n)^m = a^{n \cdot m} & .5 & \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & .4 \\
 \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m & .9 & a^{-m} = \frac{1}{a^m} & .8 & \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & .7
 \end{array}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 b^2 b^5 b^{12} b^3 & .ג & t^3 t^5 t^7 & .ב & a^2 a^6 & .א \\
 \frac{c^6}{c^2} & .ו & \frac{n^{14}}{n^9} & .ה & \frac{k^8}{k^3} & .ד \\
 \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} & .ט & \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & .ח & \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & .ז \\
 \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8} & .יב & \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & .יא & 3^2 3^3 3^4 & .י
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4} & .ג & \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & .ב & \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & .א
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243 \cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

$\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$.ב.	$\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$.א.	
$2^3 + 2^5$.ד.	$\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$.ג.	

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

$(x^3 x^{10})^2$.ג.	$(c^3)^{10}$.ב.	$(a^2)^4$.א.
$\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$.ו.	$\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$.ה.	$\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$.ד.
$\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$.ט.	$\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$.ח.	$\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$.ז.
$\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$.יב.	$\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$.יא.	$\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$.י.

(6) לפניך הביטויים הבאים: $\left((3^2)^3 \right)^4$ ו- $\left((3^6)^n \right)^2$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

$\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$.ג.	$\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$.ב.	$\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$.א.
---	---	-------------------------------

(8) פשט את הביטויים הבאים:

$125 \cdot 25 \cdot 5^5$.ג.	$64^2 2^3 8^2$.ב.	$3^2 9 \cdot 81^2$.א.
$\frac{\left((3^4)^4 \right)^5}{81^3 27^4 3^5}$.ו.	$\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$.ה.	$\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$.ד.

9 פשט את הביטויים הבאים :

$\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \quad \text{ב.}$ $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} \quad \text{ד.}$	$\frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \quad \text{א.}$ $\frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \quad \text{ג.}$
--	---

10 פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $(ab)^n = a^n b^n$ ו- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(x^{12}y^3)^3 \quad \text{ג.}$ $\left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3 \quad \text{ו.}$ $\left(\frac{(b^{12}c)^2 c^{14}}{c(c^3b^5)^4 b^3}\right)^2 \quad \text{ט.}$	$(m^4n^3)^5 \quad \text{ב.}$ $\left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7 \quad \text{ה.}$ $\left(\frac{t^7 r^{20} t^3}{r^2 r^{12} t^8}\right)^2 \quad \text{ח.}$	$(a^2b)^3 \quad \text{א.}$ $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 \quad \text{ד.}$ $\left(\frac{x^3 y^5 y^2 x^6}{y^4 x^7}\right)^6 \quad \text{ז.}$
--	--	--

11 חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$\left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^27)^5}\right)^3 \quad \text{ג.}$	$\left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2 \quad \text{ב.}$	$\left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 \quad \text{א.}$
---	--	--

12 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$\frac{1}{2^{10}} \quad \text{ג.}$ $\frac{1}{125} \quad \text{ו.}$	$\frac{1}{5^3} \quad \text{ב.}$ $\frac{1}{81} \quad \text{ה.}$	$\frac{1}{4^6} \quad \text{א.}$ $\frac{1}{8} \quad \text{ד.}$
--	--	---

13 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$\frac{1}{5^{-3}} \quad \text{ג.}$	$\frac{1}{3^{-2}} \quad \text{ב.}$	$\frac{1}{4^{-3}} \quad \text{א.}$
------------------------------------	------------------------------------	------------------------------------

14) חשב את הביטויים הבאים :

ג. $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב. $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א. $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו. $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה. $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד. $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג. $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב. $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

16) פשט את הביטויים הבאים :

ג. $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א. $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

תשובות סופיות:

- (1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
- ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5
- (2) א. 18 ב. ab ג. $x^6 y^{10}$
- (3) $n=16$
- (4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40
- (5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
- ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5
- (6) $n=2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}
- (9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x} + x$
- (10) א. $a^6 b^3$ ב. $m^{20} n^{15}$ ג. $x^{36} y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21} b^3$
- ז. $x^{12} y^{18}$ ח. $t^4 r^{12}$ ט. $b^2 c^6$ ג. 8
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3
- (15) א. $5^{24} \cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} & .3 & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & .2 & \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} & .1 \\
 \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} & .6 & \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} & .5 & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & .4
 \end{array}$$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

א. $3^{\frac{1}{4}}$	ב. $2^{\frac{3}{5}}$	ג. $6^{\frac{5}{6}}$
ד. $-12^{\frac{2}{7}}$	ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$	ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$
ז. $5^{-\frac{1}{4}}$	ח. $27^{-\frac{1}{3}}$	ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$	ב. $-\sqrt{25}$	ג. $\sqrt[3]{8}$
ד. $-\sqrt[3]{128}$	ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$	ו. $(\sqrt[5]{1024})^2$
ז. $(\sqrt[5]{-243})^3$	ח. $\sqrt[4]{-16}$	ט. $\sqrt[4]{-25^2}$
י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$		

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

א. $8^{\frac{2}{3}}$	ב. $32^{\frac{3}{5}}$	ג. $128^{\frac{2}{7}}$
ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$	ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$	ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{\frac{2}{3}}$
ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{\frac{1}{3}}$	ח. $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$	ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[3]{128}}$

21) פשט את הביטויים הבאים :

א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$	ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$	ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$
ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$	ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$	ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$
ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$	ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$	ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים :

א. $3\sqrt{2}$	ב. $5\sqrt{3}$	ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$
ד. $2\sqrt[3]{3}$	ה. $x\sqrt{x}$	

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש :

א. $2\sqrt{5}$	ב. $4\sqrt[3]{2}$	ג. $2\sqrt[5]{3}$
ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$	ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$	ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$
ז. $-5\sqrt[3]{2}$	ח. $-5\sqrt[4]{2}$	ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$
- ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$
- ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[3]{160}$
- ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[9]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $\sqrt{18} - \sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7} + \sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד. $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

- (17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ
- ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16
- ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5
- (19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$
- ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$
- (20) $\sqrt{2}$
- (21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2
- ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$
- (22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$
- (23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$
- ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$
- (25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$
- ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$
- (26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$
- ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000	ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000	ד. 23,400,000
ה. 0.0003	ו. 0.00000042
ז. 0.000000042	ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$	ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$	ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$	ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$	ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

28) א. $1.5 \cdot 10^7$	ב. $1.5 \cdot 10^6$	ג. $1.5 \cdot 10^{11}$	ד. $2.34 \cdot 10^7$	ה. $3 \cdot 10^{-4}$
ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$	ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$	ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$		
29) א. $9 \cdot 10^{12}$	ב. $4 \cdot 10^{12}$	ג. $1.25 \cdot 10^{11}$	ד. $1.25 \cdot 10^{14}$	ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$
ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$	ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$	ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$		

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 15 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

97	1. משוואות מעריכיות יסודיות
99	2. משוואות עם חיבור וחסור איברים
101	3. משוואות עם קבוע אוילר
102	4. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס
103	5. משוואות מסכמות שונות
104	6. מערכת משוואות מעריכיות
105	7. אי שוויונים מעריכיים
106	8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך

משוואות מעריכיות יסודיות:

סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $2^x = 16$ ב. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג. $10^{x-2} = 10000^{x+1}$ ד. $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה. $(2^x \cdot 32)^3 = 8$ ו. $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז. $\frac{7^x}{343^3} = 1$ ח. $(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

(2) פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א. $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$ ב. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג. $25 \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$ ב. $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג. $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$ ד. $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה. $2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8(\sqrt{8})^{-\sqrt{x}}$ ו. $5^x \cdot \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$	ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$
ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$	ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$
ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$	ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$
ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = (2\sqrt{5})^{4-x}$	

תשובות סופיות:

א. $x = 4$	ב. $x = -\frac{1}{3}$	ג. $x = -2$	ד. $x = 2, 8$	ה. $x = -4$
א. $x = 1, -\frac{1}{5}$	ב. $x = 9$	ה. $x = 1$		
א. $x = -1$	ב. $x = -2$	ג. $x = 3, -2$		
א. $x = -\frac{1}{2}$	ב. $x = 1$	ג. $x = -\frac{8}{19}$	ד. $x = 2, -\frac{2}{3}$	ה. $x = 4, 9$
א. $x = 0$	ב. $x = 4$	ג. $x = 2$	ד. $x = 2$	ה. $x = 5$
א. $x = 1.5$	ב. $x = \frac{2}{3}$			ו. $x = 25$

משוואות עם חיבור וחסור איברים:

סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- t , למשל במשוואה: $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$ נסמן: $2^x = t$.
 נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.
 לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- x המתאימים.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

$$\text{ב. } 8^x + 3 \cdot 8^x = 256$$

$$\text{א. } 2^x + 6 \cdot 2^x = 56$$

$$\text{ד. } 2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$$

$$\text{ג. } 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

$$\text{ב. } 5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$$

$$\text{א. } 81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$$

$$\text{ד. } \sqrt{10000^{x+1}} - \sqrt[4]{10^{8x+1}} = \sqrt[4]{1000} \cdot (\sqrt[4]{10^7} - 1)$$

$$\text{ג. } (2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 15$$

$$\text{ו. } 5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$$

$$\text{ה. } 6^{-x} - 5 \cdot 36^{-\left(\frac{x+1}{2}\right)} = 186$$

$$\text{ח. } 4^{x+2} - 6 \cdot 4^x = 7 \cdot 12^{x+1} + 6 \cdot 12^x$$

$$\text{ז. } 2 \cdot 10^{x+1} + 10^{x+2} = 3 \cdot 5^{x+1}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

$$\text{ב. } 16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$$

$$\text{א. } 9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$$

$$\text{ד. } 4^{-x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$$

$$\text{ג. } 6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$$

$$\text{ו. } \left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} + 1 = 0$$

$$\text{ה. } \left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

$$\text{ב. } \frac{7^x}{7^x - 4} + \frac{8}{7^x + 5} = 3$$

$$\text{א. } \frac{20}{9^x + 1} = 3 - \frac{8}{9^x - 1}$$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$	ב. $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$
ג. $36^x - 6^{x+1} \cdot 3^x + 8 \cdot 9^x = 0$	ד. $4 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$
ה. $25 \cdot 5^{2x} + 16 \cdot 15^x = 9^{x+1}$	ו. $9^x + 4^x - 6^x = \frac{7}{6^{1-x}}$
ז. $\frac{8^{2x} - 8}{7} = 4^x - 2$	ח. $2^{3x} - 2^{2x+2} - 2^x + 4 = 0$

תשובות סופיות:

א. $x=3$	ב. $x=2$	ג. $x=4$	ד. $x=1$
א. $x=\frac{1}{2}$	ב. $x=0$	ג. $x=\frac{1}{3}$	ד. $x=\frac{1}{4}$
ה. $x=-3$	ו. $x=-2$	ז. $x=-3$	ח. $x=-2$
א. $x=2,3$	ב. $x=1,-2$	ג. $x=0$	ד. $x=0$
ה. $x=0,1$	ו. $x=-6,-9$		
א. $x=1, -\frac{1}{2}$	ב. $x=1$		
א. $x=\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	ב. $x=1,3$	ג. $x=1,2$	ד. $x=1,0$
ה. $x=-2$	ו. $x=1,-1$	ז. $x=0, \frac{1}{2}$	ח. $x=0,2$

משוואות עם קבוע אוילר:

סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד. דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

$$\text{א. } e^{3x} = e^{2x-1} \quad \text{ב. } e^{5x-1} = e \cdot e^{6x+1}$$

$$\text{ג. } e^{x-5} = (e^{1-x})^3 \quad \text{ד. } e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

$$\text{א. } e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad \text{ב. } \sqrt[3]{e^{x+1}} \cdot e^2 = e^x \sqrt{e}$$

$$\text{ג. } e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{ד. } e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

$$\text{א. } xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x \quad \text{ב. } e^{3x} = x \cdot e^{3x}$$

$$\text{ג. } xe^{x^2} = \frac{x}{\sqrt{e^x}} \quad \text{ד. } \sqrt[3]{e^{3x-1}} \cdot x = xe^x$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = -3 \quad \text{ג. } x = 2 \quad \text{ד. } x = 1, \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = \frac{11}{4} \quad \text{ג. } x = 0 \quad \text{ד. } x = 1, -1$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0, \frac{1}{4} \quad \text{ב. } x = 1 \quad \text{ג. } x = 0, -\frac{1}{2} \quad \text{ד. } x = 0$$

משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי. יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- x עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(\sqrt{3-x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{3-x})^x \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3-x}} \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}} = |x-3|^{-1} \quad (3)$$

תשובות סופיות:

$$x = \frac{1}{4}, 1, 2 \quad (1)$$

$$\text{אין פתרון.} \quad (2)$$

$$x = 0, 1, 2, 4 \quad (3)$$

משוואות מסכמות שונות:

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$.5(2^x - 2) + 2 = 4^x - 2^x \quad (1)$$

$$\cdot \frac{6}{4^{x-1} - 1} + \frac{2^{x+1}}{2^x + 2} = \frac{2^x + 4}{2^x - 2} \quad (2)$$

$$\cdot \frac{4^x}{4^x - 10} - \frac{4}{2^{2x-1} - 3} = \frac{32}{16^x - 4^{x+2} + 60} \quad (3)$$

$$\cdot 3^{2x^2+2} - 3^{x^2+3} + 9 = 3^{x^2+1} \quad (4)$$

$$\cdot \sqrt{x}{10} = 4 \cdot \sqrt[2]{x}{10} + 60 \quad (5)$$

$$\cdot \sqrt[x-1]{8 \cdot 2^{x+1}} = (\sqrt{x}{2})^2 \cdot \sqrt[x-1]{x}{32} \quad (6)$$

$$\cdot 10 \cdot 4^{x+2} - 16 \cdot 10^x - 90 \cdot 6^x + 36 \cdot 15^x = 0 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$\cdot x = 1, 2 \quad (1)$$

$$\cdot x = 3 \quad (2)$$

$$\cdot x = 1.5 \quad (3)$$

$$\cdot x = 1, -1 \quad (4)$$

$$\cdot x = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\cdot x = -3 \quad (6)$$

$$\cdot x = 1, -2 \quad (7)$$

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

(1,3) (4)	(1,2) (3)	(0,2) , (2,4) (2)	(2,9) (1)
(1,2) , (-1,0) (7)	(-1,-2) (6)	(3,2) (5)	

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור $a > 1$ ו- $x < y$ עבור $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} \quad (2)$$

$$3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} \quad (4)$$

$$e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} \quad (3)$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 \quad (6)$$

$$25^x + 5 < 6 \cdot 5^x \quad (5)$$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (\ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad (8)$$

$$e^x > 3 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$x < \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$x \leq \frac{1}{8} \quad (4)$$

$$0 \leq x < 1 \quad (3)$$

$$x = 0 \quad (6)$$

$$0 < x < 1 \quad (5)$$

$$x < 0 \text{ או } x > \ln 4 \quad (8)$$

$$x > \ln 3 \quad (7)$$

אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x) > 0$.

דרך הפתרון: אם: $f(x) > 1$ אז: $g(x) > h(x)$.

אם: $0 < f(x) < 1$ אז: $g(x) < h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1} \quad (2) \qquad x^{2x-1} > x^{x+2} \quad (1)$$

$$x^{2x^2+2} < x^{5x} \quad (4) \qquad x^{2x-6} < 1 \quad (3)$$

$$(x+1)^{|x|} < x^2 + 2x + 1 \quad (6) \qquad (x^2 - 6x + 13)^{x^2 - 2x} \geq (x^2 - 6x + 13)^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$.0 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$.3 < x < 6 \quad (2)$$

$$.1 < x < 3 \quad (3)$$

$$.0 < x < 0.5, 1 < x < 2 \quad (4)$$

$$.x \leq -1, x \geq 3 \quad (5)$$

$$.0 < x < 2 \quad (6)$$

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 16 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

107	1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות
110	2. חוקי הלוגריתמים
114	3. חישובים עם חזקה לוגריתמית
115	4. מעבר בין בסיסים
117	5. הלוגריתם הטבעי
119	6. משוואות עם בסיסים שונים
120	7. מערכת משוואות לוגריתמיות
121	8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות
122	9. אי-שוויונים לוגריתמים

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a, b > 0, a \neq 1$.

הסבר:

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b .
 ערך חזקה זו הוא x . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים
 ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0, a \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\log_4(4-x) = \frac{1}{2} \quad \text{ב.} \qquad \log_6(4x-2) = 1 \quad \text{א.}$$

$$\log_3 \frac{x+3}{3-3x} = -2 \quad \text{ד.} \qquad \log_8(x^4 - 73) = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\log_{\sqrt{x+1}}(2x^2 - 5) = 2 \quad \text{ו.} \qquad \log_x(2x^2 + x - 12) = 2 \quad \text{ה.}$$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

$$3\log_{27}(\log_2(x+3)) = 1 \quad \text{ב.} \qquad \log_4(\log_3 x) = 1 \quad \text{א.}$$

$$\log_6\left(3 + \log_2\left(6 + \log_4(x^2 + 15)\right)\right) = 1 \quad \text{ד.} \qquad \log_{\frac{1}{16}}\left(\log_3(5x^2 + 1)\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{ג.}$$

5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_3(3 \cdot 2^x - 303) = 4 \quad \text{ב.} \qquad \log_2(3^x + 37) = 6 \quad \text{א.}$$

$$3\log_2\left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x} - 11 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 3\right) = 12 + 2x \quad \text{ד.} \qquad \log_5(126 \cdot 5^x - 25) = 2x + 1 \quad \text{ג.}$$

6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$2(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 10 \quad \text{ב.} \qquad (\log_2 x)^4 = 10000 \quad \text{א.}$$

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x + 2} = 2 \quad \text{ד.} \qquad \frac{3 \cdot \log_{14} x + 1}{(\log_{14} x)^2} = 4 \quad \text{ג.}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
- ו. -1.5 ז. 4
- (2) א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 65,536$ ג. $x = 27$ ד. $x = 4$
- ה. $x = 5$ ו. $x = 4$
- (3) א. $x = 2$ ב. $x = 2$ ג. $x = \pm 3$ ד. $x = -2$ ה. $x = 3$ ו. $x = 2$
- (4) א. $x = 81$ ב. $x = 5$ ג. $x = \pm 4$ ד. $x = \pm 1$
- (5) א. $x = 3$ ב. $x = 7$ ג. $x = -1, 2$ ד. $x = -6$
- (6) א. $x = 1024, \frac{1}{1024}$ ב. $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$
- ג. $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x = \frac{1}{3}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a > 0 \neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:
- מכפלה לסכום: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
 - מנה להפרש: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
 - מקדם למעריך: $\log_a b^n = n \log_a b$ (כאשר $b > 0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$	ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$
ג. $\log_2 200 - \log_2 100$	ד. $\log_3 60 - \log_3 540$
ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$	ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$
ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$	ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$
ט. $\frac{1}{2} \left(\log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$	י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$	ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$
ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 225 - 2}$	ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8^{\frac{8}{9}}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$ ב. $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

ג. $\log_2 (x+30) - \log_2 x = 4$ ד. $\log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2$

ה. $2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1$

ו. $2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$

ב. $2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3)$

ב. $\log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8$

ב. $\log_2 \left(\frac{x}{4}\right) \cdot \log_2 (1024x) = -11$

ג. $\log_2 x^2 \log_2 \left(\frac{x}{16}\right) = -\log_2 (64x)$

ד. $(\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1$

ה. $\log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left(\frac{81}{x}\right) + 2$

ו. $\frac{\log_2 \left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9}$

שאלות הבעה:

(7) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$

ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

(8) נתון: $\log_2 5 = b$, $\log_2 3 = a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

(9) נתון: $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$.

הבע באמצעות a את $\log_{18} 27$ ואת $\log_{18} 16$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

(10) $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$

(11) $2 \log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$

(12) $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

(13) $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$

תשובות סופיות:

- (1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2 ו. -0.5
 א. -2 ב. 1 ג. 6 ד. 1.5 ה. 2
- (2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5
- (3) א. $x=8$ ב. $x=3, \frac{1}{27}$ ג. $x=2$ ד. $x=4$ ה. $x=3$ ו. $x=4$
- (4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$
- (5) א. $x=1$ ב. $x=-2$
- (6) א. $x=16, \frac{1}{256}$ ב. $x=2, \frac{1}{512}$ ג. $x=4, 2\sqrt{2}$ ד. $x=4, \frac{1}{4}$ ה. $x=\frac{1}{9}, \sqrt[9]{3}$ ו. $x=8, \sqrt[7]{2^{15}}$
- (7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$
- (8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (9) $4(2a-1), 3(1-a)$
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) הוכחה.

חישובים עם חזקה לוגריתמית:

סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x} = x$ כאשר $a > 0 \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית: $3 \cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = \log_4 7$ ב. $x = \log_4 \sqrt{3}$

ג. $x = 2 \log_4 0.1$ ד. $x = \sqrt{\log_2 5}$

(3) נתונה התבנית: $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = -1$ ב. $x = \log_3 5$

ג. $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{56}} 81}$ ב. $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}} 5}}$

תשובות סופיות:

(1) א. 8 ב. 25

(2) א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15

(3) א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2-2\sqrt{6}$

(4) א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{2}{\sqrt[2]{25}}$

מעבר בין בסיסים:

סיכום כללי:

מעבר מבסיס a לבסיס m (כאשר: $a > 0 \neq 1$ ו- $m > 0 \neq 1$, וכן: $b > 0$)

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$$

יתבצע באופן הבא:

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $\log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000$

א. $\log_4 7 \cdot \log_7 4$

ד. $\log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625$

ג. $\log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9$

(2) הוכח את השוויונים הבאים:

א. $\log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1$

ב. $\log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1$

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $\log_3 x \cdot \log_{27} x = 3$

א. $\log_2 x + \log_{32} x = 6$

ד. $\log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1$

ג. $\log_2 4x \cdot \log_8 \frac{x}{16} = -\frac{5}{3}$

שאלות הבעה:

(4) נתון: $\log_4 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

ג. $\log_{216} 96$

ב. $\log_{32} 36$

א. $\log_2 3$

(5) נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

ג. $\log_5 22.5$

ב. $\log_2 \sqrt{30}$

א. $\log_3 50$

6 נתון $\log_3 7 = a$, $\log 9 = 2b$. הבע באמצעות a ו- b את:

א. $\log 21$.

ב. $\log_3 \left(\frac{10}{7} \right)$.

ג. $\log_7 10$.

ד. $\log_{30} 63$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7 $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

8 $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

תשובות סופיות:

1 א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12

2 א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

3 א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$

4 א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$

5 א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$

6 א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$

7 הוכחה.

8 הוכחה.

הלוגריתם הטבעי:

סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי. למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן. מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \rightarrow e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- b מספרים כלשהם.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x \\ \text{ב. } 3 \ln^2 x + \ln x = 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3 \ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2 \ln 3}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 2 \quad \text{ב. } -4 \quad \text{ג. } -1.5$$

$$(2) \quad \text{א. } x = e^2 \quad \text{ב. } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0 \quad \text{ב. } x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e} \quad \text{ג. } x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$$

$$(4) \quad \text{א. } x = e^3, \frac{1}{e^2} \quad \text{ב. } x = \sqrt{e}, e$$

$$(5) \quad \text{א. } 3 \quad \text{ב. } 9$$

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$. במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$. את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$

ג. $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$ ד. $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x} = 3$ ב. $4 + 3e^x = 9$

ג. $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$ ד. $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{10}{5^x}$ ב. $\log_2(4e^{2x} + 6) - 1 = \log_2(7e^x)$

תשובות סופיות:

(1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

ג. $x = \log_7 3 = 0.564$, $x = \log_7 5 = 0.827$ ד. אין פתרון.

(2) א. $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$ ב. $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$ ג. $x = 0$, $x = -\ln 3 = -1.09$

ד. $x = \ln 16 = 2.7725$

(3) א. $x = 1$, $x = \log_5 2 = 0.43$ ב. $x_1 = \ln \frac{1}{2} = -0.693$, $x = \ln 3 = 1.098$

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (8, -5) \quad (3) & (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) & (8, 3) \quad (1) \\ \left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) & (25, 8) \quad (5) & (16, 7) \quad (4) \\ (4, 7) \quad (9) & (3, 9), (9, 3) \quad (8) & (25, 4), (625, 2) \quad (7) \end{array}$$

מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2(4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3(9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4(5 - 9^y) \\ \log_2(2^x + 3) = \log_4(29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2(y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$(36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) \quad (3) \quad (3, 3) \quad (2) \quad (1, 1) \quad (1)$$

$$(1, 0) \quad (6) \quad (1, 1), (2, 3) \quad (5) \quad \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \quad (4)$$

אי-שוויונים לוגריתמים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\log_6(x^2 - 5x) < 1$ (2)	$\log_2 x < \log_2(5x - 20)$ (1)
$\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x)$ (4)	$\log_3 x > \log_9(15 - 2x)$ (3)
$\ln x < 3$ (6)	$\ln x \geq \ln(x^2 - 12)$ (5)
$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8)	$\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7)

תשובות סופיות:

$-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2)	$x > 5$ (1)
$-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4)	$3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3)
$0 < x < e^3$ (6)	$2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5)
$x \neq 1$ וגם $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8)	$\frac{1}{e} < x < e^7$ (7)

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 17 - וקטורים גיאומטריים

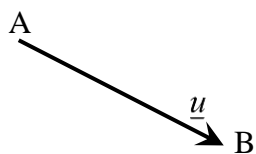
תוכן העניינים

- 123 1. הגדרות וכללים יסודיים.
- 128 2. וקטורים הפורשים מישור.
- 132 3. מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור.

הגדרות וכללים יסודיים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

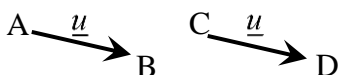


להלן תיאור של ווקטור גיאומטרי: ווקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: \overline{AB} .

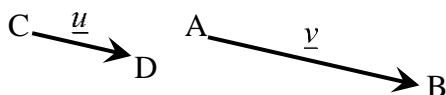
ניתן לסמן ווקטור באות קטנה באופן הבא: \underline{u} (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$).
מהאיור לעיל מתקיים: $\overline{AB} = \underline{u}$.

קשרים בין ווקטורים:

- ווקטורים שווים: שני ווקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם. דוגמא לווקטורים שווים: מתקיים: $\overline{AB} = \overline{CD}$.



- ווקטורים מקבילים: שני ווקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים. ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר. ווקטורים מקבילים נקראים גם "ווקטורים תלויים ליניארית". דוגמא לתלות בין ווקטורים מקבילים:

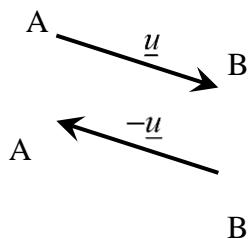


עבור $\alpha > 1$ מתקיים: $\underline{v} = \alpha \underline{u}$, או: $\overline{AB} = \alpha \cdot \overline{CD}$.

- אם זוג ווקטורים במרחב: $\overline{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$ ו- $\overline{CD} = a \underline{u} + b \underline{v} + c \underline{w}$ מקבילים

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$$

אז מתקיים:

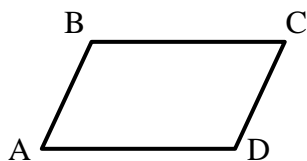


- ווקטור המסומן \overline{BA} הוא בעל גודל זהה לווקטור \overline{AB} וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overline{BA} = -\underline{u}$.

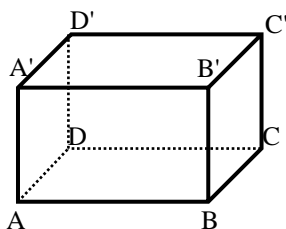
הערה:

שני ווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} יקראו מקבילים אם מתקיים: $\underline{v} = \alpha \underline{u}$ כאשר הגודל α יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום $\alpha \neq 0$. בפרט עבור $\alpha < 0$ כיוונם הפוך ב- 180° .

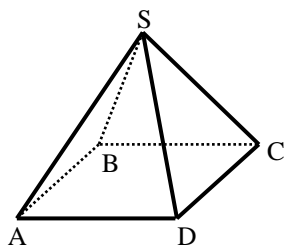
שאלות:



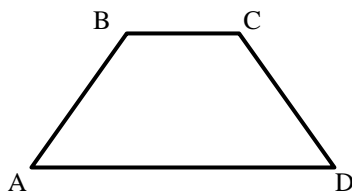
(1) במקבילית ABCD נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים ל- \underline{u} או \underline{v} .



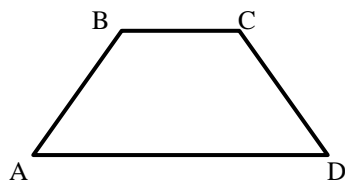
(2) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$
מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים ל- \underline{u} , \underline{v} או \underline{w} .



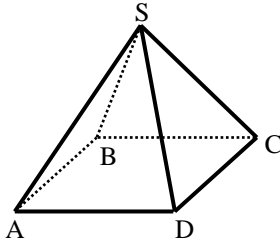
(3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AS} = \underline{w}$
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים ל- \underline{u} , \underline{v} או \underline{w} .



(4) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע באמצעות \underline{u} או \underline{v} .



(5) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$
א. הבע באמצעות \underline{u} ו- \underline{v} את הווקטורים \overline{AC} ו- \overline{DC} .
ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD. הבע באמצעות \underline{u} ו- \underline{v} את הווקטור \overline{BE} .
ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD. הבע באמצעות \underline{u} ו- \underline{v} את הווקטור \overline{AF} .



6 בפירמידה $SABCD$ שבסיסה ריבוע

נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AS} = \underline{w}$.

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את

הווקטורים \overline{AC} ו- \overline{SC} .

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD .

הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את הווקטור \overline{BN} .

7 הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB = 2:3$. נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$.

הבע באמצעות \underline{u} את הווקטורים \overline{AP} ו- \overline{PB} .

8 הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB = 3:5$. נתון: $\overline{AP} = \underline{u}$.

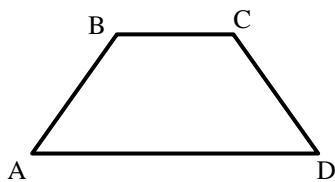
הבע באמצעות \underline{u} את הווקטורים \overline{PB} ו- \overline{AB} .

9 הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB} = \alpha$. נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$.

הבע באמצעות \underline{u} את הווקטורים \overline{AP} ו- \overline{PB} .

10 הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB} = \alpha$. נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$.

הבע באמצעות \underline{u} את הווקטורים \overline{AP} ו- \overline{PB} .



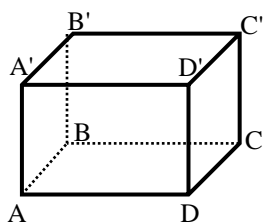
11 בטרפז $ABCD$ שבשרטוט

נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$.

הנקודה F נמצאת על הצלע CD

ומקיימת: $\frac{DF}{FC} = \beta$.

הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- β את הווקטור \overline{AF} .

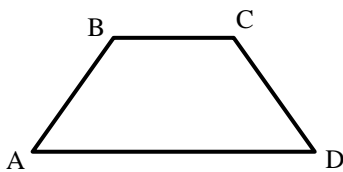


(12) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

הבע באמצעות α , \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- β את הווקטור: \overline{PQ} .

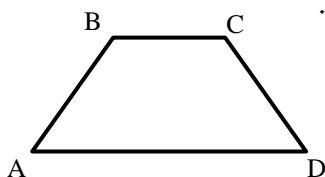


(13) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$.

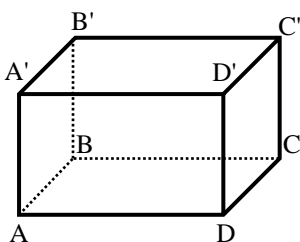


(14) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים: $\overline{FE} \parallel \overline{AC}$.



(15) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות α , \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- β את הווקטור \overline{PQ} .

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שבעבורם $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה $ABB'A'$.

מצא את ערכי α ו- β אם נתון כי $\overline{PQ} \parallel \overline{EC}$.

תשובות סופיות:

$$\underline{u} = \overline{DC}, \underline{v} = \overline{BC} \quad (1)$$

$$\underline{w} = \overline{AA'} = \overline{DD'} = \overline{CC'} = \overline{BB'}, \underline{u} = \overline{DC} = \overline{D'C'} = \overline{A'B'} = \overline{AB}, \underline{v} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{A'D'} = \overline{B'C'} \quad (2)$$

$$\underline{u} = \overline{AB} = \overline{DC}, \underline{v} = \overline{AD} = \overline{BC}, \underline{w} = \overline{AS} \quad (3)$$

$$\overline{BC} = \frac{1}{3}\underline{v} \quad (4)$$

$$\overline{AF} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{ג.} \quad \overline{BE} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} \quad \text{ב.} \quad \overline{AC} = \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}, \overline{DC} = \underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\overline{BN} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad \text{ב.} \quad \overline{AC} = \underline{u} + \underline{v}, \overline{SC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\overline{AP} = \frac{2}{5}\underline{u}, \overline{BP} = \frac{3}{5}\underline{u} \quad (7)$$

$$\overline{AB} = \frac{8}{3}\underline{u}, \overline{PB} = \frac{5}{3}\underline{u} \quad (8)$$

$$\overline{AP} = \alpha\underline{u}, \overline{PB} = (1-\alpha)\underline{u} \quad (9)$$

$$\overline{AP} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}, \overline{PB} = \frac{1}{1+\alpha}\underline{u} \quad (10)$$

$$\overline{AF} = \frac{\beta}{1+\beta}\underline{u} + \frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v} \quad (11)$$

$$\overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad (12)$$

$$\alpha = 2 \quad (13)$$

$$\alpha = 1 \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1 \quad \text{ג.} \quad \overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{א.} \quad (15)$$

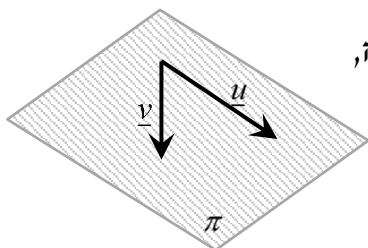
וקטורים הפורשים מישור:

סיכום כללי:

וקטורים הפורשים מישור:

כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:



הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} בעלי כוונים שונים ולכן פורשים את המישור π .

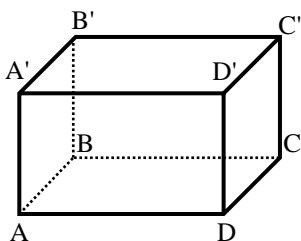
קומבינציה ליניארית של ווקטורים:

- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה ליניארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים תלויים ליניארית (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

דוגמא:

עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור \underline{w} המוכל, או מקביל למישור π באופן הבא: $\underline{w} = \alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v}$ כאשר: α, β מספרים ממשיים כלשהם. במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{u}, \underline{v}$ ו- \underline{w} נקראים תלויים ליניארית.

שאלות:



16) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$.

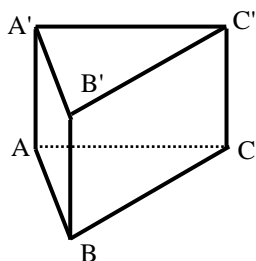
הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות α , \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- β את הווקטור \overline{PQ} .

ב. מהו ערכו של α שבעבורו הווקטור \overline{PQ} מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של β שבעבורו הווקטור \overline{PQ} מקביל לבסיס ABCD?



17) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C' ובה נתון:

$\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AC} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$.

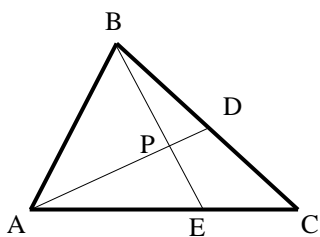
הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת: $\frac{AM}{MC'} = \alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC} = \beta$

א. הבע באמצעות α , \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- β את הווקטור \overline{NM} .

ב. מהו ערכו של β שבעבורו הווקטור \overline{NM} מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הווקטור \overline{NM} מקביל לפאה ABB'A'. הבע את α באמצעות β .



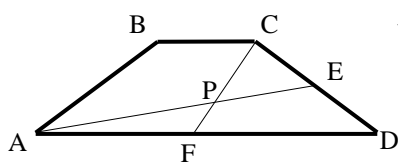
18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE} = 2$.

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

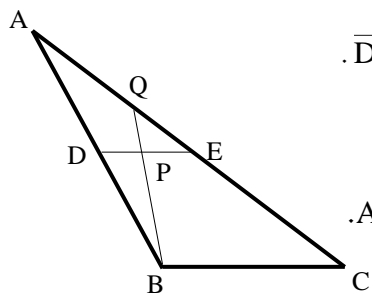
נגדיר: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AC} = \underline{v}$, וכן: $\overline{AP} = t \cdot \overline{AD}$, $\overline{BP} = s \cdot \overline{BE}$.

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , t ו- s את הווקטור \overline{AP} בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.

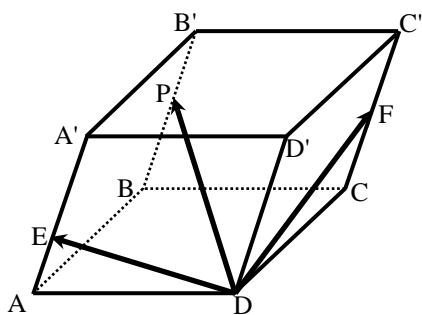


- (19)** בטרפז $ABCD$, $(AD \parallel BC)$, שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$.
 הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD
 והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD .
 הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו- CF .
 מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF .



- (20)** במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB
 והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.
 הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP
 חותך את הצלע AC בנקודה Q .

- א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC .
 ב. חשב את היחס: $\frac{S_{AQPE}}{S_{ADPB}}$.



- (21)** במקבילון $ABCD A'B'C'D'$
 נתון: $\overline{DA} = \underline{u}$, $\overline{DC} = \underline{v}$, $\overline{DD'} = \underline{w}$.
 הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC' ,
 הנקודה E נמצאת על המקצוע AA'
 ומקיימת: $A'E = 2AE$ והנקודה P נמצאת על
 המקצוע BB' ומקיימת: $\overline{B'P} = k \cdot \overline{B'B}$.
 נתון: $\overline{DP} = t \cdot \overline{DE} + s \cdot \overline{DF}$.

- א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- k את הווקטור \overline{DP} .
 ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB' .
 ג. האם הנקודות D, E, F, P נמצאות על אותו מישור? נמק.

תשובות סופיות:

$$\overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{א. (16)}$$

ג. לא. ב. $\alpha = 1$

$$\overline{NM} = (\beta-1)\underline{u} + \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \beta\right)\underline{v} + \underline{w} \quad \text{א. (17)}$$

ג. $\alpha = \frac{\beta}{1-\beta}$ ב. $\beta = 1$

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}t\underline{u} + \frac{1}{2}t\underline{v}, \quad \overline{AP} = (1-s)\underline{u} + \frac{2}{3}s\underline{v} \quad \text{א. (18)}$$

ב. $BP:PE = 3:2, AP:PD = 4:1$

$$AP:PE = 2:1, CP:PF = 2:1 \quad \text{(19)}$$

$$\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}} = \frac{1}{3} \quad \text{ב.} \quad \text{AQ:QC} = 1:2 \quad \text{א. (20)}$$

$$\overline{DP} = \underline{u} + \underline{v} + (1-k)\underline{w} \quad \text{א. (21)}$$

ג. כן. ב. $BP:PB = 1:5$

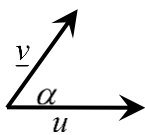
מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:

סיכום כללי:

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} תסומן: $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.



ניתן למצוא את הזווית שבין שני ווקטורים ע"י: $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$

גודל של ווקטור נתון ע"י: $|\underline{u}| = \sqrt{u^2}$, או: $|\underline{u}|^2 = u^2$

הערה:

המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$ בין שני ווקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

שאלות:

22 חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

- | | |
|--|---|
| א. $\alpha = 60^\circ$, $ \underline{v} = 2$, $ \underline{u} = 3$ | ב. $\alpha = 120^\circ$, $ \underline{v} = 5$, $ \underline{u} = 4$ |
| ג. $\alpha = 30^\circ$, $ \underline{v} = 6$, $ \underline{u} = 2$ | ד. $\alpha = 180^\circ$, $ \underline{v} = 3$, $ \underline{u} = 8$ |
| ה. $\alpha = 0^\circ$, $ \underline{v} = 5$, $ \underline{u} = 3$ | ו. $\alpha = 90^\circ$, $ \underline{v} = 4$, $ \underline{u} = 7$ |

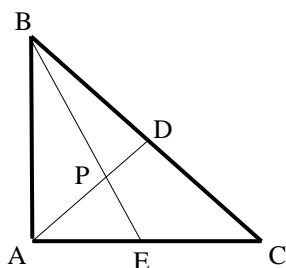
23 חשב את הזווית בין הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

- | | |
|--|---|
| א. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 6$, $ \underline{v} = 4$, $ \underline{u} = 3$ | ב. $\underline{u} \cdot \underline{v} = -4\sqrt{3}$, $ \underline{v} = 2$, $ \underline{u} = 4$ |
| ג. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, $ \underline{v} = 5$, $ \underline{u} = 9$ | ד. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 12$, $ \underline{v} = 6$, $ \underline{u} = 2$ |

(24) נתונים שני וקטורים \underline{u} ו- \underline{v} שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא 120° .
חשב את גודלו של הווקטור \overline{PQ} שמוגדר: $\overline{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$.

(25) נתונים שני וקטורים \underline{u} ו- \underline{v} המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$.
חשב את גודלו של הווקטור \overline{MN} שמוגדר: $\overline{MN} = 0.5\underline{u} - \underline{v}$.

(26) נתונים שני וקטורים \underline{u} ו- \underline{v} שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא 120° .
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle QPM$ אם נתון: $\overline{PM} = 4\underline{u} + \underline{v}$, $\overline{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$.

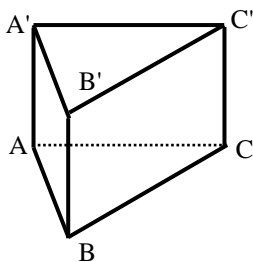


(27) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle BAC = 90^\circ$).
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.

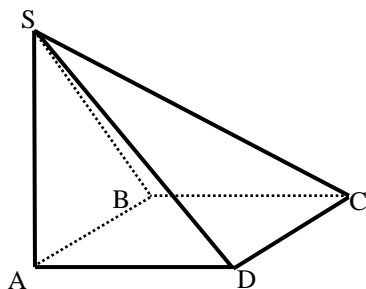
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נתון: $AC = 12$, $AB = 8$, $\frac{AP}{PD} = 3$.

חשב את גודל הזווית $\sphericalangle DPC$.



(28) נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.
הנקודה M היא אמצע המקצוע $A'C'$ והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $BN = 2CN$.
נסמן: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AC} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle MAN$.



(29) בפירמידה SABC שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.

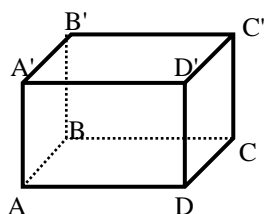
נתון: $AB = AD = \frac{1}{2} AS = k$.

נסמן: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AS} = \underline{w}$.

הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.

חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle PAQ$.

(30) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overline{AA'} = \underline{w}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AB} = \underline{u}$, $AB = \frac{1}{\sqrt{2}} AD = AA'$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע DD'.

א. מהו ערכו של α שבעבורו מתקיים: $|\overline{AP}| = \frac{5}{6} |\overline{AQ}|$?

ב. הבע באמצעות α את $\cos \angle PAQ$

והראה כי לכל ערך של α הזווית $\angle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של α שבעבורו הזווית $\angle PAQ$ מקיימת: $\cos \angle PAQ = \frac{2}{3\sqrt{5}}$?

(31) הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$

(32) נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$

(33) נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.

הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$

(34) נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.

הוכח כי מתקיים: $\overline{PQ} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$

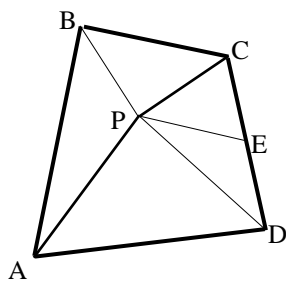
(35) נתונה פירמידה משולשת SABC שבה $\overline{AS} \perp \overline{BC}$ ו- $\overline{BS} \perp \overline{AC}$

הוכח: $\overline{CS} \perp \overline{AB}$

(36) הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

37) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC. הוכח: $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$.
- ב. נתונה פירמידה משולשת SABC. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC. הוכח: $\vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AS})$.
- ג. נתון בנוסף כי \vec{AS} ו- \vec{AP} מאונכים ל- \vec{BC} . הוכח כי $AB = AC$. (הדרכה: סמן $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$).



38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD

כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים ישרי זווית וש"ש ($AP = PD$, $BP = PC$).

הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח: $\vec{PE} \perp \vec{AB}$. (הדרכה: סמן $\vec{PB} = \underline{a}$, $\vec{PC} = \underline{b}$, $\vec{PA} = \underline{c}$, $\vec{PD} = \underline{d}$).

39) בטראדר SABC נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\vec{AP} = \alpha \cdot \vec{AS}$.

הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\vec{SQ} = \beta(\vec{SB} + \vec{SC})$.

א. מצא את הקשר בין α ו- β שבעבורו \vec{PQ} מקביל למישור ABC.

ב. נתון: $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$. הוכח: $\vec{PQ} \perp \vec{BC}$. $AB = AC$.

40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים, אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

תשובות סופיות:

- (22) א. 3 ב. -10 ג. $6\sqrt{3}$ ד. -24 ה. 15 ו. 0.
- (23) א. 60° ב. 150° ג. 90° ד. 0°
- (24) $|\overline{PQ}| = 18.248$
- (25) $|\overline{MN}| = \sqrt{29}$
- (26) 31.87°
- (27) 55.49°
- (28) 70.623°
- (29) 24.095°
- (30) א. $\alpha = \frac{3}{4}$ ב. $\cos(\sphericalangle PAQ) = \frac{1}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$ ג. $\alpha = \frac{1}{2}$
- (31) שאלת הוכחה.
- (32) שאלת הוכחה.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) שאלת הוכחה.
- (35) שאלת הוכחה.
- (36) שאלת הוכחה.
- (37) שאלת הוכחה.
- (38) שאלת הוכחה.
- (39) א. $\alpha + 2\beta = 1$ ב. שאלת הוכחה.
- (40) שאלת הוכחה.

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 18 - וקטורים אלגבריים

תוכן העניינים

137	1. שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים
141	2. פעולות אלגבריות בין וקטורים
143	3. גודל של וקטור
144	4. וקטורים מקבילים ושווים
145	5. זווית בין וקטורים
146	6. הצגה פרמטרית של ישר
149	7. מצב הדדי בין ישרים
152	8. הצגה פרמטרית של מישור
154	9. משוואת מישור
155	10. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור
156	11. מישורים המקבילים לצירים
157	12. מצב הדדי בין ישר ומישור
159	13. מצב הדדי בין מישורים
160	14. ישר חיתוך בין מישורים
(ללא ספר)	15. חישובי זוויות שונות
161	16. זווית בין שני ישרים
163	17. זווית בין ישר ומישור
164	18. זווית בין שני מישורים
(ללא ספר)	19. חישובי מרחקים
165	20. מרחק בין שתי נקודות במרחב
166	21. מרחק בין נקודה לישר
167	22. מרחק בין נקודה למישור
168	23. מרחק בין ישרים מקבילים
169	24. מרחק בין ישר למישור
170	25. מרחק בין מישורים מקבילים
171	26. מרחק בין ישרים מצטלבים

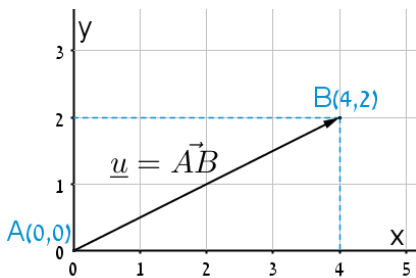
(ללא ספר)	27. סיכום מרחקים
172	28. שאלות מסכמות בוקטורים
175	29. שאלות הנפתרות עם מכפלה וקטורית

שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים:

סיכום כללי:

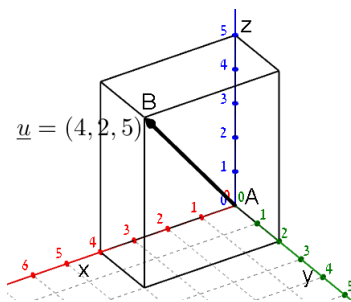
הגדרה כללית:

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה (x, y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u} = (x, y)$.



דוגמאות:

- הווקטור $\underline{u} = (4, 2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הווקטור: $\underline{u} = (4, 2, 5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(4,2,5)$.

וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים:

וקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ וסופו בנקודה $B(x_2, y_2, z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u} = \overline{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון:

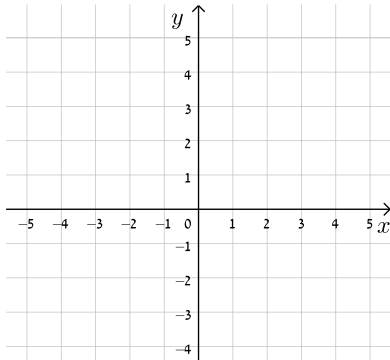
- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$

הוא: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ ביחס של $k:l$ הם:

$$x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}; \quad y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}; \quad z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k+l}$$

שאלות:



1) שרטט את הווקטורים הבאים:

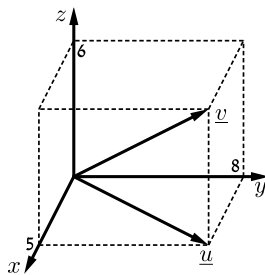
א. $\underline{u} = (4, 2)$

ב. $\underline{v} = (-5, 1)$

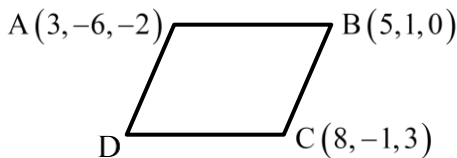
ג. $\underline{w} = (3, -4)$

ד. $\underline{a} = (0, 3)$

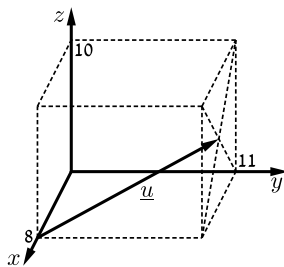
ה. $\underline{b} = (-5, 0)$



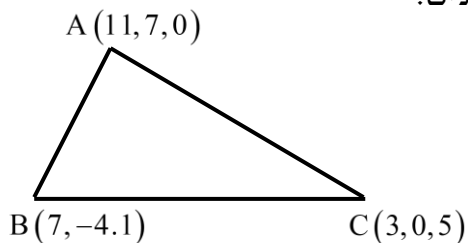
2) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא מהו הווקטור \underline{u} ומהו הווקטור \underline{v} על פי השרטוט.



3) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים (ראה איור). מצא את שיעורי הקודקוד D.



4) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא מהו הווקטור \underline{u} על פי השרטוט.



5) בשרטוט נתון משולש ששיעורי קודקודיו נתונים. מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

6) מצא את x, y, z אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$ כאשר:

$$\underline{u} = (4, -1, 2), \quad \underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$$

7) ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא את הווקטור \overline{AB} אם נתונות הנקודות $A(-3,5)$ ו- $B(6,1)$.

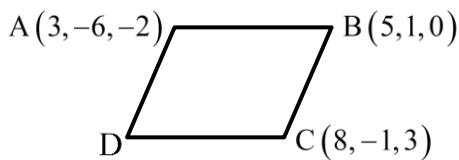
ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8,11)$ והווקטור $\overline{PQ} = (4, -3)$.

8) ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא את הווקטור \overline{EF} אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$

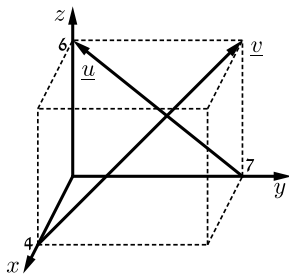
והווקטור $\overline{MN} = (-1, -1, 9)$.



9) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה

מקודקודיה נתונים.

מצא את שיעורי הקודקוד D .



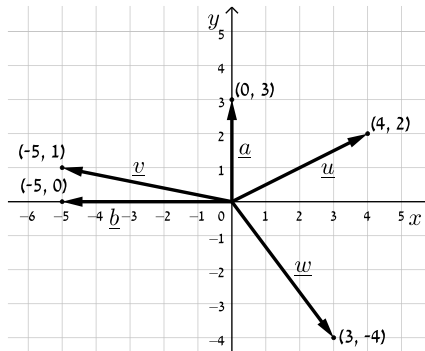
10) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת

הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור \underline{u} ומהו הווקטור \underline{v} .

תשובות סופיות:

1) להלן סרטוט:



2) $\underline{u} = (5, 8, 0)$, $\underline{v} = (5, 8, 6)$

3) $D(6, -8, 1)$

4) $\underline{u} = (4, 11, 5)$

5) $(7, 1, 2)$

6) $x = 5$, $y = -2$, $z = 6$

7) א. $\overrightarrow{AB} = (9, -4)$ ב. $Q(12, 8)$

8) א. $\overrightarrow{EF} = (5, -1, 0)$ ב. $N(-1, -5, 10)$

9) $D(6, -8, 1)$

10) $\underline{u} = (0, -7, 6)$, $\underline{v} = (-4, 7, 6)$

פעולות אלגבריות בין וקטורים:

סיכום כללי:

מכפלה סקלרית בהצגה אלגברית:

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} תסומן: $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של ווקטורים: $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

שאלות:

11 נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{u} = (4, 0, 9)$, $\underline{v} = (-1, 3, -5)$
 חשב את ערכי הווקטורים הבאים: $\underline{u} + \underline{v}$, $\underline{u} - \underline{v}$, $\underline{u} - 2\underline{v}$, $3\underline{u} + 2\underline{v}$

12 נתונים הווקטורים: $\underline{u} = (-3, 1, 4)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$, $\underline{w} = (2, 6, -5)$
 חשב את:

$3\underline{u} - 2\underline{v}$	ג.	$-0.5\underline{v}$	ב.	$2\underline{u}$	א.
$2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$	ו.	$\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$	ה.	$0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$	ד.

13 נתונות הנקודות הבאות: $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$
 מצא את הווקטורים הבאים:

$2\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}$	ג.	$2\overline{AC} - 4\overline{AB}$	ב.	$\overline{AC} + \overline{AB}$	א.
--	----	-----------------------------------	----	---------------------------------	----

14 נתונים שלושה ווקטורים: $\underline{u} = (6, -1, z)$, $\underline{v} = (0, y, 4)$, $\underline{w} = (x, 5, -10)$

א. מצא את ערכם של x, y, z המקיימים: $\underline{u} + 2\underline{v} = \underline{w}$

ב. מצא את ערכם של x, y, z המקיימים: $2\underline{v} - 3\underline{w} = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v})$

ג. כיצד תשתנה התוצאה של סעיף א' אם: $\underline{u} = (6, y, z)$, $\underline{v} = (y-1, 2, x)$, $\underline{w} = (x, 2z, -10)$?

15) נתונים הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} .

א. חשב את תוצאת המכפלה הסקלרית עבור: $\underline{u} = (-6, 2, 3)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$.

ב. מצא את y עבורו תוצאת המכפלה הסקלרית של הווקטורים:

$$\underline{u} = (1, 7, -6), \underline{v} = (2, y, 4).$$

ג. מצא את y עבורו הווקטורים מהסעיף הקודם יהיו מאונכים זה לזה.

תשובות סופיות:

$$11) \underline{u} + \underline{v} = (3, 3, 4); \underline{u} - \underline{v} = (5, -3, 14); \underline{u} - 2\underline{v} = (6, -6, 19); 3\underline{u} + 2\underline{v} = (10, 6, 17)$$

$$12) \text{א. } (6, -2, 8) \quad \text{ב. } (-2, 1, 3) \quad \text{ג. } (-17, 7, 24)$$

$$\text{ד. } (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ה. } (9.5, 9.5, -18) \quad \text{ו. } (19, 19, -36)$$

$$13) \text{א. } (5, 7, 1) \quad \text{ב. } (-8, -16, 8) \quad \text{ג. } (8, 12, 0)$$

$$14) \text{א. } x = 6, y = 3, z = -18 \quad \text{ב. } x = -1, y = 9\frac{2}{3}, z = 72$$

$$\text{ג. } x = -4\frac{8}{9}, y = -4\frac{4}{9}, z = -\frac{2}{9}$$

$$15) \text{א. } \underline{u} \cdot \underline{v} = -21 \quad \text{ב. } y = 3 \quad \text{ג. } y = 3\frac{1}{7}$$

גודל של וקטור:

סיכום כללי:

גודלו של ווקטור $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

שאלות:

16 נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{u} = (1, -3, 2)$, $\underline{v} = (5, -1, 0)$
 חשב את הגדלים של הווקטורים הבאים: $2\underline{v} + \underline{u}$, $4\underline{u} - 3\underline{v}$, \underline{u} , \underline{v} .

17 נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:
 $A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$
 הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

תשובות סופיות:

16 $|\underline{u}| = \sqrt{14}$; $|\underline{v}| = \sqrt{26}$; $|2\underline{v} + \underline{u}| = \sqrt{150}$; $|4\underline{u} - 3\underline{v}| = \sqrt{266}$
17 הוכחה.

וקטורים מקבילים ושווים:

שאלות:

18 נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD :

$$A(1,2,0), B(-2,5,3), C(-1,8,4), D(4,3,-1)$$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

19 נתונות הנקודות הבאות: $A(1,0,2), B(3,7,-4), C(6,9,0), D(7,4,10), E(9,11,4)$.

א. הראה כי: $\overline{AB} = \overline{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overline{AD} = \overline{BC}$? נמק.

תשובות סופיות:

18 א. הוכחה. ב. כן.

19 א. הוכחה. ב. לא.

זווית בין וקטורים:

סיכום כללי:

• זווית α בין שני וקטורים \underline{u} , \underline{v} תחושב ע"י: $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$.

שאלות:

(20) חשב את הזווית שבין הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} :

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1)$, $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$

(21) מצא את שטחו של משולש ABC שקודקודיו הם: $A(-3, 2, 1)$, $B(0, 3, 2)$, $C(5, -1, 0)$.

(22) נתונים הווקטורים: $\underline{u} = (2, -1, 0)$, $\underline{v} = (5, 0, 3)$.

מצא וקטור \underline{w} שמכפלתו ב- \underline{u} היא 0 ומכפלתו ב- \underline{v} היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

תשובות סופיות:

(20) א. 92.277° ב. 90° ג. 180° .

(21) 10.173 יח"ש.

(22) $\underline{w} = (3, 6, -5)$ או $\underline{w} = (-3, -6, 5)$.

הצגה פרמטרית של ישר:

סיכום כללי:

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני ווקטורים. הווקטור \underline{a} נקרא ווקטור ההעתקה.

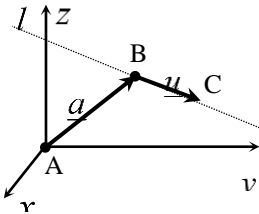
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.

הווקטור \underline{u} נקרא ווקטור הכיוון של הישר.

זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.

הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\underline{\ell} : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$

כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- \underline{x} הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר $\underline{\ell}$.



דוגמא: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים

הבאים: $\underline{a} = \overline{AB} = B - A = (5,3,1)$; $\underline{u} = \overline{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $\underline{\ell} : \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$

הערות:

- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
- ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $\underline{\ell} : \underline{x} = (7,0,10) + t(-6,9,-27)$
- הווקטור \underline{x} המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור \underline{a} ומוצאו של הווקטור \underline{u} .
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור \underline{u} (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור \underline{a} .
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

שאלות:

(23) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x} = (4,3,0) + t(1,-1,1)$?

(24) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x} = t(2,-1,5)$?

(25) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.

(26) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.

(27) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$

ומקביל לישר $\ell: \underline{x} = (0,3,-1) + t(-4,2,1)$.

(28) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$

ומאונך לישר: $\ell: \underline{x} = (1,2,0) + s(1,-2,4)$.

(29) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell: \underline{x} = (1,2,3) + t(4,5,6)$.

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות x, y, z .

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות: $x = 1 + 2t, y = 10, z = 4 - t$.

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(30) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

(31) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$

ומקביל לציר ה- z .

(32) מצא את נקודת החיתוך של הישר $\ell: \underline{x} = (1,-2,6) + t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

תשובות סופיות:

(23) כן.

(24) לא.

(25) $\ell : \underline{x} = (-5, -2) + t(6, 8)$

(26) $\ell : \underline{x} = (4, 1, 1) + t(1, 1, 3)$

(27) $\ell : \underline{x} = (2, -7, 1) + s(-4, 2, 1)$

(28) $\ell : \underline{x} = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$

(29) א. $x = 1 + 4t, y = 2 + 5t, z = 3 + 6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1, 10, 4) + t(2, 0, -1)$

(30) $\ell : \underline{x} = t(0, 1, 0)$

(31) $\ell : \underline{x} = (3, -1, 4) + t(0, 0, 1)$

(32) $(7, -5, 0)$

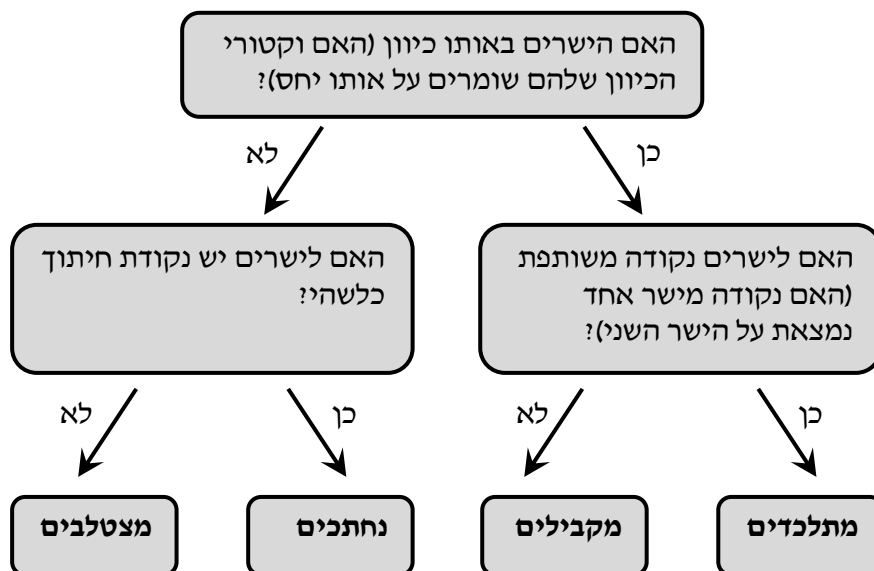
מצב הדדי בין ישרים:

סיכום כללי:

ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



שאלות:

(33) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_1 : \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$

(34) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_3 : \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1)$, $\ell_4 : \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$

(35) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_5 : \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1)$, $\ell_6 : \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$

(36) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_7 : \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5)$, $\ell_8 : \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$

(37) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_9 : \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1)$, $\ell_{10} : \underline{x} = s(6, 0, -2)$

(38) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_{11} : \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$, $\ell_{12} : \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$

(39) מצא את ערכו של הפרמטר k שבעבורו הישרים הבאים :
 $\ell_1 : \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$
 א. מקבילים.
 ב. מתלכדים.

(40) נתונות הנקודות : $A(3, -1, 5)$, $B(k, -1, 3)$, $C(-6, 3, -1)$, $D(-2, 3, k)$
 הראה כי לכל ערך של k הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

תשובות סופיות:

33) מתלכדים.

34) מקבילים.

35) נחתכים, $(1, 5, 0)$.

36) מצטלבים.

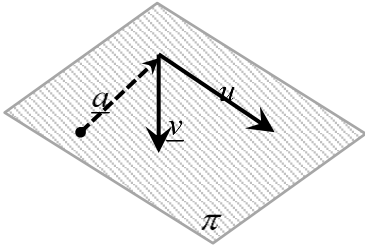
37) מקבילים.

38) נחתכים, $(1, 8, -1)$.39) א. $k = 2$. ב. $k = -2$.

40) הוכחה.

הצגה פרמטרית של מישור:

סיכום כללי:



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים. הווקטור \underline{a} הוא ווקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} הם וקטורי הכיוון של המישור. אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר t, s הם מספרים ממשיים כלשהם ו- \underline{x} הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π .

שאלות:

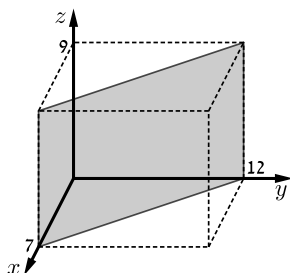
(41) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבא:
 $A(1, -4, 0)$, $B(3, 6, 2)$, $C(0, -3, 1)$

(42) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6, 7, -1)$, ומכיל את הישר $\ell : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$

(43) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$, $\ell_2 : \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$. הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

(44) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5, -2, -1)$ ומכיל את ציר ה- x .

(45) מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.



(46) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המסומן.

תשובות סופיות:

$$\cdot \pi : \underline{x} = (1, -4, 0) + t(2, 10, 2) + s(-1, 1, 1) \quad \mathbf{(41)}$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4) + s(8, 9, -6) \quad \mathbf{(42)}$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3) + s(0, 1, -6) \quad \mathbf{(43)}$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(5, -2, -1) \quad \mathbf{(44)}$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1) \quad \mathbf{(45)}$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 1) + s(-7, 12, 0) \quad \mathbf{(46)}$$

משוואת מישור:

סיכום כללי:

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi: ax+by+cz+d=0$,
 כאשר: (x, y, z) היא נקודה על המישור והמקדמים a, b, c הם שיעורי ווקטור הנורמל
 של המישור המסומן: $\underline{h}=(a, b, c)$.

שאלות:

(47) קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi: 2x-y+3z-6=0$
 א. $D(5, 7, 1)$ ב. $E(2, -1, 1)$

(48) מצא את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1, k, -1)$ נמצאת על
 המישור: $\pi: kx-2y+(1+k)z+7=0$.

(49) נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x+2y-z-9=0$.
 מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

(50) נתונה משוואת מישור: $\pi: 4x+y-2z+8=0$.
 מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

תשובות סופיות:

(47) א. על המישור. ב. לא על המישור.

(48) $k=3$.

(49) $(3, 0, 0)$, $(0, 4\frac{1}{2}, 0)$, $(0, 0, -9)$.

(50) $\ell: \underline{x}=(0, -8, 0)+t(0, 2, 1)$.

מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור:

שאלות:

51 נתונה משוואת מישור: $2x + 3z - 12 = 0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

52 נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$. מצא את משוואת המישור.

53 נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$. מצא את משוואת המישור.

54 המישור π עובר בנקודות: $A(1, 0, -3)$, $B(2, 0, 0)$, $C(4, -1, 0)$. מצא את משוואת המישור.

55 ענה על הסעיפים הבאים:

א. לפניך הנקודות הבאות: $(2, 0, 5)$, $(0, 1, -2)$, $(1, 1, 0)$.

i. הראה ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד ומצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.

ii. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.

ג. האם הנקודה $(4, 2, 1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א'?

תשובות סופיות:

51 $\underline{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, 0) + s(6, 0, -4)$

52 $\pi : -2x + 3y + z + 19 = 0$

53 $\pi : x - 3y + 8z = 0$

54 $\pi : 3x + 6y - z - 6 = 0$

55 i. $\underline{x} = (1, 1, 0) + t(-1, 0, -2) + s(1, -1, 5)$ ii. $-2x + 3y + z - 1 = 0$

ב. למשל: $(0, 0, 1)$, $(-0.5, 0, 0)$. ג. לא.

מישורים המקבילים לצירים:

שאלות:

56 נתונה משוואת מישור: $(k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$.
 לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

57 פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$
 ו- $x+3y+2z-6=0$. מצא את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות:

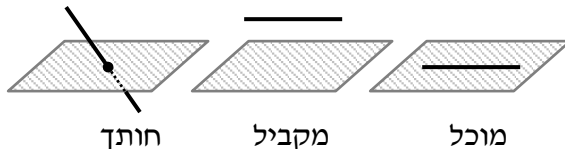
56 $k=3$.

57 6 יח"נ.

מצב הדדי בין ישר ומישור:

סיכום כללי:

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:



- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

שאלות:

(58) נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell : \underline{x} = (5, 0, 1) + t(4, 1, -2)$, $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$. קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

(59) נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell : \underline{x} = (2, -1, 6) + t(-1, 1, 2)$, $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$. קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

(60) נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell : \underline{x} = (-6, 1, 0) + t(3, 0, -1)$, $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$. קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

(61) נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell : \underline{x} = (1, a, 3) + t(4, 1 - b, 0)$, $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$. מצא את ערכי a ו- b בעבורם הישר מוכל במישור.

תשובות סופיות:

58 הישר חותך, $(1, -1, 3)$.

59 מקבילים.

60 הישר מוכל.

61 $a = 1, b = -7$.

מצב הדדי בין מישורים:

סיכום כללי:

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא ישר החיתוך.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ו- $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

נחתכים	מקבילים	מתלכדים
כל מצב אחר	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

שאלות:

62 נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א. $\pi_1: 2x - y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2: 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב. $\pi_3: x + 3y - z + 1 = 0$, $\pi_4: 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג. $\pi_5: 5x - 2y - 2z + 3 = 0$, $\pi_6: 2x + 3y + z - 5 = 0$

63 נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_1: 2x + (k^2 + k)y - 2z + 1 = 0$, $\pi_2: 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$

מצא את ערכי k עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים.

תשובות סופיות:

62 א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

63 א. $k \neq 2, -3$. ב. $k = -3$. ג. $k = 2$.

ישר חיתוך בין מישורים:

שאלות:

64 נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x + y - 2z + 2 = 0$, $\pi_2 : 2x - y + z + 10 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

65 נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x + 2y - 3z + 2 = 0$, $\pi_4 : 2x - 3y + z + 4 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

66 נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x - 3y + z + 2 = 0$, $\pi_6 : 5x - 2z + 20 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

67 נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x - 2y - z + 6 = 0$, $\pi_8 : z - 2 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

68 מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x - 5y + z + 18 = 0$ עם המישור $[xz]$.

69 נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

תשובות סופיות:

$$. l : \underline{x} = (-2, 6, 0) + t(2, 16, 12) \quad 64$$

$$. l : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(1, 2, 4) \quad 65$$

$$. l : \underline{x} = (0, 4, 10) + t\left(4, 7\frac{1}{3}, 10\right) \quad 66$$

$$. l : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(4, 2, 0) \quad 67$$

$$. l : \underline{x} = (-3, 0, 0) + t(3, 0, -18) \quad 68$$

$$. l : \underline{x} = t(1, 9, 13) \quad 69$$

זווית בין שני ישרים:

סיכום כללי:

- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$ ו- $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos \alpha = \frac{|\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2|}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|}$.

שאלות:

70 מצא את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $l_1 : \underline{x} = (4, 0, 0) + t(6, 8, 1)$, $l_2 : \underline{x} = s(-4, 2, -4)$.

ב. $l_1 : \underline{x} = (10, 17, -18) + t(3, 0, -6)$, $l_2 : \underline{x} = (6, 5, 4) + s(0, 4, 0)$.

71 מצא את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $A(3, 4, 6)$, $B(6, 0, -2)$ וישר העובר דרך הנקודות: $C(6, 5, 1)$, $D(-1, 4, 2)$ וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.

72 נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

i. A ו- B .

ii. B ו- C .

iii. A ו- C .

ב. מי מבין הנקודות $D(4, 2, -1)$ ו- $E(7, 7, -3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC .

73 נתון מישור שמשוואתו: $3x - 4y + 6 = 0$. הנקודות $A(x, 6, 1)$, $B(-2, y, -1)$.

נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$.

מצא את שיעורי הנקודה C אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו- AC

הוא: $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

תשובות סופיות:

 ב. 90° .

 א. 78.521° (70)

 ב. 68.21° . הישרים מצטלבים. (71)

 א. ii. $\ell : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(-1, -3, 3)$

 א. i. $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(3, 5, -1)$ (72)

 ב. הנקודה D. ג. 35.477° .

 א. iii. $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(2, 2, 2)$

C(0, 28.45, 11) או C(0, 2, 11) (73)

זווית בין ישר ומישור:

סיכום כללי:

• זווית חדה α בין ישר $l = \underline{a} + t\underline{u}$ ומישור $\pi : ax + by + cz + d = 0$

$$\sin \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{h}|}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|} \quad \text{תחושב ע"י הנוסחה הבאה:}$$

שאלות:

(74) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:

$$\ell : \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2), \quad \pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$$

(75) נתונות הנקודות $A(1, -1, 2)$, $B(0, 2, -1)$, $C(1, 2, 5)$, $D(-7, 3, -1)$

מצא את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

(76) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה

$$\text{היא: } 2x + y - 2z - 6 = 0. \quad \text{קדקוד הפירמידה הוא } S(3, 1, -2).$$

מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,

$$\text{אם נתון כי שיעורי הקודקוד B מקיימים: } x_B = z_B = -1.$$

תשובות סופיות:

$$(74) \quad 18.87^\circ$$

$$(75) \quad 44.83^\circ$$

$$(76) \quad 14.9^\circ$$

זווית בין שני מישורים:

סיכום כללי:

• זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ו- $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

• תחושב ע"י: $\cos \alpha = \frac{|h_1 \cdot h_2|}{|h_1| \cdot |h_2|}$

שאלות:

(77) מצא את הזווית שבין המישורים הבאים: $\pi_1: 4x + 3y + z - 12 = 0$
 ו- $\pi_2: 4x - 7y + 5z + 3 = 0$

(78) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקודקודה הם:
 $A(0, 2, -5)$, $B(3, -1, 1)$, $C(7, -1, -5)$, $D(3, 2, 0)$
 מצא את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

(79) מצא את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x + 5y - z + 4 = 0$ למישור $[xz]$.

תשובות סופיות:

(77) 90°

(78) 87.539°

(79) 32.312°

מרחק בין שתי נקודות במרחב:

סיכום כללי:

מרחק בין שתי נקודות $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ במרחב יחושב באופן

$$\text{הבא: } d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

שאלות:

(80) נתונות הנקודות: $A(2, 4, -5)$, $B(0, -2, 6)$ ו- $C(k, -1, 13 - k)$. מצא ערכי k עבורם המשולש ABC יהיה שווה-שוקיים: $AB = AC$.

תשובות סופיות:

(80) $k = 8$ או $k = 12$.

מרחק בין נקודה לישר:

סיכום כללי:

מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

שאלות:

81 מצא את המרחק שבין הנקודה $A(13, -1, -19)$ לישר $l: \underline{x} = t(2, 0, -7)$.

82 נתונות הנקודות $A(1, 6, -1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(6, -4, 0)$.
חשב את שטח המשולש ABC.

83 על הישר $l: \underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5, 4, 2)$.
מצא את שיעורי הקודקוד B (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

81 $\sqrt{54}$

82 12.75 יח"ש.

83 $B(5, 4, -6)$ או $B(5, -4, 2)$.

מרחק בין נקודה למישור:

סיכום כללי:

מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ למישור $\pi: ax + by + cz + d = 0$ יחושב

$$.d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| \text{ עיני:}$$

שאלות:

(84) מצא את מרחקו של המישור $4x - 2y - 4z + 15 = 0$ מראשית הצירים.

(85) מצא משוואת מישור המאונך לישר $\ell: \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$

ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4, 5, -9)$.

(86) נתונים ישר ומישור: $\pi: 2x + 4y - 4z + 15 = 0$, $\ell: \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$.

מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

תשובות סופיות:

$$.2 \frac{1}{2} \quad (84)$$

$$. \pi: 3x - 2y + z - 7 = 0 \text{ או } \pi: 3x - 2y + z + 21 = 0 \quad (85)$$

$$.(1, -9, 5) \text{ או } (4, 5, 1) \quad (86)$$

מרחק בין ישרים מקבילים:

סיכום כללי:

מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו.

שאלות:

87 נתונות הנקודות $A(15,0,-4)$, $B(12,-5,2)$, $C(6,1,4)$, $D(12,11,-8)$

א. מצא את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B

ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצא את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

88 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x} = (2, 0, -1) + t(1, -2, 1) \quad , \quad l_2: \underline{x} = (-8, -1, 19) + s(-4, 1, 6)$$

$$l_3: \underline{x} = (-2, 7, -11) + r(-2, 4, -2) \quad , \quad l_4: \underline{x} = (-2, 1, 5) + q(4, -1, -6)$$

א. הוכח כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצא את שטח המלבן.

תשובות סופיות:

87 א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

88 א. הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

מרחק בין ישר למישור:

סיכום כללי:

מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאת מרחקה מהמישור.

שאלות:

89 נתונה משוואת מישור: $4x - z + 6 = 0$.

א. מצא את המצב ההדדי בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

ב. מצא את המרחק בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

90 נתונים ישר ומישור: $\pi: 3x + 12y - 4z + k - 10 = 0$, $l: \underline{x} = (1, k - 1, 5) + t(4, -2, -3)$.

א. הוכח שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצא את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

תשובות סופיות:

89 א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$.

90 א. הוכחה. ב. $k = 2, 4$.

מרחק בין מישורים מקבילים:

סיכום כללי:

מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
 1. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.

$$2. \text{ שימוש בנוסחה: } d = \left| \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

שאלות:

91 נתונה משוואת מישור: $\pi : 3x - 4y + 5z - 10 = 0$.

מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

92 נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1 : x - 2y - 2z + 6 = 0$, $\pi_2 : x - 2y - 2z - 12 = 0$.

מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

93 נתונים שישה מישורים:

$$\pi_1 : 2x + y - 2z - 11 = 0, \quad \pi_2 : x + 2y + 2z + 5 = 0, \quad \pi_3 : 2x - 2y + z + 3 = 0$$

$$\pi_4 : 2x + y - 2z + 7 = 0, \quad \pi_5 : x + 2y + 2z - 1 = 0, \quad \pi_6 : kx + qy + z + p = 0$$

מצא את ערכי הפרמטרים k, q, p שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

94 כדור שמרכזו בנקודה $O(3, 8, -1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון

$$\text{מונח על מישור שמשוואתו } 12x + 4y - 3z - 6 = 0.$$

מצא את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

תשובות סופיות:

91 $\pi_1 : 3x - 4y + 5z + 10 = 0$, $\pi_2 : 3x - 4y + 5z - 30 = 0$

92 $\pi_3 : x - 2y - 2z - 3 = 0$

93 $k = 2, q = -2, p = 18, -12$

94 $12x + 4y - 3z - 136 = 0$

מרחק בין ישרים מצטלבים:

סיכום כללי:

מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני.

שאלות:

95 נתונים שני הישרים הבאים: $\ell_1 : \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$

$$\text{ו-} \ell_2 : \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$$

הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

96 נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים: $\ell_1 : \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$

$$\text{ו-} \ell_4 : \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$$

מצא את המרחק שביניהם.

97 מצא את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$ מציר ה- z .

תשובות סופיות:

95 $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.

96 1.567 יח"א.

97 $\sqrt{2}$ יח"א.

שאלות מסכמות בוקטורים:

שאלות:

- 1** נתונות הנקודות $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.
- מצא הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C. הראה כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.
 - חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.
 - מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.
- 2** מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
- במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים. במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את המרחק ביניהם.
- $\underline{x} = (1,0,1) + t(1,2,0)$, $\underline{x} = (1,1,0) + s(2,4,0)$
 - $\underline{x} = (-2,2,4) + u(6,6,1)$, $\underline{x} = (1,-1,0) + s(12,-3,1)$
 - $\underline{x} = (1,1,2) + t(1,2,-1)$, $\underline{x} = (2,3,1) + s(2,4,-2)$
 - $\underline{x} = (1,-1,0) + t(0,2,-4)$, $\underline{x} = (2,0,3) + s(-1,-3,1)$
- 3** מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
- במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור. במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.
- $2x - 3y + 4z - 5 = 0$, $\underline{x} = (1,0,2) + t(-1,2,2)$
 - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $\underline{x} = (-3,0,4) + t(4,-2,-6)$
 - $2x - 14y + 10z = -6$, $\underline{x} = (2,1,-2) + t(-2,2,0)$
- 4** מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם. במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.
- $x - 2y + 2z - 10 = 0$, $2x + y + 2z - 4 = 0$
 - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $4x - 10y + 6z - 8 = 0$
 - $2x - 14y + 10z = -6$, $x - 7y + 5z = -3$

- (5) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D' שנפחה הוא 8.
 משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא: $\pi_1 : 4x + y + 3z - 28 = 0$.
 משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא: $\pi_2 : x + 2y - 2z + 6 = 0$.
 מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).
- (6) הנקודה A(4,0,-1) נמצאת על כדור שמרכזו O(1,1,2).
 מצא את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.
- (7) נתונים מישור וישר: $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$, $\ell : \underline{x} = (1,5,5) + t(1,1,0)$.
 מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה-z הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.
- (8) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : 2x - 4y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 1 = 0$.
 מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).
- (9) נתונים ישר ומישור: $\pi : 6x + 2y - z + 5 = 0$, $\ell_1 : \underline{x} = (0,-3,0) + t(1,1,-8)$.
 ישר נוסף, ℓ_2 , המקביל למישור π , עובר בנקודה P(1,0,-4) וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q. מצא את שטח המלבן P'Q'QP. (הדרכה: הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2).
- (10) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2 : 3x + y + 2z + 11 = 0$.
 ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
 המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של 60° עם הישר $\ell_2 : \underline{x} = (1,3,-4) + t(1,1,0)$.
 מצא את משוואת המישור π_3 .

תשובות סופיות:

- (1) א. $\underline{x} = (1, 2, 0) + t(0, -1, 1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y - z + 2 = 0$
- (2) א. מקבילים, 1.095 ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
 ד. נחתכים בנקודה $(1, -3, 4)$, הזווית היא: 47.6°
- (3) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל
 ג. חותך בנקודה $(3.5, -0.5, -2)$, הזווית היא: 40.78°
- (4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x} = (0, -2, 3) + t(3, -1, -2.5)$, זווית: 63.6° .
 ב. מקבילים. המרחק: 0.324 ג. מתלכדים.
- (5) $\ell: \underline{x} = (0, 2.5, 8.5) + t(2, -2.75, -1.75)$, $\ell: \underline{x} = (0, 7, 7) + t(8, -11, -7)$
- (6) $\pi: -3x + y + 3z + 15 = 0$
- (7) $(0, 0, 4)$ או $(0, 0, 14\frac{4}{5})$
- (8) $\ell: \underline{x} = \left(0, -14, -15\frac{3}{4}\right) + t(-14, 14, 21)$
- (9) 10.467 יח"ש.
- (10) $\pi_3: x + 2y - z - 58 = 0$ או $\pi_3: 2x + y + z - 5 = 0$

שאלות הנפתרות עם מכפלה וקטורית:

שאלות:

מציאת משוואת מישור:

(1) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$
מצא את משוואת המישור.

(2) המישור π עובר בנקודות: $A(1, 0, -3)$, $B(2, 0, 0)$, $C(4, -1, 0)$
מצא את משוואת המישור.

(3) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x} = (5, -4, 1) + t(0, 2, -1)$, $\ell_2 : \underline{x} = (0, -6, 2) + s(0, -2, 1)$
הראה שהישרים מקבילים ומצא את משוואת המישור המכיל אותם.

(4) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x} = (-1, 1, 3) + t(3, -2, 4)$, $\ell_2 : \underline{x} = (-7, 1, 0) + s(4, -3, 0)$
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1
ומקביל לישר ℓ_2 .

(5) מצא משוואת מישור שעובר בנקודה $A(6, 0, -1)$ ומכיל את ציר ה- z .

מצב הדדי בין ישר ומישור:

(6) נתונים הישר והמישור הבאים:
 $\pi : \underline{x} = (-1, 0, 2) + s(1, 0, -2) + r(3, 0, -1)$, $\ell : \underline{x} = (0, 3, -2) + t(1, -1, 2)$
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

(7) נתונים שני המישורים הבאים: $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

מצב הדדי בין מישורים:

(8) במקבילון ABCDA'B'C'D' נתונים שלוש הקודקודים הבאים:

$$A(1, -1, 4), B(9, 0, 2), C(5, 2, -2)$$

מצא את משוואת המישור עליו מונחת הפאה A'B'C'D' אם ידוע שהנקודה $(2, -1, 0)$ נמצאת עליו.

מציאת ישר חיתוך בין שני מישורים:

(9) המישורים π_1 ו- π_2 מאונכים זה לזה.

הישר $\ell: \underline{x} = (4, 1, -1) + t(2, -1, 1)$ הוא ישר החיתוך שבין המישורים.

מצא את משוואות המישורים אם ידוע שהמישור π_1 עובר בראשית.

(10) נתונים ישר ומישור: $\pi: 4x - 2y - 3z - 6 = 0$, $\ell: \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(3, 1, -1)$.

מצא הצגה פרמטרית של הישר שהוא היטלו של הישר ℓ על המישור.

חישובי מרחקים שונים:

(11) חשב את נפחה של פירמידה משולשת SABC שקודקודה הם:

$$A(1, 6, -1), B(2, -1, 0), C(6, -4, 0), S(11, -2, 4)$$

(12) בפירמידה משולשת SABC המקצועות SA, SB ו-SC מאונכים זה לזה.

$$\text{נתון: } SA = 6, SB = 8, SC = 12.$$

חשב את אורכו של גובה הפירמידה היורד מהקודקוד S לבסיס ABC.

(13) נתונים שני הישרים הבאים: $\ell_1: \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$

$$\text{ו- } \ell_2: \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$$

הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

(14) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים: $\ell_1: \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$

$$\text{ו- } \ell_4: \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$$

מצא את המרחק שביניהם.

(15) מצא את מרחק הישר $\ell: \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$ מציר ה- z .

שאלות שונות:

(16) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x} = (-2, 1, 5) + t(5, -4, 2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (-7, 3, -1) + s(-5, 4, -2)$.

א. מצא את המצב ההדדי שבין הישרים.

ב. המישור π_1 מכיל את שני הישרים והמישור π_2 נמצא בין שני הישרים במרחק שווה מכל אחד מהם, מקביל לשני הישרים ומאונך למישור π_1 . מצא את משוואות המישורים π_1 ו- π_2 .

(17) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : 2x - y + 4z - 8 = 0$, $\pi_2 : x - y + 2z - 4 = 0$.

המישור π_3 מכיל את ישר החיתוך של שני המישורים וחותך את ציר ה- y בנקודה A כך שמתקיים $OA = m$ (O ראשית הצירים).

הזווית שבין המישור π_2 למישור π_3 היא α ונתון כי: $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

מצא את הערכים האפשריים של הפרמטר m .

(18) נתונות שלוש נקודות: $A(3, -1, 1)$, $B(2, -1, 0)$, $O(3, 1, 0)$.

הנקודות A ו-B נמצאות על היקפו של מעגל שהנקודה O היא מרכזו. מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל בנקודה A (הישר נמצא במישור המעגל).

תשובות סופיות:

(1) $\pi: x - 3y + 8z = 0$

(2) $\pi: 3x + 6y - z - 6 = 0$

(3) $\pi: y + 2z + 2 = 0$

(4) $\pi: 12x + 16y - z - 1 = 0$

(5) $\pi: y = 0$

(6) נחתכים בנקודה: $(3, 0, 4)$

(7) $l: \underline{x} = t(1, 9, 13)$

(8) $\pi_{ABCD}: 2y + z + 2 = 0$

(9) $\pi_1: y + z = 0$, $\pi_2: x + y - z - 6 = 0$

(10) $l: \underline{x} = (-5, -13, 0) + t(7, 11, 2)$

(11) יח"נ 20.5

(12) יח"א 4.46

(13) יח"א $\frac{4}{\sqrt{6}}$

(14) יח"א 1.567

(15) יח"א $\sqrt{2}$

(16) א. הישרים מקבילים. ב. $\pi_2: y + 2z - 6 = 0$, $\pi_1: 2x + 2y - z + 7 = 0$

(17) $m = -\frac{4}{7}$ או $m = 4$

(18) $l: \underline{x} = (3, -1, 1) + k(-5, -2, -4)$

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 19 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

179	1. הגדרת המספר המרוכב
182	2. המספר הצמוד
185	3. חקירת משוואה ריבועית מרוכבת
186	4. מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב
190	5. נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב
192	6. שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים
193	7. שאלות שונות עם מספרים מרוכבים

הגדרת המספר המרוכב:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i = \sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z = a + bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי a וחלק מדומה b . המספרים a ו- b הם ממשיים.
 a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\text{Re}(z)$ (מלשון: Real).
 b נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\text{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

שאלות:

(1) רשום עם i :

א. $\sqrt{-1} =$	ב. $\sqrt{-4} =$	ג. $\sqrt{-25} =$
ד. $\sqrt{-3} =$	ה. $\sqrt{-5} =$	

(2) חשב:

א. $i =$	ב. $i^2 =$	ג. $i^3 =$
ד. $i^4 =$	ה. $i^5 =$	ו. $i^{17} =$

(3) רשום את ערכם של a ו- b בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2 + 5i$	ב. $3 - i$	ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
ד. $7i$	ה. -4	ו. 0

(4) כתוב מספר מרוכב z לפי הדרישות הבאות:

א. $\text{Re}(z) = -3$, $\text{Im}(z) = 2$.

ב. $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(5) מספר מרוכב מסוים z מקיים: $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 4$ ו- $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) = -1$. מצא את z .

(6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2 = -1$ ב. $x^2 + 36 = 0$ ג. $x^2 - 2x + 5 = 0$

(7) פתור את המשוואה הבאה: $x^2 + x + 1 = 0$.

(8) פתור את המשוואה הבאה: $z^2 + iz + 6 = 0$.

(9) נתון: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 2i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א. $z_1 + z_2 =$ ב. $z_1 - z_2 =$ ג. $z_1 \cdot z_2 =$

(10) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-2 + 6i) + (1 - i)$ ב. $(4 + 4i) - \left(3 + \frac{1}{2}i\right)$
 ג. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ד. $5 - (3 - 2i)$
 ה. $(i - 3) + 6i$ ו. $(i + 2) - (3i - 2) + (7 - 5i)$

(11) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(1 + 4i) \cdot (8 - 2i)$ ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
 ג. $(4i - 3) \cdot (4i + 3)$ ד. $i \cdot (i - 1)$
 ה. $(2i + 3) \cdot i$ ו. $(5i - 1)^2$

(12) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2i$.

ידוע כי $z_1 + z_2$ הוא ממשי וכי $z_1 - z_2$ הוא מדומה.

א. מצא קשר בין a_1 ל- a_2 וקשר בין b_1 ו- b_2 .

ב. הראה כי המכפלה $z_1 \cdot z_2$ היא ממשית.

תשובות סופיות:

- (1) א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$
- (2) א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i ו. i
- (3) א. $a = 2, b = 5$ ב. $a = 3, b = -1$ ג. $a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = -\frac{1}{2}$ ד. $a = 0, b = 7$ ה. $a = -4, b = 0$ ו. $a = 0, b = 0$
- (4) א. $z = -3 + 2i$ ב. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- (5) $z = 1.5 + 2.5i$
- (6) א. $x = \pm i$ ב. $x = \pm 6i$ ג. $x = 1 + 2i, 1 - 2i$
- (7) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- (8) $z = 2i, -3i$
- (9) א. $7 + i$ ב. $-3 + 5i$ ג. $16 + 11i$
- (10) א. $-1 + 5i$ ב. $1 + 3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2 + 2i$ ה. $-3 + 7i$ ו. $11 - 7i$
- (11) א. $16 + 30i$ ב. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$ ג. -25 ד. $-1 - i$
- (12) א. $a_1 = a_2, b_1 = -b_2$ ב. הוכחה. ג. $-2 + 3i$ ו. $-24 - 10i$

המספר הצמוד:

סיכום כללי:

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב $z = a + bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- \bar{z} וערכו: $\bar{z} = a - bi$.

שאלות:

(13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2 + 5i$	ב. $3 - i$	ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
ד. $7i$	ה. -4	ו. 0

(14) חשב:

א. $\frac{11 + 2i}{2 - i}$	ב. $\frac{3 + 7i}{2 - 5i}$	ג. $\frac{19 - 9i}{2 - 3i}$
----------------------------	----------------------------	-----------------------------

(15) נתון מספר $z = 5 - 2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$	ב. $\frac{z}{z + 3}$	ג. $\frac{z + i}{z - i}$
------------------	----------------------	--------------------------

(16) המספר $\frac{3 + 4i}{a - i}$ הוא ממשי טהור. מצא את a .

(17) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2i$.

הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

(18) פתור את המשוואה הבאה: $3z - 11 = iz - 7i$.

(19) פתור את המשוואה הבאה: $iz + 5 = 4i$.

(20) פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו- w משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases} 3z + iw = 5 - 4i \\ 5iz - 2w = 5 + 8i \end{cases}$$

(21) פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו- b ממשיים:

ב. $3a - 8 + 5bi = 2b - ai - 3i$

א. $2a - 3i = 10 + bi$

(22) פתור את המשוואה הבאה: $2z + 7i = iz + \bar{z} - 3$.

(23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

ב. $\sqrt{8 + 6i}$

א. $\sqrt{5 - 12i}$

(24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1 - i)z^2 - 2z + i + 1 = 0$

ב. $(-2 + i)z^2 - (6 + 12i)z + 10 - 25i = 0$

(25) פתור את המשוואה הבאה: $iz^2 - 2(1 - i)z + 6 + 15i = 0$.

(26) פתור את המשוואה הבאה: $z^2 - i\bar{z} + 6 = 0$.

תשובות סופיות:

- א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0 (13)
- א. $4+3i$ ב. $-1+i$ ג. $.5+3i$ (14)
- א. $\frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17} - \frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17} + \frac{5}{17}i$ (15)
- (16) $a = -\frac{3}{4}$
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) $z = 4 - i$
- (19) $z = 4 + 5i$
- (20) $z = 2 - 3i, w = 5 + i$
- א. $a = 5, b = -3$ ב. $a = 2, b = -1$ (21)
- (22) $z = -\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}i$
- א. $z = \pm(3-2i)$ ב. $z = \pm(3+i)$ (23)
- א. $z_{1,2} = i, 1$ ב. $z_{1,2} = -2-i, 2-5i$ (24)
- (25) $z_1 = -2-5i, z_2 = 3i$
- (26) $z_1 = -3i, z_2 = 2i$

חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

שאלות:

(27) נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2 - 2(m+2i)z + 1 = 0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

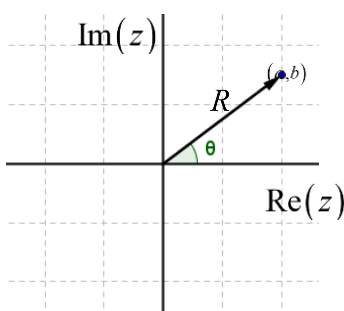
תשובות סופיות:

(27) א. $m = -i$ ב. $m = -2i$.

מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב z ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה- x מייצג את a , גודל הערך הממשי של z , וציר ה- y מייצג את b , גודל הערך המדומה של z . מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג (a, b) או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ- $(0, 0)$) והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס. הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב ויסומן: (R, θ) . מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$$z = R \cos \theta + i \cdot R \sin \theta = R(\cos \theta + i \sin \theta) = R \operatorname{cis} \theta$$

נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan \theta = \frac{b}{a}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $a = R \cos \theta$, $b = R \sin \theta$.
- גודל של מספר מרוכב z יסומן $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1 \cdot z_2 = (R_1 \operatorname{cis} \theta_1) \cdot (R_2 \operatorname{cis} \theta_2) = R_1 R_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \operatorname{cis} \theta_1}{R_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{R_1}{R_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$.

שאלות:

(28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| א. $2\text{cis}60^\circ$ | ב. $6\text{cis}135^\circ$ | ג. $4\text{cis}330^\circ$ |
| ד. $4\text{cis}(-30^\circ)$ | ה. $4\text{cis}690^\circ$ | ו. $8\text{cis}90^\circ$ |
| ז. $3\text{cis}270^\circ$ | ח. $\text{cis}180^\circ$ | ט. $\text{cis}0^\circ$ |

(29) הפוך להצגה קוטבית:

- | | | |
|-----------|-----------------|---------------------------------------|
| א. $1+i$ | ב. $\sqrt{3}-i$ | ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ |
| ד. $3+4i$ | ה. $6i$ | ו. $-i$ |
| ז. 4 | ח. -1 | ט. 1 |
| י. 0 | | |

(30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--|---|
| א. $2\text{cis}120^\circ \cdot 3\text{cis}60^\circ$ | ב. $\text{cis}210^\circ \cdot 5\text{cis}(-40^\circ)$ |
| ג. $\frac{12\text{cis}315^\circ}{3\text{cis}90^\circ}$ | ד. $\frac{1}{2\text{cis}40^\circ}$ |
| ה. $6\text{cis}30^\circ + 2\text{cis}210^\circ$ | |

(31) נתון המספר המרוכב $z = R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות R ו- θ את המספרים:

- | | | |
|-------------------|----------|----------------------|
| א. \bar{z} | ב. $1/z$ | ג. $-z$ |
| ד. $-\frac{1}{z}$ | ה. iz | ו. $z \cdot \bar{z}$ |

(32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

- | | | |
|------------------|----------------------|--|
| א. $z + \bar{z}$ | ב. $z \cdot \bar{z}$ | ג. $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$ |
|------------------|----------------------|--|

(33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

- | | |
|----------------------|--------------------------------------|
| א. $z^2 - \bar{z}^2$ | ב. $\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$ |
|----------------------|--------------------------------------|

(34) הוכח את הטענות הבאות:

א. $z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz}$ ב. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

(36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא 30° חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(39) z הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה. קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. \bar{z} ב. $\frac{1}{z}$ ג. $\frac{z}{\bar{z}}$ ד. $z \cdot \bar{z}$

תשובות סופיות:

- (28) א. $1 + \sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3} - 2i$ ד. $2\sqrt{3} - 2i$
- ה. $2\sqrt{3} - 2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1
- (29) א. $\sqrt{2}\text{cis}45^\circ$ ב. $2\text{cis}330^\circ$ ג. $\text{cis}240^\circ$ ד. $5\text{cis}53.13^\circ$
- ה. $6\text{cis}90^\circ$ ו. $\text{cis}270^\circ$ ז. $4\text{cis}0^\circ$ ח. $\text{cis}180^\circ$ ט. $\text{cis}0^\circ$
- (30) א. -6 ב. $5\text{cis}170^\circ$ ג. $4\text{cis}225^\circ$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}(-40^\circ)$
- ה. $4\text{cis}30^\circ$
- (31) א. $R\text{cis}(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$ ג. $R\text{cis}(180^\circ + \theta)$
- ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180^\circ + \theta)$ ה. $R\text{cis}(90^\circ + \theta)$ ו. R^2
- (32) שאלת הוכחה.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) שאלת הוכחה.
- (35) $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$
- (36) $-\sqrt{3}+i, -1-\sqrt{3}i, \sqrt{3}-i$
- (37) $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2$
- (38) $1+\sqrt{3}i, -1+\sqrt{3}i, 2$
- (39) א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל ג. על המעגל ד. מחוץ למעגל.

נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב z בחזקת n נעזר בקשר: $(R\text{cis}\theta)^n = R^n\text{cis}(n\theta)$.

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש n -י של מספר מרוכב z השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

$$\cdot z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 / \sqrt[n]{} \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{R_0} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) : 1 \leq k \leq n$$

נבצע:

שאלות:

40 חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $(2\text{cis}30^\circ)^3$ ב. $(2\text{cis}14^\circ)^5$ ג. $(1+i)^4$

ד. $(\sqrt{3}-i)^3$ ה. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

41 פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2 = 36\text{cis}120^\circ$ ב. $z^4 = (9\text{cis}80^\circ)^2$ ג. $z^5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

42 מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

43 נתון המספר המרוכב $z = x+iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z|=2$.

(44) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z - 3i| = 5$.

(45) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס

המתקבל בעבור המשוואה: $|z + i| + |\bar{z} + i| = |1 + 3i|$.

תשובות סופיות:

(40) א. $8i$ ב. $32\text{cis}70^\circ$ ג. -4 ד. $-8i$ ה. 1 .

(41) א. $z_0 = 6\text{cis}60^\circ, z_1 = 6\text{cis}240^\circ$.

ב. $z_0 = 3\text{cis}40^\circ, z_1 = 3\text{cis}130^\circ, z_2 = 3\text{cis}220^\circ, z_3 = 3\text{cis}310^\circ$.

ג. $z_0 = \text{cis}12^\circ, z_1 = \text{cis}84^\circ, z_2 = \text{cis}156^\circ, z_3 = \text{cis}228^\circ, z_4 = \text{cis}300^\circ$.

(42) סכום: 0 , מכפלה: -1 .

(43) $x^2 + y^2 = 4$.

(44) $x^2 + (y - 3)^2 = 25$.

(45) $\frac{2x^2}{3} + \frac{2y^2}{5} = 1$.

שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

(46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7 = 13 + 3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3 = 5 - 9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

(47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5 = 32 + 16i$ והאיבר השני הוא $a_2 = 2 - 4i$.
 א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.
 ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

(48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

$$S_{10} = 100 - 15i \quad (46)$$

$$S_5 = 20 + 25i \quad \text{ב.} \quad a_1 = 2 + i, q = -2i \quad \text{א.} \quad (47)$$

$$2, 4 - 2i, 6 - 8i \quad \text{או} \quad 2, 2i, -2 \quad (48)$$

שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

(49) פתור את המשוואה: $z - \bar{z} + |z| = |2 - i|^2 - 4i + \text{Im}(z)$.

(50) פתור את המשוואה: $|2 - 3^{x^2 - x - 1}i| = \sqrt{13}$.

(51) פתור את המשוואה: $z^3 = \bar{z}$.

(52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

(53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים. הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

(54) נתון מספר מרוכב z , שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.

הוכח כי אם $z - \frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

(55) הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1 \text{cis} \theta_1 \cdot R_2 \text{cis} \theta_2 = R_1 R_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.

(56) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.

נתון: $|z^4 - z^3| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

(57) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.

מצא את ערך הביטוי $z + iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

(58) z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2 - 2\cos\theta \cdot z + 1 = 0$.
 הבע באמצעות θ את גודל הזווית $\angle z_1 O z_2$ (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

(49) $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -3 - 4i$

(50) $x = 2$, -1

(51) $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, $z_4 = 1$, $z_5 = -1$

(52) שאלת הוכחה.

(53) שאלת הוכחה.

(54) שאלת הוכחה.

(55) שאלת הוכחה.

(56) $\arg(z) = 30^\circ$

(57) $z + iz = \sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$

(58) 2θ

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 20 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

תוכן העניינים

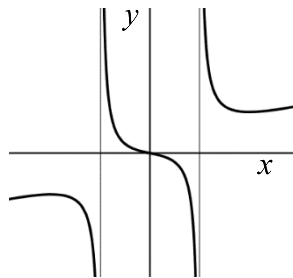
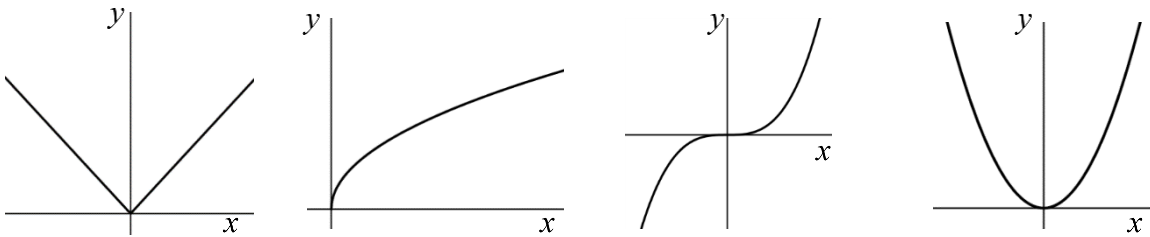
195	1. הקדמה כללית
196	2. גזירת פונקציות
202	3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
203	4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה
206	5. שאלות עם פרמטרים
208	6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית

הקדמה כללית:

סיכום כללי:

פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x) = x^2$: הפונקציה $f(x) = x^3$: הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$: הפונקציה $f(x) = |x|$:



פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$:

שיפוע של פונקציה:

- השיפוע m של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1, y_1)$, כלומר: $m = f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1, y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

גזירת פונקציות:

סיכום כללי:

כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$ | ב. $f(x) = x^7$ | ג. $f(x) = x^2$ |
| ד. $f(x) = x$ | ה. $f(x) = x^{-3}$ | ו. $f(x) = x^{-1}$ |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$ | ב. $f(x) = 3x^7$ | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x$ | ו. $f(x) = 3x^{-2}$ |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$ | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = 12 \quad \text{א.} \quad f(x) = \frac{7}{8} \quad \text{ב.}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{א.} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = 7x^2 + 23x - 6 \quad \text{ג.} \quad f(x) = 6x^2 + 8x + 4 \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 \quad \text{ה.} \quad f(x) = \frac{x^4}{8} + 67 \quad \text{ו.}$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{א.} \quad f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ב.} \quad f(x) = 3(x - x^2)^2 \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \quad \text{ה.}$$

(6) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{א.} \quad f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ה.} \quad f(x) = \frac{2}{3-x} \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{6}{x+5} \quad \text{ז.}$$

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{א.} \quad f(x) = (5x+1)^3(x-3) \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = x^3(6-x)^4 \quad \text{ג.} \quad f(x) = 3x^2 \cdot x \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = x^2 \cdot x^3 \quad \text{ה.} \quad f(x) = x(3x+7) \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = 3x^3(3x-1) \quad \text{ז.} \quad f(x) = (x-2)(2x^2+3) \quad \text{ח.}$$

$$f(x) = (3x-2)(x^2+10x) \quad \text{ט.} \quad f(x) = (3x^4-4x)(2x^2+5x+2) \quad \text{י.}$$

$$f(x) = x(x-2)(3x-4) \quad \text{יא.}$$

8) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = 2x^3(3x+5)^2$.ב.	$f(x) = (x^2 - 4)^2$.א.
$f(x) = (x^2 + 1)^3(2x-1)^2$.ד.	$f(x) = (x^3 + 2)^2(x-1)^3$.ג.

9) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$.ג.	$f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x - 12}$.ב.	$f(x) = \frac{3x - 1}{1 + 2x}$.א.
$f(x) = \frac{3}{x^3}$.ו.	$f(x) = \frac{1}{x}$.ה.	$f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$.ד.
$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{2(1-x)}$.ט.	$f(x) = \frac{(x^2 + 3)^2}{x^2 - 2}$.ח.	$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$.ז.
		$f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 4}$.י.

10) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$.ג.	$f(x) = 4\sqrt{x+1}$.ב.	$f(x) = \sqrt{x}$.א.
$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$.ו.	$f(x) = x^2\sqrt{x+3}$.ה.	$f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$.ד.

11) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = \sqrt{2x}$.ב.	$f(x) = \sqrt{x+1}$.א.
$f(x) = \sqrt{10-3x}$.ד.	$f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$.ג.
$f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$.ו.	$f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x}$.ה.
$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$.ח.	$f(x) = x^2\sqrt{1-2x}$.ז.
$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}$.י.	$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$.ט.
$f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x}}$.יב.	$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$.יא.
$f(x) = \frac{x^2 + 7}{\sqrt{x^2 - 5}}$.יד.	$f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$.יג.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \quad \text{ט.ז.}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \quad \text{ט.ו.}$$

(12) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x-2a}{x-4a} \quad \text{ג.} \quad f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = ax^4 - bx \quad \text{א.}$$

$$f(x) = a\sqrt{bx^2 + c} \quad \text{ד.}$$

(13) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{ה.}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$
- ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
- (2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8
- ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$
- (3) א. 0 ב. 0
- (4) א. $3x^2 + 4x - 3$ ב. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$ ג. $14x + 23$ ד. $12x + 8$ ה. $x - 3x^2$ ו. $0.5x^3$
- (5) א. $15(5x - 2)^2$ ב. $15x^2(x^3 + 6)^4$ ג. $6(x - x^2)(1 - 2x)$
- ד. $-\frac{3}{4}(5 - x)^2$ ה. $\frac{8(x + 1)^3}{3}$
- (6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}$
- ו. $\frac{2}{(3 - x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x + 5)^2}$
- (7) א. $10x - 14$ ב. $(5x + 1)^2(20x - 44)$ ג. $x^2(6 - x)^3(18 - 7x)$
- ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x + 7$ ז. $36x^3 - 9x^2$ ח. $6x^2 - 8x + 3$
- ט. $9x^2 + 56x - 20$ י. $36x^5 + 75x^4 + 24x^3 - 24x^2 - 40x - 8$ יא. $9x^2 - 20x + 8$
- (8) א. $4x(x^2 - 4)$ ב. $30x^2(x + 1)(3x + 5)$ ג. $3(x - 1)^2(x^3 + 2)(3x^3 - 2x^2 + 2)$
- ד. $2(2x - 1)(x^2 + 1)^2(8x^2 - 3x + 2)$
- (9) א. $\frac{5}{(1 + 2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2 - 24x - 5}{(5x - 12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2 + 3)^2}$ ד. $\frac{(x - 4)(x + 2)}{(x - 1)^2}$
- ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$
- ח. $\frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 7)}{(x^2 - 2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x + 2)^2}$

$$\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \cdot \text{ה} \quad \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \cdot \text{ז} \quad \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \cdot \text{ג} \quad \frac{2}{\sqrt{x+1}} \cdot \text{ב} \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \text{א} \quad (10)$$

$$\frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \cdot \text{ו}$$

$$\frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}} \cdot \text{ה} \quad -\frac{3}{2\sqrt{10-3x}} \cdot \text{ז} \quad \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} \cdot \text{ג} \quad \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \text{ב} \quad \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \text{א} \quad (11)$$

$$\frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}} \cdot \text{ו} \quad \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}} \cdot \text{ט} \quad -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \cdot \text{ה} \quad \frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}} \cdot \text{ז} \quad 6x - \frac{4}{\sqrt{x}} \cdot \text{ו}$$

$$\frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}} \cdot \text{ז} \quad -\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}} \cdot \text{ב} \quad 3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} \cdot \text{א}$$

$$-\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}} \cdot \text{ט} \quad -\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \cdot \text{ט} \quad \frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}} \cdot \text{ז}$$

$$\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}} \cdot \text{ז} \quad \frac{-2a}{(x-4a)^2} \cdot \text{ג} \quad \frac{2ax}{3} - \frac{1}{b} \cdot \text{ב} \quad 4ax^3 - b \cdot \text{א} \quad (12)$$

$$\cdot f'(x) = \frac{2x^2-8}{4x^2}, f''(x) = \frac{4}{x^3} \cdot \text{א} \quad (13)$$

$$\cdot f'(x) = \frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}, f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \cdot \text{ב}$$

$$\cdot f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \cdot \text{ג}$$

$$\cdot f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} \cdot \text{ד}$$

$$\cdot f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \cdot \text{ה}$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, f''(x) = \frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \cdot \text{ו}$$

מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(14) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 7x$ בנקודה $(2, 2)$.

(15) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$ בנקודה בה $x = -2$.

(16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 1$.

תשובות סופיות:

$$m = 17 \quad (14)$$

$$m = 4 \quad (15)$$

$$m = 2 \quad (16)$$

מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x = -1$.

(18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y = 2$.

(19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

(20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.

(21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$ בנקודה שבה $x = 1$.

(22) נתון כי הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = 3\sqrt{x}$. מצא את נקודת ההשקה.

(23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 1$.

(24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 4$.

(25) נתונה הפונקציה הבאה $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

(26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו -2.

(27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

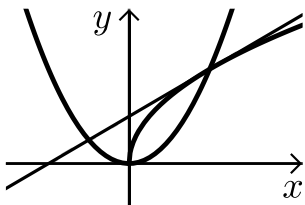
(28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית של 135° .

(29) מצא את משוואות המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y = x^2$, $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y = 2x$.

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

(31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$.



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

(17) $y = 24x + 22$

(18) $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

(19) $y = 6x - 24$, $y = -6x - 12$

(20) $y = 2x - 3$

(21) $y = -12x + 9$

(22) $(1, 3)$

(23) $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

(24) $y = 22x - 56$

(25) $y = 3x - 1$.א $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.ב

(26) $y = -2x + 8$

(27) $y = \frac{11}{16}x - \frac{15}{8}$

(28) $y = -x + 1\frac{1}{3}$, $y = -x - 1\frac{1}{3}$

(29) $y = 2x - 1$, $y = -2x - 1$

(30) .א $(1, 2)$.ב $y = -1.5x + 3.5$.ג $S = 4\frac{1}{12}$

(31) .א $(0, 0)$, $(1, 1)$.ב $y = 0.5x + 0.5$.ג $(-0.5, 0.25)$

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

(32) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = ax^2 - 4x$ בנקודה שבה $x = 3$ הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(33) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, $(a > 0)$.

המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1. מצא את ערך הפרמטר a .

(34) נתונה הפונקציה: $y = x^3 + a\sqrt{x}$ (a פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 5. מצא את ערך הפרמטר a .

(35) נתונה הפונקציה: $y = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$ (A פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 2. מצא את ערך הפרמטר A .

(36) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$.

מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(37) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y = 2$ הוא -4.

מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(38) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- c .

(39) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$.

מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(40) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה $(1, 6)$ הוא -6 .

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

(41) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$ לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$?
לכל ערך כזה של k מצא את נקודת ההשקה.

(42) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו.

מצא את k ואת נקודת ההשקה.

תשובות סופיות:

(32) $a = 2, y = 8x - 18$

(33) $a = 2$

(34) $a = 4$

(35) $A = 1$

(36) $(-1, 5), y = 4x + 9$

(37) $a = 2, y = -4x - 2$

(38) $a = -\frac{1}{8}, c = 4$

(39) $b = 4, (4, 12)$

(40) $b = 2, a = 6, y = -6x + 12$

(41) $k = 6 : (1, 1)$ או $k = \frac{158}{27} : \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$

(42) $(1, 1), k = 1.5$

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

שאלות:

43) ענה על הסעיפים הבאים:

א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2 + 1$

בנקודה שבה $x = t$.

ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1, 1)$.

44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 5x - x^2$

העוברים דרך הנקודה $(3, 7)$.

45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = x^2 + 5x - 6$

העוברים דרך הנקודה $(0, -10)$.

46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 12x - x^3$

העוברים דרך הנקודה $(2, 24)$.

47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3, 0)$.

48) מצא משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר

עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$

העוברים דרך הנקודה $(2, 3)$.

תשובות סופיות:ב. $t = 0, -2$.

(43) $y = 2tx - t^2 + 1$ א.

(44) $y = x + 4$, $y = -3x + 16$

(45) $y = 9x - 10$, $y = x - 10$

(46) $y = 12x$, $y = -15x + 54$

(47) $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

(48) $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$

(49) $y = -x + 5$

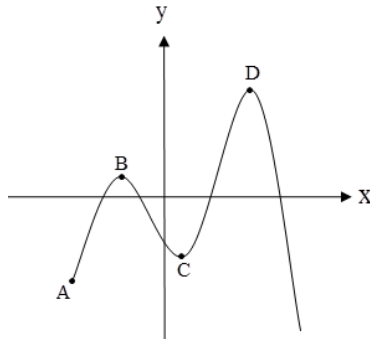
מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 21 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים

210	1. נקודות קיצון של פונקציות
213	2. חקירת פונקציה פולינומית
217	3. פונקציה זוגית ואי-זוגית

נקודות קיצון של פונקציות:



סיכום כללי:

נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B, C, D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית. נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- x של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- y .
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

שאלות:

(1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

- (3) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.
- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$.
- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (5) לפונקציה $f(x) = ax - x^3 - 5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$. מצא את ערכו של הפרמטר a .
- (6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון. מצא את הקבוע a .
- (7) לפונקציה $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה: $(2, 3)$. מצא את ערכי הפרמטרים A, B .
- (8) לפונקציה $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$ יש נקודת קיצון ב- $x = -1$ ו- $x = 4$. מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- y של שתי נקודות הקיצון.
- (9) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון. מצא את הפרמטרים a, b .
- (10) לפונקציה $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2, 3)$. מצא את ערכי הפרמטרים a, b .

תשובות סופיות:

(1) $\max(5, 25)$

(2) א. $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$ ב. עולה: $x > 2$, $x < -2$ יורדת: $-2 < x < 2$.

(3) א. $\max(0, 9)$, $\min(\sqrt{5}, -16)$, $\min(-\sqrt{5}, -16)$

ב. עולה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$ יורדת: $0 < x < \sqrt{5}$, $x < -\sqrt{5}$.

(4) א. $\min(3, 5)$ ב. עולה: $x > 3$ יורדת: $x < 3$.

(5) $a = 3$

(6) $a = -\frac{2}{3}$

(7) $A = -1$, $B = 3$

(8) $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{3}{2}$, $\left(-1, 2\frac{1}{6}\right)$, $\left(4, -18\frac{2}{3}\right)$

(9) $b = 6$, $a = -4$

(10) $a = 2$, $b = -16$

חקירת פונקציה פולינומית:

שאלות:

11 נתונה הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

12 נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

13 נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

14 נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

15 נתונה הפונקציה $f(x) = x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

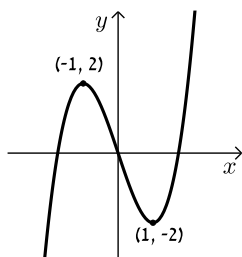
16 נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$.

- לאילו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?
- הצב בפונקציה $a = 6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y , סרטוט.

17 נתונה הפונקציה: $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$ (פרמטר d).

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 2$.

- מצא את d .
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

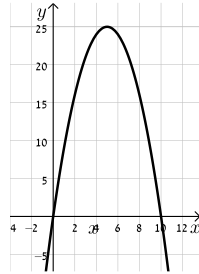


18 לפניך גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$:

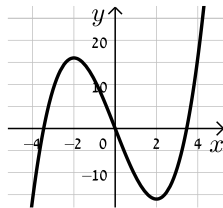
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?
- האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

תשובות סופיות:

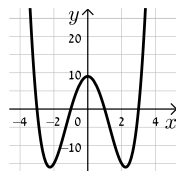
- (11)** א. כל x ב. $\max(5,25)$ ג. עלייה: $x < 5$, ירידה: $x > 5$ ד. $(0,0)$, $(10,0)$.
ה. להלן גרף:



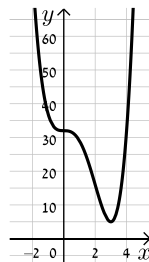
- (12)** א. כל x ב. $\min(2,-16)$, $\max(-2,16)$ ג. עלייה: $x > 2$, $x < -2$, ירידה: $-2 < x < 2$ ד. $(0,0)$, $(\sqrt{12},0)$, $(-\sqrt{12},0)$.
ה. להלן גרף:



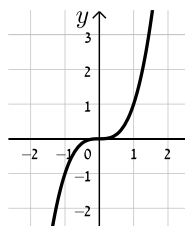
- (13)** א. כל x ב. $\max(0,9)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\min(-\sqrt{5},-16)$ ג. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$, ירידה: $x < -\sqrt{5}$, $0 < x < \sqrt{5}$ ד. $(0,9)$, $(\pm 1,0)$, $(\pm 3,0)$.
ה. להלן גרף:



- (14)** א. כל x ב. $\min(3,5)$ ג. תחומי עלייה: $x > 3$, תחומי ירידה: $x < 3$ ד. $(0,32)$.
ה. להלן גרף:

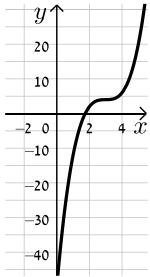


- (15)** א. כל x ב. אין. ג. עולה לכל x ד. $(0,0)$.
ה. להלן גרף:



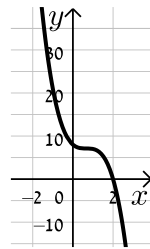
16) א. $-6 < a < 6$ ב. תחום הגדרה: כל x , נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל x ,

תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים: $(0, -50)$, להלן גרף:



17) א. $d = 8$ ב. לא ג. יורדת בתחום $x \neq \frac{2}{3}$

ד. $(0, 8)$ ה. להלן גרף:



18) א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. $k > 2, k < -2$

ה. $k = \pm 2$ ו. $-2 < k < 2$ ז. לא

פונקציה זוגית ואי-זוגית:

סיכום כללי:

הגדרות:

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x) = f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x) = -f(x)$.

שאלות:

1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x) = 3x - 5$

ב. $f(x) = 3x^2$

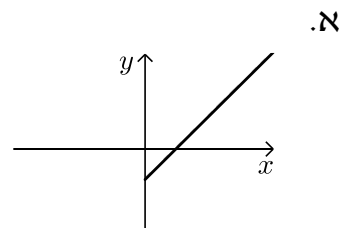
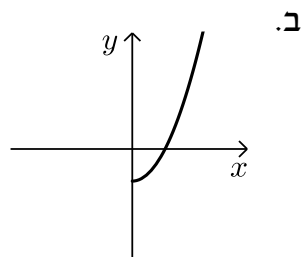
ג. $f(x) = 2x^3$

ד. $f(x) = x^3 - 2x^2$

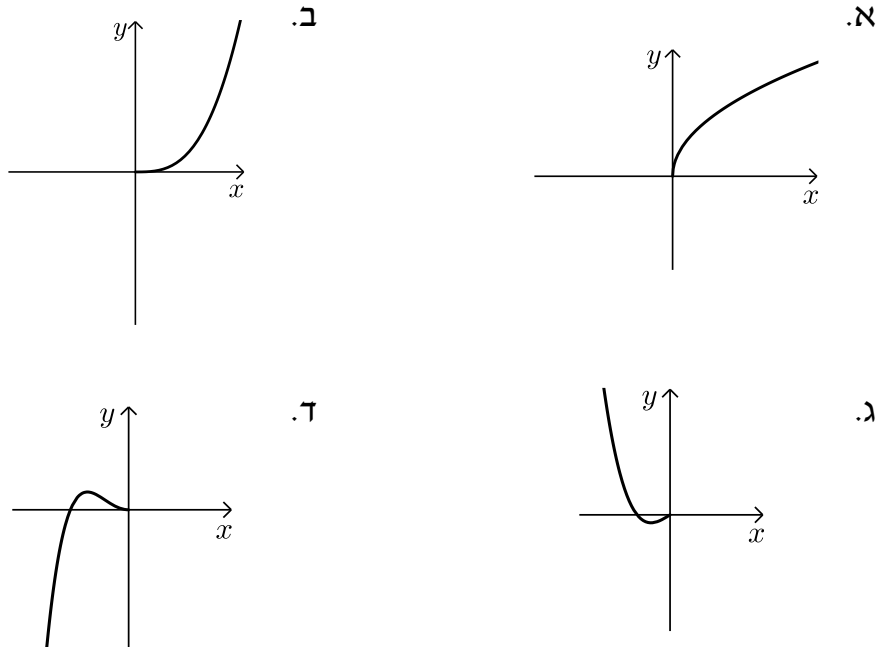
ה. $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$

ו. $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 1$

2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה זוגית:



3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^4 - 4x^2$ בתחום: $[0:3]$.

א. חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:

- i. תחום הגדרה.
- ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
- iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
- v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

ג. התבסס על ממצאריך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^6 - 3x^2 + 3$.

- א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- y , מציאת נקודות קיצון וסיווגן,
כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.
- ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה ששרטטת
בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.
- ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל x בתחום הגדרתה.

6) לפניך הפונקציה: $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$, פרמטר a .

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
- ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים ושרטט את גרף הפונקציה
בתחום: $[-2:2]$.

7) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 3x^3 - 9x$.

- א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.
- ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים ושרטט את הפונקציה
בתחום: $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$
לגרף ששרטטת בסעיף הקודם).

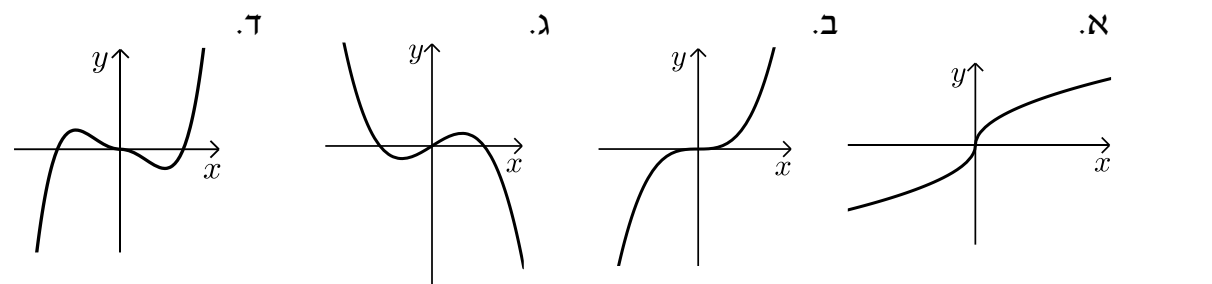
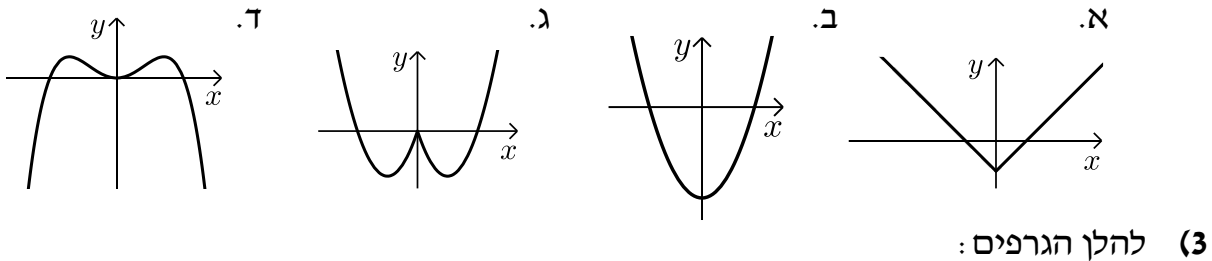
- 8) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + b$, פרמטר b . ידוע כי הישר $y = 2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות: $f'(x) = 0$.
- מצא את b וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
 - חקור את הפונקציה בתחום: $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים:
 - תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו. נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.
 - הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^7 - x}{3}$

- חקור את הפונקציה בתחום: $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
 - תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן (בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו? נמק ע"י חישוב מתאים.
- הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

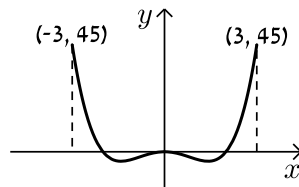
תשובות סופיות:

- (1) זוגית: ב', ה'.
 (2) להלן הגרפים: אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

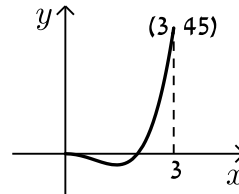


- (4) א. i. $0 \leq x \leq 3$ ii. $(0,0), (2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min(\sqrt{2}, -4)$
 iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$. ב. סעיף הוכחה.

סרטוט עבור סעיף ג:

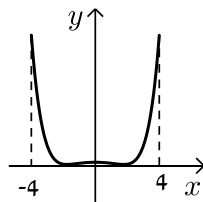


סרטוט עבור חלק v:

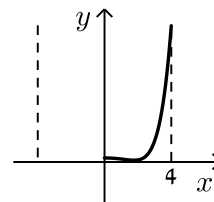


- (5) א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 4$, חיתוך עם ציר ה- y : $(0,3)$, נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה, עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$. ב. זוגית. ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

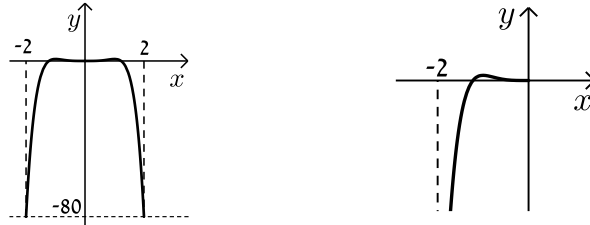
סרטוט עבור סעיף ג:



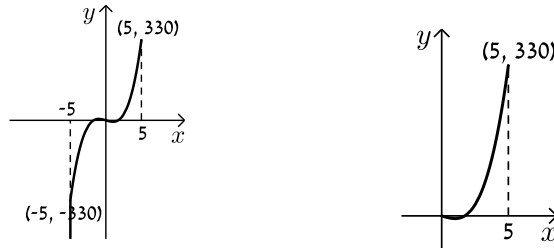
סרטוט עבור סעיף א:



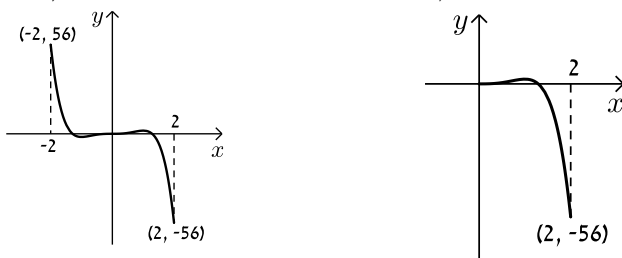
6. א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2 \leq x \leq 0$, חיתוך עם הצירים:
 נקודות קיצון: $(0,0)$, $(-1.225,0)$, $\min(-2,-80)$, $\max(-1,1)$, $\min(0,0)$ קצה,
 עולה: $-2 < x < -1$, יורדת: $-1 < x < 0$. ג. זוגית.
סרטוט עבור סעיף א: **סרטוט עבור סעיף ד:**



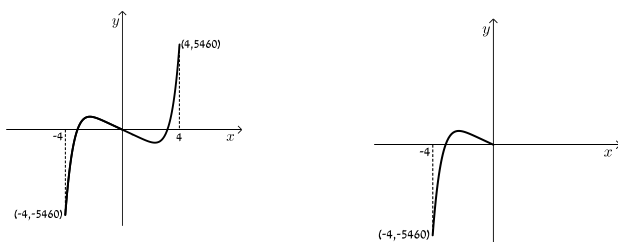
7. א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 5$, חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$
 נקודות קיצון: $\max(5,330)$ קצה, $\min(1,-6)$, $\max(0,0)$ קצה,
 עולה: $1 < x < 5$, יורדת: $0 < x < 1$. ב. אי-זוגית.
סרטוט עבור סעיף א: **סרטוט עבור סעיף ג:**



8. א. $b=0$ ב. i $0 \leq x \leq 2$ ii $(0,0)$, $(1.29,0)$ iii $\min(2,-56)$ קצה,
 iv. עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $1 < x < 2$. ג. אי-זוגית.
סרטוט עבור סעיף ד: **סרטוט עבור חלק v:**



9. א. i $-4 \leq x \leq 0$ ii $(-1,0)$, $(0,0)$ iii $\min(0,0)$ קצה, $\max(-0.723,0.207)$,
 iv. עולה: $-4 < x < -0.723$. ג. אי-זוגית. **סרטוט עבור סעיף ד:** **סרטוט עבור חלק v:**



מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 22 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש

תוכן העניינים

223	1. מציאת תחום הגדרה
225	2. מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה
226	3. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים
231	4. חקירת פונקצית מנה
240	5. חקירת פונקצית שורש
248	6. תחומי קעירות ונקודות פיתול
254	7. חקירת פונקציה עם פרמטר
257	8. פונקציות ללא תבנית מפורשת

מציאת תחום הגדרה:

סיכום כללי:

- כל פולינום מוגדר לכל x .
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$	ב. $f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1$
ג. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$	ד. $f(x) = \frac{2x}{x-3}$
ה. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$	ו. $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$
ז. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$	ח. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8}$
ט. $f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$	י. $f(x) = \frac{4x + 1}{x^2 + 1}$
יא. $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$	יב. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x}$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$	ב. $f(x) = 2\sqrt{x-3}$
ג. $f(x) = \sqrt{x-4}$	ד. $f(x) = 3x\sqrt{1-2x}$
ה. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$	ו. $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$
ז. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$	ח. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x-1}$
ט. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x + 9}}$	י. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3 - 9x}}$
יא. $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x+6}}$	יב. $f(x) = \frac{x+1}{x - \sqrt{2-x}}$
יג. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1- x }}$	יד. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2} - 3}$

תשובות סופיות:

- (1) א. כל x ב. כל x ג. כל x ד. $x \neq 3$ ה. $x \neq \pm 2$ ו. $x \neq \pm 1$
 ז. $x \neq -1, 2$ ח. $x \neq 4, -2$ ט. כל x י. כל x יא. $x \neq \pm 1, 0$ יב. $x \neq \pm 2, 0$
- (2) א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 3$ ג. $x \geq 4$ ד. $x \leq \frac{1}{2}$ ה. $x \leq -5, x \geq 2$
- ו. $x \leq -2, x \geq 1$ ז. $x > -4$ ח. $x \leq -3, -2 \leq x < 1, x > 1$ ט. $x \leq -1.5, x \geq 1$
 י. $-3 < x < 0, x > 3$ יא. $-6 \leq x < -2, x > -2$ יב. $x < 1, 1 < x \leq 2$
 יג. $-1 < x < 1$ יד. $x \geq 7$

מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

שאלות:

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 10x + 9}$.

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

תשובות סופיות:

(3) א. $\min\left(-3, -\frac{3}{8}\right), \max\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$.

ב. עולה: $-3 < x < 3$, יורדת: $x < -3, 3 < x \neq 9$, $x \neq 1$.

מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

סיכום כללי:

אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר: $x = k$ הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים: $g(k) = 0$ וגם: $f(k) \neq 0$. בצורה מתמטית: אם: $\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

או: $\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ או שניהם אז הישר: $x = k$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

הסבר כללי:

בעבור ערכי x שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית. כאשר ערך x מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה (על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם. אם אחרי הצמצום אותו ערך של x עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית, אך אם ערך x זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה: $y = n$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים: $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{f(x)}{g(x)} = n$ או: $\lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{f(x)}{g(x)} = n$ או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם $m > n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m = n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = \frac{a}{b}$.
- אם $m < n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$.

חוקי גבולות לאינסוף:

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר x שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף). עבור ערכי x שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום: $x = \infty$ או $x = -\infty$ בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת x לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

- הגבול: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ניתן לפיצול לשני מקרים:

- אם: $x \rightarrow 0^+$ (מתקרב ל-0 מהכיוון החיובי) אז: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

- אם: $x \rightarrow 0^-$ (מתקרב ל-0 מהכיוון השלילי) אז: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

- הגבול מהצורה $\infty \cdot \infty$ (מכפלת שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty \cdot \infty = \infty$

- הגבול מהצורה $\infty + \infty$ (סכום שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty + \infty = \infty$

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה: $\frac{\infty}{\infty}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x).

- הגבול מהצורה: $\frac{0}{0}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת x).

- הגבול מהצורה: $\infty - \infty$ (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x). במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

שאלות:

(4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

(5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-9}$

(6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$

(7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-15}$

(8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$

(9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+b}{x-b}$

(10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
 ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{2x^2-4x}$
 ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

(13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$

14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$

16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$

17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$

18) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה

נפגשות בנקודה $(-1, 2)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

19) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16, 2)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות:

(4) $x = 2, y = 3$

(5) $x = \pm 3, y = 5$

(6) $y = \frac{2}{3}$

(7) $x = -3, x = 5, y = 0$

(8) אין.

(9) $x = b, y = a$

(10) נקודת אי-הגדרה: $(2, 4)$, $x = 1, y = 1$

(11) נקודת אי-הגדרה: $(0, 0)$, $x = 2, y = \frac{1}{2}$

(12) $x = 2, y = 0$

(13) $x = 4$

(14) $x = 1, y = -1$

(15) $x = 1, y = 2$

(16) $y = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = 3, y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = -3$

(17) $x = 4, x = -4, y = 5, y = -5$

(18) $b = -3, a = 2$

(19) $b = 1, a = 2$

חקירת פונקצית מנה:

שאלות:

(20) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 10x + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \frac{1}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(22) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(23) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 5x + 4}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(24) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(25) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון.
- ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.
- ו. שרטוט סקיצה.

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{ax + 4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x = -8$.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(29) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3x^2}{2x^2 - 8}$.

- א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.
- ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה: $y = \frac{a^2x - 4}{2x^2 - 1}$, $(a$ קבוע).

- ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$ הוא: $m = 4$.
- א. מצא את כל הערכים האפשריים עבור a .
 - ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - ג. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

31 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 1.5x - \frac{5x+1}{x+5}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון וסוגן.
- ג. תחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה.

32 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, $(a \neq 1)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y .
- ד. ענה על הסעיפים הבאים:
 - i. מצא עבור אילו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.
 - ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$. מצא את הערך של a אם נתון כי הפונקציה עולה לכל x .

33 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2+ax+6}{x-2}$, $(a$ פרמטר).

- ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .
- א. מצא את הערך של a .
 - ב. הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א' ומצא:
 - i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
 - iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 - iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
 - ג. עבור אלו ערכי x הפונקציה שלילית?
 - ד. נתון הישר: $y = k$. עבור אלו ערכי k אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

34 נתונה הפונקציה: $y = \frac{x+3}{x-2} + A$, (A פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה (3A, A).

- מצא את ערך הפרמטר A.
 - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל x .
 - מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - נתון הישר: $y = k$.
- האם קיים ערך של k עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

35 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 - 20x + 28}{x^2 + 2a}$.

- ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה (3, 0.5).
- מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.
 - מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 - כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של k הישר: $y = k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

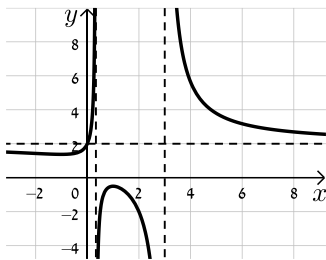
36 ענה על הסעיפים הבאים:

- הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-k}$ יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- y .
- הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x אם ידוע כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון הוא 3.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר $y = -1$. נמק את תשובתך.

תשובות סופיות:

20 א. $x \neq 3, x \neq \frac{1}{3}$ ב. $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

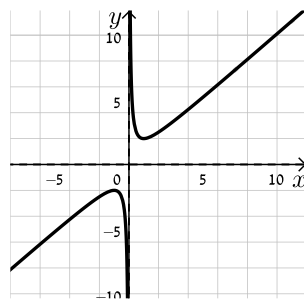
ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$ וגם $x \neq \frac{1}{3}$, תחומי ירידה: $1 < x \neq 3$ או $x < -1$.



ד. $(0, 2)$ ה. $x = 3, x = \frac{1}{3}, y = 2$ ו. להלן סקיצה:

21 א. $x \neq 0$ ב. $\min(1, 2), \max(-1, -2)$

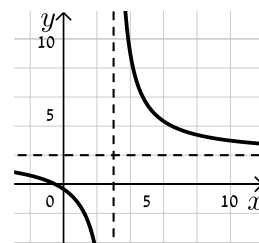
ג. עולה: $x > 1$ או $x < -1$, יורדת: $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ ד. אין



ה. להלן סקיצה:

22 א. $x \neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

ד. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{3}\right)$ ה. $y = 2, x = 3$



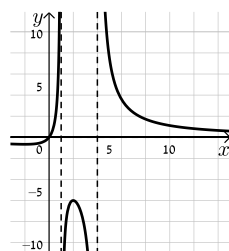
ו. להלן סקיצה:

23 א. $x \neq 1, x \neq 4$ ב. $\min\left(-2, -\frac{2}{3}\right), \max(2, -6)$

ג. תחומי עלייה: $-2 < x < 2$, $x \neq 1$, תחומי ירידה: $x < -2$ או $x > 2$, $x \neq 4$

ד. $(0, 0)$ (אסימפטוטות: $y = 0, x = 1, x = 4$).

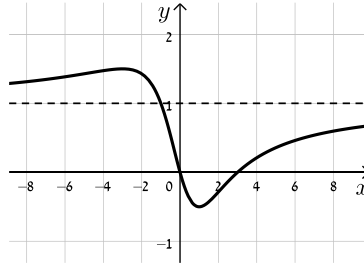
ה. להלן סקיצה:



24) א. כל x ב. $\min\left(1, -\frac{1}{2}\right), \max\left(-3, 1\frac{1}{2}\right)$

ד. $(0,0), (3,0)$ (אסימפטוטה: $y=1$).

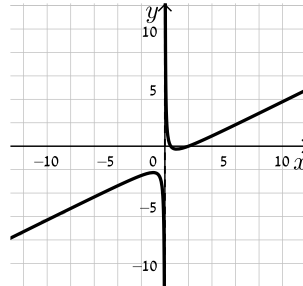
ג. עולה: $x > 1$ או $x < -3$, יורדת: $-3 < x < 1$
ה. להלן סקיצה:



25) א. $x \neq 0$ ב. $\min(1, -0.25), \max(-1, -2.25)$

ג. עולה: $x > 1, x < -1$, יורדת: $-1 < x < 1, x \neq 0$ ד. $(0.5,0), (2,0)$ ה. $x=0$

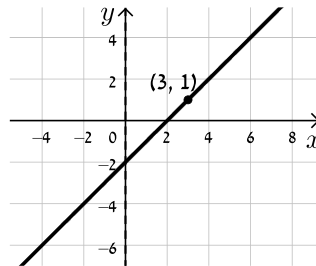
ו. להלן סקיצה:



26) א. $x \neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0,-2), (2,0)$ ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $(3,1)$.

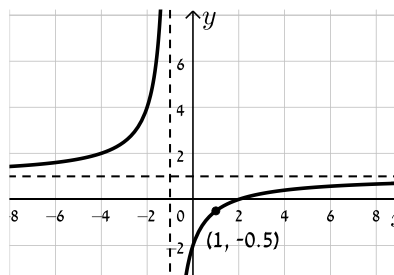
ו. להלן סקיצה:



27) א. $x \neq \pm 1$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0,-2), (2,0)$ ה. $y=1, x=-1$, יש נקודת אי הגדרה: $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

ו. להלן סקיצה:



28 א. $f(x) = \frac{x+4}{x^2}$, $a=1$ ב. עולה: $-8 < x < 0$ יורדת: $x < -8, x > 0$

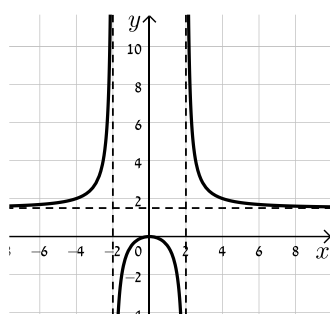
ג. $(-4, 0)$ ד. $x=0, y=0$



ה. להלן סקיצה:

29 א. $x \neq \pm 2$ ב. $\max(0, 0)$ ג. יורדת: $x > 0, x \neq 2$ עולה: $x < 0, x \neq -2$

ד. $(0, 0)$ ה. $x = \pm 2, y = 1.5$ ו. להלן סקיצה:



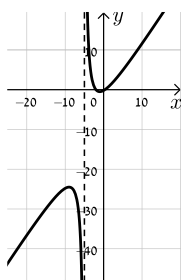
30 א. $a = \pm 2$ ב. $(1, 0), (0, 4)$

ג. המשיק: $y = -4x + 4$ אשר עובר בנקודה $(1, 0)$. נקודת החיתוך: $(1, 0)$.

31 א. $x \neq -5$ ב. $\min(-1, -0.5), \max(-9, -24.5)$

ג. עולה: $x < -9, x > -1$ יורדת: $-9 < x < -1$

ד. $(-2, 0), (\frac{1}{3}, 0), (0, -0.2)$ ה. $x = -5$ ו. להלן סקיצה:



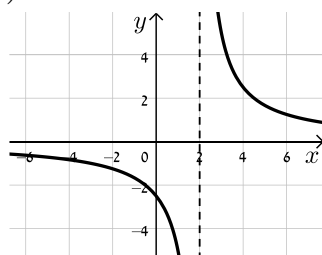
32 א. $x \neq 1$ ב. $x=1, y=1$ ג. $(a, 0), (0, a)$ ד. $a > 1$ i. $a > 1$ ii. $a=2$

33 א. $a = -3$ ב. $x \neq 2$ i. $x \neq 2$ ii. $(0, -3)$ iii. $\max(0, -3), \min(4, 5)$

ג. $x < 2$ ד. $x = 2$ iv. $x = 2$

34 א. $A = -1$ ב. $x \neq 2$ ד. $(0, -2.5)$

ו. לא



ה. להלן סקיצה:

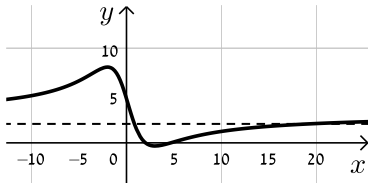
35 א. $f(x) = \frac{3x^2 - 20x + 28}{x^2 + 6}$, $a = 3$. כל x .

ב. $\min\left(3, -\frac{1}{3}\right)$, $\max(-2, 8)$

ד. $(2, 0)$, $\left(0, 4\frac{2}{3}\right)$, $\left(4\frac{2}{3}, 0\right)$

ו. $k = 8$, $-\frac{1}{3}$, 3

ג. עולה: $x < -2$, $x > 3$, יורדת: $-2 < x < 3$



ה. להלן סקיצה:

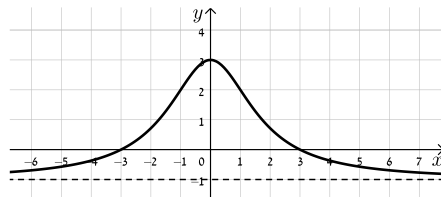
ה. באף נקודה.

ד. $y = -1$

ג. $(3, 0)$, $(-3, 0)$

ב. $k = -3$

ו. להלן סקיצה:



חקירת פונקציות שורש:

שאלות:

(37) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(38) נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(39) נתונה הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{6-x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

40 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

41 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

42 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- x ? נמק והראה חישוב מתאים.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .
- ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

44) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$.

- מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- x ? מצא אותן.
- כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

45) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

46) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, פרמטר a .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y . ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y-x=0$.
- מצא את ערך הפרמטר a .
 - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
 - כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

47) נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{x}$ (k פרמטר חיובי).

- ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x=0.8$.
- מצא את k .
 - האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה? אם כן מצא אותה.
 - מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=0.52$.

48 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$, פרמטר חיובי.

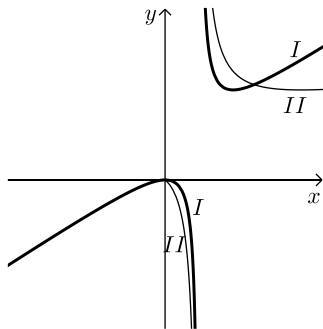
- א. ענה על הסעיפים הבאים:
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות k).
 - מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?
- ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של k בתחום הגדרתה.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x . (בטא באמצעות k).
- ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A. ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה- x והאסימפטוטה הנ"ל הוא: $S = 4$ יח"ש. מצא את ערך הפרמטר k .

49 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

- א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.
- ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
- לפונקציות תחום הגדרה זהה.
 - שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.
 - שתי הפונקציות חותכות את ציר ה- x באותה נקודה.
 - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- y . אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:
- היות והפונקציה $g(x)$ מוגדרת להיות: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ אזי ניתן למצוא את שיעור ה- y של כל נקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה- y של הנקודה בעלת אותו שיעור x על הגרף של $g(x)$ ונעלה אותה בריבוע.
- ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

50) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$, $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

- א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
- לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.
 - לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר: $y = x$.
 - הפונקציות לא חותכות זו את זו.



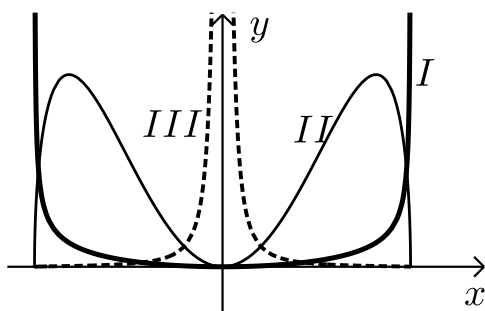
מגדירים פונקציה נוספת והיא: $h(x) = (g(x))^2$

- כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה: $h(x)$.
- האם תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ זהה לשל $g(x)$?
- באיור הסמוך ישנם שני גרפים. קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף מתאר מבין הפונקציות: $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. נמק את בחירותיך.

51) לפניך שלוש פונקציות: $f(x) = x^2\sqrt{k-x^2}$, $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$, $h(x) = \frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$ ($k > 0$)

- א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
- לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$.
 - קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה- x כלל.
 - הפונקציות: $h(x)$ ו- $g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן (כאשר אחת עולה השנייה יורדת).
 - לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A(0, \sqrt{12})$ על ציר ה- y . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x שאינה בראשית הוא: $d = 6$.

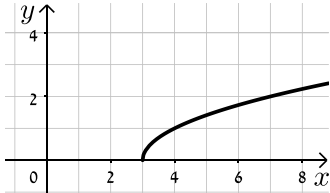


- מצא את k .
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
- לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של שלושת הפונקציות. קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף שייך לכל פונקציה.

תשובות סופיות:

(37) א. $x \geq 3$ ב. קצה $\min(3,0)$ ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה.

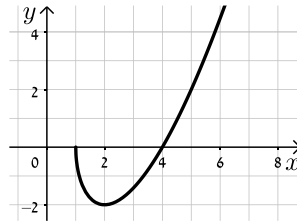
ד. $(3,0)$ ה. אין. ו. להלן סקיצה:



(38) א. $x \geq 1$ ב. קצה $\max(1,0)$, $\min(2,-2)$

ג. עולה: $x > 2$, יורדת: $1 < x < 2$ ד. $(1,0), (4,0)$ ה. אין.

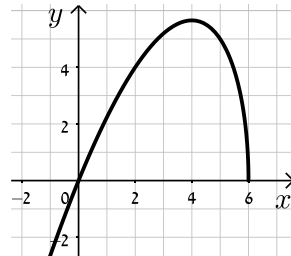
ו. להלן סקיצה:



(39) א. $x \leq 6$ ב. קצה $\min(6,0)$, $\max(4,4\sqrt{2})$

ג. עלייה: $x < 4$, ירידה: $4 < x < 6$ ד. $(6,0), (0,0)$

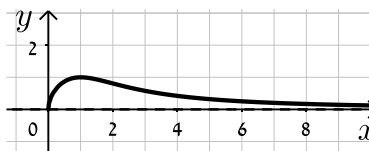
ה. להלן סקיצה:



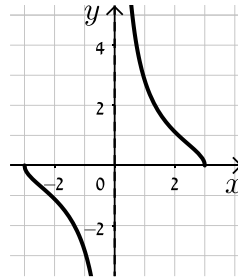
(40) א. $x \geq 0$ ב. קצה $\min(0,0)$, $\max(1,1)$

ג. עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $x > 1$ ד. $(0,0)$ ה. $y = 0$.

ו. להלן סקיצה:

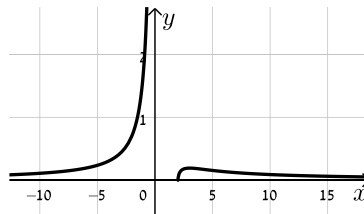


- (41)** א. $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה
 ג. עולה: אף x , יורדת: $-3 \leq x \leq 3, x \neq 0$ ד. $(-3,0), (3,0)$



ה. $x=0$. ו. להלן סקיצה:

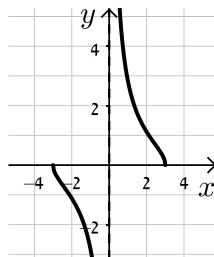
- (42)** א. $x < 0, x \geq 2$ ב. $\min(2,0), \max\left(3, \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ ג. $(2,0)$ ד. להלן סקיצה:



- (43)** א. $(2,0)$ ב. לא ג. $y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$ ד. $S = 4\sqrt{2}$

- (44)** א. $x \neq 1, x \geq 0$ ב. $(9,6)$ ג. $y = 6$

- (45)** א. $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה
 ג. עולה: אף x , יורדת: $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ד. $(-3,0), (3,0)$



ה. $x=0$. ו. להלן סקיצה:

- (46)** א. $a=1$ ב. $-3 < x < 3$ ג. $(-1.5, \sqrt{3})$ ד. יורדת: $-3 < x < -1.5$, עולה: $-1.5 < x < 3$

- (47)** א. $k=0.48$ ב. כן, $(0.6, 0.57)$ ג. $y = 0.74x + 0.1352$

- (48)** א. i. $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$ ii. $x = \pm\sqrt{k}$ ב. $f'(x) = \frac{k^2}{(k-x^2)^{1.5}} > 0$ ג. $y = \sqrt{k}x$ ד. $k=4$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}} \quad \text{א. (49)}$$

ב. i. לא נכון ii. נכון

$$f(x) : \left(0, \frac{1}{2}\right), g(x) : \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{ג.}$$

iii. נכון iv. נכון

ד. אסוף צודק.

$$h(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad \text{ב.}$$

iii. נכון

א. i. לא נכון ii. נכון (50)

$$\text{I} = h(x), \text{II} = f(x) \quad \text{ד.}$$

$$h(x) : x \neq 1, \text{ג.}$$

iv. נכון

iii. נכון

ii. לא נכון

i. לא נכון (51)

$$\text{ב. } k = 24 \quad \text{ג. } \min(0,0), \max(\pm 4, 32\sqrt{2})$$

$$\text{ד. } \text{I} = g(x), \text{II} = f(x), \text{III} = h(x)$$

תחומי קעירות ונקודות פיתול:

סיכום כללי:

תחומי קעירות – הגדרה:

- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) < 0$.
- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) > 0$.

נקודת פיתול – הגדרות:

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת: $f''(x) = 0$ כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

שאלות:

(52) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

(53) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$.

(54) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$.

(55) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = x(x-2)^3$.

56 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a}{x^2 + b}$, a, b פרמטרים.

הנקודה $(-1, 1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה.
מצא את ערכי הפרמטרים a, b .

57 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

58 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x - \sqrt{x}}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

59) חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

- i. מציאת תחום הגדרה.
- ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
- iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
- vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.
- viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{ב.} \qquad f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{ד.} \qquad f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad \text{ו.} \qquad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad \text{ח.} \qquad f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad \text{ז.}$$

הערה: בסעיפים ו ו-ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.

תשובות סופיות:

52 (1,7), (2,16), קעירות כלפי מעלה: $x > 2$ או $x < 1$, קעירות כלפי מטה: $1 < x < 2$.

53 (2,1), קעירות כלפי מעלה: $x > 2$, קעירות כלפי מטה: $0 \neq x < 2$.

54 קיצון: $\min(2,4)$, פיתול: $\left(4, \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

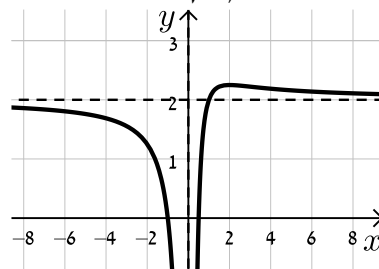
55 קיצון: $\min\left(\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)$, פיתול: (1,-1), (2,0).

56 $a = 4, b = 3$.

57 א. $x \neq 0$. ב. $\max\left(2, 2\frac{1}{4}\right)$. ג. עולה: $0 < x < 2$; יורדת: $x > 2, x < 0$.

ד. $\left(\frac{1}{2}, 0\right), (-1, 0)$. ה. $x = 0, y = 2$. ו. $\left(3, 2\frac{2}{9}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $x > 3$, קעירות כלפי מטה: $0 \neq x < 3$.

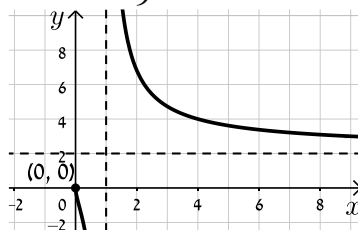


ח. להלן סקיצה:

58 א. $1 \neq x > 0$. ב. אין. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.

ד. אין. ה. $x = 1, y = 2$ נקודת אי הגדרה: (0,0). ו. $\left(\frac{1}{9}, -1\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{9}$, קעירות כלפי מטה: $\frac{1}{9} < x < 1$.



ח. להלן סקיצה:

59 א. i. $x \neq 0$. ii. (1,0). iii. $x = 0, y = 0$. iv. $\max(2, 0.25)$.

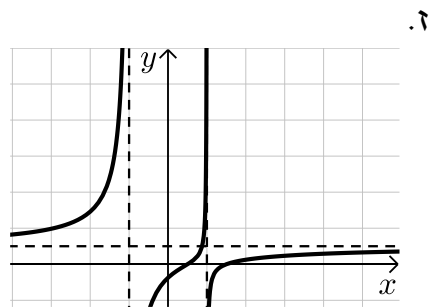
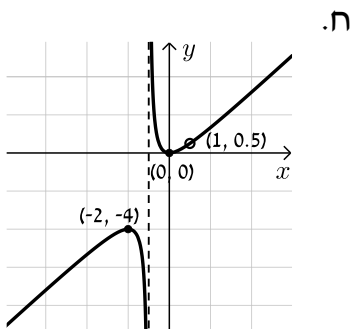
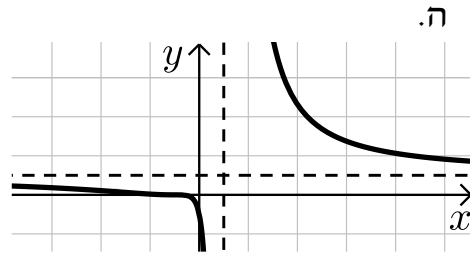
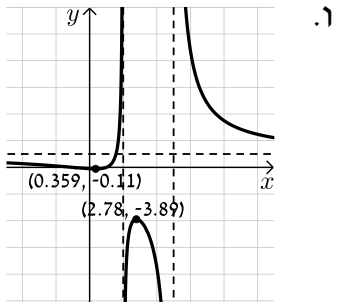
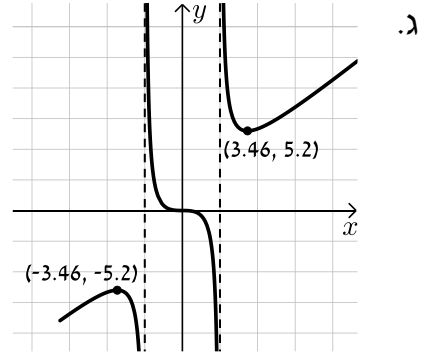
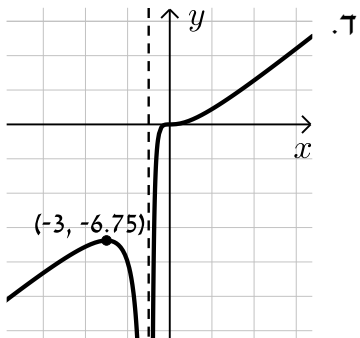
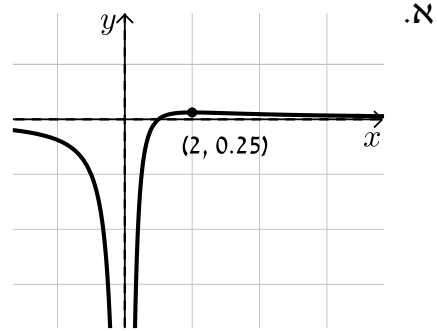
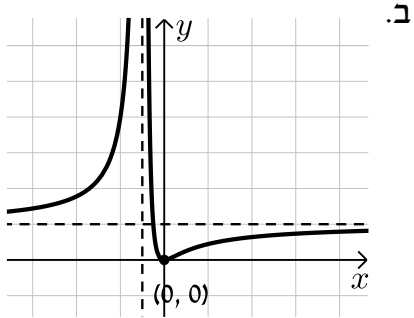
v. עולה: $0 < x < 2$, יורדת: $x < 0, x > 2$. vi. $\left(3, \frac{2}{9}\right)$.

vii. קעורה כלפי מעלה: $x > 3$, קעורה כלפי מטה: $0 < x < 3, x < 0$.

ב. i. $x \neq -1$. ii. (0,0). iii. $x = -1, y = 2$. iv. $\min(0,0)$.

- v. עולה: $x < -1$, $x > 0$, יורדת: $-1 < x < 0$.vi $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $-1 < x < \frac{1}{2}$, קעורה כלפי מטה: $x < -1$, $x < \frac{1}{2}$
- ג. i. $x \neq \pm 2$.ii $(0,0)$.iii $x = \pm 2$
- iv. $\min(\sqrt{12}, 5.2)$, $\max(-\sqrt{12}, -5.2)$
- v. עולה: $x > \sqrt{12}$, $x < -\sqrt{12}$, יורדת: $2 < x < \sqrt{12}$, $-2 < x < 2$, $-\sqrt{12} < x < -2$.vi $(0,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $x > 2$, $-2 < x < 0$, קעורה כלפי מטה: $0 < x < 2$, $x < -2$
- ד. i. $x \neq -1$.ii $(0,0)$.iii $x = -1$.iv $\max(-3, -6.75)$
- v. עולה: $x > -1$, $x < -3$, יורדת: $-3 < x < -1$.vi $(0,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $x > 0$, קעורה כלפי מטה: $-1 < x < 0$, $x < -1$
- ה. i. $x \neq 1$.ii $(-1,0), (0,-1)$.iii $x = 1, y = 1$.iv אין
- v. יורדת בכל ת.ה. .vi $\left(-3, \frac{1}{8}\right), (-1,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $-3 < x < -1$, $x > 1$, קעורה כלפי מטה: $-1 < x < 1$, $x < -3$
- ו. i. $x \neq 2, 5$.ii $(0, -0.1), (-1, 0), (1, 0)$.iii $x = 2, x = 5, y = 1$
- iv. $\min(0.359, -0.11)$, $\max(2.78, -3.89)$
- v. עולה: $2 < x < 2.78$, $0.359 < x < 2$, יורדת: $x > 5$, $2.78 < x < 5$, $x < 0.359$
- ז. i. $x \neq \pm 2$.ii $(3,0), (1,0), (0,-0.75)$.iii $x = \pm 2, y = 1$
- iv. אין .v יורדת בכל ת.ה.
- ח. i. $x \neq \pm 1$.ii $(0,0)$.iii $x = -1$.iv $\min(0,0)$, $\max(-2,-4)$
- v. עולה: $x > 0$, $x < -2$, $x \neq 1$, יורדת: $-1 < x < 0$, $-2 < x < -1$
- vi. אין .vii קעורה כלפי מעלה: $x > -1$, $x \neq 1$, קעורה כלפי מטה: $x < -1$

סקיצות:



חקירת פונקציה עם פרמטר:

סיכום כללי:

סיווג נקודות קיצון באמצעות y'' :

אם הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת קיצון אז :

- אם $f''(x_1) > 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מינימום.
- אם $f''(x_1) < 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מקסימום.

שאלות:

(1) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 12x$.

(2) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^2 - 6x - 16$.

(3) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3b^2x$, $b > 0$ פרמטר. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2}$ ($a > 0$). חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1-x^2}{(x-b)^2}$, $(b > 1)$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x\sqrt{b^2 - x^2}$, $(b > 0)$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - m}{ax - 4}$, a, m פרמטרים קבועים כאשר: $a > 0$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .

- א. מצא את הערך של הפרמטר m .
- ב. הצב את הערך של m שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות a את:
 - i. תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 - iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות a בסעיף הקודם.
- ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- y נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר a .
- ה. נתון הישר: $y = k$. מצא עבור אילו ערכים של k אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

תשובות סופיות:

(1) $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$

(2) $\min(3, -25)$

(3) $\min(b, -2b^3)$, $\max(-b, 2b^3)$

(4) א. כל x ב. $\max\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $\min\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$

ג. עולה: $-a < x < a$ יורדת: $x < -a$, $x > a$

ד. $(0, 0)$ ה. אסימפטוטה אופקית: $y = 0$

(5) א. $x \neq b$ ב. $\max\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2 - 1}\right)$ ג. עולה: $x > b$, $x < \frac{1}{b}$ יורדת: $\frac{1}{b} < x < b$

ד. $\left(0, \frac{1}{b^2}\right)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ ה. $x = b$, $y = -1$

(6) א. $-b \leq x \leq b$ ב. $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}, -2b^2\right)$, $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}}, 2b^2\right)$, $\min(-b, 0)$ קצה,

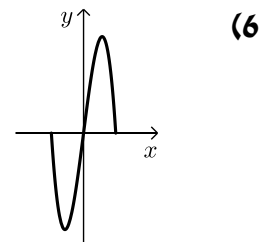
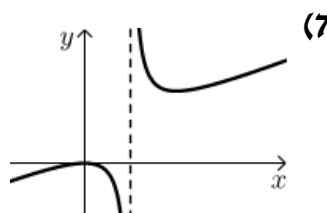
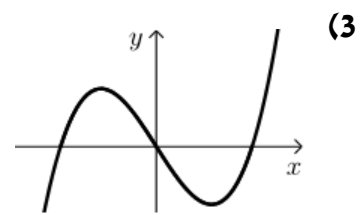
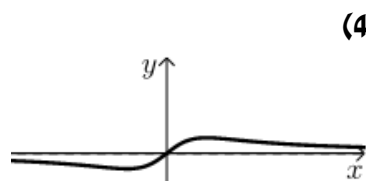
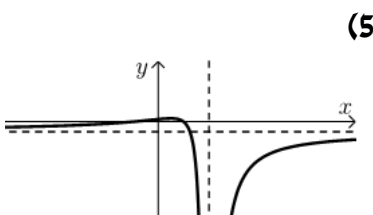
ג. עולה: $-\frac{b}{\sqrt{2}} < x < \frac{b}{\sqrt{2}}$, יורדת: $\frac{b}{\sqrt{2}} < x < b$, $-b < x < -\frac{b}{\sqrt{2}}$

ד. $(b, 0)$, $(-b, 0)$, $(0, 0)$

(7) א. $m = 0$ ב. $x \neq \frac{4}{a}$ ב. ii. $\max(0, 0)$, $\min\left(\frac{8}{a}, \frac{16}{a^2}\right)$

ג. iii. $x = \frac{4}{a}$ ד. $a = 2$ ה. $0 < k < 4$

סקיצות לשאלות:



פונקציות ללא תבנית מפורשת:

סיכום כללי:

הגדרת פונקציה:

- פונקציה f היא התאמה בין ערך x לערך y ומסומנת באופן הבא: $f: x \rightarrow y$.
- כך שלכל x מתאים ערך אחד בלבד של y . סימון אחר: $y = f(x)$.
- הנגזרת של פונקציה $f(x)$ מסומנת $f'(x)$.

כללי הגזירה לפי כלל השרשרת:

- סימון הנגזרת: $(f(x))' = f'(x)$
- גזירה של פונקציה בחזקה: $(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$
- גזירה של הרכבת פונקציות: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

שאלות:

- (1) הפונקציה $f(x)$ מקיימת: $f(1) = 3$ ו- $f'(1) = -2$.
חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $f(1) + 4$

ב. $f'(1) + 4$

ג. $\frac{f(1)+1}{f'(1)-1}$

ד. $\sqrt{f(1)+f'(1)}$

- (2) נתונה פונקציה f המקיימת: $f(4) = 0$ ו- $f'(4) = 1$.

מגדירים: $g(x) = 2x + f(2x)$.

חשב את $g(2)$ ואת $g'(2)$.

- (3) נתונה פונקציה המקיימת: $f(8) = -1$ ו- $f'(8) = 1$.
- א. נתון: $g(x) = x^2 \sqrt{f(4x) + f'(x+6)}$. חשב את $g(2)$.
- ב. נתון: $h(x) = \frac{f(x+2) + x + 2}{f'(14-x) - 14 + x}$. חשב את $h(6)$.
- (4) נתונה פונקציה המקיימת: $f(9) = -4$, $f'(9) = 3$.
- מגדירים: $g(x) = f^2(3x) + f'(x^2)$. חשב את $g(3)$.
- (5) פונקציה f מקיימת: $f(4) = 2$, $f'(4) = 1$.
- מגדירים: $g(x) = f^2(x) + f(x) + x$.
- חשב את $g(4)$ ואת $g'(4)$.
- (6) פונקציה f מקיימת: $f(1) = -3$, $f'(1) = 3$. מגדירים: $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{x + f(x)}$.
- חשב את $g(1)$ ואת $g'(1)$.
- (7) פונקציה f מקיימת: $f(-2) = 6$, $f'(-2) = 2$. מגדירים: $g(x) = \sqrt{f^2(x) + 1}$.
- חשב את $g(-2)$ ואת $g'(-2)$.
- (8) פונקציה f מקיימת: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$. מגדירים: $g(x) = 3x \cdot f(2x)$.
- חשב את $g\left(\frac{1}{4}\right)$ ואת $g'\left(\frac{1}{4}\right)$.
- (9) פונקציה f מקיימת: $f(6) = \frac{2}{3}$, $f'(6) = -\frac{3}{2}$. מגדירים: $g(x) = \frac{x+3+f(x+3)}{f(2x)+3}$.
- חשב את $g(3)$ ואת $g'(3)$.

(10) נתונה פונקציה המקיימת: $f(8) = -3$. מגדירים: $g(x) = \frac{f(4x)+1}{f(x+6)+2}$.

א. חשב את $g(2)$.

ב. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2) = 1$.

ג. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2) = (f'(8))^2$ וכי $f'(8) < 0$.

(11) נתונה פונקציה המקיימת: $f(3) = -2$.

מגדירים: $g(x) = \frac{x^2 \cdot f(x-2)}{f(2x-7)}$ וידוע כי $g'(5) = -15$.

חשב את $g(5)$ ואת $f'(3)$.

(12) נתונה פונקציה שמקיימת: $f(4) = \frac{1}{2}$.

מגדירים: $g(x) = x^2 \cdot f(x^2) + f'^2(x^2)$.

א. הבע את $g'(x)$ באמצעות f .

ב. חשב את $g(-2)$ ואת $g(2)$ אם ידוע כי $f'(4) = 1$.

ג. חשב את $f'(4)$ אם ידוע כי $g'(2) = 11$ ו- $f''(4) = \frac{1}{4}$.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. 7} \quad \text{ב. 2} \quad \text{ג. } -\frac{4}{3} \quad \text{ד. 1}$$

$$(2) \quad g(2) = 4, g'(2) = 4$$

$$(3) \quad \text{א. } g(2) = 0 \quad \text{ב. } h(6) = -1$$

$$(4) \quad g(3) = 19$$

$$(5) \quad g(4) = 10, g'(4) = 6$$

$$(6) \quad g(1) = 1.5, g'(1) = 3$$

$$(7) \quad g(-2) = \sqrt{37}, g'(2) = \frac{12}{\sqrt{37}}$$

$$(8) \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}, g'\left(\frac{1}{4}\right) = 11$$

$$(9) \quad g(3) = 1\frac{9}{11}, g'(3) = \frac{327}{242} = 1.351$$

$$(10) \quad \text{א. } g(2) = 2 \quad \text{ב. } f'(8) = -\frac{1}{2} \quad \text{ג. } f'(8) = -2$$

$$(11) \quad g(5) = 25, f'(3) = -2$$

$$(12) \quad g'(x) = 2xf(x^2) + 2x^3f'(x^2) + 4xf'(x^2)f''(x^2) \quad \text{א.}$$

$$\text{ב. } g(2) = 3, g'(-2) = 3 \quad \text{ג. } f'(4) = \frac{1}{2}$$

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 23 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות

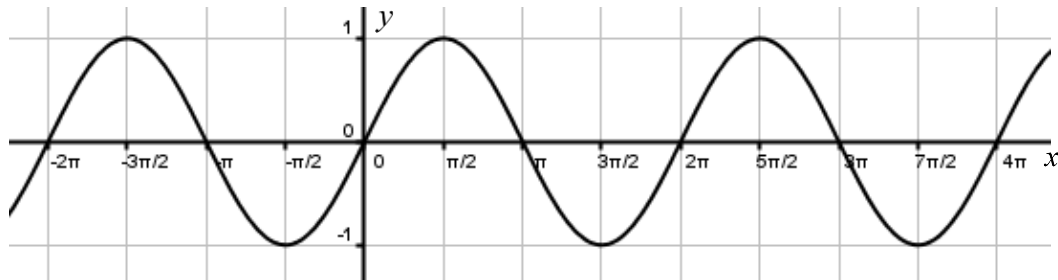
תוכן העניינים

261	1. הגדרות כלליות
263	2. גזירה של פונקציות טריגונומטריות
265	3. שאלות עם משיקים
267	4. מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות
268	5. מציאת נקודות קיצון
269	6. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים
270	7. מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות
271	8. חקירת פונקציה טריגונומטרית

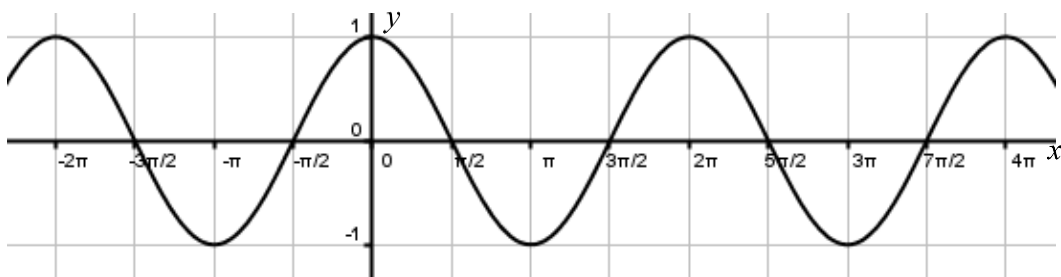
הגדרות כלליות:

סיכום כללי:

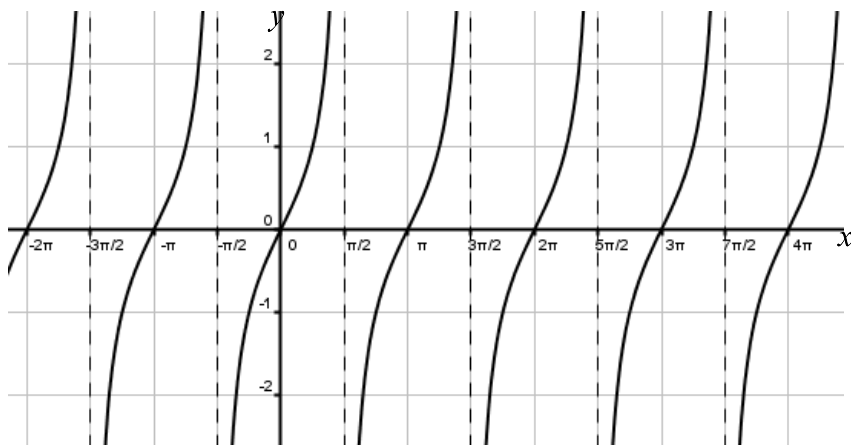
תיאור גרפי של פונקציית הסינוס $y = \sin x$:



תיאור גרפי של פונקציית הקוסינוס $y = \cos x$:



תיאור גרפי של פונקציית הטנגנס $y = \tan x$:



הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות:

הנגזרת	הפונקציה
$y' = \cos x$	$y = \sin x$
$y' = -\sin x$	$y = \cos x$
$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \tan x$
$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y = \cot x$

זוגיות של פונקציות:

- פונקציה $f(x)$ תקרא זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x) = f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תקרא אי-זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x) = -f(-x)$.
- פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הנ"ל אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

מחזוריות של פונקציות:

(1) פונקציה $f(x)$ תיקרא מחזורית במחזור T אם היא מקיימת: $f(x+T) = f(x)$ לכל x בתחום הגדרתה.

(2) מחזור של פונקציות טריגונומטריות:

- הפונקציה $f(x) = \sin x$ מחזורית במחזור $T = 2\pi$ שכן: $\sin(x+2\pi) = \sin x$.
- הפונקציה $f(x) = \cos x$ מחזורית במחזור $T = 2\pi$ שכן: $\cos(x+2\pi) = \cos x$.
- הפונקציה $f(x) = \tan x$ מחזורית במחזור $T = \pi$ שכן: $\tan(x+\pi) = \tan x$.
- הפונקציה $f(x) = \cot x$ מחזורית במחזור $T = \pi$ שכן: $\cot(x+\pi) = \cot x$.

גזירה של פונקציות טריגונומטריות:

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin x + 3 \cos x + x$

ג. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

ב. $f(x) = 2x \sin x + 4 \tan x$

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin 3x + 2 \cos 5x$

ב. $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin^3 x$

ג. $f(x) = \sin^2 x$

ה. $f(x) = \cos^2 2x$

ב. $f(x) = 2 \cos^4 x$

ד. $f(x) = \sin^3 2x$

ו. $f(x) = \tan^2 4x$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{\sin 3x}$

ב. $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

ג. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

ב. $f(x) = \sin^4 2x - \cos^4 2x$

תשובות סופיות:

$$\frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} \cdot \lambda \quad 2 \sin x + 2x \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} \cdot \beta \quad \cos x - 3 \sin x + 1 \cdot \aleph \quad (1)$$

$$\cdot -\frac{2}{1 + \sin 2x} \cdot \beta \quad 3 \cos 3x - 10 \sin 5x \cdot \aleph \quad (2)$$

$$\sin 2x \cdot \lambda \quad -8 \cos^3 x \sin x \cdot \beta \quad 3 \sin^2 x \cdot \cos x \cdot \aleph \quad (3)$$

$$\cdot \frac{8 \tan 4x}{\cos^2 4x} \cdot \lambda \quad -2 \sin 4x \cdot \eta \quad 6 \sin^2 2x \cos 2x \cdot \delta$$

$$\cdot \frac{\cos^2 2x + 1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}} \cdot \beta \quad \frac{3 \cos 3x}{2 \sqrt{\sin 3x}} \cdot \aleph \quad (4)$$

$$\cdot -\sin 4x \cdot \lambda \quad 4 \sin 4x \cdot \beta \quad 2 \sin 2x \cdot \aleph \quad (5)$$

שאלות עם משיקים:

שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \cos x$ בנקודה $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \sin 2x$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{2}$.

(8) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \tan 3x$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{9}$.

(9) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה: $f(x) = 4\sin^2 x$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = 1$ בתחום $[0, \pi]$.

(10) שיפוע המשיק לפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sin x + a}$, a (פרמטר) בנקודה שבה $y = 1$

בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ הוא $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

מצא את ערך הפרמטר a .

(11) נתונה הפונקציה: $f(x) = a\sin^2 x - 5\sin x + ax$, a (פרמטר) בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

ידוע כי הישר: $y = ax - 2$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא: $m = 2$.

ג. האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק דרכן הוא 2? נמק את תשובתך.

ד. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

(12) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x^2 + \cos^2 x$, $g(x) = x^2 + \sin^2 x$.

א. הוכח כי ההפרש: $f(x) - g(x)$ שווה ל- $\cos 2x$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום: $-\pi < x < \pi$.

ג. ישר $x = t$, $(0 < t < 1)$ חותך את הגרפים בנקודות A ו-B ומהן מעבירים משיקים

לפונקציות. ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק של גרף הפונקציה $g(x)$ לשיפוע

המשיק של גרף הפונקציה $f(x)$ הוא 1.

מצא את כל הערכים האפשריים עבור t .

תשובות סופיות:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (6)$$

$$y = -2x + \pi \quad (7)$$

$$y = 12x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} \quad (8)$$

$$y = 2\sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 1, y = -2\sqrt{3}x + \frac{5\pi\sqrt{3}}{3} + 1 \quad (9)$$

$$a = \frac{1}{2} \quad (10)$$

$$f(x) = 2\sin^2 x - 5\sin x + 2x, a = 2. \text{ א. } \left(\frac{\pi}{2}, \pi - 3\right). \text{ ב. } \left(\frac{\pi}{2}, \pi - 3\right). \text{ ג. לא. } \tau. y = 2x - 3. \quad (11)$$

$$\left(-\frac{3\pi}{4}, 6.05\right), \left(-\frac{\pi}{4}, 1.11\right), \left(\frac{3\pi}{4}, 6.05\right), \left(\frac{\pi}{4}, 1.11\right). \text{ ב. } t = \frac{\pi}{12}. \text{ ג. } \quad (12)$$

מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות:

שאלות:

13 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

ב. $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$, $[-\pi, \pi]$

א. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos 2x}$, $[0, 2\pi]$

ג. $f(x) = \tan x$, $[0, 2\pi]$

תשובות סופיות:

ב. $-\pi \leq x \leq \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$

13 א. $0 \leq x \leq 2\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

ג. $0 \leq x \leq 2\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

מציאת נקודות קיצון:

שאלות:

14 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \sin x + \cos x$ בתחום: $[0, 2\pi]$.

15 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$ בתחום: $[0, 2\pi]$.

16 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$ בתחום: $[0, 2\pi]$.

17 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{3} \sin^3 x - 2 \sin x$ בתחום: $[0, 1.5\pi]$.

18 לפונקציה: $f(x) = a \sin x + b \sin^3 x$ (פרמטרים a, b) יש נקודת קיצון ששיעוריה $\left(\frac{7\pi}{6}, -1\right)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות:

14 קצה $\max(2\pi, 1)$, $\min\left(\frac{5}{4}\pi, -\sqrt{2}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, קצה $\min(0, 1)$

15 קצה $\max(2\pi, -\pi)$, $\min\left(\frac{5}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{6}\pi\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$, קצה $\min(0, 0)$

16 קצה $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ מוחלט, קצה $(0, -1)$, קצה $\min(2\pi, -1)$

17 $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 2\frac{2}{15}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{2}, -2\frac{2}{15}\right)$

18 $b = -4$, $a = 3$

מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

שאלות:

(19) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin 3x}$ בתחום: $[0, \pi]$.

(20) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$ בתחום: $[0, \pi]$.

(21) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \tan x$ בתחום: $[-\pi, \pi]$.

תשובות סופיות:

$$. x = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, x = \pi \quad (19)$$

$$. x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi \quad (20)$$

$$. x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2} \quad (21)$$

מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות:

שאלות:

22 מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של הפונקציה $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x$ בתחום: $[0, 2\pi]$.

תשובות סופיות:

22 נקודות פיתול: $\left(\frac{7}{6}\pi, 1\frac{1}{4}\right), \left(\frac{11}{6}\pi, 1\frac{1}{4}\right)$, קעור מעלה: $0 < x < \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$
 קעור מטה: $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$.

חקירת פונקציה טריגונומטרית:

שאלות:

(23) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2\cos x$ בתחום $[0, 2\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(24) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ בתחום $[0, \pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(25) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4\sin 2x - 2$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים את הישר $y = k$ היעזר בסקיצה ומצא לאילו ערכי k הישר יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.
- העבירו ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט שלה. כמו כן העבירו מנקודה זו אנך לציר x . מצא את שטח המלבן הנוצר על ידי הצירים, המשיק והאנך.

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos x + \frac{1}{m} \sin mx$, $1 < m < 3$, (m פרמטר).

הנגזרת של הפונקציה מתאפסת כאשר: $x = -\frac{\pi}{2}$.

- מצא את ערך הפרמטר m .
- האם הנקודה שבה: $x = -\frac{\pi}{2}$ היא נקודת קיצון? אם כן קבע את סוגה. אם לא נמק מדוע.
- מצא כמה נקודות קיצון מקומיות יש לגרף הפונקציה בתחום: $0 < x < 2\pi$.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.

(28) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \cos x \cdot (\sin x + 1)$ בתחום: $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$ בתחום הנתון?

(29) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$.

- מצא בתחום $[0, \pi]$ את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה ואת נקודות הקיצון שלה.
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi, \pi]$.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x - 3 \tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(31) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi < x < 0.25\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

(32) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan(x^2 - 4x)$ בתחום $[0, 4]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(33) נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cos x - x$ בתחום: $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x הנגזרת של הפונקציה מתאפסת.

- ii. ידוע גם כי: $f'(-3.67) = 0$, $f'(3.67) = 0$ וכי אין נקודות נוספות בתחום הנתון שבהן הנגזרת מתאפסת. קבע אלו נקודות, מבין נקודות החיתוך שמצאת, הן נקודות קיצון ואלו אינן נקודות קיצון. מצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

(34) נתונה הפונקציה: $y = (\cos x + k)^2$, פרמטר, בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{2\pi}{3}$.

- מצא את k וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת המקסימום שאיננה מוחלטת בתחום הנתון.
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות מינימום שאינן מוחלטות? אם כן מהן?

(35) נתונה הפונקציה: $f(x) = m \sin x + k \cos^2 x$, (פרמטר m).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \pi$ שמשוואתו: $y = -6x + 6\pi + \sqrt{7}$.

- מצא את ערכי הפרמטרים k ו- m .
- מצא את נקודות הקיצון בתחום: $-0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע עפ"י הסקיצה בכמה נקודות גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בתחום הנ"ל.

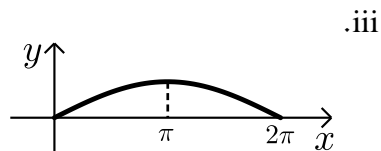
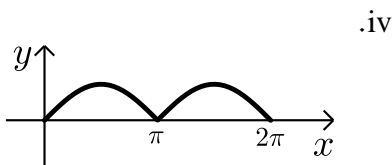
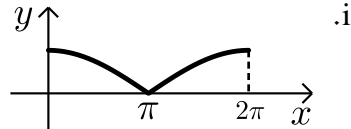
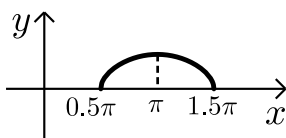
(36) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan x + kx$, (פרמטר k), בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

- מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנתון.
- הפונקציה: $g(x) = \tan^2 x + kx$ חותכת את הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
- מצא את ערך הפרמטר k , ($k \neq 0$).
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

37) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt{-\cos x}$, $g(x) = \sqrt{\cos x + 1}$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$ והפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

- א. האם הגרפים חותכים את ציר ה- x בתחום הנתון? הראה חישוב מתאים.
 ב. האם הגרפים חותכים זה את זה בתחום הנתון? אם כן מצא את נקודות החיתוך.
 ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגה.
 ד. לפניך ארבעה איורים: i, ii, iii, iv.
 קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזה איור מתאר את הגרף של $f(x)$ ואיזה מתאר את הגרף של $g(x)$. נמק.



תשובות סופיות:

23 א. $0 \leq x \leq 2\pi$.

ב. $\max(2\pi, 2\pi + 2)$ קצה, $\min\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$, $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$ קצה, $\min(0, 2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$.

ד. $(0, 2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$, קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

24 א. $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$. ה. אנכית: $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$.

25 א. $(0, -2)$, $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$, $\left(\frac{5}{12}\pi, 0\right)$.

ב. $\min(0, -2)$, $\max\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$, $\min\left(\frac{3\pi}{4}, -6\right)$, $\max(\pi, -2)$.

ד. $-6 < k < 2$ וגם $k \neq -2$. ה. $\frac{\pi}{2}$.

26 א. $(\pi, 0)$, $(0, -2)$.

ב. $\max(0, -2)$, $\min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right)$, $\max(\pi, 0)$, $\min\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right)$, $\max(2\pi, -2)$.

ג. עולה: $\frac{\pi}{3} < x < \pi$, $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$, יורדת: $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$, $0 < x < \frac{\pi}{3}$.

27 א. $m = 2$. ב. נקודת פיתול. ג. 2 נקודות.

ד. $(0.5\pi, 0)$, $(1.5\pi, 0)$.

28 א. $(0, 1)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$. ב. $(0, 1)$, $\left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right)$, $\left(\frac{5}{6}\pi, -1.29\right)$, $(1.5\pi, 0)$.

ד. 2 פתרונות.

29 א. חיתוך: $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, קיצון: $\min(\pi, -2)$, קצה: $\min(0, 0)$, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

$$(30) \text{ א. } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ב. קצה } \min\left(\frac{2}{3}\pi, 13.57\right), \max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right), \text{ קצה } \min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right)$$

$$\text{ג. תחומי עלייה: } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \text{ תחומי ירידה: } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ד. } (0,0) \quad \text{ה. אנכית: } x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ו. } (0,0)$$

$$\text{ז. קעירות כלפי מעלה: } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ או } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0, \text{ קעירות כלפי מטה: } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$(31) \text{ א. } (0,0), (\pm 0.23\pi, 0) \quad \text{ב. } x = \pm 0.25\pi \quad \text{ג. } \min\left(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}\right), \max\left(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27}\right)$$

$$(32) \text{ א. } 0 \leq x \leq 4 \text{ וגם } x \neq 0.44, x \neq 3.56$$

$$\text{ב. קצה } \max(0,0), \min(2, -1.16), \max(4,0)$$

$$(33) \text{ א. } (0,0), (2\pi,0), (-2\pi,0)$$

$$\text{ב. ii. } \min(-2\pi,0), \max(2\pi,0), (0,0) \text{ פיתול}$$

$$(34) \text{ א. } y = (\cos x + 0.5)^2, k = 0.5 \quad \text{ב. } (\pi, 0.25) \quad \text{ג. לא}$$

$$(35) \text{ א. } m = 6, k = \sqrt{7} \quad \text{ב. } (-0.5\pi, -6), (0.5\pi, 6), (1.5\pi, -6) \quad \text{ג. בשתי נקודות}$$

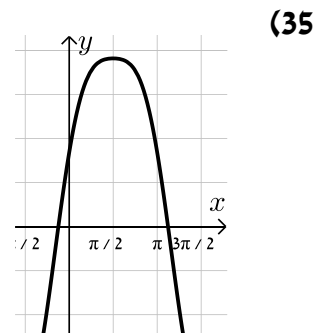
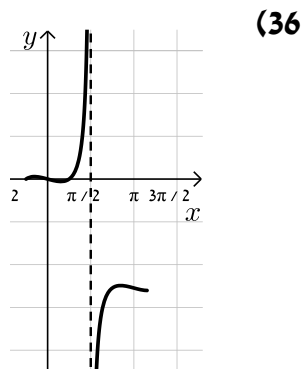
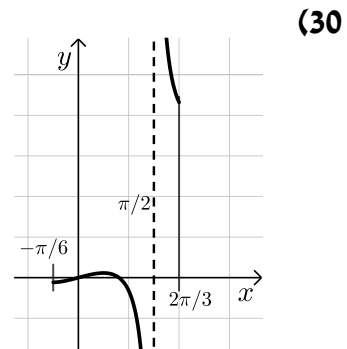
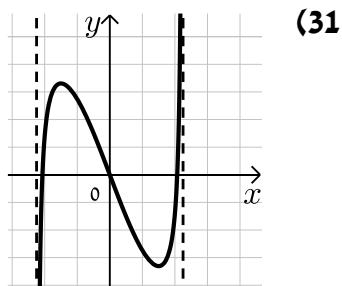
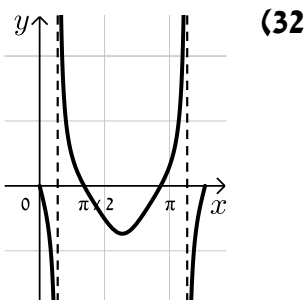
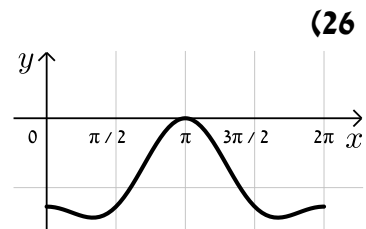
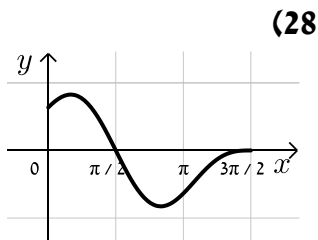
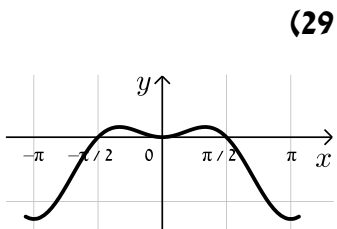
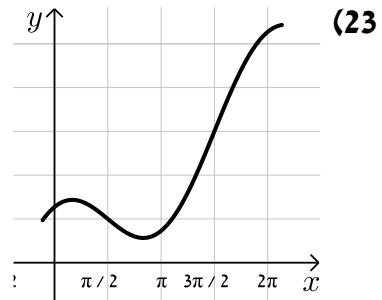
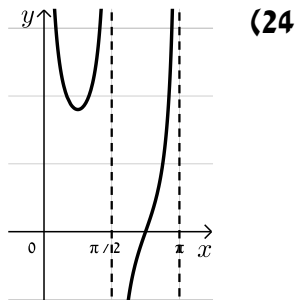
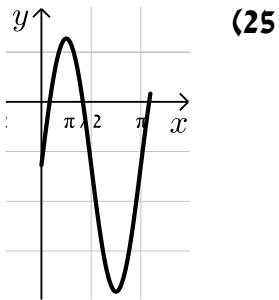
$$(36) \text{ א. } x = 0.5\pi \quad \text{ב. } k = -\frac{4}{\pi} \approx -1.27$$

$$\text{ג. } \max(0,0), \min(0.15\pi, -0.07), \max(0.84\pi, -3.9), \min(\pi, -4)$$

$$(37) \text{ א. כן. } f(x): (0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0), g(x): (\pi, 0) \quad \text{ב. כן, } \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{4}{3}\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{ג. } \max(0.5\pi, 0), \min(1.5\pi, 0), \max(\pi, 1) \quad \text{ד. איור I - } g(x), \text{ איור II - } f(x)$$

סקיצות לשאלות החקירה:



מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 24 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות

תוכן העניינים

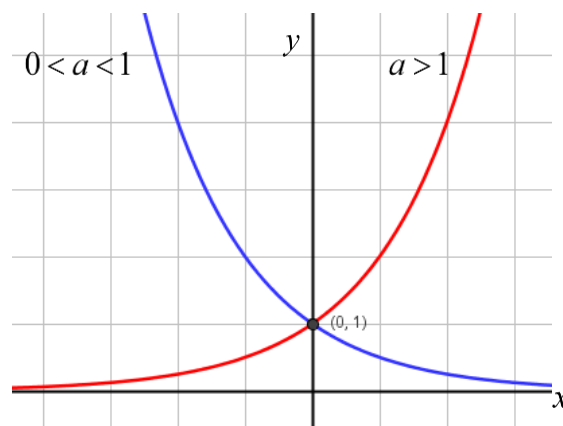
- 1. הנגזרת של פונקציה מעריכית 279
- 2. שימושי הנגזרת 283
- 3. חקירה של פונקציה מעריכית 284

הנגזרת של פונקציה מעריכית:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

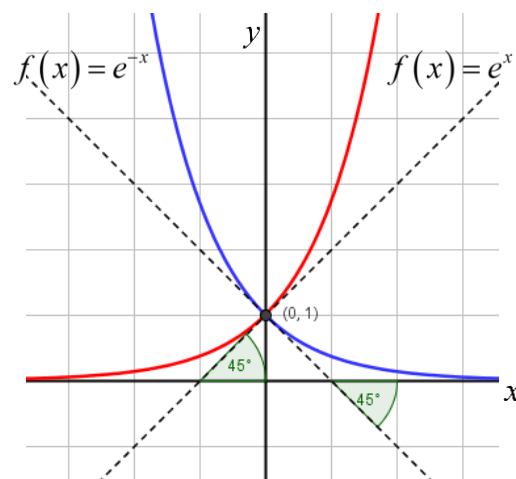
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה: $f(x) = a^x$
 עבור: $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:



תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל x .
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- y בנקודה: $(0, 1)$.
4. עבור: $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x) = e^x$ ו- $f(x) = e^{-x}$ נקבל:



תכונות נוספות:

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^{-x}$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא -1.

נגזרות של פונקציות מעריכיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

תזכורת - כללי הגזירה:

מספר כלל	הפונקציה	תיאור	הנגזרת
1.	$y = a \cdot f(x)$	מכפלה בקבוע	$y' = a \cdot f'(x)$
2.	$y = f(x) + g(x)$	סכום פונקציות	$y' = f'(x) + g'(x)$
3.	$y = f(x) \cdot g(x)$	מכפלת פונקציות	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4.	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	מנת פונקציות	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
5.	$y = f(g(x))$	פונקציה מורכבת	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1 & \text{ב. } f(x) = e^{x^2-3x} + ex \\ \text{ג. } f(x) = 2^{3x} & \text{ד. } f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x} \end{array}$$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = x \cdot e^x \quad \text{ב. } f(x) = x^2 \cdot e^{4x} \quad \text{ג. } f(x) = (x+1) \cdot 2^x$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

$$\text{א. } f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3 \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = e^{2x} & \text{ב. } f(x) = e^x + 1 \\ \text{ג. } f(x) = e^{\frac{1}{x}} & \text{ד. } f(x) = (x^2 + 1)e^x \\ \text{ה. } f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 1) & \text{ו. } f(x) = e^{3x-2} \\ \text{ז. } f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x} & \text{ח. } f(x) = x^3 e^{2x} \\ \text{ט. } f(x) = e^{-2x}(x+4) & \text{י. } f(x) = e^{2x+1}(1-x) \\ \text{יא. } f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} & \text{יב. } f(x) = \frac{x^3}{e^{3x}} \\ \text{יג. } f(x) = \frac{2+x^2}{e^{x^2}} & \text{יד. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \\ \text{טו. } f(x) = \frac{x^2+1}{e^{-x}} & \text{טז. } f(x) = \frac{e^x}{1-e^{x+1}} \end{array}$$

תשובות סופיות:

(1) א. $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$ ג. $3\ln 2 \cdot 2^{3x}$ ד. $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$

(2) א. $(1+x)e^x$ ב. $2xe^{4x}(1+2x)$ ג. $2^x(1+x\ln 2 + \ln 2)$

(3) א. $\frac{x(2-x)}{e^x}$ ב. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

(4) א. $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$ ב. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$ ג. $\frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$

(5) א. $2e^{2x}$ ב. e^x ג. $-\frac{e^{1/x}}{x^2}$ ד. $(x+1)^2 e^x$

ה. $e^{-x}(-x^2-2x+3)$ ו. $3e^{3x-2}$

ז. $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ ח. $x^2 e^{2x}(3+2x)$ ט. $-e^{-2x}(2x+7)$

י. $e^{2x+1}(1-2x)$

יא. $\frac{e^{-1/x}}{x^2}$ יב. $\frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}}$ יג. $\frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$

יד. $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$ טו. $\frac{(x+1)^2}{e^{-x}}$ טז. $\frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2}$

שימושי הנגזרת:

שאלות:

- (6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה $A(1, e)$.
- (7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ בנקודה שבה $x = 0$.
- (8) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.
- (9) נתונה הפונקציה: $y = e^{2x} + 3ex$.
 לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה: $x = 2$.
 מצא את משוואת המשיק.
- (10) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$ בנקודה $(1, 15)$ הוא $21 \ln 3$.
 מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות:

- (6) $y = ex$
- (7) $y = 3x + 1$
- (8) $y = (-e^2 + e)x + e^2$, $y = (e-1)x + e$
- (9) $y = 2e^4x + 3ex - 3e^4$
- (10) $b = -1$, $a = 2$

חקירה של פונקציה מעריכית:

שאלות:

(11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } f(x) = \frac{2x-1}{e^x} & \text{ב. } f(x) = \frac{3}{e^x-1} & \text{ג. } f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \\
 \text{ד. } f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2} & \text{ה. } f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x} & \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2} \\
 \text{ז. } f(x) = \sqrt{e^{2x}-4e^x+3} & &
 \end{array}$$

(12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 e^x$.

(13) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$.

(14) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2+bx+9}{e^x}$.

הפונקציה משיקה לציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.5$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה: $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3, -19)$. מצא את ערכי הפרמטרים p ו- q .

(16) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + e^x$.

(17) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$.

(18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x - 1}$.

(19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 5e^x + 6}$

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^x}$

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x-1}{e^{3x} - e}$

(25) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = (x-3)e^x$

(26) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + a}{be^x}$. לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $(1, \frac{2}{e})$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.

(28) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x \quad \text{ב.} \qquad f(x) = (x-1)e^x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = e^{x^2-x} \quad \text{ד.} \qquad f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{x+1}} \quad \text{ו.} \qquad f(x) = \frac{2}{e^{x^2} + 1} \quad \text{ה.}$$

(29) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-3)e^x$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(31) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4x}{e^{0.5x^2}}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(32) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(33) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \cdot 3^x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(34) נתונה הפונקציה $f(x) = 2e^{\frac{x}{x^2+1}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ז. לאלו ערכי m יש למשוואה $f(x) = m$ בדיוק פתרון אחד?

(35) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
- ז. כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(36) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2 + 1}$$

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(37) \text{ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: } f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+k}} \text{ בנקודה שבה } x=1 \text{ הוא } -\frac{12}{e^{10}}$$

- מצא את ערך הפרמטר k וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא: $0 < \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}} \leq e^2$.

$$(38) \text{ נתונה הפונקציה הבאה: } f(x) = e^{2x} + ae^x + b \text{ . גוזרים את הפונקציה פעמיים}$$

$$\text{וידוע כי כאשר } x = \ln \frac{2}{3} \text{ הנגזרות מקיימות: } f'(x) + f''(x) = 8$$

- מצא את a .
- משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 16x + 7 - 16 \ln 2$.
- מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
- מצא את b .
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

$$(39) \text{ נתונות הפונקציות הבאות: } f(x) = 6x - e^x \text{ ו- } g(x) = ae^x - e^{2x} + b$$

ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור x וכי שתיהן נפגשות על ציר ה- y .

- מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

40 לגרף הפונקציה: $f(x) = ax^2 \cdot e^{-bx^2}$ יש נקודת קיצון: $\left(2, \frac{4}{e}\right)$, $a, b \neq 0$.

- מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים ישר: $y = k$. באיזה תחום ערכים צריך להימצא k כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

41 לפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{e^{ax-1}}$ יש קיצון בנקודה שבה: $x = 1$.

- מצא את ערך הפרמטר a .
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

42 הישר $x = \sqrt{6}$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + m}$.

- מצא את ערך הפרמטר m וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43 נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$.

- מצא את הנקודות המקיימות: $f'(x) = 0$ וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- בכמה נקודות חותך הישר $y = -0.01$ את גרף הפונקציה?

44 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים

$$f'(x) + f''(x) = 12 \text{ הנגזרות מקיימות: } x = \ln \frac{2}{3}$$

א. מצא את a .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 22x + 28 - 22 \ln 2$.

ב. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

ג. מצא את b .

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? אם כן מצא את הנקודות.

45 נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cdot a^x$, $(a > 0)$.

$$\text{לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: } x = -\frac{1}{\ln 2}$$

א. מצא את a .

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה $x = 2$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

$$\text{עם גרף הפונקציה: } g(x) = x^2 \cdot 2^x - kx \cdot 2^x$$

ג. מצא את k .

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

46 נתונה הפונקציה: $f(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{1-x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה

עם ציר ה- y .

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

תשובות סופיות:

$$(11) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } x \neq 0 \quad \text{ג. } x \neq \ln 5 \quad \text{ד. } x \neq \ln 2, x \neq 0 \quad \text{ה. כל } x$$

$$\text{ו. } 0 \leq x \neq \frac{2}{5} \quad \text{ז. } x \leq 0, x \geq \ln 3$$

$$(12) \quad \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$$

$$(13) \quad \min(3, e^3)$$

$$(14) \quad \min(1.5,0), \max(3.5,0.483), b = -12, a = 4$$

$$(15) \quad p = -27, q = 35$$

$$(16) \quad y = 0$$

$$(17) \quad y = 0$$

$$(18) \quad x = 0, y = -5, y = 1$$

$$(19) \quad x = \ln 5, y = -\frac{1}{5}$$

$$(20) \quad y = -1, y = 1$$

$$(21) \quad \text{נקודת אי הגדרה: } (\ln 2, -1), x = \ln 3, y = -\frac{1}{3}, y = 0$$

$$(22) \quad x = 0, y = 0$$

$$(23) \quad y = 0$$

$$(24) \quad x = \frac{1}{3}, y = 0$$

$$(25) \quad y = 0$$

$$(26) \quad \text{נקודת אי הגדרה: } (0,0), x = 0$$

$$(27) \quad \left(3, \frac{10}{e^3}\right), a = 1, b = 1$$

$$(28) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } (0,-1), (1,0) \quad \text{ג. } \min(0,-1) \quad \text{ד. עולה: } x > 0 \quad \text{יורדת: } x < 0$$

$$\text{ב. כל } x \quad \text{ג. } (0,1) \quad \text{ד. עולה: } x < -1, x > -1 \quad \text{פיתול } \left(-1, \frac{2}{e}\right)$$

$$\text{ג. כל } x \quad \text{ד. } (0,0) \quad \text{א. } \max\left(2, \frac{4}{e}\right), \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$$

$$\text{ב. עולה: } x < -2, 0 < x < 2 \quad \text{יורדת: } x > 2, -2 < x < 0$$

$$\text{ד. כל } x \quad \text{א. } (0,1) \quad \text{ב. } \min(0.5, e^{-0.25}) \quad \text{ג. עולה: } x > 0.5 \quad \text{יורדת: } x < 0.5$$

- ה.1. כל x .2. $(0,1)$.3. $\max(0,1)$.4. עולה: $x < 0$ יורדת: $x > 0$
- ו.1. כל x .2. $(0, 2e^{-1})$.3. $\min(0, 2e^{-1})$.4. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$
- (29) א. כל x .ב. $\min(2, -e^2)$.ג. תחומי עלייה: $x > 2$ תחומי ירידה: $x < 2$
- ד. $(3,0)$, $(0,-3)$
- (30) א. כל x .ב. $\max(0,3)$, $\min(\ln 3, 1.59)$.ג. תחומי עלייה: $x > \ln 3$ או $x < 0$ תחומי ירידה: $0 < x < \ln 3$.ד. $(0,3)$
- (31) א. כל x .ב. $\min\left(-1, -\frac{4}{e^{0.5}}\right)$, $\max\left(1, \frac{4}{e^{0.5}}\right)$.ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$ תחומי ירידה: $x > 1$ או $x < -1$.ד. $(0,0)$
- (32) א. כל x .ב. $\max\left(3, \frac{27}{e^3}\right)$.ג. עולה: $x < 3$, יורדת: $x > 3$
- ד. $(0,0)$
- (33) א. כל x .ב. $\min(-0.91, -0.67)$.ג. עולה: $x > -0.91$ יורדת: $x < -0.91$
- ד. $(0,0)$
- (34) א. כל x .ב. $\max(1, 2\sqrt{e})$, $\min\left(-1, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$.ג. עולה: $-1 < x < 1$ יורדת:
- ד. $(0,2)$.ה. $y = 2$.ו. $m = 2$, $m = 2\sqrt{e}$, $m = \frac{2}{\sqrt{e}}$
- (35) א. $x \neq 0$.ב. $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$.ג. עולה: $x > \frac{1}{2}$, יורדת: $0 \neq x < \frac{1}{2}$
- ד. אין
- (36) א. כל x .ב. $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$, $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$.ג. עולה: $x > \frac{1}{2}$, $x < \frac{1}{6}$ יורדת:
- ד. $(0,1)$.ה. $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$
- (37) א. $k = 1$, $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$.ב. $(-1, e^2)$.ג. $a = 4$.ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום $0 < f(x) \leq e^2$
- (38) א. $a = 4$.ב. $x = \ln 2$.ג. $b = -5$.ד. $(0,0)$
- (39) א. $a = 12$, $b = -12$.ב. עולות: $x < \ln 6$ יורדות: $x > \ln 6$

א. $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2}$, $a=1$, $b=0.25$ (40) ב. $\max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$, $\min(0,0)$

ג. $(0,0)$ ה. $0 < k < \frac{4}{e}$

א. $a = \frac{1}{3}$ (41) ב. כן: $\left(11, \frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$ ג. עולה: $1 < x < 11$ יורדת: $x < 1, x > 11$

ד. $(-1,0)$, $(7,0)$, $(0,-7e)$

א. $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 6}$, $m = -6$ (42) ב. $\max\left(-2, -\frac{1}{2e^4}\right)$, $\min\left(3, \frac{e^6}{3}\right)$ ג. $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$

א. $x = 0, -1.5$. נקודת הקיצון היא: $\min\left(-1.5, -3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$ (43) ב. $y = 0$

ד. 2 נקודות.

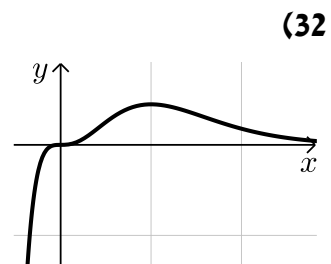
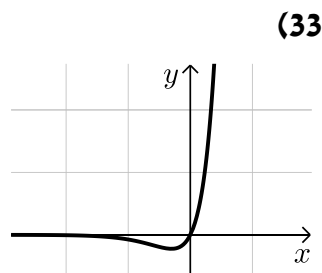
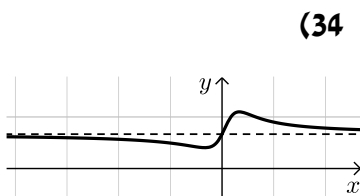
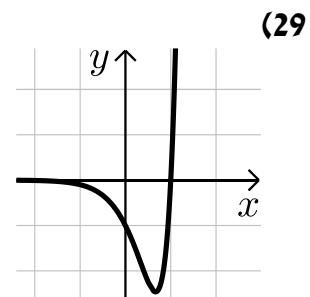
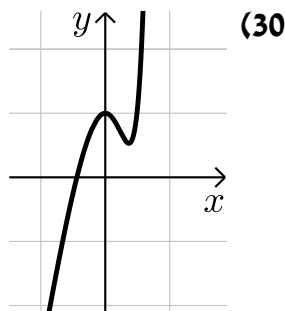
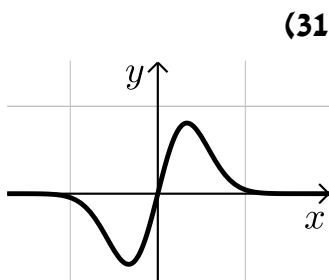
א. $a = 7$ (44) ב. $x = \ln 2$ ג. $b = 10$ ד. לא.

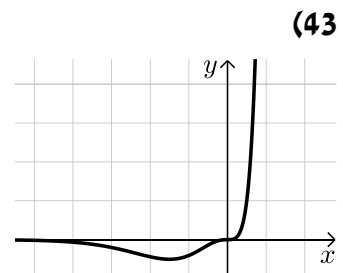
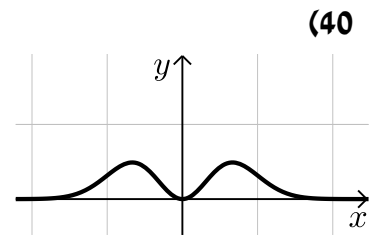
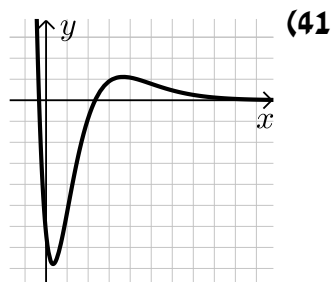
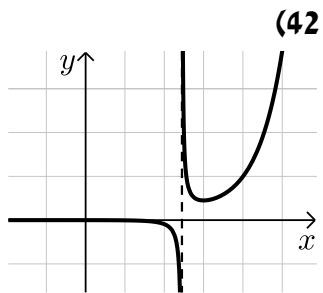
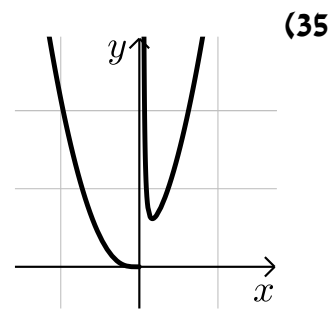
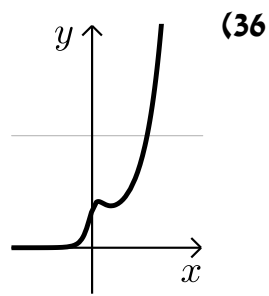
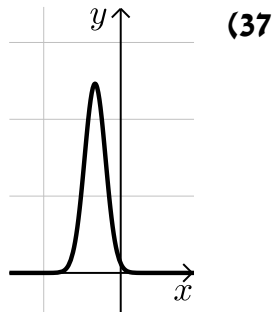
א. $a = 2$ (45) ב. עולה: $x > -\frac{1}{\ln 2}$ יורדת: $x < -\frac{1}{\ln 2}$ ג. $k = 1$

ד. $(0,0)$

א. $y = -x \ln 81 + 7$ (46) ג. $\min\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{243}\right)$

סקיצות לשאלות החקירה:





מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 25 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

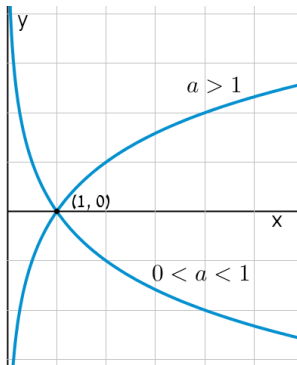
תוכן העניינים

- 1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית 295
- 2. שימושי הנגזרת 300
- 3. חקירה של פונקציה לוגריתמית 301

הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

סיכום כללי:

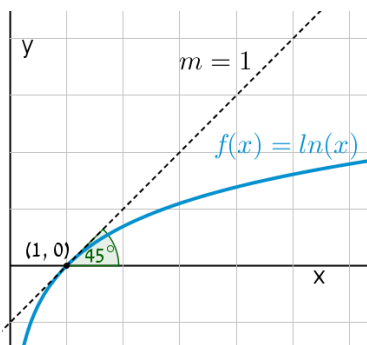
הגדרות כלליות:



להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה: $f(x) = \log_a x$ עבור $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:

תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה $x > 0$.
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- x בנקודה $(1, 0)$.
- עבור $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות $f(x) = \ln x = \log_e x$ נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x הוא 1:

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y = \log(f(x))$ הוא: $f(x) > 0$.

נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א. $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$ ב. $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה. $f(x) = \ln(\cos x)$ ו. $f(x) = \log_2 x + 5 \log_3(2x-1)$

2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x) = x \ln x$ ב. $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$ ג. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$ ה. $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x) = \ln^3 x$ ב. $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג. $f(x) = x^2 \ln^2 x$ ד. $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x) = \ln(x+2)$	ב. $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3$
ג. $f(x) = x^2 \ln x$	ד. $f(x) = x^3 \ln x$
ה. $f(x) = \ln e^{2x}$	ו. $f(x) = e^x \ln x$
ז. $f(x) = e^{-x^2} \ln x$	ח. $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$
ט. $f(x) = \ln(x^2)$	י. $f(x) = \ln(x^4)$
יא. $f(x) = (\ln x)^4$	יב. $f(x) = x \ln x - \ln x^2$
יג. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$	יד. $f(x) = \ln \sqrt{x}$
טו. $f(x) = \sqrt{\ln x}$	טז. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

א. $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$	ב. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$
ג. $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$	ד. $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$
ה. $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$	ו. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$
ז. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$	ח. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$
ט. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	י. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+5x}{1-5x}}$
יא. $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$	יב. $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$
יג. $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$	יד. $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$
טו. $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$	

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} \cdot \lambda & f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x} \cdot \text{ב} & f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1} \cdot \text{א} \quad (1) \\
 f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3} \cdot \text{ו} & f'(x) = -\tan x \cdot \text{ה} & f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \cdot \text{ז} \\
 f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \cdot \lambda & f'(x) = (3x+1) \left(6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right) \cdot \text{ב} & f'(x) = \ln x + 1 \cdot \text{א} \quad (2) \\
 & f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}} \cdot \text{ה} & f'(x) = \frac{4}{x(\ln x+2)^2} \cdot \text{ז} \\
 f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1) \cdot \lambda & f'(x) = \frac{6 \ln x}{x} \cdot \text{ב} & f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x} \cdot \text{א} \quad (3) \\
 & & f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3} \cdot \text{ז} \\
 x(2 \ln x + 1) \cdot \lambda & \frac{2 \ln x + 2}{x} \cdot \text{ב} & \frac{1}{x+2} \cdot \text{א} \quad (4) \\
 e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \cdot \text{ו} & 2 \cdot \text{ה} & x^2 (3 \ln x + 1) \cdot \text{ז} \\
 \frac{4}{x} \cdot \text{ד} & 4x \ln x \cdot \text{ח} & e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - 2x \ln x \right) \cdot \text{ז} \\
 \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} \cdot \text{ג} & \ln x + 1 - \frac{2}{x} \cdot \text{ב} & \frac{4(\ln x)^3}{x} \cdot \text{א} \\
 \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \cdot \text{ט} & \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \cdot \text{ט} & \frac{1}{2x} \cdot \text{ז} \\
 \frac{6}{x^2-9} \cdot \lambda & \frac{2}{x^2-1} \cdot \text{ב} & -\frac{2}{x(x+2)} \cdot \text{א} \quad (5) \\
 \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2} \cdot \text{ו} & \frac{x}{x^2-1} \cdot \text{ה} & \frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+1} \cdot \text{ז} \\
 \frac{1}{x^2-1} \cdot \text{ט} & \frac{1}{4-2x} \cdot \text{ח} & \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}} \cdot \text{ז}
 \end{array}$$

$$\frac{3 \ln^2 x - \ln^3 x}{x^2} \quad \text{י.ב.}$$

$$\frac{\ln x - 4}{\ln^5 x} \quad \text{ט.ו.}$$

$$\frac{1 - 3 \ln \sqrt[3]{x}}{3x^2} \quad \text{י.א.}$$

$$\frac{2(\ln^4 x - 1)}{x \ln^3 x} \quad \text{י.ד.}$$

$$\frac{5}{1 - 25x^2} \quad \text{י.י.}$$

$$\frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)} \quad \text{י.ג.}$$

שימושי הנגזרת:

שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $A(e, 1)$.

(7) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(8) הגרפים של הפונקציות $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1 - f(x)$ נחתכים בנקודה A ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק ל- $f(x)$.
מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

(9) לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$.
מצא את משוואת המשיק.

(10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \ln(x^2 + 1)$ בנקודה שבה $x = 1$.

תשובות סופיות:

(6) $y = \frac{1}{e}x$

(7) $a = 2, b = -2$

(8) $y = \frac{1}{e}x$

(9) $y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$

(10) $y = \ln 2 \cdot x + x - 1$

חקירה של פונקציה לוגריתמית:

שאלות:

11 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \ln x$	ב. $f(x) = \ln(x^2)$
ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$	ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$
ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$	ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$
ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$	

12 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = 2 \ln x - x^2$.

13 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 \ln x$.

14 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$.

15 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$.

16 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$. הנקודה $(e^2, \frac{1}{e^2})$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

17 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$. הנקודה $(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8})$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

18 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(x-3)$.

19 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$.

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{2\ln x - 1}{\ln x + 1}$.

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$.

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$.

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = x \ln x + 2$.

(25) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

(26) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

- i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$y = x \ln x$ ב.	$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3 \ln x$ א.
$y = \sqrt{x} \ln x$ ד.	$y = x \ln x - x$ ג.
$y = \ln(x^2 + 1)$ ו.	$y = x^2 \ln x$ ה.

(27) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \ln^2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא לאלו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

(29) נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

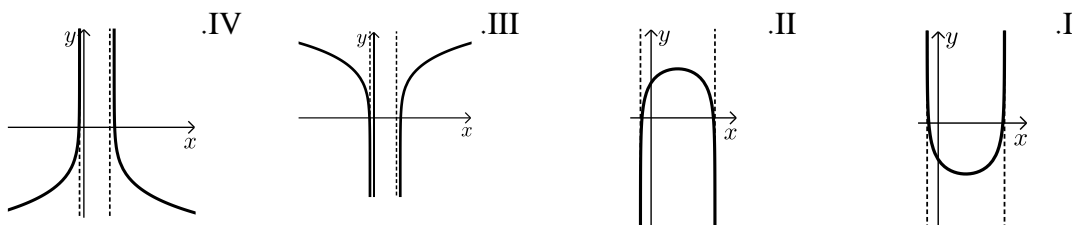
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \ln x$.
- מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$. ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור x , $(x_A = x_B)$.
- מצא את שיעור ה- x של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

31 נתונה שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.
 נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור x זהה.
 - לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
 - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- ב. בחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- x שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- y של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

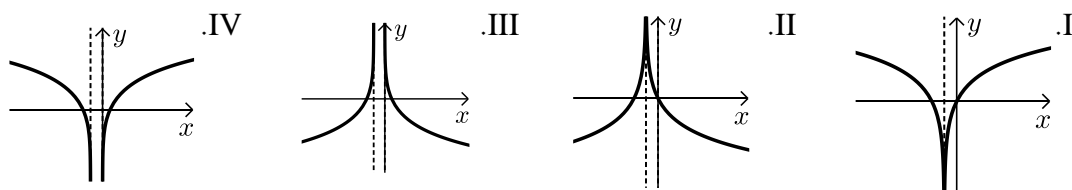
32 נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- y ?
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV.



33 נתונה הפונקציה: $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- y ?
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV.



ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השלילות של הפונקציה.

34 לפניך הפונקציה הבאה : $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

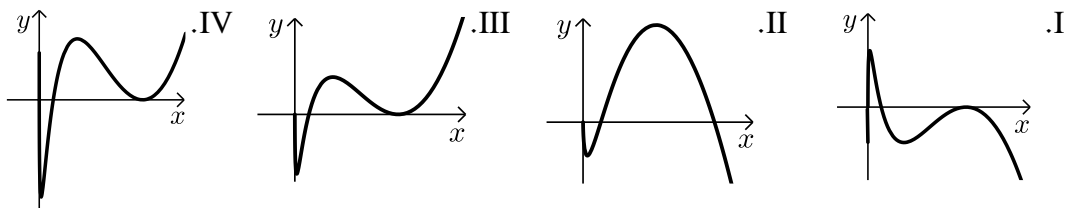
35 נתונה הפונקציה הבאה : $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

36 נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$.

- הראה כי נגזרת הפונקציה היא : $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$.
- מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ענה על השאלות הבאות :
 - מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 - מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.



37 נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה $g(x) = \ln x$.

38) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה : $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$

נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה : $x = e$.

39) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$, פרמטר חיובי, $a \neq 1$

א. הבע באמצעות a את :

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת $y' = 0$.

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום : $x > e - 2$. מצא את a .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x > -1$.

ד. נתון הישר : $y = k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של k עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

40) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \ln x + \frac{1}{x}$

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר y ?

אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

(11) א. $x > 0$ ב. $x \neq 0$ ג. $x > 10$ או $x < -2$ ד. $x > \ln 4$

ה. $0 < x \neq e$ ו. $x > 0$ וגם $x \neq e^3, e^{-1}$ ז. $x \geq e$

(12) $\max(1, -1)$

(13) $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$

(14) $\min(\sqrt{e}, 0)$ קצה, $\max\left(e, \frac{1}{e}\right)$

(15) $\min(4, -1)$

(16) $a = 1, b = -1$

(17) $a = 1, b = -1$

(18) $x = 3$

(19) נקודת אי הגדרה $(0, 0)$, $y = 0, x = e$

(20) נקודת אי הגדרה $(0, 2)$, $y = 2, x = \frac{1}{e}$

(21) נקודת אי הגדרה $(0, 0)$ $\left(e^2, \frac{1}{4}\right)$; $y = 0, x = \frac{1}{e^2}$

(22) $x = 0, y = 0$

(23) נקודת אי הגדרה $(0, 0)$

(24) נקודת אי הגדרה $(0, 2)$

(25) $\left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$

(26) א. i. $x > 0$ iii. $\max(1, -3.5), \min(3, \ln 27 - 7.5)$

iv. עולה: $0 < x < 1, x > 3$ יורדת: $1 < x < 3$ ב. i. $x > 0$ ii. $(1, 0)$

iii. $\min(e^{-1}, -e^{-1})$ iv. עולה: $x > e^{-1}$ יורדת: $0 < x < e^{-1}$

ג. i. $x > 0$ ii. $(e, 0)$ iii. $\min(1, -1)$ iv. עולה: $x > 1$ יורדת: $0 < x < 1$

ד. i. $x > 0$ ii. $(1, 0)$ iii. $\min\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right)$ iv. עולה: $x > e^{-2}$ יורדת: $0 < x < e^{-2}$

ה. i. $x > 0$ ii. $(1, 0)$ iii. $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$ iv. עולה: $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ יורדת: $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל x ii. $(0, 0)$ iii. $\min(0, 0)$ iv. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$

(27) א. $x > 0$ ב. $\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right), \min(1, 0)$

ג. עלייה: $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{e^2}$, ירידה: $\frac{1}{e^2} < x < 1$ ד. $(1, 0)$.

(28) א. $0 < x \neq e$ ב. $\min(e^2, e^2)$ ג. עלייה: $x > e^2$, ירידה: $0 < x < e^2$

ו. $k > e^2$ ד. אין.

(29) א. $x > 0$ ב. $\min(4, -1)$ ג. עלייה: $x > 4$, ירידה: $0 < x < 4$

ד. $(1, 0), (16, 0)$.

(30) א. $x \geq 1$ ב. מתקבל: $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$ ג. $(1, 0), (e, 1)$

ד. $x = \sqrt[4]{e}$.

(31) א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $x > 0, x \neq 1$ ותחום ההגדרה של $g(x)$ הוא: $x > 0$.

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x = e$ אך עבור $f(x)$ מדובר במינימום ועבור $g(x)$ מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור $f(x)$: עולה: $x > e$ יורדת: $0 < x < e, x \neq 1$.

ועבור $g(x)$: עולה: $0 < x < e$ יורדת: $x > e$ iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- y שלה הוא: $y = \frac{x}{\ln x}$ ו- $y = \frac{\ln x}{x}$.

נכפול: $y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$.

(32) א. $x < -1, x > 7$ ב. $x = -1, 7$ ג. עולה: $x > 7$ יורדת: $x < -1$.

ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום. באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

(33) א. $x \neq -1$ ב. $x = -1$ ג. עולה: $x > -1$ יורדת: $x < -1$.

ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. $x \neq -1, -2 < x < 0$.

34 א. $0 < x < e$. (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם: $1 - \ln x > 0$ וגם $x > 0$).

ב. $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0$. ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.

ג. $(1, 0)$.

35 א. $x < -\frac{1}{2}, x > 1$. ב. $x = -\frac{1}{2}, 1$. ג. $(-2, 0)$.

ד. מתקבל: $y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$.

36 ב. $x > 1, e^{-4} < x < e^{-1}$.

ג. i. 2 נקודות והן: $(e^{-2}, 0)$, $(1, 0)$. הנקודה שבה: $x = 0$ לא קיימת עקב ת.ה.

ii. $x \neq 1, x > e^{-2}$. ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.

שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

37 א. $x > 0$. ב. $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$, $(1, 0)$, $(e^{\sqrt{3}}, 0)$. ג. $\min(e, -2)$, $\max(e^{-1}, 2)$.

ה. $(1, 0)$, $(e^2, 2)$, $(e^{-2}, -2)$.

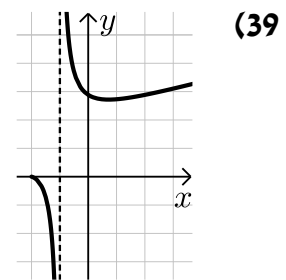
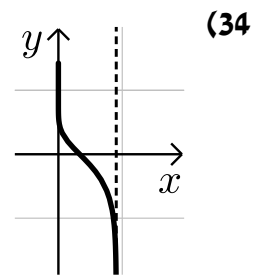
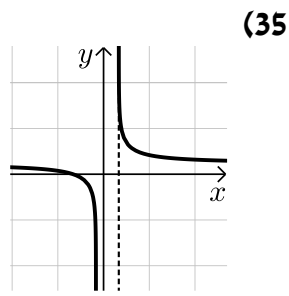
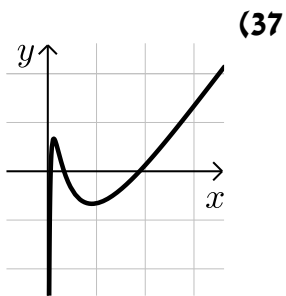
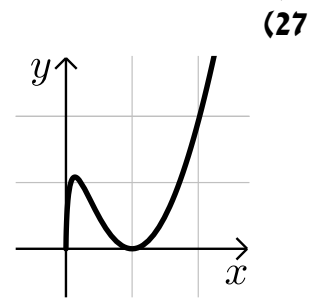
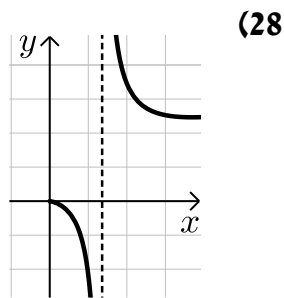
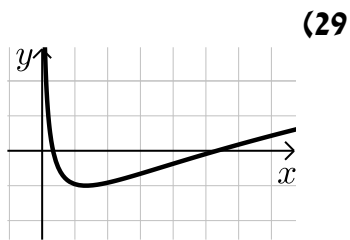
38 א. $x = e$. ב. מתקבל: $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$. ג. $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$.

39 א. i. $x > -a, x \neq 1 - a$. ii. $(e - a, e)$. iii. $(0, \frac{a}{\ln a})$.

iv. $x = 1 - a$. ב. $a = 2$. ד. $k < e$.

40 א. i. $x > 0$. ii. $x = 0$. ב. $\min(1, 1)$. ג. עולה: $x > 1$, יורדת: $0 < x < 1$.

סקיצות לשאלות:



מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 26 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי

תוכן העניינים

311	1. חישובי אינטגרלים
316	2. מציאת פונקציה קדומה

חישובי אינטגרלים:

סיכום כללי:

הגדרה וכללי האינטגרציה:

- כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$
- עבור מקדם קבוע a נקבל: $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$
- כללי האינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \quad \int \cos x dx = \sin x + c, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

שאלות:

1 מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^3 dx$	ב. $\int 12x^5 dx$
ג. $\int x^4 dx$	ד. $\int 2x^3 dx$
ה. $\int \frac{2}{3} x^5 dx$	ו. $\int 7 dx$
ז. $\int \left(\frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx$	ח. $\int \left(\frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx$

2 מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{-3} dx$	ב. $\int \frac{1}{x^3} dx$
ג. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx$	ד. $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx$

(3) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int \sqrt{x} dx & \text{ב.} \\ \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) dx & \text{ד.} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int x^{\frac{1}{2}} dx & \text{א.} \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx & \text{ג.} \end{array}$$

(4) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \int \frac{18}{(6x+5)^2} dx & \text{ג.} & \int 3(2-7x)^4 dx & \text{ב.} & \int (5x-1)^3 dx & \text{א.} \\ \int \sqrt{ax+bdx} & \text{ה.} & \int \frac{1}{\sqrt{6x-3}} dx & \text{ד.} \end{array}$$

(5) מצא את תוצאת החילוק :

$$\begin{array}{ll} \frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1} = & \text{ב.} \\ \frac{x^3-4x^2+9}{x-3} = & \text{ד.} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \frac{x^2-5x-14}{x+2} = & \text{א.} \\ \frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3} = & \text{ג.} \\ \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5} = & \text{ה.} \end{array}$$

(6) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int \frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1} dx & \text{ב.} \\ \int \frac{x^3-4x^2+9}{x-3} dx & \text{ד.} \\ \int \frac{2x^5+x^4-4x^2+1}{2x+1} dx & \text{ו.} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int \frac{x^2-5x-14}{x+2} dx & \text{א.} \\ \int \frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3} dx & \text{ג.} \\ \int \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5} dx & \text{ה.} \end{array}$$

(7) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int \frac{x^2}{(x^3+6)^2} dx & \text{ב.} \\ \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx & \text{ד.} \\ \int 8x(x^2+1)^3 dx & \text{ו.} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int -\frac{2x}{(x^2-1)^2} dx & \text{א.} \\ \int \frac{x-2}{(x^2-4x+1)^2} dx & \text{ג.} \\ \int \frac{6x-3}{\sqrt{x-x^2}} dx & \text{ה.} \\ \int (2-x^2)(6x-x^3)^2 dx & \text{ז.} \end{array}$$

8) חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\int \left(\sin x - 3 \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} + 5 \right) dx$

ב. $\int \left(\cos 3x - 2 \sin 4x + \frac{4}{\cos^2 3x} \right) dx$

ג. $\int \left(\sin(\pi - x) + \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$

9) חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות) :

א. $\int (2 \sin x \cos x) dx$

ב. $\int (\sin 3x \cos 3x) dx$

ג. $\int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx$

ד. $\int (\sin^2 x) dx$

10) חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\int \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \right) dx$

ב. $\int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$

ג. $\int (\cos x \sin^2 x) dx$

11) חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx$

ב. $\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx$

ג. $\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx$

ד. $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$

ה. $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$

ו. $\int (\cos x + \sin x)^2 dx$

ז. $\int (\sin x \cos x \cos(2x)) dx$

ח. $\int \tan^2 x dx$

ט. $\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx$

י. $\int \cos^2 x dx$

יא. $\int \sin^2 4x dx$

12) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים (שאלות אתגר):

$$\int (\cos^4 x + \sin^4 x) dx \quad \text{א.} \quad \int \cos^4 x dx \quad \text{ב.}$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad \text{ג.} \quad \int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad \text{ד.}$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad \text{ה.}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א.} \frac{x^4}{4} + c \quad \text{ב.} 2x^6 + c \quad \text{ג.} \frac{x^5}{5} + c \quad \text{ד.} \frac{x^4}{2} + c \quad \text{ה.} \frac{x^6}{9} + c \quad \text{ו.} 7x + c$$

$$\text{ז.} \frac{x^5}{6} + 4x^4 - \frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{1}{3}x + c \quad \text{ח.} \frac{x^4}{5} - \frac{ax^3}{3} - \frac{ax^2}{b} + bx + c$$

$$(2) \quad \text{א.} -\frac{x^{-2}}{2} + c \quad \text{ב.} -\frac{1}{2x^2} + c \quad \text{ג.} -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{a}{2x^2} + \frac{x^2}{2a} + c \quad \text{ד.} 2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + c$$

$$(3) \quad \text{א.} \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad \text{ב.} \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c \quad \text{ג.} 2\sqrt{x} + c \quad \text{ד.} 8\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} + c$$

$$(4) \quad \text{א.} \frac{(5x-1)^4}{20} + c \quad \text{ב.} -\frac{3(2-7x)^5}{35} + c \quad \text{ג.} -\frac{3}{6x+5} + c$$

$$\text{ד.} \frac{\sqrt{6x-3}}{3} + c \quad \text{ה.} \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + c$$

$$(5) \quad \text{א.} x-7 \quad \text{ב.} x^2+2x+5 \quad \text{ג.} x^3-2x^2+5x-1$$

$$\text{ד.} x^2-x-3 \quad \text{ה.} x^2-4$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x + c \quad \lambda \quad \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x + c \quad \text{ב} \quad \frac{x^2}{2} - 7x + c \quad \text{א} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{x^5}{5} - x^2 + x + c \quad \text{ו} \quad \frac{x^3}{3} - 4x + c \quad \text{ה} \quad \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x + c \quad \text{ז}$$

$$-\frac{1}{2(x^2 - 4x + 1)} + c \quad \lambda \quad -\frac{1}{3(x^3 + 6)} + c \quad \text{ב} \quad \frac{1}{x^2 - 1} + c \quad \text{א} \quad (7)$$

$$(x^2 + 1)^4 + c \quad \text{ו} \quad -6\sqrt{x - x^2} + c \quad \text{ה} \quad \sqrt{x^2 + 2} + c \quad \text{ז}$$

$$\cdot \frac{(6x - x^3)^3}{9} + c \quad \text{ט}$$

$$\frac{\sin 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{4 \tan 3x}{3} + c \quad \text{ב} \quad -\cos x - 3 \sin x + 4 \tan x + 5x + c \quad \text{א} \quad (8)$$

$$\cdot \cos(\pi - x) + \tan x + x + c \quad \text{ג}$$

$$-\frac{\sin 2x}{2} + c \quad \lambda \quad -\frac{\cos 6x}{12} + c \quad \text{ב} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x + c \quad \text{א} \quad (9)$$

$$\cdot \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + c \quad \text{ז}$$

$$\cdot \frac{1}{3} \sin^3 x + c \quad \lambda \quad \frac{1}{\cos x} + c \quad \text{ב} \quad 2\sqrt{\sin x} + c \quad \text{א} \quad (10)$$

$$-\frac{1}{10} \cot 10x + c \quad \lambda \quad \frac{1}{4} \tan 4x + c \quad \text{ב} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad \text{א} \quad (11)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad \text{ו} \quad \frac{1}{2} \sin 2x + c \quad \text{ה} \quad \frac{1}{2} \sin 2x + c \quad \text{ז}$$

$$\tan x - \cot x + c \quad \text{ט} \quad \tan x - x + c \quad \text{ח} \quad -\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad \text{ט}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{16} \sin 8x + c \quad \text{א} \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \quad \text{ז}$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad \text{ב} \quad \frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad \text{א} \quad (12)$$

$$-\cot x - x + c \quad \text{ז} \quad \frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad \text{ג}$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad \text{ה}$$

מציאת פונקציה קדומה:

שאלות:

- (1) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 3x^2 - 7$. מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2, -1)$.
- (2) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - 6$. ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5. מצא את הפונקציה.
- (3) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = x^2 - 8x + 2$. נתון: $f(-2) = 1$.
 א. מצא את $f(x)$.
 ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.
- (4) נתונה הנגזרת של פונקציה $f(x)$: $f'(x) = 9x^2 - 4$. ערך הפונקציה בנקודה $x = 1$ הוא 3.
 א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.
 ב. מצא את $f(x)$.
 ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
- (5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x - 3$. לפונקציה משיק ששיפועו הוא -3.
 א. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
 ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.
- (6) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -6x - 5$. המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 א. מצא את שיעור ה- x של הנקודה A.
 ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא -6.
 ג. מצא את משוואת המשיק.

- (7) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 3x - 4$.
 הישר $y = 2x + 5$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את $f(x)$.

תשובות סופיות:

- (1) $f(x) = x^3 - 7x + 5$
- (2) $f(x) = x^2 - 6x + 14$
- (3) א. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 2x + 23\frac{2}{3}$ ב. $y = -5x + 27$
- (4) א. $y = 5x - 2$ ב. $f(x) = 3x^3 - 4x + 4$ ג. $(0, -2), (0.4, 0)$
- (5) א. $x = 0$ ב. $f(x) = x^2 - 3x + 7$
- (6) א. $x = -1$ ב. $f(x) = -3x^2 - 5x - 8$ ג. $y = x - 5$
- (7) $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 4x + 11$

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 27 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים

תוכן העניינים

318	1. האינטגרל המסוים
320	2. חישובי שטחים יסודיים
326	3. חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים
328	4. חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה
331	5. חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית
333	6. חישובי שטחים עם פונקצית שורש
337	7. חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות
340	8. חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים

האינטגרל המסוים:

סיכום כללי:

תהא פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא $f'(x)$ ($f(x)$ מוגדרת בתחום $a \leq x \leq b$).
 הקשר שבין האינטגרל המסוים לפונקציה קדומה הוא: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.

הערה:

יש להשתמש בכל כללי האינטגרציה המיידיים של הפונקציות השונות אשר נלמדו.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_2^5 (x^2 + 5x) dx$	ב. $\int_{-4}^{-1} x^2 (x-3) dx$
ג. $\int_{-3}^3 (x^3 + 4x) dx$	ד. $\int_{-1}^1 3(2x-1)^5 dx$
ה. $\int_1^2 \frac{2}{(x-3)^2} dx$	ו. $\int_1^4 \frac{x-1}{x^3} dx$
ז. $\int_{-3}^0 \frac{2x^2 + 7x - 4}{x+4} dx$	ח. $\int_3^4 \frac{3x^2 - 7x + 2}{x-2} dx$
ט. $\int_1^2 \sqrt{3x-1} dx$	י. $\int_{-5}^0 \frac{3}{\sqrt{4-x}} dx$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_0^{\pi} (\cos x) dx$	ב. $\int_0^{\pi} (\sin 2x + 1) dx$
ג. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x - 3 \cos 2x) dx$	ד. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{\cos^2 x} + 2 \right) dx$

$$(3) \quad \int_1^a (4x-7) dx \quad \text{לפניך האינטגרל הבא:}$$

מצא עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

$$(4) \quad \int_a^2 (x-3x^2) dx \quad \text{לפניך האינטגרל הבא:}$$

א. כתוב ביטוי לערך האינטגרל כתלות ב- a .

ב. מצא עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל- $\frac{a-12}{2}$.

$$(5) \quad \int_a^{a+4} \left(\frac{1}{\sqrt{x-a}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx \quad \text{לפניך האינטגרל הבא:}$$

א. כתוב את ערך האינטגרל כתלות ב- a .

ב. מצא את ערכו של a עבורו ערך האינטגרל יהיה שווה ל-2.

$$(6) \quad \int_0^a (\sin x + 2 \cos 2x) dx \quad \text{לפניך האינטגרל הבא:} \quad 0 < a < 3$$

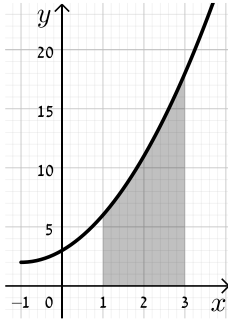
מצא עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

תשובות סופיות:

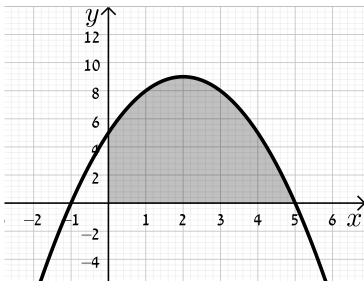
- (1) א. 91.5 ב. -126.75 ג. 0 ד. -182 ה. 1
 ו. $\frac{9}{32}$ ז. -12 ח. 9.5 ט. 1.856 י. 6.
- (2) א. 0 ב. π ג. 0 ד. $3\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi \approx 7.29$
- (3) $a = 2, 1.5$
- (4) א. $a^3 - \frac{1}{2}a^2 - 6$ ב. $a = 0, 1, -\frac{1}{2}$
- (5) א. $4 + 2(\sqrt{a+1} - \sqrt{a+5})$ ב. $a = 1\frac{1}{4}$
- (6) $a = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

חישובי שטחים יסודיים:

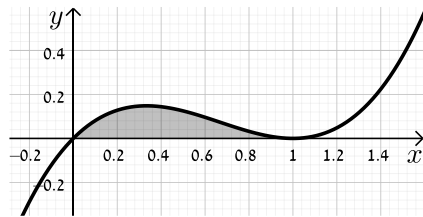
שאלות:



- (1) חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 2x + 3$, ציר ה- x והישרים $x = 1$ ו- $x = 3$.

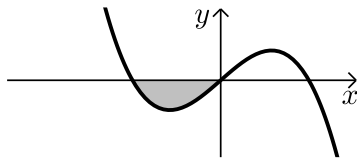


- (2) נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 4x + 5$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x וציר ה- y .

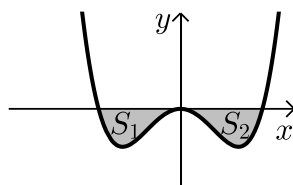


- (3) מצא את השטח המוגבל תחת הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ וציר ה- x כמתואר באיור.

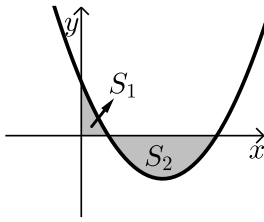
שאלות עם שטח מתחת לציר ה- x :



- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = x(4 - x^2)$. חשב את השטח המוגבל שמתחת הפונקציה וציר ה- x שברביע השלישי.



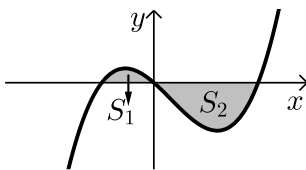
- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$. חשב את השטח המוגבל שבין הפונקציה לציר ה- x .



- 6) חשב את האינטגרל המסוים של הפונקציה $y = x^2 - 6x + 5$ בין 0 ל-5. האם התוצאה מייצגת את סכום השטחים: $S_1 + S_2$? אם כן, הסבר. אם לא, נמק וחשב את סכום זה.

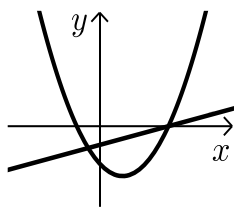
- 7) נתונה הפונקציה $y = x^3 - x^2 - 2x$.

יוצרים את השטחים S_1 ו- S_2 בין גרף הפונקציה וציר ה- x כמתואר באיור.

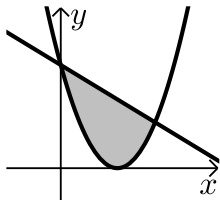


- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x .

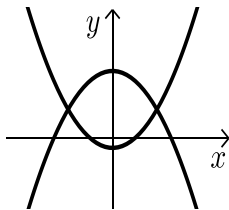
שאלות עם שטחים בין שתי פונקציות:



- 8) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ו- $g(x) = x - 6$. חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.



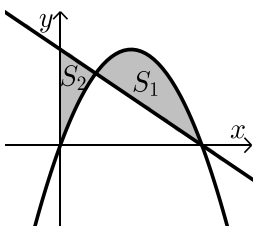
- 9) נתונות הפונקציות: $y = (x-3)^2$, $y = -x + 9$. חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.



- 10) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$. חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.

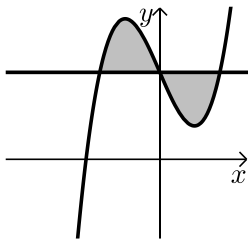
- 11) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = -x^2 + 4x$ ו- $g(x) = -x + 4$.

מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים ב- S_1 ואת השטח הכלוא בין הגרפים וציר ה- y ב- S_2 כמתואר באיור.

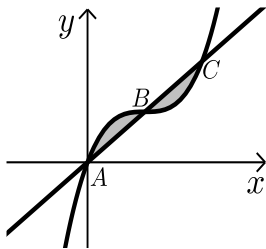


א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

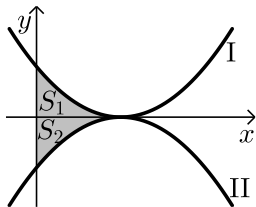
- ב. חשב את היחס שבין השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.



- 12** נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 4x + 5$ והישר $y = 5$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.
 ב. חשב את השטח המוגבל ביניהן.

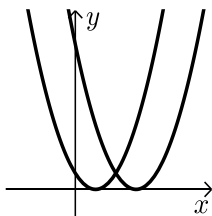


- 13** נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.
 הישר AC חותך את גרף הפונקציה בנקודות
 הבאות: $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,2)$.
 חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

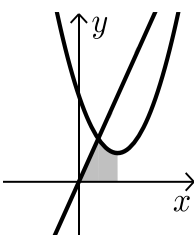


- 14** נתונות הפונקציות $f(x) = (x-2)^2$ ו- $g(x) = -(x-2)^2 - 1$ כמתואר באיור.
 א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.
 ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים ב- S_1 ו- S_2 כמתואר באיור.
 הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.

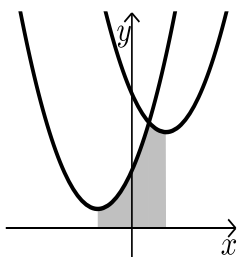
שאלות עם שטחים מורכבים:



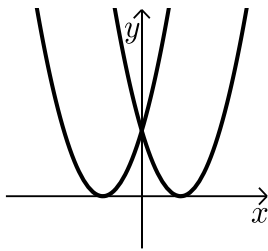
- 15** נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$.
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות
 ובין ציר ה- x .



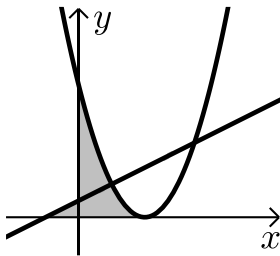
- 16** נתונות הפונקציות: $y = x^2 - 4x + 6$, $y = 3x$.
 א. מצא את קדקוד הפרבולה.
 ב. מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר
 שמשמאל לקדקוד הפרבולה.
 ג. חשב את השטח המסומן שבשרטוט.



- 17** נתונות הפונקציות: $y = x^2 - 4x + 14$, $y = x^2 + 4x + 6$.
 א. מצא את שיעורי ה- x של קודקודי הפרבולות.
 ב. חשב את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.
 ג. חשב את השטח המסומן בשרטוט.



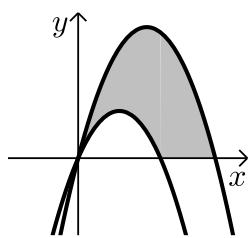
(18) נתונות הפונקציות: $f(x) = (x-3)^2$, $g(x) = (x+3)^2$.
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- x .



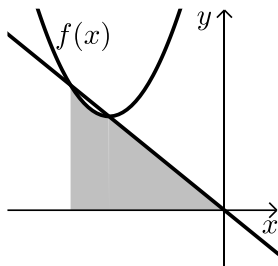
(19) נתונות שתי הפונקציות: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $y = (x-2)^2$.

א. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- x .

ב. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- y .



(20) נתונות הפרבולות הבאות: $f(x) = -x^2 + 5x$ ו- $g(x) = -x^2 + 3x$.
חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה- x .



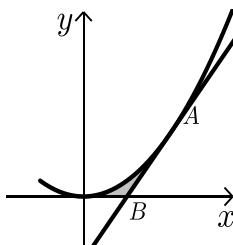
(21) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 + 6x + 12$.

ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -4$ כמתואר באיור.

א. מצא את משוואת הישר.

ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = -4$.

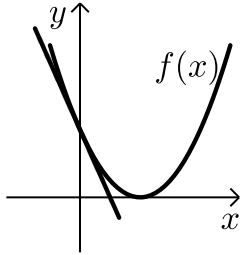


(22) נתונה הפונקציה: $y = 2x^2$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה: $A(1,2)$.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה B .

חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .



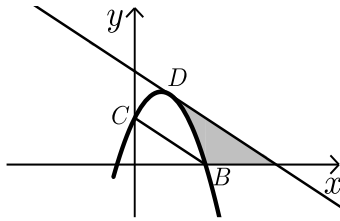
(23) נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-2)^2$.

מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y מעבירים משיק.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x .



(24) משוואת הפרבולה היא: $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$.

הנקודות $B(2,0)$, $C(0,2)$ הן נקודות חיתוך

של הפרבולה עם הצירים.

המשיק לפרבולה בנקודה D מקביל לישר BC .

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- x .

ג. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- y .

תשובות סופיות:

(1) $22\frac{2}{3}$ יח"ש.

(2) א. $(-1,0)$, $(5,0)$. ב. $33\frac{1}{3}$ יח"ש.

(3) $\frac{1}{12}$ יח"ש.

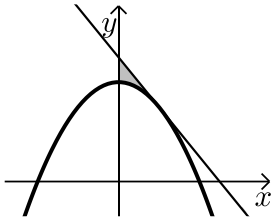
(4) 4 יח"ש.

(5) $4\frac{4}{15}$ יח"ש.

- (6) לא. השטח הוא: 13 יח"ש.
- (7) א. $(-1,0)$, $(0,0)$, $(2,0)$ ב. $3\frac{1}{12}$ יח"ש.
- (8) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (9) $20\frac{5}{6}$ יח"ש.
- (10) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (11) א. $(1,3)$, $(4,0)$ ב. $2\frac{5}{11}$.
- (12) א. $(-2,5)$, $(0,5)$, $(2,5)$ ב. 8 יח"ש.
- (13) 0.5 יח"ש.
- (14) א. $f(x)=I$, $g(x)=II$ ב. הוכחה.
- (15) $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (16) א. $(2,2)$ ב. $(1,3)$ ג. $3\frac{5}{6}$ יח"ש.
- (17) א. $x=2$, $x=-2$ ב. $(1,11)$ ג. $25\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (18) 18 יח"ש.
- (19) א. $\frac{4}{3}$ יח"ש ב. $1\frac{7}{12}$ יח"ש.
- (20) $16\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (21) א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.
- (22) $\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (23) א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (24) א. $y=-x+4$ ב. $2\frac{2}{3}$ יח"ש. ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים:

שאלות:

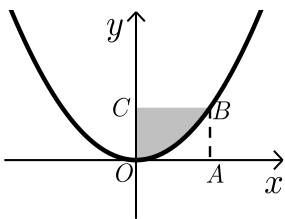


(25) נתונה הפרבולה: $y = ax^2 + 8$.

שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה שבה $x = 2$ הוא -2 .

א. חשב את a .

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, הפרבולה וציר y .



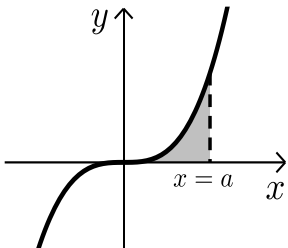
(26) הפונקציה המתוארת בשרטוט היא: $y = ax^2$ (a פרמטר).

המרובע ABCO הוא ריבוע.

הקדקוד B נמצא על גרף הפונקציה.

ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.

מצא את ערך הפרמטר a ואת השטח המסומן בשרטוט.



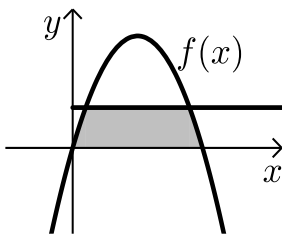
(27) נתונה הפונקציה $y = x^3$.

מעבירים אנך לציר ה- x : $x = a$ (a פרמטר חיובי)

כך שנוצר שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה- x .

א. הבע באמצעות a את השטח המקווקו בציור.

ב. חשב את a אם ידוע כי שטח זה שווה ל- a^2 .



(28) נתונה הפונקציה: $f(x) = kx - x^2$.

הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות החיתוך

הוא $x = 9$.

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

הישר וציר ה- x (השטח המסומן).

תשובות סופיות:

$$\text{(25) א. } a = -\frac{1}{2} \quad \text{ב. } \frac{4}{3} \text{ יח"ש.}$$

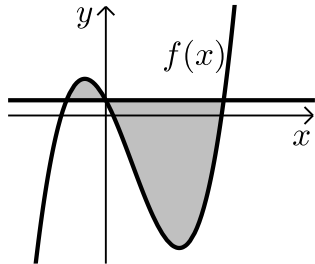
$$\text{(26) } a = \frac{1}{2}, \quad 2\frac{2}{3} \text{ יח"ש.}$$

$$\text{(27) א. } \frac{a^4}{4} \quad \text{ב. } a = 2$$

$$\text{(28) א. } k = 10 \quad \text{ב. } (1, 9) \quad \text{ג. } 81\frac{1}{3} \text{ יח"ש.}$$

חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה:

שאלות:



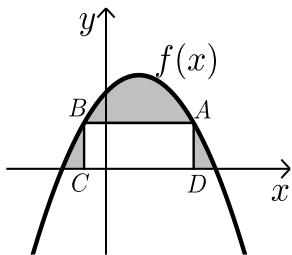
29 נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 3x^2 - 8x - 12$.

הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ על ציר ה- y .

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הישר והפונקציה.

30 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ המתוארת באיור שלפניך היא: $f'(x) = 3 - 2x$.



ישר AB שמשוואתו: $y = 6$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.

מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x כך שנוצר מלבן ABCD.

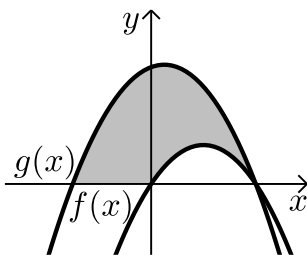
ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא 4.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x .

31 באיור שלפניך מתוארות הפונקציות שנגזרותיהן: $f'(x) = 4 - 2x$, $g'(x) = -2x + 1$.

ידוע ששתי הפונקציות חותכות את ציר ה- x כאשר: $x = 4$.

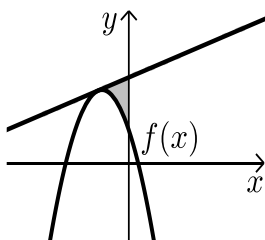


א. מצא את הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- x (המסומן).

32 נתונה פונקציה $f(x)$.

משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = -2$ היא: $y = x + 13$.



הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x) = -4x - 7$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- y .

33 נתונה פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

ישר ששיפועו 15 משיק לפונקציה ברביע הרביעי בנקודה שבה: $y = -20$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש עוד משיקים לגרף הפונקציה בעלי שיפוע 15? אם כן- מצא אותם.

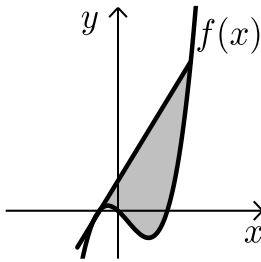
ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי הנקודה שבה $x = 7$ משותפת למשיק

שמצאת בסעיף הקודם ולפונקציה $f(x)$.

ii. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

והמשיק שמצאת בסעיף הקודם (ראה איור).



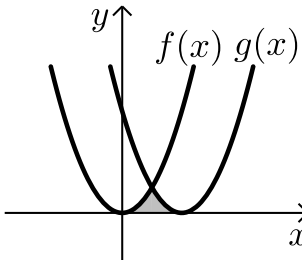
34 באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה: $f(x) = x^2$

את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 2$.

הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא: $g'(x) = 2x - 8$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (המסומן).



35 באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 2x$.

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x - 6$

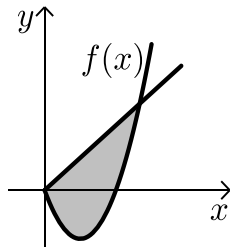
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה בנקודה שבה ערך

ה- y הוא 16.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.



תשובות סופיות:

29 א. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 12x + 5$ ב. $189\frac{1}{3}$ יח"ש.

30 א. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

31 א. $f(x) = 4x - x^2$, $g(x) = -x^2 + x + 12$ ב. 46.5 יח"ש.

32 א. $f(x) = -2x^2 - 7x + 5$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

33 א. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ ב. $y = 15x + 28$

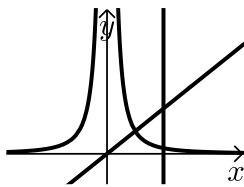
ג. i. (7,133) ג. ii. 546.75 יח"ש.

34 א. $g(x) = (x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

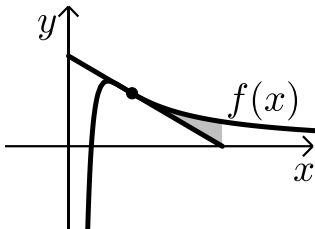
35 א. $f(x) = x^2 - 6x$ ב. (0,0) ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית:

שאלות:

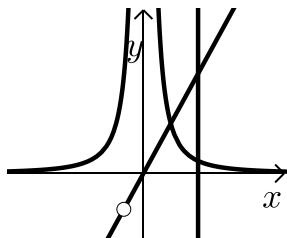


- (1) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה- x .



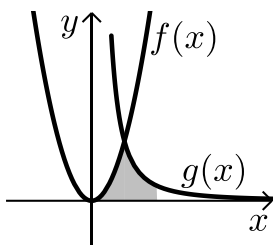
- (2) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$, מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.
ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק ואנך לציר ה- x היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .



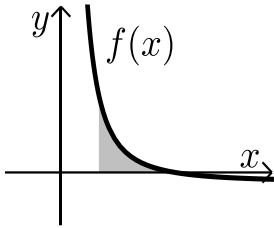
- (3) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה- x .

- (4) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 2x^2$ ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$



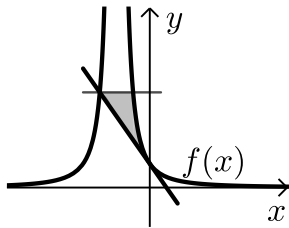
- (a קבוע) בתחום: $x > 0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון בנקודה הנמצאת על הישר: $y = 4x$.
א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .
ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר: $x=4$.

5) גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2}$ (קבוע a) חותך את ציר ה- x בנקודה $(6,0)$.



- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
 ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר: $x=2$.

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$ (A פרמטר חיובי).



- ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y הוא: $-\frac{1}{9}$.

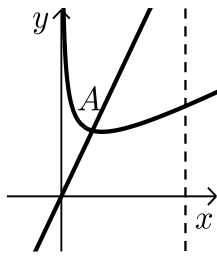
- א. מצא את ערך הפרמטר A .
 ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- y .
 ג. הראה כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = -4.5$.
 ד. העבר ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.
 ה. חשב את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזר באיור).

תשובות סופיות:

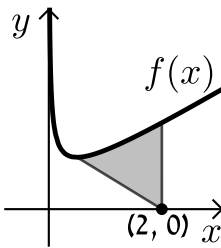
- 1) א. יח"ש.
 ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.
 2) א. $y = -x + 2$.
 3) א. יח"ש.
 4) א. $a = 32$, $(2, 8)$.
 5) א. $a = 36$, $f(x) = \frac{36-x^2}{x^2}$.
 6) א. $A = 6$.
 ב. $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$. ג. הוכחה.
 ד. $(-1.5, \frac{2}{3})$.
 ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

חישובי שטחים עם פונקצית שורש:

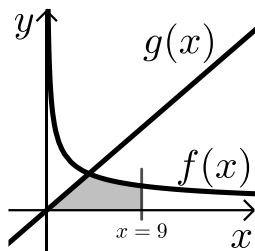
שאלות:



- (1) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + x$.
 מעבירים ישר: $y = 4x$ החותך את גרף הפונקציה
 בנקודה A המסומנת באיור.
 א. מצא את שיעורי הנקודה A.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$,
 הישר $y = 4x$, ציר ה- x ואנך לציר ה- x : $x = 4$.

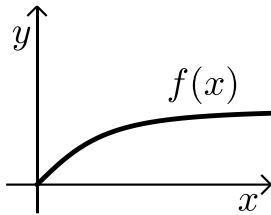


- (2) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$.
 א. מצא את נקודת המינימום שלה.
 ב. מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים
 ישר לנקודה $(2,0)$ שעל ציר ה- x .
 מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לציר ה- x
 היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

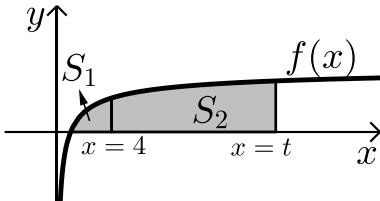


- (3) באיור הבא מתוארים הגרפים של
 הפונקציות: $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = 2x - 1$.
 א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
 ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים,
 ציר ה- x והישר $x = 9$.

- (4) נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$.
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת
 המינימום שלה וציר ה- y .



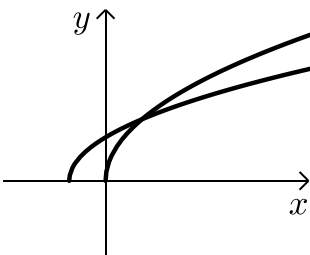
- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון. לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x = \sqrt{3}$.



- (6) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$. מעבירים שני אנכים לציר ה- x והם: $x = 4$ ו- $x = t$ ($t > 4$). נסמן:
 S_1 - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x .
 S_2 - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנכים. ידוע כי: $8S_1 = S_2$. מצא את t .

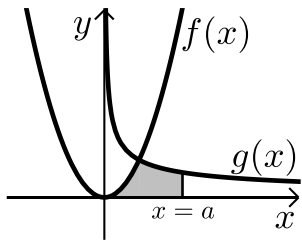
(7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$

- א. ענה על הסעיפים הבאים:
 i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ii. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 iii. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
 ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא: $m = \frac{17}{16}$. מצא את נקודת ההשקה.
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.



- (8) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \sqrt{x+b}$, $g(x) = \sqrt{2x}$ ($b > 0$). גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה- x הוא $2\frac{2}{3}$ יח"ש. מצא את ערכו של הפרמטר b .

9) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2$



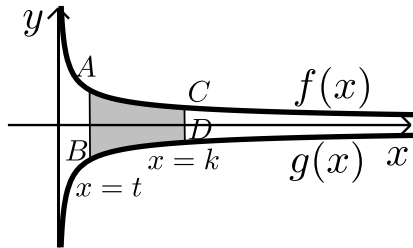
ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$ ברביע הראשון.

מעבירים ישר $x=a$ החותך את גרף הפונקציה $g(x)$ ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $S = 85\frac{1}{3}$.

מצא את a .

10) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$



מעבירים שני ישרים: $x=k$ ו- $x=t$ אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי: $2CD=AB$.

א. הראה כי: $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות

והישרים: $x=k$ ו- $x=t$ הוא: $S=12$.

מצא את t .

11) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא עבור איזה ערך של a , $(a > 1)$ יתקיים: $\int_1^a \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$

מעבירים שני אנכים לציר ה- x והם: $x=1$ ו- $x=13$

כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2 .

מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x

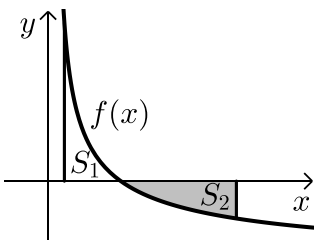
ג. ענה על הסעיפים הבאים:

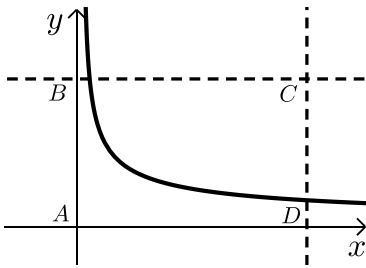
i. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והאנך $x=1$, (S_1) .

ii. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח S_2 .

נמק את טענתך.





(12) באיור שלפניך מתוארת הפונקציה: $f(x) = \frac{9}{\sqrt{2x-1}}$

מעבירים את הישרים המקבילים לצירים: $x = 13$

ו- $y = 3$ כך שנוצר המלבן ABCD כמתואר באיור.

הישר $y = 3$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה M.

א. מצא את שיעורי הנקודה M.

ב. מסמנים את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

והישרים ב- S_1 ואת שטח המלבן ב- S_2 .

$$\text{הראה כי: } \frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{13}$$

תשובות סופיות:

(1) א. $A(1,4)$ ב. 15.5 יח"ש.

(2) א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

(3) א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

(4) 2.26 יח"ש.

(5) 0.5 יח"ש

(6) $t = 16$

(7) א. i. $x > 0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$

ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

(8) $b = 2$

(9) $a = 9$

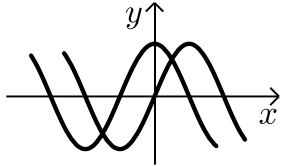
(10) א. הוכחה ב. $t = 1$

(11) א. $a = 13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1 = 2$ ii. $S_2 = |-S_1| = 2$

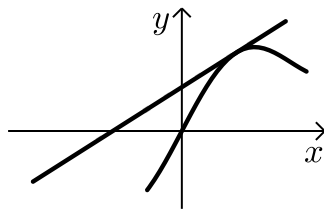
(12) א. $M(5,3)$

חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות:

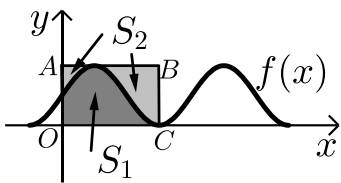
שאלות:



- (1) נתונות הפונקציות: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לציר ה- y ברביע הראשון.



- (2) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2 \sin x$.
בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.
א. מצא את משוואת המשיק.
ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x ברביעים הראשון והשני.



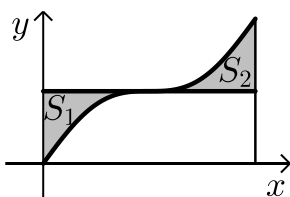
- (3) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$

בתחום: $-0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$ מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ומעלים אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון המסומנת ב- C כך שנוצר המלבן $ABCO$.
השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (ראה סימון בציור).
השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .
א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.

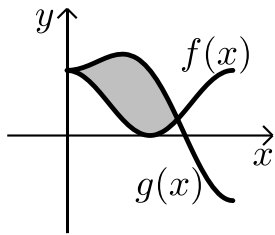
ב. חשב את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

- (4) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $y = \sin x + x$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

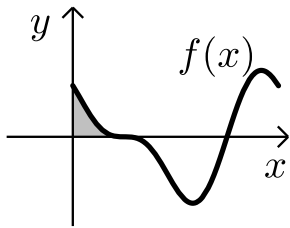
א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון?
ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה: $x = 2\pi$.
מעבירים ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.



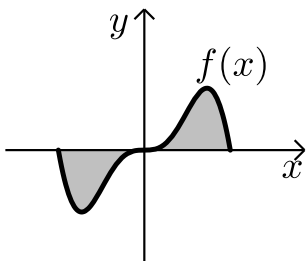
הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 המסומנים בסרטוט שווים.



- 5) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה
 הבאות: $f(x) = \cos^2 x$ ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$
 בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
 השתמש בזהות: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.



- 6) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$.
 א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות
 המקיימות: $f'(x) = 0$ בתחום: $0 < x < 2\pi$.
 ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$ אשר אינה
 קיצון נמצאת על ציר ה- x .
 ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.
 ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
 חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



- 7) ענה על הסעיפים הבאים:
 א. נתונה הפונקציה: $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$
 הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y' = x^2 \sin x$
 באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 \sin x$
 בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.
 ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה
 וציר ה- x בתחום הנתון.

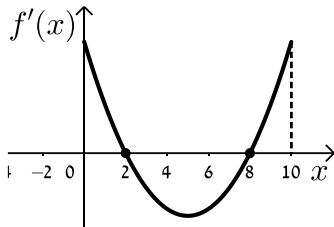
- 8) נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cos x + b \sin x$, פרמטרים.
 הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$ והיא חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
 גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2} - 2$.
 מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות:

- (1) 0.41 יח"ש.
- (2) א. $y = x + 2$. ב. π יח"ש.
- (3) א. $y = 1$. ב. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$.
- (4) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π, π) היא נקודת פיתול.
 ב. $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$.
- (5) א. $(0, 1)$, $(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4})$. ב. $S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$.
- (6) א. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. ב. $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$. ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.
- (7) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$.
- (8) $b = -2, a = 2$.

חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:

שאלות:



1 הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$.

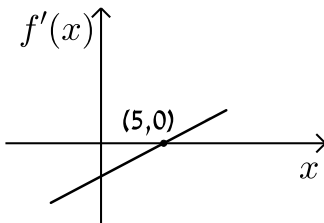
בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

אם: $f(2) = 6, f(0) = -4, f(5) = 0$ וכך: $f(10) > 0$.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים ברביע הראשון

עד לנקודה שבה $x = 2$.



2 לפי גרף של הפונקציה $f'(x)$.

הגרף המתואר חותך את ציר ה- x בנקודה

אחת בלבד והיא $(5, 0)$.

א. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ היא חיובית

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

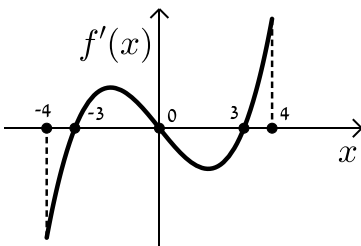
ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי

שיעור ה- y שלה הוא -2 .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- y כאשר $y = 8$.

ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.



3 בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.

א. רשום את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון

של $f(x)$ וקבע את סוגן.

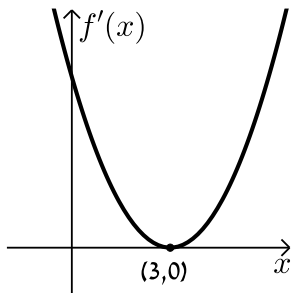
ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ עוברת בראשית הצירים וגם מקיימת: $f(-3) = f(3) = m$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנ"ל (הבע באמצעות m).

ד. השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ וציר ה- x ברביעים

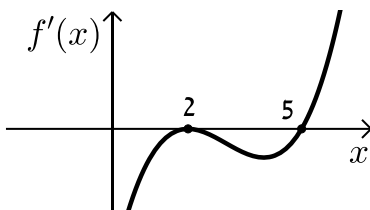
השני והרביעי הוא 16 יח"ש. מצא את m .

4 הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור הבא.



- א. האם ל- $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי $f(3) = 4$ וכי היא חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.
- ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.

5 באיור שלפניך מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.

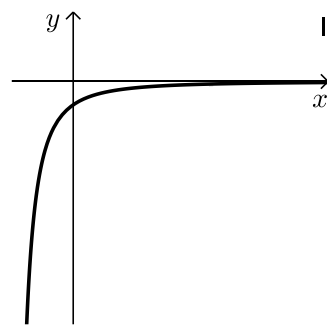
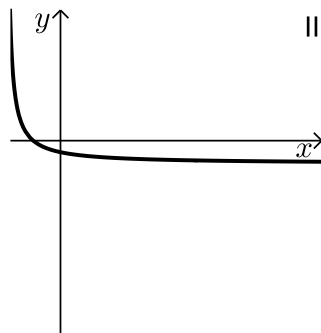


ידוע כי הנקודות $B(2, 2)$, $A(5, -4.75)$

ו- $C(0, 14)$ נמצאות על $f(x)$.

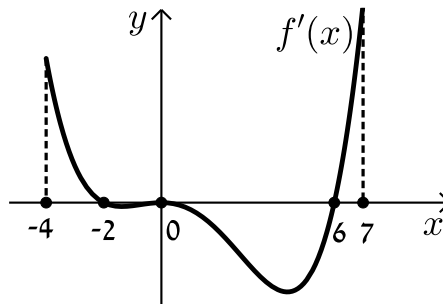
- א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ד. חשב את השטח מוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים בתחום $0 \leq x \leq 5$.

6 באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:



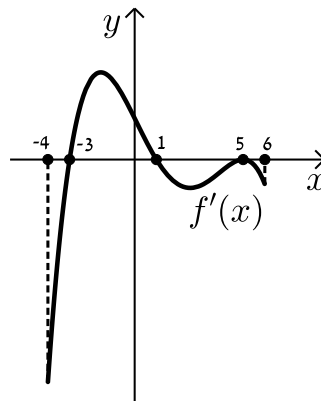
- א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.
- ב. נתון כי $f(10) = -3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$. מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

7 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:



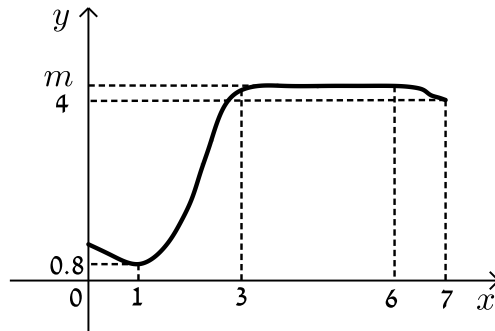
- א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 7$ לפי הנתונים: $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.
- ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.
- ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

8 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:



- א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 6$ עבור הנתונים: $f(5) = -83\frac{1}{3}$, $f(1) = 36\frac{2}{15}$, $f(-3) = -356\frac{2}{5}$.
- ב. חשב את כלל השטח הכלוא בין גרף הנגזרת וציר ה- x בתחום: $-3 \leq x \leq 5$.

9) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 < x < 7$:



הסתמך על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים על הצירים וענה על השאלות הבאות :

א. מצא עבור אילו ערכים של x השונים מ-6 מתקיים :

i. $f'(x) > 0$

ii. $f'(x) = 0$

iii. $f'(x) < 0$

ב. נתון כי : $\int_3^6 m dx = 15$, כאשר m הוא פרמטר המסומן על ציר ה- y .

מצא את $f(5)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקציה הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 < x < 3$.

ד. מצא את השטח המוגבל בין הגרף של פונקציה הנגזרת $f'(x)$

וציר ה- x בתחום $1 < x < 3$.

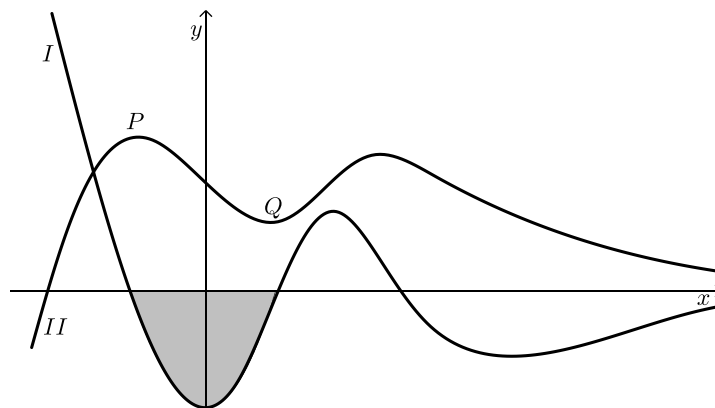
10) בסרטוט נתונים הגרפים של פונקציה ושל נגזרתה.

א. קבע איזה מהגרפים, I או II, שייך לפונקציה ואיזה שייך לנגזרת. נמק.

ב. כמה נקודות פיתול יש לפונקציה? נמק וסמן אותן על הסרטוט.

ג. נתון : $P(-2, 4)$, $Q(2, 1)$. מצא את גודלו של השטח הכלוא בין גרף I

לציר ה- x (השטח המסומן בסרטוט).



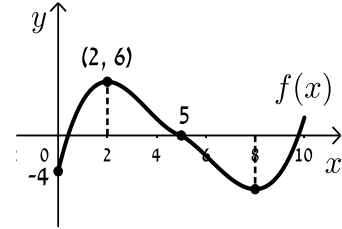
תשובות סופיות:

הערה: סרטוטי הסקיצות מופיעות במרוכז בעמוד הבא.

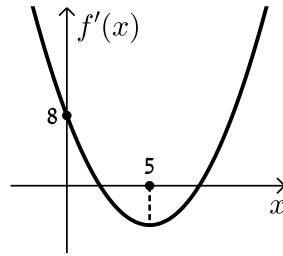
- (1) ב. 10 יח"ש.
- (2) א. חיובית: $x > 5$, שלילית: $x < 5$. ב. עולה: $x > 5$, יורדת: $x < 5$.
ג. $\min(5, -2)$. ד. הוכחה. ה. 10 יח"ש.
- (3) א. עולה: $3 < x \leq 4$, $-3 < x < 0$, יורדת: $0 < x < 3$, $-4 \leq x < -3$.
ב. $x_{\min} = -3$, $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = 3$. ג. הוכחה. ד. $m = -8$.
- (4) א. לא. הנקודה $(3, 0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. הוכחה. ג. 9 יח"ש.
- (5) א. $\min(5, -4.75)$. ב. עולה: $x > 5$, יורדת: $x < 5$.
ג. הוכחה. ד. 18.75 יח"ש.
- (6) א. $f(x): \text{II}$, $f'(x): \text{I}$. ב. 1 יח"ש.
- (7) א. הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (8) א. הוכחה. ב. 512 יח"ש.
- (9) א. i. $f'(x) > 0: 1 < x < 3$. א. ii. $f'(x) = 0: x = 1, 3 \leq x < 6$.
א. iii. $f'(x) < 0: 6 < x < 7, 0 < x < 1$.
ב. $f(5) = 5, m = 5$. ד. 4.2 יח"ש.
- (10) א. גרף I - $f'(x)$ וגרף II - $f(x)$. ב. 3 נקודות פיתול.
ג. 3 יח"ש.

סרטוטי גרפים לפי מספרי שאלות:

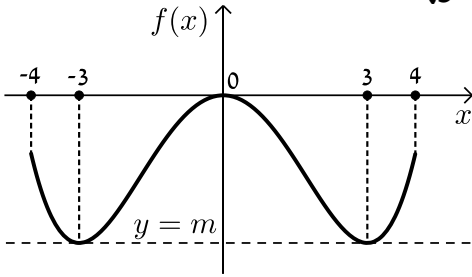
(1)



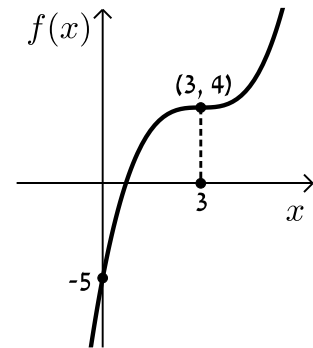
(2)



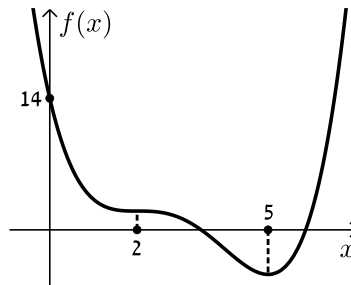
(3)



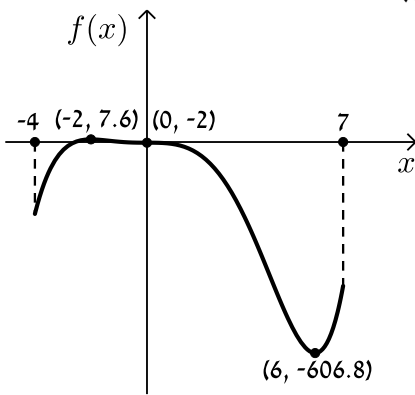
(4)



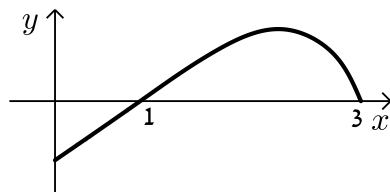
(5)



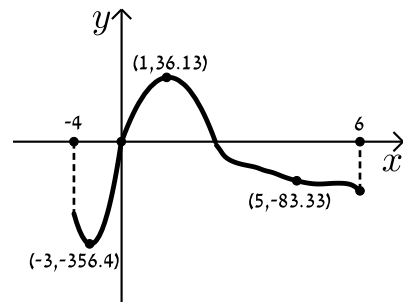
(7)



(9)



(8)



מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 28 - חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה

תוכן העניינים

346	1. פונקציה מעריכית.
352	2. פונקציה לוגריתמית.
358	3. פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי.

פונקציה מעריכית:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$

שאלות:

אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int (5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1) dx$

ג. $\int (6\sqrt{e^{4x-1}}) dx$

ב. $\int (3^x + 5^{2x}) dx$

ד. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$

ב. $\int \frac{3e^{3x} - 5e^{2x} + 4e^x - 2}{e^x - 1} dx$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int (e^{4x} + e^{-x}) dx$

ג. $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

ב. $\int (e^{x+1})^2 dx$

ד. $\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx$

4) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}} \right) dx$ ב. $\int \left(\frac{3-e^x}{(e^x-3x)^2} \right) dx$ ג. $\int (xe^{x^2}) dx$

אינטגרל מסוים:

5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(\ln 2, 3\frac{1}{4} \right)$.

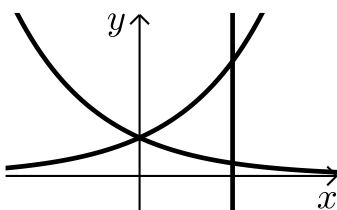
6) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = e^{2x} + e^x - 2$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא $\frac{1}{2}$.

7) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 6x^2e^{x^3} - \frac{1}{x^2}$.

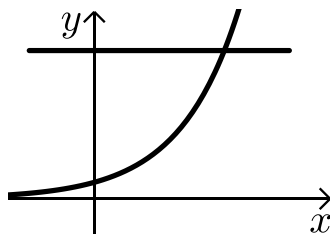
מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(-1, \frac{2}{e} \right)$.

חישובי שטחים:



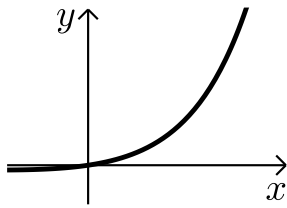
8) נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לישר $x = \ln 3$.

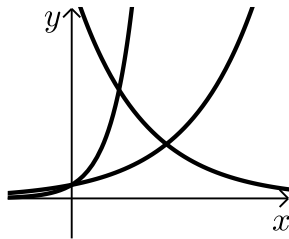


9) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3^x$.

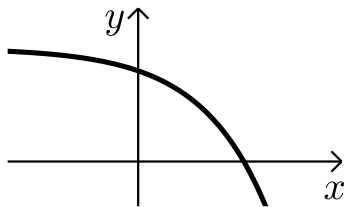
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר $y = 9$ וציר ה- y .



- 10** נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x} - e^x$.
 לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים.
 מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
 המשיק והישר $x = 2$.



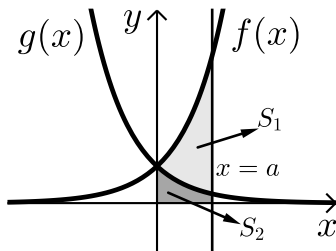
- 11** נתונות הפונקציות:
 $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{3x}$, $h(x) = 16e^{-x}$.
 חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.



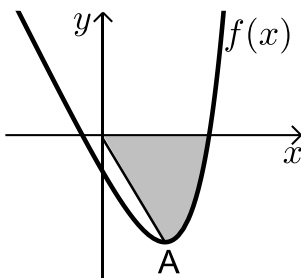
- 12** נתונה הפונקציה: $f(x) = 5 - e^x$.
 העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
 חשב את גודל השטח הכלוא בין
 הפונקציה, המשיק וציר ה- x .
 ניתן להשאיר e ו- \ln בתשובה.

- 13** נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{bx}$, $(0 < b)$.
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר
 בראשית הצירים וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$.
 מצא את ערכו של הפרמטר b .

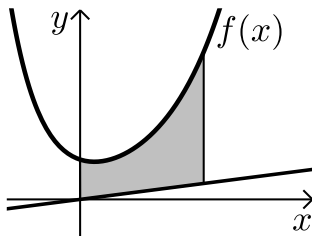
- 14** נתונות הפונקציות: $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, $g(x) = e^{-x}$.
 מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני
 הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$ ומנקודת החיתוך
 יורד אנך נוסף לציר ה- x כך שנוצר מלבן.
 הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.



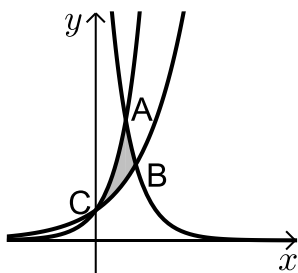
- 15** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$. מעבירים אנך לציר ה- x את הישר $x = a$, $a > 0$, כמתואר באיור. אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 . ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 . מצא את a .



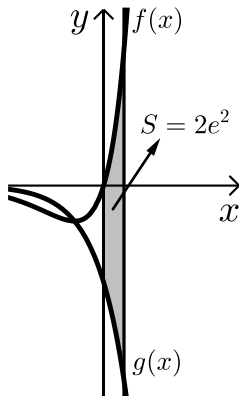
- 16** נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$. הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה. א. מצא את שיעורי הנקודה A. מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים. ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית. ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.7$.



- 17** נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$. ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$. א. מצא את a וכתוב את הפונקציה. ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והישר: $y = 0.1x$. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר y והאנך: $x = 2$.



- 18** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש פונקציות: I. $f(x) = 2^x$. II. $g(x) = 4^x$. III. $h(x) = 2^{4-2x}$. א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה. ב. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו- C. (נקודות החיתוך שבין הגרפים). ג. חשב את השטח המסומן באיור.



19 ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה: $y = e^x(x-1)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות: $f(x) = xe^x$, $g(x) = -e^x$.

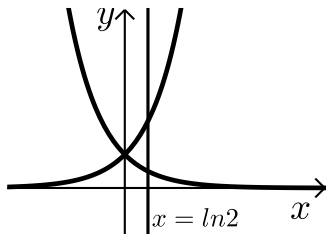
מעבירים ישר $x = a$ ($a > 0$), החותך את הגרפים

של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר

הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$. מצא את a .

חישובי נפחים:



20 נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

השטח הכלוא בין הפונקציות והישר: $x = \ln 2$

מסתובב סביב ציר ה- x .

חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

תשובות סופיות:

- (1) א. $5e^x - \frac{e^{3x}}{3} - e^{-x} + x + c$ ב. $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + c$
- ג. $3e^{2x-\frac{1}{2}} + c$ ד. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$
- (2) א. $e^x + x + c$ ב. $\frac{3e^{2x}}{2} - 2e^x + 2x + c$
- (3) א. $\frac{1}{4}e^{4x} - e^{-x} + c$ ב. $\frac{1}{2}e^{2x+2} + c$
- ג. $\frac{0.4^x}{\ln 0.4} + \frac{3.2^x}{\ln 3.2} + \frac{200^x}{\ln 200} + c$ ד. $8\sqrt{e^x} - \frac{3}{4}e^{-\frac{4x}{3}} + c$
- (4) א. $2\sqrt{e^x+3} + c$ ב. $\frac{1}{e^x-3x} + c$ ג. $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$
- (5) $f(x) = 2e^x + e^{-x} - 1.25$
- (6) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 2x - 1$
- (7) $f(x) = 2e^{x^3} + \frac{1}{x} + 1$
- (8) $S = 1\frac{1}{3}$ יח"ש
- (9) $S = 10.72$ יח"ש
- (10) $S = 18.41$ יח"ש
- (11) $S = 3\frac{1}{3}$ יח"ש
- (12) $S = 0.192$ יח"ש
- (13) $b = 2$
- (15) $a = \ln 2$
- (16) א. $A(1, -e-2)$ ב. $y = -(e+2)x$ ג. $S = 4.744$ יח"ש
- (17) א. $a = -2$ ב. $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$ ג. 1.52
- (18) א. $A(1, 4)$, $B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right)$, $C(0, 1)$ ב. 1.03 יח"ש
- (19) א. $y' = xe^x$ ב. $a = 2$
- (20) $1\frac{1}{8}$ יח"ש

פונקציה לוגריתמית:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$

שאלות:

אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1} \right) dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{x^2+3x-4}{x} dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{x+3}{x^2-9} dx \quad \text{ג.}$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2+3x+5}{x+1} dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{x^3-x^2+5x-6}{x-2} dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{x^4+3}{x+1} dx \quad \text{ג.}$$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{2x}{x^2-3} dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{x-1}{x^2-2x} dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{e^x}{e^x+5} dx \quad \text{ג.} \\ \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \quad \text{ד.} \quad \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \quad \text{ה.}$$

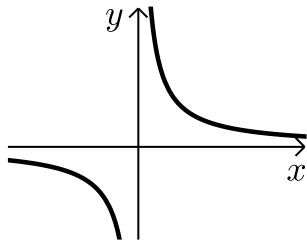
אינטגרל מסוים:

(4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - \frac{1}{x-4}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה (5, 28).

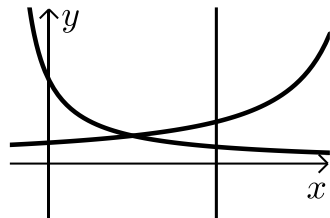
- (5) נתונה נגזרת שנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$. מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(1, -2)$ וששיפועה בנקודה זו הוא 3.

חישובי שטחים:



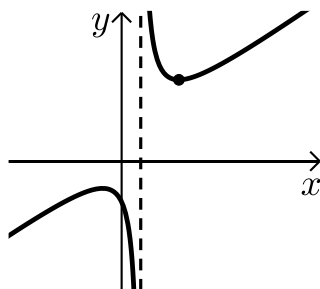
- (6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = -1$ ו- $x = -4$ וציר ה- x . ניתן להשאיר \ln בתשובה.



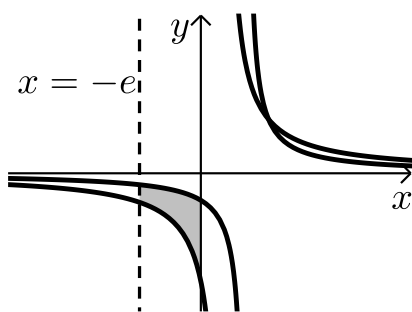
- (7) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{2}{x+1}$, $f(x) = \frac{4}{8-x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר $x = 4$ והצירים.



- (8) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 2$ ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום של הפונקציה. אפשר להשאיר ביטוי עם \ln בתשובה.



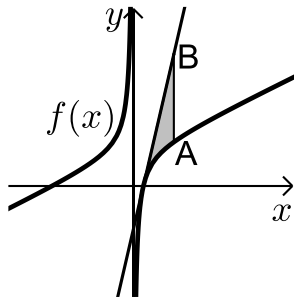
- (9) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a}{x-1}$.

ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$ בתחום: $x < 0$.

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 3$.

א. מצא את a וכתוב את שתי הפונקציות.

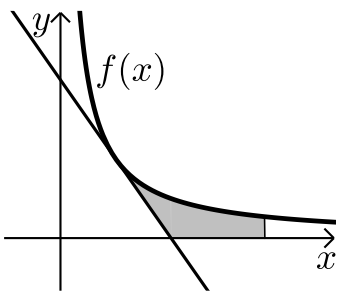
ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.



10 נתונה הפונקציה: $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$.

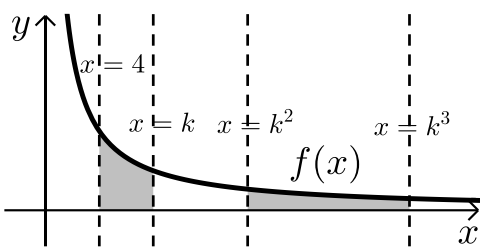
ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה
בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x היא: $y = 18x - 9$.
א. מצא את a ו- b וכתוב את הפונקציה.
מעבירים ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף
הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק בנקודה B.
אורך הקטע AB הוא 18.

- ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A
נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



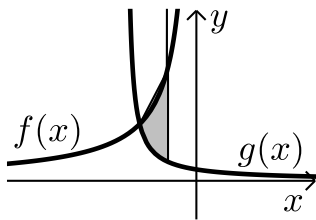
11 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה
שבה: $x = 2$ היא: $y = 4 - x$.
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$
והמשיק בתחום: $x > 0$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק,
ציר ה- x והישר $x = e^2$.



12 באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x}$.

בתחום: $x > 0$. מעבירים את הישרים:
 $x = 4$, $x = k$, $x = k^2$, $x = k^3$
כמתואר $x > 4$.
א. הבע באמצעות k את השטחים S_1 ו- S_2 .
ב. הראה כי ההפרש: $S_2 - S_1$ אינו תלוי ב- k וחשב את ערכו.
ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 . מצא את k .



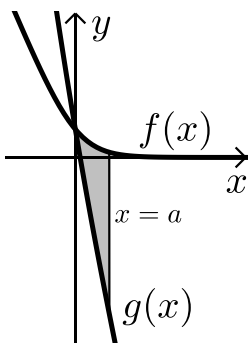
13 נתונות הפונקציות: $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.

גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 0.4$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.



14 באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$ ו- $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$

בתחום: $(x \geq 0)$.

א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y .

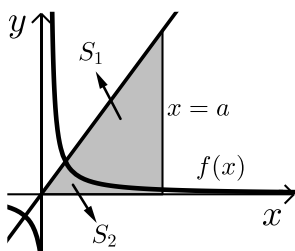
ב. מעבירים ישר $x = a$, $(a > 1)$, המאונך

לציר ה- x אשר חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).

מצא את ערכו של a עבורו מתקיים: $S = 4$.

15 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ והישר: $y = x$.



א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.

מעבירים אנך לציר ה- x $x = a$ הנמצא מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2

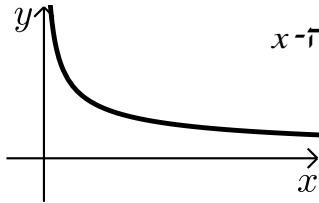
המתוארים האיור.

ב. מצא את הערך של a עבורו השטח S_2 יהיה שווה ל- $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$.

ג. עבור ערך ה- a שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.

חישובי נפחים:

$$(16) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$



השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=1$ ו- $x=3$ וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x . מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה. אפשר להשאיר \ln בתשובה.

$$(17) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר $x = \ln \sqrt{3}$ מסתובב סביב ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

$$(18) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=a$ ו- $x=a+3$ ($a > 0$), וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן זה.

תשובות סופיות:

$$\ln|x-3|+c \quad \lambda \quad \frac{x^2}{2}+3x-4\ln|x|+c \quad \text{ב.} \quad 3\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}+c \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x+8\ln|x-2|+c \quad \text{ב.} \quad \frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x+1|+c \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+4\ln|x+1|+c \quad \lambda$$

$$\ln|e^x+5|+c \quad \lambda \quad \frac{1}{2}\ln|x^2-2x|+c \quad \text{ב.} \quad \ln|x^2-3|+c \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\ln|\sin x|+c \quad \text{ה.} \quad \ln|e^x+e^{-x}|+c \quad \text{ז.}$$

$$f(x)=x^2-\ln|x-4|+3 \quad (4)$$

$$f(x)=x^3+\ln|x|-x-2 \quad (5)$$

$$S = \text{יח"ש} \ln 4 \quad (6)$$

$$S = \text{יח"ש} 2.17 \quad (7)$$

$$S = \text{יח"ש} 4\ln 2 - 2 \quad (8)$$

$$S = \text{יח"ש} 1.76 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{2}{x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{x-2}, \quad a=2 \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$x=2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = 7+2x-\frac{4}{x}, \quad a=2, \quad b=-4 \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$S = 6 + \ln 256 \approx \text{יח"ש} 11.54 \quad \lambda$$

$$S = \text{יח"ש} 6-4\ln 2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$k=8 \quad \lambda \quad S_2 - S_1 = \ln 16 \quad \text{ב.} \quad S_1 = 2\ln k - \ln 16, \quad S_2 = 2\ln k \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$S = \text{יח"ש} \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674 \quad \lambda \quad (-2, 2) \quad \text{ב.} \quad g(x) = \frac{2}{2x+5} \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$a=2 \quad \text{ב.} \quad (14)$$

$$\frac{S_1}{S_2} = 5.955 \quad \lambda \quad a=5 \quad \text{ב.} \quad (1, 1) \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$V = \text{יח"נ} \pi \ln 3 \quad (16)$$

$$V = \text{יח"נ} \frac{\pi}{2} \ln 2 \quad (17)$$

$$V = \text{יח"נ} \pi \left(19 \frac{1}{2} + 4 \ln 4 \right) \quad (18)$$

פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n} \neq -1$.

שאלות:

אינטגרל של פונקצית חזקה:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \sqrt[3]{x} dx$ ב. $\int (4x - 2\sqrt[4]{x}) dx$ ג. $\int (x \cdot \sqrt[5]{x}) dx$
 ד. $\int \frac{3}{\sqrt[3]{x}} dx$ ה. $\int \frac{x+4}{\sqrt[4]{x}} dx$ ו. $\int \frac{x^3 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx$
 ז. $\int \sqrt[3]{2x-3} dx$ ח. $\int \sqrt[4]{5-x} dx$ ט. $\int \frac{3}{\sqrt[8]{7x+12}} dx$
 י. $\int \frac{7}{\sqrt[5]{14-2x}} dx$

(2) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^8 (x + \sqrt[5]{4x}) dx$ ב. $\int_3^{16} (\sqrt[4]{5x+1}) dx$ ג. $\int_{-10}^5 \frac{2}{\sqrt[4]{6-x}} dx$

אינטגרל מסוים:

(3) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2, 3)$.
מצא את הפונקציה.

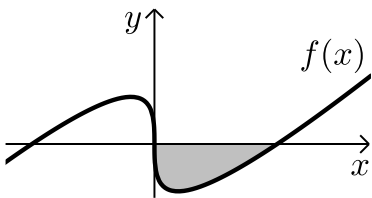
(4) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 4$.
מצא את הפונקציה.

(5) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[3]{x+1}} + (x-1)^2$

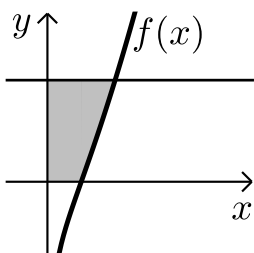
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -6$.
מצא את הפונקציה.

חישובי שטחים:



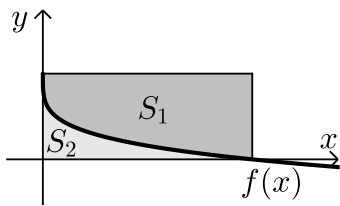
(6) באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה: $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



(7) באיור שלפניך מצויר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. מעבירים אנך לציר ה- y מהנקודה $(4, 6)$.
חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים.



8) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$.

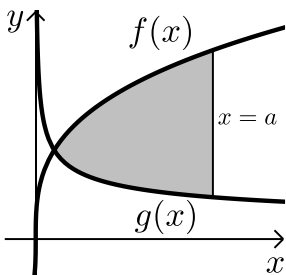
מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של

גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.

מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים:

ב- S_1 ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2 .

מצא את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.



9) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות

הבאות: $f(x) = 4\sqrt[3]{x}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום: $x > 0$.

ב. מעבירים אנך לציר ה- x , $x=a$, (a פרמטר).

ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים מנקודת

החיתוך שלהם ועד לאנך הוא: $42\frac{3}{16}$ סמ"ר.

מצא את a .

10) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$, (a פרמטר).

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=2$.

א. מצא את הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.

ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר

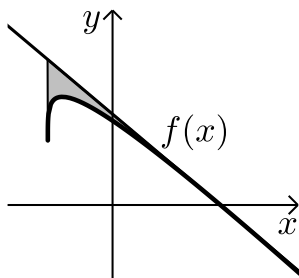
דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

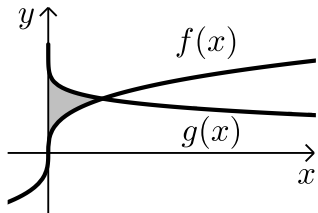
ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$

והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך

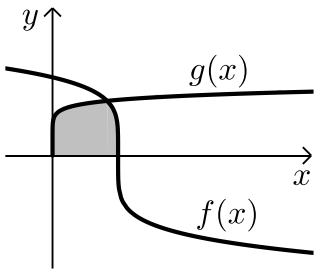
מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'.

חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

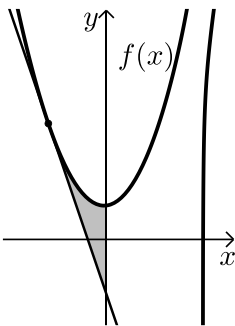




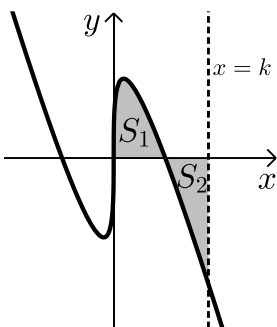
- 11** באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = 2 - \sqrt{x}$.
 א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y .



- 12** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 1.2$.
 א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה: $g(x) = \sqrt[10]{x}$ וציר ה- x .



- 13** נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$.
 א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -3$.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .



- 14** נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$.
 א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 . מעבירים ישר $x = k$ אשר יוצר את השטח S_2 כמתואר. מצא את k אם ידוע כי: $S_1 = S_2$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $0.75\sqrt[3]{x^4} + c$ ב. $2x^2 - 1.6\sqrt[4]{x^5} + c$ ג. $\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}} + c$
- ד. $4.5\sqrt[3]{x^2} + c$ ה. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3} + c$ ו. $\frac{2}{7}\sqrt{x^7} - 2\sqrt{x^3} + 10\sqrt{x} + c$
- ז. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4} + c$ ח. $-0.8\sqrt[4]{(5-x)^5} + c$ ט. $\frac{24}{49}\sqrt[8]{(7x+12)^7} + c$
- י. $-\frac{35}{8}\sqrt[5]{(14-2x)^4} + c$
- (2) א. $45\frac{1}{3}$ ב. 33.76 ג. $18\frac{2}{3}$
- (3) $f(x) = x^2 - \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4} + 2$
- (4) $f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12.15$
- (5) $f(x) = 12.5\sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3}(x-1)^3 - 18\frac{1}{6}$
- (6) א. $(0,0)$; $(8,0)$ ב. 16 יח"ש = S
- (7) א. $x > 0$ ב. $(2,0)$ ג. 18.149 יח"ש = S
- (8) $\frac{S_1}{S_2} = 4$
- (9) א. $\left(\frac{1}{8}, 2\right)$ ב. $a = 8$
- (10) א. $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x$, $a = 1$ ב. $x \geq -1.2$ ג. $(-1.2, 1.2)$
- ד. $y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16}$ ה. 0.48 יח"ש = S
- (11) א. $(1,1)$ ב. $\frac{11}{28}$ יח"ש = S
- (12) א. $f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. $1\frac{5}{66}$ יח"ש = S

$$y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א. (13)} \quad \text{ב. } S = 4.56 \text{ יח"ש}$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296.. \quad \text{ג. } (0,0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad \text{א. כל } x \quad \text{(14)}$$

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 29 - התמרת לפלס

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)
2. התמרת לפלס 364
3. התמרת לפלס ההפוכה 367
4. נוסחאות - התמרת לפלס 371

התמרת לפלס

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות להתמרת לפלס.

שאלות

חשבו את התמרות לפלס בשאלות 1-12 בעזרת טבלת התמרות לפלס:

$$L\left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t+1}\right) \quad (2) \qquad L(t^2 + 4t - 2) \quad (1)$$

$$L(\cosh 4t) \quad (4) \qquad L(e^{-4t} + 10e^{2t}) \quad (3)$$

$$L(\sin 2t \cos 2t) \quad (6) \qquad L(\sinh 10t) \quad (5)$$

$$L(\sin^2 t) \quad (8) \qquad L(\sin 2t \cos 3t) \quad (7)$$

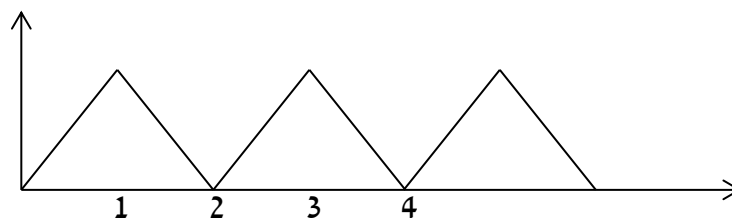
$$L(t^2 \sin 4t) \quad (10) \qquad L(\cos^2 4t) \quad (9)$$

$$L(e^{2t} \sin 4t) \quad (12) \qquad L(t^4 e^{2t}) \quad (11)$$

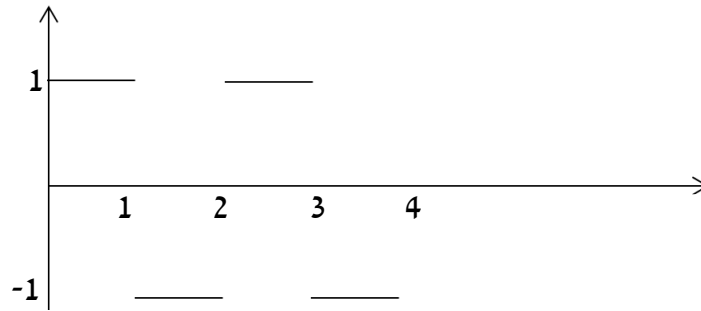
(13) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה $g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$

(14) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה $g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \end{cases}$

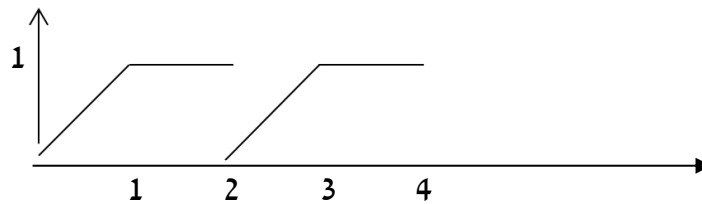
(15) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



16 מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



17 מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



18 הגדירו ושרטטו את פונקציית המדרגה $u(t)$ ואת ההזזה שלה $u(t-k)$.

19 שרטטו את הפונקציה $f(t) = u(t-2) - u(t-3)$, כאשר $u(t)$ פונקציית המדרגה.

20 רשמו את הפונקציה $f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$, בעזרת פונקציית המדרגה.

21 רשמו את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה $u(t)$,

של הפונקציה $u(t-k)$, ושל הפונקציה $f(t-k)u(t-k)$.

22 חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה : $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ (t-4)^2 & t \geq 4 \end{cases}$.

23 חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה : $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ t^2 & t \geq 4 \end{cases}$.

24 ענו על הסעיפים הבאים :

א. הגדירו ושרטטו את פונקציית הדלתא $\delta(t)$.

ב. מהי התמרת לפלס של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה $\delta(t-a)$?

תשובות סופיות

$$\frac{12}{s^5} + s^{-3/2} + \frac{1}{s} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-4} + \frac{1}{s+4} \right] \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{s^2+16} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+4} \quad (8)$$

$$\frac{8(3s^2-16)}{(s^2+16)^3} \quad (10)$$

$$\frac{4}{(s-2)^2+16} \quad (12)$$

$$\frac{1-2e^{-s}}{s^2} \quad (14)$$

$$\frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})} \quad (16)$$

$$u(t-k) = \begin{cases} 0 & t < k \\ 1 & t \geq k \end{cases} \quad (18)$$

$$\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \quad (1)$$

$$\frac{1}{s+4} + 10 \frac{1}{s-2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-10} - \frac{1}{s+10} \right] \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{s^2+25} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+64} \quad (9)$$

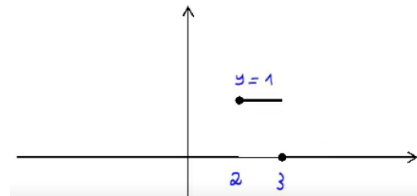
$$\frac{24}{(s-2)^5} \quad (11)$$

$$\frac{1-e^{-s}}{s^2} \quad (13)$$

$$\frac{1-2e^{-s}+e^{-2}}{s^2(1-e^{-2s})} \quad (15)$$

$$\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})} \quad (17)$$

$$(19)$$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases} = u(t-4) \quad (20)$$

$$L(u(t-k)f(t-k)) = e^{-ks}L(f(t)) \quad (21)$$

$$L((t-4)^2 \cdot u(t-4)) = \frac{2e^{-4s}}{s^3} \cdot \mathcal{N} \quad (22)$$

$$e^{-4s}L(t^2) + 8e^{-4s}L(t) + 16 \frac{e^{-4s}}{s} \quad (23)$$

$$L[\delta(t-2\pi)] = e^{-2\pi s} \quad (24)$$

התמרת לפלס ההפוכה

שאלות

חשבו את ההתמרות בשאלות 1-29:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) \quad (2)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \quad (1)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) \quad (4)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right) \quad (3)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right) \quad (6)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \quad (5)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) \quad (8)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right) \quad (7)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \quad (10)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right) \quad (9)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right) \quad (12)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right) \quad (11)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right) \quad (14)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right) \quad (13)$$

$$L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right) \quad (16)$$

$$L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right) \quad (15)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right) \quad (18)$$

$$L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right) \quad (17)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2-4s+4)}\right) \quad (20)$$

$$L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right) \quad (19)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right) \quad (22)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right) \quad (21)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right) \quad (24)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right) \quad (23)$$

$$L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right) \quad (26)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) \quad (25)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1} + \frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right) \quad (28)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{s} - \frac{4e^{-s}}{s^2} + \frac{4e^{-3s}}{s^2}\right) \quad (27)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right) \quad (29)$$

* בשאלה 27 כתבו את התוצאה בצורה מפורטת ושרטטו אותה.

$$(30) \text{ נתון } F(s) = \frac{e^{-s} + 2}{s}$$

חשבו את $f(0)$ ו- $f(\infty)$, כאשר $f(t) = L^{-1}(F(s))$. פתרו בשתי דרכים שונות.

$$\text{הערה: } f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t), \quad f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

(31) הסבירו והדגימו את משפט הקונוולוציה.

השתמשו במשפט הקונוולוציה כדי לחשב את התרגילים הבאים:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-1)}\right) \quad (32)$$

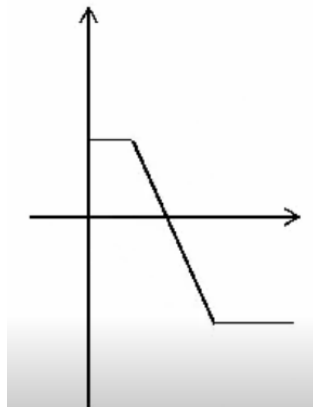
$$L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right) \quad (33)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right) \quad (34)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right) \quad (35)$$

תשובות סופיות

- $$\frac{t^3}{3!} \quad (2) \qquad 1 \quad (1)$$
- $$\frac{1}{3} \sin 2t \quad (4) \qquad e^{10t} \quad (3)$$
- $$e^{10t} \frac{1}{2} \sin 2t \quad (6) \qquad \cos 2t \quad (5)$$
- $$\frac{1}{4} t \sin 2t \quad (8) \qquad e^{2t} \left\{ \cos 2t + 2 \frac{1}{2} \sin 2t \right\} \quad (7)$$
- $$\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{x}} \quad (10) \qquad \frac{1}{4} t \sin 2t \quad (9)$$
- $$1 - 2e^{-5t} \quad (12) \qquad \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} \quad (11)$$
- $$1 + \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} \quad (14) \qquad 3e^{-3t} - 2e^{-2t} \quad (13)$$
- $$e^{-3t} + e^{3t} - e^{-2t} - e^{2t} \quad (16) \qquad e^{-t} + 2e^{-2t} + 3e^{3t} \quad (15)$$
- $$-6 + 5t + 6e^{-2t} \quad (18) \qquad e^{2t} + 4te^{2t} - e^{-2t} \quad (17)$$
- $$2e^t + te^t - 2e^{2t} + te^{2t} \quad (20) \qquad 4 - 4e^{-3t} - 3te^{-3t} \quad (19)$$
- $$\frac{1}{\sqrt{0.75}} e^{-0.5t} \sin \sqrt{0.75} t \quad (22) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2} t \quad (21)$$
- $$\cos t + e^{-2t} \quad (24) \qquad \sin t + 2e^{3t} \quad (23)$$
- $$\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t \quad (25)$$
- $$e^t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + 5t \sin 2t + \frac{5}{4} (\sin 2t - 2t \cos 2t) \quad (26)$$
- $$3 - 4u(t-1) \cdot (t-1) + 4u(t-3) \cdot (t-3) \quad \text{א.} \quad (27)$$
- $$\text{שרטוט: } \begin{cases} 3 & t < 1 \\ 7 - 4t & 1 < t < 3 \\ -5 & t \geq 3 \end{cases} \quad \text{ב.}$$



$$u(t-4)e^{-(t-4)} + u(t+2)\sin(t+2) \quad (28)$$

$$u(t-10)(e^{t-10} - e^{2(t-10)}) \quad (29)$$

$$f(0) = 2 \quad f(\infty) = 3 \quad (30)$$

שאלת הסבר. (31)

$$-\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 2) + e^t \quad (32)$$

$$0.5t - \frac{1}{4}\sin 2t \quad (33)$$

$$\frac{1}{4}e^{4t}(t-1) + \frac{1}{4} \quad (34)$$

$$\frac{1}{2}(-2\cos t + 2 - t\sin t) \quad (35)$$

נוסחאות – התמרת לפלס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n (for $n = 1, 2, 3, \dots$)
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (for $n = 1, 2, 3, \dots$)
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1} e^{at}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} (\sin(at) + at \cos(at))$
$\frac{a}{[(s+b)^2+a^2]}$	$e^{-bt} \sin at$

$\frac{s+b}{[(s+b)^2+a^2]}$	$e^{-bt} \cos at$
$\frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}$	$t \sin at$
$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t \cos at$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin(at) - at \cos(at))$
$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} s^{-\frac{3}{2}}$	\sqrt{t}
$\sqrt{\pi} s^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{e^{-ks}}{s}$	$u(t-k)$
$e^{-ks} \cdot F(s)$	$u(t-k) f(t-k)$
$(-1)^n (F(s))^{(n)}$	$t^n g(t)$

תוספות

- נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה $F(s)$, של פונקציה $f(t)$, ורוצים את $f(0)$ ו- $f(\infty)$.
- אז במקום למצוא את $f(t)$ ולהציב, ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx$$

- קונוולוציה:

$$L(f(t) * g(t)) = F(s) \cdot G(s)$$

$$L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = f(t) * g(t)$$

$$L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx$$