מתמטיקה להנדסאי חשמל

תוכן העניינים

1. סימן הסכימה (סיגמה) 1
2. מבוא לגאומטריה של המישור 4
3. גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר 12
4. גיאומטריה אוקלידית - משולשים 37
5. טריגונומטריה במשולש ישר זווית 58
6. טריגונומטריה במישור 63
7. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות 96
8. מטריצות 109
9. דטרמיננטות 137
10. חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים 156
11. משוואות ואי-שוויונים מעריכיים 172
12. וקטורים גיאומטריים 179
13. וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב 193
14. וקטורים במרחב כולל מכפלה וקטורית מכפלה מעורבת ושימושיהם 224
15. מספרים מרוכבים 234
16. חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים 250
17. חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון 265
18. חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי 287
19. חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים 305
20. חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה 334
21. התמרת לפלס 352

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 1 - סימן הסכימה (סיגמה)

תוכן העניינים

1. כללי 1

סימן הסכימה (סיגמה):

שאלות:

1) כתוב בפירוט את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$ ב. $\sum_{k=1}^{4} 2k$ ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$

ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$ ה. $\sum_{t=1}^{8} tx^t$ ו. $\sum_{k=4}^{10} na_k$

ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$ ח. $\sum_{k=-1}^{3} \left(k^2+1\right)$ ט. $\sum_{l=1}^{3} \left(l^2 - x_l - 4\right)$

2) כתוב את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$

ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$

ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

ד. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8$

ה. $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+...+44\cdot 45$

ו. $3\cdot 2+6\cdot 3+9\cdot 4+12\cdot 5+15\cdot 6+18\cdot 7+21\cdot 8$

ז. $5^2+7^2+...+27^2$

ח. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{10\cdot 11}$

ט. $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\frac{18}{243}$

י. $4+\frac{8}{5}+\frac{12}{25}+\frac{16}{125}+\frac{20}{625}$

3) חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$ ב. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k+4k^2\right)$ ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$

ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3-k}{k+1}$ ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$ ו. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k^2+1\right)(k-2)$

* תוכל להיעזר בנוסחאות הבאות: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

4) חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{20}\frac{5\cdot 4^k+8^k}{2^k}$ ב. $\sum_{k=1}^{11}\frac{2\cdot 4^{k+2}+10^k}{0.4^k}$ ג. $\sum_{k=10}^{20}2^{2k+10}$

* תוכל להיעזר בנוסחה הבאה: $(a\neq 1)$ $\sum_{k=1}^{n}a^k=\frac{a\left(a^n-1\right)}{a-1}$.

5) חשב את הסכומים הבאים:

א. $1^2+2^2+3^2+...+20^2$ ב. $4^2+5^2+6^2+...+24^2$

ג. $2^2+4^2+6^2+...+22^2$ ד. $1^2+3^2+5^2+...+17^2$

6) הוכח כי:

א. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k+4}}{k+2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{2k+6}}{k+3}$

ב. $\sum_{k=4}^{n-3}\frac{4k+17+2^{2k}}{k+1}=\sum_{k=8}^{n+1}\frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$

7) חשב את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

א. $\sum_{4}^{11}k^2$ ב. $\sum_{10}^{20}4^{2k}$

תשובות סופיות:

1) א. $4^0+4^1+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+4^8+4^9+4^{10}$

ב. $2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4$

ג. $4a_4+4a_5+4a_6+4a_7+4a_8+4a_9+4a_{10}$

ד. $4\cdot7^2a_7+4\cdot8^2a_8+4\cdot9^2a_9+4\cdot10^2a_{10}+4\cdot11^2a_{11}+4\cdot7^2a_7$

ה. $1x^1+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+7x^7+8x^8$

ו. $na_5+na_6+na_7+na_8+na_9+na_{10}+na_{11}$

ז. $4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n$

ח. $\left((-1)^2+1\right)+\left(0^2+1\right)+\left(1^2+1\right)+\left(2^2+1\right)+\left(3^2+1\right)$

ט. $\left(1^2-x_2-4\right)+\left(2^2-x_4-4\right)+\left(3^2-x_6-4\right)$

2) א. $\sum_{k=0}^{7}2^k$ ב. $\sum_{k=1}^{10}2k$ ג. $\sum_{k=0}^{9}(2k+1)$ ד. $\sum_{k=1}^{7}k(k+1)$

ה. $\sum_{k=1}^{22}(2k-1)2k$ ו. $\sum_{k=1}^{7}3k(k+1)$ ז. $\sum_{n=3}^{14}(2n-1)^2$

ח. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$ ט. $\sum_{k=1}^{5}\frac{4k-2}{3^k}$ י. $\sum_{k=1}^{4}\frac{4k}{5^{k-1}}$

3) א. 220 ב. 1650 ג. 255 ד. 9160 ה. 28 ו. 4545

4) א. $5\cdot\left(2^{21}-2\right)+\frac{4}{3}\left(4^{20}-1\right)$ ב. $32\cdot\frac{10\left(10^{11}-1\right)}{10-1}+\frac{25\left(25^{11}-1\right)}{25-1}$

ג. $2^{10}\left[\frac{4\left(4^{20}-1\right)}{4-1}-\frac{4\left(4^{9}-1\right)}{4-1}\right]$

5) א. 2870 ב. 2856 ג. 2024 ד. 969

6) הוכחה.

7) א. $\frac{8(8+1)(2\cdot8+1)}{6}+6\cdot\frac{8(8+1)}{2}+9\cdot8$ ב. $4^{18}\cdot\frac{16\left(16^{11}-1\right)}{16-1}$

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 2 - מבוא לגאומטריה של המישור

תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות ..... (ללא ספר)

2. חיבור וחיסור קטעים 4

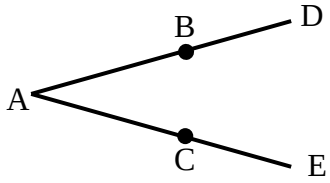
3. חישובי זוויות וחיבור וחיסור זוויות 5

4. זוויות קדקודיות וזוויות צמודות 7

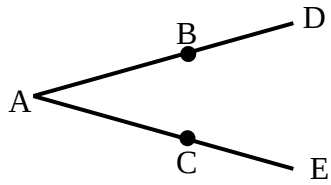
5. זוויות בין ישרים מקבילים 9

חיבור וחיסור קטעים:

שאלות:

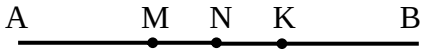


1) באיור שלפניך נתון: $AB = AC$, $BD = CE$.
הוכח: $AD=AE$.

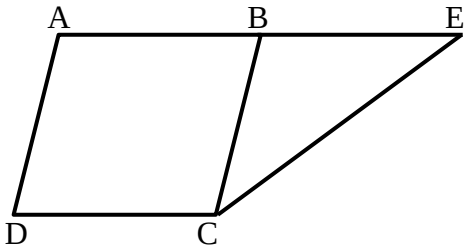


2) באיור שלפניך נתון: $AD = AE$, $AB = AC$.
הוכח: $BD = CE$.

3) הנקודות A, M, N, K, B נמצאות על ישר אחד.
נתון כי: $AM = KB$, $MN = NK$.
הוכח: $AN = BN$.



4) בסרטוט שלפניך נתון כי: $BC = AB$, $BE + BC = 2AB$.
הוכח: $AB = BE$.

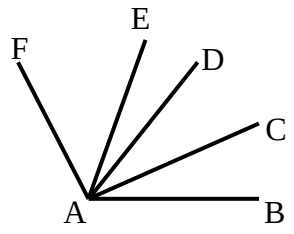


תשובות סופיות:

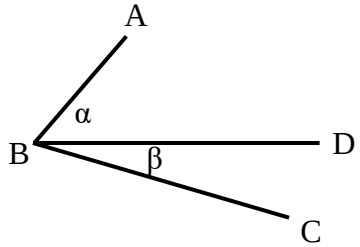
1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.

חישובי זוויות וחיבור וחיסור זוויות:

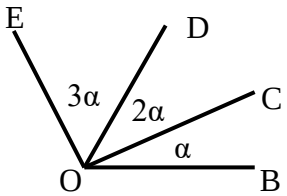
שאלות:



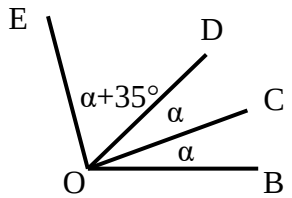
5) נתון: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAC$, $\sphericalangle FAE = 2\cdot\sphericalangle EAD$.
וכן: $\sphericalangle FAD = 60°$, $\sphericalangle EAB = 80°$.
חשב את הזויות הבאות:
$\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle EAC$, $\sphericalangle FAB$.



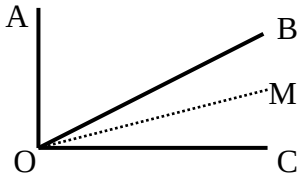
6) באיור שלפניך נתון: $\sphericalangle ABC = 69°$.
נתון כי: $\alpha = 2\beta$ (זוויות סמוכות).
מצא את α ואת β.



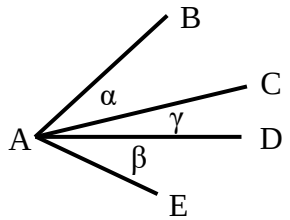
7) באיור שלפניך מספר קרניים היוצאים מהנקודה O.
הנתונים הם: $\sphericalangle EOB = 138°$.
חשב את הזויות הבאות:
$\sphericalangle COB$, $\sphericalangle DOC$, $\sphericalangle EOD$.



8) באיור שלפניך נתון: $\sphericalangle EOB = 110°$.
שאר הנתונים מופיעים בתרשים.
חשב את הזויות הבאות:
$\sphericalangle DOC$, $\sphericalangle EOC$.



9) נתון האיור הבא ובו: $\sphericalangle AOC = 90°$.
OM חוצה את זווית BOC.
מתקיים: $\sphericalangle AOB = 3\sphericalangle MOC$.
חשב את: $\sphericalangle BOM$, $\sphericalangle AOM$.



10) בסרטוט שלפניך נתון: $\alpha = \beta$.
הוכח כי: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$.

תשובות סופיות:

5) $\sphericalangle CAB = 30^\circ$, $\sphericalangle EAC = 50^\circ$, $\sphericalangle FAB = 120^\circ$.

6) $\beta = 23^\circ$, $\alpha = 46^\circ$.

7) $\sphericalangle DOE = 69^\circ$, $\sphericalangle COD = 46^\circ$, $\sphericalangle BOC = 23^\circ$.

8) $\sphericalangle DOC = 25^\circ$, $\sphericalangle EOC = 85^\circ$.

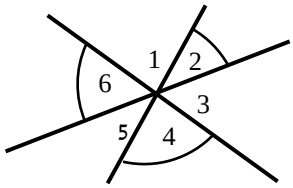
9) $\sphericalangle BOM = 18^\circ$, $\sphericalangle AOM = 72^\circ$.

10) שאלת הוכחה.

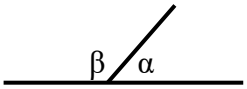
זוויות קדקודיות וזוויות צמודות:

שאלות:

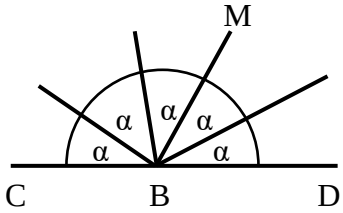
11) חשב את סכום הזויות הבאות (נמק):
$\sphericalangle 2+\sphericalangle 4+\sphericalangle 6$



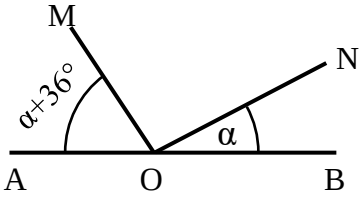
12) באיור שלפניך הזוויות α ו- β הן זוויות צמודות.
ידוע כי: $\alpha=63°$.
מצא את זווית β .



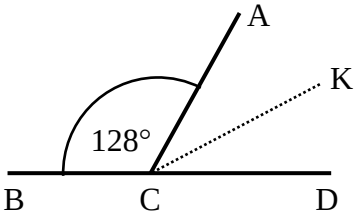
13) באיור שלפניך הזווית CBD היא שטוחה.
כל הזוויות שוות ל- α .
א. חשב את α .
ב. חשב את זווית CBM.



14) בסרטוט שלפניך ידוע:
הזווית AOB היא שטוחה.
נתון: $\alpha=27°$.
הוכח כי: $MO\perp NO$.



15) הזוויות $\sphericalangle ACD$ ו- $\sphericalangle ACB$ הן צמודות.
ידוע כי CK חוצה זווית ACD.
כמו כן: $\sphericalangle ACB=128°$.
חשב את זווית BCK.



תשובות סופיות:

11) $180°$.

12) $\beta = 117°$.

13) א. $\alpha = 36°$ ב. $\sphericalangle CBM = 108°$.

14) שאלת הוכחה.

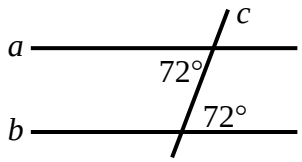
15) $\sphericalangle BCK = 154°$.

זוויות בין ישרים מקבילים:

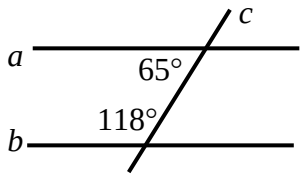
שאלות:

16) קבע בכל מקרה האם הישרים a ו-b מקבילים או שלא. נמק.

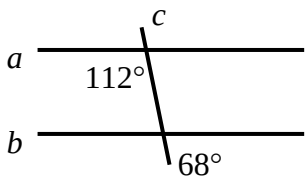
א.



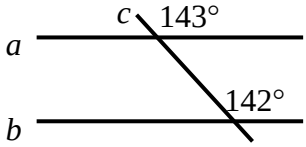
ב.



ג.

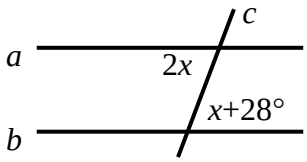


ד.

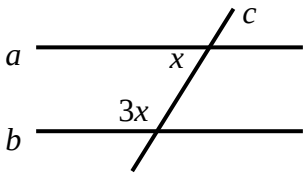


17) הישרים a ו-b מקבילים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:

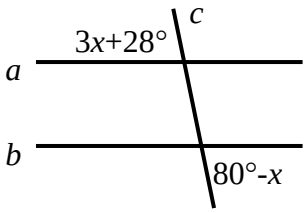
א.



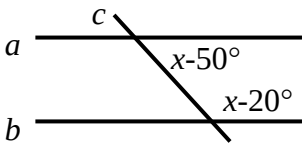
ב.



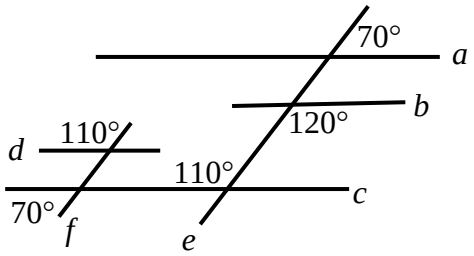
ג.



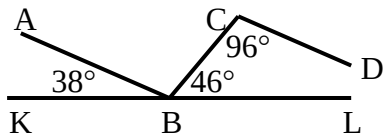
ד.



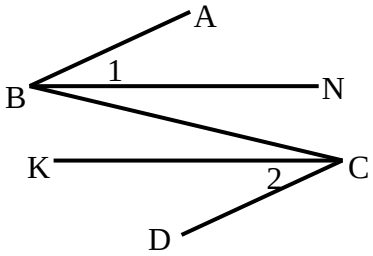
18) מצא את זוגות הישרים המקבילים בסרטוט הבא.
נמק.



19) בסרטוט שלפניך נתון כי KL הוא קו ישר.
שאר הזוויות מופיעות בתרשים.
הוכח כי: $AB \parallel CD$.



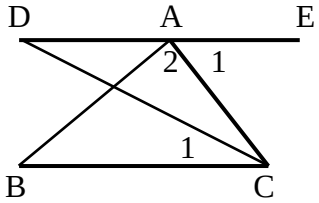
20) באיור שלפניך נתון כי:
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$, $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle C_2$.
הוכח כי: $BN \parallel CK$.



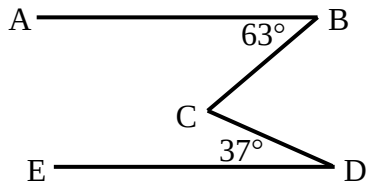
21) באיור שלפניך מופיע קטע ישר DE.
מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
מחברים את BC וידוע כי $BC \parallel DE$.
מעבירים את CD – חוצה זווית C.
נתון: $\sphericalangle A_1 = 68°$, $\sphericalangle A_2 = 85°$.

א. חשב את הזווית $\sphericalangle C_1$.

ב. חשב את הזווית $\sphericalangle B$.



22) בסרטוט שלפניך נתון:
$AB \parallel DE$, $\sphericalangle B = 63°$, $\sphericalangle D = 37°$.
חשב את גודל הזווית BCD.



תשובות סופיות:

16) א. כן ב. לא ג. כן ד. לא.

17) א. $28°$ ב. $45°$ ג. $13°$ ד. $125°$.

18) $a \parallel c \parallel d$, $e \parallel f$.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) א. $34°$ ב. $27°$.

22) $\sphericalangle BCD = 100°$.

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 3 - גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית 12
2. משוואת הישר 16
3. מצבים הדדיים בין ישרים 21
4. מציאת משוואות ישר 23
5. שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר 24
6. נושאים מתקדמים עם משוואת הישר ..... (ללא ספר)
7. חלוקת קטע ביחס נתון 30
8. מרחק נקודה מישר 31
9. מיקום נקודה ביחס לישר 33
10. מרחק בין ישרים מקבילים 35

מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ יחושב לפי: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.
- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$.

שאלות:

שאלות העוסקות באמצע קטע:

1) מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

א. $A(1,4)\ ,\ B(5,-8)$ ב. $A(-3,0)\ ,\ B(3,-2)$

ג. $A(4,5)\ ,\ B(-4,-5)$ ד. $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\ ,\ B\left(7\frac{1}{2},-2\right)$

ה. $A(6,-1)\ ,\ B(-3,-1)$ ו. $A(4,7)\ ,\ B(4,-12)$

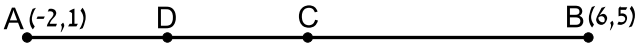
2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

א. $A(4,-2)\ ,\ M(2,1)$ ב. $A(-6,-8)\ ,\ M(0,0)$

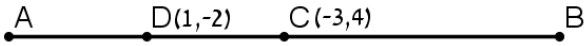
ג. $A(13,-11)\ ,\ M(4,-7)$ ד. $A\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)\ ,\ M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם $C(6,1)\ ,\ B(2,-4)$.
מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.

4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $A(-2,1)\ ,\ B(6,5)$. מצא את שיעורי הנקודה D.



5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $D(1,-2)$, $C(-3,4)$. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



6) הנקודות $A(2,-7)$, $B(-10,4)$ ו-$C(6,11)$ הן שלושה קדקודים של מקבילית ABCD.
מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי, D.

שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:

7) מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

א. $A(4,7)$, $B(-3,7)$

ב. $A(6,2)$, $B(1,2)$

ג. $A(-3,10)$, $B(0,6)$

ד. $A(6,-9)$, $B(1,3)$

ה. $A(4,7)$, $B(13,-1)$

ו. $A(6,6)$, $B(-9,-9)$

8) חשב את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם: $A(3,-2)$, $B(4,9)$, $C(0,14)$.

9) נתונות נקודות $A(14,4)$, $B(6,y)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך.
מצא את y.

10) נתונות נקודות $A(x,-12)$, $B(15,-2)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך.
מצא את x.

11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה- y שלה גדול פי 3 משיעור ה- x שלה
ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

12) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$
יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם $(0,4)$ ושיעורי ה- y של הקדקודים B ו-C
הוא 2-. מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC}=\sqrt{50}$
וידוע כי: $A(-3,-2)$, $B(-4,1)$. מצא את היקף המלבן.

שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:

14) מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

א. $A(5,2)\ ,\ B(4,1)$

ב. $A(3,-2)\ ,\ B(-3,1)$

ג. $A(7,8)\ ,\ B(6,15)$

ד. $A(0,5)\ ,\ B(7,0)$

ה. $A(6,9)\ ,\ B(6,-7)$

ו. $A(4,-1)\ ,\ B(18,-1)$

15) מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו הם: $A(6,5)\ ,\ B(2,13)\ ,\ C(4,-7)$ מונחים עליהם.

תשובות סופיות:

1) א. $(3,-2)$ ב. $(0,-1)$ ג. $(0,0)$
ד. $\left(4,-\frac{5}{8}\right)$ ה. $(1.5,-1)$ ו. $(4,-2.5)$.

2) א. $B(0,4)$ ב. $B(6,8)$ ג. $B(-5,-3)$ ד. $B\left(1,\frac{2}{3}\right)$.

3) $D(4,-1.5)$.

4) $D(0,2)$.

5) $A(5,-8)$, $B(-11,16)$.

6) $D(18,0)$.

7) א. $d_{AB}=7$ ב. $d_{AB}=5$ ג. $d_{AB}=5$ ד. $d_{AB}=13$
ה. $d_{AB}=\sqrt{145}$ ו. $d_{AB}=15\sqrt{2}$.

8) 33.862 יחידות אורך $\approx P_{ABC}$.

9) $y=10$ או $y=-2$.

10) $x=-9$ או $x=39$.

11) $B(-1,-3)$.

12) $B(3,-2)$, $C(-3,-2)$.

13) 18.97 יחידות אורך $\approx P_{ABCD}=6\sqrt{10}$.

14) א. $m_{AB}=1$ ב. $m_{AB}=-\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB}=-7$ ד. $m_{AB}=-\frac{5}{7}$
ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB}=0$.

15) $m_{AB}=-2$, $m_{BC}=-10$, $m_{AC}=6$.

משוואת הישר:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1\cdot m_2=-1$.
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x: $m=\tan\alpha$.

משוואת הישר:

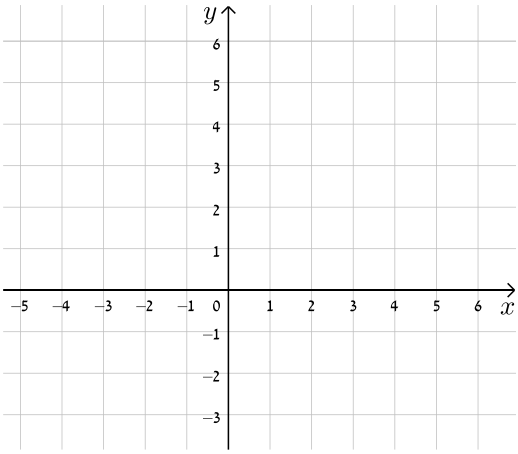
- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y=mx+n$.
- כאשר: m הוא שיפוע הישר ו- n הוא ערך ה- y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y.

נוסחה למציאת משוואת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

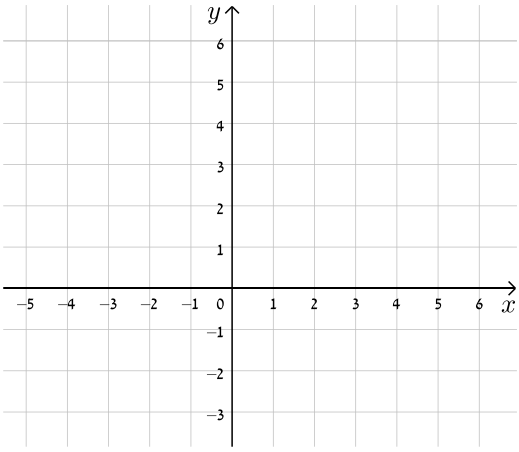
שאלות:

16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

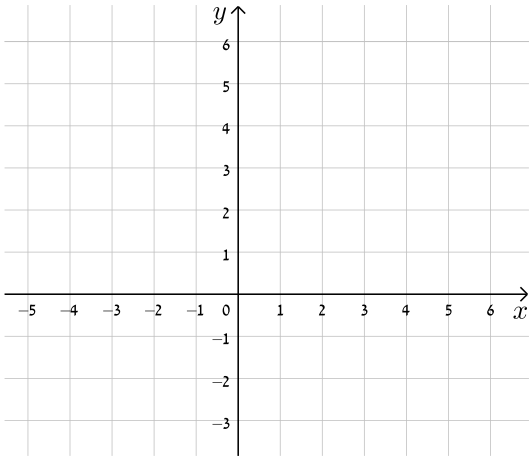
א. $y=x+4$



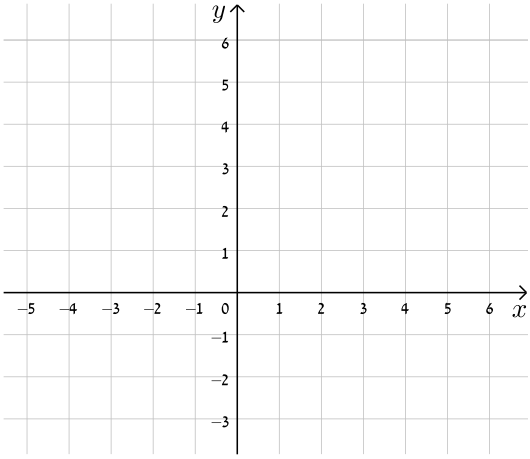
ב. $y=-x+5$



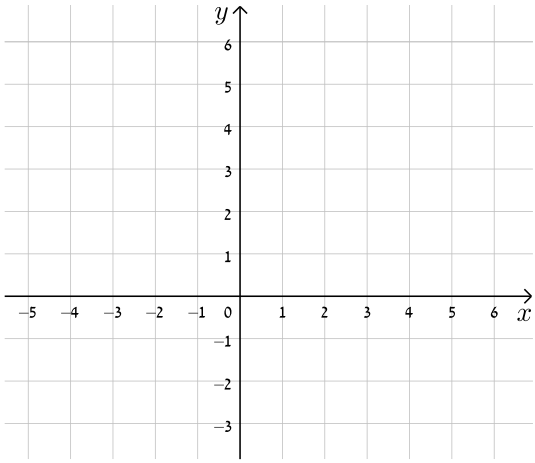
ג. $y=2x-3$



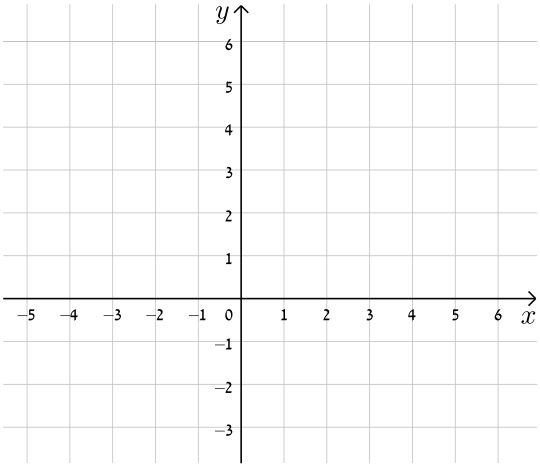
ד. $y=-3x+5$



ה. $y=3x-1$

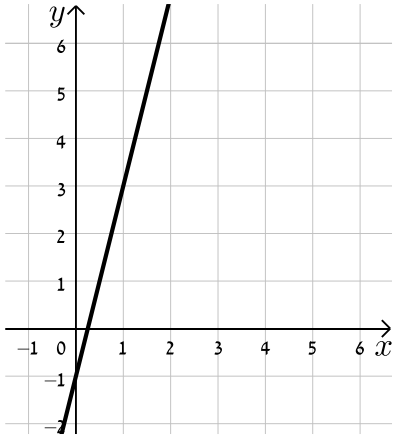


ו. $y=8-4x$

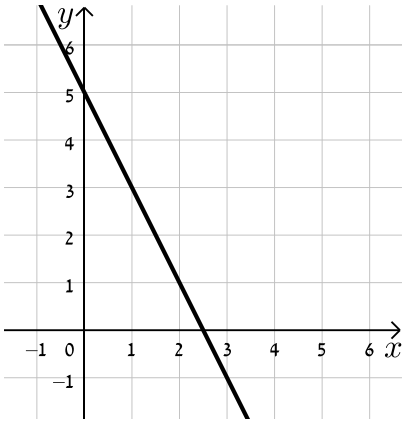


17) כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

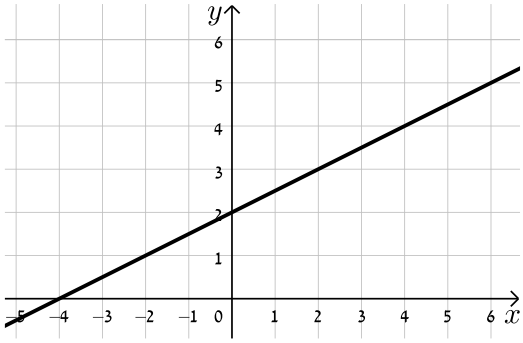
א.



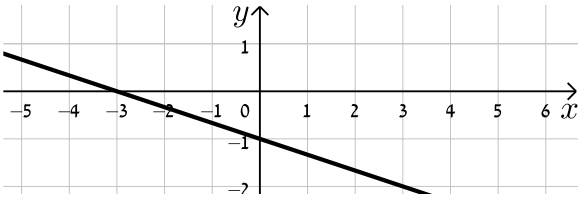
ב.



ג.



ד.



18) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:

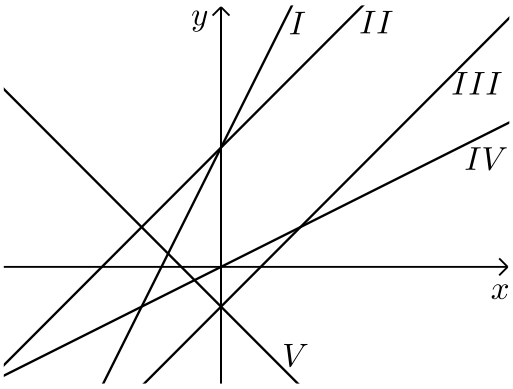
א. $y = x + 3$

ב. $y = -x - 1$

ג. $y = 2x + 3$

ד. $y = x - 1$

ה. $y = \frac{1}{2}x$



19) נתונה משוואה הישר הבאה: $y = 2x + 3$. קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות עליו: $D(6,15)$, $C(0,4)$, $B(3,3)$, $A(-1,1)$.

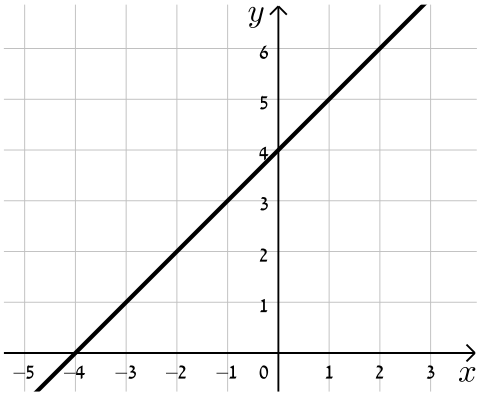
20) נתונה משוואת הישר הבאה: $y = mx - 2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4,2)$ נמצאת על הישר. מצא את m וקבע האם גם הנקודה $B(7,-2)$ נמצאת עליו.

21) הנקודות $B(4,1)$, $A(5,-3)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא: $y = mx + n$.
מצא את m ואת n.

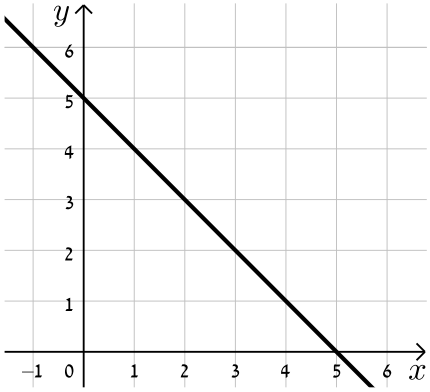
תשובות סופיות:

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

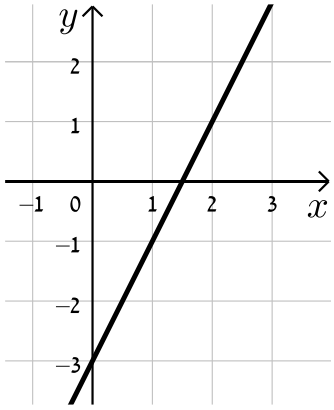
א.



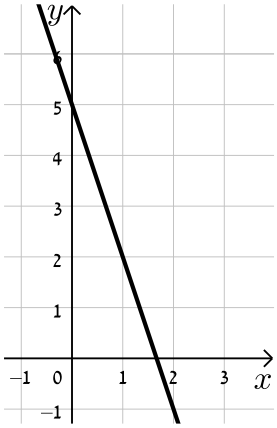
ב.



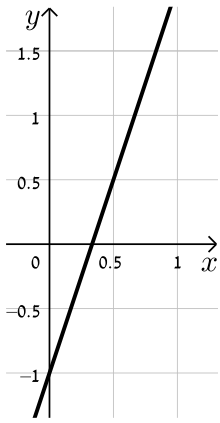
ג.



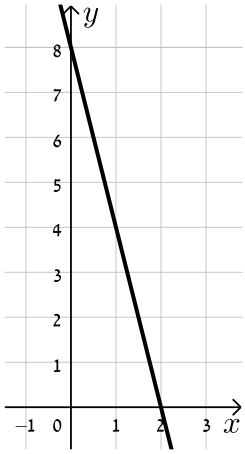
ד.



ה.



ו.



17) א. $y=4x-1$ ב. $y=-2x+5$ ג. $y=\frac{1}{2}x+2$ ד. $y=-\frac{1}{3}x-1$.

18) א.II. ב.V. ג.I. ד.III. ה.IV.

19) נמצאות: A, D. לא נמצאות: B, C.

20) $m=\frac{9}{8}$, B לא נמצאת.

21) $m=-4$, $n=17$.

מצבים הדדיים בין ישרים:

סיכום כללי:

מצב הדדי בין שני ישרים:

- ישרים מקבילים מקיימים: $n_1 \neq n_2$, $m_1 = m_2$.
- ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.
- ישרים מתלכדים מקיימים: $n_1 = n_2$, $m_1 = m_2$.

שאלות:

22) מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$

23) קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}$

24) קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

א. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}$

25) משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y = 6x - 2$.

א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?

ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

26) במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $A(5,-1)$, $B(3,7)$, $C(-5,5)$.
הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

תשובות סופיות:

22) א. $(-1,1)$ ב. $(-6,-18)$ ג. $(10,16)$.

23) א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.

24) מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.

25) א. $m_{AB} = m_{CD} = 6$, $m_{BC} = m_{AD} = -\frac{1}{6}$.

ב. הכל הפוך: $m_{AB} = m_{CD} = -\frac{1}{6}$, $m_{BC} = m_{AD} = 6$.

26) שאלת הוכחה.

מציאת משוואות ישר:

שאלות:

27) מצא את משוואות הישרים הבאים:

א. ישר העובר דרך הנקודה $A(1,3)$ ושיפועו $m=2$.

ב. ישר העובר דרך הנקודה $A(0,-4)$ ושיפועו $m=\frac{1}{3}$.

ג. ישר העובר דרך הנקודה $A(5,9)$ ושיפועו $m=0$.

ד. ישר העובר דרך הנקודות $A(5,-12)$ ו-$B(6,-6)$.

ה. ישר העובר דרך הנקודה $A(-6,4)$ ומקביל לישר: $y=2x-3$.

ו. ישר העובר דרך הנקודה $A(3,-5)$ ומקביל לציר ה-y.

ז. ישר העובר דרך הנקודה $A(-7,-3)$ ומאונך לישר: $y=x+3$.

ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים: $y=11x-4$ ו-$y=3x-12$ ומקביל לישר: $y=7x+5$.

תשובות סופיות:

27) א. $y=2x+1$ ב. $y=\frac{1}{3}x-4$ ג. $y=9$ ד. $y=6x-42$

ה. $y=2x+16$ ו. $x=3$ ז. $y=-x-10$ ח. $y=7x-8$.

שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר:

שאלות:

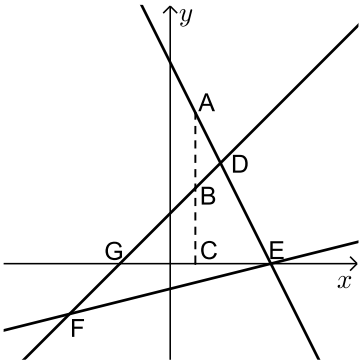
28) במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.
ידוע כי: $A(3,-2)$, $B(2,4)$, $D(-2,2)$.

א. כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.
ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.
ג. כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

29) נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים $A(-9,1)$ ו-$B(5,-7)$.
משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x+3y+6=0$.

א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.
ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.

30) שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים בשרטוט: $x-4y-4=0$, $x-y+2=0$ ו- $2x+y-8=0$.
הקטע AC מקביל לציר ה- y .

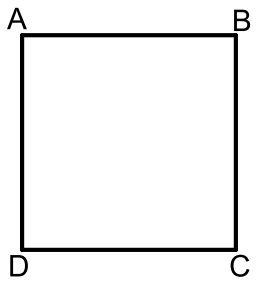


א. חשב את שטח המשולש DEF.
ב. נתון: $d_{BC}=3$.
חשב את אורך הקטע AB.

31) BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד $A(-6,1)$.
משוואת התיכון BD היא $x-y=1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x+5y=67$.
מצא את שיעורי הקדקוד C.

32) נתון טרפז ABCD $(AB \parallel CD)$ ובו משוואת השוק BC היא: $x=2$.
משוואת הבסיס CD היא $2x+3y=7$ וידוע כי $A(-4,1)$.

א. מצא את משוואת הבסיס AB.
ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.
ג. מעבירים את האלכסון AC.
הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.



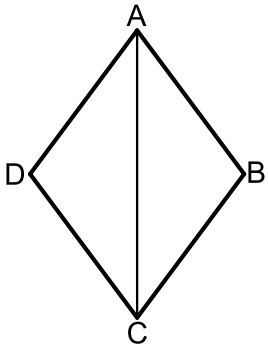
33) במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3 ושיעורי הנקודה A הם: $(1,4)$.

א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?
הראה חישוב מתאים.

ב. נתון גם: $D(4,13)$, $m_{CD}=-\frac{1}{3}$ ו- $\sqrt{90}$ ס"מ $=BC$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ג. נתון גם: $B(-8,7)$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

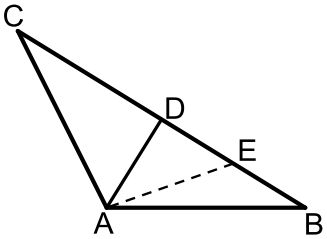
ד. חשב את שטח המרובע ABCD.



34) המרובע ABCD הוא מעוין.
ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: $(0,6)$.
כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא: $y=-1.5x+6$ ואחת ממשואות הצלעות היא: $5y+x=4$.

א. מצא את משוואת האלכסון השני.

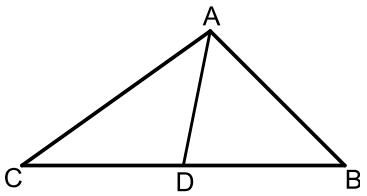
ב. מצא את שאר קדקודי המעוין



35) המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$.
ב-ΔABC מעבירים את הגובה AD לבסיס BC ומסמנים נקודה E כך שמתקיים: $DE=BE$.
קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון כי: $E(8.5,2.5)$, $D(5,7)$.

א. מצא את שיעורי שאר קודקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.



36) נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD.
הצלע BC מונחת על הישר: $y=4$ וידוע כי שיעור ה-x של הנקודה C הוא: $x_C=-1$.
כמו כן נתון: $A(7,8)$, $m_{AB}=-2$.

א. מצא את משוואת הצלע AB.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?

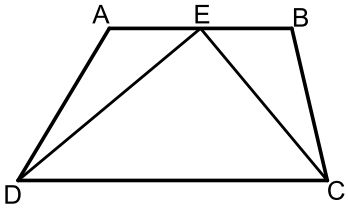
ii. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.

ii. איזה משולש הוא המשולש ABC?

37) המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה-x.
שיעורי הנקודה B הם $(3,2)$ והצלע AD מונחת על הישר: $x=-5$. אורך הקטע DE הוא $\sqrt{80}$
כך ש-D ברביע השלישי וכן: $\sphericalangle DEC=90°$.



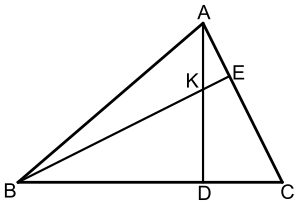
א. מצא את שיעורי הנקודות A , D ו-E.

ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.

ג. מצא את שיעורי הנקודה C.

ד. חשב את שטח המשולש DEC.

38) AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC.
ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: $(1,3)$.
שיעורי הנקודות D ו-E הם: $E(3,5)$, $D(-2,4)$.



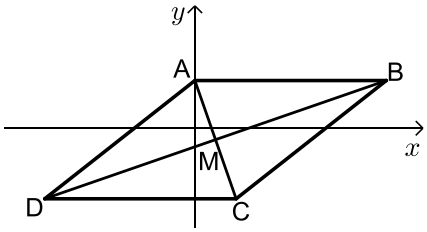
א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.

ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.

ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.

ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.

39) נתון מעוין ABCD.ידוע כי הצלע CD מונחת על $y=-7$.
אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים
בנקודה: $M(-0.5,-3)$. שיפוע האלכסון AC הוא -4.

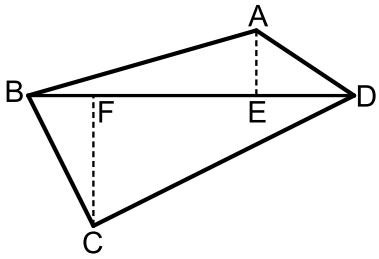


א. מצא את משוואת האלכסון AC.

ב. מצא את שיעורי הנקודה C.

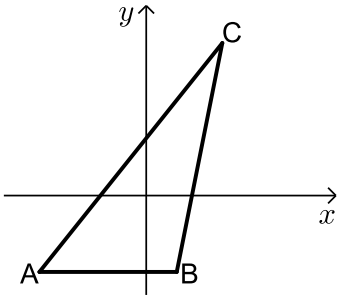
ג. חשב את שטח המשולש BMC.

40) נתון מרובע ABCD שקודקודיו הם: $A(3,13)$, $B(-2,4)$, $C(9,3)$, $D(8,14)$.
מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.



א. מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.
ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.
ג. מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.
ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

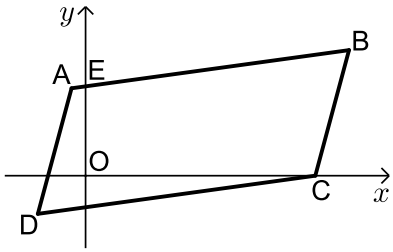
41) על הישר $y=-5$ מסמנים את
הנקודות: $A(-7,-5)$, $B(2,-5)$.
הנקודה C נמצאת על הישר: $y=x-5$.
נסמן את שיעור ה-x של הנקודה C ב-t.



א. הבע באמצעות t את שיעור ה-y של הנקודה C.
ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.
הבע באמצעות t את המרחקים של C מ-A ומ-B.
ג. מצא את t ואת אורך הצלע BC.
ד. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB.
ידוע כי D נמצאת ברביע השלישי.
מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח
המשולש DAC יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.

42) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB=BC)$
ובו נתון: $A(-4,12)$, $B(x,6)$ ו-$C(4,8)$.

א. מצא את x.
ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.
ג. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את משוואת הצלע AC.
ii. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-y ב-D.
מצא את שיעורי הנקודה D.
ד. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא נקודה E ברביע הראשון $(x_E<5)$ כך שהמשולש DCE יהיה גם
שווה שוקיים וישר זווית $(\sphericalangle C=90^\circ)$.
ii. חשב את יחס השטחים בין המשולשים: $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$.



43) באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.

ידועים קודקודי המקבילית הבאים: $A(-1,y)$

ו- $B(x,4)$. (x ו- y נעלמים).

שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא: $d_{CD}=\sqrt{104}$.

א. מצא את x ו- y אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה- x בחלקו החיובי

וכי: $d_{BC}=\sqrt{17}$. מצא את שיעורי הקדקוד C (מצא שתי אפשרויות).

ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- y ב-E.

שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש. מצא את האפשרות הנכונה עבור הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

תשובות סופיות:

28) א. $y=-\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}$ ב. $C(-6,0)$ ג. $y=-\frac{2}{9}x-\frac{4}{3}$.

29) א. $l_{BD}: y=3x-22$. ב. $l_{BC}: y=-\frac{1}{8}x-6\frac{3}{8}$.

30) א. $S_{EDF}=$ 18 יח"ש. ב. 3 יחידות אורך $=AB$.

31) $C(14,5)$.

32) א. $y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ ב. $C(2,1)$, $B(2,-3)$ ג. 12 יחידות שטח $=S_{ABC}$.

33) א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.
ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.
ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות. ד. 90 יח"ש $=S$.

34) א. $y=\frac{2}{3}x+1\frac{2}{3}$ ב. $(-1,1)$, $(4,0)$, $(5,5)$.

35) א. $C(-2,16)$, $B(12,-2)$ ב. $y=-8x$.

36) א. $y=-2x+22$ ב. i. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווי שטח הוא תיכון. ii. ב. $D(4,4)$, $B(9,4)$.
ג. i. $BC=10$, $AD=5$. ii. ג. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

37) א. $E(-1,0)$, $A(-5,-2)$, $D(-5,-8)$. ב. $CD: y=\frac{1}{2}x-5\frac{1}{2}$, $CE: y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
ג. $C(5,-3)$. ד. 30 יח"ש $=S_{DEC}$.

38) א. $AC: y=-x+8$, $AD: y=-\frac{1}{3}x+3\frac{1}{3}$. ב. $A(7,1)$.
ג. $BC: y=3x+10$, $BE: y=x+2$. ד. $B(-4,-2)$.

39) א. $y=-4x-5$ ב. $C(0.5,-7)$ ג. 34 סמ"ר $=S_{DMC}=S_{BMC}$.

40) א. $y=x+6$, $d_{BD}=\sqrt{200}$ ב. $F(3,9)$, $E(5,11)$
ג. $d_{AE}=\sqrt{8}$, $d_{CF}=\sqrt{72}$ ד. $S_{ABCD}=80$.

41) א. $C(t,t-5)$. ב. i. $BC=\sqrt{2t^2-4t+4}$, $AC=\sqrt{2t^2+14t+49}$
ii. 10 ס"מ $=BC$, $t=8$ ג. $D(-20,-5)$.

42) א. $x=-2$ ג. i. $y=-0.5x+10$ ii. $D(0,10)$ ד. i. $E(2,4)$
ii. $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2}$.

43) א. $y=2$, $x=9$ ב. $C(10,0)$, $C(8,0)$ ג. $C(8,0)$.

חלוקת קטע ביחס נתון:

סיכום כללי:

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}, y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$ (בהצלבה).

שאלות:

1) הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון: $A(2,-5)$, $B(-12,16)$.
מצא את ערכי הנקודה P, אם נתון כי: $\frac{AP}{PB}=\frac{2}{5}$.

2) קודקודי משולש ABC הם: $A(-1,3)$, $B(6,0)$, $C(4,-12)$.
מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

3) מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC
שקודקודיו הם: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$.

4) קודקודי המשולש ABC הם: $A(5,1)$, $B(7,-3)$, $C(-1,4)$.
מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקודקוד A.

תשובות סופיות:

1) $P(-2,1)$

2) $M(3,-3)$

3) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

4) 1.697 יחידות אורך.

מרחק נקודה מישר:

סיכום כללי:

הצגה כללית של ישר ומרחקים:

- הצגה כללית של ישר (צורה סתומה): $Ax+By+C=0$.
- מרחק הנקודה $A(x_1,y_1)$ מהישר $Ax+By+C=0$ הוא: $d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$.

  כאשר $B>0$:
  - אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
  - אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

שאלות:

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את מרחק הנקודה $(-2,4)$ מהישר $4x+3y+11=0$.

ב. מצא את מרחק הנקודה $(4,3)$ מהישר $y=3x-1$.

ג. מצא את מרחק הנקודה $(3,-11)$ מהישר $x-5=0$.

6) מצא את המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון:

א. $A(-5,-1)$, $3x-4y+6=0$

ב. $A(-3,8)$, $12x+5y-17=0$

ב. $A(11,-2)$, $2y+7=0$

ד. $A\left(6,-\frac{1}{2}\right)$, $3x-14=0$

7) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $x+y-7=0$ שמרחקן מהישר $2x-y+5=0$ הוא: $\sqrt{20}$.

8) מצא את שטחה של מקבילית ששיעורי קודקודיה הם: $A(7,-1)$, $B(-5,4)$, $C(-1,7)$, $D(11,2)$.

9) מצא את שטחו של המשולש ΔABC שבו שיעורי קדקוד A הם $A(5,-3)$ ושניים מתיכוני המשולש מונחים על הישרים $x-4=0$ ו- $2x-y-1=0$.

10) מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם: $A(2,2)$, $B(-1,1)$, $C(-5,-2)$.

11) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקן מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$.

12) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקן מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$.

תשובות סופיות:

5) א. 3 ב. $\frac{8}{\sqrt{10}}$ ג. 2.

6) א. 1 ב. 1 ג. $1\frac{1}{2}$ ד. $1\frac{1}{3}$.

7) $\left(-2\frac{2}{3},9\frac{2}{3}\right)$, $(4,3)$

8) $S_{ABCD}=$ 56 יח"ש

9) $S_{ABC}=$ 18 יח"ש

10) $S_{ABC}=$ 2.5 יח"ש

11) $(64,99)$, $(4,9)$

12) $(-157,216)$, $(-1,8)$

מיקום נקודה ביחס לישר:

שאלות:

13) מצא את שיעורי הנקודה על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקה מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$ והיא נמצאת מתחתיו.

14) מצא את שיעורי הנקודה על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקה מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$ והיא נמצאת מעליו.

15) נתון משולש ABC שבו נתונים הקודקודים: $B(13,6)$, $A(1,1)$.
הקדקוד C נמצא על הישר $2x-y-19=0$ ונמצא מתחת לצלע AB.
מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.

16) נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:
$\text{I}: x+2y+1=0$, $\text{II}: x-2y-11=0$, $\text{III}: 2x-y+6=0$
מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ושמרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.

17) מצא את שיעורי מרכז המעגל, החסום במשולש, שצלעותיו מונחות על הישרים: $\text{III}: 3x+4y-11=0$, $\text{II}: 3x-4y-51=0$, $\text{I}: 4x-3y+2=0$.

18) מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה $G(7,-3)$ נמצאת מתחתיו ובמרחק $2\sqrt{10}$ ממנו.

19) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-2,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,9)$ הוא $\sqrt{5}$.

20) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(9,10)$ ומרחקו מהנקודה $B(8,-3)$ הוא $5\sqrt{5}$.

21) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(3,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(-9,2)$ הוא 4.

22) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(1,2)$ ומרחקו מהנקודה $B(-3,10)$ הוא 4.

23) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(10,8)$ ומרחקו מהנקודה $B(7,-1)$ הוא 3.

24) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-6,1)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,7)$ הוא 10.

תשובות סופיות:

13) $(64,99)$

14) $(-1,8)$

15) $C(11,3)$

16) $(-1,-4)$

17) $(2,-5)$

18) $y=3x-4$

19) $y=2x+10$, $y=\frac{2}{11}x+6\frac{4}{11}$

20) $y=\frac{1}{2}x+5\frac{1}{2}$, $y=-\frac{22}{31}x+16\frac{12}{31}$

21) $y=6$, $y=\frac{3}{4}x+3\frac{3}{4}$

22) $y=-\frac{3}{4}x+2\frac{3}{4}$ או $x=1$

23) $y=1\frac{1}{3}x-5\frac{1}{3}$ או $x=10$

24) $y=-\frac{4}{3}x-7$

מרחק בין ישרים מקבילים:

סיכום כללי:

- מרחק בין שני ישרים מקבילים: $Ax+By+C_1=0$ ו- $Ax+By+C_2=0$ כאשר: $B>0$
  הוא: $d=\left|\frac{C_1-C_2}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ ומתקיים בהעדר הערך המוחלט:
  - אם: $C_1>C_2$, $(d>0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מתחת ל- $Ax+By+C_2=0$.
  - אם: $C_1<C_2$, $(d<0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מעל ל- $Ax+By+C_2=0$.

שאלות:

25) מצא משוואת ישר, המקביל לישר $3x-4y+8=0$ ונמצא במרחק 4 ממנו.

26) מצא את המרחק בין הישרים המקבילים: $5x+12y+25=0$, $5x+12y-14=0$.

27) נתונים הישרים: $12x-2y-15=0$, $y=6x+5$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

28) נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן $AB: 3x+y=0$ ו- $CD: 3x+y-6=0$. הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע AB ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

29) צלע של ריבוע מונחת על הישר $3x-2y+5=0$.
אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $B(1,-1)$.
מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

30) נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי.
מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות $P(4,1)$ ו- $Q(7,2)$
וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא $3\sqrt{10}$.

31) במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר $x-y+3=0$ והצלע BP מונחת על הישר $x+2y+3=0$. אורך הגובה לצלע BP הוא $3\sqrt{5}$ ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

תשובות סופיות:

25) $3x-4y+28=0$, $3x-4y-12=0$

26) 3

27) $\frac{25}{\sqrt{148}}$

28) $(2.1,-3.3)$, $S=$ 14.4 יח"ש

29) $3x-2y-15=0$, $y=-\frac{2}{3}x-3\frac{2}{3}$, $y=-\frac{2}{3}x+3$

30) $y=3x$

31) $P\left(2,-2\frac{1}{2}\right)$

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 4 - גיאומטריה אוקלידית - משולשים

תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות 37
2. זוויות במשולשים 39
3. משולש שווה שוקיים ושווה צלעות 42
4. חפיפת משולשים 44
5. זווית חיצונית במשולש 50
6. משולש ישר זווית 51
7. קטע אמצעים במשולש 54
8. מפגש תיכונים במשולש 56

הגדרות כלליות:

סוגי משולשים:

ניתן למיין את המשולשים לפי זוויות או לפי צלעות.
לפי זוויות:

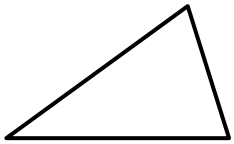
1. משולש חד זווית – משולש שכל זוויותיו חדות.
2. משולש ישר זווית – משולש בעל זווית ישרה.
3. משולש קהה זווית – משולש בעל זווית קהה.

לפי צלעות:

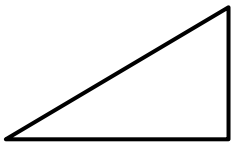
4. משולש שונה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שונות באורכן.
5. משולש שווה שוקיים – משולש שבו שתי צלעות שוות.
6. משולש שווה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שוות באורכן.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:

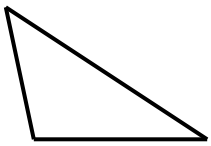
1. משולש חד זווית:



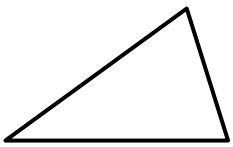
2. משולש ישר זווית:



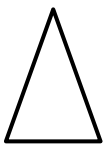
3. משולש קהה זווית:



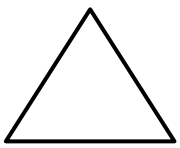
4. משולש שונה צלעות:



5. משולש שווה שוקיים:



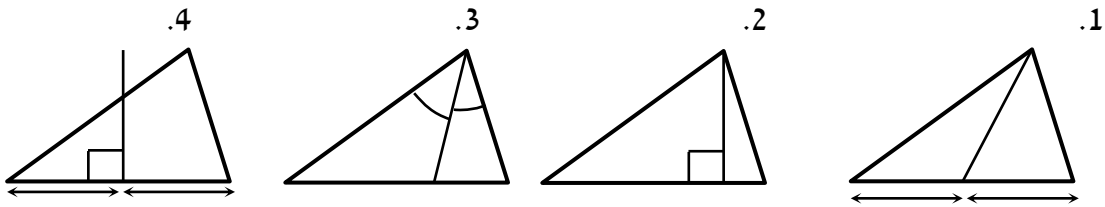
6. משולש שווה צלעות:



קטעים מיוחדים במשולשים:

1. תיכון – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו וחוצה אותה.
2. גובה – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו ומאונך לה.
3. חוצה זווית – קטע היוצא מקדקוד וחוצה את הזווית שממנה הוא יוצא.
4. אנך אמצעי – קטע היוצא מאמצע צלע ומאונך לה.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:



משפטים כלליים במשולשים:

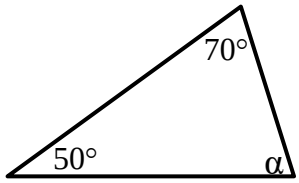
- סכום הזוויות במשולש הוא $180°$.
- סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
- במשולש מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה ולהפך.
  במשולש מול הזווית הקטנה נמצאת הצלע הקטנה ולהפך.
  במשולש מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות ולהפך.

זוויות במשולשים:

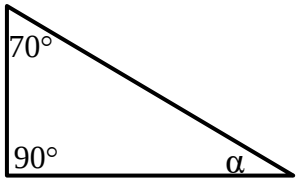
שאלות:

1) חשב את הזוויות בכל אחד מהמשולשים שלפניך:

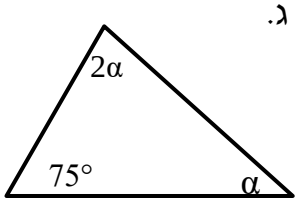
א.



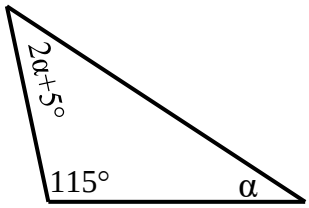
ב.



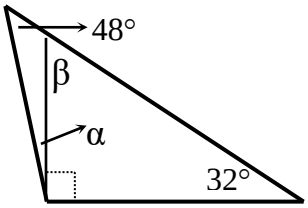
ג.



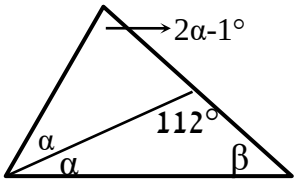
ד.



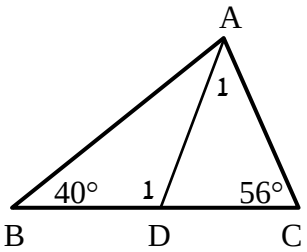
ה.



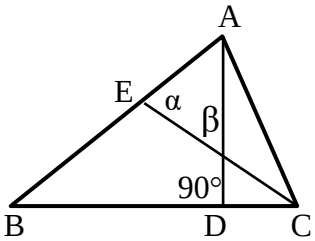
ו.



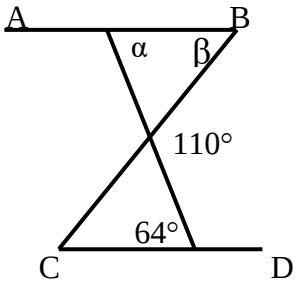
2) במשולש שלפניך נתון AD חוצה זווית A.
נתון: $\sphericalangle B = 40°$, $\sphericalangle C = 56°$.
חשב את הזוויות $\sphericalangle A_1$, $\sphericalangle D_1$.



3) נתון משולש ABC ובו AD גובה לצלע BC.
$\sphericalangle D = 90°$ הקטע CE חוצה זווית $\sphericalangle C$.
כמו כן: $\beta = 63°$, $\alpha = 75°$.
חשב את זוויות המשולש ABC .



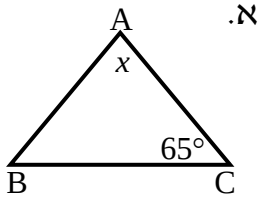
4) בסרטוט שלפניך נתון: $AB \parallel CD$.
מצא את הזוויות α ו- β .



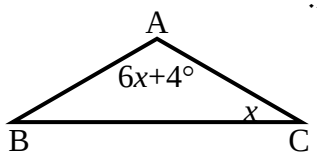
5) שלוש זוויות המשולש מתייחסות זו לזו כמו: 6 : 2 : 1.
חשב את זוויות המשולש.

6) בסרטוטים שלפניך נתונים משולשים שווי שוקיים $(AB = AC)$
שאחת מזוויותיהם נתונה. מצא את הגודל x בכל סרטוט.

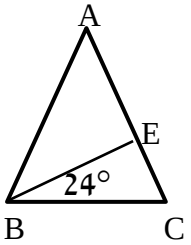
א.



ב.



7) הגובה לשוק המשולש שווה השוקיים ABC , $(AB = AC)$
יוצר זווית בת $24°$ עם הבסיס BC.
מצא את זוויות המשולש ABC.



8) חשב את זוויות המשולשים בכל אחד מהמקרים הבאים:

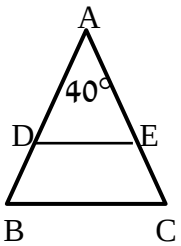
א. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה פי ארבעה מזווית הראש.
מצא את זוויות המשולש.

ב. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה ב- $12°$ מזווית הראש.
מצא את זוויות המשולש.

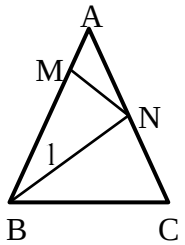
9) באיור שלפניך נתון: $AB = AC$, $AD = AE$, $\sphericalangle A = 40°$.

א. חשב את הזוויות: $\sphericalangle E$, $\sphericalangle D$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle B$.

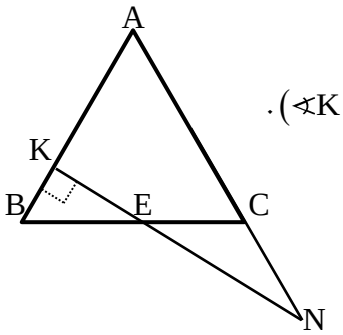
ב. הוכח: $DE \parallel BC$.



10) באיור שלפניך נתון: $AB = AC$.
מעבירים את הקטעים BN ו- MN כך שמתקיים:
$BM = BN = BC$.
נתון בנוסף: $\sphericalangle A = 32°$.
חשב את זוויות: $\sphericalangle ANM$, $\sphericalangle B_1$.



11) משולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$.
בנקודה K כלשהי על AB מעלים אנך ל- AB $(\sphericalangle K = 90°)$.
אנך זה חותך את BC בנקודה E
ואת המשך AC בנקודה N.
מתקיים: $CE = CN$.
חשב את זוויות המשולש ABC .



תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 60°$ ב. $\alpha = 20°$ ג. $\alpha = 35°$ ד. $\alpha = 20°$
ה. $\alpha = 10°$, $\beta = 58°$ ו. $\alpha = 37\frac{2}{3}°$, $\beta = 30\frac{1}{3}°$.

2) $\sphericalangle A_1 = 42°$, $\sphericalangle D_1 = 98°$

3) $\sphericalangle A = 78°$, $\sphericalangle B = 48°$, $\sphericalangle C = 54°$.

4) $\alpha = 64°$, $\beta = 46°$.

5) $20°$, $40°$, $120°$.

6) א. $x = 50°$ ב. $x = 22°$.

7) $\sphericalangle A = 48°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 66°$.

8) א. $20°$, $80°$, $80°$ ב. $52°$, $64°$, $64°$

9) א. $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = 70°$. ב. שאלת הוכחה

10) א. $\sphericalangle ANM = 37°$, $\sphericalangle B_1 = 42°$.

11) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$.

משולש שווה שוקיים ושווה צלעות:

סיכום כללי:

משפטים במשולש שווה שוקיים:

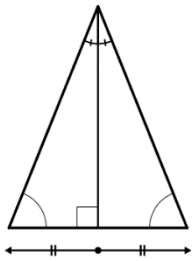
- במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
  (משפט הפוך) משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים.
- במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים.
  (משפט הפוך) משולש שבו חוצה זווית הוא גם גובה או חוצה זווית הוא גם תיכון
  או גובה הוא גם תיכון הוא משולש שווה שוקיים.

משפטים במשולש שווה צלעות:

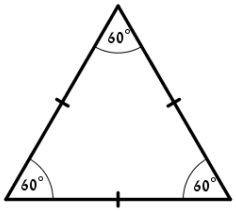
- במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות $60°$.
  (משפט הפוך) משולש שבו כל הזוויות שוות הוא משולש שווה צלעות.

איורים:

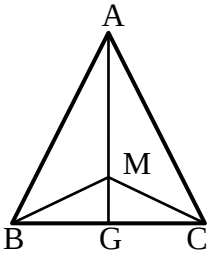
משפט במשולש שווה שוקיים



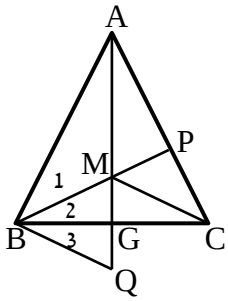
משפט במשולש שווה צלעות



שאלות:



12) המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים (AB=AC) .
AG חוצה את זווית $\sphericalangle A$.
M היא נקודה כלשהי על AG.
הוכח כי: BM = CM .



13) המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים (AB=AC) .
AG ו-BP חוצים את הזוויות $\sphericalangle A$ ו-$\sphericalangle ABC$ בהתאמה.
הנקודה Q נמצאת על המשך AG .
נתון: GM = GQ .
הוכח: $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_3$.

תשובות סופיות:

12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.

חפיפת משולשים:

סיכום כללי:

הגדרה:

משולשים חופפים הם משולשים ששווים זה לזה בכל צלעותיהם ובכל זוויותיהם בהתאמה.

סימון מתמטי: $\Delta ABC \cong \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} AB = DE \ , \ AC = DF \ , \ BC = EF \\ \sphericalangle A = \sphericalangle D \ , \ \sphericalangle B = \sphericalangle E \ , \ \sphericalangle C = \sphericalangle F \end{cases}$.

משפטי החפיפה:

- משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ):

אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

- משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (ז.צ.ז):

אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות והצלע שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

- משפט חפיפה צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ):

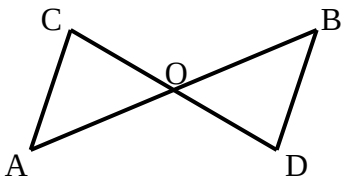
אם בין שני משולשים שוות שלוש צלעות בהתאמה אז המשולשים חופפים.

- משפט חפיפה צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז):

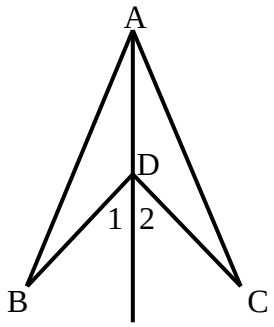
אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

שאלות:

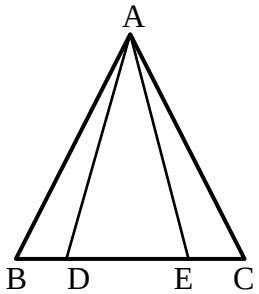
שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-זווית-צלע:



14) באיור שלפניך הקטעים AB ו- CD חוצים זה את זה בנקודה O.
הוכח: $\Delta ACO \cong \Delta BDO$.

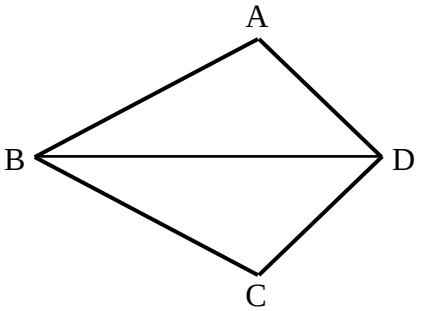


15) באיור שלפניך נתון: $BD = CD$.
כמו כן: $\sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2$.
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

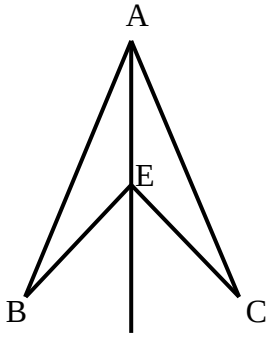


16) בסרטוט שלפניך נתון:
$BE = CD$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C$, $AB = AC$.
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.

שאלות העוסקות במשפט חפיפה זווית-צלע-זווית:

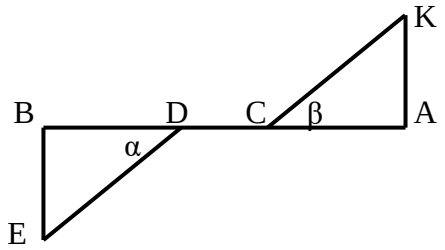


17) במרובע ABCD נתון כי BD חוצה את זוויות $\sphericalangle B$ ו- $\sphericalangle D$.
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.



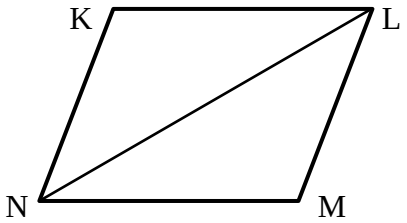
18) בסרטוט שלפניך נתון:
AE חוצה את הזוויות $\sphericalangle BAC$ ו- $\sphericalangle BEC$.
הוכח: $\Delta ABE \cong \Delta ACE$.

19) בציור שלפניך נתון:
$AC = BD \ , \ \alpha = \beta$
$AB \perp BE \ , AB \perp AK$.
הוכח: $\Delta AKC \cong \Delta BED$.



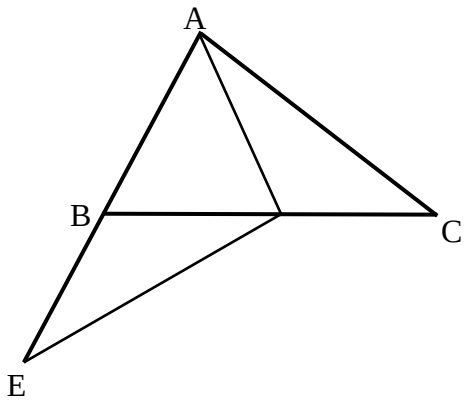
שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-צלע:

20) באיור שלפניך נתון:
$KL = MN \ , \ KN = LM$.
הוכח: $\Delta KLN \cong \Delta MLN$.



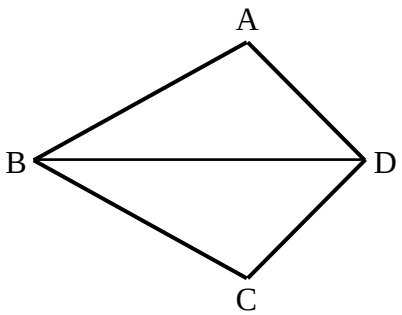
שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-זווית שמול הצלע הגדולה:

21) בציור שלפניך נתון:
$AC = DE \ , \ AB = BE = AD$
הוכח כי הנקודה D היא אמצע BC.

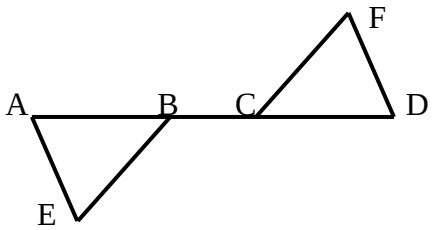


שאלות העוסקות בשלושת משפטי החפיפה יחדיו:

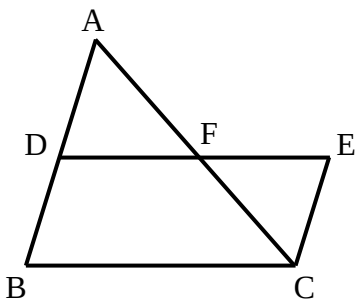
22) במרובע ABCD נתון:
$AB = BC \ , \ AD = CD$.
הוכח: $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.



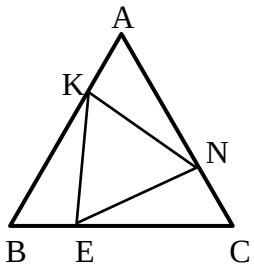
23) הקטע AD הוא קו ישר.
נתון: $AC = BD \ , \ AE = DF$.
כמו כן מתקיים: $\sphericalangle A = \sphericalangle D$.
הוכח כי הקטעים BE ו- FC שווים.



24) באיור שלפניך נתון:
הנקודה F היא אמצע הקטע AC.
מתקיים: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACE$.
הקטעים BD ו- CE שווים.
הוכח את הטענות הבאות:
א. F היא אמצע הקטע DE.
ב. D היא אמצע הקטע AB.

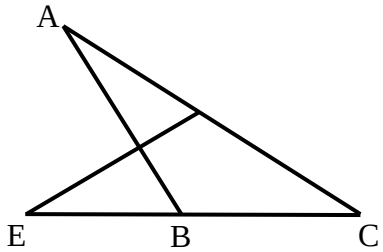


25) המשולש ABC הוא שווה צלעות.
נתון: $AK = BE = CN$.
הוכח כי ΔKEN הוא גם משולש שווה צלעות.

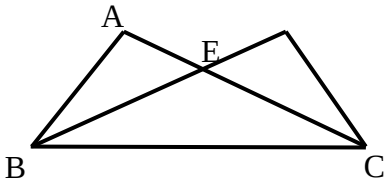


שאלות העוסקות במשולשים המכסים חלקית זה את זה:

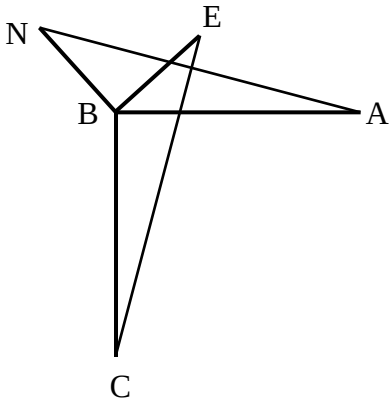
26) בציור שלפניך נתון: $AC = CE$, $DC = BC$.
הוכח:
א. $\Delta CDE \cong \Delta CBA$.
ב. $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABE$.



27) באיור שלפניך נתון:
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB$, $\sphericalangle DBC = \sphericalangle ACB$.
הוכח: $AB = CD$.

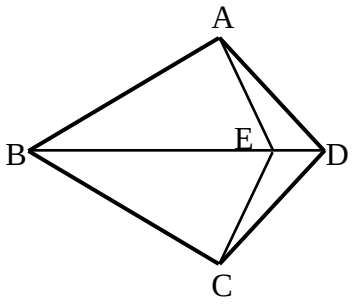


28) בציור שלפניך נתון:
$AB = BC$, $BE = BN$
$AB \perp BC$, $BE \perp BN$
הוכח: $AN = CE$.

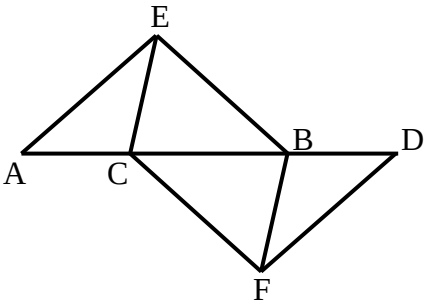


שאלות העוסקות בשתי חפיפות:

29) בסרטוט שלפניך נתון כי BD הוא קו ישר.
מתקיים: $AB = BC$, $AD = CD$.
הנקודה E נמצאת על BD.
הוכח כי: $AE = CE$.

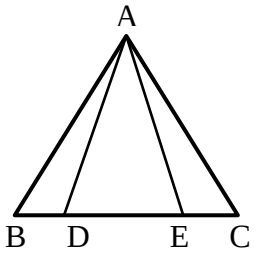


30) בציור שלפניך נתון כי AD הוא קו ישר. מתקיים:
$\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $\sphericalangle AEC = \sphericalangle DFB$
וכן $AE = DF$. הוכח:
א. $CE = BF$.
ב. $BE = CF$.

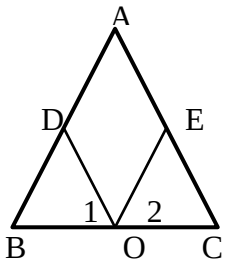


שאלות העוסקות בחפיפות עם משולש שווה שוקיים:

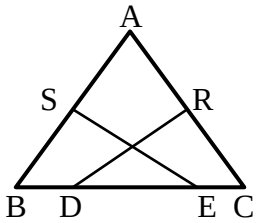
31) נתון משולש שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$.
מתקיים: $BD = CE$.
הוכח: $AD = AE$.

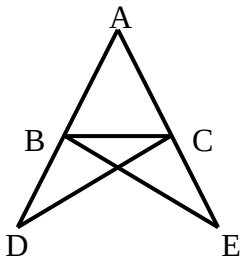


32) בסרטוט שלפניך נתון משולש
שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$.
הנקודה O היא אמצע BC.
מתקיים: $\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_2$.
הוכח: $AD = AE$.

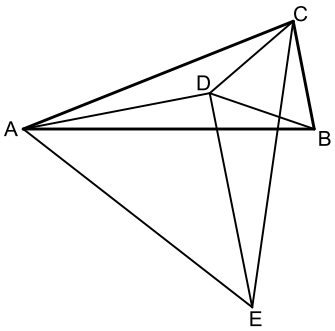


33) במשולש שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$
הנקודות S ו-R הן אמצעי השוקיים.
ידוע כי $BD = CE$.
הוכח כי: $SE = RD$.





34) נתון משולש ABC. הקטעים AD ו-AE ישרים
ונתון בנוסף כי: $DC = BE$, $BD = CE$.
הוכח: $AB = AC$.



35) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$.
על השוק AC ועל הבסיס BC בונים משולשים שווי צלעות ACE ו-BCD.
מחברים את הנקודה D עם הקדקודים A ו-E.

א. הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

ב. ידוע גם כי: $DE \parallel BC$.
הוכח: $\sphericalangle ADE = 90°$.

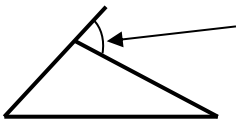
תשובות סופיות:

14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) שאלת הוכחה.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) שאלת הוכחה.
22) שאלת הוכחה.
23) שאלת הוכחה.
24) שאלת הוכחה.
25) שאלת הוכחה.
26) שאלת הוכחה.
27) שאלת הוכחה.
28) שאלת הוכחה.
29) שאלת הוכחה.
30) שאלת הוכחה.
31) שאלת הוכחה.
32) שאלת הוכחה.
33) שאלת הוכחה.
34) שאלת הוכחה.
35) שאלת הוכחה.

זווית חיצונית במשולש:

סיכום כללי:

הגדרה:



זווית חיצונית למשולש היא זווית הכלואה בין צלע במשולש להמשך צלע הסמוכה לה.

משפט:

זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

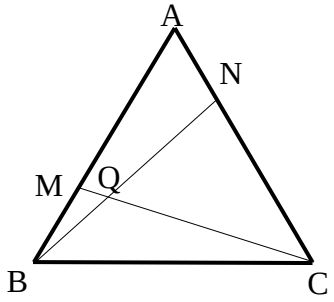
שאלות:

36) הוכח את המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

37) המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה צלעות.

נתון: $AN = BM$.

הוכח: $\sphericalangle NQC = 60°$.



תשובות סופיות:

36) שאלת הוכחה.

37) שאלת הוכחה.

משולש ישר זווית:

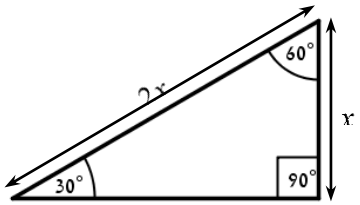
סיכום כללי:

משפטים במשולש ישר זווית:

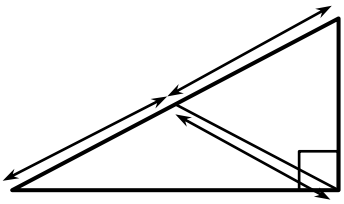
- סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא $90°$.
- במשולש שזוויותיו $90°$, $60°$, $30°$, הניצב שמול הזווית של ה-$30°$ שווה למחצית היתר.
(משפט הפוך ל-2) אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה היא בת $30°$.
- במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
(משפט הפוך ל-4) אם במשולש תיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש ישר זווית (כאשר הזווית ממנה יוצא התיכון היא הזווית הישרה).
- משפט פיתגורס : במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.
כלומר : $(\text{יתר})^2 = (\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2$.
- (משפט הפוך למשפט פיתגורס) אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית, אז המשולש ישר זווית.

איורים:

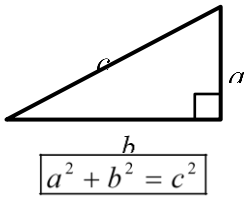
משולש $90°, 60°, 30°$



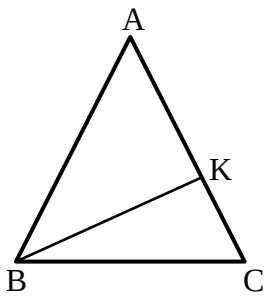
תיכון ליתר



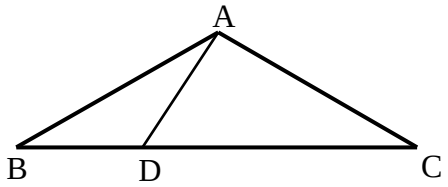
משפט פיתגורס



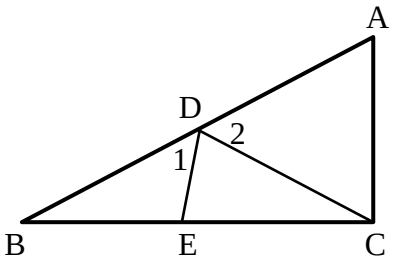
שאלות:



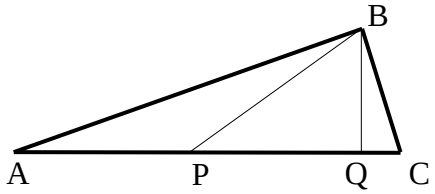
38) באיור שלפניך נתון משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$.
זווית הבסיס: $\sphericalangle C = 75°$
וכן: 16 ס"מ =AC. מעבירים גובה BK לשוק AC.
מצא את אורך הגובה BK.



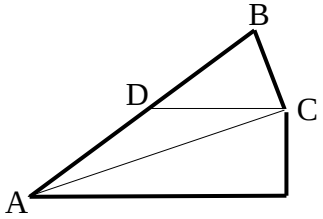
39) המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה שוקיים $(AB = AC)$.
נתון: $\sphericalangle DAC = 90°$, $\sphericalangle ABD = 30°$,
18 ס"מ = BC.
חשב את אורכו של הקטע BD.



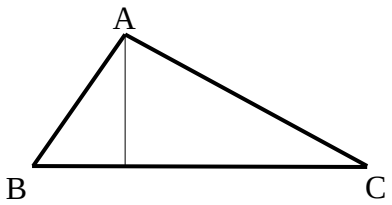
40) המשולש ΔABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle C = 90°)$.
מעבירים תיכון CD ליתר AB במשולש.
הנקודה E נמצאת על BC כך ש- $CD = CE$.
ידוע כי: $\sphericalangle CED = 80°$.
מצא את הזוויות: $\sphericalangle D_2$, $\sphericalangle D_1$



41) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90°)$. BQ הוא הגובה ליתר AC ו-BP הוא התיכון ליתר AC.
נתון: $BQ = \frac{1}{2}BP$.
חשב את גודלה של הזווית C.



42) המשולש BCD שבציור הוא משולש שווה שוקיים $(BD = DC)$.
AC חוצה את הזווית $\sphericalangle BAE$.
נתון: $DC \parallel AE$.
חשב את גודלה של הזווית $\sphericalangle ACB$.



43) AD הוא גובה במשולש ABC.
נתון: AB = 15 ס"מ , AC = 20 ס"מ,
BC = 25 ס"מ .

א. מצא את אורכו של AD
ואת שטח המשולש ABC .

ב. האם המשולש ABC ישר זווית? נמק.

תשובות סופיות:

38) 8 ס"מ.
39) 6 ס"מ.
40) $\sphericalangle D_1 = 60^\circ$, $\sphericalangle D_2 = 40^\circ$
41) 75°
42) 90°
43) א. AD = 12 ס"מ , S_{ABC} = 150 סמ"ר . ב. כן.

קטע אמצעים במשולש:

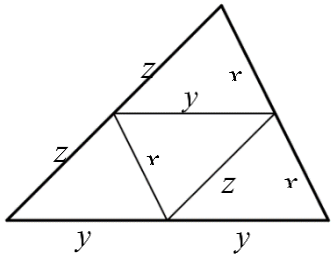
סיכום כללי:

הגדרה:

קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.

- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- (משפט הפוך 1): קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית חוצה את הצלע השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).
- (משפט הפוך 2): קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

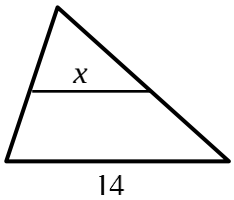
איור – קטע אמצעים במשולש:



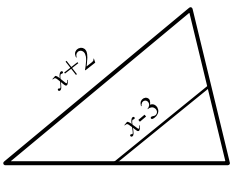
שאלות:

44) לפניך משולשים עם קטע אמצעים בתוכם.
מצא את x בכל אחד מהמקרים:

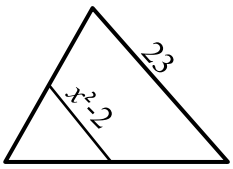
א.



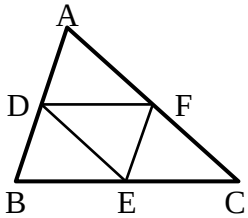
ב.



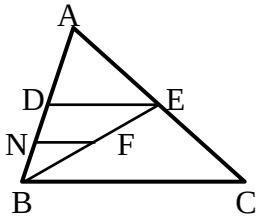
ג.



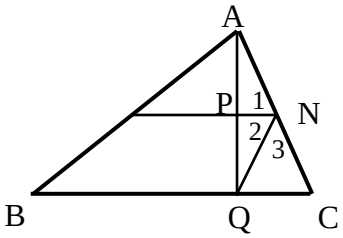
45) הנקודות D, E ו-F הם נקודות האמצע במשולש ΔABC.
נתון: DE= 9 ס"מ, EF= 12 ס"מ, DF = 10 ס"מ.
חשב את היקף המשולש ΔABC.



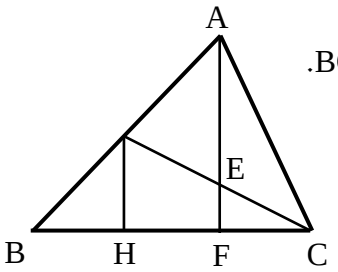
46) הקטע DE הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC.
הקטע FN הוא קטע אמצעים במשולש ΔBDE.
נתון: NF = 3 ס"מ. מצא את אורך הצלע BC.



47) הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC
AQ הוא גובה לצלע BC.
הוכח: $\sphericalangle N_1 = \sphericalangle N_2$.



48) AF הוא גובה לצלע BC ו- GC הוא תיכון
לצלע AB במשולש ΔABC. הקטע GH מאונך לצלע BC.
א. הוכח: HF =BH.
ב. נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את
התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס"מ.
חשב את אורך הקטע EF.



תשובות סופיות:

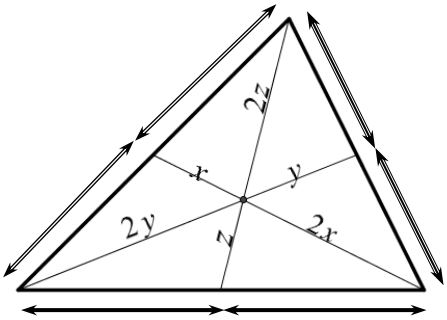
44) א. $x=7$ ב. $x=8$ ג. $x=\sqrt{13.5}$.
45) 62 ס"מ.
46) 12 ס"מ.
47) שאלת הוכחה.
48) א. שאלת הוכחה. ב. 3 ס"מ.

מפגש תיכונים במשולש:

סיכום כללי:

- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון ביחס של 2 : 1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.
- אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של 2 : 1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.
- נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.

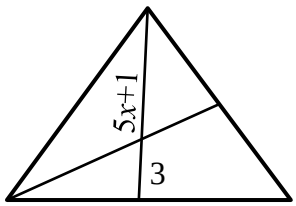
איור – מפגש תיכונים במשולש :



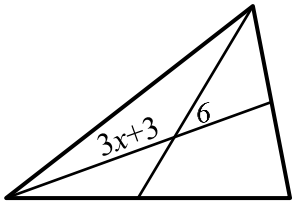
שאלות:

49) הקטעים שבמשולשים הם תיכונים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים :

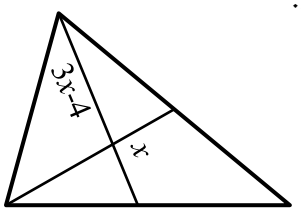
א.



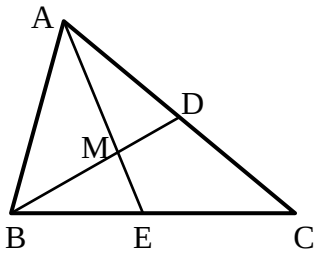
ב.



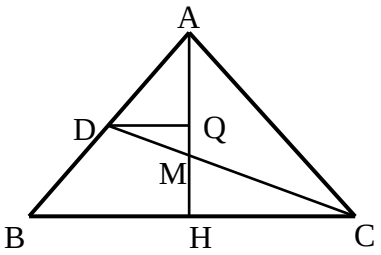
ג.



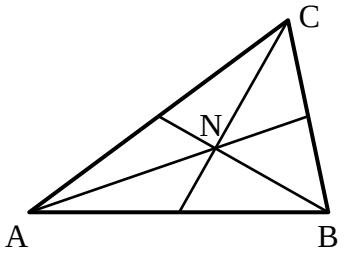
50) הקטעים AE ו-BD הם תיכונים במשולש ΔABC אשר נחתכים בנקודה M.
נתון : $AD = AM$ וכן : 30 ס"מ = AC.
חשב את AE.



51) המשולש ΔABC שבציור הוא משו"ש ($AB = AC$) שבו AH הוא הגובה לבסיס BC.
CD, התיכון לשוק AB,
יוצר זווית של $30°$ עם הבסיס BC.
נתון: $BC = 12\sqrt{3}$ס"מ, $DQ \parallel BC$.
חשב את אורך הקטע MQ.



52) במשולש ΔABC נחתכים התיכונים בנקודה N.
נתון: $\sphericalangle CNB = 90°$.
הוכח: $BC = AN$.



תשובות סופיות:

49) א. $x = 1$ ב. $x = 3$ ג. $x = 4$
50) 22.5 ס"מ.
51) 3 ס"מ.
52) שאלת הוכחה.

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 5 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

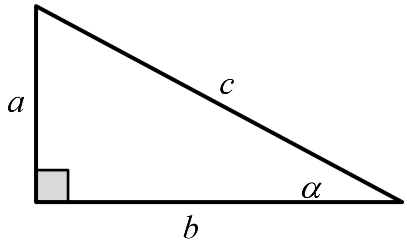
תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית 58

משולש ישר זווית:

סיכום כללי:

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

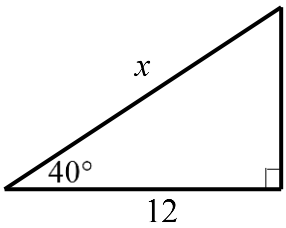
$$\tan\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

משפט פיתגורס: $a^2+b^2=c^2$

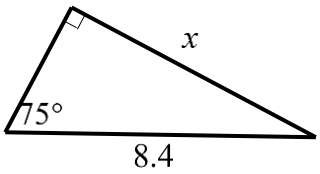
שאלות:

1) מצא את ערכו של α / x במשולשים ישרי הזווית הבאים:

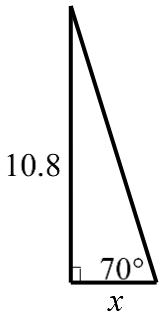
א.



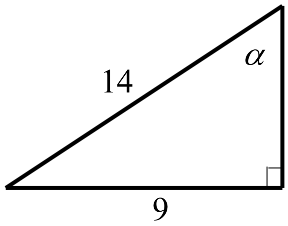
ב.



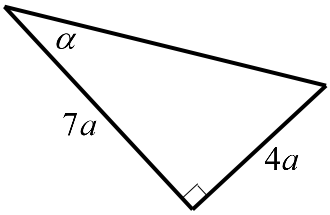
ג.



ד.



ה.

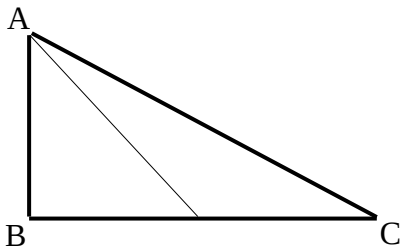


2) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90°)$.

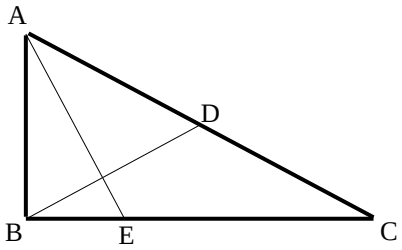
AD הוא התיכון לניצב BC.

נתון: $\sphericalangle C=28°$, AB = 6 ס"מ.

מצא את AD ואת $\sphericalangle BAD$.

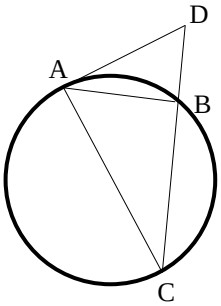


3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90^\circ)$. BD הוא התיכון ליתר ו-AE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle A$.
נתון: BD = 5.6 ס"מ , BC = 8 ס"מ.
מצא את BE ואת $\sphericalangle BAE$.



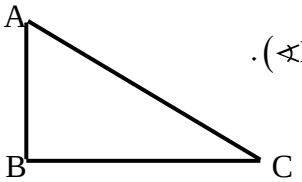
4) מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסוניו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל.
המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D.
נתון: BD=4 ס"מ , $\sphericalangle DAB=32^\circ$.
מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

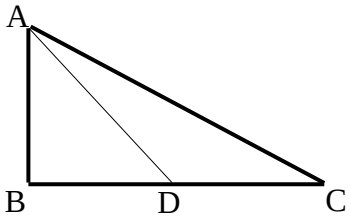


6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא 34.92°. מצא את שטח המשולש.

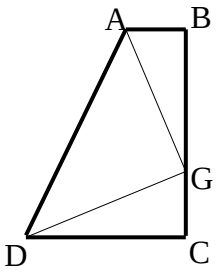
7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90^\circ)$.
נתון: $\sphericalangle A=\alpha$, $AB=a$.
הבע באמצעות α ו-a את היקף המשולש.



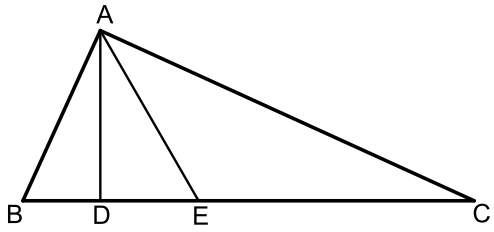
8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90^\circ)$.
AD הוא התיכון לניצב BC.
נתון: $\sphericalangle C=\alpha$, $AB=b$.
הבע באמצעות α ו-b את אורכי הקטעים BD ו-AD.



9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה זווית זו הוא k.
הבע באמצעות α ו-k את שטח המשולש ואת אורך היתר.



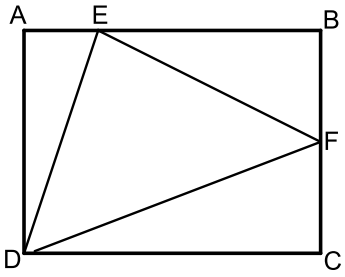
10) טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית $(\sphericalangle B=\sphericalangle C=90^\circ)$.
הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG\perp DG$.
נתון: $AG=DG=m$, $\sphericalangle BAG=\beta$.
הבע באמצעות β ו- m את שטח הטרפז.



11) המשולש ABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle A=90^\circ)$.
הקטעים AD ו-AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית.
מסמנים: $DE=k$, $\sphericalangle DAE=\alpha$.

א. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC
אם ידוע כי: $\alpha=30$ ו- $k=2$.



12) במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו-F
הנמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה כך ש-E
מקיימת: $3AE=BE$ ו-F היא אמצע הצלע BC.
אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE.
מעבירים את הקטעים DF , EF ו-DE כך
שנוצר במשולש DEF.

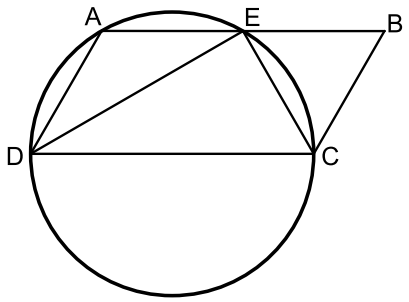
א. סמן ב- t את אורך הקטע AE והבע
באמצעות t את אורכי צלעות המשולש DEF.

ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

13) משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k וזווית הבסיס שלו היא β חוסם מעגל.
הבע באמצעות β ו- k את רדיוס המעגל.

14) בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא b והזווית
שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא α.
הבע באמצעות α ו- b את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:

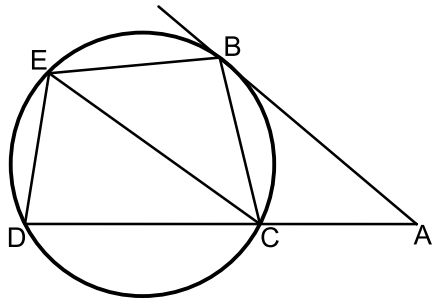


15) דרך הקודקודים A , C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E, $(AE = BE)$.
נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.

א. הוכח כי המיתר CE חוצה את זוויות C.

ב. רדיוס המעגל יסומן ב- R.
הבע באמצעות R את היקף המקבילית.

ג. מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.



16) מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD.
מעבירים את המיתרים BC ו-BE אשר זהים באורכם.
כמו כן מעבירים את המיתר DE.
אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.

א. הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.

ב. הוכח כי: $2\cdot\sphericalangle BEC = \sphericalangle EDC$.

ג. נתונים: $\sphericalangle A = 40°$, AC = 6 ס"מ, AB = 9 ס"מ , CE = 8 ס"מ.
חשב את שטח המרובע ABEC.

תשובות סופיות:

1) א. $x=15.665$ ב. $x=8.114$ ג. $x=3.931$ ד. $\alpha=40.005°$ ה. $\alpha=29.745°$.

2) $\sphericalangle BAD=43.24°$, 8.236 ס"מ = AD.

3) $\sphericalangle BAE=22.792°$, 3.294 ס"מ = BE.

4) $106.26°$, $106.26°$, $73.74°$, $73.74°$.

5) 6.04 ס"מ = R.

6) 28.618 סמ"ר = S.

7) $P=a\left(1+\tan\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$.

8) $BD=\frac{b}{2\tan\alpha}$, $AD=\sqrt{b^2+\frac{b^2}{4\tan^2\alpha}}$.

9) $S=\frac{k^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\tan\alpha}{2}$, $AC=\frac{k\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

10) $\frac{(m\sin\beta+m\cos\beta)^2}{2}$.

11) א. $S=\frac{k^2}{\cos 2\alpha\tan^2\alpha}$ ב. 24 סמ"ר.

12) א. $DF=t\sqrt{18.25}$, $EF=t\sqrt{11.25}$, $DE=t\sqrt{10}$ ב. $47.14°$, $51°$, $81.86°$.

13) $R=k\cos\beta\tan\frac{\beta}{2}$.

14) $S=\frac{1}{2}b^2\sin\alpha(1+\sin\alpha)$, $\frac{1}{2}b\sin\alpha+\frac{\frac{1}{2}b\sin\alpha}{\tan\frac{\alpha}{2}}$.

15) א. שאלת הוכחה. ב. $6R$ ג. 4 ס"מ.

16) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 32.78 סמ"ר.

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 6 - טריגונומטריה במישור

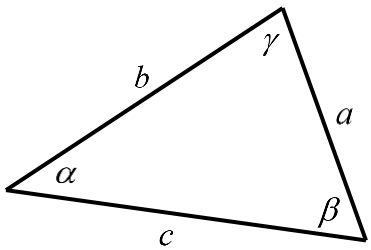
תוכן העניינים

1. שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים 63
2. שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש 71
3. שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה 80
4. שאלות מסכמות 84

שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים:

סיכום כללי:

משפט הסינוסים:



במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

בצורה מתמטית: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.

משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן בקוסינוס הזווית שבניהן: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ או $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

מתי נשתמש בכל משפט:

- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
  - א. נתונות שתי זוויות וצלע.
  - ב. נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
  - ג. נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.

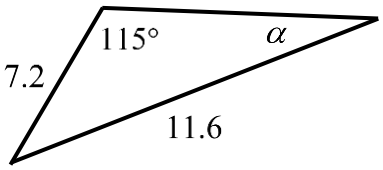
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
  - א. נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
  - ב. נתונות שלוש צלעות.

- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

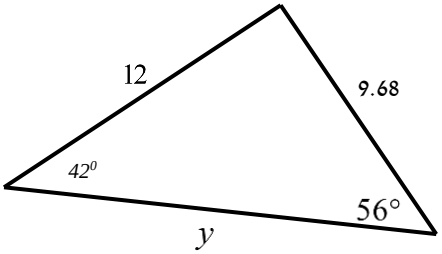
שאלות:

1) מצא את ערכו של $a/x/y$ במשולשים הבאים
(R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):

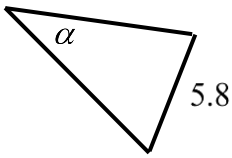
א.



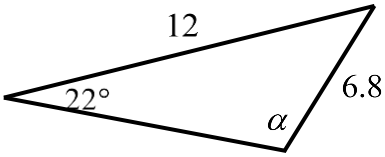
ב.



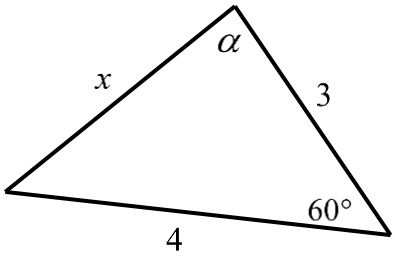
ג. רדיוס המעגל: $R=7$.



ד.

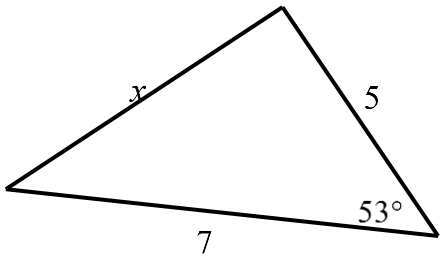


ה.

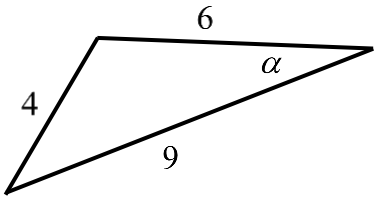


2) מצא את ערכו של α/x במשולשים הבאים:

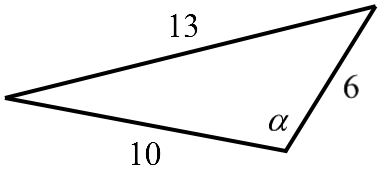
א.



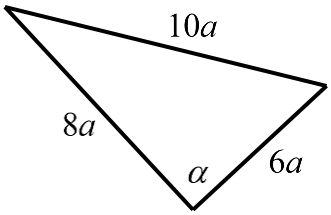
ב.



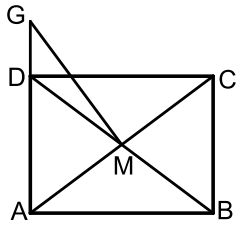
ג.



ד.

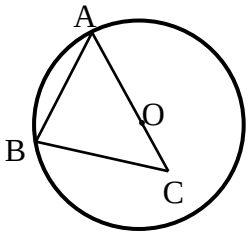


3) נתון משולש שווה שוקיים ABC (AB=AC) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ
וגודלה של זווית הבסיס בו הוא 70°. CD הוא חוצה זווית הבסיס $\sphericalangle C$.
מצא את אורכו של הקטע AD.



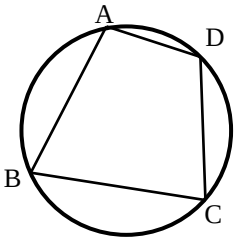
4) אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה M.
הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD.
נתון: AD = 3 ס"מ , AB = 4 ס"מ , DG = 1.2 ס"מ.
מצא את גודלו של הקטע GM.

5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל
שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ.
חשב את זוויות המרובע.



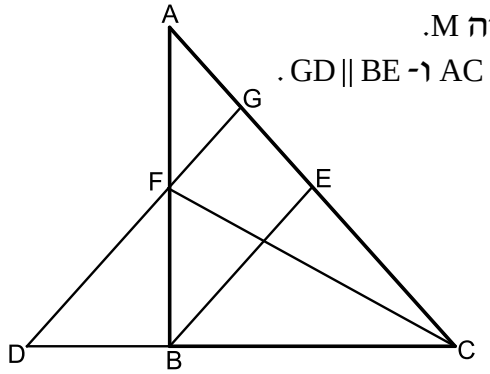
6) הצלע AB במשולש ABC היא מיתר במעגל שמרכזו O.
הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט.
נתון: BC = 9 ס"מ , OC = 3 ס"מ , $\sphericalangle BAC = 38°$.
מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB.

7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של 30° עם
צלע אחת של המקבילית וזווית של 61.05° עם הצלע הסמוכה לה.
אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה.
חשב את היקף המקבילית.



8) המרובע ABCD חסום במעגל.
נתון: AB = 6 ס"מ , BC = 9 ס"מ , CD = 10 ס"מ
ו-AD = 4 ס"מ.
מצא את אורכם של האלכסון AC ושל רדיוס המעגל.

9) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.
מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: $AC = DC$ ו- $GD \parallel BE$.

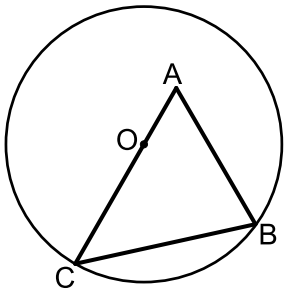


א. הוכח: $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$.

ב. נתון כי: $ME = 4$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע DG.

ג. נתון כי: $\sphericalangle ACD = 48.189°$
הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.

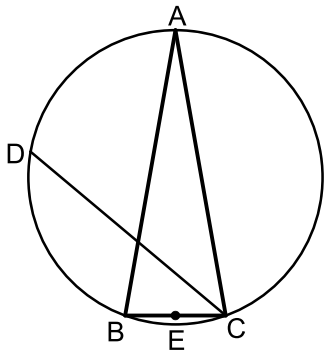
10) נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא $60°$.



א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD כך שנוצר המשולש ADB.
חשב את זווית ADB.

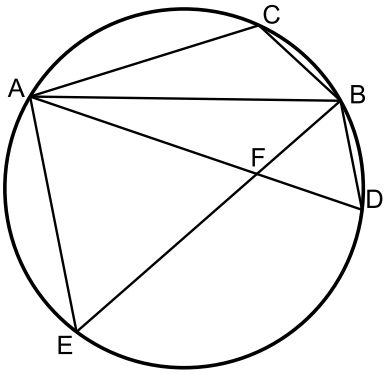
11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$ החסום במעגל שרדיוסו R.
הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$.
ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא $80°$.



א. הבע באמצעות R את הקטעים CD ו-DE.

ב. r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED.
הבע באמצעות R את r.

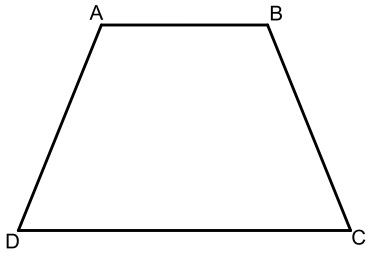
12) AB, AC ו-AD הם מיתרים במעגל המקיימים: $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.
מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את המיתרים AE ו-BE.
המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F.
נתון כי: $AC = AF = EF$.



א. הוכח: $\Delta ABF \cong \Delta ABC$.

ב. נתון גם: $3 \cdot \sphericalangle CAB = \sphericalangle DAE$.
הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.

13) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB \parallel CD\ ,\ AD = BC)$.



מידות הטרפז הן:

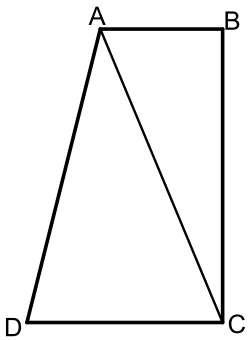
12 ס"מ = CD , 8 ס"מ= BC , 6 ס"מ = AB.

א. מצא את זווית C (עגל למספר שלם).

ב. מצא את אורך אלכסון הטרפז.

ג. חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

14) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB \parallel CD\ ,\ \sphericalangle B = 90°)$.



מסמנים את הבסיס: $AB = t$ וידוע כי: $DC = 1.6t$, $AD = 3t$.

היקף הטרפז הוא: 40 ס"מ.

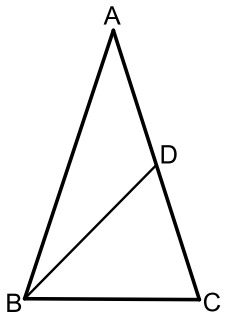
א. הבע באמצעות t את אורך האלכסון AC.

ב. ידוע גם כי: $\sphericalangle D = 60°$.

i. חשב את אורך הקטע AC.

ii. חשב את שטח הטרפז.

15) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC) בעל זווית ראש 36° החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.



א. מצא את אורך הבסיס BC במשולש.

ב. חשב את אורך התיכון BD.

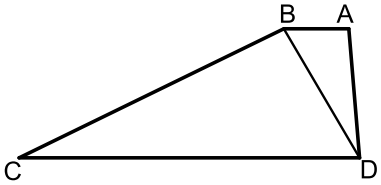
ג. מסמנים:

r_1 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.

r_2 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

הוכח את היחס הבא: $\frac{r_1}{r_2} = 2\cos 36$.

16) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.



מעבירים את האלכסון BD המקיים: $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADB$.

נתון כי: 20 ס"מ = CD , 10 ס"מ = AD , 5 ס"מ = AB.

כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.

א. הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.

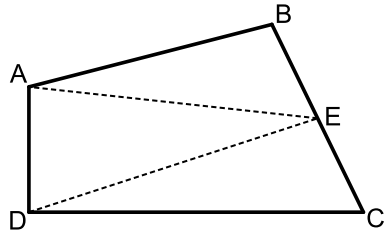
ב. חשב את זווית C.

ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

17) באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.
ידוע כי: $\sphericalangle D = 90°$.
נסמן את הצלעות באופן הבא: $AD = 3x$, $CD = 8x$, $BC = 5x$, $AB = 6x$.

א. חשב את זווית BCD.

ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.
מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך
ש-DE מקביל ל-AB.
חשב את היחס הבא: $\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}$.

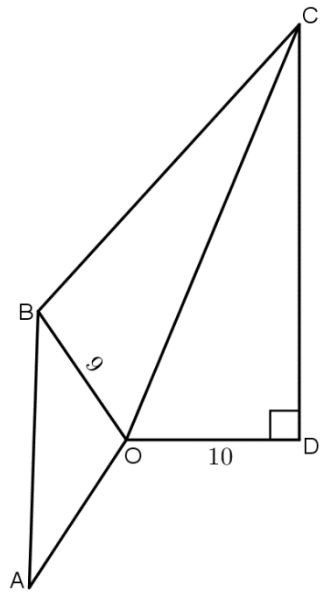


18) מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA , OB , OC ו-OD.
ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- α.
המשולש COD הוא ישר זווית $\sphericalangle CDO = 90°$.
נתונים האורכים: $DO = 10$, $BO = 9$.
מסמנים: $CD = 1.5m$, $BC = 1.4m$.

א. הבע באמצעות m את $\sin\alpha$.
(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי: $AB = m$.
מצא את m אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם
את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.

ג. חשב את זווית BOC.



19) במשולש ABC הזווית A היא בת $60°$.
מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית: $\sphericalangle ADB = 60°$.
ידוע כי $AB = \sqrt{28}$ וכי הצלע AD במשולש ABD
גדולה פי 1.5 מהצלע BD.

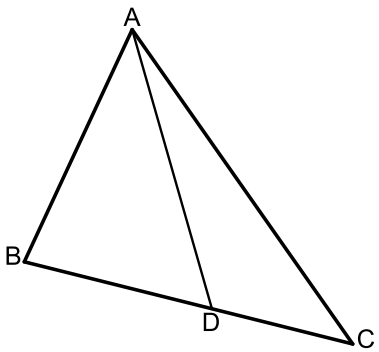
א. מצא את אורך הצלע BD.

ב. היקף המשולש ABC הוא: $P = 5\sqrt{7} + 7$.

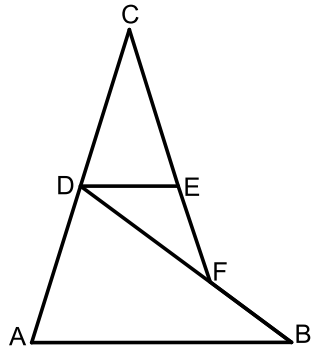
i. סמן: $DC = t$ והבע באמצעות t
את אורך הצלע AC.

ii. מצא את t.

ג. חשב את שטח המשולש ABC.

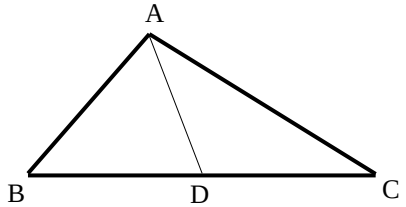


20) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.
הנקודות C , E ו-F נמצאות על אותו הישר.
ידוע כי המשולשים ABD , DEF ו-DCE הם
שווי שוקיים (AB = BD , DC = CE , EF = DE).
נתון כי : AD = 8.

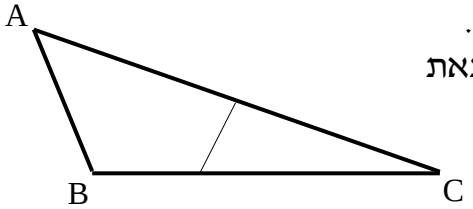


א. חשב את אורך הקטע BF.
ב. מחברים את הנקודות B ו-C.
חשב את אורך הצלע BC.

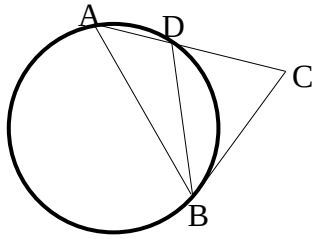
21) בשרטוט נתון : 6 ס"מ = AB , 8 ס"מ = AC ,
5 ס"מ = AD. הנקודה D היא אמצע הצלע BC.
חשב את אורך הקטע BC.



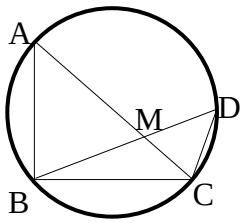
22) הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.
הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת
על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$.
נתון : $AB = a$, $BC = b$.
הבע באמצעות a ו- b את אורך הקטע DE.



23) המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R .
המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B
נפגשים בנקודה C. נתון : $\sphericalangle C = \alpha$, $\sphericalangle ADB = \beta$.
הבע באמצעות R , α ו- β את אורך הקטע BC.



24) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R ,
שנפגשים בנקודה M. זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון : $AB = k$, $DM = p$, $DC = q$.
הבע באמצעות R , k , p ו- q את אורך הקטע MC.



תשובות סופיות:

1) א. $\alpha=34.231°$ ב. $y=$ 14.33 ס"מ ג. $\alpha=155.526°$ או $\alpha=24.474°$

ד. $\alpha=41.382°$ או $\alpha=138.618°$ ה. $x=$ 3.606 ס"מ , $\alpha=73.898°$

2) א. $x=$ 5.646 ס"מ ב. $\alpha=20.742°$ ג. $\alpha=105.962°$ ד. $\alpha=90°$

3) AD = 13.064 ס"מ

4) GM = 3.360 ס"מ

5) 138.190° , 41.810° , 113.556° , 66.444°

6) AB = 14.56 ס"מ , $R=$ 9.242 ס"מ

7) $P=$ 22 ס"מ

8) AC = 10.790 ס"מ , $R=$ 5.395 ס"מ

9) DG = 18

10) $R=$ 10.5 ס"מ ב. 24.32°

11) א. $CD=R\sqrt{3}$, $DE=1.48R$ ב. $r=1.15R$

13) א. 68° ב. 11.66 ס"מ ג. $R=$ 6.29 ס"מ

14) א. $AC=\sqrt{32.36t^2-448t+1600}$ ב.i. 13 ס"מ ב.ii. 78 סמ"ר

15) א. 9.4 ס"מ ב.i. 10 ס"מ

16) ב. $\sphericalangle C=28.9°$ ג. $R=13.77$

17) א. 64.04° ב. $\frac{S_{ABE}}{S_{ECD}}=0.817$

18) א. $\sin\alpha=\frac{1.5m}{\sqrt{100+2.25m^2}}$ ב. $m=16$ ג. 56.94°

19) א. 4 ב.i. $1.5\sqrt{28}+3-t$ ב.ii. 3 ג. $S=18.18$

20) א. 4.94 ס"מ ב. 17.19 ס"מ

21) BC = 10 ס"מ

22) $DE=\sqrt{\frac{1}{9}b^2-a^2}$

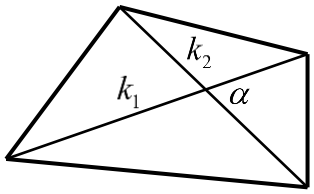
23) $BC=\frac{2R\sin\beta\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}$

24) $MC=\sqrt{p^2+q^2-\frac{pqk}{R}}$

שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש:

סיכום כללי:

שטחים של משולשים ומרובעים:

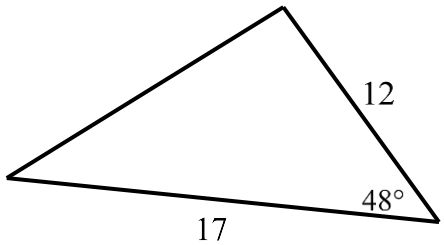


- שטח משולש ניתן לחישוב ע"י: $S=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$.
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסוניו: $S=\frac{k_1k_2\sin\alpha}{2}$.

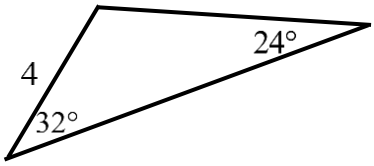
שאלות:

25) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

א.



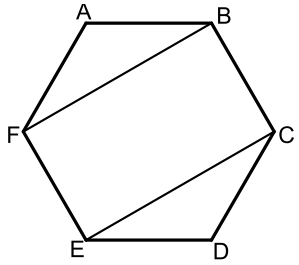
ב.



26) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של $15°$ עם הבסיסים.

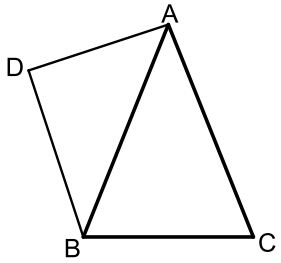
27) אורכו של מלבן הוא m ורוחבו n. הזווית שבין אלכסוני המלבן היא θ.
הוכח כי מתקיים: $\sin\theta=\frac{2mn}{m^2+n^2}$.

28) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$), BD חוצה את הזווית $\sphericalangle B$.
נתון: $AB=m$, $\sphericalangle A=\alpha$.
הבע באמצעות α ו-m את שטח המשולש BCD.



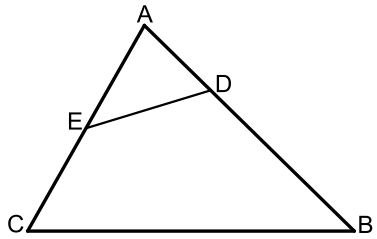
29) באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא S.
א. הבע באמצעות S את אורך צלע המשושה.
ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן BFEC.
הבע באמצעות S את שטח המלבן.

30) המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש α , (AB = AC).
אורך הבסיס BC הוא k.
על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו $\sphericalangle D = 90°$.



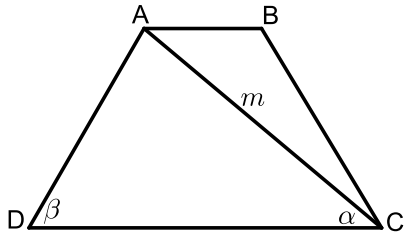
א. הבע באמצעות k ו- α את אורך שוק המשולש ABC.
ב. הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$
וכי: $\sphericalangle ABD = 40°$. מצא את זוויות המשולש ABC.
ג. חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי $k = 6$.

31) במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.
הנקודה E היא אמצע הצלע AC
והנקודה D מקיימת: AD = 3 ס"מ.
ידוע כי: $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$.



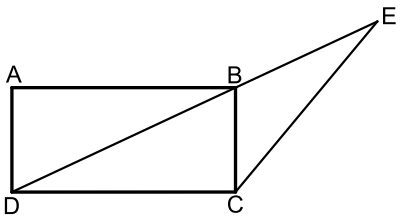
א. מצא את אורך הקטע DE.
ב. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
ג. חשב את שטח המרובע BCED.

32) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$. הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.
מסמנים: $\sphericalangle ADC = \beta$, $\sphericalangle ACD = \alpha$, $AC = m$.

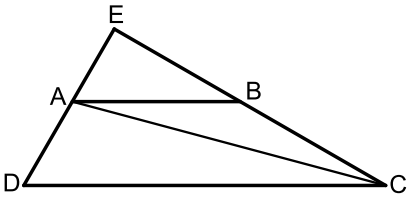


א. הבע באמצעות α , β ו- m את אורך הבסיס הגדול DC.
ב. נתון כי האלכסון AC מקיים: $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = 3$.
הבע באמצעות α, β ו- m את הבסיס AB.
ג. חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי: $\beta = 60°$, $\alpha = 40°$ ו- $m = 8$.

33) המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.
מחברים את הנקודה E עם הקודקוד C.
ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא $115°$.



א. מצא את אורך הקטע CE.
ב. מצא את אורך האלכסון BD.
ג. חשב את שטח המשולש DCE.

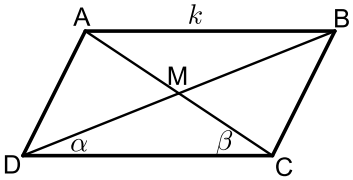


34) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם
בנקודה E.ידוע כי: $DE \perp CE$.
מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C.
מסמנים את הבסיס הגדול DC ב- k ואת: $\sphericalangle ACD = \alpha$.

א. הבע באמצעות k ו- α את הבסיס הקטן AB.

ב. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.

ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר: $\alpha = 15°$, 12 ס"מ $= k$.



35) נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים
את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים
בנקודה M כמתואר באיור.
מסמנים: $\sphericalangle ACD = \beta$, $\sphericalangle BDC = \alpha$, $AB = k$.

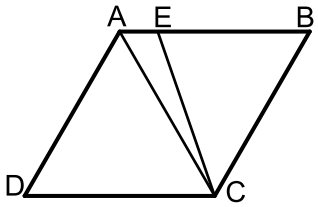
א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים: $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. הבע באמצעות α , β ו- k את שטח המשולש DMC.

ii. הבע באמצעות α , β ו- k את שטח המקבילית ABCD.

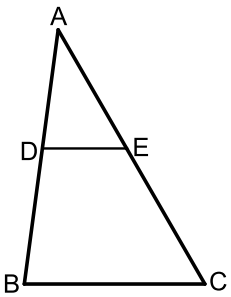
ג. נתון כי: $\frac{AC}{BD} = 2$. הראה כי שטח המקבילית הוא: $\frac{4k^2\sin^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.



36) המרובע ABCD הוא מעוין ובו $\sphericalangle D = 60°$.
מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE
כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת
אותה ביחס: $\frac{BE}{AE} = 4$.

א. חשב את זווית AEC.

ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.



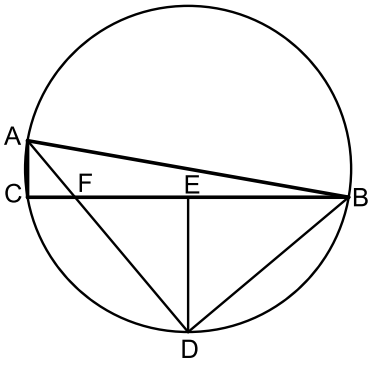
37) הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.
נתון כי: $CE = 13$, $BC = 15$, $BD = \sqrt{129}$.
ידוע כי זווית AED היא $60°$.

א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע

ב. כי הוא קטן מ-10 ס"מ.

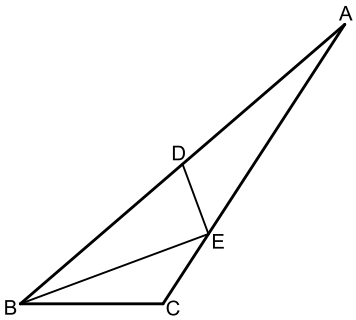
ג. חשב את שטח המשולש ADE.

38) המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.
הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים גובה DE לצלע BC .
מסמנים: $DE = k$ ונתון כי: $\sphericalangle ABC = 10°$.



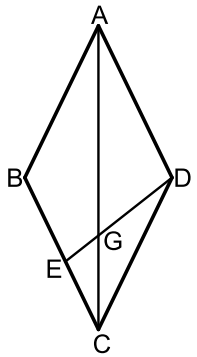
א. הבע באמצעות k את רדיוס המעגל.
ב. הבע באמצעות k את שטח המשולש ABF.
ג. מצא את k אם ידוע כי שטח המשולש ABF הוא 15.363 סמ"ר.

39) במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.
הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת: DE = CE .
ידוע כי: BC = 6 , BE = 8 , BD = 9 .



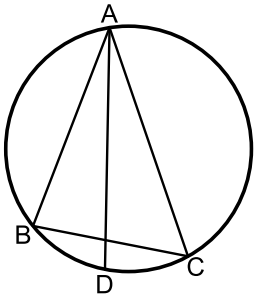
א. מצא את זווית B.
ב. חשב את שטח המשולש ADE.

40) נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.



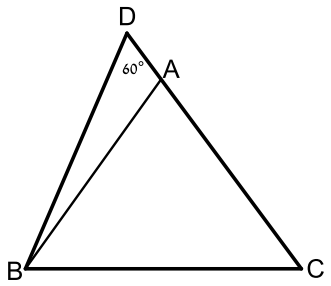
א. חשב את זוויות המעוין.
ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא m .
הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.
הזווית EDC תסומן ב- α .
i. הבע באמצעות m ו- α את אורך הקטע CE.
ii. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש EGC.

41) המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.
מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.
ידוע כי: $\sphericalangle ACB = 60°$, $\sphericalangle BAC = 40°$.
מסמנים: $AD = k$.



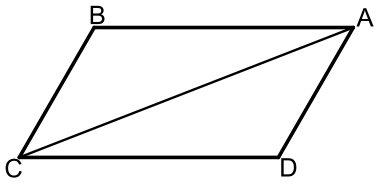
א. הבע באמצעות k את אורך המיתר BD.
ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.
מצא את k (עגל למספר שלם).

42) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC).
ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך
שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD.
ידוע כי: $\sphericalangle D = 60°$.
אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ.



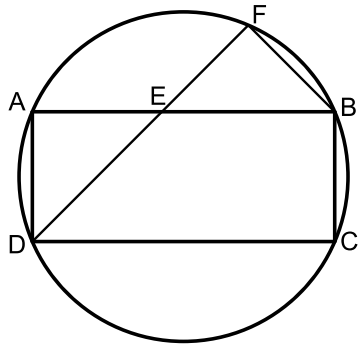
א. מצא את אורך הקטע AD.
ב. חשב את שטח המשולש ABC.

43) במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא $\sqrt{79}$ ס"מ.
היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי: $\sphericalangle B = 120°$.



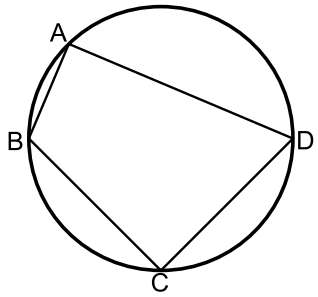
א. מצא את אורכי צלעות המקבילית.
ב. חשב את שטח המקבילית.
ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.

44) המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל.
מהקודקוד D מעבירים את המיתר DF
החותך את הצלע AB בנקודה E.
ידוע כי: $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CF}$.
הצלע AD של המלבן תסומן ב-a.



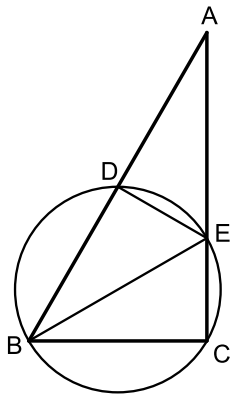
א. הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים.
ב. נתון גם כי: BC = BF.
i. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.
ii. חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$
(אין צורך לסרטט אותן).

45) המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור.
ידוע כי: $AB = b$, $BC = a$, $CD = a$, $AD = 3b$.



א. הבע באמצעות a ו-b את $\cos\sphericalangle BCD$.
ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים: $a = b\sqrt{5}$.
ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ.
הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.

46) המשולש ABC הוא ישר זווית $\sphericalangle C=90^\circ$ ובו: $\sphericalangle B=2\alpha$.
מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקודקודים B ו-C
אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E.
המיתר BE חוצה את זווית B.



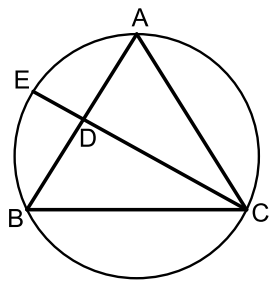
א. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש ABE.

ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים
וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המשולש ABE.

47) במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו היא β, BE חוצה את זווית $\sphericalangle B$ ו- CD הוא הגובה לשוק AB.

הוכח כי שטח המשולש ADE הוא: $S_{ADE}=-\dfrac{k^2\sin\frac{\beta}{2}\sin 4\beta}{4\sin\frac{3\beta}{2}}$.

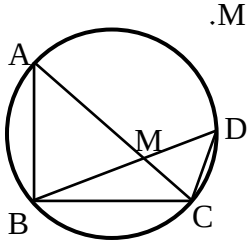
48) נתון משולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) החסום במעגל.
מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D.
ידוע כי E היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$ והיחס בין
הקטעים BD ו-CD הוא 4:7.
מסמנים: $\sphericalangle ACD=\alpha$.



א. מצא את זוויות המשולש ABC
(עגל למספרים שלמים).

ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי
רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.

49) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R, שנפגשים בנקודה M.
זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון: $\sphericalangle MBC=\alpha$, $\sphericalangle MCB=\beta$.



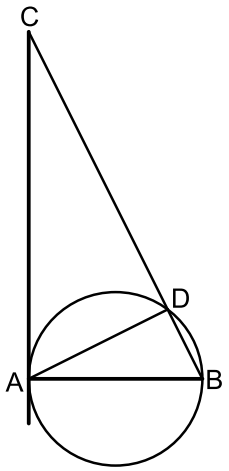
א. הבע באמצעות R, α ו- β את שטח המשולש BDC.

ב. נתון: $\beta=2\alpha$, $S_{BDC}=\frac{1}{2}R^2$.
חשב את α.

50) בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא b והזווית שליד הבסיס הגדול היא γ נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות γ ו- b את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את γ אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי $\sqrt{3}$ מהבסיס הקטן.

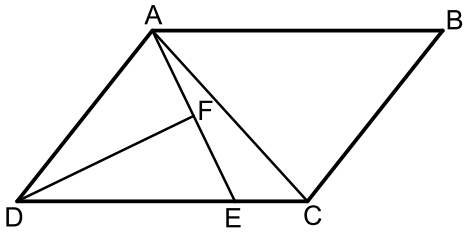


51) המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ו-AD הוא מיתר.
ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.
המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C.
מסמנים: $\sphericalangle BAD = \alpha$.

א. הבע באמצעות α ו- R את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות α ו- R את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את α אם ידוע כי שטח המשולש ABD קטן פי 4 משטח המשולש ACD.



52) המרובע ABCD הוא מקבילית.
הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים
המקיימים: $3CE = DE$.
מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.
ידוע כי: $\sphericalangle ADF = \sphericalangle CDF = \alpha$.
מסמנים: $CE = k$.

א. הבע באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.
הבע באמצעות k ו- α את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצא את α.

תשובות סופיות:

25) א. $S=$ 75.801 סמ"ר ב. $S=$ 8.641 סמ"ר

26) $S=$ 16 סמ"ר

27) $S_{\Delta BCD}=\dfrac{m^2\tan^2\alpha\sin 45^\circ\cos\alpha}{2\sin(\alpha+45^\circ)}$

28) א. $\sqrt{\dfrac{2S}{\sqrt{27}}}\approx 0.62S$ ב. $\dfrac{2}{3}S$

29) א. $\dfrac{k}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ ב. 67.78° , 67.78° , 44.4° ג. $S=37.18$

30) א. $DE=\sqrt{1.6}=1.26$ ב. $R=2$ ג. $S=21.48$

31) א. $DC=\dfrac{m\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ ב. $AB=\dfrac{m\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\beta}$ ג. $S_{ABCD}=31.2$

32) א. 12.75 ס"מ ב. 14.19 ס"מ ג. 63.05 ס"מ

33) א. $\dfrac{k\tan\alpha}{\tan 2\alpha}$ ב. $\dfrac{k^2\tan\alpha\sin 2\alpha}{2\tan^2 2\alpha}$ ג. $S=$ 7.754 ס"מ

34) ב.i. $\dfrac{k^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ ב.ii. $\dfrac{2k^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

35) א. 109.1° ב. $S=86.6$

36) א. 7 ס"מ ב. 34.48 סמ"ר

37) א. $R=\dfrac{k}{2\sin^2 40}=1.21k$ ב. $S=\dfrac{k^2\sin 10}{2\sin 50\sin^3 40}$ ג. $k=6$

38) א. 40.72° ב. $S=12.52$

39) א. 128.32° ; 51.68° ב. $1.27m\sin\alpha$ ג. $\dfrac{0.35m^2\sin^2\alpha\sin(128.32-\alpha)}{\sin(25.84+\alpha)}$

40) א. $BD=\dfrac{k\sin 20}{\sin 100}$ ב. $k=7$

41) א. 5 ס"מ ב. $S=172.77$

42) א. BC = 3 ס"מ ו-AB = 7 ס"מ ב. $S=$ 18.18 סמ"ר ג. $R=\sqrt{\dfrac{37}{3}}$

43) ב.i. $R = a\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1.3a$ ב.ii. 45° , 135°

44) א. $\cos\sphericalangle BCD = \frac{a^2-5b^2}{a^2+3b^2}$ ג. 14.4 סמ"ר $= S$.

45) א. $S = R^2 \tan 2\alpha$ ב. $36\sqrt{3}$ סמ"ר $= S$.

48) א. 58° , 58° , 64° ב. $BE = 7.75$.

49) א. $S = 2R^2 \sin\alpha \cos\beta \sin(90^\circ - \alpha + \beta)$ ב. $\alpha = 22.5^\circ$.

50) א. $\frac{b\sin(\gamma - 45^\circ)}{\sin 45^\circ}$, $\frac{b\sin(135^\circ - \gamma)}{\sin 45^\circ}$ ב. $\gamma = 75^\circ$.

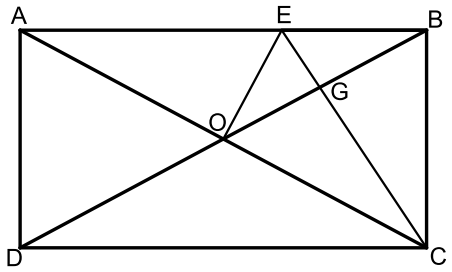
51) א. $S = R^2 \sin 2\alpha$ ב. $S = \frac{2R^2\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$ ג. $\alpha = 26.56^\circ$.

52) א. $AE = 6k\sin\alpha$ ב. $P_{ACE} = k + 6k\sin\alpha + k\sqrt{25 - 24\cos 2\alpha}$

ג. $\alpha = 14.47^\circ$.

שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה:

שאלות:

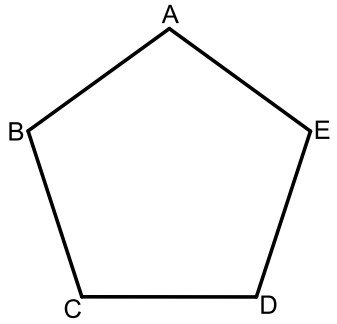


53) המרובע ABCD הוא מלבן.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD .
הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן
ומחלקת אותה כך ש- 2BE = AE .
ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC
ושווה ל-BE.
הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.

א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.

ב. הוכח כי מתקיים : 4GE = AE .

ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.
חשב את שטח המלבן ABCD.



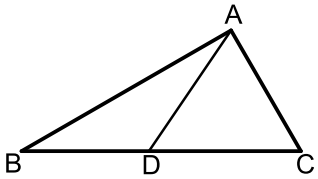
54) באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE
(כל זוויותיו הן $108°$) בעל אורך צלע α .

א. הבע באמצעות α את אלכסון המחומש AD.

ב. הבע באמצעות α את רדיוס המעגל
החוסם את המחומש.

ג. הבע באמצעות α את שטח המחומש.

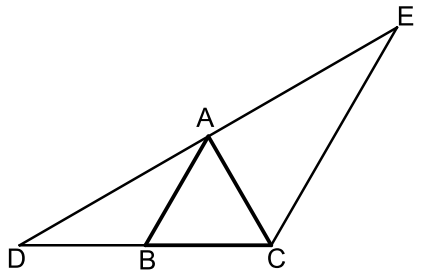
ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.



55) במשולש ABC הזווית C היא $60°$.
מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים
המשולשים ACD ו-ABD.
ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את
המשולש ACD הוא : $R_1 = \sqrt{3}$ ס"מ .
כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא : $R_2 =$ 3 ס"מ .

א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.

ב. היקף המשולש ABC הוא : $12+4\sqrt{3}$ ס"מ = P .
חשב את שטח המשולש.



56) המשולש ABC הוא שווה צלעות.
הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים שני משולשים ABD ו-ACE .
ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.

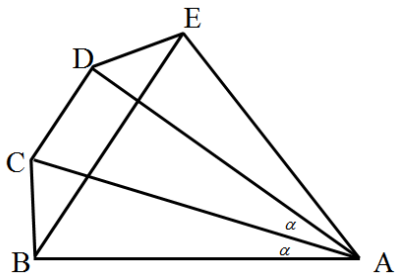
א. הוכח: $AB \parallel CE$.

ב. הוכח: $BC \cdot DE = DC \cdot AE$.

ג. נתון: $DC =$ 8 ס"מ
וכי: $AC \perp DE$.

i. חשב את שטח המשולש DCE .

ii. חשב את שטח המשולש ABD.



57) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB , AC , AD ו-AE
כך שמתקיים: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \alpha$ ו- $AB = AE$.
מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE.
מתקיים: $BE \parallel CD$.
ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה.

א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש (AC = AD).
הוכח כי: $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.

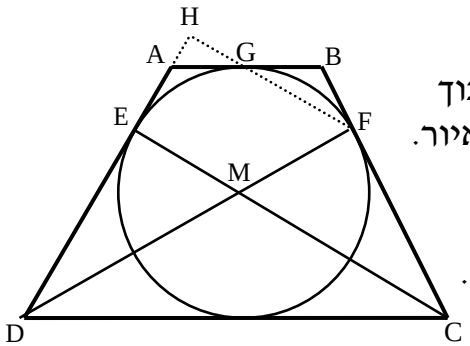
ג. ידוע כי: $\sphericalangle ADC = 3\alpha + 2.5$ ו- $\sphericalangle ADE = 3\alpha - 10$.
הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית.

ד. נסמן: $AB = m$.

i. הבע באמצעות m את צלעות הטרפז BCDE.

ii. הבע באמצעות m את שטח המחומש ABCDE.

iii. מצא את m אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).

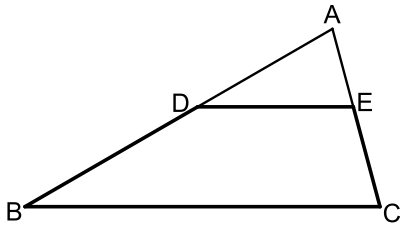


58) הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F ו-G כמתואר באיור.
הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז ונחתכים בנקודה M.

א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.

ב. חשב את זוויות הטרפז.

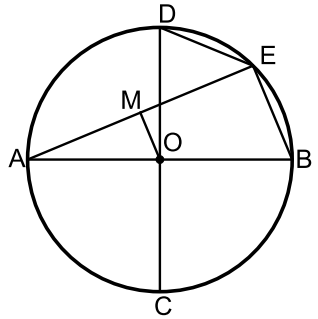
ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.
חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$.



59) המרובע BDEC הוא טרפז $BC \parallel DE$.
המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A
כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = BC).
נתון: 18 ס"מ = AB, $\sphericalangle ADE = 30°$.

א. סמן את אורך הבסיס DE ב-x
ואת שטח הטרפז BDEC ב-S.
הבע את S באמצעות x.

ב. על הקטע AD בונים ריבוע.
ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ"ר משטח הטרפז BDEC.
חשב את היחס: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$.



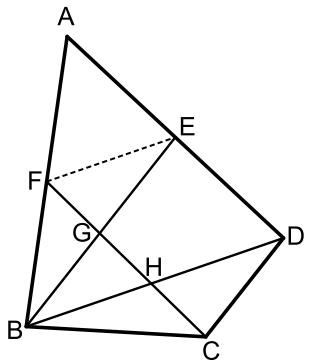
60) במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו- CD
המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף
המעגל המקיימת: 15 ס"מ = BE + DE.
מעבירים את המיתר AE.
הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE.

א. הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.

ב. מצא את אורך המיתר BE.
נתון כי שטח הטרפז הוא 90 סמ"ר.

ג. מצא את רדיוס המעגל.

ד. חשב את זווית B.



61) BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD.
הנקודות E ו- F הן בהתאמה אמצעי
הצלעות AD ו- AB במרובע.
מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש- $BE \parallel CD$.
נתון כי הזוויות $\sphericalangle A$ ו- $\sphericalangle BFE$ משלימות ל- $180°$.

א. הוכח: $\Delta BCD \sim \Delta BFE$.

ב. נתון כי: BE = 7.5 וכי: $GE - HD = 17\frac{1}{15}$.
חשב את אורך הקטע FE.

ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED
הוא: 4.001 ס"מ = R. מצא את זווית $\sphericalangle EBD$.

תשובות סופיות:

53) ג. 120 סמ"ר

54) א. 1.618α ב. 0.85α ג. $1.72\alpha^2$ ד. $S=85.57$

55) ב. $S=8\sqrt{3}$

56) ג.i. $S_{CDE}=16\sqrt{3}$ ג.ii. $S_{ABD}=4\sqrt{3}$

57) ד.i. $BE=1.2175m$, $CD=0.4776m$, $DE=0.4663m$, $BC=0.4663m$

62) ד.ii. $0.7232m^2$ ד.iii. 8 ס"מ $=m$

58) ב. $120°$, $60°$ ג. $\frac{2}{3}$

59) א. $S=81-0.25x^2$ ב. $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{16}{81}$

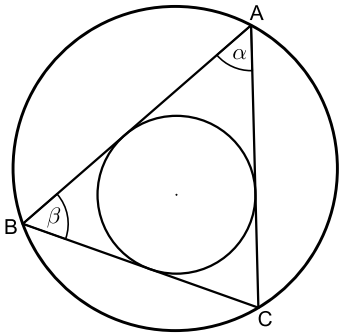
60) ב. BE = 10 ג. R = 13 ד. $\sphericalangle B=67.38°$

61) ב. FE = 4 ג. $16.73°$

שאלות מסכמות:

שאלות:

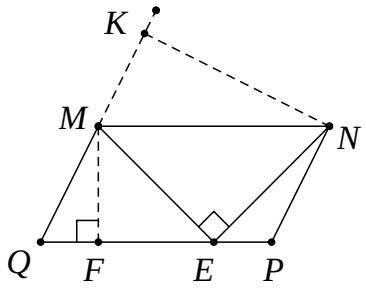
1) המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו R.
נתון כי $\sphericalangle B=\beta$, $\sphericalangle A=\alpha$.



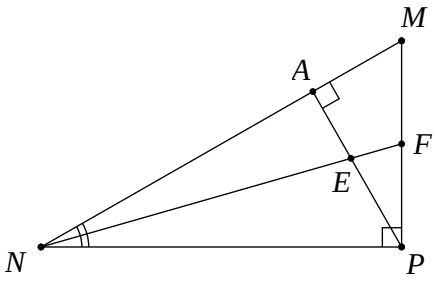
א. הבע את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R , β , α.

ב. נתון כי: $\alpha=\beta=60°$.
חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R.

2) במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על הצלע PQ כך ש- $\sphericalangle MEN=90°$ (ראה ציור).
נתון: MQ = 12 ס"מ , $\sphericalangle MQP=70°$, $\sphericalangle MNE=40°$.
מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



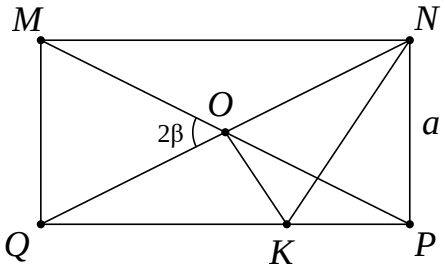
3) במשולש ישר-זווית MNP, $(\sphericalangle P=90°)$
PA הוא גובה ליתר ו-NF חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.
PA ו-NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור).
נתון: NP = 24 ס"מ , $\sphericalangle MNP=40°$.



א. מצא את אורך הקטע NA.

ב. מצא את אורך הקטע EF.

4) אלכסוני המלבן MNPQ נחתכים בנקודה O.
מנקודה O מעלים אנך ל-QN החותך את QP בנקודה K (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle MOQ=2\beta$, $NP=a$.



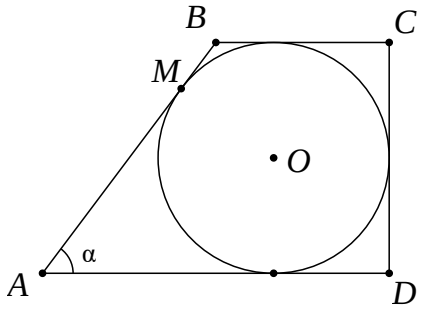
א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות β ו- a.

ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות β ו- a.

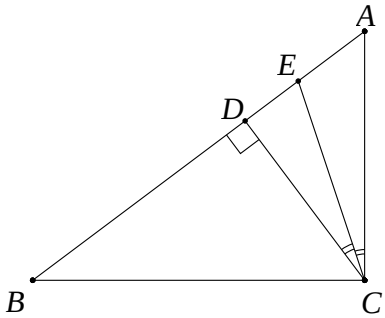
5) בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.
הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.
נתון: AM = 12 ס"מ , $\sphericalangle BAD = \alpha$.

א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת α .

ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת α .



6) במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון:
BC = 8 ס"מ , $\sphericalangle ACB = 90°$, $\sphericalangle ABC = \beta$.
CD הוא הגובה ליתר.
CE הוא חוצה-הזווית $\sphericalangle ACD$.
הבע את אורך הקטע AE באמצעות β .



7) נתון מעגל שרדיוסו R . מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה.
מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חסום בתוך מעגל זה.
חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

8) ΔABC הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC) שאורך בסיסו 12 ס"מ.
AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB.
שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון: $\sphericalangle ABC = \alpha$ $(\alpha > 45°)$.

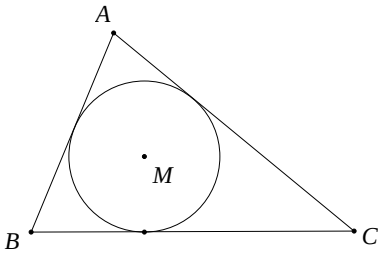
א. הבע את היחס AO : DO באמצעות α .

ב. הראה כי בעבור $\alpha = 60°$ הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.

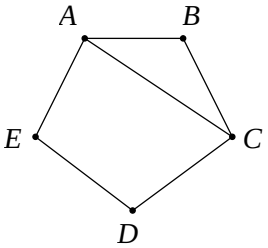
9) במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M ורדיוסו r (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle C = 46°$, $\sphericalangle B = 62°$.

א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC .

ב. נתון: BC = 16 ס"מ. מצא את r .

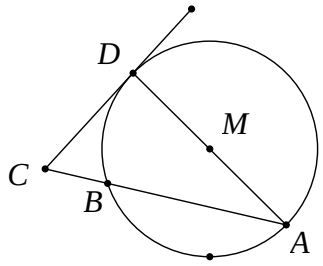


10) במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)
אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.



11) מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחותך CBA למעגל (ראה ציור).

נתון: $CD=\frac{3}{5}R$.

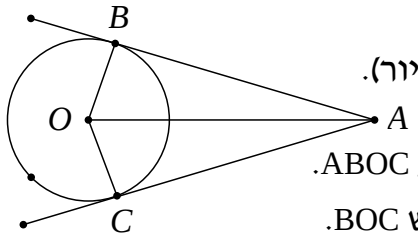


א. מצא את זוויות המשולש CAD.

ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש BCD.

12) מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC=2\alpha$, 10 ס"מ = AO.



א. הבע באמצעות α את S_1, שטח המרובע ABOC.

ב. הבע באמצעות α את S_2, שטח המשולש BOC.

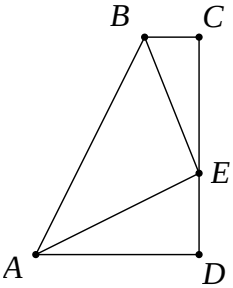
ג. הראה שאם $\alpha=30°$, אזי: $S_1=4\cdot S_2$.

13) ABCD הוא טרפז ישר-זווית $(\sphericalangle C=\sphericalangle D=90°)$.

נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle AEB=90°$, $AE=BE=k$ ו- $\sphericalangle CBE=\beta$.

הבע באמצעות k ו- β את שטח הטרפז.

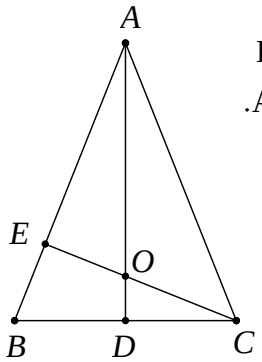


14) ענה על השאלות הבאות:

א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל. מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.

ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'. מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.

15) ABC הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC) שבו זווית הראש היא זווית חדה. נתון כי זווית הבסיס היא β ואורך הבסיס BC הוא 2α. AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).

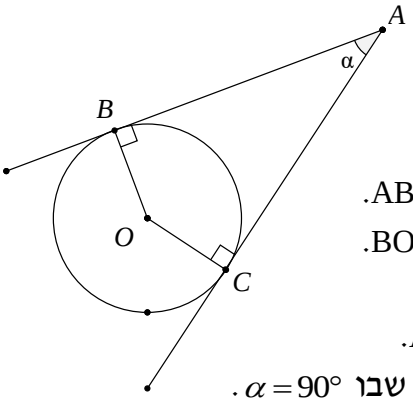


א. הבע באמצעות α ו- β את אורכי הקטעים CO ו-CE.

ב. הבע באמצעות β את היחס $\frac{CO}{CE}$.

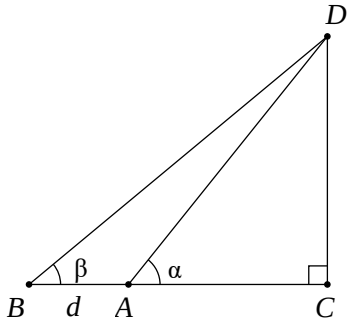
ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר $\beta=60°$, והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.

16) מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם m (כלומר: $AB = AC = m$).
נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא $\sphericalangle BAC = \alpha$ (ראה ציור).

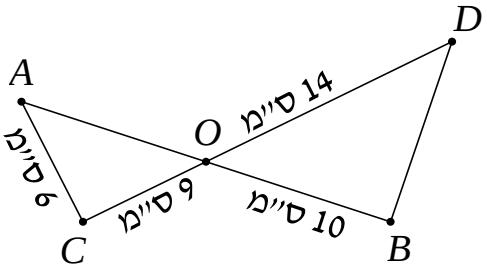


א. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש ABC.
ב. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש BOC.
ג. הבע באמצעות α את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.
ד. בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו $\alpha = 90°$.

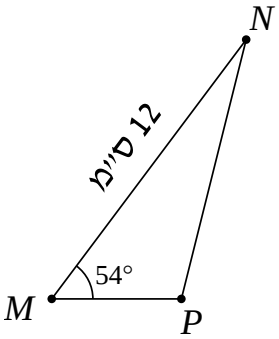
17) במשולש ישר-זווית DAC נתון $\sphericalangle DAC = \alpha$.
מאריכים את הניצב AC כך ש- $AB = d$.
נתון כי: $\sphericalangle DBA = \beta$ (ראה ציור).
סמן: $AC = x$.
הבע את x באמצעות d, α ו- β.



18) הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O.
נתון כי: $\sphericalangle OAC = 60°$,
9 ס"מ = CO, 6 ס"מ = AC,
14 ס"מ = OD, 10 ס"מ = OB.
חשב את $\sphericalangle ODB$.

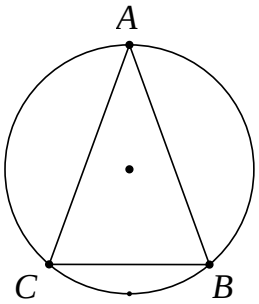


19) במשולש MNP גודל הזווית M הוא $54°$.
נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ
(ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP.



א. חשב את אורך הצלע NP.
ב. PA הוא תיכון לצלע MN.
חשב את שטח המשולש PAN.

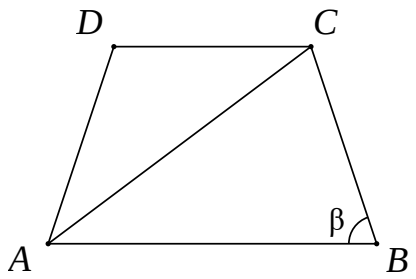
20) המשולש השווה-שוקיים ABC (AB = AC) חסום במעגל (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle ABC = \beta$.
כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.



א. הבע בעזרת β את שטח המשולש ABC.
ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור $\beta = 45°$.

21) במשולש ABC הזווית $\sphericalangle C$ היא בת $60°$, אורך הצלע AB הוא $\sqrt{13}$ ס"מ, והיקף המשולש הוא $7+\sqrt{13}$ ס"מ. חשב את שטח המשולש.

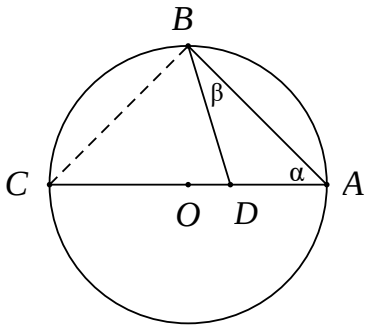
22) בטרפז שווה-שוקיים ABCD (AD = BC) אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון. זווית הבסיס היא β $(\beta > 60°)$, (ראה ציור). הבע באמצעות β את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



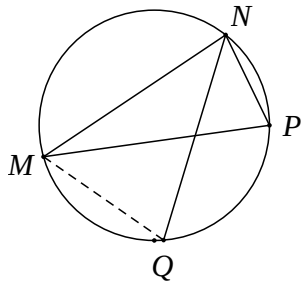
23) הקודקודים A ו- B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O. הקודקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA.

א. הבע בעזרת α ו- β את שטח המשולש ABD.

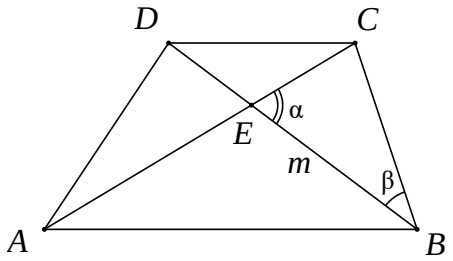
ב. הבע בעזרת α ו- β את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.



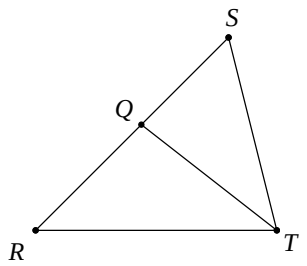
24) משולש MNP חסום במעגל.
המיתר NQ חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.
נתון: $\sphericalangle MNP = 80°$, $\sphericalangle MPN = 70°$,
NP = 12 ס"מ.
חשב את אורך המיתר MQ.



25) נתון טרפז ABCD $(AB \| CD)$.
הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז.
נתון: $DC = BC$, $BE = m$,
$\sphericalangle CEB = \alpha$, $\sphericalangle CBD = \beta$ (ראה ציור).
הבע את אורכי בסיס הטרפז:
AB ו- CD באמצעות m, α ו- β.



26) במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית $\sphericalangle RTS$
(ראה ציור), $QS = m$, $RQ = \sqrt{2}$,
$\sphericalangle RST = \alpha$, $\sphericalangle TRQ = 45°$.



א. הבע את $\sin\alpha$ באמצעות m .

ב. נתון כי: $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

חשב את זוויות המשולש RST.

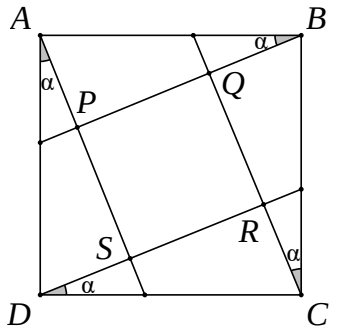
27) במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

28) נתון משולש שצלעותיו t , $2t$, kt .

א. לאיזה ערכים של הקבוע k המשולש הוא קהה זווית?

ב. נתון $k = \sqrt{7}$. הבע ע"י t את אורך חוצה הזווית הקהה.

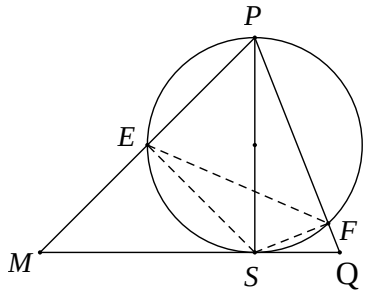
29) בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה קטעים היוצרים את אותה זווית α עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע פנימי PQRS.



א. הוכח כי: $\frac{PQ}{AB} = \cos\alpha - \sin\alpha$.

ב. לאיזו זווית α מתקיים: $PR = AB$?

30) PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).
נתון $\sphericalangle SPQ = \beta$, $\sphericalangle MPS = \alpha$, $PS = h$.



א. הבע את שטח המשולש PMQ באמצעות h , α ו- β .

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את הצלעות PM ו-PQ בנקודות E ו-F בהתאמה (ראה ציור).

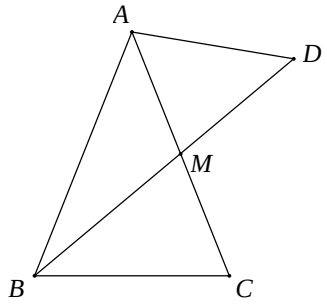
i. הבע באמצעות α ו- β את $\sphericalangle ESF$.

ii. הבע באמצעות α ו- β את היחס בין שטח המשולש ESF לשטח המשולש PMQ.

31) במשולש ABC הצלעות הן a , b ו- c והזוויות שמונחות מולן הן: α , β ו- γ בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון m_a (התיכון לצלע a) באמצעות הצלעות b ו- c והזווית α.

ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.

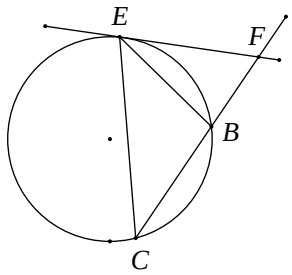


32) במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC), BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).
נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\sphericalangle BAC = 50°$.

א. מצא את גודל הזווית $\sphericalangle BMC$.

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D, כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.
מצא את שטח המשולש AMD.

33) משולש שווה שוקיים BCE (BC = BE) חסום במעגל שרדיוסו R.
זווית הבסיס של המשולש BCE היא α.
בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

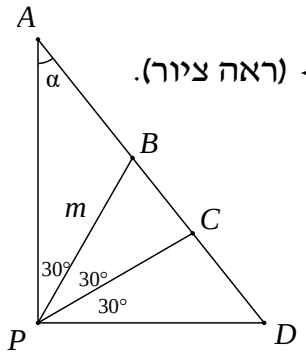


א. בטא את שטח המשולש BEF באמצעות R ו- α.

ב. מצא את הערך של α שבעבורו שטח המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.

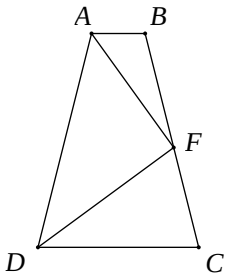
34) בטרפז BCDE $(BC \| ED)$ אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ.
הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא $80°$.
אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית $\sphericalangle CBE$.
חשב את היקף הטרפז.

35) במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית הישרה $\sphericalangle P$ לשלוש זוויות שוות, כלומר $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPD = 30°$ (ראה ציור).
נתון כי: $PB = m$, $\sphericalangle PAD = \alpha$.

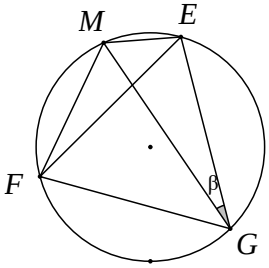


א. היעזר במשפט הסינוסים, והבע את AB , AC , BD ו- CD באמצעות m ו- α.

ב. הוכח כי: $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$.



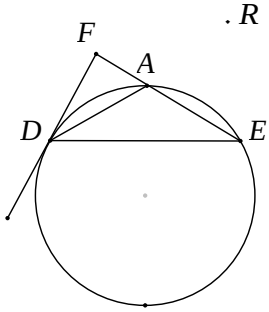
36) בטרפז שווה שוקיים ABCD $(AD = BC\ ,\ AB \| DC)$,
F היא נקודה על השוק BC, כך ש-DF חוצה את
הזווית $\sphericalangle CDA$ ו-AF חוצה את הזווית $\sphericalangle DAB$ (ראה ציור).
נתון: $AB = \beta$, $\sphericalangle FAB = \beta$.
הבע באמצעות b ו- β את אורך הבסיס DC.



37) משולש שווה צלעות EFG חסום במעגל שרדיוסו R.
M היא נקודה על המעגל. נתון: $\sphericalangle MGE = \beta$ (ראה ציור).

א. הוכח כי: $ME + MF = MG$.

ב. אם $ME = R$ מה תוכל לומר על MG?

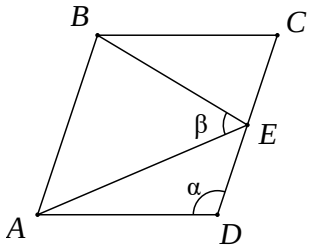


38) משולש שווה שוקיים ADE (AD = AE) חסום במעגל שרדיוסו R.
ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך
הצלע AE בנקודה F (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle AE = \alpha$ $(60° < \alpha < 180°)$.

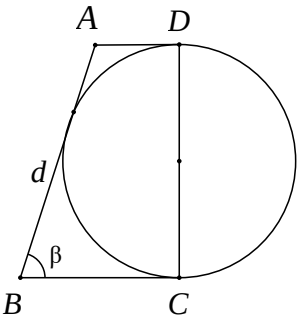
א. הבע את שטח המשולש ADF באמצעות R ו- α.

ב. הבע באמצעות α את היחס שבין שטח
המשולש ADE ובין שטח המשולש ADF.

ג. חשב את α אם שטח המשולש ADE שווה לשטח המשולש ADF.



39) במעוין ABCD הנקודה E היא אמצע הצלע CD.
נתון: $\sphericalangle ADC = \alpha$, $\sphericalangle AEB = \beta$ (ראה ציור).
הוכח כי: $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{25 - 16\cos^2\alpha}}$.



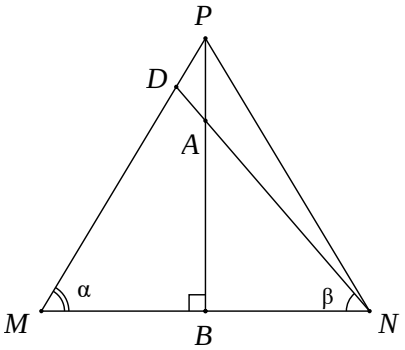
40) נתון טרפז ABCD ונתון מעגל. השוק DC הוא קוטר המעגל.
השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו- BC
משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו- C בהתאמה (ראה ציור).
נתון כי: $\sphericalangle B = \beta$, $AB = d$.

א. הבע באמצעות d את סכום בסיסיו של הטרפז.

ב. הבע באמצעות d ו- β את היקף הטרפז ואת השטח
של הטרפז.

ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר.
חשב את הזווית החדה β.

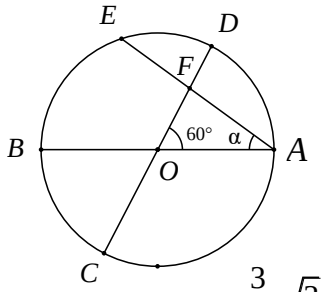
41) במשולש שווה שוקיים PMN (PM = PN),
A היא נקודה על הגובה PB, כך ש- $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$.
הישר NA חותך את השוק PM בנקודה D (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle DNM = \alpha$, $\sphericalangle DNB = \beta$ ו- $BN = \alpha$.



א. חשב את היחס $\tan\beta : \tan\alpha$.

ב. חשב את היחס PM:DM.

42) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני
קטרים AB ו- CD הנחתכים בזווית של $60°$.
מיתר AE, היוצר זווית α עם הקוטר AB,
חותך את הקוטר CD בנקודה F (ראה ציור).



א. הבע את שטח המשולש ACF באמצעות R ו- α.

ב. הוכח שכאשר $\alpha = 30°$, שטח המשולש ACF הוא $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$.

תשובות סופיות:

1) א. $r=\dfrac{2R\sin(\alpha+\beta)\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ב. $\frac{1}{2}R$

2) MF = 11.28 ס"מ , KN = 21.52 ס"מ

3) א. NA = 18.385 ס"מ ב. EF = 5.975 ס"מ

4) א. $OK=\dfrac{a}{2\cos\beta}$ ב. $\dfrac{a}{2\sin\beta}\cdot\left[1+\tan\beta+\dfrac{1}{\cos\beta}\right]$

5) א. $12\cdot\tan\frac{\alpha}{2}$ ב. $24\cdot\left(1+\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2$

6) $AE=8\sin\beta\cdot\left[\tan\beta-\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)\right]=8\tan\beta\cdot\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)$

7) $2\cdot\dfrac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ}=\dfrac{1}{\cos^2 20^\circ}\approx 1.132$

8) א. $-2\cdot\dfrac{\tan\alpha}{\tan 2\alpha}=-\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha-1$

ב. מתקיים: $AO=2\cdot DO$ (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

9) א. $BC=r\cdot(\tan 59^\circ+\tan 67^\circ)\approx 4.02\cdot r$ ב. $r=\dfrac{16}{\tan 59^\circ+\tan 67^\circ}\approx 3.98$

10) $S=$ 147.86 סמ"ר

11) א. $\sphericalangle A=16.7^\circ$, $\sphericalangle D=90^\circ$, $\sphericalangle C=73.3^\circ$ ב. $S\approx 0.0495\cdot R^2$

12) א. $S_1=100\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=50\cdot\sin 2\alpha$

ב. $S_2=50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin(180^\circ-2\alpha)=50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin 2\alpha$

13) א. $S=\frac{1}{2}k^2\cdot(1+2\sin\beta\cos\beta)$ (או כל תשובה שקולה). ב. 27 יח"ש.

14) א. $r\approx$ 5.548 ס"מ ב. $S\approx$ 90.45 סמ"ר

15) א. $CO=\dfrac{a}{\sin\beta}$, $CE=2a\cdot\sin\beta$ ב. $\dfrac{CO}{CE}=\dfrac{1}{2\sin^2\beta}$

ג. היחס הוא: $\frac{2}{3}$ (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

16) א. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha$ ב. $S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha\cdot\tan^2\frac{\alpha}{2}$

ג. יחס השטחים: $\tan^2\frac{\alpha}{2}$

ד. במקרה זה ABOC הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 $\left(\tan^2 45^\circ=1\right)$.

17) $AC=x=d\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

18) $\sphericalangle ODB\approx 44.7^\circ$

19) א. $NP=$ 10.38 ס"מ ב. $S_{\Delta PAN}=$ 8.2 סמ"ר

20) א. $S=800\cdot\sin^2\beta\cdot\sin 2\beta$ ב. 400 סמ"ר

21) $S_{\Delta ABC}=3\cdot\sqrt{3}\approx$ 5.196 סמ"ר

22) יחס השטחים הוא: $\left(-\frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}\right)=1-4\cos^2\beta$ או כל תשובה שקולה.

23) א. $S_{\Delta ABD}=288\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ ב. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cdot\cos\alpha}$

24) $MQ\approx$ 15.43 ס"מ

25) $AB=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$, $DC=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

26) א. $\sin\alpha=\frac{1}{m}$ ב. 15° , 120° , 45° או 75° , 60° , 45°

27) $\alpha\approx 20.7$

28) א. $\sqrt{5}<k<3$ או $1<k<\sqrt{3}$ ב. $\frac{2}{3}\cdot t\approx 0.667t$

29) $\alpha=15^\circ$

30) א. $S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{2}\cdot h^2\cdot(\tan\alpha+\tan\beta)$ ב. i. $\sphericalangle ESF=180^\circ-(\alpha+\beta)$

ב. ii. $S_{\Delta EFS}:S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{4}\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

31) א. $m_a=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2+c^2+2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}$ ב. $m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot b$

32) א. $\sphericalangle BMC=79.5^\circ$ ב. $S_{\Delta AMD}=$ 54.1 סמ"ר

33) א. $S_{\Delta BEF}=\frac{2R^2\cdot\sin^3\alpha\cdot\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$ ב. $\alpha=45°$

34) $P_{BCDE}=51.09$

35) א. $AC=\frac{\sqrt{3}\cdot m\cdot\sin(30°+\alpha)}{2\cdot\sin(60°+\alpha)\cdot\sin\alpha}$, $AB=\frac{m}{2\cdot\sin\alpha}$, $BD=\frac{\sqrt{3}\cdot m}{2\cdot\cos\alpha}$,

$CD=\frac{m\cdot\sin(30°+\alpha)}{2\cdot\sin(60°+\alpha)\cdot\cos\alpha}$ ב. הוכחה.

36) $DC=\frac{-b\cdot\tan\beta}{\tan 3\beta}$

37) ב. MG הוא קוטר במעגל.

38) א. $S_{\Delta ADF}=\frac{-2R^2\cdot\cos^3\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha}{\cos(1.5\alpha)}$ ב. $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ADF}}=-\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)}$

ג. $\alpha=90°$

40) א. $AD+BC=d$ ב. $P=2d+d\sin\beta$, $S=\frac{1}{2}d^2\cdot\sin\beta$

ג. $\beta=30°$

41) א. $\tan\beta:\tan\alpha=\frac{4}{5}=0.8$ ב. $PM:DM=\frac{9}{8}=1.125$

42) א. $S=\frac{3R^2\cdot\sin(30°+\alpha)}{4\cdot\sin(60°+\alpha)}$.

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 7 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות 96
2. חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר) 101
3. פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות 104
4. שימושים של מערכת משוואות לינאריות 107

פתרון מערכת משוואות לינאריות

שאלות

1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

א. $\begin{aligned} x+10y&=11 \\ 2x-2y&=0 \end{aligned}$ ב. $\begin{aligned} x-4y&=-7 \\ x-y&=-1 \end{aligned}$ ג. $\begin{aligned} x-y&=0 \\ 2x+y&=3 \end{aligned}$ ד. $\begin{aligned} 2x+y&=4 \\ x+y&=3 \end{aligned}$

2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{aligned} x+10y&=11 \\ 2x-2&=0 \\ x+y&=3 \end{aligned}$ ב. $\begin{aligned} x-4y+z&=-7 \\ x-y&=-1 \\ x+y+z&=5 \end{aligned}$ ג. $\begin{aligned} 2x+y+z&=3 \\ x-z&=0 \end{aligned}$ ד. $\begin{aligned} x&=3 \\ 2x+y&=4 \\ z+t&=8 \end{aligned}$

בשאלות **3-5** בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2,\ R_1 \to 2R_1$

$R_3 \to R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2 + R_1$

$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3 - 3R_2$

5) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + 3R_3, R_2 \to R_2 + 3R_3$

$R_1 \to 5R_1 - 8R_2$

6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

א. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **7-15** הביאו את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת**
(בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

15) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$

$F=\mathbb{C}$, $F=\mathbb{R}$

* בשאלה **15** יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{C}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{R}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **16-27** פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

16) $\begin{aligned} 2x+3y&=8 \\ 5x-4y&=-3 \end{aligned}$

17) $\begin{aligned} 4x+8y&=20 \\ 3x+6y&=15 \end{aligned}$

18) $\begin{aligned} 8x-4y&=10 \\ -6x+3y&=1 \end{aligned}$

19) $\begin{aligned} 2x_1-x_2-3x_3&=5 \\ 3x_1-2x_2+2x_3&=5 \\ 10x_1-6x_2-2x_3&=32 \end{aligned}$

20) $\begin{aligned} x+2y+3z&=-11 \\ 2x+3y-z&=-5 \\ 3x+y-z&=2 \end{aligned}$

21) $\begin{aligned} x+2y+3z&=3 \\ 4x+6y+16z&=8 \\ 3x+2y+17z&=1 \end{aligned}$

22) $\begin{aligned} x+3y&=2 \\ 2x+y&=-1 \\ x-y&=-2 \end{aligned}$

23) $\begin{aligned} 4x-7y&=0 \\ 8x-14y&=2 \\ -16x+28y&=4 \end{aligned}$

24) $\begin{aligned} 3x-2y&=1 \\ -9x+6y&=-3 \\ 6x-4y&=2 \end{aligned}$

25) $\begin{aligned} x+2y-3z+2t&=2 \\ 2x+5y-8z+6t&=5 \\ 6x+8y-10z+4t&=8 \end{aligned}$

26) $\begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0 \end{aligned}$

27) $\begin{aligned} x+2y+2z&=2 \\ 3x-2y-z&=5 \\ 2x-5y+3z&=-4 \\ 2x+8y+12z&=0 \end{aligned}$

28) פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל **השדה** $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i \\ iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i \\ (-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i \end{aligned}$$

א. $\mathbf{F}=\mathbb{R}$

ב. $\mathbf{F}=\mathbb{C}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

2) א. $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

6) א. $R_1 \to 2R_1 + R_2$ ב. $R_2 \to R_2 - 4R_1$ ג. $R_2 \to 2R_2 + 4R_1$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

F=ℂ F=ℝ

16) $(x,y)=(1,2)$

17) $(x,y)=(5-2t,t)$

18) ϕ

19) ϕ

20) $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$

21) $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$

22) $(x,y)=(-1,1)$

23) ϕ

24) $(x,y)=\left(\frac{1+2t}{3},t\right)$

25) $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$

26) ϕ

27) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

28) א. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{R}}{=}(2,3,-1)$

ב. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{C}}{=}((-1+i)t+1+i,3,t)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר)

שאלות

בשאלות **1-6** מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

1)
$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

בשאלות **7-9** מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

7)
$$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

8)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

9)
$$\begin{aligned} 3x+4y-z&=2\\ kx-2y+z&=-1\\ x+8y-3z&=k\\ 2x+6y-2z&=0.5k+1 \end{aligned}$$

בשאלות **10-12** מצאו לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

10)
$$\begin{aligned} x+2y-4z&=b\\ 7x-10y+16z&=7\\ 2x-ay+3z&=1 \end{aligned}$$

11)
$$\begin{aligned} 2x+4y+az&=-1\\ x+2y+4z&=-4\\ x+2y-4z&=0\\ x+2y+6z&=-2b \end{aligned}$$

12)
$$\begin{aligned} x+y-z+t&=1\\ ax+y+z+t&=b\\ 3x+2y+at&=1+a \end{aligned}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{aligned} x+az&=1\\ y+2z&=2\\ bx+cy+dz&=3 \end{aligned}$$

א. מצאו תנאי עבור a,b,c,d, כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצאו תנאי עבור b,c,d, כך שלכל a, למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

14) נתונה המערכת: $\begin{cases} x+y-z=1\\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1\\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.

א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.

ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.

ג. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת:

1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.

ה. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z=0$.

ו. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.

ז. מצאו עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$.
האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.

ח. מצאו לאיזה ערך של k, $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

15) נתונות המשוואות של 3 מישורים: $\begin{cases} 3x+my=3\\ mx+2y-mz=1\\ -x+mz=-1 \end{cases}$.

בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע m שלושת המישורים:

א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).

ב. לא נפגשים באף נקודה.

ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).

ד. האם קיים ערך של m עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 1. $k \neq 1,\ k \neq -2$ 2. $k = 1$ 3. $k = -2$

2) 1. $k \neq 1,\ k \neq -2$ 2. $k = -2$ 3. $k = 1$

3) 1. $k \neq -1,\ k \neq \frac{4}{7}$ 2. $k = \frac{4}{7}$ 3. $k = -1$

4) 1. $k \neq 1,\ k \neq -0.4$ 2. $k = 1,\ k = -0.4$

5) 1. $k \neq \pm 1,\ k \neq -2$ 2. $k = \pm 1, k = -2$

6) 1. $k \neq -1,\ k \neq -3,\ k \neq 2$ 3. $k = -1,\ k = -3,\ k = 2$

7) 1. $k = -1$ 2. $k \neq \pm 1$ 3. $k = 1$

8) 2. $k = 3$ 3. $k \neq 3$

9) 1. $k \neq 1$ 2. $k = 1$

10) 1. $a \neq 2$ 2. $a = 2,\ b \neq -3$ 3. $a = 2, b = -3$

11) 2. $b \neq 2.5$ או $a \neq -6$. 3. $a = -6,\ b = 2.5$

12) 2. $a = 2,\ b \neq 2$ 3. $a = 2,\ b = 2$ או $a \neq 2$.

13) א. $ab + 2c \neq d$ ב. $b = 0,\ c = 1.5, d = 3$

14) א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1 \\ 4 & -6 & k+2 & 4 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix}$

ג. 1. $k \neq -1$, $k \neq 2$. 2. $k = -1$ 3. $k = 2$ ד. $(x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$

ה. $k = \pm 2$ ו. $k = -2$ ז. $k = 2$, לא. ח. $k = -2$

15) א. $m \neq 0, -2, 3$ ב. $m = -2, 3$ ג. $m = 0$ ד. לא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות

שאלות

1) פתרו את המערכת $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ 4x-2y+5z=12 \end{cases}$.

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

2) פתרו את המערכת $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ x+y+z=4 \end{cases}$.

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

3) נתונה המערכת: $\begin{cases} x-y=1 \\ -x+2y-z=k \\ 2x+my+z=3 \end{cases}$.

א. מצאו את ערכי m, עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.

ב. עבור ערך m שנמצא ב-א, מצאו את ערכי k, עבורם למערכת פתרון.

ג. עבור ערכי m, k שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

4) נתון שהחמישייה $(4t-2s+4,-t+s,2,t,s)$ מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.

ב. החמישייה $(4,0,2,0,0)$, היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.

ג. החמישייה $(4,0,2,1,1)$, היא פתרון של המערכת הנתונה.

ד. לכל a ממשי, החמישייה $(4a,0,2a,0,0)$ אינה פתרון של המערכת הנתונה.

ה. החמישייה $(4t-2s,-t+s,0,t,s)$, היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ו. החמישייה $(0,1,0,1,2)$, היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) נתונה המערכת ההומוגנית $\begin{cases} 3x+my=0 \\ mx+2y-mz=0 \\ -x+mz=0 \end{cases}$.

יהי W אוסף הפתרונות של המערכת.

עבור אילו ערכים של הקבוע m (אם בכלל) W הוא:

א. נקודה (מצאו נקודה זו).

ב. ישר (מצאו ישר זה).

ג. מישור (מצאו מישור זה).

6) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$.

נסמן ב-A' את הצורה המדורגת של A.

ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.

מצאו את A.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) פתרון כללי של המערכת $\left(4-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t+2,t\right)$.

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $\left(-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t,t\right)$.

2) למערכת פתרון יחיד $(x,y,z)=(1,1,2)$.

למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד $(0,0,0)$.

3) א. $m=-3$ ב. $k=-2$. ג. פתרון כללי של המערכת $(x,y,z)=(t,t-1,t)$.
פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא (t,t,t).

4) א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה.
ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה.
ז. הטענה לא נכונה.

5) א. $m\neq 0,-2,3$. הנקודה היא $(x,y,z)=(0,0,0)$.
ב. אם $m=0$ נקבל ישר $\underline{x}=t(0,0,1)$. אם $m=2$ נקבל ישר $\underline{x}=t(2,-1,1)$,
אם $m=3$ נקבל ישר $\underline{x}=t(3,-3,1)$.
ג. אין ערכים של m עבורם נקבל מישור.

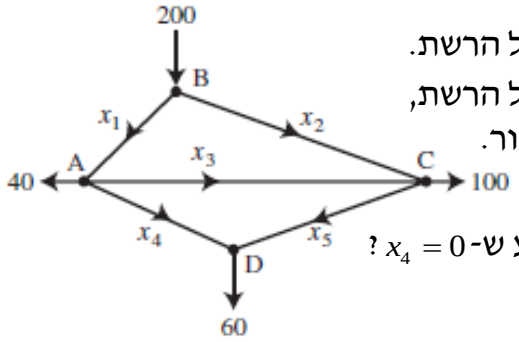
6)
$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&8\\4&8&12&16\\-3&-6&-9&-12\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושים של מערכת משוואות לינאריות

שאלות

1) באיור שלהלן רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.



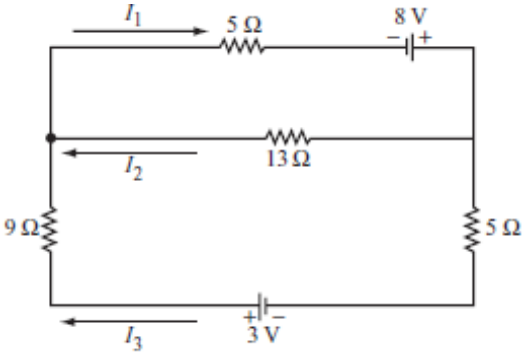
א. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

ב. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת, אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.

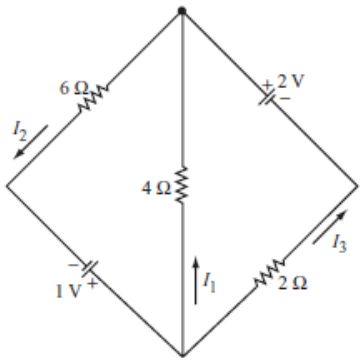
ג. מהו הערך המינימלי של x_1 , אם ידוע ש- $x_4 = 0$?

בשאלות **2-3** מצאו את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):

2)



3)



*** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.**

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. x_3 ו- x_5 חופשיים. $x_1=100+x_3-x_5$, $x_2=100-x_3+x_5$, $x_4=60-x_5$.

ב. x_3 חופשי. $x_1=40+x_3$, $x_2=160-x_3$, $x_4=0$, $x_5=60$. ג. 40.

2) א. $I_1=\frac{255}{317}, I_2=\frac{97}{317}, I_3=\frac{158}{317}$

3) $I_1=-\frac{5}{22}, I_2=\frac{7}{22}, I_3=\frac{6}{11}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 8 - מטריצות

תוכן העניינים

1. מטריצות 109
2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות 114
3. המטריצה ההופכית 115
4. דרגה של מטריצה 122
5. בחזרה למערכת משוואות ליניארית 126
6. מטריצה אלמנטרית 133
7. פירוק LU 135
8. שיטת הריבועים הפחותים - רגרסיה לינארית 136

מטריצות

שאלות

1) נתונות המטריצות הבאות: $A_{4\times6}, B_{4\times6}, C_{6\times2}, D_{4\times2}, E_{6\times4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

א. $A+B$	ב. AB	ג. $AC-D$	ד. $AE-B$
ה. $B+AB$	ו. $E(B+A)$	ז. $(E+A^T)D$	ח. E^TB
ט. $E(AC)$	י. $E(B-A)$		

2) מצאו את x,y,z, אם ידוע כי: $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$.

בשאלות **3-8** נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3) א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4) $2tr\left(D^2-2E\right)$

5) א. $4C^T+A$ ב. $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$

6) I_2BC

7) $tr\left(C^TC\right)$

8) $DABC$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n.
נתון כי $(A-I)(A+I)=0$.
הוכיחו או הפריכו: $A=I$ או $A=-I$.

10) אפיינו את כל המטריצות $A_{2\times 2}$ שמקיימות $A^2=-4I$.

11) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

12) שתי מטריצות A ו-B יקראו מתחלפות אם $AB=BA$.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות A ו-B מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז המטריצות A ו-B מתחלפות.

ב. אם המטריצה A מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז $A^T=-A$.

13) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n.
נתון כי $AA^T=0$. הוכיחו כי $A=0$.
האם הטענה נשארת נכונה אם איברי A מרוכבים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

14) יהיו A ו-B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB=BA$ (מטריצות מתחלפות).

א. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $AB^k=B^kA$.

ב. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $(AB)^k=A^kB^k$.

15) לפי נוסחת הבינום של ניוטון $(A+B)^n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k$, כאשר $A,B\in\mathbb{R},\ n,k\in\mathbb{N}$.

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר ℓ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות A ו-B, על מנת שנוסחת הבינום תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של $(A+I)^n$ ו-$(A-I)^n$, כאשר A ו-I ריבועיות מסדר ℓ.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.

ב. נניח ש- A ו- B מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.

הוכיחו שגם המטריצות AB ו- $A+B$ נילפוטנטיות.

17) תהי $A_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\min\{i,j\}$.

תהי $B_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & else\end{cases}$.

א. כתבו את המטריצות A ו- B בצורה מפורשת.

ב. המטריצה C מקיימת $C=A\cdot B$.

חשבו את C ומצאו נוסחה עבור c_{ij} לכל $1\le i,j\le n$.

18) מצאו מטריצה ממשית A, כך שיתקיים $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}A-\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}A\right)^T=A-A^T$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא. ו. 6×6
ז. 6×2 ח. לא ט. 6×4 י. 6×6

2) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

3) א. $\begin{pmatrix}5&5&3\\0&0&0\\8&3&9\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}4&-3&-1\\-2&1&2\\0&-1&-10\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}5&20&10\\20&5&25\end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix}18&12&8\\-2&0&2\\24&8&16\end{pmatrix}$

4) 230

5) א. $\begin{pmatrix}8&16\\17&6\\7&21\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}2.25&1.5&0\\1&1.25&1.75\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}8&17&13\\-8&-2&-10\end{pmatrix}$

7) 63

8) $\begin{pmatrix}-32&82&-22\\48&87&75\\-48&108&-36\end{pmatrix}$

9) שאלת הוכחה.

10) $A=\begin{pmatrix}a&-\frac{a^2+4}{c}\\c&-a\end{pmatrix}$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) א+ב. שאלת הוכחה.

ג.
$$(A+I)^n=\binom{n}{0}A^n+\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}A^1+\binom{n}{n}I$$
$$(A-I)^n=\binom{n}{0}A^n-\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}-\ldots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n-1}A^1+(-1)^n\binom{n}{n}I$$

16) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) א.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&\cdots&1\\1&2&2&2&2&\cdots&2\\1&2&3&3&3&\cdots&3\\1&2&3&4&4&\cdots&4\\1&2&3&4&5&\cdots&5\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&2&3&4&5&\cdots&n\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&\iddots&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ב. $c_{ij}=\min\{i,n+1-j\}$

$$C=\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1&1&1&1\\2&\cdots&2&2&2&2&1\\3&\cdots&3&3&3&2&1\\4&\cdots&4&4&3&2&1\\5&\cdots&5&4&3&2&1\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n&\cdots&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

18) $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

1) ידוע ש-A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):
1. AA^T סימטרית.
2. $A + A^T$ סימטרית.
3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.

2) ידוע ש-A ו-B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:
1. $BABABA$ אנטי-סימטרית.
2. $A^2 - B^2$ סימטרית.
3. $A^2 + B$ סימטרית.

3) ידוע ש-A ו-B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$.
מי מבין הבאים נכון:
1. AB^3 אנטי-סימטרית.
2. AB^2 סימטרית.
3. $(A-B)^2$ סימטרית.

4) ידוע ש-A סימטרית ו-B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.
הוכיחו:
1. AB אנטי-סימטרית.
2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.

5) נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר.
הוכיחו כי $A^4B^4 = B^4A^4$.

תשובות סופיות

1) 1,2,3
2) 2
3) 1,2,3
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות **1-9** מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.
בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ **הפיכה**?

11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **איננה** הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות **12-14** הן הפיכות מסדר n, וחלצו את X:

12) א. $AXC = D$ ב. $A^{-1}XC = A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^TP = A$

13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$ ב. $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

14) $ABC^TX^{-1}BA^TC = AB^T$

15) נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

חשבו את X, אם ידוע כי $B^2X(2B)^{-1} = B+I$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) נתון $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$. חשבו את Y, אם ידוע כי $BYB^T=B^{-1}+B$.

17) נתון $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\4&7\end{pmatrix}$.

חשבו את B, אם נתון בנוסף כי: $5A^TB(I+2A)^{-2}=(7A)^{-2}$.

18) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2-5A-2I=0$.
הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I.

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$.
הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I.

19) נתון כי $p(x)=x^3-4x^2-20x+48$, $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$.

א. חשבו את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- A הפיכה, ובטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

20) נתון כי A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4=0$.

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה $I-A$ הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

21) נתון כי $\begin{cases}P^{-1}AP=B\\Q^{-1}BQ=C\end{cases}$.

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה D, כך ש- $D^{-1}AD=C$.

* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:
הוכיחו: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C, אז A דומה ל- C.
(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

22) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\ge 2$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $AB=BA$.

ב. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח B הפיכה.

ג. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח A הפיכה.

ד. אם $(AB)^{100}=I$, אז בהכרח $(BA)^{100}=I$.

ה. אם $(AB)^{100}=0$, אז בהכרח $(BA)^{101}=0$.

23) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, עבורן $A^2+AB=I$.

א. הוכיחו ש-$AB=BA$.

ב. אם נתון בנוסף ש-B^2+BA היא מטריצת האפס,
הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

24) תהיינה A,B מטריצות כלשהן.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $AB=I$ אז $B=A^{-1}$.

ב. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A,B מטריצות ריבועיות.

ג. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A,B מטריצות ריבועיות.

ד. המכפלה AB לא הפיכה.

ה. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.

25) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2=A$.
הוכיחו:

א. למעט המקרה בו $A=I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.

ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.

ג. אם A מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2,
אז $tr(A)=1$ או ש-A מטריצה אלכסונית.

ד. A אידמפוטנטית $\Leftrightarrow$ $A^n=A$, לכל n טבעי.

26) נתונה $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

מצאו תנאי על הקבועים a,b,c,d כך ש- M תהיה הפיכה ומצאו את M^{-1} במקרה זה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) נתון כי $A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}$ הפיכה.

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

א. $$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y&=\alpha_{13}\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y&=\alpha_{23}\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y&=\alpha_{33}\end{aligned}$$

ב. $$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+w&=0\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z-4w&=1\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z+3w&=-4\end{aligned}$$

ג. $$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z&=3\\ \alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z&=1\\ \alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z&=1\end{aligned}$$

28) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$.

הוכיחו:

א. אם $BA=I-A^2$ וגם $B^2=-AB$, אז $B=0$.

ב. אם $A^2=2I$, אז $A+I$ ו- $A-I$ הפיכות.

29) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, כך ש- $B^2A=-2B^3$ (1) וגם $B^3+AB^2=3I$ (2).

הוכיחו ש- A ו- B הפיכות, ובטאו את A^{-1} ו- B^{-1} באמצעות B.

30) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, כך ש- $BA+2I=B$.

א. הוכיחו ש- B הפיכה.

ב. ידוע ש- B סימטרית.

הוכיחו כי A סימטרית.

31) תהי A מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים n טבעי כך ש- $A^n=0$).

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי $I-A$ ו- $I+A$ הפיכות.

ג. נגדיר: $e^A=I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\ldots+\frac{1}{n!}A^n+\ldots$.

הוכיחו: אם $e^A=I$ אז $A=0$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

32) נתונות שתי מטריצות, A ו- B, מסדר n.
סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

א. ל- A ול- A^T יש אותה צורה מדורגת קנונית.
ב. אם A,B מדורגות קנונית, אז $A+B$ מדורגת קנונית.
ג. אם A,B מדורגות קנונית, אז $A-B$ מדורגת קנונית.
ד. אם בצורה המדורגת קנונית של B יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של AB יש שורת אפסים.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

10) $k \neq 1,\ k \neq -2$

11) $k = 1,\ k = -4$

12) א. $A^{-1}DC^{-1}$ ב. D ג. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$

13) א. $CD^2 - A$ ב. $\left(A + C^{-1}\right)^{-1} A$

14) $BA^T C(B^{-1})^T BC^T$

15) $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

16) $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$

17) $B = \frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

18) א. $A^{-1} = 0.5A - 2.5I$ ב. $A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I$

19) א. $P(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $A^{-1} = -\frac{1}{48}A^2 + \frac{1}{12}A + \frac{5}{12}I$

20) א. שאלת הוכחה. ב. $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) $M^{-1} = \frac{1}{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)} M^T \quad \left((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.
28) שאלת הוכחה.
29) שאלת הוכחה.
30) שאלת הוכחה.
31) שאלת הוכחה.
32) ד

כתב ופתר – גיא סלומון ©

דרגה של מטריצה

שאלות

1) אמתו את המשפט $rank(A)=rank(A^T)$,
על המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&10\\5&6&7&8&14\\6&8&10&12&24\\3&2&1&0&-6\end{pmatrix}$.

2) אמתו את המשפט $rank(AB)\le \min\{rank(A),rank(B)\}$,
עבור $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\6&8&10&12\\3&2&1&0\end{pmatrix}$.

3) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1-k&0&0&0\\0&1-k&0&0\\0&0&4-k&1\\0&0&0&10-k\end{pmatrix}$.
חשבו את $rank(A)$.

4) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר $n>1$.
הוכיחו או הפריכו:
א. $rank(A)=n-1 \Rightarrow rank(A^2)=n-1$
ב. $rank(A)=n-1 \Leftarrow rank(A^2)=n-1$

5) נתון כי A,B מטריצות ריבועיות מסדר $n>1$.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $rank(A)=rank(AB)$, אז בהכרח B הפיכה.
ב. ייתכן ש- $rank(A)<rank(AB)$.
ג. אם $rank(A)>rank(B)$, אז $rank(AB)>rank(B)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתון $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$.

א. חשבו את $rank(B)$, $rank(A)$.

ב. חשבו את $rank\left(B^{10}A^{14}\right)$.

7) נניח כי A,B שתי מטריצות ריבועיות מסדר n.

הוכיחו כי $rank\begin{pmatrix}A&A\\A&B\end{pmatrix}\le 2rank(A)+rank(B)$.

8) תהי A_{8x7} מטריצה, כך ש- $rank(A)=3$.

הוכיחו כי קיימות 3 מטריצות A_1,A_2,A_3 , שלכל אחת מהן דרגה 1,

כך ש- $A=A_1+A_2+A_3$.

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר mxn שדרגתה k.

9) נתונות שתי מטריצות $B_{5\times3}$, $A_{3\times5}$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $rank(AB)=rank(BA)$

ב. $rank(AB)\ne rank(BA)$

ג. המטריצה BA לא הפיכה.

10) תהי A מטריצה מסדר $m\times n$, ותהי B מטריצה מסדר $n\times m$.

הוכיחו:

א. אם $AB=I_m$ אז $rank(A)=rank(B)=m$.

ב. אם $BA=I_n$ אז $rank(A)=rank(B)=n$.

ג. אם $AB=I_m$ וגם $BA=I_n$ אז בהכרח $m=n$.

ד. אם A לא ריבועית אז לא ייתכן שגם $AA^T=I_m$ וגם $A^TA=I_n$.

11) בשדה **F** נתונים $a_1,a_2,...,a_m$ איברים, שלא כולם אפס, ו- $b_1,b_2,...,b_n$ איברים, שלא כולם אפס.

קבעו מהי דרגתה של המטריצה $M=\left(m_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, כאשר $m_{ij}=a_ib_j$.

12) תהי $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=b_i^2-b_j^2$,
כאשר $b_1,b_2,...,b_n$ מספרים ממשיים שונים ו- $n\ge 3$.

א. הוכיחו שהמטריצה לא הפיכה.

ב. האם הטענה תישאר נכונה אם נשנה את הנתון ל- $n\ge 2$?
הוכיחו או הפריכו.

13) תהיינה A,B מטריצות מעל $\mathbb{R}$, מסדר $m\times n$, כך שלכל $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$, $x\ne\underline{0}$,
מתקיים $A\underline{x}\ne B\underline{x}$.
מה הדרגה של המטריצה $A-B$?

14) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$.

א. נתון שכל פתרון של המערכת $(AB)\underline{x}=\underline{0}$, הוא פתרון של המערכת
$A\underline{x}=\underline{0}$.
הוכיחו שהדרגה של AB שווה לדרגה של A.

ב. הוכיחו: אם A הפיכה, אז $\rho(AB)=\rho(A)$.

ג. הוכיחו שאם $\rho(AB)<\rho(A)$, אז A לא הפיכה.

15) תהי A מטריצה מסדר $n\times n$.

א. הוכיחו כי $P(A)\subseteq P(A^2)$.

ב. נתון כי $\rho(A^2)<\rho(A)$.
הוכיחו שקיים $v\in\mathbb{R}^n$, כך ש- $Av\ne 0$ וגם $A^2v=0$.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) אם $k=1$, אז $rank(A)=2$. אם $k=4,k=10$, אז $rank(A)=3$.
אם $k\neq 1,4,10$ $rank(A)=4$.
4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.
ג. הטענה אינה נכונה.
6) א. $rank(B)=3$, $rank(A)=2$. ב. $rank\left(B^{10}A^{14}\right)=2$
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) 1
12) שאלת הוכחה.
13) n
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בחזרה למערכת משוואות ליניארית

שאלות

1) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות A , $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$, המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x}=\underline{b}$:

א. $\begin{aligned} 2x+y-z&=3\\ x+2y-4z&=5\\ 6x+4y+z&=2 \end{aligned}$

ב. $\begin{aligned} 2x-3y+z+t&=1\\ 4x+y+2z&=4\\ y+z+t&=1\\ x-4z-2y&=10 \end{aligned}$

בשאלות **2-6** נתון כי $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}4&-2&4\\1&-1&1\\1&-6&3\end{pmatrix}$.

בטאו כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות לינאריות :

2) $A\underline{x}=\underline{b}$ **3)** $A\underline{x}=4\underline{x}+\underline{b}$ **4)** $A\underline{x}=-k\underline{x}+\underline{b}$

5) $A\underline{x}=\underline{x}$ **6)** $A^T\underline{x}=2\underline{x}+3\underline{b}$

7) פתרו את מערכת המשוואות $\begin{aligned} 2x-y+z&=3\\ 3x-2y+2z&=5\\ 5x-3y+4z&=11 \end{aligned}$,

בעזרת המטריצה ההפוכה.

8) פתרו את מערכת המשוואות $\begin{aligned} x+4y+2z+4t&=1\\ x+2y-z&=0\\ y+z+t&=1\\ x+3y-z-2t&=0 \end{aligned}$,

בעזרת המטריצה ההפוכה.

9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים :

$(x,y,z)=(-1,4,-2)$, $(x,y,z)=(2,-8,4)$.

הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים:
$(x,y,z)=(-1,4,-2)$, $(x,y,z)=(2,3,4)$.
מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

11) נתונה המערכת $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.
מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע k, למערכת:
א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

12) נתון $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}$.
ידוע כי $rank(A)=3$, וידוע כי למערכת $Ax=b$ יש פתרון.
מצאו את הקבועים k,m.

13) נתונה מטריצה ריבועית A, המקיימת את התכונה הבאה:
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה 0.
הוכיחו ש-A מטריצה **לא** הפיכה.

14) נתונה מטריצה ריבועית הפיכה A, המקיימת את התכונה הבאה:
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה k.
הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.
בטאו קבוע זה בעזרת k.

15) מטריצה A מקיימת $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=0$.

הוכיחו כי הווקטור $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

16) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת $(AB)x=0$ קיימים שני פתרונות שונים,
אז בהכרח A לא הפיכה.

ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת $(AB)x=0$,
אז למערכת $(BA)x=0$ קיים פתרון שונה מ-0.

ג. אם למערכת $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ד. אם למערכת $(A^tA)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז A לא הפיכה.

ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$,
אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון שונה מ-0.

17) נתונה מערכת משוואות מעל $\mathbb{R}$: $Ax=d$ $(d\neq 0)$.
נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת $rank(A)=2$.
ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
$u=(x_1,x_2,6,7),\ v=(y_1,y_2,1,2),\ w=(z_1,z_2,4,3)$.
מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:

א. $x=au+bv+cw$

ב. $x=(a+b+1)u-av-bw$

ג. $x=au+bv+w$

ד. $x=(a-b)u+(b-c)v+(c-a)w$

ה. $x=(a+b)u-(av+bw+u)$, כאשר $a,b,c\in\mathbb{R}$.

הערה: בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:
בהינתן מערכת הומוגנית $Ax=0$:
1. אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
2. מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות.
בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

18) נתונה מערכת $A_{m\times n}\cdot x=b$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם u וגם λu $(\lambda\neq 1)$ פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.

ב. אם u ו- v וגם $\alpha u+\beta v$ $(\alpha,\beta\neq 0)$ פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.

ג. אם הווקטורים $(1,2,\dots,n),\ (n,\dots,2,1)$ פותרים את המערכת והווקטור $(n+1,\dots,n+1)$ לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.

19) תהי A מטריצה כך שלמערכת $Ax=0$ פתרון יחיד.
הוכיחו או הפריכו:
א. A הפיכה.
ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^T פתרון יחיד.
ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.

20) תהי $A_{m\times n}$ מטריצה ממשית כך ש- $m<n$.
הוכיחו או הפריכו:
א. ממד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$ הוא $n-m$.
ב. למערכת $\left(A^TA\right)x=0$ יש אינסוף פתרונות.
ג. ייתכן מצב בו למערכת $\left(A^TA\right)x=0$ יש פתרון יחיד.
ד. ייתכן מצב בו למערכת $\left(AA^T\right)x=0$ יש פתרון יחיד.

21) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n, כך שלכל מטריצה ריבועית $B\neq 0$ מסדר n, מתקיים $AB\neq 0$.
הוכיחו ש- $rank(A)=n$.

22) תהי A מטריצה ממשית מסדר $m\times n$.
לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.
א. אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$,
אז בהכרח למערכת $A^Tx=b$, יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ב. עבור $m=n$, אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$,
אז בהכרח למערכת $A^Tx=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ג. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m<n$.
ד. ייתכן ש- $A^TA=I_n$ וגם $AA^T=I_m$.
ה. אם $m\neq n$ ואם למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

23) תהא $A\in M_{4\times 4}(R)$ ויהי $b\in R^4$.
ידוע כי u ו- v פתרונות של המערכת הלא הומוגנית $Ax=b$.
א. נגדיר $w=\alpha u+\beta v$.
הוכיחו כי אם גם w פתרון של המערכת $Ax=b$, אז $\alpha+\beta=1$.
ב. נניח בנוסף כי $w=-u+2v$ הוא פתרון של המערכת $A^2x=b$.
הוכיחו כי $A-I$ לא הפיכה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

24) נתון $A=\begin{pmatrix}1&2&0&2&3\\2&4&1&3&6\\-3&-6&3&-8&-8\end{pmatrix}$, ויהי $b=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$.

א. הראו כי $v=(2,-1,1,-1,1)^T$ הוא פתרון של המערכת $Ax=b$.

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

ג. מצאו $C,D\in M_{5\times 2}(\mathbb{R})$, כך ש- $C\neq D$ ו- $AC=AD=\begin{pmatrix}1&-1\\4&-4\\3&-3\end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

1) א. $\underline{b}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$ $\quad \underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-4\\4&4&1\end{pmatrix}$

ב. $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\10\end{pmatrix}$ $\quad \underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix}2&-3&1&1\\4&1&2&0\\0&1&1&1\\1&-2&-4&0\end{pmatrix}$

2) $$\begin{aligned}4x-2y+4z&=1\\x-y+z&=2\\x-6y+3z&=3\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}-2y+4z&=1\\x-5y+z&=2\\x-6y-z&=3\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}(4+k)x-2y+4z&=1\\x+(k-1)y+z&=2\\x-6y+(3+k)z&=3\end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned}3x-2y+4z&=0\\x-2y+z&=0\\x-6y+2z&=0\end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned}2x+y+z&=3\\-2x-3y-6z&=6\\4x+y+z&=9\end{aligned}$$

7) $(x,y,z)=(1,2,3)$

8) $(x,y,z,t)=(-13,4,-5,2)$

9) שאלת הוכחה.

10) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-6\end{pmatrix}$

11) אם $k\neq 2$ או $k\neq -1$, אז יש פתרון אחד.

אם $k=2$, אז יש אינסוף פתרונות.

אם $k=-1$, אז אין פתרונות.

12) $m=5, k=9$

13) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) סכום האיברים בכל שורה של A^{-1} הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) א. שאלת הוכחה. ב. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t, -2s, s, -t, -t, t)$

ג. $D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (t = s = 1)$ $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (t = s = 0)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מטריצה אלמנטרית

שאלות

1) רשמו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

2) רשמו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 3 & -4 & -2\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

3) הוכיחו או הפריכו כל אחד מסעיפים א-ד.
נתון כי A מטריצה ריבועית, ו- B מתקבלת מ- A ע"י סדרת פעולות דירוג.
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א. B^2 מ- A^2.

ב. BA מ- A^2.

ג. B^2 מ- BA.

ד. B^2 מ- AB.

4) תהי $A\in M_3[R]$, כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.
נגדיר את המטריצות האלמנטריות $E_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.
למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה E_2E_1A?

פתרו בשתי דרכים:
דרך א' – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.
דרך ב' – בעזרת כפל מטריצות.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}}_{e_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}}_{e_2}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}}_{e_3}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}}_{A}$$

2) $$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}}_{e_2}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{e_3}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_4}\bullet$$
$$\bullet\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_5}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_6}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_7}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{e_8}=A$$

3) שאלת הוכחה.

4) -3

כתב ופתר – גיא סלומון ©

פירוק LU

שאלות

1) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}$.

2) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}$.

3) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

1)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{U}$$

2)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&-1&1&0\\3&-2&2&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&2&-4\\0&0&0&3\end{pmatrix}}_{U}$$

3)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\\frac{3}{2}&-2&1&0&0\\-3&2&0&1&0\\4&-3&0&0&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\0&-7&5\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{U}$$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

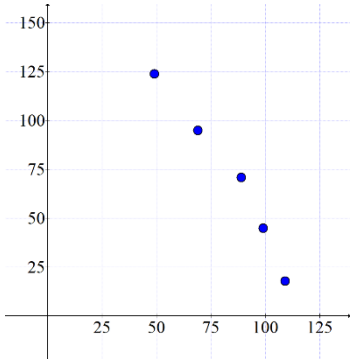
שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה לינארית

שאלות

1) נתונות חמש נקודות במישור: $(-4,-1), (-2,0), (2,4), (4,5), (5,6)$.
מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.

2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.

$price\,(x)$	$Demand\,/\,sales\,(y)$
49$	124
69$	95
89$	71
99$	45
109$	18



א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.

ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54$.

ג. מה משמעות השיפוע של הישר?

ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ"ל.

תשובות סופיות

1) $f(x)=0.8x+2$

2) א. $f(x)=-1.7x+211$ ב. 119.2 יחידות.

ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש.

ד. 14.41

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 9 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג 137
2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n 142
3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות 147
4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות 149
5. מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה 150
6. שימושי הדטרמיננטה 155

חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

שאלות

בשאלות **1-5** חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

1) א. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

2) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

3) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

בשאלות **6-7** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

6) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

7) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

בשאלות **8-10** חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

8) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

בשאלות **11-12** הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

11) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) א. $\begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

ב. $\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix}$

ד. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

בשאלות **13-15** נתון כי: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$.

חשבו:

13) $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$

15) $\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

16) הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$.

18) חשבו: $\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

19) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות A ו-B מסדר n הנבדלות ביניהן רק בשורה ה-k $(1 \le k \le n)$.
תהי C מטריצה הזהה למטריצות A ו-B אך נבדלת מהן בשורה ה-k, שם היא שווה לסכום השורה ה-k של A והשורה ה-k של B.
הוכיחו כי $|A|+|B|=|C|$.

ב. חשבו: $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$.

תשובות סופיות

1) א. $ad-bc$ ב. 29 ג. -1
2) א. -1 ב. -3 ג. -14
3) א. 24 ב. 234 ג. -300
4) 9
5) 6
6) א. 0 ב. 0 ג. 3
7) א. 24 ב. 44 ג. 104
8) 120
9) 114
10) 6
11) פתרונות באתר : www.GooL.co.il
12) פתרונות באתר.
13) -8
14) 16
15) 9
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) $(k-1)^4(k+4)$
19) א. שאלת הוכחה. ב. 0

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j<n\\ a & 1\le i\le n,\ j=n\\ a & 1\le j\le n,\ i=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים $a_0,\dots,a_{n-1}$, המטריצה הבאה

הפיכה: $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}$?

2) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה על ידי:

$$a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1,\ j=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

האם קיים ערך של n עבורו דרגת המטריצה קטנה מ- n ?

3) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\ne 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}.$$

4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י: $a_{ij}=|i-j|$.

5) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i\ne j\end{cases}.$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, כאשר $n \geq 1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}.$$

7) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי:

א. $a_{ij} = \min\{i, j\}$

ב. $a_{ij} = Max\{i, j\}$

8) המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij} = \begin{cases} \min\{3(i-1), 3(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \ or \ j=1 \end{cases}$.

חשבו את $|A|$.

9) המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij} = \begin{cases} \min\{k(i-1), k(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \ or \ j=1 \end{cases}$.

חשבו את $|A|$ ומצאו עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הפיכה.

10) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, כאשר $n \geq 3$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left(a_{ij} = \begin{cases} 0 & i=j \\ 1 & 2 \leq i \leq n, \ j=1 \\ 1 & 2 \leq j \leq n, \ i=1 \\ x & else \end{cases} \right).$$

11) תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i=j \end{cases}$.

חשבו את $D_n = |A_{n\times n}|$.

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים וקטורים עצמיים.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \end{cases}$.

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב $D_n=|A_{n\times n}|$.

ב. הניחו כי $a=3,b=1,c=2$ וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.
2. את הדטרמיננטה עבור $n=20$.

13) נתונה מטריצה $A_{n\times n}$.

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:
מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.
בסוף התהליך מקבלים מטריצה B.
חשבו את $|B|$ במונחי $|A|$.

14) חשבו את $D_n=\begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & else \end{cases}$.

15) חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix} 2 & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases} i & i+j=n+1 \\ 2 & else \end{cases}$.

16) חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix} a & & & b \\ & & b & \\ & \iddots & & \\ b & & & a \end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases} b & i+j=n+1 \\ a & else \end{cases}$.

17) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$a_{ij}=\min\{i,n-j+1\}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, כאשר $n \geq 2$.

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $|A|=a-(n-1)a^2$ ב. A הפיכה אם ורק אם $a_0\neq 0$.

2) א. $(-1)^{n+1}n!$ ב. לא.

3) $|A|=n!$

4) $|A|=(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$

5) $|A|=(a-b)^{n-2}[a+(n-1)b]$

6) $(-3)^{n-1}(2n-3)n!$

7) א. $|A|=1$ ב. $|A|=(-1)^{n+1}n$

8) $|A|=2\cdot 3^{n-2}$

9) $|A|=(k-1)\cdot k^{n-2}$ והמטריצה הפיכה אם ורק אם $k\neq 1$ וגם $k=0$.

10) $|A|=(-1)^{n-1}x^{n-2}(n-1)$

11) $D_n=1+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

12) א. $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-1},\ D_2=a^2-bc,\ D_3=a^3-2abc$

ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$ ב.2. $D_{20}=2^{21}-1$

13) $$|B|=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}|A| & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}|A| & n \text{ odd}\end{cases}$$

14) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}} & n\ even\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n\ odd\end{cases}$$

15) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+2}{2}}2(n-2)! & n\ even\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}2(n-2)! & n\ odd\end{cases}$$

16) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n\ even\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n\ odd\end{cases}$$

17) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n\ odd\\ (-1)^{\frac{n-2}{2}+n-1} & n\ even\end{cases}$$

18) $$D_n=\begin{cases}a_n(-1)^{\frac{n}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n\ even\\ a_n(-1)^{\frac{n-1}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n\ odd\end{cases}$$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

שאלות

בשאלות **1-2** נתון כי A ו-B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$.
חשבו:

1) א. $\left|ABA^{-1}B^{T}\right|$ ב. $|4A^{2}B^{3}|$

2) א. $|-A^{-2}B^{T}A^{3}|$ ב. $|-2A^{2}A^{T}adjB|$

3) נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$.
הוכיחו: $|A|=|B|$.

4) נתון: A ו-B מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-$2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשבו את $|B|$.

5) נתון: A ו-B מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-$B^{2}-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשבו את $|A|, |B|$.

6) הוכיחו: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

7) נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכיחו ש-$|A|=0$.

8) נתון: A מטריצה מסדר n, $|A|=128$, $2AB=B^{T}A^{2}$, ו-B הפיכה.
מצאו את n.

9) נתון: $\det\left(A_{nxn}\right)=2,\ \det\left(B_{nxn}\right)=\frac{1}{3}$.
חשבו: $\det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתון $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

הוכיחו כי $\det(M)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$.

תשובות סופיות

1) א. 4 ב. 2^{13}

2) א. -8 ב. -2^{11}

3) שאלת הוכחה.

4) $\frac{81}{32}$

5) $|A|=18,\ |B|=-2/3$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) 7

9) 4^n

10) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

כלל קרמר

שאלות

בשאלות **1-3** פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

1) $\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$

4) נתונה מערכת המשוואות: $\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$.

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש- $x=y=z=t=r$.

5) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $\left(A^tA\right)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

תשובות סופיות

1) $x=1,\ y=2$

2) $x=1,\ y=1,\ z=2$

3) $x=y=z=t=1$

4) א. $k\neq 1,\ k\neq -4$ ב. $k=-2$ ג. לא. ד. הוכחה.

5) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. לא נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את הצמודה הקלסית $adj(A)$, ובעזרתה את A^{-1} :

1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&-1\\5&2&3\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

4) נתון: $A=\begin{pmatrix}-9&26&-1&14&10\\13&-7&87&4&0\\71&35&3&0&0\\17&2&0&0&0\\2&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

א. חשבו: $(adjA)_{1,5}$.

ב. חשבו: $(A^{-1})_{1,5}$.

5) א. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה הפיכה A שווה ל-±1, כאשר כל איברי A ו-A^{-1} הם מספרים שלמים.

ב. הוכיחו שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} גם הם מספרים שלמים.

6) נתון ש-A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה.
הוכיחו ש-A^{-1} משולשית תחתונה.

7) נתון ש-A הפיכה.
הוכיחו שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

8) נתון כי A,B הפיכות ו-C,D לא הפיכות.
האם המטריצות הבאות הפיכות?

א. $C+D$ ב. $A+B$ ג. AD ד. CD ה. AB

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) מצאו את ערכי k עבורם המטריצה $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ לא הפיכה.

10) ידוע ש- A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B \neq 0$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $AB = 0$, אז $A = 0$.

ב. אם $|AB| = 0$, אז $A = 0$.

ג. אם $|AB| = 0$, אז $|A| = 0$.

ד. אם $AB = 0$, אז $|A| = 0$.

11) נתונות שתי מטריצות $A_{3\times5}$, $B_{5\times3}$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $|AB| = |BA|$

ב. $adj(AB) \neq adj(BA)$

12) אם B מתקבלת ממטריצה $A_{3\times3}$ על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4,
אז $|adj(A)\cdot B|$ שווה ל:

א. $4^3|A|^3$

ב. $4^3|B|^3$

ג. $4|B|^3$

ד. $4|A|^3$

13) נתונה מטריצה ריבועית $A = (a_{ij})$ מסדר $n \geq 3$ המקיימת $a_{ij} = i + j - 1$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $|A| = 4$

ב. A הפיכה.

ג. $adj(A) = 0$

ד. $|A| = 0$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) אם G היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית A, אז:

א. בהכרח $\det(A)=\det(G)$ וגם $adj(A)=adj(G)$.

ב. בהכרח $\det(A)=\det(G)$, אך ייתכן ש $adj(A)\neq adj(G)$.

ג. ייתכן ש- $\det(A)\neq\det(G)$, אך בהכרח $adj(A)=adj(G)$.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

15) תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 2$, כך ש- $a_{ij}=\begin{cases} i & i=j \\ 1 & i\neq j \end{cases}$.

לכל $1\leq i,j\leq n$, אז בהכרח מתקיים:

א. $|A|=n!-1$

ב. A הפיכה.

ג. $adj(A)$ לא הפיכה.

ד. אם $n=4$, אז $|Adj(A)|>214$.

16) תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 4$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $rank(A)=n-2$, אז בהכרח $adj(A)=0$.

ב. אם A אנטי-סימטרית, אז בהכרח $adj(A)$ אנטי-סימטרית.

ג. אם $adj(A)=0$, אז בהכרח $A=0$.

17) A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ- A ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4,
אז $adjB$ מתקבלת מ- $adjA$ ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 4.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 4.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

18) תהי A מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת $|Adj((-1+i)A)|=i$.

חשבו $|\det(A)|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

19) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n.
הוכיחו את הטענות הבאות:

א. A הפיכה $\Leftrightarrow$ $Adj(A)$ הפיכה.

ב. $Adj\left(A^{-1}\right)=\left(Adj(A)\right)^{-1}$

ג. $\left|Adj(A)\right|=|A|^{n-1}$

תשובות סופיות

1) $adj(A)=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}$

2) $adj(A)=A^{-1}=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ -10 & 1 & 4\end{pmatrix}$

3) $adj(A)=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

4) א. 240 ב. 0.5

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) א. לא ניתן לדעת. ב. לא ניתן לדעת. ג. לא הפיכה.
ד. לא הפיכה. ה. הפיכה.

9) אם ורק אם $k=0$.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) ד

13) שאלת הוכחה.

14) ד

15) ד

16) שאלת הוכחה.

17) ד

18) $2^{\frac{-5}{2}}$

19) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

1) א. חשבו את שטח המקבילית שקדקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$ 2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$

ב. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצאו משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2),\ (-1,3,1),\ (1,1,-1)$.

ד. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה יש להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

1) א.1. 13. א.2. 14 ב. 22 ג. $3x-y+4z+2=0$ ד. 2

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 10 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות 156
2. חוקי הלוגריתמים 159
3. חישובים עם חזקה לוגריתמית 163
4. מעבר בין בסיסים 164
5. הלוגריתם הטבעי 166
6. משוואות עם בסיסים שונים 168
7. מערכת משוואות לוגריתמיות 169
8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות 170
9. אי-שוויונים לוגריתמים 171
10. אי-שוויונים לוגריתמים עם משתנה בבסיס ..... (ללא ספר)

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a \neq 1$, $b > 0$, a.

הסבר:

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b. ערך חזקה זו הוא x. ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0$, $a \neq 1$.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_6(4x-2)=1$

ב. $\log_4(4-x)=\frac{1}{2}$

ג. $\log_8(x^4-73)=1$

ד. $\log_3\frac{x+3}{3-3x}=-2$

ה. $\log_x(2x^2+x-12)=2$

ו. $\log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

א. $\log_4(\log_3 x)=1$

ב. $3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$

ג. $\log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2}$

ד. $\log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$

5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_2(3^x+37)=6$

ב. $\log_3(3\cdot 2^x-303)=4$

ג. $\log_5(126\cdot 5^x-25)=2x+1$

ד. $3\log_2\left(3\cdot 4^{1+\frac{1}{3}x}-11\cdot 2^{\frac{x}{3}}+3\right)=12+2x$

6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

א. $(\log_2 x)^4=10000$

ב. $2(\log_3 x)^2+\log_3 x=10$

ג. $\frac{3\cdot\log_{14}x+1}{(\log_{14}x)^2}=4$

ד. $\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x}+\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x+2}=2$

תשובות סופיות:

1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
ו. 4 ז. -1.5

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=65,536$ ג. $x=27$ ד. $x=4$
ה. $x=5$ ו. $x=4$

3) א. $x=2$ ב. $x=2$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=-2$ ה. $x=3$ ו. $x=2$

4) א. $x=81$ ב. $x=5$ ג. $x=\pm 4$ ד. $x=\pm 1$

5) א. $x=3$ ב. $x=7$ ג. $x=-1,\ 2$ ד. $x=-6$

6) א. $x=1024,\ \frac{1}{1024}$ ב. $x=9,\ \frac{1}{9\sqrt{3}}$
ג. $x=14,\ \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x=\frac{1}{3}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a>0\neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:

- מכפלה לסכום: $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$.
- מנה להפרש: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$.
- מקדם למעריך: $\log_a b^n=n\log_a b$ (כאשר $b>0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_3 12+\log_3 2.25$

ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40+\log_{\frac{1}{5}} 12.5+\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}$

ג. $\log_2 200-\log_2 100$

ד. $\log_3 60-\log_3 540$

ה. $\log_4 8+\log_4 12-\log_4 6$

ו. $\log_7 1.5-\log_7 147+\log_7 2$

ז. $3\log_5 2-\log_5 1.6$

ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4+2\log_{\sqrt{4}}\sqrt{10}$

ט. $\frac{1}{2}\left(\log_7\frac{7}{2}+\log_7 2\right)+\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 8$

י. $\frac{1}{4}\log 81-\log 1.5-\frac{1}{2}\log 40$

2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$

ב. $\frac{\log_9 62.5+\log_9 2}{\log_9 0.2}$

ג. $\frac{\log_3 5-\log_3 2+\log_3 50}{\log_3 225-2}$

ד. $\frac{2-2\log_3 4+\log_3 8\frac{8}{9}}{4-\log_3 0.01-2\log_3 18}$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x+\log_2(x-6)=4$

ב. $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$

ג. $\log_2(x+30)-\log_2 x=4$

ד. $\log_5(x+146)-\log_5(x+2)=2$

ה. $2\log_3(2x-1)-\log_3(22x+9)=-1$

ו. $2\log_5(x-2)=\log_5(4x-15)+\log_5 x$

4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5(4x-3)=\log_5 7$.

ב. $2\log_2(2x-2)-\log_2(16-x)=\log_2(x-1)+1$.

5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3(3\cdot 5^x+39)=3+\log_3(5^x-3)$.

ב. $\log_2(3-4^{x+1})-\log_2 11=x$.

6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_4 x\cdot\log_4(16x)=8$.

ב. $\log_2\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\log_2(1024x)=-11$.

ג. $\log_2 x^2\log_2\left(\frac{x}{16}\right)=-\log_2(64x)$.

ד. $(\log_4 4x)^2=\log_4 4x^2+1$.

ה. $\log_3(9x^2)\cdot\log_3(9x^3)=\log_3\left(\frac{81}{x}\right)+2$.

ו. $\frac{\log_2\left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2}+\frac{\log_2(2x)}{\log_2 x}=1\frac{7}{9}$.

שאלות הבעה:

7) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$

ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

8) נתון: $\log_2 5 = b$, $\log_2 3 = a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

9) נתון: $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$.

הבע באמצעות a את $\log_{18} 27$ ואת $\log_{18} 16$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

10) $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$.

11) $2\log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$.

12) $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

13) $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$.

תשובות סופיות:

1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2
ו. -2 ז. 1 ח. 6 ט. 1.5 י. -0.5.

2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5.

3) א. $x=8$ ב. $x=3,\frac{1}{27}$ ג. $x=2$ ד. $x=4$ ה. $x=3$ ו. $x=4$.

4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$.

5) א. $x=1$ ב. $x=-2$.

6) א. $x=16,\frac{1}{256}$ ב. $x=2,\frac{1}{512}$ ג. $x=4,2\sqrt{2}$ ד. $x=4,\frac{1}{4}$
ה. $x=\frac{1}{9},\sqrt[6]{3}$ ו. $x=8,\sqrt[7]{2^{15}}$.

7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$.

8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}$.

9) $3(1-a)$, $4(2a-1)$.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

חישובים עם חזקה לוגריתמית:

סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x}=x$ כאשר $a>0\neq 1$.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$

2) נתונה התבנית: $3\cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x=\log_4 7$ ב. $x=\log_4\sqrt{3}$

ג. $x=2\log_4 0.1$ ד. $x=\sqrt{\log_2 5}$

3) נתונה התבנית: $\frac{1}{6}\cdot 9^x-2\cdot 3^x+1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x=-1$ ב. $x=\log_3 5$

ג. $x=\log_3\sqrt{6}$

4) חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{36}}81}$ ב. $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}}5}}$

תשובות סופיות:

1) א. 8 ב. 25.

2) א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15.

3) א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2-2\sqrt{6}$.

4) א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{2}{\sqrt[9]{25}}$.

מעבר בין בסיסים:

סיכום כללי:

מעבר מבסיס a לבסיס m (כאשר: $a>0\ \neq 1$ ו-$m>0\neq 1$, וכן: $b>0$)
יתבצע באופן הבא: $\log_a b=\frac{\log_m b}{\log_m a}$.

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_4 7\cdot\log_7 4$

ב. $\log_{0.1} 3\cdot\log_9 1000$

ג. $\log_{\sqrt{3}} 5\cdot\log_{\sqrt{125}} 9$

ד. $\log_4 169\cdot\log_{25} 64\cdot\log_{13} 625$

2) הוכח את השוויונים הבאים:

א. $\log_2 25\cdot\log_5 3\cdot\log_9 2=1$.

ב. $\log_{16} 9\cdot\log_5 4\cdot\log_3 5=1$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log_2 x+\log_{32} x=6$

ב. $\log_3 x\cdot\log_{27} x=3$

ג. $\log_2 4x\cdot\log_8\frac{x}{16}=-\frac{5}{3}$

ד. $\log_x 5-6\log_{125} x=1$

שאלות הבעה:

4) נתון: $\log_4 6=a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 3$

ב. $\log_{32} 36$

ג. $\log_{216} 96$.

5) נתון: $\log_3 5=b$, $\log_2 3=a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 50$

ב. $\log_2\sqrt{30}$

ג. $\log_5 22.5$

6) נתון $\log 9 = 2b$, $\log_3 7 = a$. הבע באמצעות a ו- b את:

א. $\log 21$.

ב. $\log_3\left(\frac{10}{7}\right)$.

ג. $\log_7 10$.

ד. $\log_{30} 63$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7) $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$.

8) $\log\sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log\sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$.

תשובות סופיות:

1) א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12.

2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

3) א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$.

4) א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$.

5) א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$.

6) א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$.

7) הוכחה.

8) הוכחה.

הלוגריתם הטבעי:

סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln\frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \to e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- b מספרים כלשהם.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln\frac{1}{e^4}$ ג. $\ln\frac{1}{e\sqrt{e}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\ln x = 2$ ב. $\ln x = -\frac{1}{2}$

3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

א. $\ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x$

ב. $3\ln^2 x + \ln x = 2$

ג. $\ln\left(e^2 x^3\right) \cdot \ln\frac{1}{x} = \ln\left(ex^2\right)$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

א. $x^{\ln x} = e^6 x$ ב. $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$

5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $e^{\ln 3}$ ב. $e^{2\ln 3}$

תשובות סופיות:

1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5.

2) א. $x=e^2$ ב. $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

3) א. $x=0$ ב. $x=\sqrt[3]{e^2},\frac{1}{e}$ ג. $x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}},\frac{1}{e}$.

4) א. $x=e^3,\frac{1}{e^2}$ ב. $x=\sqrt{e},e$.

5) א. 3 ב. 9.

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$.
במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$.

את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$

ג. $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$ ד. $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x} = 3$ ב. $4 + 3e^x = 9$

ג. $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$ ד. $e\left(e^x + 1\right) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2\left(7 - 5^x\right) = \log_2 \frac{10}{5^x}$ ב. $\log_2\left(4e^{2x} + 6\right) - 1 = \log_2\left(7e^x\right)$

תשובות סופיות:

1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

ג. $x = \log_7 3 = 0.564$, $x = \log_7 5 = 0.827$ ד. אין פתרון.

2) א. $x = \frac{1}{3}\ln 3 = 0.36$ ב. $x = \ln\frac{5}{3} = 0.51$ ג. $x = 0$, $x = -\ln 3 = -1.09$

ד. $x = \ln 16 = 2.7725$.

3) א. $x = 1$, $x = \log_5 2 = 0.43$ ב. $x_1 = \ln\frac{1}{2} = -0.693$, $x = \ln 3 = 1.098$

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2 x \\ y=6-\log_2 x \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_6^2 x-\log_6(2y-2)=2 \\ \frac{1}{2}x=y-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_3(x+y)=\log_3(4x+y)-2 \\ \log_5(5x+3y)=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y))=1 \\ \log_5(x+y-11)=\log_{25}x+\frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_5 x+6\log_4 y=11 \\ 10\log_5 x-2\log_4 y=17 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_2 x^2+\log_3\frac{1}{y}=9 \\ \log_2\sqrt{x}+\log_{\sqrt[3]{3}} y=-1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_5 x+2^{\log_2 y}=6 \\ x^y=5^8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} xy=27 \\ x^{\log_3 y}=9 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2^{\log_{\frac{1}{2}}(2x-y)}=7^{\log_7\frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x+\log_3 y=\frac{1}{\log_{28}3} \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(8,3)$

2) $(36,19),\left(\frac{1}{6},1\frac{1}{12}\right)$

3) $(8,-5)$

4) $(16,7)$

5) $(25,8)$

6) $\left(16,\frac{1}{3}\right)$

7) $(25,4),(625,2)$

8) $(3,9),(9,3)$

9) $(4,7)$

מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2\left(4^x-2\right) \\ y=2x-1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 25^y=\left(5\sqrt{5}\right)^{x+1} \\ \log_5\sqrt{x}+\log_5\sqrt{y}=\log_5 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y+5\log_6 x=1 \\ 216\cdot x^{2-y}=6^{1-4y} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x\cdot\log_2 3=\dfrac{y}{\log_9 2} \\ \log_3\left(9^x+27\right)=2y+\log_3 12 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \left(2^x-1\right)^2-4y+3=0 \\ x=\log_2\left(y+1\right) \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=\log_4\left(5-9^y\right) \\ \log_2\left(2^x+3\right)=\log_4\left(29-\left(3^y-3\right)^2\right) \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(1,1)$

2) $(3,3)$

3) $(36,-3),\left(6,-1\frac{1}{3}\right)$

4) $\left(1,\frac{1}{2}\right),(2,1)$

5) $(1,1),(2,3)$

6) $(1,0)$

אי-שוויונים לוגריתמים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\log_2 x < \log_2 (5x - 20)$

2) $\log_6 (x^2 - 5x) < 1$

3) $\log_3 x > \log_9 (15 - 2x)$

4) $\log_{\frac{1}{2}} (1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}} (7 - x)$

5) $\ln x \geq \ln (x^2 - 12)$

6) $\ln x < 3$

7) $\ln^2 x - 6 \ln x < 7$

8) $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$

תשובות סופיות:

1) $x > 5$

2) $-1 < x < 0 \ , \ 5 < x < 6$

3) $3 < x < 7\frac{1}{2}$

4) $-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$

5) $2\sqrt{3} < x \leq 4$

6) $0 < x < e^3$

7) $\frac{1}{e} < x < e^7$

8) $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ וגם $x \neq 1$

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 11 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

1. משוואות מעריכיות ..... (ללא ספר)
2. משוואות עם חיבור וחיסור איברים 172
3. משוואות עם קבוע אוילר 174
4. מערכת משוואות מעריכיות 175
5. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס 176
6. אי שוויונים מעריכיים 177
7. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך 178

משוואות עם חיבור וחיסור איברים:

סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחיסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב-t, למשל במשוואה: $4^x-3\cdot 2^x=4$ נסמן: $2^x=t$.

נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.
לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה-x המתאימים.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $2^x+6\cdot 2^x=56$

ב. $8^x+3\cdot 8^x=256$

ג. $5\cdot 3^x-3^{x+1}=162$

ד. $2\cdot 6^x+6^{x+2}-6^{x-1}=227$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $81^{x+1}+18\cdot 3^{4x-3}=735$

ב. $5^{3x+2}+4\cdot 125^x=29$

ג. $\left(2^{3x+1}\right)^2-64^{x-\frac{1}{3}}=15$

ד. $\sqrt{10000^{x+1}}-\sqrt[4]{10^{8x+1}}=\sqrt[4]{1000}\cdot\left(\sqrt[4]{10^7}-1\right)$

ה. $6^{-x}-5\cdot 36^{-\left(\frac{x}{2}+1\right)}=186$

ו. $5^{-x}+25^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}-5^{-x-1}=145$

ז. $2\cdot 10^{x+1}+10^{x+2}=3\cdot 5^{x+1}$

ח. $4^{x+2}-6\cdot 4^x=7\cdot 12^{x+1}+6\cdot 12^x$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור ממעלה שנייה):

א. $9^x-36\cdot 3^x+243=0$

ב. $16^{x+1}-65\cdot 4^x+4=0$

ג. $6^x-4\cdot 6^{-x}+3=0$

ד. $4^{-x}-3\cdot 4^x+2=0$

ה. $\left(\frac{4}{9}\right)^x-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1}=-\frac{2}{3}$

ו. $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2-5\cdot 2^{\frac{1}{3}x+1}+1=0$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

א. $\frac{20}{9^x+1}=3-\frac{8}{9^x-1}$

ב. $\frac{7^x}{7^x-4}+\frac{8}{7^x+5}=3$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}}-6\cdot 5^{x-1.5}+1=0$

ב. $3^x-\sqrt{16\cdot 3^{x+1}}=-9$

ג. $36^x-6^{x+1}\cdot 3^x+8\cdot 9^x=0$

ד. $4\cdot 9^x-10\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$

ה. $25\cdot 5^{2x}+16\cdot 15^x=9^{x+1}$

ו. $9^x+4^x-6^x=\frac{7}{6^{1-x}}$

ז. $\frac{8^{2x}-8}{7}=4^x-2$

ח. $2^{3x}-2^{2x+2}-2^x+4=0$

תשובות סופיות:

1) א. $x=3$ ב. $x=2$ ג. $x=4$ ד. $x=1$.

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=0$ ג. $x=\frac{1}{3}$ ד. $x=\frac{1}{4}$

ה. $x=-3$ ו. $x=-2$ ז. $x=-3$ ח. $x=-2$

3) א. $x=2,3$ ב. $x=1,-2$ ג. $x=0$ ד. $x=0$

ה. $x=0,1$ ו. $x=-6,-9$.

4) א. $x=1,-\frac{1}{2}$ ב. $x=1$.

5) א. $x=\frac{1}{2},1\frac{1}{2}$ ב. $x=1,3$ ג. $x=1,2$ ד. $x=1,0$

ה. $x=-2$ ו. $x=1,-1$ ז. $x=0,\frac{1}{2}$ ח. $x=0,2$.

משוואות עם קבוע אוילר:

סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828.
למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

א. $e^{3x}=e^{2x-1}$ ב. $e^{5x-1}=e\cdot e^{6x+1}$

ג. $e^{x-5}=\left(e^{1-x}\right)^3$ ד. $e^x\cdot\sqrt{e^{3x-1}}=\left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

א. $e^2\cdot e^x-e^{x+1}=e-1$ ב. $\sqrt[3]{e^{x+1}}\cdot e^2=e^x\sqrt{e}$

ג. $e^{2x}+e^x-2=0$ ד. $e^{1+x}+e^{1-x}=e^2+1$

3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

א. $xe^x=\sqrt[4]{e}\cdot x$ ב. $e^{3x}=x\cdot e^{3x}$

ג. $xe^{x^2}=\frac{x}{\sqrt{e^x}}$ ד. $\sqrt[3]{e^{3x-1}}\cdot x=xe^x$

תשובות סופיות:

1) א. $x=-1$ ב. $x=-3$ ג. $x=2$ ד. $x=1\,,\ \frac{1}{6}$.

2) א. $x=-1$ ב. $x=\frac{11}{4}$ ג. $x=0$ ד. $x=1\,,\ -1$.

3) א. $x=0\,,\ \frac{1}{4}$ ב. $x=1$ ג. $x=0\,,\ -\frac{1}{2}$ ד. $x=0$.

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

1) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} y=3^x \\ y=18-3^x \end{cases}$.

2) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x}-5^y=5^x-25 \\ y-x=2 \end{cases}$.

3) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} \frac{1}{3^y-4}+\frac{3}{3^x-2}-\frac{1}{3^x+2}=3 \\ 4^y=\sqrt{256^x} \end{cases}$.

4) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^x+2^y=13 \\ 2\cdot 5^x-2^y=2 \end{cases}$.

5) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 2\cdot 3^x-3\cdot 2^y=42 \\ 3^{x+1}-2^{y+1}=73 \end{cases}$.

6) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x+1}+8\cdot 10^x-2^{2y+4}=0 \\ \left(\sqrt{3}\right)^y=27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases}$.

7) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 6\cdot 4^x-7\cdot 6^{y-1}+2\cdot 3^{x+y}=6^y \\ \sqrt[4]{5^x}\cdot\sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^y}=\sqrt[4]{125}\cdot 5^x \end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $(2,9)$ 2) $(0,2)$, $(2,4)$ 3) $(1,2)$ 4) $(1,3)$

5) $(3,2)$ 6) $(-1,-2)$ 7) $(1,2)$, $(-1,0)$

משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי.
יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- x עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\left(\sqrt{3-x}\right)^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^{x}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{3-x}}$.

2) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2+x}=1$.

3) $\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}}=|x-3|^{-1}$.

תשובות סופיות:

1) $x=\frac{1}{4}\ ,\ 1\ ,\ 2$

2) אין פתרון.

3) $x=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,4$

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השיוויונים הבאים:

1) $3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x}$

2) $\sqrt{2^x} \le 4^{x^2-1\frac{1}{4}}$

3) $e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x}$

4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \ge \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x}$

5) $25^x + 5 < 6 \cdot 5^x$

6) $e^{2x} - 2e^x + 1 \le 0$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

7) $e^x > 3$

8) $e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

תשובות סופיות:

1) $x < \frac{2}{3}$

2) $x \ge 1\frac{1}{4}$ או $x \le -1$

3) $0 \le x < 1$

4) $x \le \frac{1}{8}$

5) $0 < x < 1$

6) $x = 0$

7) $x > \ln 3$

8) $x > \ln 4$ או $x < 0$

אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x)>0$.

דרך הפתרון: אם: $f(x)>1$ אז: $g(x)>h(x)$.

אם: $0<f(x)<1$ אז: $g(x)<h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $x^{2x-1} > x^{x+2}$

2) $(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1}$

3) $x^{2x-6} < 1$

4) $x^{2x^2+2} < x^{5x}$

5) $(x^2-6x+13)^{x^2-2x} \geq (x^2-6x+13)^3$

6) $(x+1)^{|x|} < x^2+2x+1$

תשובות סופיות:

1) $0<x<1\ ,\ x>3$.

2) $3<x<6$.

3) $1<x<3$.

4) $0<x<0.5\ ,\ 1<x<2$.

5) $x\leq -1\ ,\ x\geq 3$.

6) $0<x<2$.

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 12 - וקטורים גיאומטריים

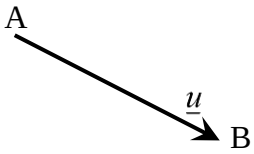
תוכן העניינים

1. הגדרות וכללים יסודיים 179
2. וקטורים הפורשים מישור 184
3. מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור 188

הגדרות וכללים יסודיים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:



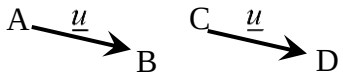
להלן תיאור של וקטור גיאומטרי: וקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: $\overrightarrow{AB}$.

ניתן לסמן וקטור באות קטנה באופן הבא: $\underline{u}$ (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$).

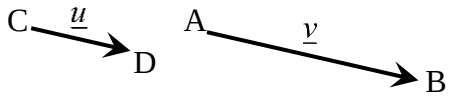
מהאיור לעיל מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

קשרים בין וקטורים:

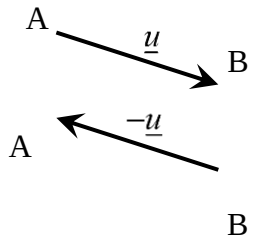
- וקטורים שווים: שני וקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.
  דוגמא לוקטורים שווים: מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



- וקטורים מקבילים: שני וקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.
  ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.
  וקטורים מקבילים נקראים גם "וקטורים תלויים ליניארית".
  דוגמא לתלות בין וקטורים מקבילים:
  עבור $\alpha > 1$ מתקיים: $\underline{v} = \alpha \underline{u}$, או: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$.



- אם זוג וקטורים במרחב: $\overrightarrow{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD} = a\underline{u} + b\underline{v} + c\underline{w}$ מקבילים
  אז מתקיים: $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$.



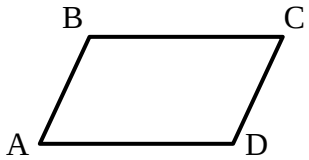
- וקטור המסומן $\overrightarrow{BA}$ הוא בעל גודל זהה לוקטור $\overrightarrow{AB}$
  וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$.

הערה:

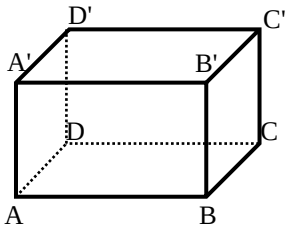
שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ יקראו מקבילים אם מתקיים: $\underline{v} = \alpha \underline{u}$ כאשר הגודל α יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום $\alpha \neq 0$. בפרט עבור $\alpha < 0$ כיוונם הפוך ב- $180°$.

שאלות:

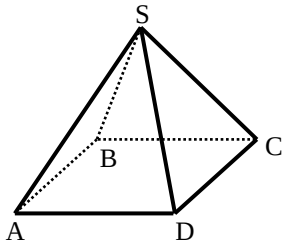
1) במקבילית ABCD נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



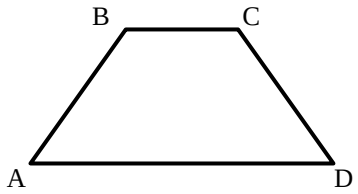
2) בתיבה ABCDA'B'C'D'
נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



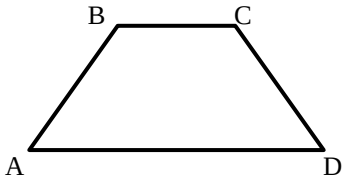
3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



4) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע באמצעות $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



5) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$



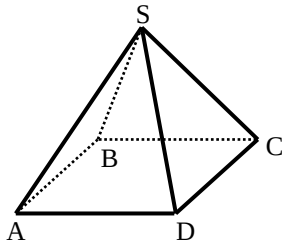
א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{DC}$.

ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{BE}$.

ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.

6) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע

נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.



א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{SC}$.

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.

הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{BN}$.

7) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=2:3$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

8) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=3:5$. נתון: $\overrightarrow{AP}=\underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{PB}$ ו- $\overrightarrow{AB}$.

9) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

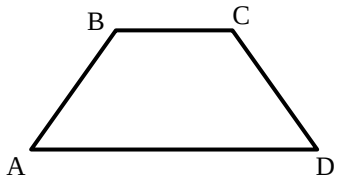
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

10) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

11) בטרפז ABCD שבשרטוט

נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.



הנקודה F נמצאת על הצלע CD

ומקיימת: $\frac{DF}{FC}=\beta$.

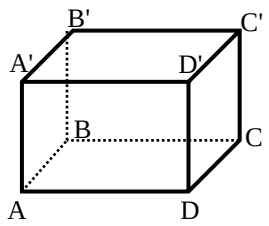
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- β את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.

12) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$

הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור: $\overrightarrow{PQ}$.

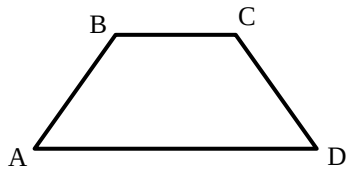


13) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AB}$.

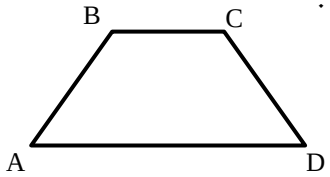


14) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

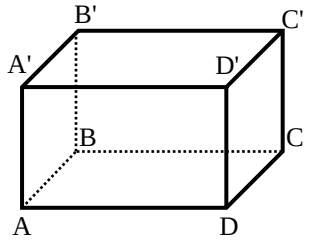
מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים: $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AC}$.



15) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$.



א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שבעבורם $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה ABB'A'.

מצא את ערכי α ו- β אם נתון כי $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{EC}$.

תשובות סופיות:

1) $\underline{u}=\overrightarrow{DC}$, $\underline{v}=\overrightarrow{BC}$.

2) $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{B'C'}$, $\underline{u}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$, $\underline{w}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BB'}$.

3) $\underline{w}=\overrightarrow{AS}$, $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

4) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\underline{v}$.

5) א. $\overrightarrow{DC}=\underline{u}-\frac{2}{3}\underline{v}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}$ ב. $\overrightarrow{BE}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$ ג. $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}$.

6) א. $\overrightarrow{SC}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\underline{v}$ ב. $\overrightarrow{BN}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$.

7) $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\underline{u}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\underline{u}$.

8) $\overrightarrow{PB}=\frac{5}{3}\underline{u}$, $\overrightarrow{AB}=\frac{8}{3}\underline{u}$.

9) $\overrightarrow{PB}=(1-\alpha)\underline{u}$, $\overrightarrow{AP}=\alpha\underline{u}$.

10) $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{1+\alpha}\underline{u}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}$.

11) $\overrightarrow{AF}=\frac{\beta}{1+\beta}\underline{u}+\frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v}$.

12) $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$.

13) $\alpha=2$.

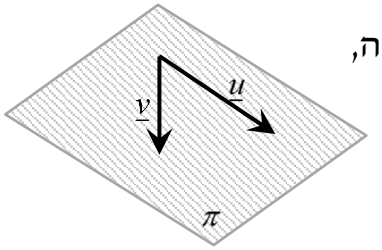
14) $\alpha=1$.

15) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. לא ג. $\beta=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$.

ווקטורים הפורשים מישור:

סיכום כללי:

ווקטורים הפורשים מישור:



כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:

הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ בעלי כוונים שונים ולכן פורשים

את המישור π.

קומבינציה לינארית של ווקטורים:

- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה לינארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים תלויים ליניארית (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

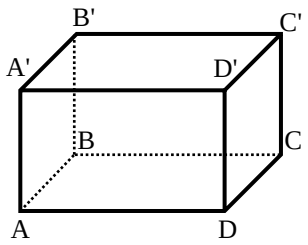
דוגמא:

עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור $\underline{w}$ המוכל, או מקביל

למישור π באופן הבא: $\underline{w}=\alpha\cdot\underline{u}+\beta\cdot\underline{v}$ כאשר: $\alpha,\ \beta$ מספרים ממשיים כלשהם.

במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ נקראים תלויים ליניארית.

שאלות:



16) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

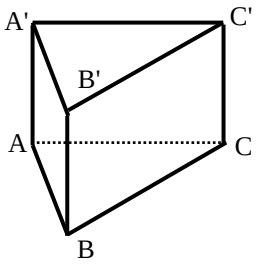
הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$

א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. מהו ערכו של α שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לבסיס ABCD?



17) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C'

ובה נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

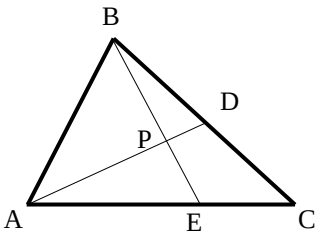
הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת: $\frac{A'M}{MC'}=\alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC}=\beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{NM}$.

ב. מהו ערכו של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ABB'A'.
הבע את α באמצעות β .



18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC

והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE}=2$.

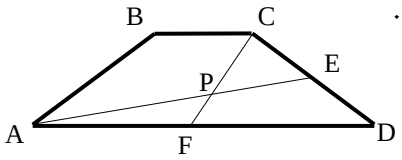
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נגדיר: $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, וכן: $\overrightarrow{AP}=t\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP}=s\cdot\overrightarrow{BE}$.

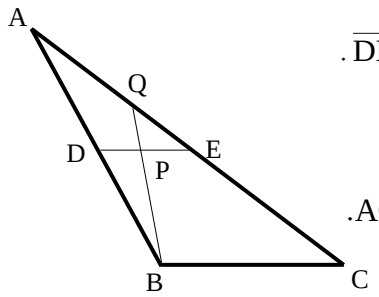
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, t ו- s את הווקטור $\overrightarrow{AP}$ בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.

19) בטרפז ABCD, ($AD \parallel BC$) שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$.
הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD
והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו-CF.
מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF.



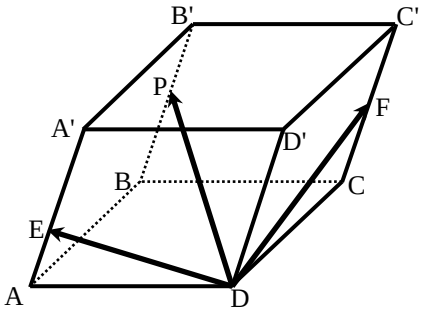
20) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$.
הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP
חותך את הצלע AC בנקודה Q.



א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\Delta QPE}}{S_{\Delta DPB}}$.

21) במקבילון ABCDA'B'C'D'
נתון: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$.
הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC',
הנקודה E נמצאת על המקצוע AA'
ומקיימת: $A'E = 2AE$ והנקודה P נמצאת על
המקצוע BB' ומקיימת: $\overrightarrow{B'P} = k \cdot \overrightarrow{B'B}$.
נתון: $\overrightarrow{DP} = t \cdot \overrightarrow{DE} + s \cdot \overrightarrow{DF}$.



א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- k את הווקטור $\overrightarrow{DP}$.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB'.

ג. האם הנקודות D , E, F ו- P נמצאות על אותו מישור? נמק.

תשובות סופיות:

16) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. $\alpha=1$ ג. לא.

17) א. $\overrightarrow{NM}=(\beta-1)\underline{u}+\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}-\beta\right)\underline{v}+\underline{w}$ ב. $\beta=1$ ג. $\alpha=\frac{\beta}{1-\beta}$

18) א. $\overrightarrow{AP}=(1-s)\underline{u}+\frac{2}{3}s\underline{v}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}t\underline{u}+\frac{1}{2}t\underline{v}$ ב. $BP:PE=3:2$, $AP:PD=4:1$

19) $AP:PE=2:1$, $CP:PF=2:1$

20) א. $AQ:QC=1:2$ ב. $\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}}=\frac{1}{3}$

21) א. $\overrightarrow{DP}=\underline{u}+\underline{v}+(1-k)\underline{w}$ ב. $B'P:PB=1:5$ ג. כן.

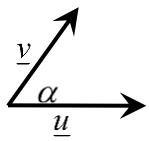
מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:

סיכום כללי:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$$

כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.



ניתן למצוא את הזווית שבין שני וקטורים ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.

גודל של וקטור נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}$, או: $|\underline{u}|^2=\underline{u}^2$.

הערה:

המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$ בין שני וקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

שאלות:

22) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

א. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=2$, $\alpha=60°$

ב. $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$, $\alpha=120°$

ג. $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=6$, $\alpha=30°$

ד. $|\underline{u}|=8$, $|\underline{v}|=3$, $\alpha=180°$

ה. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=5$, $\alpha=0°$

ו. $|\underline{u}|=7$, $|\underline{v}|=4$, $\alpha=90°$

23) חשב את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

א. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=4$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=6$

ב. $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=2$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=-4\sqrt{3}$

ג. $|\underline{u}|=9$, $|\underline{v}|=5$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$

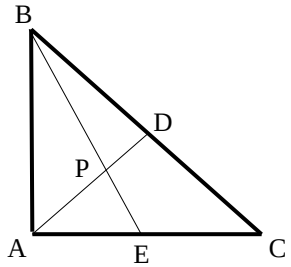
ד. $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=6$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=12$

24) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא $120°$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר: $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

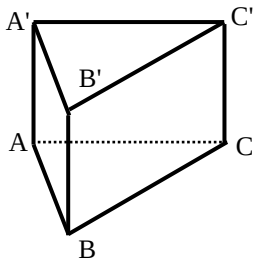
25) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר: $\overrightarrow{MN}=0.5\underline{u}-\underline{v}$.

26) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא $120°$.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PM}=4\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

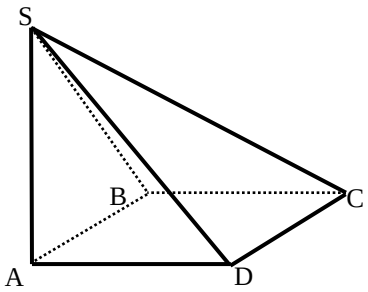
27) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle BAC=90°$).
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.
נתון: $\frac{AP}{PD}=3$, $AB=8$, $AC=12$.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle DPC$.



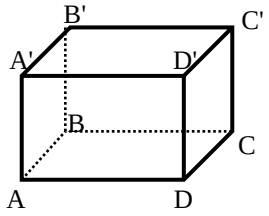
28) נתונה מנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C'
שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.
הנקודה M היא אמצע המקצוע A'C' והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $BN=2CN$.
נסמן: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle MAN$.



29) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.
נתון: $AB=AD=\frac{1}{2}AS=k$.
נסמן: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle PAQ$.



30) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $AB=\frac{1}{\sqrt{2}}AD=AA'$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע DD'.

א. מהו ערכו של α שבעבורו מתקיים: $\left|\overrightarrow{AP}\right|=\frac{5}{6}\left|\overrightarrow{AQ}\right|$?

ב. הבע באמצעות α את $\cos\sphericalangle PAQ$
והראה כי לכל ערך של α הזווית $\sphericalangle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של α שבעבורו הזווית $\sphericalangle PAQ$ מקיימת: $\cos\sphericalangle PAQ=\frac{2}{3\sqrt{5}}$?

31) הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

32) נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$.

33) נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$.

34) נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $\overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}}{2}$.

35) נתונה פירמידה משולשת SABC שבה $\overrightarrow{AS}\perp\overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{AC}$.
הוכח: $\overrightarrow{CS}\perp\overrightarrow{AB}$.

36) הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

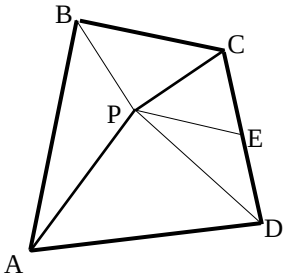
37) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.
הוכח: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$.

ב. נתונה פירמידה משולשת SABC. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC.
הוכח: $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}\right)$.

ג. נתון בנוסף כי $\overrightarrow{AS}$ ו- $\overrightarrow{AP}$ מאונכים ל- $\overrightarrow{BC}$.
הוכח כי $AB=AC$. (הדרכה: סמן $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$).

38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD
כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים
ישרי זווית וש"ש ($AP=PD$, $BP=PC$).
הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח: $\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{AB}$.
(הדרכה: סמן $\overrightarrow{PD}=\underline{d}$, $\overrightarrow{PA}=\underline{c}$, $\overrightarrow{PC}=\underline{b}$, $\overrightarrow{PB}=\underline{a}$).



39) בטטראדר SABC נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\overrightarrow{AP}=\alpha\cdot\overrightarrow{AS}$.
הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\overrightarrow{SQ}=\beta\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$.

א. מצא את הקשר בין α ו- β שבעבורו $\overrightarrow{PQ}$ מקביל למישור ABC.

ב. נתון: $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BC}$. הוכח: $AB=AC$.

40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים, אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

תשובות סופיות:

22) א. 3 ב. -10 ג. $6\sqrt{3}$ ד. -24 ה. 15 ו. 0.

23) א. $60°$ ב. $150°$ ג. $90°$ ד. $0°$.

24) $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 18.248$

25) $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{29}$

26) $31.87°$

27) $55.49°$

28) $70.623°$

29) $24.095°$

30) א. $\alpha = \frac{3}{4}$ ב. $\cos\left(\sphericalangle PAQ\right) = \frac{1}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$ ג. $\alpha = \frac{1}{2}$

31) שאלת הוכחה.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) שאלת הוכחה.

36) שאלת הוכחה.

37) שאלת הוכחה.

38) שאלת הוכחה.

39) א. $\alpha + 2\beta = 1$ ב. שאלת הוכחה.

40) שאלת הוכחה.

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 13 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של ישר 193
2. מצב הדדי בין ישרים 196
3. הצגה פרמטרית של מישור 198
4. משוואת מישור 199
5. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור 200
6. מישורים המקבילים לצירים 201
7. מצב הדדי בין ישר ומישור 202
8. מצב הדדי בין מישורים 203
9. ישר חיתוך בין מישורים 204
10. חישובי זוויות שונות ..... (ללא ספר)
11. זווית בין שני ישרים 205
12. זווית בין ישר ומישור 206
13. זווית בין שני מישורים 207
14. חישובי מרחקים ..... (ללא ספר)
15. מרחק בין שתי נקודות במרחב 208
16. מרחק בין נקודה לישר 209
17. מרחק בין נקודה למישור 210
18. מרחק בין ישרים מקבילים 211
19. מרחק בין ישר למישור 212
20. מרחק בין מישורים מקבילים 213
21. מרחק בין ישרים מצטלבים 214
22. סיכום מרחקים ..... (ללא ספר)
23. שאלות מסכמות 215

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

הצגה פרמטרית של ישר

שאלות

1) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x}=(4,3,0)+t(1,-1,1)$?

2) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x}=t(2,-1,5)$?

3) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.

4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.

5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$
ומקביל לישר $\ell: \underline{x}=(0,3,-1)+t(-4,2,1)$.

6) מצאו במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$
ומאונך לישר: $\ell: \underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell: \underline{x}=(1,2,3)+t(4,5,6)$.
כתבו את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות x, y ו- z.

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות: $x=1+2t$, $y=10$, $z=4-t$.
כתבו את ההצגה הפרמטרית שלו.

8) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

9) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$
ומקביל לציר ה- z.

10) מצאו את נקודת החיתוך של הישר $\ell: \underline{x}=(1,-2,6)+t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ישר עובר בנקודה $(1,-1,4)$ וכיוונו $(4,10,2)$.
מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(4,10,2)$

ב. $\underline{x}=(3,4,5)+t(4,10,2)$

ג. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(2,5,1)$

ד. $\underline{x}=(5,9,6)+t(8,20,4)$

ה. כל התשובות נכונות.

12) ישר עובר דרך הנקודות $A(1,-1,2)$ ו- $B(4,0,1)$.
תארו את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נק' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

13) הציגו כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

א. $\ell:\begin{cases}x=1-4t\\y=2t\\z=2+10t\end{cases}$

ב. $\ell:\begin{cases}x=1+t\\y=4\\z=10t\end{cases}$

ג. $\ell:\ \dfrac{x-1}{2}=y+1=z-4$

ד. $\ell:\ x-1=y+10,\ z=4$

ה. $\ell:\begin{cases}x-y+z=1\\2x-y+3z=3\end{cases}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) כן.

2) לא.

3) $\ell : \underline{x} = (-5,-2) + t(6,8)$

4) $\ell : \underline{x} = (4,1,1) + t(1,1,3)$

5) $\ell : \underline{x} = (2,-7,1) + s(-4,2,1)$

6) $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(2,1,0)$

7) א. $x = 1+4t \ , y = 2+5t \ , z = 3+6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1,10,4) + t(2,0,-1)$

8) $\ell : \underline{x} = t(0,1,0)$

9) $\ell : \underline{x} = (3,-1,4) + t(0,0,1)$

10) $(7,-5,0)$

11) ה

12) א. $\ell : \underline{x} = (1,-1,2) + t \cdot (3,1,-1)$ ב. $\ell : \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+t \\ z = 2-t \end{cases}$

ג. $\ell : \dfrac{x-1}{3} = y+1 = 2-z$ ד. $\ell : \begin{cases} x-3y = 4 \\ y+z = 1 \end{cases}$

13) א. $\underline{x} = (1,0,2) + t(-4,2,10)$ ב. $\underline{x} = (1,4,0) + t(1,0,10)$

ג. $\underline{x} = (1,-1,4) + t(2,1,1)$ ד. $(x,y,z) = (1,-10,4) + t(1,1,0)$

ה. $(x,y,z) = (2,1,0) + t(-2,-1,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין ישרים

שאלות

1) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_1 : \underline{x} = (2,-3,0) + t(5,-1,2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (12,-5,4) + s(-10,2,-4)$

2) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_3 : \underline{x} = (0,1,-7) + t(-2,1,1)$, $\ell_4 : \underline{x} = (2,0,-6) + s(6,-3,-3)$

3) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_5 : \underline{x} = (-3,5,1) + t(4,0,-1)$, $\ell_6 : \underline{x} = (-1,7,4) + s(-1,1,2)$

4) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_7 : \underline{x} = (3,0,0) + t(2,-2,5)$, $\ell_8 : \underline{x} = (0,1,-5) + s(3,1,-2)$

5) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_9 : \underline{x} = (-4,1,-1) + t(3,0,-1)$, $\ell_{10} : \underline{x} = s(6,0,-2)$

6) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{11} : \underline{x} = (2,8,-1) + t(1,0,0)$, $\ell_{12} : \underline{x} = (-5,8,2) + s(2,0,-1)$

7) מצאו את ערכו של הפרמטר k, שבעבורו הישרים:
$\ell_1 : \underline{x} = (k+1,1-k,6) + t(1,-2,2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (k-1,7,-k) + s(1-k^2,k^2+2,-6)$

א. מקבילים.
ב. מתלכדים.

8) נתונות הנקודות $\mathrm{D}(-2,3,k)$, $\mathrm{C}(-6,3,-1)$, $\mathrm{B}(k,-1,3)$, $\mathrm{A}(3,-1,5)$.
הראו כי לכל ערך של k, הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) מתלכדים.

2) מקבילים.

3) נחתכים, $(1,5,0)$.

4) מצטלבים.

5) מקבילים.

6) נחתכים, $(1,8,-1)$.

7) א. $k=2$. ב. $k=-2$.

8) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצגה פרמטרית של מישור

שאלות

1) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבאות:
$A(1,-4,0)$, $B(3,6,2)$, $C(0,-3,1)$.

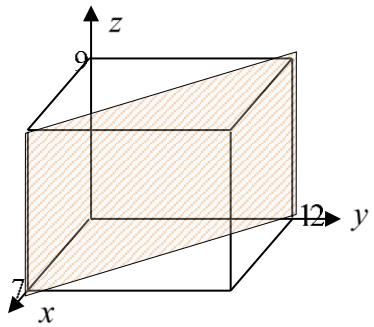
2) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$,
ומכיל את הישר $\ell : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)$.

3) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)$, $\ell_2 : \underline{x}=(2,16,11)+s(0,1,-6)$.
הראו שהישרים נחתכים ומצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5,-2,-1)$
ומכיל את ציר ה- x .

5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלהלן.
מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.



תשובות סופיות

1) $\pi : \underline{x}=(1,-4,0)+t(2,10,2)+s(-1,1,1)$

2) $\pi : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)+s(8,9,-6)$

3) $\pi : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)+s(0,1,-6)$

4) $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(5,-2,-1)$

5) $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(0,0,1)$

6) $\pi : \underline{x}=(7,0,0)+t(0,0,9)+s(-7,12,0)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת מישור

שאלות

1) קבעו האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi : 2x-y+3z-6=0$:

א. $D(5,7,1)$

ב. $E(2,-1,1)$

2) מצאו את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1,k,-1)$ נמצאת על המישור $\pi : kx-2y+(1+k)z+7=0$.

3) נתונה משוואת מישור $\pi : 3x+2y-z-9=0$.
מצאו את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

4) נתונה משוואת מישור $\pi : 4x+y-2z+8=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

תשובות סופיות

1) א. על המישור. ב. לא על המישור.

2) $k=3$

3) $(3,0,0)$, $\left(0,4\frac{1}{2},0\right)$, $(0,0,-9)$

4) $\ell : \underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $\pi: 2x+3z-12=0$.
כתבו הצגה פרמטרית של המישור.

2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.
מצאו את משוואת המישור.

3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצאו את משוואת המישור.

4) המישור π עובר בנקודות: $C(4,-1,0)$, $B(2,0,0)$, $A(1,0,-3)$.
מצאו את משוואת המישור.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. לפניך הנקודות הבאות: $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, $(2,0,5)$.

1. הראו ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד,
ומצאו הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
2. מצאו את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצאו שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.

ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שנמצא בסעיף א'?

תשובות סופיות

1) $\pi: \underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$

2) $\pi: -2x+3y+z+19=0$

3) $\pi: x-3y+8z=0$

4) $\pi: 3x+6y-z-6=0$

5) א. 1. $\pi: \underline{x}=(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ 2. $-2x+3y+z-1=0$

ב. למשל: $(0,0,1)$, $(-0.5,0,0)$ ג. לא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מישורים המקבילים לצירים

שאלות

1) נתונה משוואת המישור $\pi:\ (k+2)x+(k^2-2k-3)y-3z+k^2-1=0$.
לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

2) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0$
ו- $x+3y+2z-6=0$.
מצאו את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות

1) $k=3$

2) 6 יח"נ.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין ישר ומישור

1) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (5,0,1) + t(4,1,-2)$, $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

2) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (2,-1,6) + t(-1,1,2)$, $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

3) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (-6,1,0) + t(3,0,-1)$, $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

4) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (1,a,3) + t(4,1-b,0)$, $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$.
מצאו את ערכי a ו- b, עבורם הישר מוכל במישור.

תשובות סופיות

1) הישר חותך, $(1,-1,3)$.

2) מקבילים.

3) הישר מוכל.

4) $a = 1$, $b = -7$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין מישורים

שאלות

1) בכל סעיף נתונים שני מישורים. קבעו את המצב ההדדי ביניהם.

א. $\pi_1 : 2x-y+4z-5=0$, $\pi_2 : 4x-2y+8z-10=0$

ב. $\pi_3 : x+3y-z+1=0$, $\pi_4 : 3x+9y-3z-8=0$

ג. $\pi_5 : 5x-2y-2z+3=0$, $\pi_6 : 2x+3y+z-5=0$

2) נתונים שני מישורים

$\pi_1 : 2x+\left(k^2+k\right)y-2z+1=0$, $\pi_2 : 4x+12y-4z+k^2-2=0$

מצאו את ערכי k עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

תשובות סופיות

1) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

2) א. $k \neq 2,-3$ ב. $k=-3$ ג. $k=2$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

ישר חיתוך בין מישורים

שאלות

1) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x+y-2z+2=0$, $\pi_2 : 2x-y+z+10=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

2) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x+2y-3z+2=0$, $\pi_4 : 2x-3y+z+4=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

3) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x-3y+z+2=0$, $\pi_6 : 5x-2z+20=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

4) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x-2y-z+6=0$, $\pi_8 : z-2=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

5) מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x-5y+z+18=0$
עם המישור $[xz]$.

6) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x-3y+2z-1=0$, $\pi_2 : 4x+y-z-6=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

תשובות סופיות

1) $\ell : \underline{x}=(-2,6,0)+t(2,16,12)$

2) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(1,2,4)$

3) $\ell : \underline{x}=(0,4,10)+t\left(4,7\frac{1}{3},10\right)$

4) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(4,2,0)$

5) $\ell : \underline{x}=(-3,0,0)+t(3,0,-18)$

6) $\ell : \underline{x}=t(1,9,13)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית בין שני ישרים

שאלות

1) מצאו את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\ell_1 : \underline{x} = (4,0,0) + t(6,8,1)$, $\ell_2 : \underline{x} = s(-4,2,-4)$

ב. $\ell_1 : \underline{x} = (10,17,-18) + t(3,0,-6)$, $\ell_2 : \underline{x} = (6,5,4) + s(0,4,0)$

2) מצאו את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $A(3,4,6)$, $B(6,0,-2)$ וישר העובר דרך הנקודות $D(-1,4,2)$, $C(6,5,1)$ וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.

3) נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$.

א. מצאו הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

1. A ו-B.
2. B ו-C.
3. A ו-C.

ב. מי מבין הנקודות $D(4,2,-1)$ ו- $E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשבו את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

4) נתון מישור שמשוואתו: $3x-4y+6=0$. הנקודות $A(x,6,1)$, $B(-2,y,-1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$.
מצאו את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

תשובות סופיות

1) א. $78.521°$ ב. $90°$

2) $63.37°$. הישרים מצטלבים.

3) א. 1. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(3,5,-1)$ א. 2. $\ell : \underline{x} = (4,2,-1) + t(-1,-3,3)$

א. 3. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(2,2,2)$ ב. הנקודה D. ג. $35.477°$.

4) $C(0,2,11)$ או $C(0,28.45,11)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית בין ישר ומישור

שאלות

1) מצאו את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
$\ell : \underline{x} = (-2,0,5) + t(-2,1,2)$, $\pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$.

2) נתונות הנקודות $D(-7,3,-1)$, $C(1,2,5)$, $B(0,2,-1)$, $A(1,-1,2)$.
מצאו את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

3) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה $2x + y - 2z - 6 = 0$,
וקדקוד הפירמידה הוא $S(3,1,-2)$.
מצאו את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים $x_B = z_B = -1$.

תשובות סופיות

1) $18.87°$

2) $44.83°$

3) $14.9°$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית בין שני מישורים

שאלות

1) מצאו את הזווית שבין המישורים הבאים: $\pi_1 : 4x+3y+z-12=0$
ו- $\pi_2 : 4x-7y+5z+3=0$.

2) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקדקודיה הם:
$A(0,2,-5)$, $B(3,-1,1)$, $C(7,-1,-5)$, $D(3,2,0)$.
מצאו את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

3) מצאו את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x+5y-z+4=0$ למישור $[xz]$.

תשובות סופיות

1) $90°$

2) $87.539°$

3) $32.312°$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין שתי נקודות במרחב

שאלה

1) נתונות הנקודות $A(2,4,-5)$, $B(0,-2,6)$ ו- $C(k,-1,13-k)$.
מצאו ערכי k עבורם המשולש ABC יהיה שווה שוקיים, כך ש- $AB = AC$.

תשובה

1) $k=8$ או $k=12$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין נקודה לישר

שאלות

1) מצאו את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $\ell : \underline{x} = t(2,0,-7)$.

2) נתונות הנקודות $C(6,-4,0)$, $B(2,-1,0)$, $A(1,6,-1)$.
חשבו את שטח המשולש ABC.

3) על הישר $\ell : \underline{x} = (5,-2,0) + t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$.
מצאו את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות

1) $\sqrt{54}$

2) 12.75 יח"ש.

3) $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין נקודה למישור

שאלות

1) מצאו את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

2) מצאו משוואת מישור המאונך לישר $\ell:\underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4,5,-9)$.

3) נתונים ישר ומישור $\pi:2x+4y-4z+15=0$, $\ell:\underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$.
מצאו את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

תשובות סופיות

1) $2\frac{1}{2}$

2) $\pi:3x-2y+z+21=0$ או $\pi:3x-2y+z-7=0$.

3) $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין ישרים מקבילים

שאלות

1) נתונות הנקודות $A(15,0,-4)$, $B(12,-5,2)$, $C(6,1,4)$, $D(12,11,-8)$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצאו את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

2) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1:\underline{x}=(2,0,-1)+t(1,-2,1) \quad , \quad l_2:\underline{x}=(-8,-1,19)+s(-4,1,6)$$

$$l_3:\underline{x}=(-2,7,-11)+r(-2,4,-2) \quad , \quad l_4:\underline{x}=(-2,1,5)+q(4,-1,-6)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצאו את שטח המלבן.

תשובות סופיות

1) א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

2) א. שאלת הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין ישר למישור

שאלות

1) נתונה משוואת המישור $4x-z+6=0$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

ב. מצאו את המרחק בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

2) נתונים ישר ומישור $\pi:3x+12y-4z+k-10=0$, $l:\underline{x}=(1,k-1,5)+t(4,-2,-3)$.

א. הוכיחו שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצאו את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

תשובות סופיות

1) א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$

2) א. שאלת הוכחה. ב. $k=2,4$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין מישורים מקבילים

שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $\pi : 3x-4y+5z-10=0$.
מצאו משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

2) נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1 : x-2y-2z+6=0$, $\pi_2 : x-2y-2z-12=0$.
מצאו את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

3) נתונים שישה מישורים:
$\pi_1 : 2x+y-2z-11=0$, $\pi_2 : x+2y+2z+5=0$, $\pi_3 : 2x-2y+z+3=0$
$\pi_4 : 2x+y-2z+7=0$, $\pi_5 : x+2y+2z-1=0$, $\pi_6 : kx+qy+z+p=0$
מצאו את ערכי הפרמטרים k, q ו- p, שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

4) כדור שמרכזו בנקודה $O(3,8,-1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x+4y-3z-6=0$.
מצאו את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

תשובות סופיות

1) $\pi_1 : 3x-4y+5z+10=0$, $\pi_2 : 3x-4y+5z-30=0$

2) $\pi_3 : x-2y-2z-3=0$

3) $k=2$, $q=-2$, $p=18,-12$

4) $12x+4y-3z-136=0$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין ישרים מצטלבים

שאלות

1) נתונים שני ישרים, $\ell_1 : \underline{x} = (-3,2,6) + t(-4,1,2)$
ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0,2,-7) + s(1,0,-1)$.
הראו שהישרים מצטלבים ומצאו את המרחק שביניהם.

2) נתונים שני ישרים מצטלבים, $\ell_1 : \underline{x} = (-1,0,5) + t(1,1,-2)$
ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2,-1,9) + s(6,-1,0)$.
מצאו את המרחק שביניהם.

3) מצאו את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4,-2,-1) + t(-1,1,6)$ מציר ה- z.

תשובות סופיות

1) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.
2) 1.567 יח"א.
3) $\sqrt{2}$ יח"א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שאלות מסכמות

1) נתונות הנקודות $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.

א. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.
הראו כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.

ב. חשבו את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.

ג. מצאו את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

2) מצאו את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבעו אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
במקרה בו הישרים נחתכים, מצאו גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצאו גם את המרחק ביניהם.

א. $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0)$, $\underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0)$

ב. $\underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1)$, $\underline{x}=(1,-1,0)+s(12,-3,1)$

ג. $\underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1)$, $\underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2)$

ד. $\underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4)$, $\underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1)$

3) מצאו את המצב ההדדי של המישור והישר וקבעו אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
במקרה שהישר חותך את המישור, מצאו גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
במקרה בו הישר מקביל למישור מצאו את מרחק הישר מהמישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$, $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$, $2x-14y+10z=-6$.

4) מצאו את המצב ההדדי של המישורים וקבעו אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצאו את המרחק ביניהם.
במקרה בו הם נחתכים מצאו את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

א. $2x+y+2z-4=0$, $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$, $2x-14y+10z=-6$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D', שנפחה הוא 8.
משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא $\pi_1 : 4x+y+3z-28=0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא $\pi_2 : x+2y-2z+6=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

6) הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור, שמרכזו $O(1,1,2)$.
מצאו את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.

7) נתונים מישור וישר $\pi : 2x-y+2z+1=0$, $\ell : \underline{x}=(1,5,5)+t(1,1,0)$.
מצאו נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z , הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

8) נתונים שני מישורים $\pi_2 : 4x-2y+4z-1=0$, $\pi_1 : 2x-4y+4z-5=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצאו הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

9) נתונים ישר ומישור $\pi : 6x+2y-z+5=0$, $\ell_1 : \underline{x}=(0,-3,0)+t(1,1,-8)$.
ישר נוסף, ℓ_2 , המקביל למישור π , עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.
מצאו את שטח המלבן PQQ'P'.
(הדרכה: הביעו באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2)

10) נתונים שני מישורים $\pi_2 : 3x+y+2z+11=0$, $\pi_1 : 2x+y+z-5=0$.
ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של $60°$ עם הישר $\ell_2 : \underline{x}=(1,3,-4)+t(1,1,0)$.
מצאו את משוואת המישור π_3.

תשובות סופיות

1) א. $\underline{x}=(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y-z+2=0$

2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$. הזווית היא: $47.6°$.

3) א. מקביל, 0.9284. ב. מוכל.
ג. חותך בנקודה $(3.5,-0.5,-2)$, הזווית היא: $40.78°$.

4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x}=(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$, זווית: $63.6°$.
ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.

5) $\ell:\underline{x}=(0,7,7)+t(8,-11,-7)$, $\ell:\underline{x}=(0,2.5,8.5)+t(2,-2.75,-1.75)$.

6) $\pi:\ -3x+y+3z+15=0$.

7) $(0,0,4)$ או $\left(0,0,14\frac{4}{5}\right)$.

8) $\ell:\underline{x}=\left(0,-14,-15\frac{3}{4}\right)+t(-14,14,21)$.

9) 10.467 יח"ש.

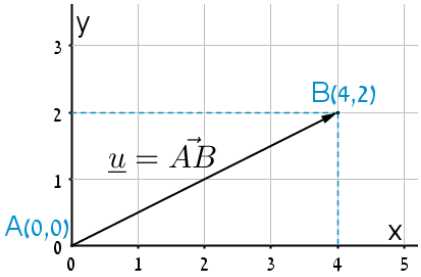
10) $\pi_3:x+2y-z-58=0$ או $\pi_3:2x+y+z-5=0$

סיכום כללי

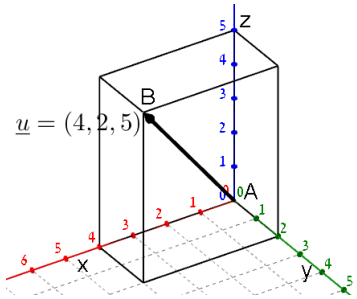
הגדרה כללית

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.

דוגמאות:



- הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הווקטור: $\underline{u}=(4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.

וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

וקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}, z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$; $y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$; $z_P=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$.

מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

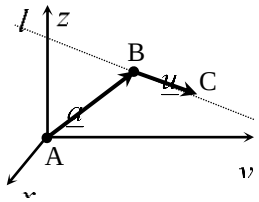
מכפלה סקלרית של שני וקטורים α ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$, $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

גודלו של וקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

הצגה פרמטרית של ישר

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.



הווקטור $\underline{a}$ נקרא **וקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.
הווקטור $\underline{u}$ נקרא **וקטור הכיוון של הישר.**
זה הוא וקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell: \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$
כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא וקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר l.

<u>דוגמא</u>: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים: $\underline{a}=\overrightarrow{AB}=B-A=(5,3,1)$; $\underline{u}=\overrightarrow{BC}=C-B=(7,0,10)-(5,3,1)=(2,-3,9)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l:\underline{x}=(5,3,1)+t(2,-3,9)$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

***הערות:**

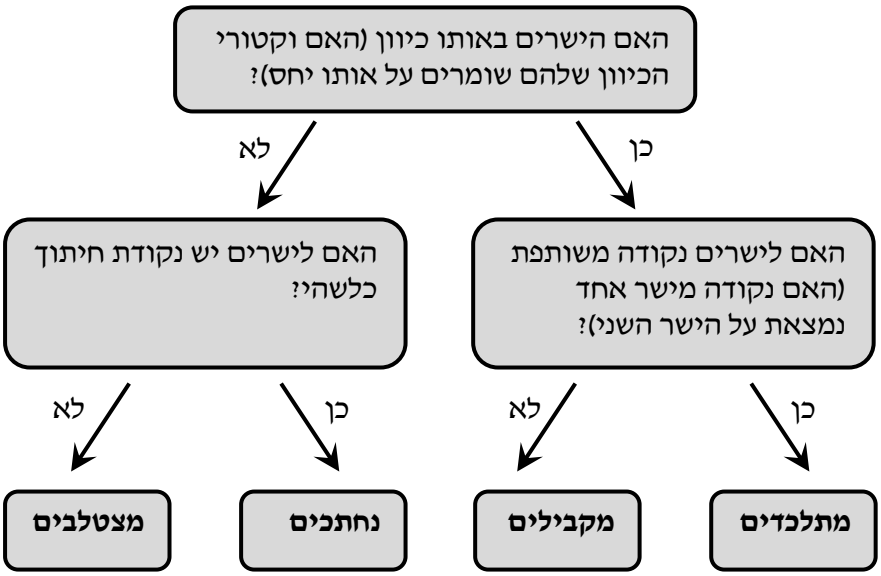
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
  ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l:\underline{x}=(7,0,10)+t(-6,9,-27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

מצב הדדי בין ישרים

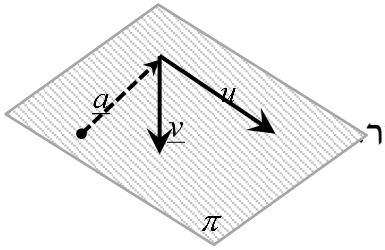
ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



הצגה פרמטרית של מישור



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.
הווקטור $\underline{a}$ הוא **ווקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ הם **וקטורי הכיוון של המישור.**
אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר t,s הם מספרים ממשיים כלשהם ו-$\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π.

משוואת מישור

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi : ax + by + cz + d = 0$,

כאשר: (x,y,z) היא נקודה על המישור והמקדמים a,b,c הם שיעורי ווקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h} = (a,b,c)$.

מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

נקבעו את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

מתלכדים	מקבילים	נחתכים
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$	כל מצב אחר

חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.
- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1=\underline{a}_1+t\underline{u}_1$ ו- $l_2=\underline{a}_2+s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{u}_1\cdot\underline{u}_2}{|\underline{u}_1|\cdot|\underline{u}_2|}\right|$.
- זווית חדה α בין ישר $l=\underline{a}+t\underline{u}$ ומישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$

  תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha=\left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.
- זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

  ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{h}_1\cdot\underline{h}_2}{|\underline{h}_1|\cdot|\underline{h}_2|}\right|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

2. מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l:\underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

3. מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ למישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$ יחושב ע"י: $d=\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.

5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.

6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:

   א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.

   ב. שימוש בנוסחה: $d=\left|\frac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 14 - וקטורים במרחב כולל מכפלה וקטורית מכפלה מעורבת ושימושיהם

תוכן העניינים

1. וקטורים 224

2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת 231

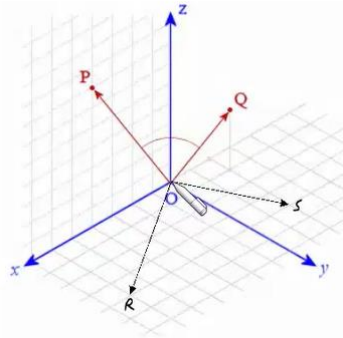
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב 233

וקטורים

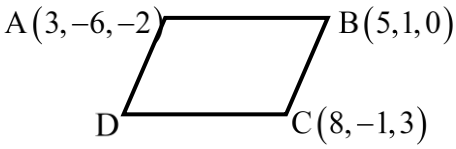
הערת סימון: נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\vec{u}, \mathbf{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

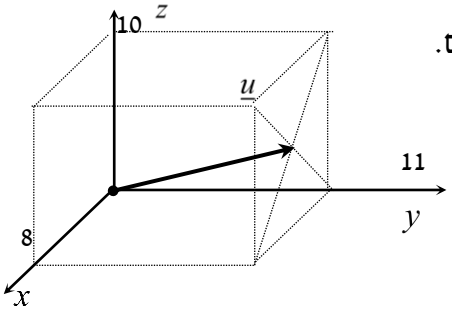
1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הניחו שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



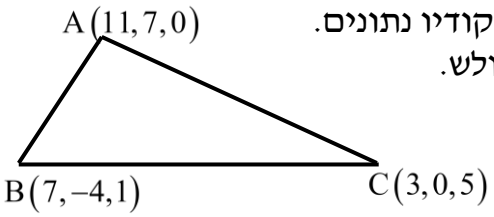
2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

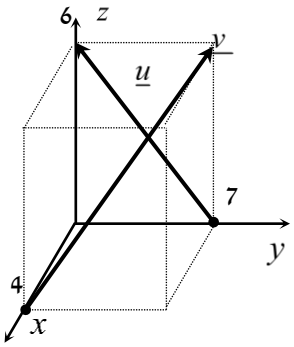


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$, אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.



6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

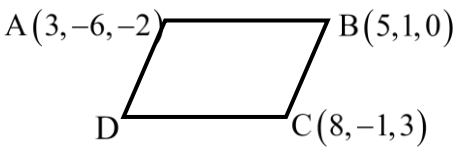
7) מצאו את x, y ו- z, אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$, כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

8) נתונות הנקודות הבאות:
$E(9,11,4)$, $D(7,4,10)$, $C(6,9,0)$, $B(3,7,-4)$, $A(1,0,2)$.

א. הראו כי: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

9) בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.



כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **10-16** נתונים הווקטורים: $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$, $\underline{w}=(2,6,-5)$.

* בשאלות **13**, **14**, **16** הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

10) חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

11) חשבו:

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

12) $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) $\underline{u}/|\underline{u}|$

14) $d(\underline{u},\underline{v})$

15) $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

16) $\text{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **17-19** נתונות הנקודות: $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$,
ויש למצוא את הווקטורים:

17) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

18) $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

19) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$.
הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$, כאשר:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

23) מצאו את שטחו של משולש ABC, שקדקודיו הם:
$A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

24) נתונים הווקטורים: $\underline{u}=(2,-1,0)$, $\underline{v}=(5,0,3)$.
מצאו וקטור $\underline{w}$, שמכפלתו ב-$\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב-$\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו-$(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

26) ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $u \perp v \Leftrightarrow |u+v|=|u-v|$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $u \perp v \Leftrightarrow |u+v|^2=|u|^2+|v|^2$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

27) ענו על חמשת הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$.

ב. הוכיחו כי $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$.

ג. הוכיחו כי $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$.

ד. הוכיחו כי $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$.
תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. הוכיחו כי $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם α היא הזווית בין a ל- b, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

29) יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1.
מהו המרחק של v מ- w_1?

30) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\vec{P}=(4,0,7),\quad \vec{Q}=(-2,1,3),\quad \vec{R}=(6,4,0),\quad \vec{S}=(-2,4,0)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{u}=(0,-7,6),\quad \underline{v}=(-4,7,6)$

7) א. $x=5,\quad y=-2,\quad z=6$

8) א. הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}$*

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) שאלת הוכחה.

21) א. שאלת הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277°$ ב. $\alpha=90°$ ג. $\alpha=180°$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח"ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ or\ v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

29) $\frac{5}{4}k$

30) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

1) נתון: $u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

חשבו: $(u\times v)\times w$.

2) חשבו את שטח המשולש, שקדקודיו: $A(8,2,3),\ B(4,-1,2),\ C(-8,0,4)$.

3) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.

ידוע כי: $|u|\neq 0$, $u\cdot w=0$, $u\times v=0$.

הוכיחו כי: $v\cdot w=0$.

4) נתונים שני וקטורים u,v במרחב.

ידוע כי: $|v|=4$, $|u|=1$, $u\perp v$.

חשבו: $|(u+v)\times(u-v)|$.

5) נתון $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix}$.

חשבו:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1),B(2,2,2),C(3,0,2),D(4,1,1)$.

ב. חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1),B(2,2,2),C(3,0,2),D(4,1,1)$.

7) חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5),B(1,-1,-4),C(3,3,10),D(8,6,3)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$.
הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a},\mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b}-4\mathbf{c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
הוכיחו כי $[(u+v)\times(v+w)](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

10) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
ידוע כי: $u\cdot(v\times w)=4$.
חשבו:
א. $u\cdot(w\times v)$
ב. $(v\times w)\cdot u$
ג. $w\cdot(u\times v)$
ד. $v\cdot(u\times w)$

11) נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$?

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$
2) $S=22.5$
3) שאלת הוכחה.
4) 8
5) א. -3 ב. -3 ג. -3
6) א. -6 ב. 1
7) $9\frac{1}{3}$
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4
11) אין לו נוסחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$, $B(1,1,1)$, $C=(2,1,2)$, $D(2,2,2)$.

2) מצאו את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$.

3) נתונים שני ישרים:

$$L_1:\quad \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3},\quad L_2:\quad x+7=y-5,\ z=3$$

א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) $\sqrt{26}$
3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 15 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

1. הגדרת המספר המרוכב 234
2. המספר הצמוד 237
3. חקירת משוואה ריבועית מרוכבת 240
4. מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב 241
5. נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב 245
6. שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים 247
7. שאלות שונות עם מספרים מרוכבים 248

הגדרת המספר המרוכב:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i=\sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z=a+bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי a וחלק מדומה b. המספרים a ו- b הם ממשיים.

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\mathrm{Re}(z)$ (מלשון: Real).

b נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\mathrm{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

שאלות:

1) רשום עם i:

א. $\sqrt{-1}=$ ב. $\sqrt{-4}=$ ג. $\sqrt{-25}=$

ד. $\sqrt{-3}=$ ה. $\sqrt{-5}=$

2) חשב:

א. $i=$ ב. $i^2=$ ג. $i^3=$

ד. $i^4=$ ה. $i^5=$ ו. $i^{17}=$

3) רשום את ערכם של a ו- b בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

4) כתוב מספר מרוכב z לפי הדרישות הבאות:

א. $\mathrm{Re}(z)=-3\,,\ \mathrm{Im}(z)=2$.

ב. $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) מספר מרוכב מסוים z מקיים: $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=4$ ו- $\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)=-1$.
מצא את z.

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2=-1$ ב. $x^2+36=0$ ג. $x^2-2x+5=0$

7) פתור את המשוואה הבאה: $x^2+x+1=0$.

8) פתור את המשוואה הבאה: $z^2+iz+6=0$.

9) נתון: $z_1=2+3i$, $z_2=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א. $z_1+z_2=$ ב. $z_1-z_2=$ ג. $z_1\cdot z_2=$

10) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-2+6i)+(1-i)$ ב. $(4+4i)-\left(3+\frac{1}{2}i\right)$

ג. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ד. $5-(3-2i)$

ה. $(i-3)+6i$ ו. $(i+2)-(3i-2)+(7-5i)$

11) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(1+4i)\cdot(8-2i)$ ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ג. $(4i-3)\cdot(4i+3)$ ד. $i\cdot(i-1)$

ה. $(2i+3)\cdot i$ ו. $(5i-1)^2$

12) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2 i$.
ידוע כי $z_1 + z_2$ הוא ממשי וכי $z_1 - z_2$ הוא מדומה.

א. מצא קשר בין a_1 ל- a_2 וקשר בין b_1 ו- b_2 .

ב. הראה כי המכפלה $z_1 \cdot z_2$ היא ממשית.

תשובות סופיות:

1) א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$.

2) א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i ו. i .

3) א. $a=2\ ,\ b=5$ ב. $a=3\ ,\ b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}$
ד. $a=0\ ,\ b=7$ ה. $a=-4\ ,\ b=0$ ו. $a=0\ ,\ b=0$.

4) א. $z=-3+2i$ ב. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

5) $z=1.5+2.5i$.

6) א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i\ ,\ 1-2i$.

7) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8) $z=2i\ ,\ -3i$.

9) א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$.

10) א. $-1+5i$ ב. $1+3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2+2i$ ה. $-3+7i$ ו. $11-7i$

11) א. $16+30i$ ב. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ג. -25 ד. $-1-i$
ה. $-2+3i$ ו. $-24-10i$.

12) א. $a_1=a_2\ ,\ b_1=-b_2$ ב. הוכחה.

המספר הצמוד:

סיכום כללי:

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב $z=a+bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$ וערכו: $\bar{z}=a-bi$.

שאלות:

13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

14) חשב:

א. $\frac{11+2i}{2-i}$ ב. $\frac{3+7i}{2-5i}$ ג. $\frac{19-9i}{2-3i}$

15) נתון מספר $z=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$ ב. $\frac{z}{z+3}$ ג. $\frac{z+i}{z-i}$

16) המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור. מצא את a.

17) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.

הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

18) פתור את המשוואה הבאה: $3z-11=iz-7i$.

19) פתור את המשוואה הבאה: $iz+5=4i$.

20) פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו-w משתנים מרוכבים): $\begin{cases}3z+iw=5-4i\\5iz-2w=5+8i\end{cases}$.

21) פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו-b ממשיים:

א. $2a-3i=10+bi$

ב. $3a-8+5bi=2b-ai-3i$

22) פתור את המשוואה הבאה: $2z+7i=iz+\bar{z}-3$.

23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$

ב. $\sqrt{8+6i}$

24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$.

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$.

25) פתור את המשוואה הבאה: $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$.

26) פתור את המשוואה הבאה: $z^2-i\bar{z}+6=0$.

תשובות סופיות:

13) א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0.

14) א. $4+3i$ ב. $-1+i$ ג. $5+3i$.

15) א. $\frac{5}{29}+\frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17}-\frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i$.

16) $a=-\frac{3}{4}$.

17) שאלת הוכחה.

18) $z=4-i$.

19) $z=4+5i$.

20) $z=2-3i\ ,\ w=5+i$.

21) א. $a=5\ ,\ b=-3$ ב. $a=2\ ,\ b=-1$.

22) $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$.

23) א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$.

24) א. $z_{1,2}=i\ ,\ 1$ ב. $z_{1,2}=-2-i\ ,\ 2-5i$.

25) $z_1=-2-5i\ ,\ z_2=3i$.

26) $z_1=-3i\ ,\ z_2=2i$.

חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

שאלות:

27) נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2-2(m+2i)z+1=0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

תשובות סופיות:

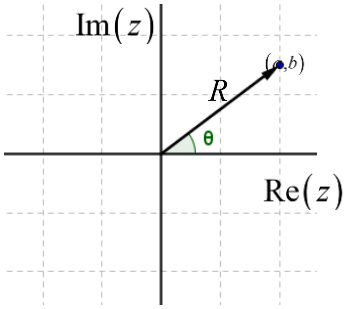
27) א. $m=-i$ ב. $m=-2i$.

מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב z ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה- x מייצג את a , גודל הערך הממשי של z , וציר ה- y מייצג את b , גודל הערך המדומה של z .

מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג: (a,b)

או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ- $(0,0)$)

והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס.

הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב

ויסומן: (R,θ). מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$z = R\cos\theta + i\cdot R\sin\theta = R(\cos\theta + i\sin\theta) = R\text{cis}\theta$.

נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $\tan\theta = \frac{b}{a}$, $R = \sqrt{a^2+b^2}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $b = R\sin\theta$, $a = R\cos\theta$.
- גודל של מספר מרוכב z יסומן: $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2+b^2}$.

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1\cdot z_2 = (R_1\text{cis}\theta_1)\cdot(R_2\text{cis}\theta_2) = R_1R_2\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1\text{cis}\theta_1}{R_2\text{cis}\theta_2} = \frac{R_1}{R_2}\text{cis}(\theta_1-\theta_2)$.

שאלות:

28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60°$ ב. $6\text{cis}135°$ ג. $4\text{cis}330°$

ד. $4\text{cis}(-30°)$ ה. $4\text{cis}690°$ ו. $8\text{cis}90°$

ז. $3\text{cis}270°$ ח. $\text{cis}180°$ ט. $\text{cis}0°$

29) הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$ ב. $\sqrt{3}-i$ ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ד. $3+4i$ ה. $6i$ ו. $-i$

ז. 4 ח. -1 ט. 1

י. 0

30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120°\cdot 3\text{cis}60°$ ב. $\text{cis}210°\cdot 5\text{cis}(-40°)$

ג. $\frac{12\text{cis}315°}{3\text{cis}90°}$ ד. $\frac{1}{2\text{cis}40°}$

ה. $6\text{cis}30°+2\text{cis}210°$

31) נתון המספר המרוכב $z=R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות R ו-θ את המספרים:

א. $\bar{z}$ ב. $1/z$ ג. $-z$

ד. $-\frac{1}{z}$ ה. iz ו. $z\cdot\bar{z}$

32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z+\bar{z}$ ב. $z\cdot\bar{z}$ ג. $\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}$

33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2-\bar{z}^2$ ב. $\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}$

34) הוכח את הטענות הבאות:

א. $z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz}$ ב. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1+\sqrt{3}i$.
מצא את קדקודיו האחרים.

37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס.
אחד מקודקודי המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא $30°$ חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

39) z הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה.
קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. $\bar{z}$ ב. $\frac{1}{z}$ ג. $\frac{z}{\bar{z}}$ ד. $z \cdot \bar{z}$

תשובות סופיות:

28) א. $1+\sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3}-2i$ ד. $2\sqrt{3}-2i$
ה. $2\sqrt{3}-2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1.

29) א. $\sqrt{2}\text{cis}45°$ ב. $2\text{cis}330°$ ג. $\text{cis}240°$ ד. $5\text{cis}53.13°$
ה. $6\text{cis}90°$ ו. $\text{cis}270°$ ז. $4\text{cis}0°$ ח. $\text{cis}180°$
ט. $\text{cis}0°$ י. 0.

30) א. -6 ב. $5\text{cis}170°$ ג. $4\text{cis}225°$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}(-40°)$
ה. $4\text{cis}30°$.

31) א. $R\text{cis}(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$ ג. $R\text{cis}(180°+\theta)$
ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180°+\theta)$ ה. $R\text{cis}(90°+\theta)$ ו. R^2.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) $1-i$, $-1-i$, $-1+i$, $1+i$.

36) $\sqrt{3}-i$, $-1-\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}+i$.

37) -2, $1-\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$.

38) 2, $-1+\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$.

39) א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל ג. על המעגל
ד. מחוץ למעגל.

נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב z בחזקת n נעזר בקשר: $(R\text{cis}\theta)^n = R^n\text{cis}(n\theta)$.

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש n-י של מספר מרוכב z השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

נבצע: $1 \le k \le n$: $z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 \,/\, \sqrt[n]{\ } \quad \Rightarrow \quad z_k = \sqrt[n]{R_0}\cdot\text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)$.

שאלות:

40) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $(2\text{cis}30°)^3$ ב. $(2\text{cis}14°)^5$ ג. $(1+i)^4$

ד. $(\sqrt{3}-i)^3$ ה. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

41) פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2 = 36\text{cis}120°$ ב. $z^4 = (9\text{cis}80°)^2$ ג. $z^5 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

42) מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

43) נתון המספר המרוכב $z = x+iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z| = 2$.

44) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה : $|z - 3i| = 5$.

45) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה : $|z + i| + |\bar{z} + i| = |1 + 3i|$.

תשובות סופיות:

40) א. $8i$ ב. $32\text{cis}70°$ ג. -4 ד. $-8i$ ה. 1.

41) א. $z_0 = 6\text{cis}60°$, $z_1 = 6\text{cis}240°$.

ב. $z_0 = 3\text{cis}40°$, $z_1 = 3\text{cis}130°$, $z_2 = 3\text{cis}220°$, $z_3 = 3\text{cis}310°$.

ג. $z_0 = \text{cis}12°$, $z_1 = \text{cis}84°$, $z_2 = \text{cis}156°$, $z_3 = \text{cis}228°$, $z_4 = \text{cis}300°$.

42) סכום : 0 , מכפלה : -1 .

43) $x^2 + y^2 = 4$.

44) $x^2 + (y-3)^2 = 25$.

45) $\frac{2x^2}{3} + \frac{2y^2}{5} = 1$.

שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7 = 13+3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3 = 5-9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5 = 32+16i$ והאיבר השני הוא $a_2 = 2-4i$.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.

ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

46) $S_{10} = 100-15i$.

47) א. $a_1 = 2+i$, $q = -2i$ ב. $S_5 = 20+25i$.

48) -2 , $2i$, 2 או $6-8i$, $4-2i$, 2.

שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

49) פתור את המשוואה: $z-\bar{z}+|z|=|2-i|^2-4i+\mathrm{Im}(z)$.

50) פתור את המשוואה: $\left|2-3^{x^2-x-1}i\right|=\sqrt{13}$.

51) פתור את המשוואה: $z^3=\bar{z}$.

52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים.
הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

54) נתון מספר מרוכב z, שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.
הוכח כי אם $z-\frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

55) הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1\mathrm{cis}\theta_1\cdot R_2\mathrm{cis}\theta_2=R_1R_2\mathrm{cis}(\theta_1+\theta_2)$.

56) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.
נתון: $\left|z^4-z^3\right|=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

57) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.
מצא את ערך הביטוי $z+iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

58) z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2-2\cos\theta\cdot z+1=0$.
הבע באמצעות θ את גודל הזווית $\sphericalangle z_1Oz_2$ (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

49) $z_1=3-4i$, $z_2=-3-4i$.

50) $x=2$, -1.

51) $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=-i$, $z_4=1$, $z_5=-1$.

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) שאלת הוכחה.

55) שאלת הוכחה.

56) $\arg(z)=30°$.

57) $z+iz=\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

58) 2θ.

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 16 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

תוכן העניינים

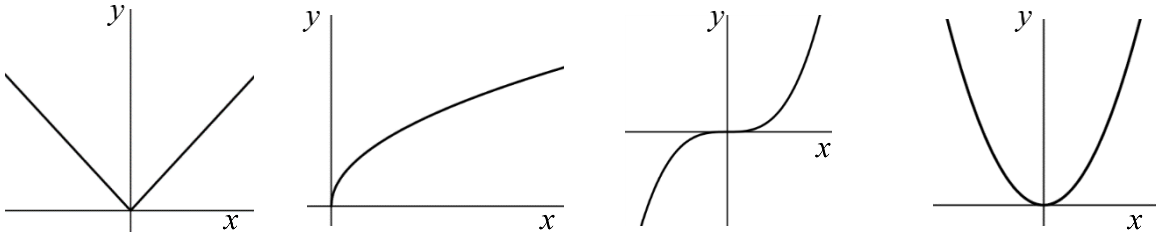
1. הקדמה כללית 250
2. גזירת פונקציות 251
3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה 257
4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה 258
5. שאלות עם פרמטרים 261
6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית 263

הקדמה כללית:

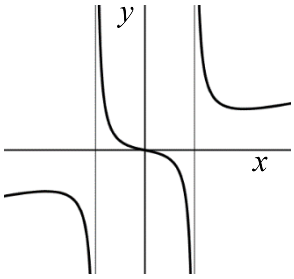
סיכום כללי:

פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x)=x^2$: הפונקציה $f(x)=x^3$: הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$: הפונקציה $f(x)=|x|$:



פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x)=\dfrac{5x^3+4x}{x^2-1}$:



שיפוע של פונקציה:

- השיפוע m של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1,y_1)$, כלומר: $m=f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1,y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

גזירת פונקציות:

סיכום כללי:

כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x)=ax^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot ax^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x)=a \Rightarrow f'(x)=0$.
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x)=u\pm v \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$.
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x)=u^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x)=u\cdot v \Rightarrow f'(x)=u'v+v'u$.
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$	ב. $f(x)=x^7$	ג. $f(x)=x^2$
ד. $f(x)=x$	ה. $f(x)=x^{-3}$	ו. $f(x)=x^{-1}$
ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$	ב. $f(x)=3x^7$	ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$	ה. $f(x)=8x$	ו. $f(x)=3x^{-2}$
ז. $f(x)=\frac{4}{x}$	ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$

ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$

ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $f(x)=7x^2+23x-6$

ד. $f(x)=6x^2+8x+4$

ה. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x^3$

ו. $f(x)=\frac{x^4}{8}+67$

5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$

ב. $f(x)=(x^3+6)^5$

ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$

ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

6) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$

ב. $f(x)=-\frac{2}{x}$

ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$

ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$

ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

7) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$

ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$

ד. $f(x)=3x^2\cdot x$

ה. $f(x)=x^2\cdot x^3$

ו. $f(x)=x(3x+7)$

ז. $f(x)=3x^3(3x-1)$

ח. $f(x)=(x-2)(2x^2+3)$

ט. $f(x)=(3x-2)(x^2+10x)$

י. $f(x)=(3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$

יא. $f(x)=x(x-2)(3x-4)$

8) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(x^2-4)^2$

ב. $f(x)=2x^3(3x+5)^2$

ג. $f(x)=(x^3+2)^2(x-1)^3$

ד. $f(x)=(x^2+1)^3(2x-1)^2$

9) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$

ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x}$

ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ז. $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$

ח. $f(x)=\frac{(x^2+3)^2}{x^2-2}$

ט. $f(x)=\frac{x^3-x^2}{2(1-x)}$

י. $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

10) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$

ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$

ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$

ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$

11) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x+1}$

ב. $f(x)=\sqrt{2x}$

ג. $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$

ד. $f(x)=\sqrt{10-3x}$

ה. $f(x)=\sqrt{2x^2+7x}$

ו. $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$

ז. $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$

ח. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$

ט. $f(x)=\frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$

י. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}$

יא. $f(x)=\frac{2x^3-x^2+x-5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

יב. $f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x}}$

יג. $f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$

יד. $f(x)=\frac{x^2+7}{\sqrt{x^2-5}}$

טו. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

טז. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

12) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=ax^4-bx$

ב. $f(x)=\frac{ax^2}{3}-\frac{x}{b}+c$

ג. $f(x)=\frac{x-2a}{x-4a}$

ד. $f(x)=a\sqrt{bx^2+c}$

13) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

ג. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ד. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ה. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ו. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

תשובות סופיות:

1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$

ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8.

ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$.

3) א. 0 ב. 0.

4) א. $3x^2+4x-3$ ב. $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$ ג. $14x+23$ ד. $12x+8$ ה. $x-3x^2$ ו. $0.5x^3$.

5) א. $15(5x-2)^2$ ב. $15x^2(x^3+6)^4$ ג. $6(x-x^2)(1-2x)$

ד. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$.

6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$

ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$.

7) א. $10x-14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$.

ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x+7$ ז. $36x^3-9x^2$ ח. $6x^2-8x+3$

ט. $9x^2+56x-20$ י. $36x^5+75x^4+24x^3-24x^2-40x-8$

יא. $9x^2-20x+8$.

8) א. $4x(x^2-4)$ ב. $30x^2(x+1)(3x+5)$ ג. $3(x-1)^2(x^3+2)(3x^3-2x^2+2)$

ד. $2(2x-1)(x^2+1)^2(8x^2-3x+2)$.

9) א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$

ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

ח. $\frac{2x(x^2+3)(x^2-7)}{(x^2-2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x+2)^2}$.

10) א. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$ ד. $\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$

ו. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

11) א. $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ ג. $\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$ ד. $-\frac{3}{2\sqrt{10-3x}}$ ה. $\frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$

ו. $6x-\frac{4}{\sqrt{x}}$ ז. $\frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}}$ ח. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ ט. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}}$ י. $\frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$

יא. $3\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{5}{x^2}$ יב. $-\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}}$ יג. $\frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$

יד. $\frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}}$ טו $-\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$ טז. $-\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$.

12) א. $4ax^3-b$ ב. $\frac{2ax}{3}-\frac{1}{b}$ ג. $\frac{-2a}{(x-4a)^2}$ ד. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$.

13) א. $f''(x)=\frac{4}{x^3}$, $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2}$.

ב. $f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$, $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}$.

ג. $f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$, $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3}$.

ד. $f''(x)=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$, $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$.

ה. $f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$, $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$.

ו. $f''(x)=\frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$, $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$

מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

14) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=2x^3-7x$ בנקודה $(2\ ,\ 2)$.

15) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$ בנקודה בה $x=-2$.

16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

תשובות סופיות:

14) $m=17$
15) $m=4$
16) $m=2$

מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x=-1$.

18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y=2$.

19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=x^2-2x-8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה-x.

20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$ ששיפועו 2.

21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$ בנקודה שבה $x=1$.

22) נתון כי הישר $2y-3x=3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=3\sqrt{x}$.
מצא את נקודת ההשקה.

23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=4$.

25) נתונה הפונקציה הבאה $f(x)=4x-2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x)=3x-\frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-x.

26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו 2-.

27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה-x זווית של $135°$.

29) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y=-\frac{1}{4}x^2-5$, $y=x^2$.

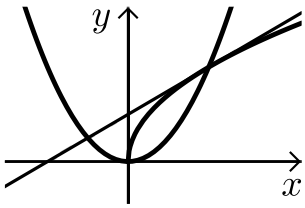
30) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y=2x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.

ב. מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

ג. חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2$.



א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.

ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

17) $y=24x+22$

18) $y=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$

19) $y=6x-24\ ,\ y=-6x-12$

20) $y=2x-3$

21) $y=-12x+9$

22) $(1\ ,\ 3)$

23) $y=-\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$

24) $y=22x-56$

25) א. $y=3x-1$ ב. $\left(\frac{1}{3}\ ,\ 0\right)$

26) $y=-2x+8$

27) $y=\frac{11}{16}x-\frac{15}{8}$

28) $y=-x+1\frac{1}{3}\ ,\ y=-x-1\frac{1}{3}$

29) $y=2x-1\ ,\ y=-2x-1$

30) א. $(1\ ,\ 2)$ ב. $y=-1.5x+3.5$ ג. $S=4\frac{1}{12}$.

31) א. $(1\ ,\ 1)\ ,\ (0\ ,\ 0)$ ב. $y=0.5x+0.5$ ג. $(-0.5\ ,\ 0.25)$.

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

32) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=ax^2-4x$ בנקודה שבה $x=3$ הוא 8.
מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

33) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$, $(a>0)$.
המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1.
מצא את ערך הפרמטר a.

34) נתונה הפונקציה: $y=x^3+a\sqrt{x}$ (a פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 5.
מצא את ערך הפרמטר a.

35) נתונה הפונקציה: $y=2\sqrt{x}-\frac{A}{x}$ (A פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 2.
מצא את ערך הפרמטר A.

36) הישר $y=4x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+3$.
מצא את b ואת נקודת ההשקה.

37) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y=2$ הוא -4.
מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

38) הישר $y=ax+\frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)=\frac{2}{x+c}$ בנקודה $x=0$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו-c.

39) הישר $y=3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+b$.
מצא את b ואת נקודת ההשקה.

40) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה $(1\ ,\ 6)$ הוא -6.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

41) לאילו ערכי k ישיק הישר $y=-5x+6$ לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2-4x+k$?
לכל ערך כזה של k מצא את נקודת ההשקה.

42) הפונקציות $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ משיקות זו לזו.
מצא את k ואת נקודת ההשקה.

תשובות סופיות:

32) $a=2\ ,\ y=8x-18$

33) $a=2$

34) $a=4$

35) $\mathrm{A}=1$

36) $(-1\ ,\ 5)\ ,\ y=4x+9$

37) $a=2\ ,\ y=-4x-2$

38) $a=-\frac{1}{8}\ ,\ c=4$

39) $b=4\ ,\ (4\ ,\ 12)$

40) $b=2\ ,\ a=6\ ,\ y=-6x+12$

41) $k=6:(1\ ,\ 1)$ או: $\left(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{13}{3}\right):k=\frac{158}{27}$.

42) $(1\ ,\ 1)\ ,\ k=1.5$

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

שאלות:

43) ענה על הסעיפים הבאים:

א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^2+1$ בנקודה שבה $x=t$.

ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1\ ,\ 1)$.

44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=5x-x^2$ העוברים דרך הנקודה $(3\ ,\ 7)$.

45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=x^2+5x-6$ העוברים דרך הנקודה $(0\ ,-10)$.

46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=12x-x^3$ העוברים דרך הנקודה $(2\ ,\ 24)$.

47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3\ ,\ 0)$.

48) מצא משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-2}}$ העוברים דרך הנקודה $(2\ ,\ 3)$.

תשובות סופיות:

43) א. $y=2tx-t^2+1$ ב. $t=0,-2$.

44) $y=-3x+16$, $y=x+4$

45) $y=x-10$, $y=9x-10$

46) $y=-15x+54$, $y=12x$

47) $y=-\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$

48) $y=-\frac{1}{16}x+\frac{3}{4}$

49) $y=-x+5$

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 17 - חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון

תוכן העניינים

1. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים 265
2. בעיות קיצון בהנדסת המישור 267
3. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים 271
4. בעיות קיצון בהנדסת המרחב 275
5. בעיות קיצון עם תשובה נתונה 277
6. בעיות קיצון שונות בהנדסת המישור 278
7. בעיות קיצון שונות בהנדסת המרחב 282
8. בעיות קיצון שונות בפונקציות וגרפים 284

בעיות קיצון יסודיות עם מספרים:

סיכום כללי:

שלבי עבודה:

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x .
- נוודא שערך ה- x מהסעיף הקודם הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "y (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

שאלות:

1) מבין כל זוגות המספרים שסכומם 14 מצא את הזוג שמכפלתו מקסימלית.

2) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני.
מצא מהם המספרים אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.

3) מצא את המספר החיובי שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו הסכום המתקבל יהיה מינימלי.

4) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.

א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?

ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?

ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?

5) x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x+6y=60$.

א. הבע את y באמצעות x .

ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?

ג. מהי המכפלה הנ"ל?

תשובות סופיות:

1) 7 , 7.
2) 8 , 8 , 8.
3) 1.
4) א. 12, 12, 12 ב. 8, 12, 16 ג. מקרה א'.
5) א. $y=10-\frac{x}{6}$ ב. $x=30$, $y=5$ ג. $M=22500$.

בעיות קיצון בהנדסת המישור:

שאלות:

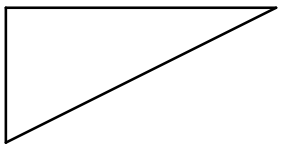
6) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם a, מצא את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

ב. הוכח: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.

8) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ.



א. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי שטח המשולש יהיה מקסימלי?

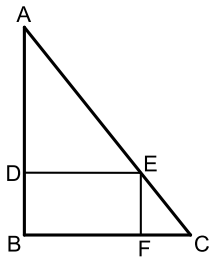
ב. מהו השטח המקסימלי?

ג. מה יהיה אורך היתר במשולש במקרה זה?

9) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.

נתון: AB = 20 ס"מ , BC = 16 ס"מ.

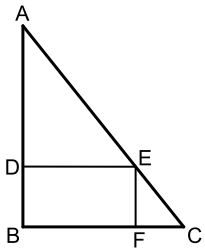
מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



10) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.

נתון: $AB=a$, $BC=b$.

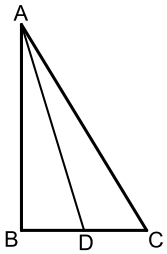
מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



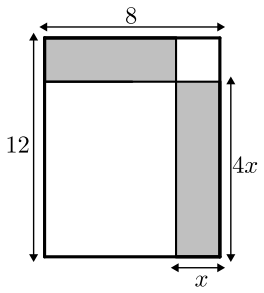
11) במשולש ישר הזווית ABC ($\sphericalangle B=90°$), AD הוא תיכון לניצב BC

ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ.

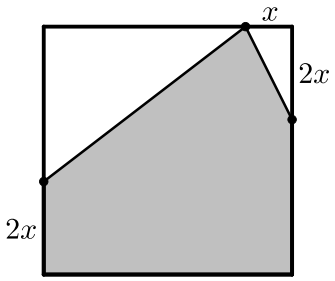
מצא מה צריכים להיות אורכי הניצבים עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



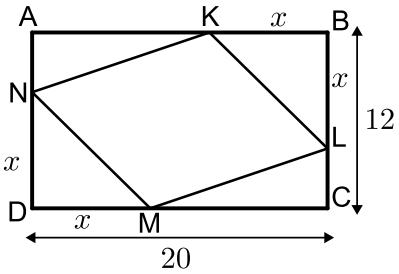
12) נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ כמתואר באיור. מקצים קטעים באורכים של x ו-$4x$ על צלעות המלבן כך שנוצרים המלבנים המסומנים.
מצא את x עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.



13) נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ.
מקצים קטע שאורכו x על הצלע העליונה ושני קטעים שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות כמתואר באיור כך שנוצר המחומש המסומן.
מצא מה צריך להיות ערכו של x עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.



14) הנקודות K , L , M , N מקצות קטעים שווים במלבן ABCD כך ש: $BK = BL = DM = DN = x$.
צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.

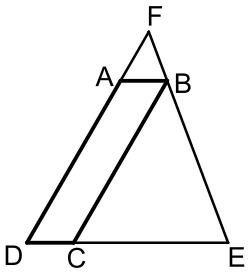


א. הבע באמצעות x את סכום שטחי המשולשים: $\Delta AKN + \Delta KBL + \Delta CLM + \Delta DNM$.

ב. מצא מה צריך להיות x כדי ששטח המרובע LKNM יהיה מקסימלי.

ג. מה הוא השטח של המרובע LKNM במקרה זה?

15) המרובע ABCD הוא מקבילית.
מהקדקוד B מעבירים את הצלע EF הנפגשת עם המשכי הצלעות DC ו-AD.
ידוע כי מידות המקבילית הן: AB = 2 ס"מ , AD = 8 ס"מ.
מסמנים את אורך הצלע DE ב-x.

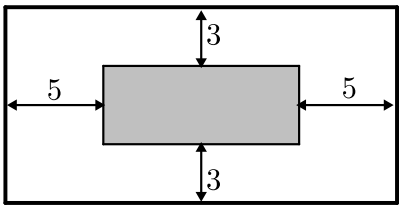


א. הבע באמצעות x את אורך הצלע DF.

ב. מצא את x עבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.

ג. מה הוא הסכום המינימלי?

16) חיים הוא אחד מעובדי חברת "דפוס יהלום בע"מ".
תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).

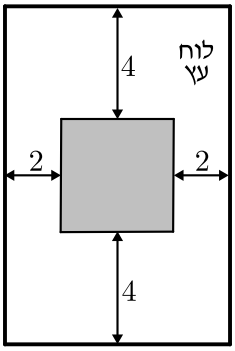


יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי ששאל אותו את השאלה הבאה: "יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.
מה הן המידות של גלויה אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?".

א. עזור לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראה דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

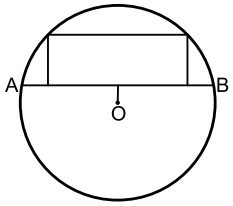
17) אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה: יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ ובקצוות העליון והתחתון –4 ס"מ (ראה איור).
כדי לבחור את מידות לוח העץ, אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).



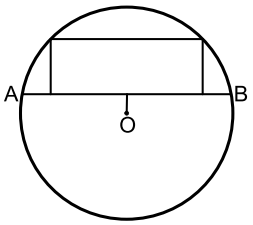
א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

18) במעגל שמרכזו O ורדיוסו $10\sqrt{5}$ ס"מ העבירו מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

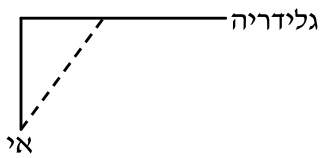


19) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא a.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



20) שני הולכי רגל יוצאים בו זמנית לדרכם, האחד מעיר A מערבה לעיר B והשני מעיר B דרומה לעיר C.
המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.
מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש ומהירות הרוכב השני 2 קמ'
כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי?
מצא גם את המרחק המינימלי.

21) אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק״מ מהחוף.
על החוף, במרחק של 3 ק״מ מהנקודה הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה.
האדם שוחה במהירות של 8 קמ״ש ורץ על החוף במהירות של 10 קמ״ש.
לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?



22) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת.
שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ״ר.
מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר.
מה צריכים להיות ממדי המרפסת כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

תשובות סופיות:

6) 8 ס״מ.

7) א. $a/3$ ב. הוכחה.

8) א. 6 ס״מ ו-6 ס״מ ב. 18 סמ״ר ג. $6\sqrt{2}\approx 8.48$ ס״מ.

9) 80 סמ״ר $= S$.

10) $\frac{ab}{4}$ יחידות שטח.

11) 4 ס״מ, 16 ס״מ.

12) $x=2.75$.

13) $x=6$.

14) א. $2x^2-32x+240$ ב. $x=8$ ג. 128 סמ״ר $= S$.

15) א. $\mathrm{DF}=\frac{8x}{x-2}$ ב. $x=6\ ,\ L=\frac{x^2+6x}{x-2}$ ג. $L=18$.

16) א. 6 ס״מ על 10 ס״מ. ב. 12 ס״מ על 20 ס״מ.

17) א. 11 ס״מ על 22 ס״מ. ב. $S=98$.

18) 92 ס״מ.

19) $2\sqrt{5}R-2a$ יחידות אורך.

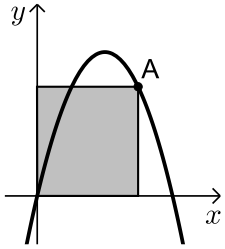
20) 4 שעות, המרחק: $\sqrt{80}$ ק״מ.

21) $2\frac{1}{3}$ ק״מ.

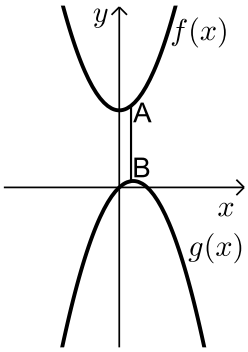
22) $4\cdot 6$.

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:

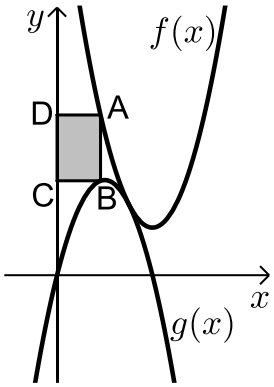
שאלות:



23) נתונה הפונקציה $f(x)=6x-x^2$.
מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט.
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

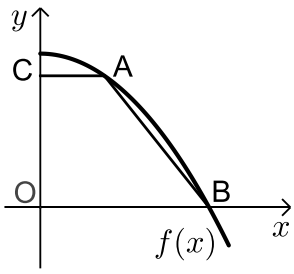


24) נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2+12$ ו- $g(x)=2x-x^2$
כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.
מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



25) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=x^2-8x+18$ ו- $g(x)=-x^2+4x$.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y. מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y כך שנוצר מלבן (המסומן).
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t.

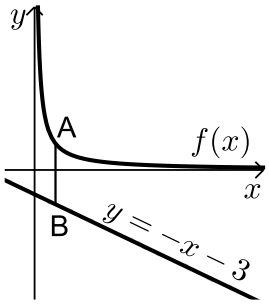
א. הבע באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
ב. מצא את ערכו של t עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



26) נתונה הפונקציה: $f(x)=36-x^2$.
על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A.
מהנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר ה- x שחותך את ציר ה- y בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ו-O ראשית הצירים.

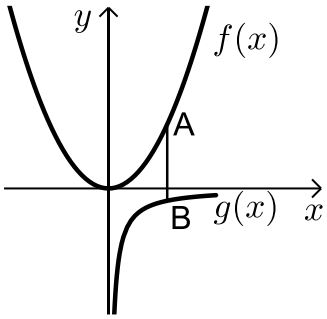
א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?

27) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4}{x}$ ונתון הישר: $y=-x-3$.



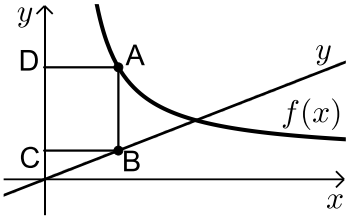
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$
והנקודה B נמצאת על גרף הישר כך שהקטע AB
מקביל לציר ה- y.
מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי
שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.

28) נתונות שתי פונקציות: $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ ו- $g(x)=-\frac{1}{x}$.



מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$
ונקודה B על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB
מקביל לציר ה- y.
מצא את שיעורי הנקודות A ו-B עבורן אורך
הקטע AB מינימלי.

29) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

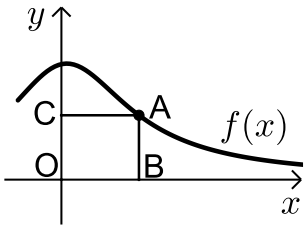


הפונקציה: $f(x)=\frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y=\frac{9x}{25}$.
הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של
הפונקציות כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.
מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- y כך שנוצר המלבן ABCD.
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t.

א. הבע באמצעות t את היקף המלבן ABCD.
ב. מצא את t עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.
ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

30) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x-1}$ והישר $y=2x$.
בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן.
מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

31) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+12}{x^2+3}$ בתחום: $x\geq 0$.

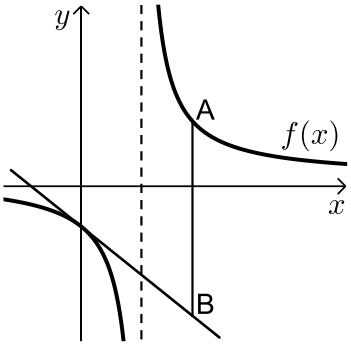


מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABCO כמתואר באיור.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.

32) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+10}{x-2}$.



מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y.

א. מצא את משוואת המשיק.

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

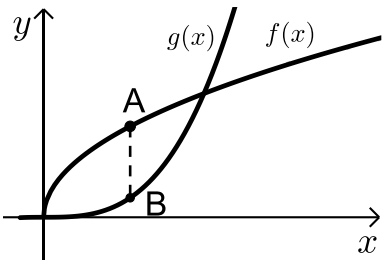
ב. מצא את שיעורי הנקודה A עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

33) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

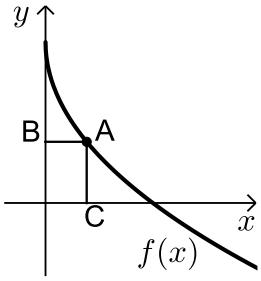
מצא שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.

34) נתונות הפונקציות $f(x)=2\sqrt{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{3}x^3$.



את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



35) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=6-3\sqrt{x}$.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון.
מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C כמתואר באיור.
נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A ב-t.

א. הבע באמצעות t את סכום הקטעים AC+AB.

ב. מצא את ערכו של t עבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.

36) נתונות הפונקציות: $f(x)=1-x^2$ ו- $g(x)=bx^2$ $(b>0)$.
הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B.
מצא את ערכו של b שבעבורו הקטע AO מינימלי (O– ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

23) $A(4,8)$.

24) $A(0.5,12.25)$.

25) א. $S=2t^3-12t^2+18t$ ב. $t=1$ ג. $S=8$.

26) א. $A(2,32)$ ב. $S=128$.

27) $A(2,2)$.

28) $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$, $B(1,-1)$.

29) א. $P=\frac{1.28t^2+0.72t+16}{t-1}$ ב. $t=4\frac{3}{4}$ ג. $P=$ 12.88 ס"מ.

30) $1\cdot 2$.

31) א. $A(2,2)$ ב. $A(0,4)$.

32) א. $y=-3x-5$ ב. $A(4,7)$ ג. $AB=24$.

33) $\left(\sqrt{3},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$.

34) $A(1,2)$.

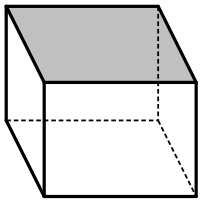
35) א. $l=t+6-3\sqrt{t}$ ב. $t=2.25$.

36) $b=1$.

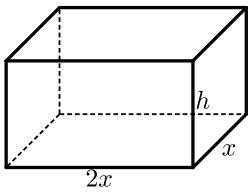
בעיות קיצון בהנדסת המרחב:

שאלות:

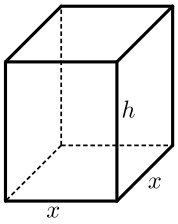
37) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר.
מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.



38) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח פניה (ללא המכסה) הוא 75 סמ"ר.
מצא את אורך צלע הבסיס של התיבה שנפחה הוא מקסימלי.



39) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה כמתואר באיור.
ידוע כי גובה התיבה h וצלע המלבן הקטנה x מקיימים: $x+h=9$.
מצא מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה כדי שנפחה יהיה מקסימלי.

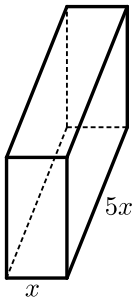


40) נתונה תיבה שגובהה הוא h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו היא x.
נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים: $4x+h=63$.

א. הבע את h באמצעות x.

ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות x.

ג. מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח הפנים יהיה מקסימלי?

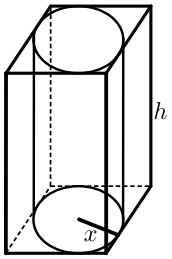


41) ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק. יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5 מרוחבו כמתואר באיור הסמוך. כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת ולכן הוא רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח שעליו להשתמש בכדי להשיג את מבוקשו.
מצאו את כמות הפח המינימלית.

42) לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה דרושים שני חומרים להם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון.
מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

43) מכל הגלילים הישרים שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k מצא את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.

44) באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- x וגובהו ב- h.
ידוע כי הסכום של x ו- h הוא 12 ס"מ.



א. הבע באמצעות x את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע באמצעות x את נפח הגליל.

ii. הבע באמצעות x את נפח התיבה.

ג. מצא את x עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

45) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא k ושטח המעטפת שלה הוא S.
הוכח: $S < 2k^2$.

תשובות סופיות:

37) $4\cdot4\cdot4$ ס"מ.

38) 5 ס"מ.

39) בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.

40) א. $h = 63 - 4x$ ב. $p = -14x^2 + 252x$ ג. $x = 9$.

41) 3 ס"מ, 15 ס"מ ו-5 ס"מ.

42) $8\cdot6\cdot3$ ס"מ.

43) $\frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח $= V$.

44) א. $2x$ ב. i. $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$ ii. $V = 48x^2 - 4x^3$
ג. $x = 8$.

45) הוכחה.

בעיות קיצון עם תשובה נתונה:

שאלות:

בעיות קיצון בהנדסת המרחב:

1) נתונים שני מספרים חיוביים p ו- q שסכומם a.

הראה שכאשר מתקיים $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$ ערך הביטוי $p^n q^m$ (n ו- m טבעיים) מקסימלי.

2) הוכח שמכל החרוטים הישרים שנפחם πk סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו $\sqrt[3]{6k}$ ס"מ.
(שטח מעטפת של חרוט הוא πRl , כאשר l הוא הקו היוצר של החרוט).

בעיית קיצון עם תנועה:

3) מהירותו של רכב היא v קמ"ש ועליו לנסוע דרך של S ק"מ.

לרכב יש הוצאות נסיעה של $\frac{v}{400}$ ₪ לכל ק"מ נסיעה ו- $\frac{v^2}{200}+48$ ₪ לכל שעת נסיעה.
הראה שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

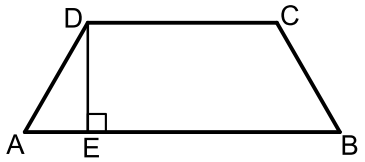
תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.

בעיות קיצון שונות בהנדסת המישור:

שאלות:

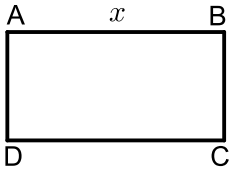
1) בטרפז שווה-שוקיים ABCD (AB||CD) אורך השוק הוא 4 ס"מ ואורך הבסיס הקטן הוא 6 ס"מ.
DE הוא הגובה מקדקוד D (ראה ציור).
מה צריך להיות אורך הקטע AE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?



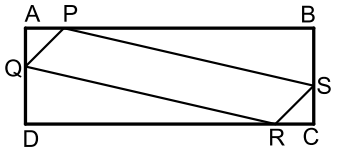
2) נתון מלבן ABCD .
נסמן ב- x את אחת מצלעות המלבן (ראה ציור).
אם היקף המלבן הוא 60 ס"מ:

א. בטא באמצעות x את שטח המלבן.

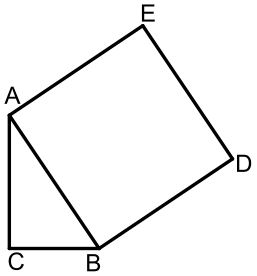
ב. אם היקף המלבן הוא p מצא מה צריכות להיות אורכי צלעות המלבן כדי ששטחו יהיה מקסימלי.
(הבע את אורכי הצלעות באמצעות p).



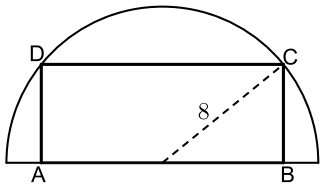
3) נתון מלבן ABCD כך ש- 5 ס"מ $AD = BC =$, 10 ס"מ $= AB = CD$. על צלעות המלבן מקצים קטעים: $AP = AQ = CS = CR = x$ (ראה ציור).
מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח המקבילית PQRS יהיה מקסימלי?



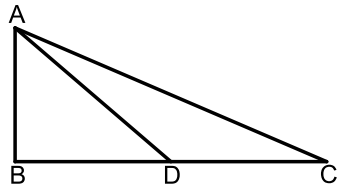
4) במשולש ישר זווית ΔABC $(\sphericalangle C = 90°)$ סכום אורכי הניצבים הוא 8 ס"מ. על היתר AB בונים ריבוע ABDE.
מה צריכים להיות אורכי הניצבים כדי ששטח המחומש AEDBC יהיה מינימלי?



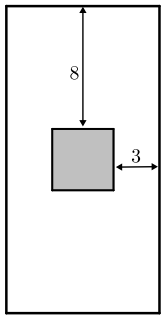
5) בחצי עיגול שרדיוסו 8 ס"מ חוסמים מלבן ABCD , כך שהצלע AB של המלבן מונחת על הקוטר,
והקדקודים C ו-D מונחים על הקשת (ראה ציור).
מה צריך להיות אורך הצלע AB כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



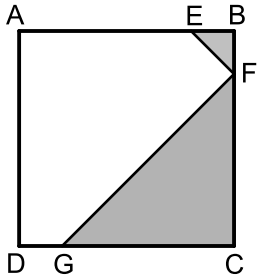
6) במשולש ישר-זווית ΔABC $(\sphericalangle B = 90°)$,
סכום אורכי הניצבים הוא 30 ס"מ.
AD הוא תיכון לניצב BC.
חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים,
על מנת שריבוע אורך התיכון יהיה מינימלי.



7) בחוברת פרסום, שטח כל עמוד הוא 600 סמ"ר.
רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו הוא 8 ס"מ,
ורוחב השוליים בצדדים הוא 3 ס"מ.
מצא מה צריך להיות האורך והרוחב של כל עמוד כדי שהשטח
המיועד לדפוס יהיה מקסימלי (השטח המסומן בציור).



8) בריבוע ABCD הנקודות E , F , G נמצאות על
הצלעות AB , BC , DC בהתאמה, כך
ש- BE = BF , CF = CG (ראה ציור).
נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ.



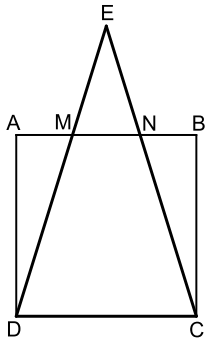
א. סמן ב- x את BF ואת BE , והבע באמצעות x
את הסכום של שטחי המשולשים EBF ו- FCG
(השטח המסומן בציור)

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

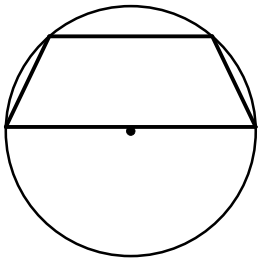
i. מצא את x שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא מינימלי.

ii. חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים.

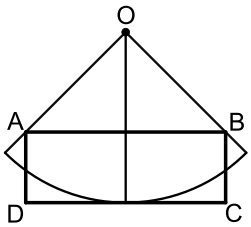
9) נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ.
E היא נקודה כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC הוא
שווה שוקיים (ED = EC).
שוקי המשולש חותכות את הצלע AB בנקודות M ו- N (ראה ציור).
מצא מה צריך להיות אורך הקטע AM כדי שהסכום של
שטחי המשולשים EMN , AMD , BNC יהיה מינימלי.



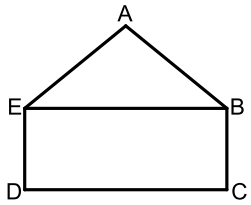
10) נתון מעגל שרדיוסו R. במעגל זה חסום טרפז שו"ש,
כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר במעגל (ראה ציור).
מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה,
הבע באמצעות R את אורך הבסיס הקטן בטרפז
ששטחו מקסימלי.



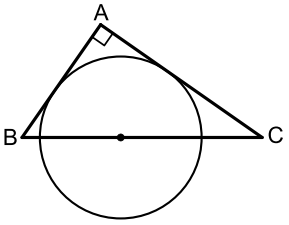
11) נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו O ורדיוסו 10 ס״מ.
בונים מלבן ABCD, כך שרבע המעגל משיק לצלע DC
בנקודת האמצע שלה, והקדקודים A ו-B נמצאים על
הרדיוסים התוחמים את הגזרה (ראה ציור).
מבין כל האלכסונים של המלבנים ABCD שנוצרים באופן
זה, מצא את אורך האלכסון הקצר ביותר.



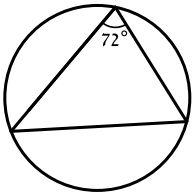
12) ABCDE הוא מחומש המורכב ממשולש ABE
וממלבן EBCD (ראה ציור).
נתון: 2 ס״מ = BC, 4 ס״מ = AE =AB.
מצא את השטח של המחומש ששטחו מקסימלי.



13) מתבוננים בכל המשולשים ישרי הזווית ABC
החוסמים חצי מעגל שרדיוסו R כמתואר בציור.
מהן זוויות המשולש שסכום הניצבים שלו הוא מינימלי?



14) במעגל שרדיוסו R חסומים משולשים כך שהגודל
של הזווית בכל אחד מהמשולשים הוא $\frac{2\pi}{5}$.
מצא את הזוויות במשולש בעל ההיקף המקסימלי.



תשובות סופיות:

1) $AE =$ 1.7 ס"מ.

2) א. $x(30-x)$ ב. כל צלע שווה ל- $0.25p$.

3) $x =$ 3.75 ס"מ.

4) $AC = BC = 4$.

5) $AB = 2\sqrt{32}$.

6) $BC =$ 24 ס"מ, $AB =$ 6 ס"מ.

7) אורך: 40 ס"מ, רוחב: 15 ס"מ.

8) א. $S = x^2 - 6x + 18$ ב.i. $x = 3$ ב. ii. 9 סמ"ר.

9) $AM = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

10) בסיס קטן $= R$.

11) $4\sqrt{5}$ ס"מ.

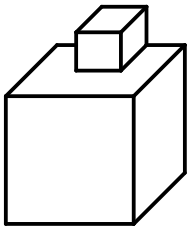
12) $12\sqrt{3}$ סמ"ר.

13) $90°$, $45°$, $45°$.

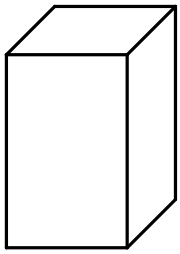
14) $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{3}{10}\pi$, $\frac{3}{10}\pi$.

בעיות קיצון שונות בהנדסת המרחב:

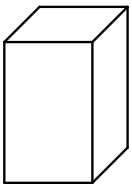
שאלות:



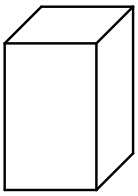
15) גובהו של "מגדל" הבנוי משתי קוביות (לאו דווקא שוות) הוא 8 ס"מ.
מה צריך להיות אורך המקצוע של הקובייה התחתונה כדי שנפח המגדל (סכום נפחי הקוביות) יהיה מינימלי?



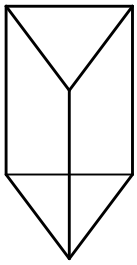
16) בונים תיבה שגובהה y ס"מ, ובסיסה ריבוע, שאורך צלעו x ס"מ (ראה ציור), כך שההיקף של כל אחת מהדפנות הצדדיות שווה ל-12 ס"מ.
מה צריך להיות אורך צלע הבסיס כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?



17) יש לבנות תיבה פתוחה מלמעלה, שבסיסה ריבוע ושטח פניה הוא 75 סמ"ר (במקרה זה שטח הפנים מורכב מבסיס אחד ומארבע פאות צדדיות). מכל התיבות שאפשר לבנות, מצא את ממדי התיבה (צלע הבסיס וגובה) שנפחה מקסימלי.



18) יש להכין מחוט תיל "שלד" (מסגרת) של תיבה, שבסיסה ריבוע ונפחה 1000 סמ"ק.
מהו האורך המינימלי של החוט הנחוץ ליצירת התיבה?

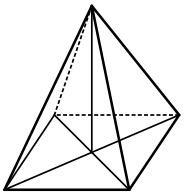


19) מחוט שאורכו a ס"מ יש לבנות מנסרה משולשת ישרה, שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. מצא איזה חלק מאורך החוט יש להקצות לצלע הבסיס x ואיזה חלק לגובה y כדי שיתקיים (בטא ע"י a):

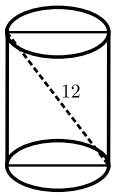
א. שטח המעטפת של המנסרה יהיה מקסימלי.

ב. נפח המנסרה יהיה מקסימלי.

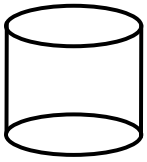
20) מכל הפירמידות המרובעות, המשוכללות והישרות, שאורך המקצוע הצדדי שלהן הוא a, מצא את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.



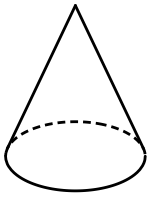
21) מכל הפירמידות הישרות, שבסיסן ריבוע ושטח הפנים שלהן הוא 200 סמ"ר, חשב את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.



22) אלכסון החתך הצירי של גליל ישר הוא 12 ס"מ (ראה ציור).
מצא מה צריכים להיות גובה הגליל ורדיוס בסיסו כדי שנפחו יהיה מקסימלי.



23) נתון מיכל גלילי פתוח מלמעלה שקיבולו 64 מ"ק.
המיכל עשוי כולו מפח.
הראה כי שטח הפח הוא מינימלי כאשר רדיוס הבסיס הוא $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ מטר.



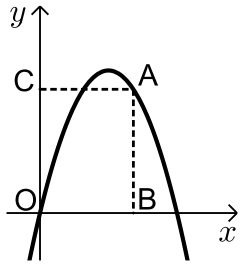
24) מבין כל החרוטים שאורך הקו היוצר שלהם הוא 10 ס"מ (ראה ציור), מהו נפח החרוט שנפחו מקסימלי?

תשובות סופיות:

15) 4 ס"מ.
16) 4 ס"מ.
17) צלע הבסיס: 5 ס"מ, גובה: 2.5 ס"מ.
18) 120 ס"מ.
19) א. $x=\frac{1}{12}a$, $y=\frac{1}{6}a$ ב. $x=y=\frac{1}{9}a$.
20) $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$.
21) $\frac{500}{3}$ סמ"ק.
22) גובה: $\sqrt{48}$ ס"מ. רדיוס: $\sqrt{24}$ ס"מ.
23) הוכחה.
24) 403.1 סמ"ק.

בעיות קיצון שונות בפונקציות וגרפים:

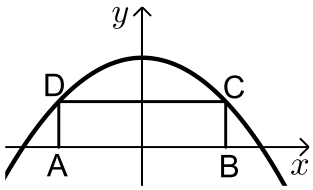
שאלות:



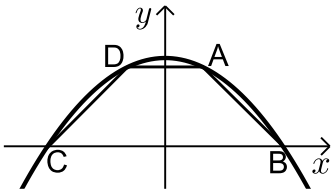
25) מנקודה A , הנמצאת על גרף הפונקציה $y=-x^2+5x$,
מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן ABOC (ראה ציור).

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי?



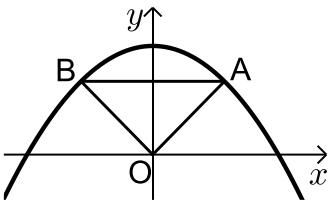
26) בפרבולה $y=9-x^2$ חוסמים מלבן ABCD ,
כך שהצלע AB מונחת על ציר ה- x (ראה ציור).
מה צריך להיות אורך הצלע CD כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



27) טרפז ABCD חסום בין גרף הפרבולה $y=9-x^2$ לבין ציר ה- x (ראה ציור).

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABCD יהיה מקסימלי?

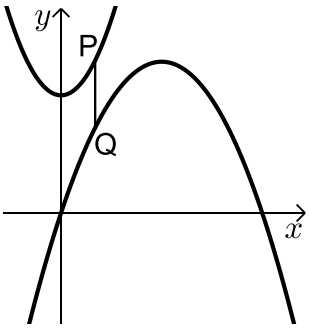
ב. חשב את השטח המקסימלי של טרפז ABCD.



28) נתונה הפרבולה $y=-x^2+12$.
ישר המקביל לציר ה- x חותך את הפרבולה בנקודות A ו- B (ראה ציור).
מחברים את הנקודות A ו- B עם ראשית הצירים, O.

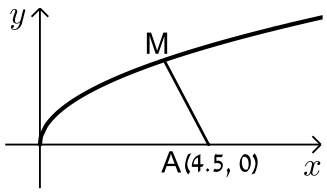
א. מה צריך להיות אורך הקטע AB כדי ששטח המשולש AOB יהיה מקסימלי?

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB ?



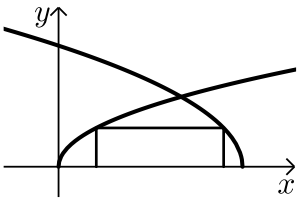
29) נתונים הגרפים של שתי פרבולות: $y=\frac{1}{2}x^2+7$ ו- $y=-\frac{1}{4}x^2+3x$.
קו מקביל לציר ה- y חותך את שתי הפרבולות בנקודות P ו- Q (ראה ציור). מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה, מצא את האורך המינימלי של הקטע PQ.

30) נתון גרף הפונקציה $y=\sqrt{x}$.
על ציר ה-x נתונה הנקודה $A(4.5,0)$ (ראה ציור).
מצא על גרף הפונקציה נקודה M, כך שריבוע המרחק AM יהיה מינימלי.

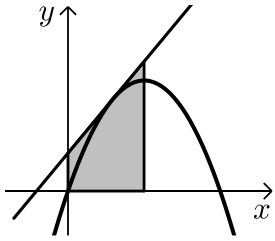


31) מצא על הישר $y=3x-4$ את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $(0,1)$.

32) בציור שלפניך מתוארים הגרפים של
הפונקציות: $f(x)=\sqrt{3x}$, $g(x)=\sqrt{36-6x}$.
מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות ובין ציר ה-x , כמתואר בציור.
מצא את השטח הגדול ביותר האפשרי למלבן שחסום באופן זה.



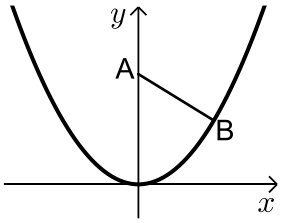
33) דרך איזו נקודה על הפרבולה $y=-x^2+2x$ צריך להעביר משיק, כדי ששטח הטרפז, הנוצר על ידי המשיק והישרים: $x=1$, $x=0$ ו-$y=0$
(השטח המסומן שבציור) יהיה מינימלי?



34) נקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $y=x^2$ ברביע הראשון.
A היא הנקודה $(0,a)$ כאשר ידוע כי $a>0.5$ (ראה ציור).

א. בטא באמצעות a את שיעורי הנקודה B, שעבורה המרחק AB הוא מינימלי.

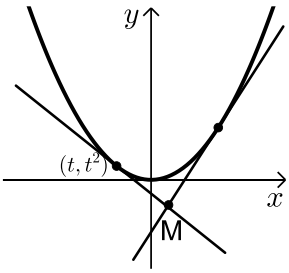
ב. מצא עבור איזה ערך של a המרחק המינימלי הוא 2.



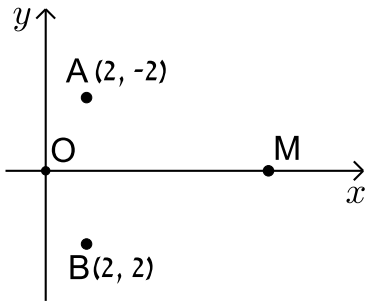
35) נתונה הפרבולה $y=x^2$, ונתון משיק לפרבולה שמשוואתו היא $y=6x-9$. בנקודה (t,t^2) שעל הפרבולה מעבירים משיק נוסף לפרבולה.
המשיקים נחתכים בנקודה M (ראה ציור).

א. הבע את משוואת המשיק הנוסף באמצעות t .

ב. מצא את t שעבורו אורך הקטע, המחבר את הנקודה M עם קדקוד הפרבולה יהיה מינימלי.



36) במערכת צירים נתונות הנקודות $A(2,2)$ ו-$B(2,-2)$.
ראשית הצירים היא בנקודה O. M היא נקודה על ציר ה-x בתחום $x>0$.
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה M,
כדי שהסכום: OM + MA + MB יהיה מינימלי?



תשובות סופיות:

25) א. $A(3,6)$ ב. $A(0,0)$ או $A(5,0)$.

26) $CD=2\sqrt{3}$.

27) א. $A(1,8)$ ב. 32.

28) א. $AB=4$ ב. $S_{\Delta AOB}=16$.

29) $PQ=4$.

30) $M(4,2)$.

31) $(1.5,0.5)$.

32) 8.

33) $(0.5,0.75)$.

34) א. $B\left(\sqrt{\frac{2a-1}{2}},\frac{2a-1}{2}\right)$ ב. 4.25.

35) א. $y=2xt-t^2$ ב. $t=-\frac{3}{37}$.

36) $M(0.845,0)$.

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 18 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים 287
2. אינטגרלים עם חילוק פולינומים 290
3. אינטגרלים עם זיהוי מבנים 292
4. אינטגרלים טריגונומטריים 293
5. אינטגרלים מעריכיים 297
6. אינטגרלים לוגריתמיים 299
7. אינטגרלים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי ..... (ללא ספר)
8. מציאת פונקציה קדומה 301
9. מציאת פונקציה קדומה כאשר נתונה נגזרת שנייה 303
10. מציאת פונקציה קדומה עם פונקציות טריגוונמטריות 304

אינטגרלים מידיים:

סיכום כללי:

- אינטגרציה של פונקציה פולינומית: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ , \ (n \neq -1)$.
- הכפלה בקבוע a : $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c \ , \ (n \neq -1)$.
- חיבור וחיסור איברים: $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
- אינטגרציה של ביטוי ליניארי בחזקה: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\cdot a} + c \ , \ (n \neq -1)$.

שאלות:

1) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^3 dx$

ב. $\int 12x^5 dx$

ג. $\int x^4 dx$

ד. $\int 2x^3 dx$

ה. $\int \frac{2}{3}x^5 dx$

ו. $\int 7dx$

ז. $\int \left(\frac{5}{6}x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3}\right)dx$

ח. $\int \left(\frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b\right)dx$

2) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{-3} dx$

ב. $\int \frac{1}{x^3} dx$

ג. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a}\right)dx$

ד. $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx$

3) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{\frac{1}{2}}dx$

ב. $\int \sqrt{x}dx$

ג. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

ד. $\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\right)dx$

4) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int (5x-1)^3\,dx$

ב. $\int 3(2-7x)^4\,dx$

ג. $\int \frac{18}{(6x+5)^2}dx$

ד. $\int \frac{1}{\sqrt{6x-3}}dx$

ה. $\int \sqrt{ax+b}dx$

5) מצא את האינטגרלים הבאים (שאלות מסכמות שונות):

א. $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$

ב. $\int (2x^2-x+1)dx$

ג. $\int (x^2+1)^2\,dx$

ד. $\int (x^2+1)(x+2)dx$

ה. $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2}dx$

ו. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$

ז. $\int (x^2-2x+1)^{10}\,dx$

ח. $\int \frac{4}{(x-2)^5}dx$

ט. $\int \sqrt[3]{4x-10}\,dx$

י. $\int \frac{x}{(x-1)^4}dx$

יא. $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}dx$

יב. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}dx$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{x^4}{4}+c$ ב. $2x^6+c$ ג. $\frac{x^5}{5}+c$ ד. $\frac{x^4}{2}+c$ ה. $\frac{x^6}{9}+c$ ו. $7x+c$

ז. $\frac{x^5}{6}+4x^4-\frac{x^3}{6}+2x^2-\frac{1}{3}x+c$ ח. $\frac{x^4}{5}-\frac{ax^3}{3}-\frac{ax^2}{b}+bx+c$.

2) א. $-\frac{x^{-2}}{2}+c$ ב. $-\frac{1}{2x^2}+c$ ג. $-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{a}{2x^2}+\frac{x^2}{2a}+c$ ד. $2x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+c$.

3) א. $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$ ב. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$ ג. $2\sqrt{x}+c$ ד. $8\sqrt{x}+2\sqrt{x^3}+c$.

4) א. $\frac{(5x-1)^4}{20}+c$ ב. $-\frac{3(2-7x)^5}{35}+c$ ג. $-\frac{3}{6x+5}+c$

ד. $\frac{\sqrt{6x-3}}{3}+c$ ה. $\frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a}+c$.

5) א. $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$ ב. $\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+c$ ג. $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$

ד. $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$ ה. $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$

ו. $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+c$ ז. $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$

ח. $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$ ט. $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$

י. $-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$ יא. $-\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$

יב. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$.

אינטגרלים עם חילוק פולינומים:

סיכום כללי:

בחילוק פולינום $p(x)$ בפולינום $q(x)$ (נכתב: $\overline{p(x)}|q(x)$) יש לבצע 4 שלבים:

1) חילוק האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$ באיבר במעלה הגבוהה ביותר של $p(x)$.
2) רישום תוצאת החילוק בצד והכפלתה בכל הפולינום המחלק $q(x)$.
3) חיסור של תוצאת ההכפלה בפולינום המחולק $p(x)$.
4) חזרה לשלב הראשון כאשר מבצעים את חילוק האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$ בתוצאת החיסור.

התהליך מסתיים כאשר לא ניתן לחלק עוד.
במידה ותוצאת החיסור האחרונה מניבה ביטוי שמעלתו קטנה משל האיבר המחלק ב-$q(x)$ אז נתייחס לביטוי זה כאל שארית החלוקה.

שאלות:

בצע את חילוק הפולינומים הבאים:

1) $\frac{x^2-5x-14}{x+2}$

2) $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}$

3) $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}$

4) $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}$

5) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}$

6) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

7) $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$

8) $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

9) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{x^2-5x-14}{x+2}dx$

ב. $\int \frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}dx$

ג. $\int \frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}dx$

ד. $\int \frac{x^3-4x^2+9}{x-3}dx$

ה. $\int \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}dx$

ו. $\int \frac{2x^5+x^4-4x^2+1}{2x+1}dx$

תשובות סופיות:

1) $x-7$

2) x^2+2x+5

3) x^3-2x^2+5x-1

4) x^2-x-3

5) x^2-4

6) x^2+1

7) $4x^2+10x+1$

8) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

9) א. $\frac{x^2}{2}-7x+c$ ב. $\frac{x^3}{3}+x^2+5x+c$ ג. $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x+c$

ד. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x+c$ ה. $\frac{x^3}{3}-4x+c$ ו. $\frac{x^5}{5}-x^2+x+c$.

אינטגרלים עם זיהוי מבנים:

סיכום כללי:

באינטגרציה של ביטוי מורכב נזהה האם המבנה תואם לזה המתקבל באחת מהגזירות של פונקציות מורכבות כדלהלן:

גזירה: $y=\frac{1}{u}\to y'=-\frac{u'}{u^2}$ אינטגרציה: $\int -\frac{u'}{u^2}dx=\frac{1}{u}+c$.

גזירה: $y=\frac{1}{\sqrt{u}}\to y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ אינטגרציה: $\int \frac{u'}{2\sqrt{u}}dx=\sqrt{u}+c$.

גזירה: $y=u^n\to y'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$ אינטגרציה: $\int\left(n\cdot u^{n-1}\cdot u'\right)dx=u^n+c$.

כאשר $u=u(x)$ היא פונקציה כלשהי של x.

שאלות:

1) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int -\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}dx$

ב. $\int \frac{x^2}{\left(x^3+6\right)^2}dx$

ג. $\int \frac{x-2}{\left(x^2-4x+1\right)^2}dx$

ד. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$

ה. $\int \frac{6x-3}{\sqrt{x-x^2}}dx$

ו. $\int 8x\left(x^2+1\right)^3dx$

ז. $\int\left(2-x^2\right)\left(6x-x^3\right)^2dx$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{1}{x^2-1}+c$

ב. $-\frac{1}{3\left(x^3+6\right)}+c$

ג. $-\frac{1}{2\left(x^2-4x+1\right)}+c$

ד. $\sqrt{x^2+2}+c$

ה. $-6\sqrt{x-x^2}+c$

ו. $\left(x^2+1\right)^4+c$

ז. $\frac{\left(6x-x^3\right)^3}{9}+c$.

אינטגרלים טריגונומטריים:

סיכום כללי:

כללי האינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות:

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c \qquad \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c \qquad \int \cos x dx = \sin x + c$$

שאלות:

1) חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות יסודיות):

א. $\int\left(\sin x - 3\cos x + \frac{4}{\cos^2 x} + 5\right)dx$

ב. $\int\left(\cos 3x - 2\sin 4x + \frac{4}{\cos^2 3x}\right)dx$

ג. $\int\left(\sin(\pi - x) + \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)dx$

ד. $\int\left(\sin 2x - 4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

ה. $\int \frac{1}{\cos^2 4x}dx$

ו. $\int \frac{1}{\sin^2 10x}dx$

2) חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות):

א. $\int(2\sin x\cos x)dx$

ב. $\int(\sin 3x\cos 3x)dx$

ג. $\int(\sin^4 x - \cos^4 x)dx$

ד. $\int(\sin^2 x)dx$

3) חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות מסכמות עם שימוש בזהויות):

א. $\int\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$

ב. $\int\left(\sin x+\cos x\right)^2 dx$

ג. $\int\tan^2 xdx$

ד. $\int\left(\sin x\cos x\cos\left(2x\right)\right)dx$

ה. $\int\frac{1}{\left(\sin x\cos x\right)^2}dx$

ו. $\int\cos^2 xdx$

ז. $\int\sin^2 4xdx$

ח. $\int\sin^4 4xdx$

ט. $\int\cos^4 x\,dx$

י. $\int\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

יא. $\int\sin^2 x\cos^4 xdx$

יב. $\int\frac{\sin 5x-\sin x}{\sin 4x-\sin 2x}dx$

יג. $\int\sin 7x\cos 5xdx$

יד. $\int\sin^3 4xdx$

טו. $\int\cos^3 xdx$

4) חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות אתגר):

א. $\int\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

ב. $\int\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)dx$

ג. $\int\frac{1+\cos^3 x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

5) חשב את האינטגרלים הבאים (זיהוי מבנים):

א. $\int\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right)dx$

ב. $\int\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$

ג. $\int\left(\cos x\sin^2 x\right)dx$

6) חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות מסכמות בזיהוי מבנים):

א. $\int \cos\left(2x^2+1\right)\cdot 4x dx$

ב. $\int \cos\left(10x^4+1\right)\cdot x^3 dx$

ג. $\int \cos\left(\sin x\right)\cdot \cos x dx$

ד. $\int \sin\left(x^2+1\right)\cdot x dx$

ה. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

ו. $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

ז. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x}} dx$

7) חשב את האינטגרלים הבאים (זיהוי מבנים עם פונקצית arctan):

א. $\int \frac{\arctan x}{x^2+1} dx$

ב. $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{x^2+1} dx$

תשובות סופיות:

1) א. $-\cos x-3\sin x+4\tan x+5x+c$ ב. $\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\cos 4x}{2}+\frac{4\tan 3x}{3}+c$

ג. $\cos(\pi-x)+\tan x+x+c$ ד. $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$

ה. $\frac{1}{4}\tan 4x+c$ ו. $-\frac{1}{10}\cot 10x+c$.

2) א. $-\frac{1}{2}\cos 2x+c$ ב. $-\frac{\cos 6x}{12}+c$ ג. $-\frac{\sin 2x}{2}+c$

ד. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$.

3) א. $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ ב. $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$ ג. $\tan x-x+c$

ד. $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$ ה. $\tan x-\cot x+c$ ו. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$

ז. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}\sin 8x+c$ ח. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$

ט. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$ י. $-\cot x-x+c$

יא. $\frac{1}{16}x+\frac{1}{64}\sin 2x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{192}\sin 6x+c$

יב. $2\sin x+c$ יג. $-\frac{1}{24}\cos 12x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

יד. $-\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 12x+c$ טו. $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+c$.

4) א. $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$ ב. $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$ ג. $3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x+c$

5) א. $2\sqrt{\sin x}+c$ ב. $\frac{1}{\cos x}+c$ ג. $\frac{1}{3}\sin^3 x+c$

6) א. $\sin\left(2x^2+1\right)+c$ ב. $\frac{1}{40}\sin\left(10x^4+1\right)+c$

ג. $\sin(\sin x)+c$ ד. $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+c$ ה. $-2\cos\sqrt{x}+c$

ו. $\frac{1}{2}\tan^2 x+c$ ז. $\sqrt{2\sin x}+c$.

7) א. $\frac{1}{2}\arctan^2 x+c$ ב. $\frac{2}{3}\sqrt{\arctan^3 x}+c$.

אינטגרלים מעריכיים:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות:

- אינטגרלים יסודיים: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$; $\int e^x dx = e^x + c$.
- אינטגרלים של פונקציות מורכבות: $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$; $\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$.

שאלות:

1) חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות יסודיות):

א. $\int \left(5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1\right) dx$

ב. $\int \left(3^x + 5^{2x}\right) dx$

ג. $\int \left(6\sqrt{e^{4x-1}}\right) dx$

ד. $\int \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx$

2) חשב את האינטגרלים הבאים (פישוט ע"י חילוק):

א. $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$

ב. $\int \frac{3e^{3x} - 5e^{2x} + 4e^x - 2}{e^x - 1} dx$

3) חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות יסודיות נוספות):

א. $\int \left(e^{4x} + e^{-x}\right) dx$

ב. $\int \left(e^{x+1}\right)^2 dx$

ג. $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

ד. $\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx$

4) חשב את האינטגרלים הבאים (זיהוי מבנים):

א. $\int \left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x + 3}}\right) dx$

ב. $\int \left(\frac{3 - e^x}{\left(e^x - 3x\right)^2}\right) dx$

ג. $\int \left(xe^{x^2}\right) dx$

ד. $\int e^{x^2} 2x dx$

ה. $\int e^{-2x^2} x dx$

ו. $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

תשובות סופיות:

1) א. $5e^{x}-\frac{e^{3x}}{3}-e^{-x}+x+c$ ב. $\frac{3^{x}}{\ln 3}+\frac{5^{2x}}{2\ln 5}+c$

ג. $3e^{2x-\frac{1}{2}}+c$ ד. $\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+c$

2) א. $e^{x}+x+c$ ב. $\frac{3e^{2x}}{2}-2e^{x}+2x+c$

3) א. $\frac{1}{4}e^{4x}-e^{-x}+c$ ב. $\frac{1}{2}e^{2x+2}+c$

ג. $\frac{0.4^{x}}{\ln 0.4}+\frac{3.2^{x}}{\ln 3.2}+\frac{200^{x}}{\ln 200}+c$ ד. $8\sqrt{e^{x}}-\frac{3}{4}e^{\frac{-4x}{3}}+c$

4) א. $2\sqrt{e^{x}+3}+c$ ב. $\frac{1}{e^{x}-3x}+c$ ג. $\frac{1}{2}e^{x^{2}}+c$

ד. $e^{x^{2}}+c$ ה. $-\frac{e^{-2x^{2}}}{4}+c$ ו. $e^{\tan x}+c$.

אינטגרלים לוגריתמיים:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות:

- אינטגרל יסודי: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$.
- אינטגרל של פונקציה מורכבת: $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$.

שאלות:

1) חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות יסודיות):

א. $\int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1}\right)dx$ ב. $\int \frac{x^2+3x-4}{x}dx$ ג. $\int \frac{x+3}{x^2-9}dx$

2) חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות יסודיות נוספות):

א. $\int \frac{1}{4x}dx$ ב. $\int \frac{1+x+x^2}{x}dx$ ג. $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

ד. $\int \frac{1}{4x-1}dx$ ה. $\int \frac{x+3}{x+2}dx$ ו. $\int \frac{4x+1}{x+2}dx$

3) חשב את האינטגרלים הבאים (חילוק פולינומים):

א. $\int \frac{x^2+3x+5}{x+1}dx$ ב. $\int \frac{x^3-x^2+5x-6}{x-2}dx$ ג. $\int \frac{x^4+3}{x+1}dx$

4) חשב את האינטגרלים הבאים (זיהוי מבנים):

ד. $\int \frac{2x}{x^2-3}dx$ ה. $\int \frac{x-1}{x^2-2x}dx$ ו. $\int \frac{e^x}{e^x+5}dx$

ז. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ ח. $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

5) חשב את האינטגרלים הבאים (זיהוי מבנים נוספים):

א. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ ב. $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$ ג. $\int \tan x dx$

ד. $\int \cot x dx$ ה. $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$ ו. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

תשובות סופיות:

1) א. $3\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}+c$ ב. $\frac{x^2}{2}+3x-4\ln|x|+c$ ג. $\ln|x-3|+c$

2) א. $\frac{\ln|x|}{4}+c$ ב. $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$

ג. $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$ ד. $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$

ה. $x+\ln|x+2|+c$ ו. $4x-7\ln|x+2|+c$

3) א. $\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x+1|+c$ ב. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x+8\ln|x-2|+c$

ג. $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+4\ln|x+1|+c$

4) א. $\ln|x^2-3|+c$ ב. $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x|+c$ ג. $\ln|e^x+5|+c$

ד. $\ln|e^x+e^{-x}|+c$ ה. $\ln|\sin x|+c$

5) א. $\ln|x^2+1|+c$ ב. $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+c$

ג. $-\ln|\cos x|+c$ ד. $\ln|\sin x|+c$

ה. $e^2\ln|e^x+1|+c$ ו. $\ln|\ln x|+c$.

מציאת פונקציה קדומה:

שאלות:

1) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=3x^2-7$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2,-1)$.

2) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.

מצא את הפונקציה.

3) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=x^2-8x+2$. נתון: $f(-2)=1$.

א. מצא את $f(x)$.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.

4) נתונה הנגזרת של פונקציה $f(x)$: $f'(x)=9x^2-4$.

ערך הפונקציה בנקודה $x=1$ הוא 3.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$.

ב. מצא את $f(x)$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=2x-3$.

לפונקציה משיק ששיפועו הוא 3-.

א. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.

6) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-6x-5$.

המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

א. מצא את שיעור ה- x של הנקודה A.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 6-.

ג. מצא את משוואת המשיק.

7) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=3x-4$.
הישר $y=2x+5$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את $f(x)$.

תשובות סופיות:

1) $f(x)=x^3-7x+5$.

2) $f(x)=x^2-6x+14$.

3) א. $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2+2x+23\frac{2}{3}$ ב. $y=-5x+27$.

4) א. $y=5x-2$ ב. $f(x)=3x^3-4x+4$ ג. $(0.4,0)$, $(0,-2)$.

5) א. $x=0$ ב. $f(x)=x^2-3x+7$.

6) א. $x=-1$ ב. $f(x)=-3x^2-5x-8$ ג. $y=x-5$.

7) $f(x)=\frac{3x^2}{2}-4x+11$.

מציאת פונקציה קדומה כאשר נתונה נגזרת שנייה:

שאלות:

1) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=6x+6$. שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא 12- וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1. מצא את הפונקציה.

2) נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x)=8x-6$.
   א. מצא את $f'(x)$ אם ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון ב- $x=2$.
   ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה בנקודת הקיצון הוא $\frac{2}{3}$.

3) נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x)=2x-3$.
   א. שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 4. מצא את $f'(x)$.
   ב. ערך הפונקציה בנקודת ההשקה הוא 5. מצא את $f(x)$.

4) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=1+\frac{8}{x^3}$.
המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$. מצא את הפונקציה.

תשובות סופיות:

1) $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$.

2) א. $f'(x)=4x^2-6x-4$ ב. $f(x)=\frac{4x^3}{3}-3x^2-4x+10$.

3) א. $f'(x)=x^2-3x+6$ ב. $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+6x+\frac{1}{6}$.

4) $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{4}{x}+3x+2$.

מציאת פונקציה קדומה עם פונקציות טריגונומטריות:

שאלות:

1) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=\cos x+4\sin 2x$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(\frac{\pi}{6},1\frac{1}{2}\right)$.

2) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=-\cos x-4\sin 2x$.

שיפוע הפונקציה בנקודה (π,π) הוא 3. מצא את הפונקציה.

3) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=\sin x+\cos x$.

א. ידוע כי הפונקציה המקורית עוברת בראשית הצירים.
הוכח כי הנגזרת $f'(x)$ והפונקציה המקורית $f(x)$ מקיימות
את המשוואה: $f(x)+f'(x)=2\sin x+1$.

ב. מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$ באופן הבא: $g(x)=f(x)+f'(x)$.

i. מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה- y של הפונקציה $g(x)$.

ii. מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה- y של הפונקציה $f(x)$.

iii. כתוב את משוואת הישר העובר דרך שתי הנקודות שמצאת.

תשובות סופיות:

1) $f(x)=\sin x-2\cos 2x+2$.

2) $f(x)=\sin 2x+\cos x+x+1$.

3) ב. i. $(0.5\pi,3)$ ii. $(0.75\pi,\sqrt{2}+1)$ iii. $y=-0.746x+4.172$.

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 19 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים 305
2. חישובי שטחים יסודיים 308
3. חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים 314
4. חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה 316
5. חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית 319
6. חישובי שטחים עם פונקצית שורש 321
7. חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות 325
8. חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים 328

האינטגרל המסוים:

סיכום כללי:

תהא פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא $f'(x)$ ($f(x)$ מוגדרת בתחום $a \le x \le b$).

הקשר שבין האינטגרל המסוים לפונקציה קדומה הוא: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

הערה:

יש להשתמש בכל כללי האינטגרציה המיידיים של הפונקציות השונות אשר נלמדו.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_2^5 (x^2+5x)dx$

ב. $\int_{-4}^{-1} x^2(x-3)dx$

ג. $\int_{-3}^{3} (x^3+4x)dx$

ד. $\int_{-1}^{1} 3(2x-1)^5 dx$

ה. $\int_1^2 \frac{2}{(x-3)^2}dx$

ו. $\int_1^4 \frac{x-1}{x^3}dx$

ז. $\int_{-3}^{0} \frac{2x^2+7x-4}{x+4}dx$

ח. $\int_3^4 \frac{3x^2-7x+2}{x-2}dx$

ט. $\int_1^2 \sqrt{3x-1}dx$

י. $\int_{-5}^{0} \frac{3}{\sqrt{4-x}}dx$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_0^{\pi} (\cos x)dx$

ב. $\int_0^{\pi} (\sin 2x+1)dx$

ג. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x-3\cos 2x)dx$

ד. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{\cos^2 x}+2\right)dx$

3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_{0}^{8}\left(x+\sqrt[5]{4x}\right)dx$ ב. $\int_{3}^{16}\left(\sqrt[4]{5x+1}\right)dx$ ג. $\int_{-10}^{5}\frac{2}{\sqrt[4]{6-x}}dx$

4) לפניך האינטגרל הבא: $\int_{1}^{a}\left(4x-7\right)dx$.

מצא עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1-.

5) לפניך האינטגרל הבא: $\int_{a}^{2}\left(x-3x^2\right)dx$.

א. כתוב ביטוי לערך האינטגרל כתלות ב- a.

ב. מצא עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל- $\frac{a-12}{2}$.

6) לפניך האינטגרל הבא: $\int_{a}^{a+4}\left(\frac{1}{\sqrt{x-a}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx$.

א. כתוב את ערך האינטגרל כתלות ב- a.

ב. מצא את ערכו של a עבורו ערך האינטגרל יהיה שווה ל-2.

7) לפניך האינטגרל הבא: $\int_{0}^{a}\left(\sin x+2\cos 2x\right)dx$, $0<a<3$.

מצא עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

תשובות סופיות:

1) א. 91.5 ב. -126.75 ג. 0 ד. -182 ה. 1
ו. $\frac{9}{32}$ ז. -12 ח. 9.5 ט. 1.856 י. 6.

2) א. 0 ב. π ג. 0 ד. $3\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi \approx 7.29$.

3) א. $45\frac{1}{3}$ ב. 33.76 ג. $18\frac{2}{3}$.

4) $a=2\ ,\ 1.5$.

5) א. $a^3-\frac{1}{2}a^2-6$ ב. $a=0\ ,\ 1\ ,\ -\frac{1}{2}$.

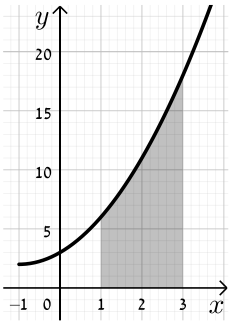
6) א. $4+2\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a+5}\right)$ ב. $a=1\frac{1}{4}$.

7) $a=\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{5\pi}{6}$.

חישובי שטחים יסודיים:

שאלות:

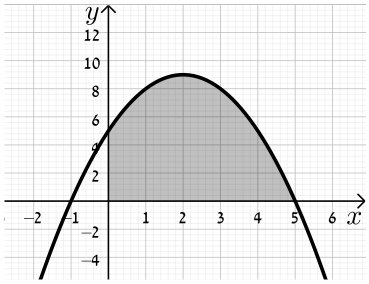
1) חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)=x^2+2x+3$, ציר ה-x והישרים $x=1$ ו-$x=3$.



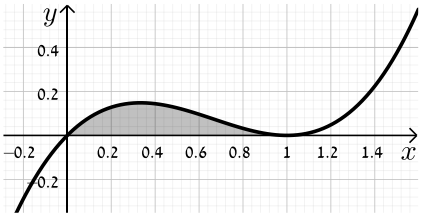
2) נתונה הפונקציה $y=-x^2+4x+5$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-x וציר ה-y.



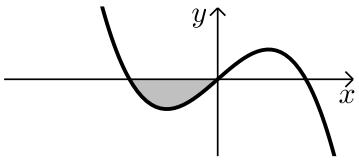
3) מצא את השטח המוגבל תחת הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+x$ וציר ה-x כמתואר באיור.



שאלות עם שטח מתחת לציר ה-x:

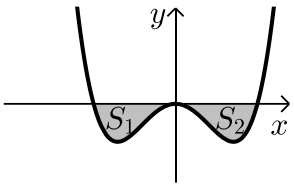
4) נתונה הפונקציה $f(x)=x(4-x^2)$.

חשב את השטח המוגבל שמתחת הפונקציה וציר ה-x שברביע השלישי.

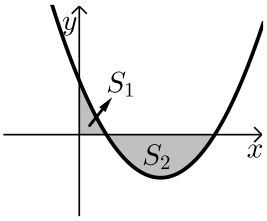


5) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^2$.

חשב את השטח המוגבל שבין הפונקציה לציר ה-x.



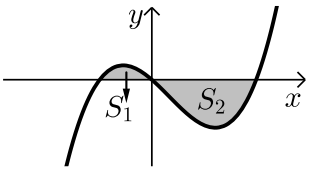
6) חשב את האינטגרל המסוים של
הפונקציה $y=x^2-6x+5$ בין 0 ל-5.
האם התוצאה מייצגת את סכום השטחים: S_1+S_2?
אם כן, הסבר. אם לא, נמק וחשב את סכום זה.



7) נתונה הפונקציה $y=x^3-x^2-2x$.
יוצרים את השטחים S_1 ו-S_2 בין גרף הפונקציה וציר ה-x כמתואר באיור.

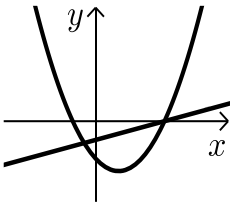
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x.

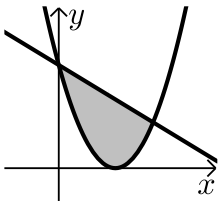


שאלות עם שטחים בין שתי פונקציות:

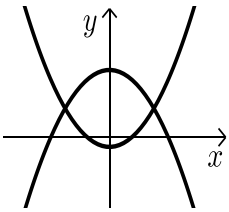
8) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.



9) נתונות הפונקציות: $y=(x-3)^2$, $y=-x+9$.
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.



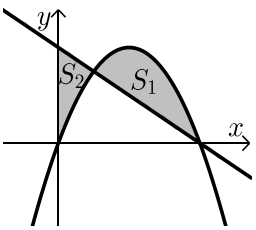
10) נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2-1$, $g(x)=7-x^2$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של
הפונקציות הנ"ל.



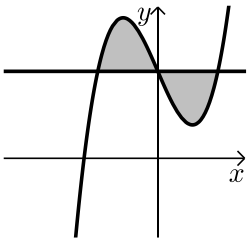
11) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=-x^2+4x$ ו- $g(x)=-x+4$.
מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים ב-S_1
ואת השטח הכלוא בין הגרפים וציר ה-y ב-S_2
כמתואר באיור.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ב. חשב את היחס שבין השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.



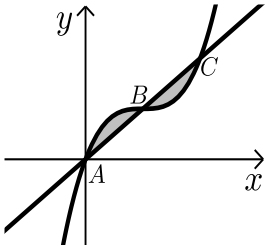
12) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-4x+5$ והישר $y=5$.



א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.

ב. חשב את השטח המוגבל ביניהן.

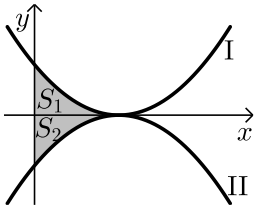
13) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-3x^2+3x$.



הישר AC חותך את גרף הפונקציה בנקודות הבאות: $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,2)$.

חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

14) נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$ כמתואר באיור.



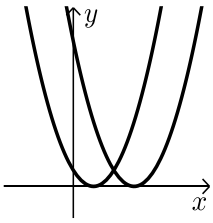
א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים ב- S_1 ו- S_2 כמתואר באיור.

הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.

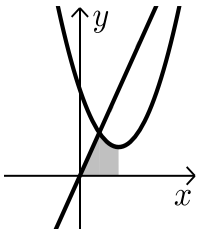
שאלות עם שטחים מורכבים:

15) נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2-2x+1$, $g(x)=x^2-6x+9$.



חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x.

16) נתונות הפונקציות: $y=x^2-4x+6$, $y=3x$.

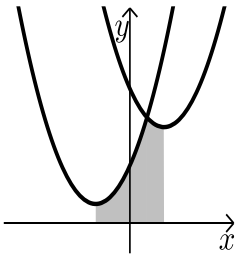


א. מצא את קדקוד הפרבולה.

ב. מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר שמשמאל לקדקוד הפרבולה.

ג. חשב את השטח המסומן שבשרטוט.

17) נתונות הפונקציות: $y=x^2+4x+6$, $y=x^2-4x+14$.

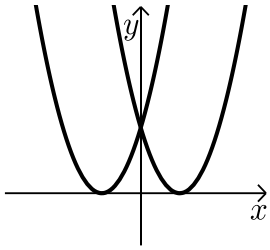


א. מצא את שיעורי ה- x של קודקודי הפרבולות.

ב. חשב את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ג. חשב את השטח המסומן בשרטוט.

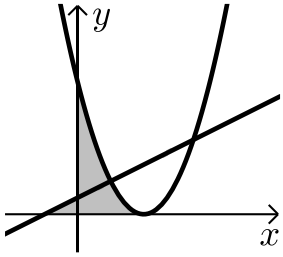
18) נתונות הפונקציות: $g(x)=(x+3)^2$, $f(x)=(x-3)^2$.
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה-x .



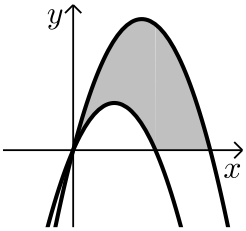
19) נתונות שתי הפונקציות: $y=(x-2)^2$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

א. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה-x .

ב. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה-y .



20) נתונות הפרבולות הבאות: $f(x)=-x^2+5x$ ו- $g(x)=-x^2+3x$.
חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה-x .

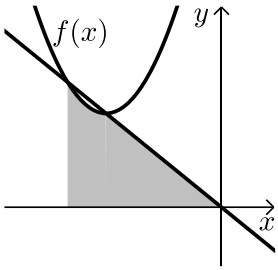


21) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2+6x+12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4$ כמתואר באיור.

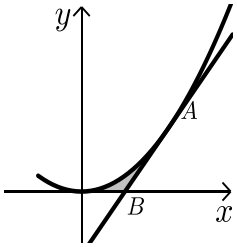
א. מצא את משוואת הישר.

ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

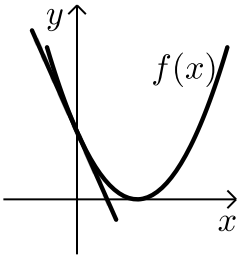
ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה-x והישר $x=-4$.



22) נתונה הפונקציה: $y=2x^2$.
מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה: $A(1,2)$.
המשיק חותך את ציר ה-x בנקודה B.
חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה-x .

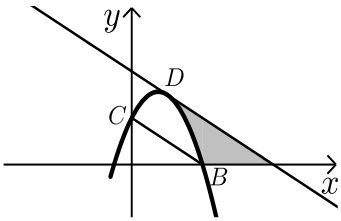


23) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-2)^2$.
מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y
מעבירים משיק.



א. מצא את משוואת המשיק.
ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x
ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x.

24) משוואת הפרבולה היא: $f(x)=-2x^2+3x+2$.
הנקודות $C(0,2)$, $B(2,0)$ הן נקודות חיתוך
של הפרבולה עם הצירים.
המשיק לפרבולה בנקודה D מקביל לישר BC.



א. מצא את משוואת המשיק.
ב. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- x.
ג. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- y.

תשובות סופיות:

1) $22\frac{2}{3}$ יח"ש.

2) א. $(5,0)$, $(-1,0)$ ב. $33\frac{1}{3}$ יח"ש.

3) $\frac{1}{12}$ יח"ש.

4) 4 יח"ש.

5) $4\frac{4}{15}$ יח"ש.

6) לא. השטח הוא: 13 יח"ש.

7) א. $(2,0)$, $(0,0)$, $(-1,0)$ ב. $3\frac{1}{12}$ יח"ש.

8) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

9) $20\frac{5}{6}$ יח"ש.

10) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

11) א. $(4,0)$, $(1,3)$ ב. $2\frac{5}{11}$.

12) א. $(2,5)$, $(0,5)$, $(-2,5)$ ב. 8 יח"ש.

13) 0.5 יח"ש.

14) א. $f(x)=\text{I}$, $g(x)=\text{II}$ ב. הוכחה.

15) $\frac{2}{3}$ יח"ש.

16) א. $(2,2)$ ב. $(1,3)$ ג. $3\frac{5}{6}$ יח"ש.

17) א. $x=2$, $x=-2$ ב. $(1,11)$ ג. $25\frac{1}{3}$ יח"ש.

18) 18 יח"ש.

19) א. $\frac{4}{3}$ יח"ש ב. $1\frac{7}{12}$ יח"ש.

20) $16\frac{1}{3}$ יח"ש.

21) א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

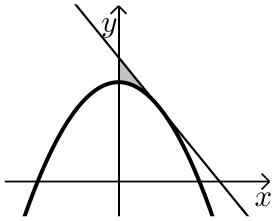
22) $\frac{1}{6}$ יח"ש.

23) א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

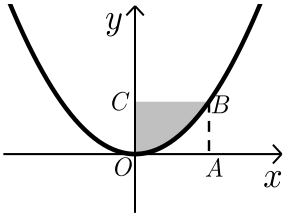
24) א. $y=-x+4$ ב. $2\frac{2}{3}$ יח"ש. ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים:

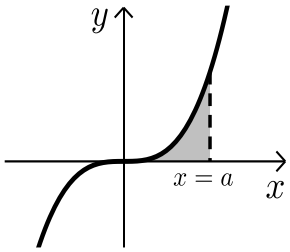
שאלות:



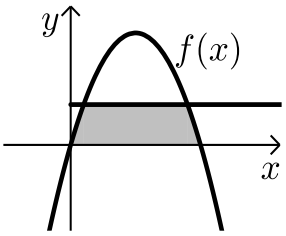
25) נתונה הפרבולה: $y=ax^2+8$.
שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה שבה $x=2$ הוא 2-.
א. חשב את a.
ב. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, הפרבולה וציר y.



26) הפונקציה המתוארת בשרטוט היא: $y=ax^2$, (a פרמטר).
המרובע ABCO הוא ריבוע.
הקדקוד B נמצא על גרף הפונקציה.
ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.
מצא את ערך הפרמטר a ואת השטח המסומן בסרטוט.



27) נתונה הפונקציה $y=x^3$.
מעבירים אנך לציר ה-x: $x=a$ (a פרמטר חיובי)
כך שנוצר שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה-x.
א. הבע באמצעות a את השטח המקווקו בציור.
ב. חשב את a אם ידוע כי שטח זה שווה ל-a^2.



28) נתונה הפונקציה: $f(x)=kx-x^2$.
הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה-x של אחת מנקודות החיתוך הוא $x=9$.
א. מצא את ערך הפרמטר k.
ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה-x (השטח המסומן).

תשובות סופיות:

25) א. $a=-\frac{1}{2}$ ב. $\frac{4}{3}$ יח"ש.

26) $a=\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$ יח"ש.

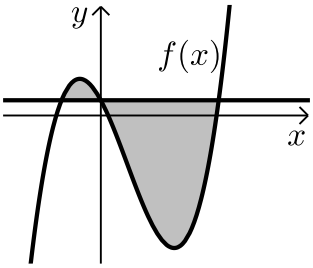
27) א. $\frac{a^4}{4}$ ב. $a=2$.

28) א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה:

שאלות:

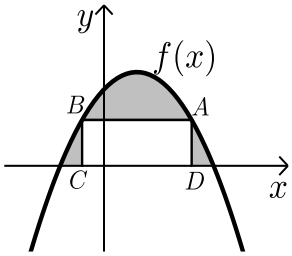
29) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=3x^2-8x-12$.
הישר $y=5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$
על ציר ה- y.



א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הישר והפונקציה.

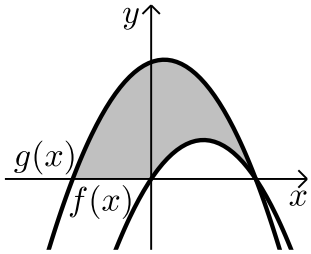
30) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ המתוארת באיור שלפניך היא: $f'(x)=3-2x$.
ישר AB שמשוואתו: $y=6$ חותך את גרף
הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x
כך שנוצר מלבן ABCD.
ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא 4.



א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x.

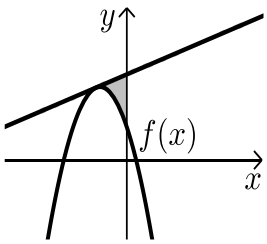
31) באיור שלפניך מתוארות הפונקציות שנגזרותיהן: $f'(x)=4-2x$, $g'(x)=-2x+1$.
ידוע ששתי הפונקציות חותכות את ציר ה- x כאשר: $x=4$.



א. מצא את הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- x (המסומן).

32) נתונה פונקציה $f(x)$.
משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=-2$ היא: $y=x+13$.
הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x)=-4x-7$.



א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- y.

33) נתונה פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא: $f'(x)=3x^2-6x-9$.
ישר ששיפועו 15 משיק לפונקציה ברביע הרביעי בנקודה שבה: $y=-20$.

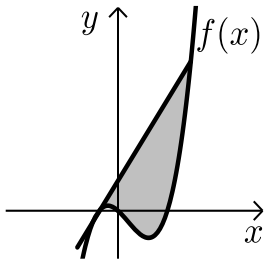
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש עוד משיקים לגרף הפונקציה בעלי שיפוע 15?
אם כן- מצא אותם.

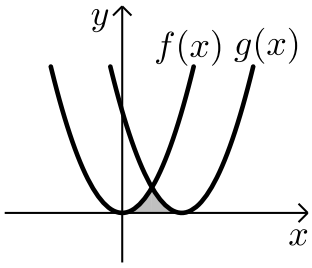
ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי הנקודה שבה $x=7$ משותפת למשיק שמצאת בסעיף הקודם ולפונקציה $f(x)$.

ii. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף הקודם (ראה איור).



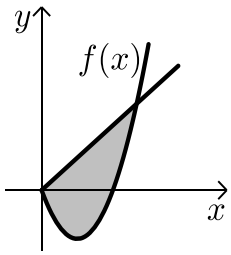
34) באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה: $f(x)=x^2$
את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=2$.
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא: $g'(x)=2x-8$.



א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה-x (המסומן).

35) באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.
נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=2x-6$
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה בנקודה שבה ערך ה-y הוא 16.



א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

תשובות סופיות:

29) א. $f(x)=x^3-4x^2-12x+5$ ב. $189\frac{1}{3}$ יח"ש.

30) א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

31) א. $f(x)=4x-x^2$, $g(x)=-x^2+x+12$ ב. 46.5 יח"ש.

32) א. $f(x)=-2x^2-7x+5$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

33) א. $f(x)=x^3-3x^2-9x$ ב. $y=15x+28$

ג. i. $(7,133)$ ג. ii. 546.75 יח"ש.

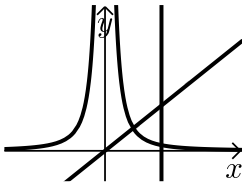
34) א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

35) א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

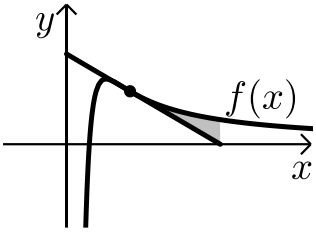
חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית:

שאלות:

1) נתונות שתי פונקציות: $g(x)=x$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה-x .



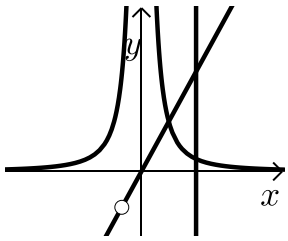
2) ענה על הסעיפים הבאים:



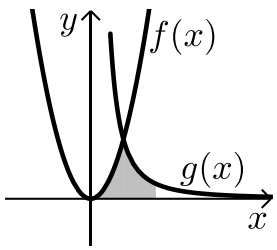
א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$
מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,
המשיק ואנך לציר ה-x היוצא מנקודת החיתוך
של המשיק עם ציר ה-x .

3) נתונות שתי פונקציות: $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה-x .



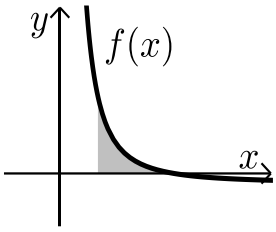
4) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$
(a קבוע) בתחום: $x>0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון בנקודה
הנמצאת על הישר: $y=4x$.



א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-x
והישר: $x=4$.

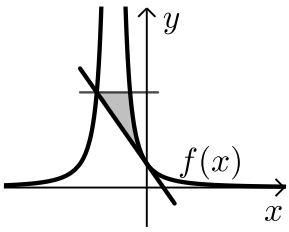
5) גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ (a קבוע) חותך את ציר ה-x בנקודה $(6,0)$.



א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והישר: $x=2$.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ (A פרמטר חיובי).



ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y הוא: $-\frac{1}{9}$.

א. מצא את ערך הפרמטר A.

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה-y.

ג. הראה כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=-4.5$.

ד. העבר ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשב את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזר באיור).

תשובות סופיות:

1) 1 יח"ש.

2) א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

3) 1 יח"ש.

4) א. $a=32$, $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

5) א. $a=36$, $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

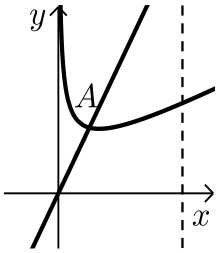
6) א. $A=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה.

ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

חישובי שטחים עם פונקצית שורש:

שאלות:

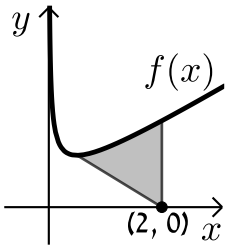
1) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+x$.
מעבירים ישר: $y=4x$ החותך את גרף הפונקציה בנקודה A המסומנת באיור.



א. מצא את שיעורי הנקודה A.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $y=4x$, ציר ה-x ואנך לציר ה-x: $x=4$.

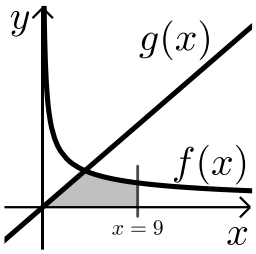
2) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.



א. מצא את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים ישר לנקודה $(2,0)$ שעל ציר ה-x.
מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לציר ה-x היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

3) באיור הבא מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=2x$.

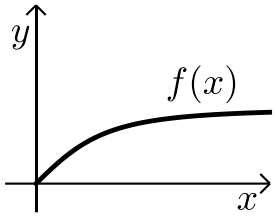


א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

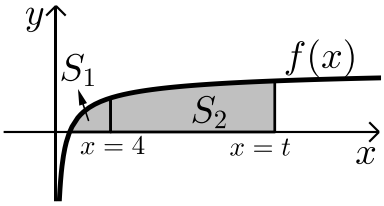
ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-x והישר $x=9$.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה-y.

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.
לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.



6) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.
מעבירים שני אנכים לציר ה-x והם: $x=4$
ו-$x=t$ $(t>4)$. נסמן:
S_1 - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x.
S_2 - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והאנכים.
ידוע כי: $8S_1=S_2$. מצא את t.



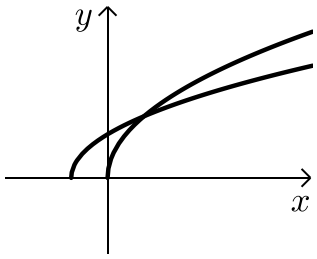
7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ii. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.
iii. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

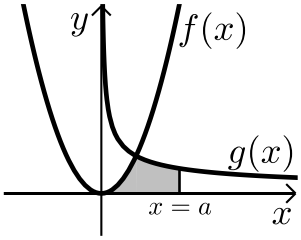
ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא: $m=\frac{17}{16}$. מצא את נקודת ההשקה.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-x ואנך לציר ה-x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

8) נתונות שתי פונקציות: $g(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\sqrt{x+b}$ $(b>0)$
גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה-x הוא $2\frac{2}{3}$ יח"ש.
מצא את ערכו של הפרמטר b.



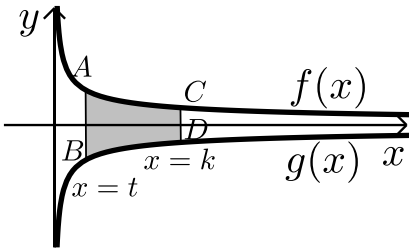
9) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=x^2$
ו- $g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$ ברביע הראשון.
מעבירים ישר $x=a$ החותך את גרף הפונקציה $g(x)$
ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר.
ידוע כי שטח זה שווה ל- $S=85\frac{1}{3}$.
מצא את a.



10) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.
מעבירים שני ישרים: $x=k$ ו- $x=t$ אשר חותכים את הגרפים
של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.
ידוע כי: 2CD=AB.

א. הראה כי: $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות
והישרים: $x=k$ ו- $x=t$ הוא: $S=12$.
מצא את t.



11) ענה על הסעיפים הבאים:

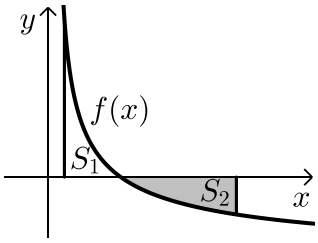
א. מצא עבור איזה ערך של a, $(a>1)$ יתקיים: $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.
מעבירים שני אנכים לציר ה- x והם: $x=1$ ו- $x=13$
כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2.
מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,
ציר ה- x והאנך $x=1$, (S_1).

ii. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח S_2.
נמק את טענתך.

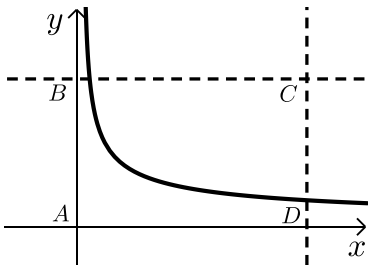


12) באיור שלפניך מתוארת הפונקציה: $f(x)=\frac{9}{\sqrt{2x-1}}$

מעבירים את הישרים המקבילים לצירים: $x=13$

ו- $y=3$ כך שנוצר המלבן ABCD כמתואר באיור.

הישר $y=3$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה M.



א. מצא את שיעורי הנקודה M.

ב. מסמנים את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והישרים ב- S_1 ואת שטח המלבן ב- S_2.

הראה כי: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{13}$.

תשובות סופיות:

1) א. $A(1,4)$ ב. 15.5 יח"ש.

2) א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

3) א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

4) 2.26 יח"ש.

5) 0.5 יח"ש

6) $t=16$.

7) א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$

ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

8) $b=2$.

9) $a=9$.

10) א. הוכחה ב. $t=1$.

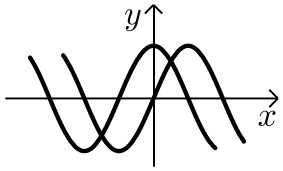
11) א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=|-S_1|=2$.

12) א. $M(5,3)$.

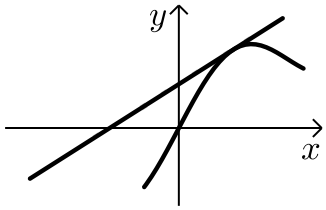
חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות:

שאלות:

1) נתונות הפונקציות: $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לציר ה- y ברביע הראשון.



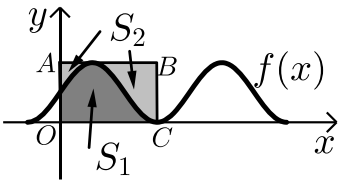
2) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\sin x$.
בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.



א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x ברביעים הראשון והשני.

3) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$
בתחום: $-0.25\pi \le x \le 1.75\pi$ מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ומעלים אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון המסומנת ב-C כך שנוצר המלבן ABCO.
השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (ראה סימון בציור).
השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .



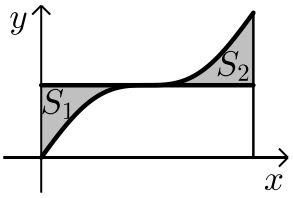
א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

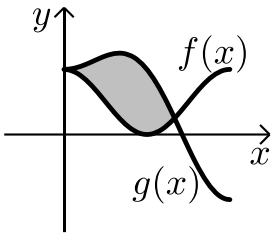
4) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $y=\sin x+x$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון?

ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה: $x=2\pi$.
מעבירים ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 המסומנים בסרטוט שווים.

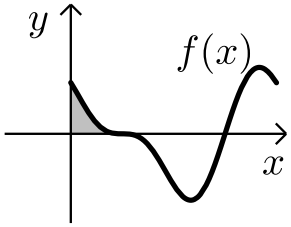


5) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה
הבאות: $f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$
בתחום: $0\le x\le \pi$.



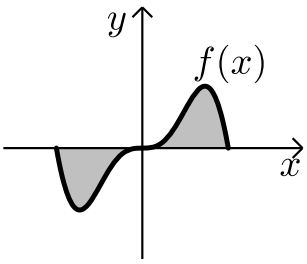
א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
השתמש בזהות: $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

6) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$.



א. מצא את שיעורי ה-x של הנקודות
המקיימות: $f'(x)=0$ בתחום: $0<x<2\pi$.
ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$ אשר אינה
קיצון נמצאת על ציר ה-x.
ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

7) ענה על הסעיפים הבאים:



א. נתונה הפונקציה: $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$
הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y'=x^2\sin x$
באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2\sin x$
בתחום: $-\pi\le x\le \pi$.
ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה
וציר ה-x בתחום הנתון.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\cos x+b\sin x$, a,b פרמטרים.
הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$ והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.
גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

תשובות סופיות:

1) 0.41 יח"ש.

2) א. $y=x+2$ ב. π יח"ש.

3) א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$.

4) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π,π) היא נקודת פיתול.

ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$.

5) א. $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$, $(0,1)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$.

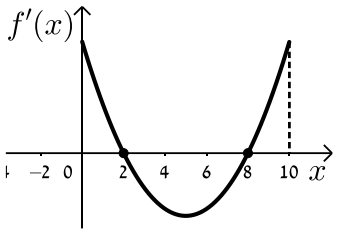
6) א. $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

7) א. הוכחה ב. הוכחה ג. $S=2(\pi^2-4)\approx 11.74$.

8) $a=2$, $b=-2$.

חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:

שאלות:



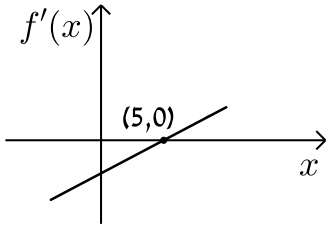
1) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

אם: $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$ וכן: $f(10)>0$.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י **גרף הנגזרת** **והצירים** ברביע הראשון עד לנקודה שבה $x=2$.



2) לפניך הגרף של הפונקציה $f'(x)$.

הגרף המתואר חותך את ציר ה-x בנקודה אחת בלבד והיא $(5,0)$.

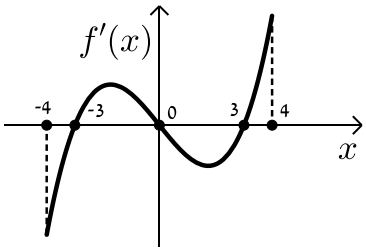
א. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ היא חיובית ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי שיעור ה-y שלה הוא 2-.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-y כאשר $y=8$.

ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.



3) בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.

א. רשום את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

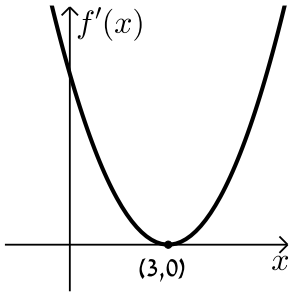
ב. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבע את סוגן.

ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ עוברת בראשית הצירים וגם מקיימת: $f(-3)=f(3)=m$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנ"ל (הבע באמצעות m).

ד. השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ וציר ה-x ברביעים השני והרביעי הוא 16 יח"ש. מצא את m.

4) הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור הבא.

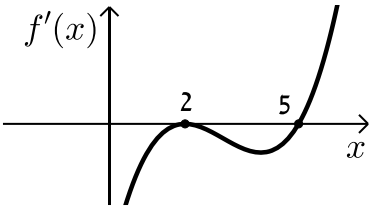


א. האם ל-$f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$
אם ידוע כי $f(3)=4$ וכי היא חותכת את ציר ה-y בנקודה שבה $y=-5$.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.

5) באיור שלפניך מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.



ידוע כי הנקודות $A(5,-4.75)$, $B(2,2)$
ו-$C(0,14)$ נמצאות על $f(x)$.

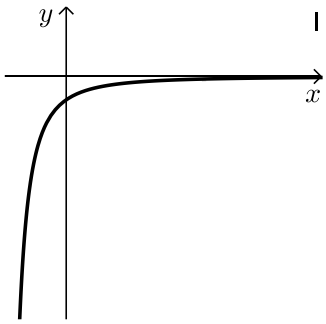
א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

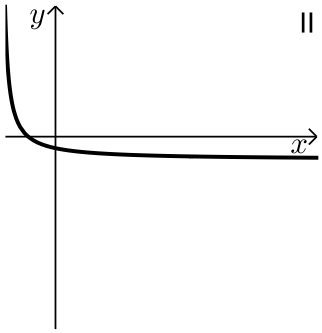
ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. חשב את השטח מוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים בתחום $0\le x\le 5$.

6) באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$:

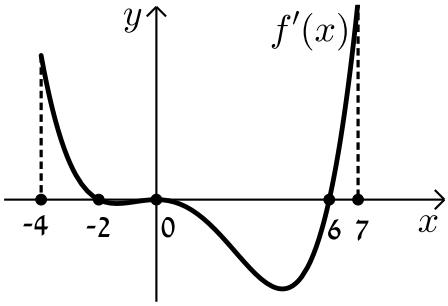




א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.

ב. נתון כי $f(10)=-3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה-y בנקודה שבה $y=-2$.
מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?

7) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:

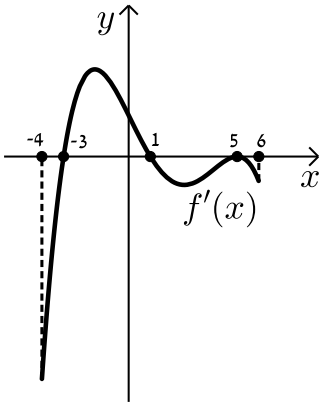


א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$ לפי הנתונים: $f(0)=-2$, $f(-2)=7.6$ ו- $f(6)=-606.8$.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

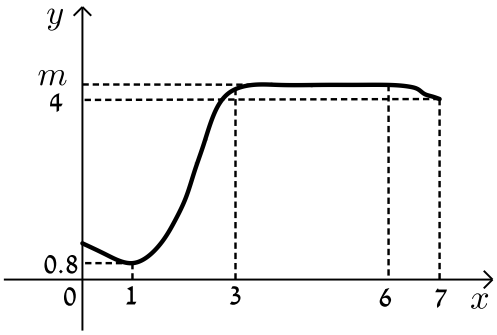
8) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:



א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 6$ עבור הנתונים: $f(5)=-83\frac{1}{3}$, $f(1)=36\frac{2}{15}$, $f(-3)=-356\frac{2}{5}$.

ב. חשב את כלל השטח הכלוא בין גרף הנגזרת וציר ה- x בתחום: $-3 \le x \le 5$.

9) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0<x<7$:



הסתמך על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים על הצירים וענה על השאלות הבאות:

א. מצא עבור אילו ערכים של x השונים מ-6 מתקיים:

i. $f'(x)>0$

ii. $f'(x)=0$

iii. $f'(x)<0$

ב. נתון כי: $\int_3^6 m\,dx=15$, כאשר m הוא פרמטר המסומן על ציר ה-y.

מצא את $f(5)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0<x<3$.

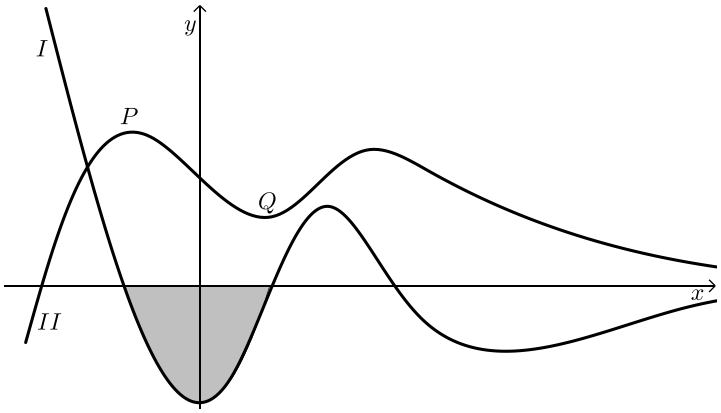
ד. מצא את השטח המוגבל בין הגרף של פונקצית הנגזרת $f'(x)$ וציר ה-x בתחום $1<x<3$.

10) בסרטוט נתונים הגרפים של פונקציה ושל נגזרתה.

א. קבע איזה מהגרפים, I או II, שייך לפונקציה ואיזה שייך לנגזרת. נמק.

ב. כמה נקודות פיתול יש לפונקציה? נמק וסמן אותן על הסרטוט.

ג. נתון: $P(-2,4)$, $Q(2,1)$. מצא את גודלו של השטח הכלוא בין גרף I לציר ה-x (השטח המסומן בסרטוט).



תשובות סופיות:

הערה: סרטוטי הסקיצות מופיעות במרוכז בעמוד הבא.

1) ב. 10 יח"ש.

2) א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$

ג. $\min(5,-2)$ ד. הוכחה. ה. 10 יח"ש.

3) א. עולה: $3<x\le 4$, $-3<x<0$, יורדת: $0<x<3$, $-4\le x<-3$

ב. $x_{\min}=3$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=-3$. ג. הוכחה. ד. $m=-8$

4) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.

ב. הוכחה. ג. 9 יח"ש.

5) א. $\min(5,-4.75)$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.

ג. הוכחה. ד. 18.75 יח"ש.

6) א. $f'(x)$:I , $f(x)$:II ב. 1 יח"ש.

7) א. הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

8) א. הוכחה. ב. 512 יח"ש.

9) א. i. $f'(x)>0:1<x<3$ א. ii. $f'(x)=0:\ x=1\ ,\ 3\le x<6$

א. iii. $f'(x)<0:\ 6<x<7\ ,\ 0<x<1$

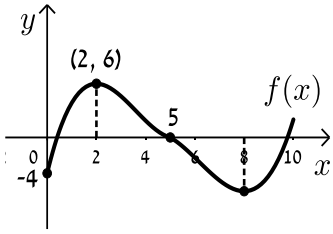
ב. $f(5)=5\ ,\ m=5$ ד. 4.2 יח"ש.

10) א. גרף I - $f'(x)$ וגרף II - $f(x)$. ב. 3 נקודות פיתול.

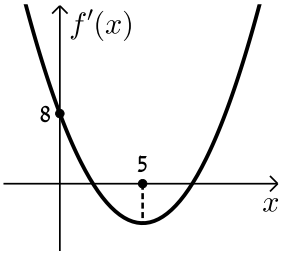
ג. 3 יח"ש.

סרטוטי גרפים לפי מספרי שאלות:

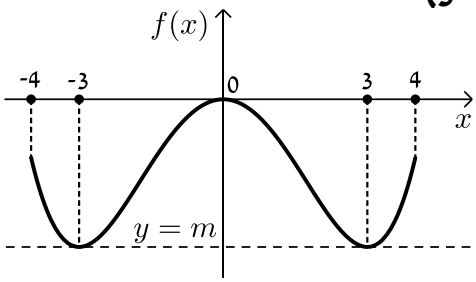
(1



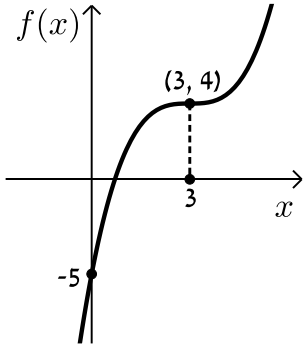
(2



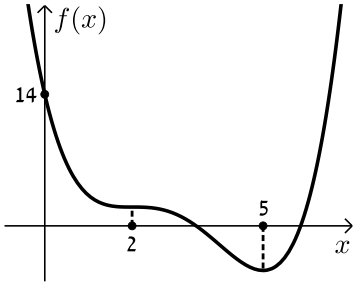
(3



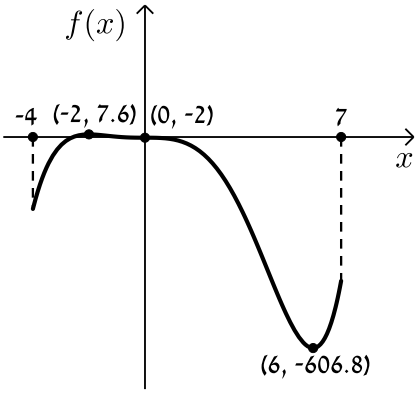
(4



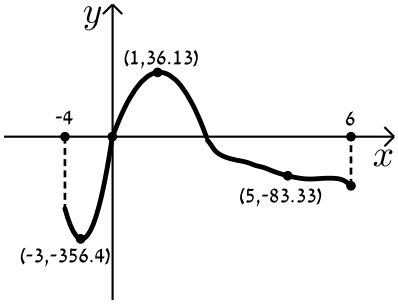
(5



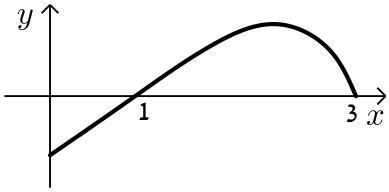
(7



(8



(9



מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 20 - חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה

תוכן העניינים

1. פונקציה מעריכית 334

2. פונקציה לוגריתמית 340

3. פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי 346

פונקציה מעריכית:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים של פונקציות מורכבות	אינטגרלים יסודיים
$\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln a}+c$	$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$
$\int e^{mx+n}dx=\frac{e^{mx+n}}{m}+c$	$\int e^{x}dx=e^{x}+c$

שאלות:

אינטגרל כללי:

1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(5e^{x}-e^{3x}+e^{-x}+1\right)dx$

ב. $\int\left(3^{x}+5^{2x}\right)dx$

ג. $\int\left(6\sqrt{e^{4x-1}}\right)dx$

ד. $\int\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}dx$

2) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\frac{e^{2x}-1}{e^{x}-1}dx$

ב. $\int\frac{3e^{3x}-5e^{2x}+4e^{x}-2}{e^{x}-1}dx$

3) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$

ב. $\int\left(e^{x+1}\right)^{2}dx$

ג. $\int\frac{2^{x}+4^{2x}+10^{3x}}{5^{x}}dx$

ד. $\int\left(4\sqrt{e^{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

4) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}\right)dx$ ב. $\int\left(\frac{3-e^x}{\left(e^x-3x\right)^2}\right)dx$ ג. $\int\left(xe^{x^2}\right)dx$

אינטגרל מסוים:

5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2e^x-\frac{1}{e^x}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(\ln 2,3\frac{1}{4}\right)$.

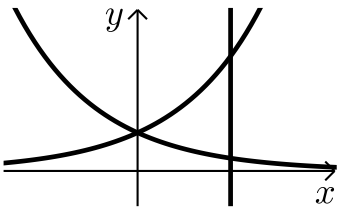
6) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=e^{2x}+e^x-2$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא $\frac{1}{2}$.

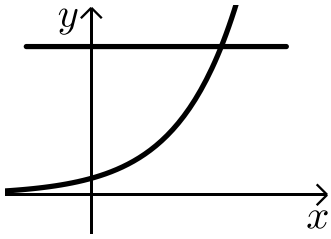
7) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=6x^2e^{x^3}-\frac{1}{x^2}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(-1,\frac{2}{e}\right)$.

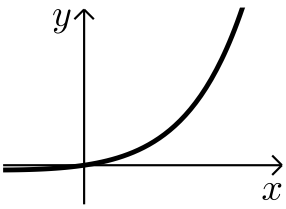
חישובי שטחים:



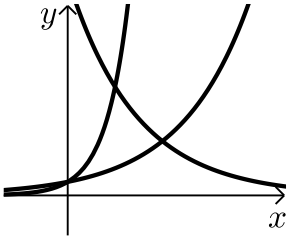
8) נתונות הפונקציות: $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות
לישר $x=\ln 3$.



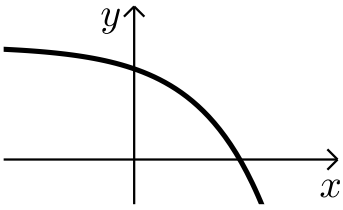
9) נתונה הפונקציה: $f(x)=3^x$.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
הישר $y=9$ וציר ה- y.



10) נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{2x}-e^{x}$.
לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק והישר $x=2$.



11) נתונות הפונקציות:
$f(x)=e^{x}$, $g(x)=e^{3x}$, $h(x)=16e^{-x}$.
חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.

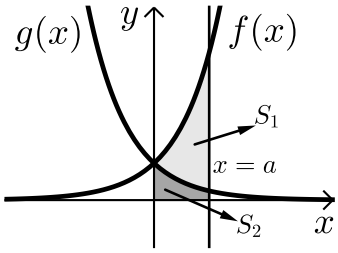


12) נתונה הפונקציה: $f(x)=5-e^{x}$.
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין
הפונקציה, המשיק וציר ה-x.
ניתן להשאיר e ו-ln בתשובה.

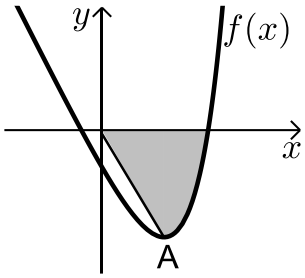
13) נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{bx}$, $(0<b)$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר
בראשית הצירים וציר ה-y הוא $\frac{e-2}{4}$.
מצא את ערכו של הפרמטר b.

14) נתונות הפונקציות: $g(x)=e^{-x}$, $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$.
מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני
הצירים. המשך האנך לציר ה-y חותך את הפונקציה $f(x)$ ומנקודת החיתוך
יורד אנך נוסף לציר ה-x כך שנוצר מלבן.
הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

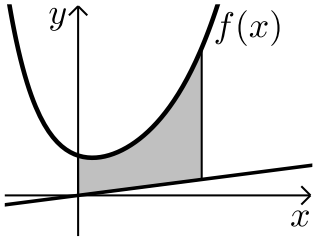
15) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=e^{2x}$ ו- $g(x)=e^{-2x}$.
מעבירים אנך לציר ה- x את הישר $x=a$, $a>0$ כמתואר באיור.
אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2.
ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2.
מצא את a.



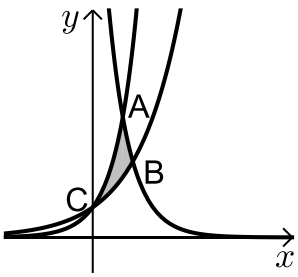
16) נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$.
הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.
א. מצא את שיעורי הנקודה A.
מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.
ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.
ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=1.7$.



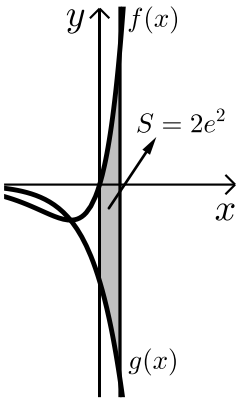
17) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.
א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והישר: $y=0.1x$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר y והאנך: $x=2$.



18) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש פונקציות:
I. $f(x)=2^x$ II. $g(x)=4^x$ II. $h(x)=2^{4-2x}$
א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה.
ב. מצא את שיעורי הנקודות A , B ו-C (נקודות החיתוך שבין הגרפים).
ג. חשב את השטח המסומן באיור.



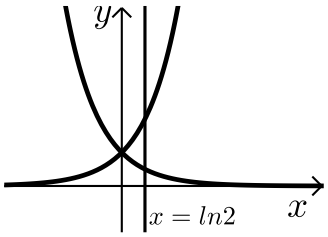
19) ענה על הסעיפים הבאים:



א. גזור את הפונקציה הבאה: $y = e^x(x-1)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $g(x) = -e^x$, $f(x) = xe^x$.
מעבירים ישר $x = a$, $(a > 0)$ החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר.
ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$. מצא את a.

חישובי נפחים:



20) נתונות הפונקציות: $g(x) = e^{-x}$, $f(x) = e^x$.
השטח הכלוא בין הפונקציות והישר: $x = \ln 2$
מסתובב סביב ציר ה- x.
חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

תשובות סופיות:

1) א. $5e^x-\frac{e^{3x}}{3}-e^{-x}+x+c$ ב. $\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{5^{2x}}{2\ln 5}+c$

ג. $3e^{2x-\frac{1}{2}}+c$ ד. $\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+c$

2) א. e^x+x+c ב. $\frac{3e^{2x}}{2}-2e^x+2x+c$

3) א. $\frac{1}{4}e^{4x}-e^{-x}+c$ ב. $\frac{1}{2}e^{2x+2}+c$

ג. $\frac{0.4^x}{\ln 0.4}+\frac{3.2^x}{\ln 3.2}+\frac{200^x}{\ln 200}+c$ ד. $8\sqrt{e^x}-\frac{3}{4}e^{\frac{-4x}{3}}+c$

4) א. $2\sqrt{e^x+3}+c$ ב. $\frac{1}{e^x-3x}+c$ ג. $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

5) $f(x)=2e^x+e^{-x}-1.25$

6) $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+e^x-2x-1$

7) $f(x)=2e^{x^3}+\frac{1}{x}+1$

8) $S=$ יח"ש $1\frac{1}{3}$

9) $S=$ יח"ש 10.72

10) $S=$ יח"ש 18.41

11) $S=$ יח"ש $3\frac{1}{3}$

12) $S=$ יח"ש 0.192

13) $b=2$

15) $a=\ln 2$

16) א. $A(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=$ יח"ש 4.744

17) א. $a=-2$, $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

18) ב. $C(0,1)$, $A(1,4)$, $B\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$ ג. $S=$ יח"ש 1.03

19) א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

20) $1\frac{1}{8}\pi$ יח"נ.

פונקציה לוגריתמית:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרל של פונקציה מורכבת	אינטגרל יסודי
$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$

שאלות:

אינטגרל כללי:

1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x+1}-\frac{4}{3x-1}\right)dx$ ב. $\int \frac{x^2+3x-4}{x}dx$ ג. $\int \frac{x+3}{x^2-9}dx$

2) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{x^2+3x+5}{x+1}dx$ ב. $\int \frac{x^3-x^2+5x-6}{x-2}dx$ ג. $\int \frac{x^4+3}{x+1}dx$

3) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{2x}{x^2-3}dx$ ב. $\int \frac{x-1}{x^2-2x}dx$ ג. $\int \frac{e^x}{e^x+5}dx$

ד. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ ה. $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

אינטגרל מסוים:

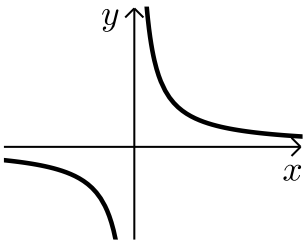
4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-\frac{1}{x-4}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(5,28)$.

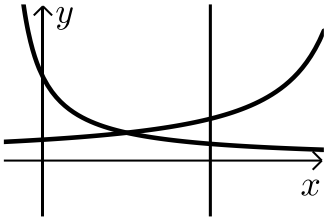
5) נתונה נגזרת שנייה של פונקציה: $f''(x)=6x-\frac{1}{x^2}$. מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(1,-2)$ וששיפועה בנקודה זו הוא 3.

חישובי שטחים:

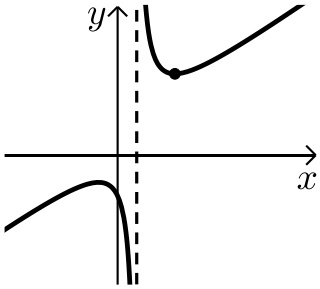
6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו-$x=-4$ וציר ה-x.
ניתן להשאיר ln בתשובה.



7) נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{4}{8-x}$, $f(x)=\frac{2}{x+1}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר $x=4$ והצירים.



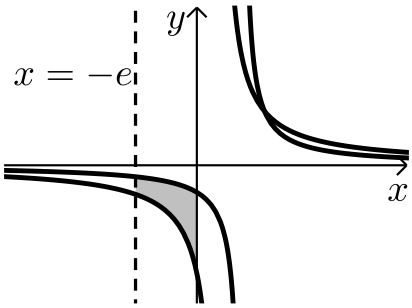
8) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$ ואנך לציר ה-x העובר בנקודת המינימום של הפונקציה.
אפשר להשאיר ביטוי עם ln בתשובה.



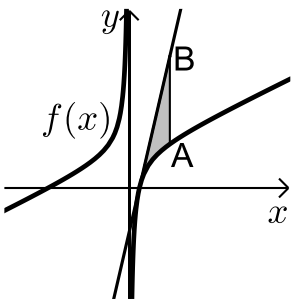
9) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{a}{x-1}$
ו-$g(x)=\frac{a-1}{x-2}$ בתחום: $x<0$.
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצא את a וכתוב את שתי הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-y והישר $x=-e$



10) נתונה הפונקציה: $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.



ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-x היא: $y=18x-9$.

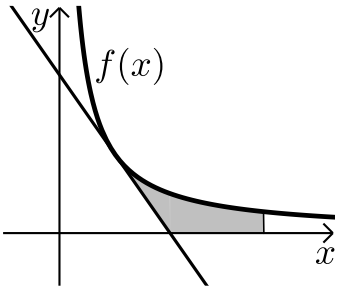
א. מצא את a ו-b וכתוב את הפונקציה.

מעבירים ישר המקביל לציר ה-y שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק בנקודה B.
אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

11) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.

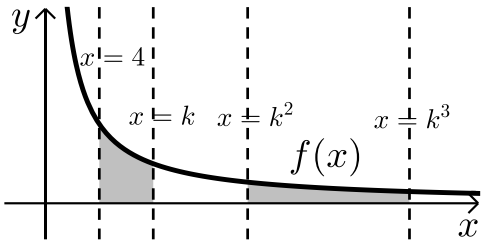


משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$ היא: $y=4-x$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק בתחום: $x>0$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה-x והישר $x=e^2$.

12) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{x}$



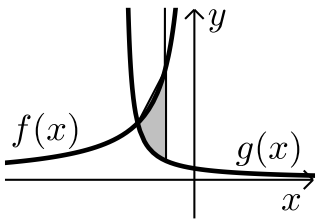
בתחום: $x>0$. מעבירים את הישרים:
$x=4$, $x=k$, $x=k^2$, $x=k^3$
כמתואר $x>4$.

א. הבע באמצעות k את השטחים: S_1 ו-S_2.

ב. הראה כי ההפרש: S_2-S_1 אינו תלוי ב-k וחשב את ערכו.

ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1. מצא את k.

13) נתונות הפונקציות: $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו- $g(x)=\frac{k}{2x+5}$.



גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=0.4$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

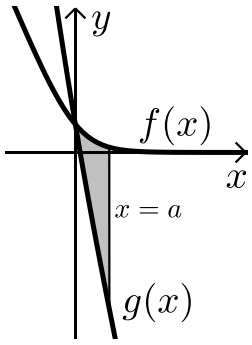
ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=-1$.

14) באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$

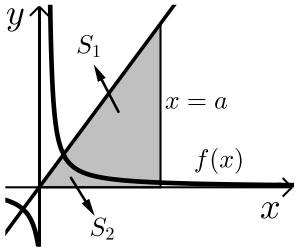
בתחום: $(x\ge 0)$.



א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y.

ב. מעבירים ישר $x=a$, $(a>1)$ המאונך לציר ה- x אשר חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).
מצא את ערכו של a עבורו מתקיים: $S=4$.

15) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{3x-1}$ והישר: $y=x$.



א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.

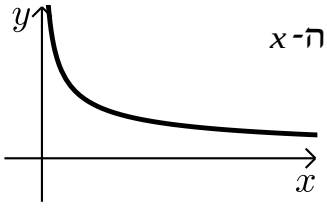
מעבירים אנך לציר ה- x - $x=a$ הנמצא מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.
האנך החותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2 המתוארים האיור.

ב. מצא את הערך של a עבורו השטח S_2 יהיה שווה ל- $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 7$.

ג. עבור ערך ה- a שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.

חישובי נפחים:

16) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.



השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=1$ ו-$x=3$ וציר ה-x מסתובב סביב ציר ה-x.
מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה.
אפשר להשאיר ln בתשובה.

17) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר $x=\ln\sqrt{3}$ מסתובב סביב ציר ה-x. חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

18) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=a$ ו-$x=a+3$, $(a>0)$
וציר ה-x מסתובב סביב ציר ה-x.
חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן הזה.

תשובות סופיות:

1) א. $3\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}+c$ ב. $\frac{x^2}{2}+3x-4\ln|x|+c$ ג. $\ln|x-3|+c$

2) א. $\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x+1|+c$ ב. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x+8\ln|x-2|+c$

ג. $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+4\ln|x+1|+c$

3) א. $\ln|x^2-3|+c$ ב. $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x|+c$ ג. $\ln|e^x+5|+c$

ד. $\ln|e^x+e^{-x}|+c$ ה. $\ln|\sin x|+c$

4) $f(x)=x^2-\ln|x-4|+3$

5) $f(x)=x^3+\ln|x|-x-2$

6) $S=$ יח"ש $\ln 4$

7) $S=$ יח"ש 2.17

8) $S=$ יח"ש $4\ln 2-2$

9) א. $a=2$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$, $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ב. $S=$ יח"ש 1.76

10) א. $b=-4$, $a=2$, $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}$ ב. $x=2$

ג. $S=6+\ln 256\approx$ יח"ש 11.54

11) א. $f(x)=\frac{4}{x}$ ב. $S=$ יח"ש $6-4\ln 2$

12) א. $S_2=2\ln k$, $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

13) א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=$ יח"ש $\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$

14) ב. $a=2$

15) א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\frac{S_1}{S_2}=5.955$

16) $V=$ יח"נ $\pi\ln 3$

17) $V=$ יח"נ $\frac{\pi}{2}\ln 2$

18) $V=$ יח"נ $\pi\left(19\frac{1}{2}+4\ln 4\right)$

פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n} \neq -1$.

שאלות:

אינטגרל של פונקצית חזקה:

1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

ב. $\int \left(4x - 2\sqrt[4]{x}\right)dx$

ג. $\int \left(x\cdot\sqrt[5]{x}\right)dx$

ד. $\int \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

ה. $\int \frac{x+4}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

ו. $\int \frac{x^3-3x+5}{\sqrt{x}}\,dx$

ז. $\int \sqrt[3]{2x-3}\,dx$

ח. $\int \sqrt[4]{5-x}\,dx$

ט. $\int \frac{3}{\sqrt[8]{7x+12}}\,dx$

י. $\int \frac{7}{\sqrt[5]{14-2x}}\,dx$

2) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^8 \left(x+\sqrt[5]{4x}\right)dx$

ב. $\int_3^{16} \left(\sqrt[4]{5x+1}\right)dx$

ג. $\int_{-10}^{5} \frac{2}{\sqrt[4]{6-x}}\,dx$

אינטגרל מסוים:

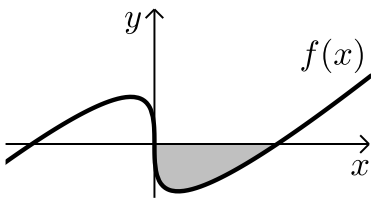
3) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=2x-\sqrt[3]{4x}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.
מצא את הפונקציה.

4) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\sqrt[3]{5x+7}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה שבה $x=4$.
מצא את הפונקציה.

5) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{x+1}}+(x-1)^2$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-y בנקודה שבה $y=-6$.
מצא את הפונקציה.

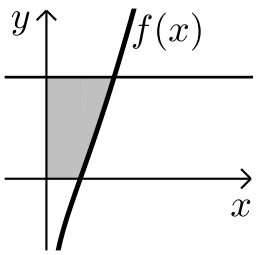
חישובי שטחים:

6) באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה: $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.



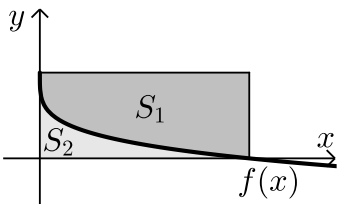
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.
ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

7) באיור שלפניך מצויר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.



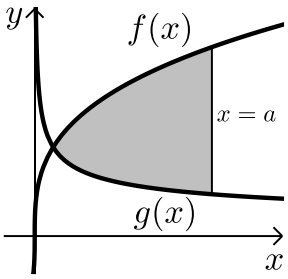
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.
ג. מעבירים אנך לציר ה-y מהנקודה $(4,6)$.
חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים.

8) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.
מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של
גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.
מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים:
ב- S_1 ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2.



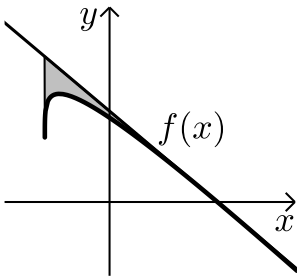
מצא את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

9) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות
הבאות: $f(x)=4\sqrt[3]{x}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.



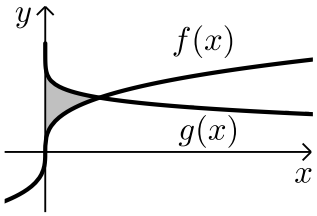
א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום: $x>0$.
ב. מעבירים אנך לציר ה- x , $x=a$, (a פרמטר).
ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים מנקודת
החיתוך שלהם ועד לאנך הוא: $42\frac{3}{16}$ סמ"ר.
מצא את a.

10) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$, (a פרמטר).
ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=2$.



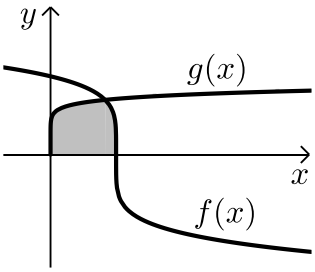
א. מצא את הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.
ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר
דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x.
ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$
והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך
מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'.
חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

11) באיור שלפניך נתונים הגרפים של
הפונקציות: $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$.



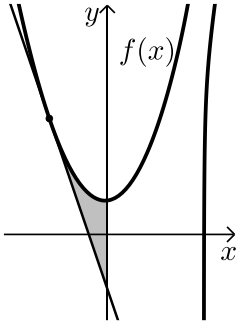
א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y .

12) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x=1.2$.



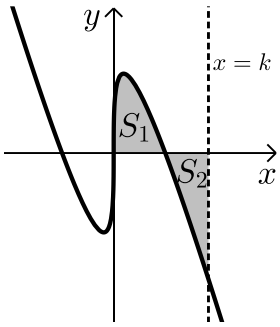
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$,
גרף הפונקציה: $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה- x .

13) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$.



א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה
בנקודה שבה $x=-3$.
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$,
המשיק וציר ה- y .

14) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$.



א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע
הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה
וציר ה- x יסומן ב- S_1 .
מעבירים ישר $x=k$ אשר יוצר את השטח S_2 כמתואר.
מצא את k אם ידוע כי: $S_1=S_2$.

תשובות סופיות:

1) א. $0.75\sqrt[3]{x^4}+c$ ב. $2x^2-1.6\sqrt[4]{x^5}+c$ ג. $\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}}+c$

ד. $4.5\sqrt[3]{x^2}+c$ ה. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}+\frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3}+c$ ו. $\frac{2}{7}\sqrt{x^7}-2\sqrt{x^3}+10\sqrt{x}+c$

ז. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4}+c$ ח. $-0.8\sqrt[4]{(5-x)^5}+c$ ט. $\frac{24}{49}\sqrt[8]{(7x+12)^7}+c$

י. $-\frac{35}{8}\sqrt[5]{(14-2x)^4}+c$

2) א. $45\frac{1}{3}$ ב. 33.76 ג. $18\frac{2}{3}$

3) $f(x)=x^2-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4}+2$

4) $f(x)=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}-12.15$

5) $f(x)=12.5\sqrt[5]{(x+1)^4}+\frac{1}{3}(x-1)^3-18\frac{1}{6}$

6) א. $(0,0)\ ;\ (8,0)$ ב. $S=$ 16 יח"ש

7) א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. $S=$ 18.149 יח"ש

8) $\frac{S_1}{S_2}=4$

9) א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

10) א. $a=1$, $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq -1.2$ ג. $(-1.2,1.2)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. $S=$ 0.48 יח"ש

11) א. $(1,1)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש

12) א. $f(x)=(6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. $S=1\frac{5}{66}$ יח"ש

13) א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=$ 4.56 יח"ש

14) א. כל x ב. $\left(-\frac{1}{8},0\right)$, $\left(\frac{1}{8},0\right)$, $(0,0)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 21 - התמרת לפלס

תוכן העניינים

1. התמרת לפלס 352
2. התמרת לפלס ההפוכה 355
3. פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס 359
4. נוסחאות - התמרת לפלס 361

התמרת לפלס

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות להתמרת לפלס.

שאלות

חשבו את התמרות לפלס בשאלות **1-12** בעזרת טבלת התמרות לפלס:

1) $L\left(t^2+4t-2\right)$

2) $L\left(\frac{1}{2}t^4+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}+1\right)$

3) $L\left(e^{-4t}+10e^{2t}\right)$

4) $L\left(\cosh 4t\right)$

5) $L\left(\sinh 10t\right)$

6) $L\left(\sin 2t\cos 2t\right)$

7) $L\left(\sin 2t\cos 3t\right)$

8) $L\left(\sin^2 t\right)$

9) $L\left(\cos^2 4t\right)$

10) $L\left(t^2\sin 4t\right)$

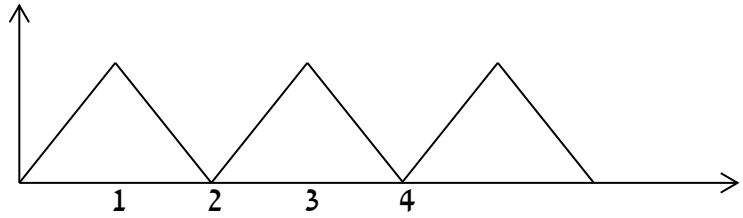
11) $L\left(t^4e^{2t}\right)$

12) $L\left(e^{2t}\sin 4t\right)$

13) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 1 & t>1 \end{cases}$.

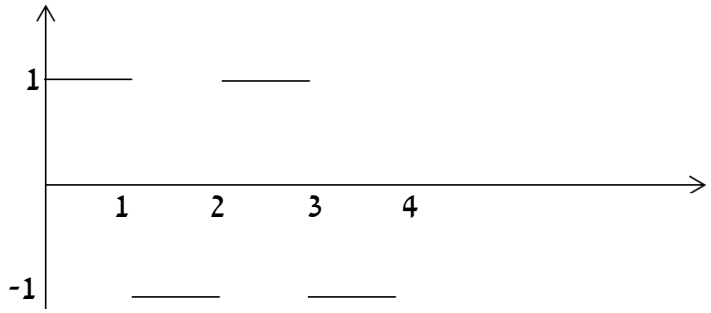
14) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 2-t & 1<t \end{cases}$.

15) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:

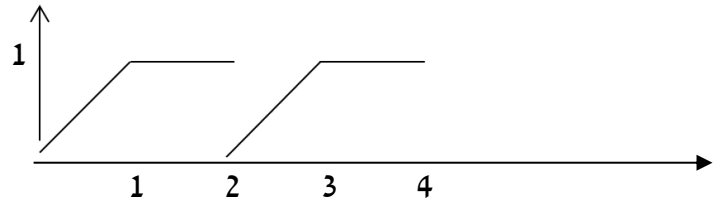


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



17) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



18) הגדירו ושרטט את פונקציית המדרגה $u(t)$ ואת ההזזה שלה $u(t-k)$.

19) שרטטו את הפונקציה $f(t)=u(t-2)-u(t-3)$, כאשר $u(t)$ פונקציית המדרגה.

20) רשמו את הפונקציה $f(t)=\begin{cases}0 & t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$, בעזרת פונקציית המדרגה.

21) רשמו את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה $u(t)$,
של הפונקציה $u(t-k)$, ושל הפונקציה $f(t-k)u(t-k)$.

22) חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ (t-4)^2 & t\ge 4\end{cases}$.

23) חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ t^2 & t\ge 4\end{cases}$.

24) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו ושרטטו את פונקציית הדלתא $\delta(t)$.

ב. מהי התמרת לפלס של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה $\delta(t-a)$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}-\frac{2}{s}$

2) $\frac{12}{s^5}+s^{-3/2}+\frac{1}{s}$

3) $\frac{1}{s+4}+10\frac{1}{s-2}$

4) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-4}+\frac{1}{s+4}\right]$

5) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-10}-\frac{1}{s+10}\right]$

6) $\frac{1}{2}\frac{4}{s^2+16}$

7) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{s^2+25}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}$

8) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}$

9) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+64}$

10) $\frac{8\left(3s^2-16\right)}{\left(s^2+16\right)^3}$

11) $\frac{24}{(s-2)^5}$

12) $\frac{4}{(s-2)^2+16}$

13) $\frac{1-e^{-s}}{s^2}$

14) $\frac{1-2e^{-s}}{s^2}$

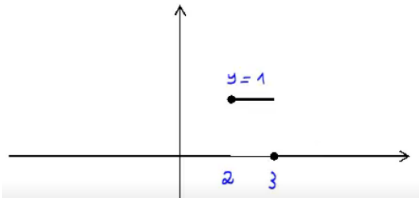
15) $\frac{1-2e^{-s}+e^{-2}}{s^2\left(1-e^{-2s}\right)}$

16) $\frac{1-e^{-s}}{s\left(1+e^{-s}\right)}$

17) $\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$

18) $u(t-k)=\begin{cases}0 & t<k\\ 1 & t\geq k\end{cases}$

19)



20) $f(t)=\begin{cases}0 & t\leq\\ 1 & t>4\end{cases}=u(t-4)$

21) $L=\left(u(t-k)\,f(t-k)\right)=e^{-ks}L\left(f(t)\right)$

22) א. $L\left((t-4)^2\cdot u(t-4)\right)=\frac{2e^{-4s}}{s^3}$

23) $e^{-4s}L\left(t^2\right)+8e^{-4t}L(t)+16\frac{e^{-4s}}{s}$

24) $L\left[\delta(t-2\pi)\right]=e^{-2\pi s}$

התמרת לפלס ההפוכה

שאלות

חשבו את ההתמרות בשאלות **1-29**:

1) $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

2) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right)$

3) $L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right)$

4) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$

5) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$

6) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right)$

7) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right)$

8) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right)$

9) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right)$

10) $L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$

11) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)$

12) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right)$

13) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right)$

14) $L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right)$

15) $L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right)$

16) $L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right)$

17) $L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right)$

18) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right)$

19) $L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right)$

20) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2-4s+4)}\right)$

21) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right)$

22) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)$

23) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right)$

24) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

25) $L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$

26) $L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right)$

27) $L^{-1}\left(\frac{3}{s}-\frac{4e^{-s}}{s^2}+\frac{4e^{-3s}}{s^2}\right)$

28) $L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1}+\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right)$

29) $L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right)$

*בשאלה **27** כתבו את התוצאה בצורה מפורטת ושרטטו אותה.

30) נתון $F(s)=\frac{e^{-s}+2}{s}$.

חשבו את $f(0)$ ו-$f(\infty)$, כאשר $f(t)=L^{-1}(F(s))$.

פתרו בשתי דרכים שונות.

הערה: $f(0)=\lim_{t\to 0} f(t)$, $f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)$.

31) הסבירו והדגימו את משפט הקונוולוציה.

השתמשו במשפט הקונוולוציה כדי לחשב את התרגילים הבאים:

32) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-1)}\right)$

33) $L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right)$

34) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right)$

35) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{t^3}{3!}$

3) e^{10t}

4) $\frac{1}{3}\sin 2t$

5) $\cos 2t$

6) $e^{10t}\frac{1}{2}\sin 2t$

7) $e^{2t}\left\{\cos 2t+2\frac{1}{2}\sin 2t\right\}$

8) $\frac{1}{4}t\sin 2t$

9) $\frac{1}{4}t\sin 2t$

10) $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}$

11) $\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$

12) $1-2e^{-5t}$

13) $3e^{-3t}-2e^{-2t}$

14) $1+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}$

15) $e^{-t}+2e^{-2t}+3e^{3t}$

16) $e^{-3t}+e^{3t}-e^{-2t}-e^{2t}$

17) $e^{2t}+4te^{2t}-e^{-2t}$

18) $-6+5t+6e^{-2t}$

19) $4-4e^{-3t}-3te^{-3t}$

20) $2e^{t}+te^{t}-2e^{2t}+te^{2t}$

21) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$

22) $\frac{1}{\sqrt{0.75}}e^{-0.5t}\sin\sqrt{0.75}t$

23) $\sin t+2e^{3t}$

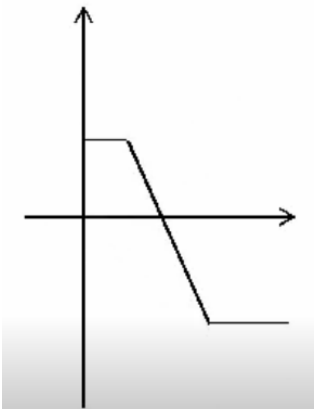
24) $\cos t+e^{-2t}$

25) $\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t$

26) $e^{t}-\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+5t\sin 2t+\frac{5}{4}\left(\sin 2t-2t\cos 2t\right)$

27) א. $3-4u(t-1)\cdot(t-1)+4u(t-3)\cdot(t-3)$

ב. $\begin{cases}3 & t<1\\ 7-4t & 1<t<3\\ -5 & t\geq 3\end{cases}$; שרטוט:



28) $u(t-4)e^{-(t-4)}+u(t+2)\sin(t+2)$

29) $u(t-10)\left(e^{t-10}-e^{2(t-10)}\right)$

30) $f(0)=2 \quad f(\infty)=3$

31) שאלת הסבר.

32) $-\frac{1}{2}\left(t^2+2t+2\right)+e^t$

33) $0.5t-\frac{1}{4}\sin 2t$

34) $\frac{1}{4}e^{4t}(t-1)+\frac{1}{4}$

35) $\frac{1}{2}\left(-2\cos t+2-t\sin t\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס:

1) $y(0)=0\ ;\ y'+4y=e^{-3t}$

2) $y(0)=-1\ ,\ y'(0)=4\ ;\ y''+4y'+4y=10e^{-2t}$

3) $y(0)=-1,\ y'(0)=-4\ ;\ y''-4y'=16$

4) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+4y'=8t+2$

5) $y(0)=y'(0)=\frac{1}{4}\ ;\ 4y''-4y'=te^{t}+e^{t}$

6) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''-3y'+2y=u(t-4)$,
כאשר $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$ היא פונקציית המדרגה.

7) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+y'=f(t)$, כאשר $f(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2 & t\geq 1\end{cases}$.

8) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+5y'+6y=h(t)$, כאשר $h(t)=\begin{cases}1 & 0<t<2\\ 0 & t\geq 2\end{cases}$.

9) $y(0)=y'(0)=0, y''(0)=3\ ;\ y'''+4y''+5y'+2y=10\cos t$

10) $y(0)=0,\ y'(0)=0\ ;\ y''+2y'+2y=\delta(t-\pi)$

11) $y(0)=2,\ y'(0)=-3\ ;\ y''+3y'-10y=4\delta(t-2)$

12) $y(0)=0,\ y'(0)=0\ ;\ -y''+4y=\delta(t-2\pi)-\delta(t-\pi)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y(t)=e^{-3t}-e^{-4t}$

2) $y(t)=e^{-2t}(5t^2+2t-1)$

3) $y(t)=-4t-1$

4) $y(t)=t^2$

5) $y(t)=\frac{1}{8}e^t(t^2+2)$

6) $y(t)=u(t-4)\left(0.5-e^{t-4}+e^{2(t-4)}\right)$

7) $y(t)=2u(t-1)\cdot\left(-1+(t-1)+e^{-(t-1)}\right)$

8) $y(t)=\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\right]-u(t-2)\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2(t-2)}+2e^{-3(t-2)}\right]$

9) $y(t)=-\cos t+2\sin t+2e^{-t}-2te^{-t}-e^{-2t}$

10) $y(t)=-u(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\sin(t)$

11) $y(t)=\frac{4}{7}u(t-2)\left[e^{2(t-2)}-e^{-5(t-2)}\right]+e^{2t}+e^{-5t}$

12) $y(t)=-\frac{1}{2}u(t-2\pi)\left[\sinh\left(2(t-2\pi)\right)\right]+\frac{1}{2}u(t-\pi)\left[\sinh\left(2(t-\pi)\right)\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחאות – התמרת לפלס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n \ (\text{for } n=1,2,3,\ldots)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \ (\text{for } n=1,2,3,\ldots)$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1}e^{at}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin(at)+at\cos(at))$
$\frac{a}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\sin at$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$\frac{s+b}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\cos at$
$\frac{2sa}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\sin at$
$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\cos at$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\frac{1}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$\frac{1}{2a^3}\left(\sin(at)-at\cos(at)\right)$
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-\frac{3}{2}}$	$\sqrt{t}$
$\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{e^{-ks}}{s}$	$u(t-k)$
$e^{-ks}\cdot F(s)$	$u(t-k)f(t-k)$
$(-1)^n\left(F(s)\right)^{(n)}$	$t^n g(t)$

תוספות

- נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה $F(s)$, של פונקציה $f(t)$,
ורוצים את $f(0)$ ו-$f(\infty)$.
אז במקום למצוא את $f(t)$ ולהציב, ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

- קונוולציה:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$\boxed{L\left(f(t)*g(t)\right)=F(s)\cdot G(s)}$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=f(t)*g(t)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©