מתמטיקה להנדסאים

תוכן העניינים

1. מבוא לאלגברה 1
2. משוואות אלגבריות 47
3. אי שיוויונים אלגבריים 64
4. שינוי נושא נוסחא ..... (ללא ספר)
5. בעיות מילוליות עם שטחים והיקפים 73
6. גיאומטריה - שטחים והיקפים ..... (ללא ספר)
7. גיאומטריה אנליטית - הישר 80
8. גיאומטריה אנליטית - המעגל 92
9. חוקי החזקות והשורשים 99
10. משוואות ואי-שוויונים מעריכיים ..... (ללא ספר)
11. חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שווינים לוגריתמיים ..... (ללא ספר)
12. וקטורים גיאומטריים 109
13. וקטורים אלגבריים 123

מתמטיקה להנדסאים

פרק 1 - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

1. מספרים מכוונים 1
2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים 5
3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים 7
4. אחוזים 8
5. כפל וחילוק שברים 14
6. חיבור וחיסור שברים 16
7. בעיות יסודיות באחוזים 20
8. חזרה על תבניות מספר 22
9. כינוס איברים 24
10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים 26
11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר 29
12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים 31
13. פירוק הטרינום 34
14. שברים אלגברים 36
15. כפל וחילוק של שברים אלגברים 40
16. חיבור וחיסור של שברים אלגברים 42
17. שברים כפולים 46

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2- ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שוני סימן - התוצאה תהיה שלילית.

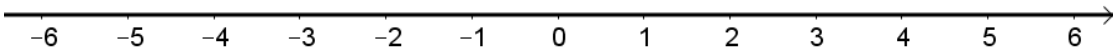
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-2\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ -5\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ 4\ ,\ -3\frac{1}{2}$$



2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3+2$

ב. $-3-2$

ג. $3-2$

ד. $-3+2$

ה. $-1-4$

ו. $7+10$

ז. $-6+5$

ח. $-7+3$

3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $5+7-23+1$

ב. $5-8-12+17$

ג. $3-14+2+6$

ד. $-4-11+2+9$

ה. $6-21+3-7$

ו. $-7-13+5-3$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $4\cdot 9$

ב. $4\cdot(-7)$

ג. $(-6)\cdot(-5)$

ד. $(-5)\cdot(-3)$

ה. $(-2)\cdot 8$

ו. $(-8)\cdot 5$

ז. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)$

ח. $2\cdot 3\cdot 3$

ט. $(-2)\cdot 3\cdot(-3)$

י. $(-2)\cdot(-3)\cdot 3$

יא. $2\cdot 3\cdot(-3)$

יב. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)$

יג. $(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

יד. $1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה:

א. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-2)$

ב. $(-5)\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ג. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ד. $5\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-25):(-5)$

ב. $(-30):3$

ג. $40:(-10)$

ד. $(-32):(-4)$

ה. $(-6):18$

ו. $4:(-16)$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{-60}{12}$

ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות:

א. $0:5$

ב. $(-2)\cdot 0$

ג. $0\cdot(-3)\cdot 4$

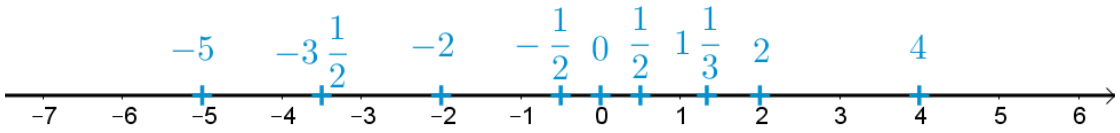
ד. $6:0$

ה. $0+4$

ו. $0-4$

תשובות סופיות:

1) להלן מערכת הצירים:



2) א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5
ו. 17 ז. -1 ח. -4.

3) א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18.

4) א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16
ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18
יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16.

5) א. + ב. + ג. - ד. -.

6) א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$.

7) א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4.

8) א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4.

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר זוגי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. 3^2
ב. 3^3
ג. $(-3)^3$
ד. $(-2)^3$
ה. 4^3
ו. 3^4
ז. $(-5)^3$
ח. 10^4
ט. $-(-3)^4$
י. -5^4
יא. -4^3
יב. $-(-2)^6$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt[3]{-27}$
ב. $\sqrt[4]{625}$
ג. $\sqrt[4]{-16}$
ד. $\sqrt[5]{-32}$
ה. $-\sqrt[4]{81}$
ו. $-\sqrt[3]{1000}$

תשובות סופיות:

1) א. 9 ב. 27 ג. -27 ד. -8 ה. 64 ו. 81.
ז. -125 ח. 10000 ט. -81 י. -625 יא. -64 יב. -64.

2) א. -3 ב. 5 ג. לא מוגדר. ד. -2 ה. -3 ו. -10.

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{81}+3\cdot 2^3-40:8$

ב. $(-3)^2:9-2\cdot\left(-4^2\right)$

ג. $\sqrt{144}-20:4+3\cdot(-2)^2$

ד. $3+4\cdot\left[-3+4\cdot(-2)\right]+\sqrt{10+6}$

ה. $(-3)^4:(-9)-5\cdot(-2)^3$

ו. $-\sqrt{9}+5^2:(-4-1)-24:12\cdot 3$

ז. $-2^5:(-8)+4^2-3\cdot 5$

ח. $\sqrt[3]{-27}+4\cdot 3^2-2\cdot 3^3$

ט. $\left[6\cdot(-1)^4-10\cdot(-1)^3\right]\cdot(-1)^5$

י. $\left(8-\sqrt[3]{64}\right)\cdot\left(2\cdot(-4)-\sqrt[5]{243}\right)$

יא. $\dfrac{3^2\cdot(8-2\cdot 3)^3}{\left(5^2\cdot 3-72\right)\cdot(-4)}+2\cdot\left\{15-20:(4+3\cdot 2)\right\}$

תשובות סופיות:

1) א. 28 ב. 33 ג. 19 ד. -37 ה. 31 ו. -14

ז. 5 ח. -21 ט. -16 י. -44 יא. 20

אחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית - שבר:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ...
שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שלמים}}.\underbrace{YYY}_{\text{שברים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

הגדרה - אחוז:

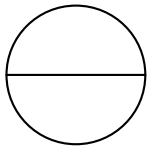
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45% , והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

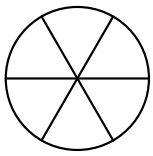
שאלות:

12) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

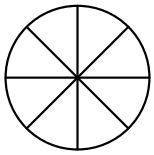
א. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגול



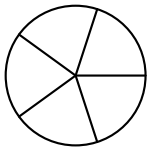
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגול



ג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

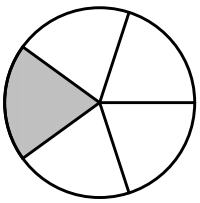


ד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגול

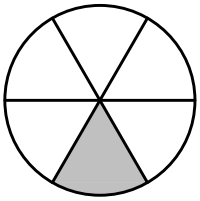


13) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

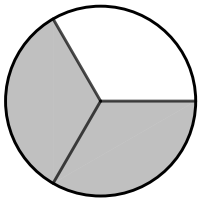
א. שבר:



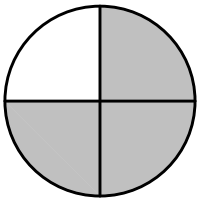
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



14) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי מכנה 4, לפי מכנה 18, לפי מכנה 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי מכנה 10, לפי מכנה 25, לפי מכנה 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי מכנה 16, לפי מכנה 32, לפי מכנה 88.

15) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן:

א. $\frac{25}{30}$ ב. $\frac{10}{30}$ ג. $\frac{6}{24}$ ד. $\frac{4}{20}$

ה. $\frac{35}{56}$ ו. $\frac{24}{42}$ ז. $\frac{36}{48}$ ח. $\frac{33}{121}$

16) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים:

א. $-\frac{20}{3}$ ב. $\frac{19}{4}$ ג. $\frac{12}{5}$ ד. $\frac{22}{5}$

ה. $-\frac{34}{6}$ ו. $-\frac{50}{7}$ ז. $\frac{47}{8}$ ח. $\frac{60}{9}$

17) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים:

א. $1\frac{2}{3}$ ב. $3\frac{5}{6}$ ג. $4\frac{1}{2}$ ד. $6\frac{1}{4}$

ה. $11\frac{3}{4}$ ו. $-2\frac{5}{8}$ ז. $-6\frac{2}{7}$ ח. $12\frac{7}{9}$

18) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $\frac{3}{10}$ או $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{8}$ או $\frac{7}{6}$

ג. $\frac{2}{3}$ או $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{5}{18}$ או $\frac{7}{12}$

19) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים:

א. 0.7	ב. 0.07	ג. 0.007	ד. 0.34
ה. 0.304	ו. 0.65	ז. 1.2	ח. 1.02
ט. 1.42	י. 3.5	יא. 6.03	יב. 5.125

20) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{3}{100}$	ג. $\frac{3}{1000}$	ד. $\frac{23}{1000}$
ה. $\frac{1}{2}$	ו. $\frac{3}{4}$	ז. $\frac{2}{5}$	ח. $\frac{4}{25}$
ט. $\frac{7}{50}$	י. $\frac{3}{20}$	יא. $\frac{7}{8}$	יב. $\frac{9}{16}$
יג. $9\frac{1}{10}$	יד. $3\frac{1}{5}$	טו. $4\frac{7}{8}$	טז. $-4\frac{1}{16}$

21) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית
(היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$	ב. $\frac{5}{6}$	ג. $\frac{3}{7}$	ד. $\frac{2}{11}$

22) המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25%	ב. 32%	ג. 64%	ד. 80%
ה. 120%	ו. 5%	ז. 300%	ח. 150%

23) המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{4}{5}$	ד. $\frac{7}{20}$
ה. $\frac{11}{40}$	ו. $\frac{70}{125}$	ז. $\frac{5}{6}$	ח. $\frac{4}{9}$

תשובות סופיות:

12) תשובה מודגמת בסרטון.

13) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$.

14) א. $\frac{40}{80},\frac{18}{36},\frac{4}{8}$ ב. $\frac{180}{300},\frac{75}{125},\frac{30}{50}$ ג. $\frac{440}{700},\frac{160}{256},\frac{80}{128}$

15) א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$
ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$

16) א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$
ז. $5\frac{7}{8}$ ח. $6\frac{2}{3}$

17) א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$
ז. $-\frac{44}{7}$ ח. $\frac{115}{9}$

18) א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$

19) א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$
ז. $1\frac{1}{5}$ ח. $1\frac{1}{50}$ ט. $1\frac{21}{50}$ י. $3\frac{1}{2}$ יא. $6\frac{3}{100}$ יב. $5\frac{1}{8}$

20) א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75
ז. 0.4 ח. 0.16 ט. 0.14 י. 0.15 יא. 0.875
יב. 0.5625 יג. 9.1 יד. 3.2 טו. 4.875 טז. -4.0625

21) א. $0.\overline{6}$ ב. $0.8\overline{3}$ ג. 0.428 ד. $0.1\overline{8}$

22) א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$
ז. 3 ח. $1\frac{1}{2}$

23) א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$ ב. $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$ ג. $\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{10}$

ד. $3\cdot\frac{4}{5}$ ה. $6\cdot\frac{2}{3}$ ו. $\frac{12}{25}\cdot 5$

ז. $1\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{4}$ ח. $3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{2}{5}$ ט. $3\frac{3}{7}\cdot 2\frac{2}{5}$

י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ יא. $\frac{4}{5^3}$ יב. $\frac{4^3}{5}$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5}:\frac{4}{9}$ ב. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ ג. $\frac{3}{25}:\frac{7}{10}$

ד. $8:\frac{2}{9}$ ה. $10:\frac{2}{3}$ ו. $\frac{5}{6}:3$

ז. $\frac{2}{5}:5$ ח. $3\frac{3}{4}:5\frac{5}{8}$ ט. $2\frac{2}{5}:1\frac{3}{15}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. 4 ו. $2\frac{2}{5}$

ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$

2) א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. 36 ה. 15 ו. $\frac{5}{18}$

ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. 2

חיבור וחיסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b, המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.

  דוגמא: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$, $\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2-3}{7}=\frac{-1}{7}$.

- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.

  דוגמא: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$, $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{3-10}{12}=-\frac{7}{12}$.

- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.

  דוגמא: $3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$.

  חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.

  דוגמא: $3-\frac{1}{4}=2\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$.

  דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

  דוגמא: $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{6}=\frac{17}{5}+\frac{13}{6}=\frac{17\cdot 6}{30}+\frac{13\cdot 5}{30}=\frac{102+65}{30}=\frac{167}{30}=5\frac{17}{30}$.

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה,

ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

דוגמא: $2\frac{3}{4}-5\frac{1}{3}=(2-5)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=-3+\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=-3+\frac{5}{12}=-2\frac{7}{12}$.

שאלות:

1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3 ב. 2 ו-4 ג. 3 ו-5 ד. 6 ו-10

ה. 4 ו-10 ו. 4 ו-6 ז. 3, 5 ו-10 ח. 2, 3 ו-8

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$ ב. $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$

ג. $\frac{4}{13}+\frac{9}{13}$ ד. $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$

ה. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$ ו. $\frac{8}{9}-\frac{7}{9}$

ז. $\frac{2}{12}-\frac{5}{12}$ ח. $\frac{2}{5}-\frac{6}{5}$

ט. $\frac{2}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}$ י. $\frac{7}{15}+\frac{8}{15}-\frac{6}{15}$

3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$ ב. $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6}-\frac{1}{12}$ ד. $\frac{3}{6}-\frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+\frac{2}{8}$ ו. $\frac{7}{3}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$ ח. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{3}{5}$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2+\frac{5}{6}$

ב. $2-\frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3}+4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8}-6\frac{1}{2}$

ז. $2+\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+\frac{8}{20}$

5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14}:\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11}\cdot 2\frac{3}{4}-6:\frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5}:\frac{9}{10}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{4}$

תשובות סופיות:

1) א. 6 ב. 4 ג. 15 ד. 30 ה. 20 ו. 12
ז. 30 ח. 24

2) א. $\frac{4}{5}$ ב. $\frac{7}{9}$ ג. 1 ד. $1\frac{3}{4}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{1}{9}$
ז. $-\frac{1}{4}$ ח. $-\frac{4}{5}$ ט. $1\frac{5}{8}$ י. $\frac{3}{5}$

3) א. $1\frac{5}{6}$ ב. $\frac{7}{10}$ ג. $\frac{7}{12}$ ד. $-\frac{1}{8}$ ה. 5 ו. $3\frac{5}{6}$
ז. $\frac{19}{21}$ ח. $-\frac{1}{10}$

4) א. $2\frac{5}{6}$ ב. $1\frac{1}{6}$ ג. $3\frac{1}{12}$ ד. $1\frac{5}{12}$ ה. $7\frac{11}{12}$ ו. $-\frac{5}{8}$
ז. $2\frac{13}{18}$ ח. $-\frac{1}{20}$

5) א. $2\frac{11}{24}$ ב. $1\frac{1}{10}$ ג. $-13\frac{3}{4}$ ד. $2\frac{5}{6}$ ה. $3\frac{5}{18}$

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $\frac{40}{100}\cdot 120 = 48$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48**.

שאלות:

1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
א. כמה בנות בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
א. כמה תלמידים בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
א. מהו מחירו בסוף העונה?
ב. מה גודל ההנחה?

4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
א. מה מחירו הסופי?
ב. מה גודל ההתייקרות?

5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪.
מה מחירו בתחילת השנה?

7) ענה על השאלות הבאות:

א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים. מה אחוז הבנים בקהל?

ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות. מה אחוז הבנות בכיתה?

ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?

ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?

תשובות סופיות:

1) א. 18 בנות. ב. 12 בנים.

2) א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.

3) א. 240 ₪ ב. 60 ₪

4) א. 540 ₪ ב. 40 ₪

5) 4.9755 ₪

6) 400 ₪

7) א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).
ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3\cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה-x הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$

ב. x^2+3x כאשר $x=2$

ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$

ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$

ה. x^3+1 כאשר $x=-2$

ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$

ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$

ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה-x הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$

ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$

3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

א. $a^2+2ab+b^2$ עבור: $a=3\ ,\ b=-5$.

ב. $(x-3)^2+3x^2b$ עבור: $x=5\ ,\ b=-1$.

ג. $-x^3-2xy+y^4$ עבור: $x=-2\ ,\ y=-1$.

ד. $\frac{(a-2c)^4}{a}-a^2$ עבור: $a=2\ ,\ c=-2$.

ה. $\frac{4a^2-3b}{c}$ עבור: $a=-1\ ,\ b=2\ ,\ c=-4$.

ו. $\sqrt{c-3a}$ עבור: $a=-1\ ,\ c=13$ ועבור: $a=\frac{1}{3}\ ,\ c=82$.

ז. $\frac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ עבור: $m=3\ ,\ q=48\ ,\ p=-5$.

תשובות סופיות:

1) א. 11 ב. 10 ג. -12 ד. -65 ה. -7 ו. 5
ז. -10 ח. 45

2) א. $\frac{10}{27}$ ב. $5\frac{22}{27}$

3) א. 4 ב. -71 ג. 5 ד. 644 ה. $\frac{1}{2}$
ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שניה: 9 ז. -37

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x+6x-5x=(3+6-5)x=4x$.

איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.

כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

1) כנס איברים דומים:

א. $5x+7x-4x$

ב. $9x^2-2x^2-3x^2-2x^2$

ג. $-10xy+15xy+xy-2yx$

ד. $x^2y-3yx^2+x^2y$

ה. $8a^2+10a-5a^2-11a+a^2$

ו. $2x^2-3m^2-x^2+3m^2$

ז. $3xy+y-30y+6yx-7y$

ח. $mn^2+4m^2n+6n^2m-10nm^2+mn^2$

ט. $-6+x^3+4-3x^3+17x^3-17$

י. $y^2+x^2-5x^2+5y^2+4x^2-6y^2$

יא. $7x^2-3x-4x+2$

יב. $5xy+2x-3yx-x+1$

יג. $3-x-x^2+4x+5x^2-12$

יד. $x+xy+y-6yx-6y-6x$

טו. $mn+n-5m+5nm-14n+3m$

טז. $ab^2+6ba^2-6b+16a^2b+3b-6b^2a$

יז. $z^3-4z^2+7-z^3-8+8z^2$

יח. $4x^2z+6xz^2-6-xz^2+12+10zx^2$

יט. $2-x^3-3-4x^2+2x+x^3+x^2-2$

כ. $x^3-3x-4x^2+2x+x^3+x^2-2x^3$

כא. $2a^2b+3x^2y+5a^2b+10x^2y$

כב. $12x^2y^3+13a^2-20x^2y^3+2a^2$

כג. $2y^2-4x^3y^2-10y^2-x^3y^2$

כד. $-2x^3y+5x^2-4yx^3-6x^2$

כה. $2a^2b+2b+3a^2+5b$

כו. $5a^2b-8ab^2+20a^2b-14ab^2$

כז. $-12x^2+2y^2+3x^2y+14xy^2-5xy^2-6y^2+2xy+11x^2+x^2y-9xy$

כח. $21x^3y^3+x^2y^2-3xy^3+x^3y-15x^2y^2-7x^3y+12x^3y^3-4xy^3+4xy^3-6x^3y$

תשובות סופיות:

1) א. $8x$ ב. $2x^2$ ג. $4xy$

ד. $-x^2y$ ה. $4a^2-a$ ו. x^2

ז. $9xy-36y$ ח. $8mn^2-6nm^2$ ט. $15x^3-19$

טו. $-13n-2m+6mn$ טז. $-5ab^2+22a^2b-3b$ י. 0

יא. $7x^2-7x+2$ יב. $2xy+x+1$ יג. $4x^2+3x-9$

יד. $-5x-5y-5xy$ יז. $4z^2-1$ יח. $14x^2z+5xz^2+6$

טו. $-3x^2+2x-3$ כ. $-3x^2-x$ כא. $7a^2b+13x^2y$

כב. $-8x^2y^3+15a^2$ כג. $-8y^2-5x^3y^2$ כד. $-6x^3y-x^2$

כה. $2a^2b+3a^2+7b$ כו. $25a^2b-22ab^2$

כז. $-x^2-4y^2+4x^2y+9xy^2-7xy$

כח. $33x^3y^3-14x^2y^2-3xy^3-12x^3y$

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

- $a(b+c)=ab+ac$.
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x\cdot 3x$ ב. $-4x\cdot(-7x)$ ג. $-2x\cdot(-4x)\cdot(-3)$

ד. $8m^2\cdot 4m^3$ ה. $3a^3\cdot(-2a^2)$ ו. $-b\cdot 4b^2\cdot\frac{b^2}{2}$

ז. $a\cdot 3b$ ח. $4a^2\cdot 7b^2$ ט. $ab\cdot(-2a^2b)$

2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$ ב. $2(-3x^2+5x-1)$

ג. $(7x-2)4$ ד. $(1-2x)(-2)$

ה. $a(3a-1)$ ו. $b(b^2-3b+4)$

ז. $2x(5x+3)$ ח. $5x(x^2+2x-3)$

ט. $3t^2(4t-t^2+6)$ י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$

ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$

ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$

ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

ה. $(3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$

ו. $3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+2)$

ב. $(x+3)(x-7)$

ג. $(3-x)(x+4)$

ד. $(3x+4)(5x+1)$

ה. $3(4x+1)(2x-3)$

ו. $-2(3x-1)(5-2x)$

5) פשט את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+3)+2(3-x)$

ב. $(a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$

ג. $(2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6)$

ד. $-x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2)$

תשובות סופיות:

1) א. $6x^2$ ב. $28x^2$ ג. $-24x^2$ ד. $32m^5$ ה. $-6a^5$ ו. $-2b^5$

ז. $3ab$ ח. $28a^2b^2$ ט. $-2a^3b^2$

2) א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$

ה. $3a^2-a$ ו. b^3-3b^2+4b ז. $10x^2+6x$ ח. $5x^3+10x^2-15x$

ט. $12t^3-3t^4+18t^2$ י. $10d^5-7.5d^2$

3) א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$

ו. $10y^2+32y-27$

4) א. x^2+x-2 ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$

ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$

5) א. x^2+3 ב. 7 ג. $18m^2-6m-39$ ד. $-3x^5y^3+3x^4y^2$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$ ב. $(x+2)^2$ ג. $(4x+5)^2$

ד. $(6x+2)^2$ ה. $(7x+y)^2$ ו. $(5x+2y)^2$

ז. $(x^2+7)^2$ ח. $(x^2+y^2)^2$ ט. $(x^3+2y^2x)^2$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$ ב. $(x-2)^2$ ג. $(5-x)^2$

ד. $(6x-1)^2$ ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$ ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$

ז. $(3m-2n)^2$ ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ ט. $\left(x^2y^2-7\right)^2$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$ ב. $(3+x)(x-3)$

ג. $(3x-1)(3x+1)$ ד. $(5-7x)(7x+5)$

ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$

ז. $(x^2+y)(x^2-y)$ ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$

ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$

ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$

ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$

ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$

ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

תשובות סופיות:

1) א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$

ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$

ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$

2) א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$

ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$

ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$

3) א. x^2-25 ב. x^2-9 ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$

ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. x^4-y^2 ח. $9a^4b^6-16$

4) א. x^2+2 ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$

ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:
  - הוצאת מספר משותף: $2x-8=2(x-4)$.
  - הוצאת אות משותפת: $x^2-12x=x(x-12)$.
  - הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2-21x=3x(x-7)$.
- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:
  - נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
  - נוסחה להפרש ריבועים: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x-12$ ב. $6y-4$

ג. $20-8a$ ד. $4a^3+8b$

ה. $75m^2+25m+15$ ו. $40a^2-8b^2+64c^2$

2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. y^2+5y ב. $3x-11x^3$

ג. $6y^2+5y^3+4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7-\frac{1}{4}a^5+a^3$

3) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $2x^2-8x$ ב. $3t^2+12t$

ג. $5n^3-20n^2+50n$ ד. $8y^2+6y^3-2y^4$

ה. $4x^2y^2+16x^2y-20xy^2$ ו. $27mn-3n^2m+9n^3m$

4) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $x^2+10x+25$ ב. $x^2+12x+36$

ג. $y^2-18y+81$ ד. $y^2-22y+121$

ה. $4x^2+4x+1$ ו. $16y^2-8y+1$

ז. $9x^2-24x+16$ ח. $25x^2+70x+49$

5) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. r^2-25 ב. x^2-81

ג. $25y^2-49$ ד. $121x^2-1$

ה. x^2y^2-4 ו. $9y^4-169x^4$

6) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר:

א. $y-y^3$ ב. x^3-10x^2+25x

ג. m^4-1 ד. $196x^4-140x^3+25x^2$

תשובות סופיות:

1) א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$

ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$

2) א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$

ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$

3) א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$

ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$

4) א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$

ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$

5) א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$

ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$

6) א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$

ד. $x^2(14x-5)^2$

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: ax^2+bx+c כאשר a, b ו-c הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו-m_2, שמקיימים: $m_1\cdot m_2=ac$ ו-$m_1+m_2=b$.

לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2+bx+c=ax^2+m_1x+m_2x+c$.

השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2+m_1x}+\underbrace{m_2x+c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו-m_2 באופן הבא: $m_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $m_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום כמכפלה: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)\left(x-m_2\right)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$ אז נכתוב: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. x^2+5x+4 ב. $x^2-8x+15$ ג. $x^2-33x+62$

ד. $2x^2+7x-15$ ה. $3x^2-11x+6$ ו. $6x^2+5x+1$

ז. $2x^2+x-6$ ח. $x^2-18x+81$ ט. x^2+2x+8

2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

א. $6x^2+5x+1$ ב. x^2+5x+4

ג. $4x^2+20x+25$ ד. $3x^2-x+20$

תשובות סופיות:

1) א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$

ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$

ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.

2) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

דוגמא לשברים אלגבריים: $\frac{4}{x-x^3}$, $\frac{3x}{x^2+1}$, $\frac{x+1}{x+2}$.

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: $\frac{3x+5}{4}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

דוגמא: השבר $\frac{1}{x+4}$ לא מוגדר כאשר $x=-4$ מכיוון שמתקבל: $\frac{1}{0}$.

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x\neq -4$ ומשמעו היא ש-x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט 4-, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים.
במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

- צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: $\frac{2x+8}{x+4}=\frac{2\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=\frac{2\cdot 1}{1}=2$.
- צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: $\frac{3x-15}{x^2-10x+25}=\frac{3\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}}}=\frac{3\cdot 1}{x-5}=\frac{3}{x-5}$.
- צמצום ע"י פירוק טרינום: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$.

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$

ב. $\frac{5}{x-6}$

ג. $\frac{x+7}{2x-8}$

ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$

ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$

ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$

ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$

ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$

ב. $\frac{a-x}{a}$

ג. $\frac{a-ax}{a}$

ד. $\frac{x+1}{y+1}$

ה. $\frac{x}{x+y}$

ו. $\frac{6x}{6y}$

ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$

ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

ט. $\frac{4x^2y}{xy}$

י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$

ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$

ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$

ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$

ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$

ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$

ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$

ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2+10x+25}{2x+10}$

ב. $\frac{8n-n^2}{n^2-16n+64}$

ג. $\frac{z^3-4z^2}{2z^2-16z+32}$

ד. $\frac{4m^2+20m+25}{4m^2+10m}$

ה. $\frac{18y^2-24y+8}{2y-3y^2}$

ו. $\frac{a^3+4a^2b+4ab^2}{3ab+6b^2}$

5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$

ב. $\frac{m^2-12m+32}{m-4}$

ג. $\frac{4y-10}{2y^2+y-15}$

ד. $\frac{3z^2+26z+16}{3z+2}$

ה. $\frac{x^2+5x-36}{x^3+9x^2}$

ו. $\frac{9n^2-12n}{4+5n-6n^2}$

ז. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

ח. $\frac{x^2-14x+49}{x^2+x-56}$

ט. $\frac{3a^2b-10ab^2+3b^3}{-3a^3b+11a^2b^2-6ab^3}$

י. $\frac{m^3n-m^2n^2-m^2+mn}{2m^2n^3+mn^2-3n}$

תשובות סופיות:

1) א. $x\neq -3$ ב. $x\neq 6$ ג. $x\neq 4$ ד. $x\neq 0\ ,\ x\neq 4$

ה. $x\neq -1$ ו. $x\neq 2\ ,\ x\neq -2$ ז. $y\neq 0\ ,\ y\neq -1\ ,\ y\neq 1$

ח. $x\neq 0\ ,\ x\neq 1\ ,\ x\neq 4$

2) א. x ב. לא ניתן לצמצם. ג. $1-x$

ד. לא ניתן לצמצם. ה. לא ניתן לצמצם. ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$

ח. לא ניתן לצמצם. ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם.

3) א. $3\ ,\ x\neq -4$ ב. $\frac{m}{4}\ ,\ m\neq -4$ ג. $\frac{2}{a}\ ,\ a\neq 0,6$

ד. $-\frac{x}{3}\ ,\ x\neq 5$ ה. $-3\ ,\ y\neq \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ ו. $\frac{2x^2}{3}\ ,\ x\neq \frac{1}{2}$

ז. $\frac{3}{y(y-3)}\ ,\ y\neq 0,3$ ח. $\frac{3z^2-12z+4}{z+5}\ ,\ z\neq 0,-5$

4) א. $\frac{x+5}{2}\ ,\ x\neq -5$ ב. $\frac{n}{8-n}\ ,\ n\neq 8$ ג. $\frac{z^2}{2(z-4)}\ ,\ z\neq 4$

ד. $\frac{2m+5}{2m}\ ,\ m\neq 0,-\frac{5}{2}$ ה. $\frac{2(2-3y)}{y}\ ,\ y\neq 0,\frac{2}{3}$ ו. $\frac{a(a+2b)}{3b}\ ,\ b\neq 0,\ a\neq -2b$

5) א. $\frac{1}{x-5}\ ,\ x\neq 5,-2$ ב. $m-8\ ,\ m\neq 4$ ג. $\frac{2}{y+3}\ ,\ x\neq -3,\frac{5}{2}$

ד. $z+8\ ,\ z\neq -\frac{2}{3}$ ה. $\frac{x-4}{x^2}\ ,\ x\neq 0,-9$ ו. $\frac{-3n}{2n+1}\ ,\ n\neq -\frac{1}{2},\frac{4}{3}$

ז. $\frac{x+2}{x+3}\ ,\ x\neq -2,-3$ ח. $\frac{x-7}{x+8}\ ,\ x\neq 7,-8$

ט. $\frac{3a-b}{a(2b-3a)}\ ,\ a\neq 0\ ,\ b\neq 0,\ a\neq 3b\ ,\ 2b\neq 3a$ י. $\frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}\ ,\ mn\neq 1,-\frac{3}{2},n\neq 0$

כפל וחילוק של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.

חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3x+3}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3(x+1)}=\frac{\cancel{x}^{1}\cancel{(x+1)}}{3\cancel{x^2}_{x}\cancel{(x+1)}}=\frac{1}{3x}$.

- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y}:\frac{12}{y^2+y}=\frac{4x}{y}\cdot\frac{y^2+y}{12}=\frac{\cancel{4}^{1}x}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_{3}}=\frac{x(y+1)}{3}$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{8}$

ב. $\frac{x}{3}\cdot\frac{9}{x^2}$

ג. $7y\cdot\frac{5}{y^2}$

ד. $6x^2\cdot\frac{3}{40x}$

ה. $\left(x^2+3x\right)\cdot\frac{2}{3x+9}$

ו. $\left(a^2-25\right)\cdot\frac{20}{5a+25}$

ז. $\frac{w^2-9}{w}\cdot\frac{w^2}{2w+6}$

ח. $\frac{y+4}{y^2+16}\cdot\frac{y^2-16}{2y+8}$

ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90}\cdot\frac{12}{2z-10}$

י. $\frac{5n^2}{n^2-121}\cdot\frac{2n^2+44n+242}{n+2}\cdot\frac{n^2+4n+4}{n}$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8}:\frac{x}{6}$

ב. $\frac{y}{25}:\frac{5}{y}$

ג. $a^2:\frac{1}{6a}$

ד. $\frac{5}{6a}:a^2$

ה. $\left(d^2-3d\right):\frac{5d-15}{5d}$

ו. $\frac{t}{t+4}:\frac{3t}{t+4}$

ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2}:\frac{y^2-16}{7y^2}$

ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36}:\frac{a+8}{a+6}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$ ה. $\frac{2x}{3}$

ו. $4(a-5)$ ז. $\frac{w(w-3)}{2}$ ח. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$ ט. $\frac{z+15}{z-5}$ י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$

2) א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{y^2}{125}$ ג. $6a^3$ ד. $\frac{5}{6a^3}$ ה. d^2 ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$ ח. $\frac{a-8}{a-6}$

חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים.

נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים.

כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף.
לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת.

דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x}=\frac{1+(x+1)}{x}=\frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)+3}{x+2}=\frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x(x+1)}=\frac{x+x+1}{x(x+1)}=\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-3x}=\frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{3}{(x-3)^2}-\frac{2}{(x-3)(x+3)}=\frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}=\frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6}+\frac{a-5}{6}$

ב. $\frac{5}{x}+\frac{4x+3}{x}$

ג. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3+4x}{x+1}$

ד. $\frac{7z}{2z-3}-\frac{4z}{2z-3}-\frac{z+3}{2z-3}$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab}-\frac{5}{bc}$

ב. $\frac{1}{xy}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xz}$

ג. $\frac{c}{ab}-\frac{ad}{bc}+\frac{2b}{cd}$

ד. $-\frac{5}{x}+\frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)}-\frac{2}{z(z-2)}$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $1-\frac{2}{x}$

ב. $1+\frac{3}{y^2}$

ג. $2+\frac{2}{x+1}$

ד. $3-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}$

ה. $\frac{a+1}{a^2}-\frac{3-a}{4a}-3$

ו. $\frac{x}{9yz}+\frac{z}{3y^2x}+\frac{3-y}{12xz}-3\frac{1}{2}$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x}$

ב. $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y}$

ג. $\frac{a+1}{a+2}+\frac{3}{a}$

ד. $\frac{1}{z+3}+\frac{2}{3z}-\frac{3}{z}$

5) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{24}{a^2-9}+\frac{4}{a+3}$

ב. $\frac{3}{x^2-16}+\frac{2}{(x+4)^2}$

ג. $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{3y}{4-y^2}$

ד. $\frac{3z}{z^2+4z+3}-\frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$

ה. $\frac{x-1}{x^2+3x-40}+\frac{2}{-x^2+8x-15}$

ו. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7}+\frac{a+3}{a^2+14a+49}$

ז. $\frac{x}{x-3}+\frac{9-x}{x^2-8x+15}$

ח. $\frac{1}{a-b}+\frac{2}{a+2b}-\frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

6) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{4}{x}\cdot\frac{x^2}{8}+\frac{9}{x+1}\cdot\frac{x+1}{18}$

ב. $\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot\frac{x^2}{7x+14}$

ג. $\frac{7}{y^2}:\frac{6}{y^3}-\frac{y-4}{63}\cdot\frac{3y-4}{y^2-8y+16}$

ד. $\left(3x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right):\frac{6x^3+2x-4}{x^2}$

ה. $\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3}-\frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right):\frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1

2) א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d-a^2d^2+2ab^2}{abcd}$

ד. $\frac{-5y^2+x+1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$

3) א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$

ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2+a+4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z}$

4) א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$ ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$

5) א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$

ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$

ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$

6) א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$

ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{\frac{4x}{12}}{x}$

ב. $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5}$

ג. $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2}$

ד. $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54}$

ה. $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{\frac{y^2}{3-y}}$

ו. $\frac{\frac{4x}{x+1}}{\frac{8}{x^2+2x+1}}$

ז. $\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{\frac{40}{15c+15}}$

ח. $\frac{\frac{t^2-t-20}{16t+8}}{\frac{25-t^2}{2t+1}}$

ט. $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{x^2}{3}$ ב. 2.5 ג. $\frac{1}{6t^3}$ ד. $\frac{t-9}{54t^2}$ ה. $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$

ו. $\frac{x(x+1)}{2}$ ז. $\frac{c}{c-4}$ ח. $\frac{t+4}{-8(t+5)}$ ט. $\frac{5}{x}$.

מתמטיקה להנדסאים

פרק 2 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

1. משוואה ממעלה ראשונה 47
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה 49
3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון 52
4. משוואה ממעלה שנייה 53
5. משוואות דו-ריבועיות 55
6. משוואות עם פרמטרים 57
7. משוואות עם שורשים 59
8. משוואות עם ערך מוחלט 61
9. מערכת משוואות ממעלה שנייה 62

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא: $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $6x+2=8$
ב. $7-2x=7$
ג. $2x+x=24$
ד. $2x+6=8+x$
ה. $-7x+5+2x=4x-13$
ו. $6x-3+5-7x=x-5x-7$
ז. $2-5x+7=-3x+8$
ח. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$
ב. $7x-4(3-4x)=-x$
ג. $6(4-x)-(6-x)=3x$
ד. $5x-(3x-7)4=21$
ה. $x(x-5)=x^2-7x+8$
ו. $(7-x)(1-x)-(x-3)^2=0$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1$

ג. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ד. $\frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1$

ה. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

ו. $5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0$

ב. $\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0$

ג. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ד. $\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2}$

ה. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ו. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12$

תשובות סופיות:

1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$

ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$.

2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$.

3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$.

4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$.

5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6\ ,\ x\neq 3$.

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1 , b_1 , c_1 ו- a_2 , b_2 , c_2 הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=3x-1 \\ \frac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

פתרון של מערכת משוואות:

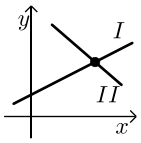
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

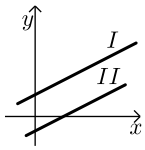
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

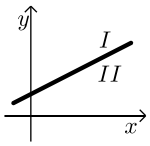
- הישרים נחתכים:
במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:
במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:
במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}3x+y=11\\y=5\end{cases}$ ב. $\begin{cases}y=x-3\\y=2x+4\end{cases}$ ג. $\begin{cases}-3x+2y=-16\\x=5y+14\end{cases}$

ד. $\begin{cases}5x-2y=-2\\x+4y=4\end{cases}$ ה. $\begin{cases}-5x+7y=-26\\x+3y=-8\end{cases}$ ו. $\begin{cases}2x+3y=5\\5x+7y=11\end{cases}$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+3y=5\\x-3y=3\end{cases}$ ב. $\begin{cases}5x+2y=14\\5x+3y=23\end{cases}$

ג. $\begin{cases}5y=2x\\4x=5y+8\end{cases}$ ד. $\begin{cases}4x=3y-29\\5y=9-13x\end{cases}$

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 2(x-y)+4y=1+x \\ 2-7y+x=3(x-y) \end{cases}$

4) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases}$

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases}$

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) א. $(2,5)$ ב. $(-7,-10)$ ג. $(4,-2)$ ד. $(0,1)$ ה. $(1,-3)$ ו. $(-2,3)$.

2) א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$.

3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4) א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$ ג. $(7,2)$.

5) א. $(1,1)$ ב. $(-3,1)$ ג. $(1,1)$.

6) א. $(-1,-3)$ ב. $(2,10)$ ג. $(-2,4)$.

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+4=6+x$

2) $3x+6-x=4+2x+2$

3) $6(x-2)=2x+5+4x$

4) $5x-3+x=4x+2x-3$

5) נתונה המשוואה: $\square+5x=3-2(x+2)$.

א. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

1) אף פתרון.

2) אינסוף פתרונות.

3) אין פתרון.

4) אינסוף פתרונות.

5) א. -8 ב. -1 ג. $-7x-1$

ד. $-7x+k$ (כאשר k הוא מספר כלשהו חוץ מ-1-).

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.

פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.

2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.

3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$ ב. $-x^2+10x-16=0$

ג. $25x^2-20x+4=0$ ד. $2x^2-6x+5=0$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $4x^2-5x+7=4-x^2+13$ ב. $-x(x-5)=(1-3x)(1-x)+4$

ג. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$ ד. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

א. $x^2-36=0$ ב. $32x^2-18=0$

ג. $4x-x(x+2)=3(x-1)-x-6$ ד. $(2x-1)^2+(2x+1)^2=10$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

א. $-7x^2-14x=0$ ב. $5x^2-x=0$

ג. $6x(x-2)-1=4x-3(x+1)+2$ ד. $(5x-2)^2=(x-2)(x+3)+10$

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$ ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$ ד. $\frac{x}{2x^2-72}+\frac{2}{x^2+12x+36}=\frac{8x-15}{24-4x}+2$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x_1=2\ ,\ x_2=8$ ג. $x=\frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.

2) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1$ ב. $x_1=1\ ,\ x_2=1\frac{1}{4}$ ג. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$

ד. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$.

3) א. $x=\pm 6$ ב. $x=\pm\frac{3}{4}$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=\pm 1$

4) א. $x_1=0\ ,\ x_2=-2$ ב. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=2\frac{1}{6}$

ד. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{7}{8}$.

5) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq -3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$

ד. $x_1=-7.6\ ,\ x_2=-4\frac{2}{7}$.

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא x.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t\rightarrow at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5x^4+3x^2-8=0$

2) $x^4-3x^2+2=0$

3) $13x^2\left(3x^2-1\right)-2=3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

4) $x^2\left(x^2+1\right)=10\left(3x^2-10\right)$

5) $x^6+x^3=56$

6) $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

7) $x-9\sqrt{x}+14=0$

8) $x^8-4x^4-50=31x^4-84$

9) $125x^6-1=124\left(x^6+x^3+1\right)$

10) $\left(2x^2-x\right)^2-4\left(2x^2-x\right)+3=0$

11) $\left(x^2+2x\right)^2+7x^2+14x=-6$

12) $\frac{21}{x^2-4x+10}=6+x^2-4x$

13) $\frac{12}{x^2+2x-8}=1+\frac{7.5}{x^2+2x-3}$

14) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

15) $\frac{3}{3x^2-15}+\frac{1}{x^2+5}=\frac{10}{x^4-25}$

16) $\frac{x^2-1}{4x^2-28}+2=\frac{9}{x^4-8x^2+7}+\frac{x^2}{2x^2-2}$

17) $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^2+35=12\left(2x+\frac{3}{x}\right)$

18) $\frac{3x^4}{\left(x+2\right)^2}+\frac{3x^2}{x+2}=6$

19) $\left(2x-x^2+3\right)\left(2x-x^2-2\right)=0$

20) $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x-8\right)=-24$

תשובות סופיות:

1) $x=\pm 1$
2) $x=\pm 1\ ,\ \pm\sqrt{2}$
3) $x=\pm\frac{1}{2}\ ,\ \pm\frac{1}{3}$
4) $x=\pm 2\ ,\ \pm 5$
5) $x_1=\sqrt[3]{7}\ ,\ x_2=-2$
6) $x=-2\ ,\ \sqrt[3]{4}$
7) $x=49$
8) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{34}\ ,\ x_{3,4}=\pm 1$
9) $x=5\ ,-1$
10) $x_1=1.5\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=1\ ,\ x_4=-\frac{1}{2}$
11) $x=-1$
12) $x_{1,2}=1\ ,\ 3$
13) $x_1=0\ ,\ x_2=-2\ ,\ x_3=3.06\ ,\ x_4=-5.06$
14) $x_1=0\ ,\ x_2=-2$
15) אין פתרונות.
16) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$
17) $x=\frac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ 3$
18) $x=-1\ ,\ 2$
19) $x=3\ ,\ -1$
20) $x=\pm 1\ ,\ 4\ ,\ 6$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים.
את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות.
פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא: $x=\frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצאות הפרמטר m.

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות.
בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא: $m\neq 0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{1}{3}(a-3x)=\frac{1}{a}(ax-3)$

ג. $(x-2a)(x-2b)=x^2-2(a^2+b^2)$

ד. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

ה. $\frac{x}{a^2-a}-\frac{1}{2a}=\frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a}-\frac{2}{a^3-2a^2+a}$

2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+my=1\\x+y=m\end{cases}$

ב. $\begin{cases}ax+y=2\\x+ay=4\end{cases}$

ג. $\begin{cases}\frac{x}{m}+y=m\\x-m^2y=1\end{cases}$

ד. $\begin{cases}(m-1)x-(2m+3)y=5\\(m+2)x-(2m-1)y=10m\end{cases}$

ה. $\begin{cases}(2a+b)x-(2a-b)y=8ab\\(2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2\end{cases}$

3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2-2x+4a=a^2+3$

ג. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

ד. $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}=0$

ה. $(m^2+1)x^2-m^2x-1=0$

ו. $\frac{a}{x}+\frac{1}{b}=\frac{x}{a}+b$

ז. $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=\frac{b-6}{2-b}\ ,\ b\neq 2$ ב. $x=\frac{a^2+9}{6a}\ ,\ a\neq 0$ ג. $x=a+b$ ד. $x=-m$ ה. $x=a+1$

2) א. $m\neq 1\ ,\ (m+1,-1)$ ב. $a\neq\pm 1\ ,\ \left(\frac{2a-4}{a^2-1},\frac{4a-2}{a^2-1}\right)$

ג. $m\neq 0-1\ ,\ \left(m^2-m+1,\frac{m-1}{m}\right)$ ד. $m\neq 1,-2\ ,\ (2m+1,m-2)$

ה. $b\neq\pm 2a\ ,\ (2a+b,2a-b)$

3) א. $x=m+1\ ,\ \text{m}-1$ ב. $x=a-1\ ,\ 3-a$ ג. $x=m-5\ ,\ -2m$

ד. $a\neq 0\ ,\ x\neq\pm a\ ,\ x=\pm a\sqrt{3}$ ה. $x=1\ ,\ -\frac{1}{m^2+1}$

ו. $a,b\neq 0\ ,\ x=\frac{a}{b}\ ,\ -ab$ ז. $a\neq\pm b\ ,\ x=\frac{a+b}{a-b}\ ,\ \frac{a-b}{a+b}$.

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x}=a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x=a^2 \rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=\left(a\right)^2$.

הערות:

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$ שבה $a<0$ אין פתרון.
3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$
2) $\sqrt{x+2}=x$
3) $\sqrt{3x+1}+x=13$
4) $\sqrt{2x+7}+4=x$
5) $\sqrt{x-1}+3=x$
6) $\sqrt{10x+6}+9=x$
7) $\sqrt{x+6}-2=2x$
8) $\sqrt{24-x}+3=2x$
9) $\sqrt{x+16}+4=2x$
10) $2x=16-3\sqrt{x-1}$
11) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$
12) $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$
13) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-5}=\sqrt{11-x^2}$
14) $\sqrt{2x-1}+3=\sqrt{7x+1}$
15) $\sqrt{9x-8}-3\sqrt{x+4}=-2$
16) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$
17) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$
18) $\sqrt{2x-2}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x-2}$
19) $3\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}$

תשובות סופיות:

1) $x=22$
2) $x=2$
3) $x=8$
4) $x=9$
5) $x=5$
6) $x=25$
7) $x=0.25$
8) $x=3.75$
9) $x=4.25$
10) $x=5$
11) $x=6$
12) $x=4\ ,\ -3$
13) $x=3$
14) $x=5$
15) $x=12$
16) $x=2\ ,\ 2\frac{8}{9}$
17) $x=6$
18) $x=1$
19) $x=2$

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x|=a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $|3x+14|=7$

2) $|3x-24|=x$

3) $|12-x|=3x$

4) $2x-|8-x|=10$

5) $|4x-5|=|2x+13|$

6) $|14-3x|=2|x+5|$

7) $|x|+7=|2x|$

8) $|x+2|+6=|2x-4|$

9) $|x+2|+|2x-6|=|4x+8|$

10) $|10-3x|-|x+4|=|2x-6|$

תשובות סופיות:

1) $x=-\frac{7}{3}\ ,\ -7$

2) $x=6\ ,\ 12$

3) $x=3$

4) $x=6$

5) $x=9\ ,\ -1\frac{1}{3}$

6) $x=24\ ,\ \frac{4}{5}$

7) $x=\pm 7$

8) $x=12\ ,\ -1\frac{1}{3}$

9) $x=0\ ,\ -12$

10) $x=0$

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ x^2+3y=10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-2y^2=17 \\ xy=-10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 \\ x+6y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2-2xy+8y^2=8 \\ 3xy-2y^2=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-y^2=33 \\ x+y=11 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 16x^2-y^2=391 \\ 4x-y=23 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4xy+x=-15 \\ \frac{3}{y}-2x=16 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{4}{y}-\frac{1}{x}=-19 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=21 \\ \frac{8}{x}-\frac{1}{y}=13 \end{cases}$

12) $\begin{cases} xy=24 \\ (y-x)^2-7(y-x)+10=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2y-xy^2=84 \\ x^2-2xy+y^2+5x-5y=24 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3} \\ x^2+y^2=9xy+25 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(2,4)$, $(4,2)$

2) $(\pm 4,-2)$

3) $(\pm 2,\pm 1)$

4) $(5,-2)$, $(-5,2)$

5) $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{11},\frac{1}{11}\right)$

6) $\left(3,\frac{1}{2}\right)$, $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$, $(2,1)$, $(-2,-1)$

7) $(7,4)$

8) $(5,-3)$

9) $\left(-5,\frac{1}{2}\right)$, $\left(-24,-\frac{3}{32}\right)$

10) $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

11) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

12) $(4,6)$, $(-6,-4)$, $(3,8)$, $(-8,-3)$

13) $(-1.65,6.35)$, $(-6.35,1.65)$, $(7,4)$, $(-4,-7)$

14) $(5,45)$, $(-5,-45)$, $(45,5)$, $(-45,-5)$

מתמטיקה להנדסאים

פרק 3 - אי שיוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

1. אי-שוויונים ממעלה ראשונה 64
2. אי-שוויונים ממעלה שנייה 65
3. אי-שוויונים ממעלה שלישית 66
4. אי-שוויונים עם מנה 67
5. אי-שוויונים כפולים מערכות או, וגם 68
6. שאלות מסכמות – אי-שוויונים 69
7. תחום הגדרה 71

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

מה מותר?

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

מה אסור?

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $45x-26>109$

2) $6x>2(3x-1)$

3) $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

4) $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

5) $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

6) $4(6x-8)<8(3x-4)$

7) $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\geq 12-x$

8) $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

תשובות סופיות:

1) $x>3$

2) כל x

3) אף x

4) $x>-2$

5) $x<5$

6) אף x

7) $x\geq 12$

8) $x>-13$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

9) $x^2<144$

10) $x^2-12x>-32$

11) $(x+2)(x+5)<0$

12) $(x+2)(x+4)<35$

13) $-x^2+13x+30<0$

14) $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

15) $(x-5)^2+x(x+2)<89$

16) $(5x+6)^2\leq 4(x-3)^2$

17) $-3x^2+12x>0$

18) $x^2-10x+25>0$

19) $(x-3)^2>(x-1)(x+6)-x^2-3x$

20) $2x^2+2x+24\geq 0$

תשובות סופיות:

9) $-12<x<12$

10) $x<4\ ,\ x>8$

11) $-5<x<-2$

12) $-9<x<3$

13) $x<-2\ ,\ x>15$

14) $x\leq 7\ ,\ x\geq 11$

15) $-4<x<8$

16) $-4\leq x\leq 0$

17) $0<x<4$

18) $x>5\ ,\ x<5$

19) $x<3\ ,\ x>5$

20) כל x

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

21) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

22) $x(x^2+x+1)>0$

23) $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

24) $x^3-25x\ge 0$

25) $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

26) $(x^2+8x+20)(3x-5)\le 0$

27) $(x^2-x-6)(x-1)<0$

28) $x^3-6x^2+9x\le 0$

29) $(x^2+6)(x+3)>0$

30) $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

תשובות סופיות:

21) $1<x<2\ ,\ x>3$

22) $x>0$

23) $-2\le x\le -1\ ,\ x\ge \frac{1}{2}$

24) $-5\le x\le 0\ ,\ x\ge 5$

25) $x>2$

26) $x\le 1\frac{2}{3}$

27) $x<-2\ ,\ 1<x<3$

28) $x\le 0\ ,\ x=3$

29) $x>-3$

30) $x<1\ ,\ 2<x<4$

אי-שוויונים עם מנה:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

31) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

32) $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

33) $\frac{1}{x^2-16}>0$

34) $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

35) $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

36) $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

37) $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

38) $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

39) $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

40) $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

תשובות סופיות:

31) $-3<x<1\ ,\ x>3$

32) $x<-\frac{2}{3}\ ,\ x\geq -\frac{1}{2}$

33) $x<-4\ ,\ x>4$

34) $2<x<3\ ,\ x>3$

35) $\frac{1}{2}\leq x<5$

36) $x>1$

37) $x>-2$

38) $2<x<3$

39) $1\leq x\leq 6$

40) $x<2\ ,\ x>6$

אי-שוויונים כפולים מערכות או, וגם:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

41) $3<x+1<5$

42) $0<\frac{1}{x+4}<2$

43) $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

44) $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

45) $6x-38\le x-3\le 5x+7$

46) $6<\frac{2x+10}{3}\le\frac{7x-20}{5}$

47) $-1\le\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

48) $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

תשובות סופיות:

41) $2<x<4$

42) $x>-3\frac{1}{2}$

43) $x>0$

44) $x<2\frac{2}{5}\ ,\ x>2\frac{2}{3}$

45) $-2.5\le x\le 7$

46) $x\ge 10$

47) $1\le x<13$

48) ϕ

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x \le -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \le 5 \cup 0 < x < 8\}$

2) $x(x+5)-3x+12 \le 2x-1-x(4-x)$

3) $\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \le 0$

4) $\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$

5) $\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \ge 0$

6) $x(x+3)(2x-5) < 0$

7) $\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$

8) $\frac{5-2x}{(x-8)^2} \le 0$

9) $\frac{x-3}{x^2+2} > 0$

10) $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$

11) $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$

12) $\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$

13) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$

14) $\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \ge \frac{x}{x-4}-\frac{x}{x-2}$

15) $6 < 5x-x^2 \cap x^2 > 3x+10$

16) $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$

17) $1 < \frac{x-1}{x-4} \le 2$

18) לאלו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה $g(x)=\frac{x+1}{x+3}$?

תשובות סופיות:

1) $-2 < x \le -\frac{3}{4}$

2) $x \le -4$

3) $-4 \le x < 2 \ , \ x \ge 3$

4) $x < -7 \ , \ -\frac{1}{3} < x < 2 \ , \ x > 5$

5) $-1 < x \le 1.5 \ , \ 4 < x \le 12$

6) $x < -3 \ , \ 0 < x < 2.5$

7) $x < -1 \ , \ 2 < x < 6 \ , \ x > 6$

8) $2.5 \le x < 8 \ , \ x > 8$

9) $x > 3$

10) $x < -3 \ , \ 0 < x < 1 \ , \ x > 4$

11) $-1 < x < 0 \ , \ 1 < x < 3 \ , \ x > 3$

12) $x > 7$

13) $x < -2 \ , \ 2 < x < 4$

14) $x \le 0 \ , \ 1 \le x < 2 \ , \ x > 4$

15) אף x

16) $x \ne 1$

17) $x \ge 7$

18) $-3 < x < -\frac{3}{5} \ , \ x > 3$

תחום הגדרה:

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-4}$

ב. $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

ג. $f(x)=\sqrt{12x-x^2-x^3}$

ד. $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$

ה. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$

ו. $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1\le x\le 4$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x\le -2\ ,\ x>2$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, (a פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.
ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים.
מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a.

תשובות סופיות:

1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1 \, , \, x \geq 6$ ג. $x \leq -4 \, , \, 0 \leq x \leq 3$

ד. $-5 \leq x < -2 \, , \, x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2 \, , \, x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3} \, , \, 1 \leq x < \frac{3}{2} \, , \, x > \frac{3}{2}$

2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2} \, , \, x \geq 1$

ד. $-2 \leq x \neq 1 \, , \, x \leq -3$.

3) $a = 5$.

4) $a = 2$.

5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$.

מתמטיקה להנדסאים

פרק 4 - שינוי נושא נוסחא

תוכן העניינים

1. הצבת מספרים בנוסחא ..... (ללא ספר)
2. שינוי נושא נוסחא ..... (ללא ספר)
3. שאלות משולבות על בסיס המאגר ..... (ללא ספר)

מתמטיקה להנדסאים

פרק 5 - בעיות מילוליות עם שטחים והיקפים

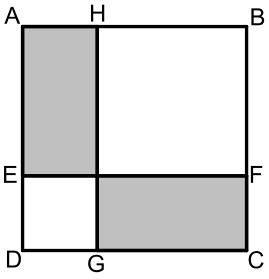
תוכן העניינים

1. בעיות יסודיות במרובעים 73
2. בעיות במשולשים כולל משפט פיתגורס 75
3. בעיות במעגל – ללא אחוזים ללא משפט פיתגורס 77
4. בעיה במעגל – ללא אחוזים וכולל משפט פיתגורס 78
5. בעיה במעגל – כולל אחוזים 79

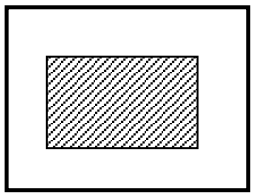
בעיות יסודיות במרובעים:

שאלות:

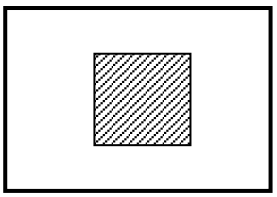
1) המרובע ABCD הוא ריבוע (ראה איור).
הקטע EF מקביל לצלעות הריבוע ומחלק את הצלעות AD ו-BC באופן כזה כך ש-DE ו-CF מהוות 30% מצלע הריבוע. הקטע GH מקביל לצלעות AD ו-BC ומרחקו מהצלע AD הוא 2 ס"מ.
ידוע שסכום השטחים של המלבנים המקווקוים מהווה 50% מסכום שטחי המלבנים הלבנים.
מצא את אורך צלע הריבוע.



2) היקף חלקה מלבנית הוא 30 ק"מ. רוצים לבנות בניין מלבני (המקווקו באיור) במרכז החלקה ששטחו הכולל הוא 10 קמ"ר.
ידוע ששטח הבניין מהווה 20% משטח החלקה.
מצא את מידות החלקה.



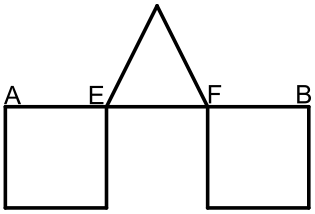
3) במרכז חלקה מלבנית שצלע אחת שלה גדולה ב-10 ק"מ מהצלע הסמוכה לה בונים בניין ריבועי (המקווקו באיור).
ידוע כי אורך הצלע שלו היא שליש מאורך הצלע הקטנה של החלקה. מחיר קמ"ר אחד משטח הבניין הוא 1,000 ₪ ומחיר קמ"ר אחד משטח החלקה הוא 100 ₪.
קבלן בניה שילם עבור כל השטח סכום כולל של 60,000 ₪.
מצא את מידות החלקה.



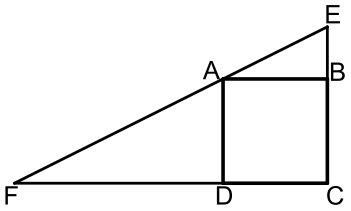
4) לרפי מטבח מלבני שמידותיו הם: 12×18 מטרים. רפי מחלק את המטבח לשני מלבנים כך ששטח אחד גדול פי 2 מהשטח של השני. רפי רוצה לרצף את השטח הקטן ברצפת שיש יוקרתית (השטח הימני) לעומת השטח הגדול שאותו ירצף רפי ברצפה רגילה (השטח השמאלי).
ידוע שהמחיר של מ"ר אחד מהרצפה הרגילה הוא 60% מהמחיר של מ"ר אחד מרצפת השיש היוקרתית.
רפי השקיע בריצוף המטבח סכום כולל של 3168 ₪.
כמה עולה מ"ר מכל סוג?

בעיות במרובעים ובמשולשים ללא משפט פיתגורס:

5) על הקטע AB מקצים את הנקודות E ו-F כך ששלושת הקטעים AE , EF ו-BF שווים. על הקטעים BF ו-AE בונים ריבועים ועל הקטע EF בונים משולש שווה שוקיים. ידוע כי הגובה במשולש שווה לאורך הבסיס EF וכי סכום שטחי שני המרובעים והמשולש הוא 90 סמ"ר. מצא את אורך צלע הריבוע.



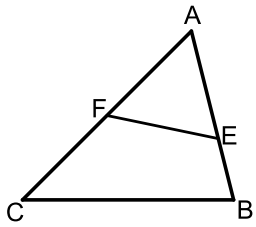
6) נתון ריבוע ABCD. בונים משולש ישר זווית EFC כך ש-E ו-F הן נקודות על המשכי הצלעות BC ו-DC של הריבוע בהתאמה.
הנקודה A נמצאת על יתר המשולש EF.
הקטע BE מהווה 50% מצלע הריבוע והקטע DF גדול פי 2 מצלע הריבוע. ידוע כי שטח המשולש EFC הוא 81 סמ"ר.
מצא את אורך צלע הריבוע.



7) הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו-AC של המשולש ABC.
ידוע כי שטח המשולש AEF הוא 22 סמ"ר.
שטח המרובע BCFE מהווה 60% משטח המשולש ABC.

א. מצא את שטח המרובע BCFE.

ב. מצא את שטח המשולש ABC.



תשובות סופיות:

1) 24 ס"מ.

2) 10 ס"מ ו-5 ס"מ.

3) 15 ק"מ ו-25 ק"מ.

4) 20 ₪ ו-12 ₪.

5) 6 ס"מ.

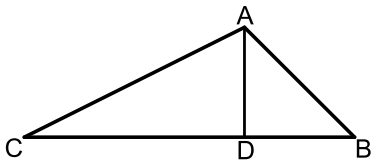
6) 6 ס"מ.

7) א. $S=33$ ב. $S=55$

בעיות במשולשים כולל משפט פיתגורס:

שאלות:

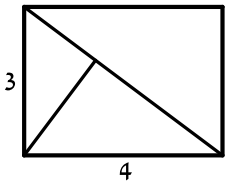
8) במשולש ABC מורידים גובה AD לצלע BC המחלק אותו לשני משולשים ADC ו-ABD כך שמתקיים: $S_{ADC}=2S_{ABD}$.



א. נתון שאורך הקטע BD הוא 12 ס"מ.
מצא את אורך הקטע CD.

ב. נתון שאורך הצלע AC הוא 25 ס"מ.
חשב את: S_{ABD}.

9) במלבן שצלעותיו הן 3 ו-4 ס"מ מעבירים אלכסון ומעלים לו גובה מהקדקוד התחתון לו.

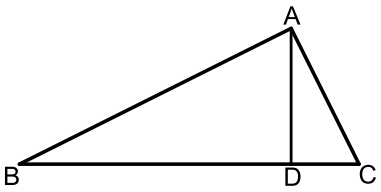


א. מצא את אורך האלכסון.

ב. מצא את אורך הגובה.

ג. מצא את אורכי שני הקטעים שהגובה מחלק את האלכסון.

10) במשולש ABC מורידים גובה AD לצלע BC כך שהקטע BD גדול פי 4.5 מהקטע CD.
אורך הצלע AB הוא 13 ס"מ ואורך הצלע AC הוא $5\frac{2}{3}$ ס"מ.

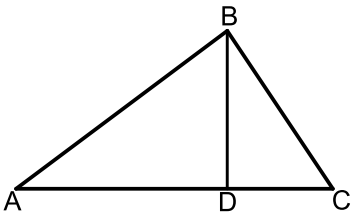


א. מצא את האורכים BD ו- CD.

ב. מצא את אורך הגובה AD.

ג. חשב את שטח המשולש ABC.

11) BD הוא גובה ליתר במשולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle B=90°)$.
היתר AC גדול ב-25% מהניצב AB.
ידוע כי אורך הניצב BC הוא 18 ס"מ.



א. מצא את אורכי הניצב AB והיתר AC.

ב. מהם האורכים AD ו-DC?

תשובות סופיות:

8) א. 24 ס"מ. ב. $S_{ABD}=42$.

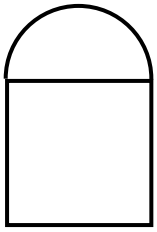
9) א. 5 ס"מ. ב. 2.4 ס"מ. ג. 3.2 ס"מ ו-1.8 ס"מ.

10) א. 12 ס"מ ו-$2\frac{2}{3}$ ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S=36\frac{2}{3}$.

11) א. 24 ס"מ ו-30 ס"מ. ב. 19.2 ס"מ ו-10.8 ס"מ.

בעיות במעגל – ללא אחוזים ללא משפט פיתגורס:

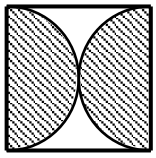
שאלות:



12) בבניין של רפי השכן יש חלון מרכזי המורכב ממלבן וחצי עיגול.
ידוע כי בסיס החלון קטן פי 2 מגובה המלבן.
שטח החלון הכולל הוא: $200+12.5\pi$.

א. מצא את מידות המלבן.

ב. מצא את היקף החלון.



13) בריבוע שלפניך חסומים שני חצאי עיגולים הפוכים זה לזה.
ידוע כי סכום ההיקפים של שני החצאים יחדיו הוא 10π.

א. מצא את אורך צלע הריבוע.

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. מצא את סכום השטחים של שני חצאי העיגולים (השטח המקווקו).

ii. מצא את השטח הכלוא בין העיגולים והריבוע (השטח הלבן).

תשובות סופיות:

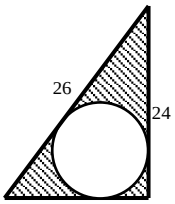
12) א. 10 ס"מ. ב. i. $S=25\pi$. ii. $S=100-25\pi=21.4$.

13) א. 10 ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S=120-25\pi=41.4$.

בעיה במעגל – ללא אחוזים וכולל משפט פיתגורס:

שאלות:

14) באיור שלפניך מתואר משולש ישר זווית שבתוכו כלוא עיגול.
ידוע כי אורך היתר במשולש הוא 26 ס"מ וכי אורך הניצב האנכי הוא 24 ס"מ.



א. מצא את אורך הניצב השני.

ב. שטח המעגל הוא 25π. מצא את רדיוס המעגל.

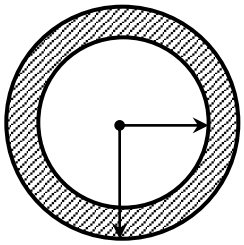
ג. מצא את השטח הכלוא בין המשולש למעגל (השטח המקווקו).

תשובות סופיות:

14) א. 10 ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S=120-25\pi=41.4$.

בעיה במעגל – כולל אחוזים:

שאלות:



15) באיור שלפניך מתוארת טבעת המורכבת משני מעגלים בעלי אותו מרכז ששטחה הוא 63π. ידוע כי רדיוס המעגל הפנימי קטן ב-25% מרדיוס המעגל החיצוני.
מצא את הרדיוסים של שני המעגלים.

תשובות סופיות:

15) 12 ו-9.

מתמטיקה להנדסאים

פרק 6 - גיאומטריה - שטחים והיקפים

תוכן העניינים

1. שטחים והיקפים של משולשים ..... (ללא ספר)
2. שטחים והיקפים של מרובעים ..... (ללא ספר)
3. שאלות עם מקבילית ..... (ללא ספר)
4. שאלות עם מלבן ..... (ללא ספר)
5. שאלות עם מעוין ..... (ללא ספר)
6. שאלות עם ריבוע ..... (ללא ספר)
7. שאלות עם טרפז ..... (ללא ספר)

מתמטיקה להנדסאים

פרק 7 - גיאומטריה אנליטית - הישר

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית 80
2. משוואת הישר 84
3. מצבים הדדיים בין ישרים 88
4. שאלות מסכמות 90

מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ יחושב ע"י הנוסחה הבאה:
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$
- אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ הוא:
$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ y_M=\frac{y_1+y_2}{2}.$$
- שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ הוא: $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

שאלות:

שאלות העוסקות באמצע קטע:

1) מצא את אמצעי הקטעים שקודקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

א. $A(1,4)\ ,\ B(5,-8)$ ב. $A(-3,0)\ ,\ B(3,-2)$

ג. $A(4,5)\ ,\ B(-4,-5)$ ד. $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\ ,\ B\left(7\frac{1}{2},-2\right)$

ה. $A(6,-1)\ ,\ B(-3,-1)$ ו. $A(4,7)\ ,\ B(4,-12)$

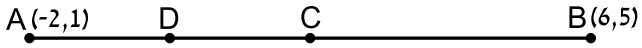
2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

א. $A(4,-2)\ ,\ M(2,1)$ ב. $A(-6,-8)\ ,\ M(0,0)$

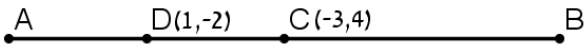
ג. $A(13,-11)\ ,\ M(4,-7)$ ד. $A\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)\ ,\ M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
ידוע כי שיעורי הקודקודים B ו-C הם $B(2,-4)\ ,\ C(6,1)$.
מעבירים תיכון AD לבסיס BC.
מצא את שיעורי הנקודה D.

4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $A(-2,1)$, $B(6,5)$.
מצא את שיעורי הנקודה D.



5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $D(1,-2)$, $C(-3,4)$.
מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



6) הנקודות $B(-10,4)$, $A(2,-7)$ ו-$C(6,11)$ הן שלושה קודקודים של מקבילית ABCD.
מצא את שיעורי הקודקוד הרביעי.

שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:

7) מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

א. $A(4,7),B(-3,7)$
ב. $A(6,2),B(1,2)$
ג. $A(-3,10),B(0,6)$
ד. $A(6,-9),B(1,3)$
ה. $A(4,7),B(13,-1)$
ו. $A(6,6),B(-9,-9)$

8) חשב את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם: $C(0,14)$, $B(4,9)$, $A(3,-2)$.

9) נתונות נקודות $B(6,y)$, $A(14,4)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך.
מצא את y.

10) נתונות נקודות $B(15,-2)$, $A(x,-12)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך.
מצא את x.

11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה-y שלה גדול פי 3 משיעור ה-x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

12) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$ יחידות אורך. שיעורי הקודקוד A הם $(0,4)$ ושיעורי ה- y של הקודקודים B ו-C הוא 2-.
מצא את קודקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC}=\sqrt{50}$ וידוע כי: $A(-3,-2)$, $B(-4,1)$.
מצא את היקף המלבן.

שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:

14) מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

א. $A(5,2)$, $B(4,1)$

ב. $A(3,-2)$, $B(-3,1)$

ג. $A(7,8)$, $B(6,15)$

ד. $A(0,5)$, $B(7,0)$

ה. $A(6,9)$, $B(6,-7)$

ו. $A(4,-1)$, $B(18,-1)$

15) מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו הם:
$A(6,5)$, $B(2,13)$, $C(4,-7)$ מונחים עליהם.

תשובות סופיות:

1) א. $(3,-2)$ ב. $(0,-1)$ ג. $(0,0)$ ד. $\left(4,-\frac{5}{8}\right)$
ה. $(1.5,-1)$ ו. $(4,-2.5)$.

2) א. $B(0,4)$ ב. $B(6,8)$ ג. $B(-5,-3)$ ד. $B\left(1,\frac{2}{3}\right)$.

3) $D(4,-1.5)$.

4) $D(0,2)$.

5) $A(5,-8)$, $B(-11,16)$.

6) $D(18,0)$.

7) א. $d_{AB}=7$ ב. $d_{AB}=5$ ג. $d_{AB}=5$ ד. $d_{AB}=13$
ה. $d_{AB}=\sqrt{145}$ ו. $d_{AB}=15\sqrt{2}$.

8) 33.727 יחידות אורך $\approx P_{ABC}$.

9) $y=10$ או $y=-2$.

10) $x=-9$ או $x=39$.

11) $B(-1,-3)$.

12) $B(3,-2)$, $C(-3,-2)$.

13) 18.97 יחידות אורך $\approx P_{ABCD}=6\sqrt{10}$.

14) א. $m_{AB}=1$ ב. $m_{AB}=-\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB}=-7$ ד. $m_{AB}=-\frac{5}{7}$
ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB}=0$.

15) $m_{AC}=6$, $m_{BC}=-10$, $m_{AB}=-2$.

משוואת הישר:

סיכום כללי:

שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x: $m = \tan\alpha$.

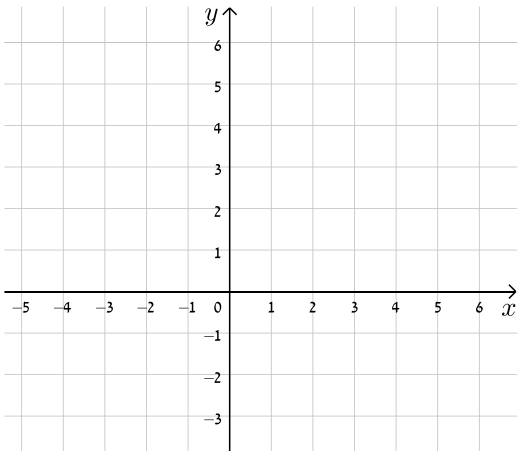
משוואת הישר:

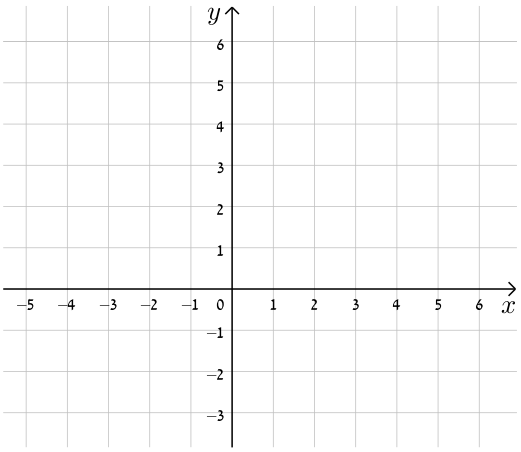
- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y = mx + n$.
  כאשר: m הוא שיפוע הישר ו-n הוא שיעור ה-y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-y.
- נוסחה למציאת משוואת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

שאלות:

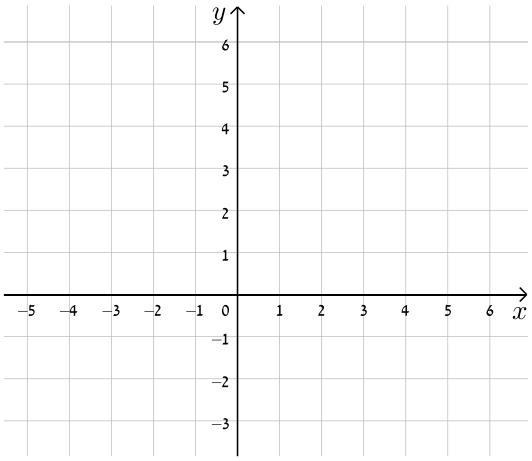
16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

א. $y = x + 4$ ב. $y = -x + 5$

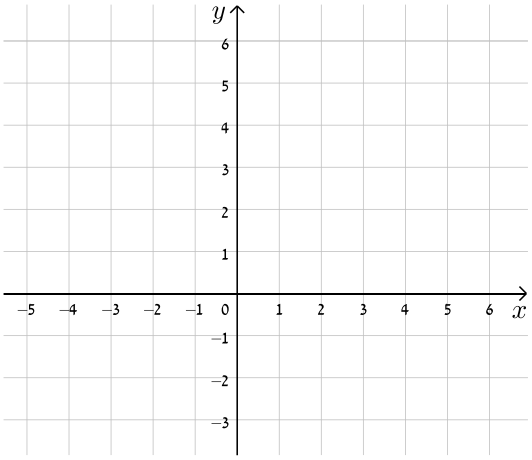




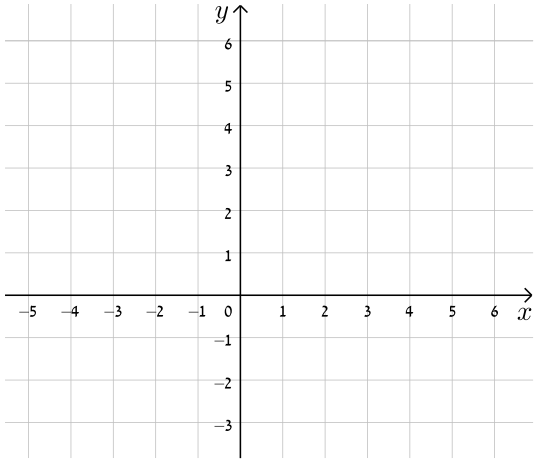
ג. $y=2x-3$



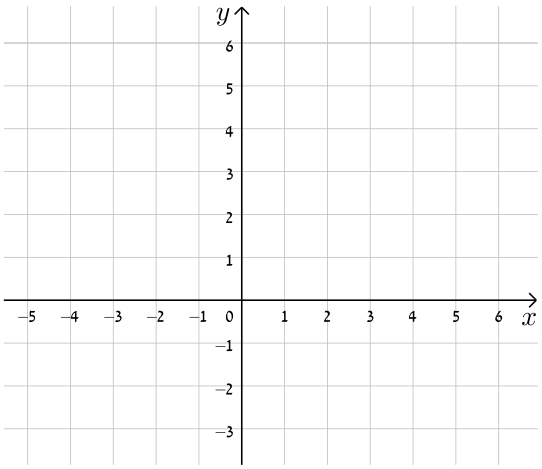
ד. $y=-3x+5$



ה. $y=3x-1$

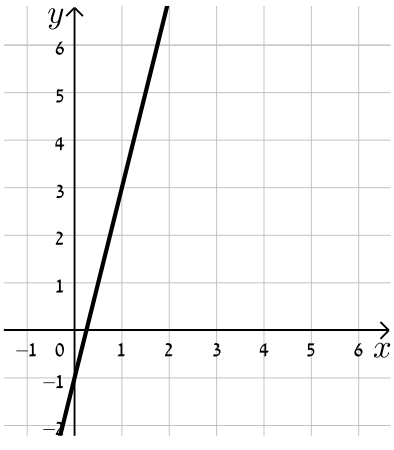


ו. $y=8-4x$

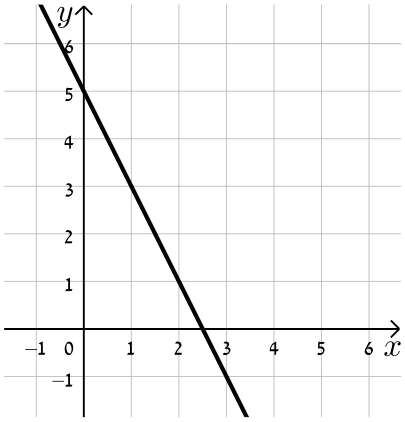


17) כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

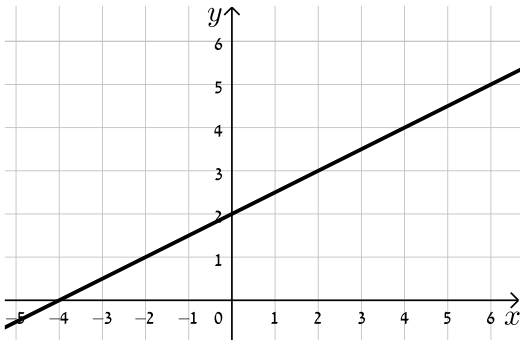
א.



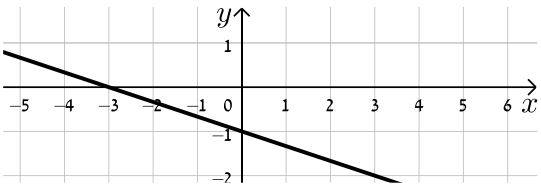
ב.



ג.



ד.



18) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:

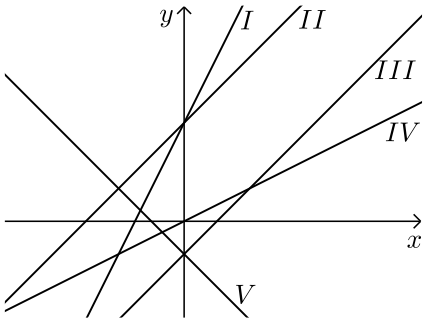
א. $y=x+3$.

ב. $y=-x-1$.

ג. $y=2x+3$.

ד. $y=x-1$.

ה. $y=\frac{1}{2}x$.



19) נתונה משוואת הישר הבאה: $y=2x+3$. קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות עליו: $D(6,15)$, $C(0,4)$, $B(3,3)$, $A(-1,1)$.

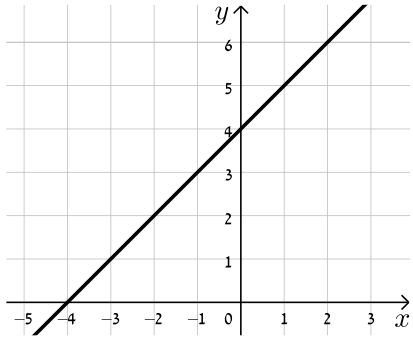
20) נתונה משוואת הישר הבאה: $y=mx-2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4,2)$ נמצאת על הישר. מצא את m וקבע האם גם הנקודה $B(7,-2)$ נמצאת עליו.

21) הנקודות $B(4,1)$, $A(5,-3)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא: $y=mx+n$. מצא את m ואת n.

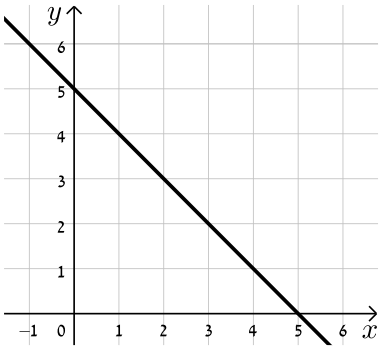
תשובות סופיות:

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

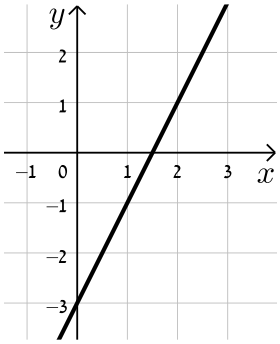
א.



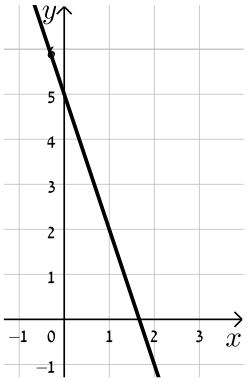
ב.



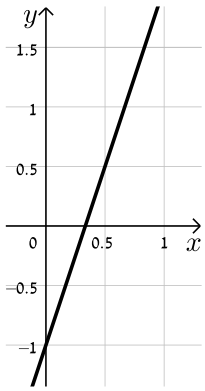
ג.



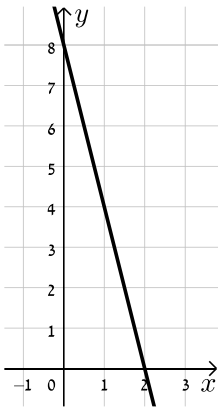
ד.



ה.



ו.



17) א. $y=4x-1$ ב. $y=-2x+5$ ג. $y=\frac{1}{2}x+2$ ד. $y=-\frac{1}{3}x-1$.

18) א.II. ב.V. ג.I. ד.III. ה.IV.

19) נמצאות: A , D. לא נמצאות: B , C.

20) $m=\frac{9}{8}$, B לא נמצאת.

21) $m=-4$, $n=17$.

מצבים הדדיים בין ישרים:

סיכום כללי:

מצב הדדי בין שני ישרים:

- ישרים מקבילים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 \neq n_2$.
- ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.
- ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$.

שאלות:

22) מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$

23) קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}$

24) קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

א. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}$

25) משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y = 6x - 2$.

א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?

ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

26) במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $A(5,-1)$, $B(3,7)$, $C(-5,5)$.
הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

27) מצא את משוואות הישרים הבאים:

א. ישר העובר דרך הנקודה $A(1,3)$ ושיפועו $m=2$.

ב. ישר העובר דרך הנקודה $A(0,-4)$ ושיפועו $m=\frac{1}{3}$.

ג. ישר העובר דרך הנקודה $A(5,9)$ ושיפועו $m=0$.

ד. ישר העובר דרך הנקודות $A(5,-12)$ ו-$B(6,-6)$.

ה. ישר העובר דרך הנקודה $A(-6,4)$ ומקביל לישר: $y=2x-3$.

ו. ישר העובר דרך הנקודה $A(3,-5)$ ומקביל לציר ה-y.

ז. ישר העובר דרך הנקודה $A(-7,-3)$ ומאונך לישר: $y=x+3$.

ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים: $y=11x-4$ ו-$y=3x-12$
ומקביל לישר: $y=7x+5$.

תשובות סופיות:

22) א. $(-1,1)$ ב. $(-6,-18)$ ג. $(10,16)$.

23) א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.

24) מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.

25) א. $m_{AB}=m_{CD}=6$, $m_{BC}=m_{AD}=-\frac{1}{6}$.

ב. הכל הפוך: $m_{AB}=m_{CD}=-\frac{1}{6}$, $m_{BC}=m_{AD}=6$.

26) שאלת הוכחה.

27) א. $y=2x+1$ ב. $y=\frac{1}{3}x-4$ ג. $y=9$ ד. $y=6x-42$

ה. $y=2x+16$ ו. $x=3$ ז. $y=-x-10$ ח. $y=7x-8$.

שאלות מסכמות:

שאלות:

28) במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.
ידוע כי: $A(3,-2)$, $B(2,4)$, $D(-2,2)$.

א. כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.

ב. מצא את שיעורי הקודקוד C.

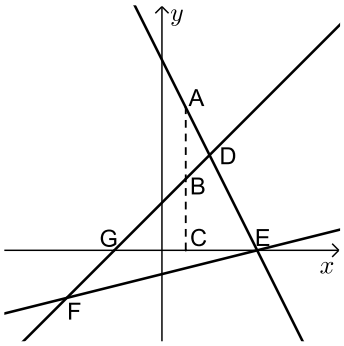
ג. כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

29) נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים $A(-9,1)$ ו-$B(5,-7)$.
משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x+3y+6=0$.

א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.

ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.

30) שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים בשרטוט:
$x-4y-4=0$, $x-y+2=0$ ו-$2x+y-8=0$.
הקטע AC מקביל לציר ה-y.



א. חשב את שטח המשולש DEF.

ב. נתון: $d_{BC}=3$.
חשב את אורך הקטע AB.

31) BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד $A(-6,1)$.
משוואת התיכון BD היא $x-y=1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x+5y=67$.
מצא את שיעורי הקודקוד C.

32) נתון טרפז ABCD $(AB\|CD)$ ובו משוואת השוק BC היא: $x=2$.
משוואת הבסיס CD היא $2x+3y=7$ וידוע כי $A(-4,1)$.

א. מצא את משוואת הבסיס AB.

ב. מצא את שיעורי הקודקודים B ו-C.

ג. מעבירים את האלכסון AC.
הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.

תשובות סופיות:

28) א. $y=-\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}$ ב. $C(-6,0)$ ג. $y=-\frac{2}{9}x-\frac{4}{3}$.

29) א. $l_{BD}: y=3x-22$. ב. $l_{BC}: y=-\frac{1}{8}x-6\frac{3}{8}$.

30) א. 18 יח"ש $=S_{EDF}$. ב. 3 יחידות אורך $=AB$.

31) $C(14,5)$.

32) א. $y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ ב. $B(2,-3)$, $C(2,1)$ ג. 12 יחידות שטח $=S_{ABC}$.

מתמטיקה להנדסאים

פרק 8 - גיאומטריה אנליטית - המעגל

תוכן העניינים

1. שאלות יסודיות במציאת משוואת מעגל 92
2. מעגל המשיק לצירים 96
3. משיק למעגל 97
4. שאלות מסכמות 98

שאלות יסודיות במציאת משוואת מעגל:

סיכום כללי:

הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.

משוואת מעגל:

משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $M(a,b)$ ורדיוסו R היא: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

משוואת מעגל קנוני:

משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים $M(0,0)$)

ורדיוסו R היא: $x^2+y^2=R^2$.

שאלות:

1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $(x-3)^2+(y+5)^2=49$.

ב. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=10$.

ג. $(x-m)^2+(y+n)^2=m^2+n^2$.

2) כתוב את משוואות המעגלים שמרכזם M ורדיוסם R:

א. $M(4,-2)\ ,\ R=3$

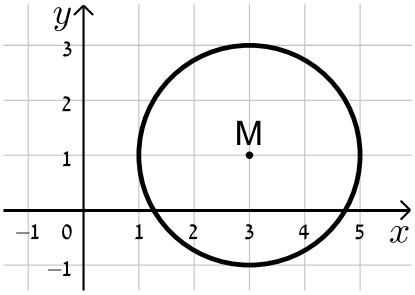
ב. $M(-3,5)\ ,\ R=10$

ג. $M(5,5)\ ,\ R=\sqrt{40}$

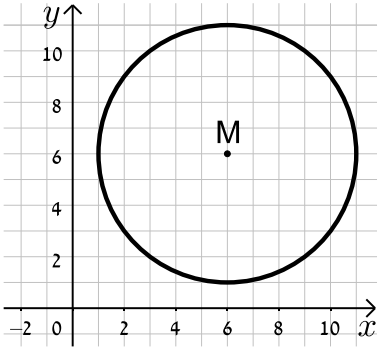
ד. $M(10,-12)\ ,\ R=\sqrt{30}$

3) כתוב את משוואות המעגלים הבאים בכל מקרה:

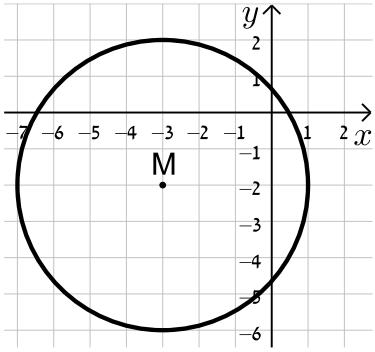
א.



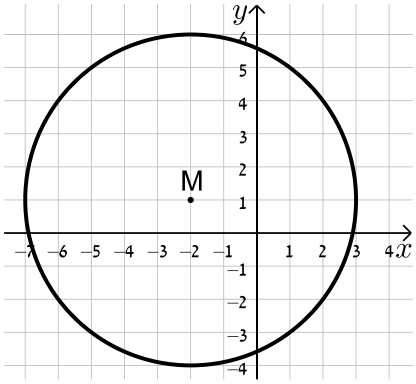
ב.



ג.



ד.



4) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(-4,5)$ ומרכזו בנקודה $O(2,-1)$.

5) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(-5,6)$ והוא חותך את ציר ה-x בנקודה שבה $x=9$.

6) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(0,-7)$ והוא חותך את ציר ה-y בנקודה שבה $y=3$.

7) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(11,2)$, רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר $y=2x-1$.

8) מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות $A(-2,3)$ ו-$B(4,-3)$ הן קצות הקוטר שלו.

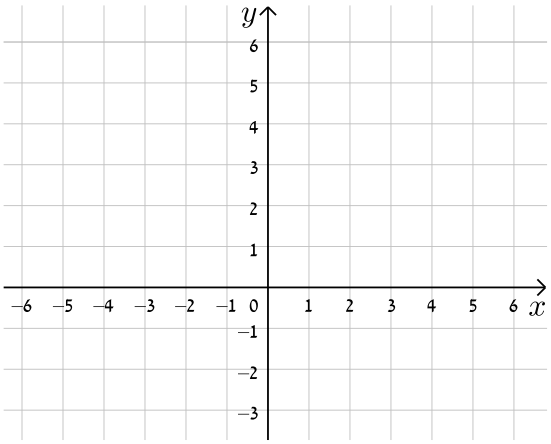
9) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר $x=4$, רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה-x מיתר שאורכו 12.

10) נתונים שני מעגלים בעלי אותו המרכז $M(3,-1)$, האחד הוא בעל רדיוס R והשני בעל רדיוס של $2R$.

א. כתוב את המשוואות של שני המעגלים (בטא באמצעות R).

ב. מה תהיינה המשוואות עבור $R=2$?

ג. צייר את שני המעגלים במערכת הצירים שלפניך.



11) שני מעגלים עם מרכזים $M_1(6,2)$ ו-$M_2(-3,-4)$ חותכים זה את זה בנקודה $(-2,3)$. מצא את משוואות המעגלים.

תשובות סופיות:

1) א. $M(3,-5)\ ,\ R=7$ ב. $M(-0.5,0)\ ,\ R=\sqrt{10}$

ג. $M(m,-n)\ ,\ R=\sqrt{m^2+n^2}$.

2) א. $(x-4)^2+(y+2)^2=9$ ב. $(x+3)^2+(y-5)^2=100$

ג. $(x-5)^2+(y-5)^2=40$ ד. $(x-10)^2+(y+12)^2=30$.

3) א. $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ ב. $(x-6)^2+(y-6)^2=25$

ג. $(x+3)^2+(y+2)^2=16$ ד. $(x+2)^2+(y-1)^2=25$.

4) $(x-2)^2+(y+1)^2=72$.

5) $(x+5)^2+(y-6)^2=232$.

6) $x^2+(y+7)^2=100$.

7) $(x+1)^2+(y+3)^2=169$ או $(x-7.8)^2+(y-14.6)^2=169$.

8) $(x-1)^2+y^2=18$.

9) $(x-4)^2+(y-8)^2=100$ או $(x-4)^2+(y+8)^2=100$

10) א. $(x-3)^2+(y+1)^2=4R^2$, $(x-3)^2+(y+1)^2=R^2$

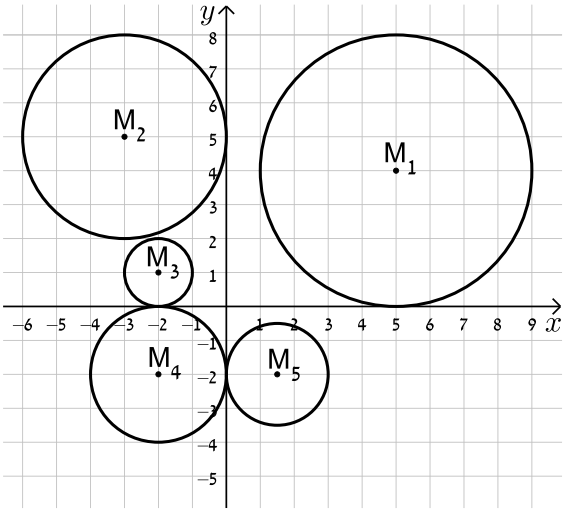
ב. $(x-3)^2+(y+1)^2=16$, $(x-3)^2+(y+1)^2=4$.

11) $(x-6)^2+(y-2)^2=65$, $(x+3)^2+(y+4)^2=50$

מעגל המשיק לצירים:

שאלות:

12) כתוב את משוואות המעגלים הבאים:



13) מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

14) מצא את משוואת המעגל שמשיק לציר ה-x ומרכזו בנקודה $M(16,8)$.

15) מצא את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על הישר $2x+3y+6=0$ והוא משיק לשני הצירים.

תשובות סופיות:

12) $M_1:(x-5)^2+(y-4)^2=16$, $M_2:(x+3)^2+(y-5)^2=9$
$M_3:(x+2)^2+(y-1)^2=1$, $M_4:(x+2)^2+(y+2)^2=4$
$M_5:(x-1.5)^2+(y+2)^2=2\frac{1}{4}$

13) $(x\pm4)^2+(y\pm4)^2=16$.

14) $(x-16)^2+(y-8)^2=64$.

15) $(x-6)^2+(y+6)^2=36$, $\left(x+1\frac{1}{5}\right)^2+\left(y+1\frac{1}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$.

משיק למעגל:

שאלות:

16) מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ בנקודות על המעגל שבהן $y=5$.

תשובות סופיות:

16) $4x-3y+35=0$ ו- $4x+3y=27$.

שאלות מסכמות:

שאלות:

17) נתון מעגל שמשוואתו: $(x-3)^2+(y+4)^2=25$.

א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה-x.
מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

18) נתון ישר שמשוואתו: $y=2x-10$.
הישר חותך את ציר ה-x בנקודה A ואת ציר ה-y בנקודה B.
בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו.
המשיק חותך את ציר ה-y בנקודה C.
מצא את אורך הקטע BC.

19) נתון המעגל שמשוואתו: $x^2+y^2=81$.
מסמנים ב-A את נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה-x.
הנקודה A היא מרכזו של מעגל נוסף בעל רדיוס של 12.
מסמנים את נקודות החיתוך של שני המעגלים ב-B ו-C.
מצא את שטח המשולש שנוצר בין הנקודות B, C ו-O (ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

17) א. $(0,-8)$, $(6,0)$, $(0,0)$ ב. 27 יח"ש.

18) 12.5 יחידות אורך.

19) $S_{\Delta BOC}=\sqrt{80}$ יח"ש.

מתמטיקה להנדסאים

פרק 9 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

1. חוקי החזקות 99
2. חוקי השורשים 104
3. כתיבה מדעית של מספרים 108

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

1. $a^0=1$
2. $a^1=a$
3. $a^n\cdot a^m=a^{m+n}$
4. $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
5. $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$
6. $a^m\cdot b^m=\left(a\cdot b\right)^m$
7. $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$
8. $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. a^2a^6
ב. $t^3t^5t^7$
ג. $b^2b^5b^{12}b^3$
ד. $\frac{k^8}{k^3}$
ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$
ו. $\frac{c^6}{c^2}$
ז. $\frac{a^3a^{19}}{a^{15}}$
ח. $\frac{x^{30}}{x^9x^{18}}$
ט. $\frac{y^3y^{15}}{y^4y^{14}}$
י. $3^23^33^4$
יא. $\frac{2^{16}2^2}{2^{10}}$
יב. $\frac{5^{20}5^35^{16}}{5^45^{22}5^8}$

2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $\frac{3^42^7}{2^63^2}$
ב. $\frac{a^{10}b^{13}a^3}{b^4b^6b^2a^{12}}$
ג. $\frac{x^8y^5y^9x^2}{y^4x^4}$

3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^62^{17}3^32^4}{3^42^33^2}$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243\cdot2^n$ לבין הביטוי הנתון.

4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3\cdot 2^7}{2^4\cdot 2^5}$ ב. $\frac{9^3\cdot 27^2}{3^9\cdot 81}$

ג. $\frac{10^9\cdot 25^5\cdot 8^{-1}}{40^3\cdot 125^5}$ ד. 2^3+2^5

5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$.

א. $\left(a^2\right)^4$ ב. $\left(c^3\right)^{10}$ ג. $\left(x^3x^{10}\right)^2$

ד. $\frac{\left(b^2\right)^3}{b^2b^3}$ ה. $\frac{n^7n^8}{\left(n^3\right)^4}$ ו. $\frac{d^{20}\left(d^4\right)^2}{d^{12}\left(d^3\right)^2}$

ז. $\frac{2^5\left(2^4\right)^2 2^3}{\left(2^32^2\right)^3}$ ח. $\frac{3^6\left(3^33^2\right)^6}{3^{28}\left(3^2\right)^3}$ ט. $\frac{\left(8^3\right)^8 8^{11}}{\left(8^28\right)^3 8^8}$

י. $\frac{\left(2^4\right)^5\left(3^6\right)^7 2^{20}}{3^{35}2^{40}}$ יא. $\frac{\left(3^2\right)^6 5^{31}3^7}{\left(5^2\right)^{10}5^{11}3^{18}}$ יב. $\frac{\left(3^2\right)^7 5^{10}\left(5^3\right)^2}{3^95^{16}}$

6) לפניך הביטויים הבאים: $\left(\left(3^2\right)^3\right)^4$ ו- $\left(\left(3^6\right)^n\right)^2$.
מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^33^5}{2^23^4}$ ב. $\frac{5^{20}3^{14}3^8}{3^{20}5^{12}5^8}$ ג. $\frac{7^{12}2^22^6}{2^57^{10}7}$

8) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^29\cdot 81^2$ ב. $64^22^38^2$ ג. $125\cdot 25\cdot 5^5$

ד. $\frac{2^4\cdot 16^5}{8\cdot 512}$ ה. $\frac{\left(4^2\right)^3 16}{64\cdot 2^3}$ ו. $\frac{\left(\left(3^4\right)^4\right)^5}{81^327^43^5}$

9) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{\left(2a^2b\right)^3\cdot\left(ab^{-3}\right)^2}{4ab^{-2}\cdot\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^4}$

ב. $\dfrac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\dfrac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\dfrac{4^{b+3}}{4^{b+1}+4^{b+2}}$

ד. $\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{x^{n+3}+x^{n+5}}{x^{n+2}}$

10) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $\left(ab\right)^n=a^nb^n$ ו-$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

א. $\left(a^2b\right)^3$

ב. $\left(m^4n^3\right)^5$

ג. $\left(x^{12}y^3\right)^3$

ד. $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^4$

ה. $\left(\dfrac{i^4}{k^3}\right)^7$

ו. $\left(\dfrac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$

ז. $\left(\dfrac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6$

ח. $\left(\dfrac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2$

ט. $\left(\dfrac{\left(b^{12}c\right)^2c^{14}}{c\left(c^3b^5\right)^4b^3}\right)^2$

11) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\left(\dfrac{3^92^62^2}{3^62^53^2}\right)^2$

ב. $\left(\dfrac{\left(5^4\right)^23^6}{3^55^7}\right)^2$

ג. $\left(\dfrac{7^3\cdot16\cdot128\cdot49}{\left(2^27\right)^5}\right)^3$

12) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\dfrac{1}{4^6}$

ב. $\dfrac{1}{5^3}$

ג. $\dfrac{1}{2^{10}}$

ד. $\dfrac{1}{8}$

ה. $\dfrac{1}{81}$

ו. $\dfrac{1}{125}$

13) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\dfrac{1}{4^{-3}}$

ב. $\dfrac{1}{3^{-2}}$

ג. $\dfrac{1}{5^{-3}}$

14) חשב את הביטויים הבאים:

א. $3^2\cdot 3^{-5}\cdot 3^7$

ב. $2^{-8}\cdot 512\cdot 2^2$

ג. $5^6\cdot 5^{-3}\cdot 5^{-2}$

ד. $2^{14}\cdot 3^{-6}\cdot 2^{16}\cdot 3^4\cdot 2^{-30}$

ה. $\frac{2^{-5}\cdot 5^3\cdot 2^{14}}{5^2\cdot 5^{-10}\cdot 5^8\cdot 2^6}$

ו. $\frac{3^{-6}\cdot 7^7\cdot 7^{-4}}{3^{-4}\cdot 3^{-3}\cdot 7^3}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

ב. $\frac{\left(4^4\right)^{-4}3^{-11}}{\left(3^{-2}4^3\right)^{-6}}$

ג. $\frac{2^{-3}5^4}{5^4\cdot 125\cdot\left(5^2 2\right)^{-3}\cdot 2^{-4}}$

16) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a^{n+2}\cdot a^{2-3n}}{\left(a^3\right)^{n+1}}$

ב. $\frac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\frac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\frac{\left(m^{n+2}\right)^3\cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}}\cdot\left(m^3\right)^{n-2}}$

תשובות סופיות:

1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5.

2) א. 18 ב. ab ג. x^6y^{10}.

3) $n=16$.

4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40.

5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5.

6) $n=2$.

7) א. 6 ב. 9 ג. 56.

8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}.

9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x}+x$.

10) א. a^6b^3 ב. $m^{20}n^{15}$ ג. $x^{36}y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21}b^3$
ז. $x^{12}y^{18}$ ח. t^4r^{12} ט. b^2c^6.

11) א. 576 ב. 225 ג. 8

12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}.

13) א. 64 ב. 9 ג. 125.

14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3.

15) א. $5^{24}\cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3\cdot 2^4$.

16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}.

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

1. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
4. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a\cdot b}$
5. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

א. $3^{\frac{1}{4}}$ ב. $2^{\frac{3}{5}}$ ג. $6^{\frac{5}{6}}$

ד. $-12^{\frac{2}{7}}$ ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$ ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$

ז. $5^{-\frac{1}{4}}$ ח. $27^{-\frac{1}{3}}$ ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$ ב. $-\sqrt{25}$ ג. $\sqrt[3]{8}$

ד. $-\sqrt[7]{128}$ ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$ ו. $\left(\sqrt[5]{1024}\right)^2$

ז. $\left(\sqrt[5]{-243}\right)^3$ ח. $\sqrt[4]{-16}$ ט. $\sqrt[4]{-25^2}$

י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $8^{\frac{2}{3}}$ ב. $32^{-\frac{3}{5}}$ ג. $128^{-\frac{2}{7}}$

ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ז. $81^{\frac{3}{4}}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ ח. $343^{-\frac{2}{3}}\cdot 100^{\frac{1}{2}}$ ט. $16^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$.

21) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ ג. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$

ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ ח. $\frac{\sqrt[3]{500}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2}\cdot\sqrt[3]{4}}$ ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2}\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400}\sqrt{2}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

א. $3\sqrt{2}$ ב. $5\sqrt{3}$ ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ד. $2\sqrt[3]{3}$ ה. $x\sqrt{x}$

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

א. $2\sqrt{5}$ ב. $4\sqrt[3]{2}$ ג. $2\sqrt[5]{3}$

ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ז. $-5\sqrt[3]{2}$ ח. $-5\sqrt[4]{2}$ ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$

ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$

ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$

ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{18}-\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7}+\sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}$

ד. $\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$

ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160}-\sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{-2.5}\cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{2}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}$

ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}}\cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}}\cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{-\frac{1}{8}}\cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ

ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$.

18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16

ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5.

19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$

ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$.

20) $\sqrt{2}$.

21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2

ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$.

22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$.

23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$

ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$.

24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$.

25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$

ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$.

26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$

ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$.

27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$.

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000
ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000
ד. 23,400,000
ה. 0.0003
ו. 0.00000042
ז. 0.000000042
ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$
ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$
ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$
ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$
ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

28) א. $1.5\cdot10^{7}$ ב. $1.5\cdot10^{6}$ ג. $1.5\cdot10^{11}$ ד. $2.34\cdot10^{7}$ ה. $3\cdot10^{-4}$
ו. $4.2\cdot10^{-7}$ ז. $4.2\cdot10^{-8}$ ח. $4.2\cdot10^{-10}$.

29) א. $9\cdot10^{12}$ ב. $4\cdot10^{12}$ ג. $1.25\cdot10^{11}$ ד. $1.25\cdot10^{14}$ ה. $1.6\cdot10^{-15}$
ו. $6.4\cdot10^{-14}$ ז. $1.25\cdot10^{-16}$ ח. $3.43\cdot10^{-25}$.

מתמטיקה להנדסאים

פרק 10 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

1. משוואות מעריכיות יסודיות ..... (ללא ספר)
2. משוואות עם חיבור וחיסור איברים ..... (ללא ספר)
3. משוואות עם קבוע אוילר ..... (ללא ספר)
4. מערכת משוואות מעריכיות ..... (ללא ספר)
5. אי-שוויונים מעריכיים ..... (ללא ספר)

מתמטיקה להנדסאים

פרק 11 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים

תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות ..... (ללא ספר)
2. חוקי הלוגריתמים ..... (ללא ספר)
3. חישובים עם חזקה לוגריתמית ..... (ללא ספר)
4. מעבר בין בסיסים ..... (ללא ספר)
5. הלוגריתם הטבעי ..... (ללא ספר)
6. משוואות עם בסיסים שונים ..... (ללא ספר)
7. מערכת משוואות לוגריתמיות ..... (ללא ספר)
8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות ..... (ללא ספר)
9. אי-שוויונים לוגריתמים ..... (ללא ספר)

מתמטיקה להנדסאים

פרק 12 - וקטורים גיאומטריים

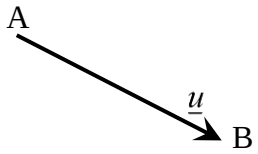
תוכן העניינים

1. הגדרות וכללים יסודיים 109
2. וקטורים הפורשים מישור 114
3. מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור 118

הגדרות וכללים יסודיים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:



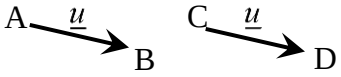
להלן תיאור של ווקטור גיאומטרי: ווקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: $\overrightarrow{AB}$.

ניתן לסמן ווקטור באות קטנה באופן הבא: $\underline{u}$ (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$).

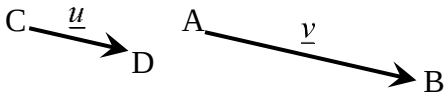
מהאיור לעיל מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

קשרים בין ווקטורים:

- ווקטורים שווים: שני ווקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.
  דוגמא לווקטורים שווים: מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

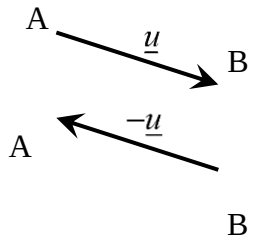


- ווקטורים מקבילים: שני ווקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.
  ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.
  ווקטורים מקבילים נקראים גם "ווקטורים תלויים ליניארית".
  דוגמא לתלות בין ווקטורים מקבילים:
  עבור $\alpha > 1$ מתקיים: $\underline{v} = \alpha\underline{u}$, או: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$.



- אם זוג ווקטורים במרחב: $\overrightarrow{AB} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD} = a\underline{u} + b\underline{v} + c\underline{w}$ מקבילים
  אז מתקיים: $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$.

- ווקטור המסומן $\overrightarrow{BA}$ הוא בעל גודל זהה לווקטור $\overrightarrow{AB}$
  וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$.

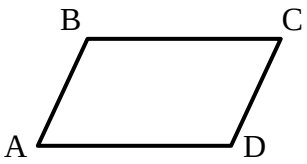


הערה:

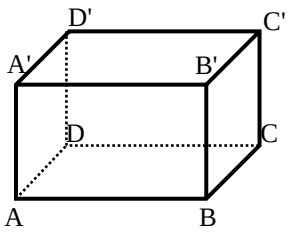
שני ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ יקראו מקבילים אם מתקיים: $\underline{v} = \alpha\underline{u}$ כאשר הגודל α יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום $\alpha \neq 0$. בפרט עבור $\alpha < 0$ כיוונם הפוך ב-$180°$.

שאלות:

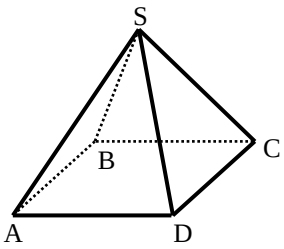
1) במקבילית ABCD נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים
ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



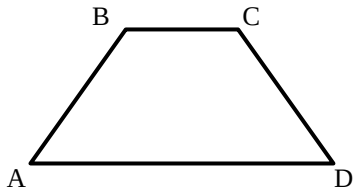
2) בתיבה ABCDA'B'C'D'
נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים
ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים
ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



4) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע
באמצעות $\underline{u}$ או $\underline{v}$.

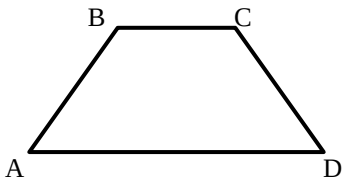


5) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$

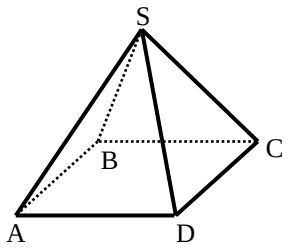
א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את
הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{DC}$.

ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{BE}$.

ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.



6) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.



א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את
הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{SC}$.

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{BN}$.

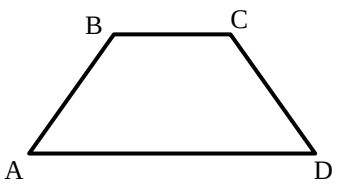
7) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=2:3$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

8) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=3:5$. נתון: $\overrightarrow{AP}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{PB}$ ו- $\overrightarrow{AB}$.

9) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

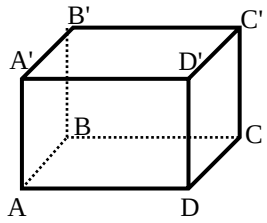
10) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

11) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה F נמצאת על הצלע CD
ומקיימת: $\frac{DF}{FC}=\beta$.



הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- β את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.

12) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

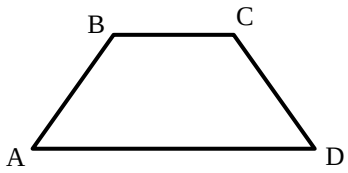


הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$

הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור: $\overrightarrow{PQ}$.

13) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

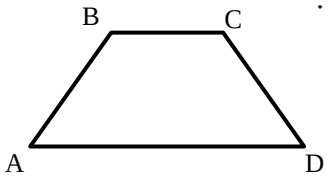


הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AB}$.

14) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

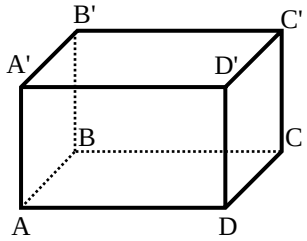


הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים: $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AC}$.

15) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שבעבורם $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה $ABB'A'$.

מצא את ערכי α ו- β אם נתון כי $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{EC}$.

תשובות סופיות:

1) $\underline{u}=\overrightarrow{DC}$, $\underline{v}=\overrightarrow{BC}$.

2) $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{B'C'}$, $\underline{u}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$, $\underline{w}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BB'}$.

3) $\underline{w}=\overrightarrow{AS}$, $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

4) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\underline{v}$.

5) א. $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}$, $\overrightarrow{DC}=\underline{u}-\frac{2}{3}\underline{v}$ ב. $\overrightarrow{BE}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$ ג. $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}$.

6) א. $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{SC}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$ ב. $\overrightarrow{BN}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$.

7) $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\underline{u}$, $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\underline{u}$.

8) $\overrightarrow{AB}=\frac{8}{3}\underline{u}$, $\overrightarrow{PB}=\frac{5}{3}\underline{u}$.

9) $\overrightarrow{AP}=\alpha\underline{u}$, $\overrightarrow{PB}=(1-\alpha)\underline{u}$.

10) $\overrightarrow{AP}=\frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}$, $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{1+\alpha}\underline{u}$.

11) $\overrightarrow{AF}=\frac{\beta}{1+\beta}\underline{u}+\frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v}$.

12) $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$.

13) $\alpha=2$.

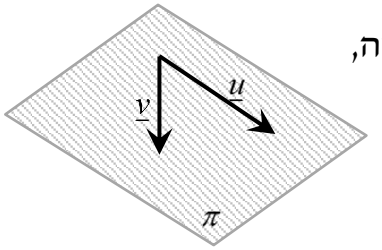
14) $\alpha=1$.

15) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. לא ג. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=1$.

ווקטורים הפורשים מישור:

סיכום כללי:

ווקטורים הפורשים מישור:



כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:

הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ בעלי כוונים שונים ולכן פורשים

את המישור π.

קומבינציה לינארית של ווקטורים:

- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה לינארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים תלויים ליניארית (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

דוגמא:

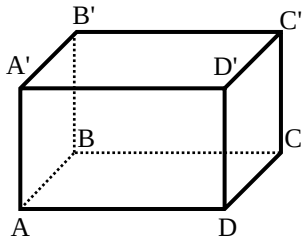
עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור $\underline{w}$ המוכל, או מקביל

למישור π באופן הבא: $\underline{w}=\alpha\cdot\underline{u}+\beta\cdot\underline{v}$ כאשר: $\alpha,\ \beta$ מספרים ממשיים כלשהם.

במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ נקראים תלויים ליניארית.

שאלות:

16) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$

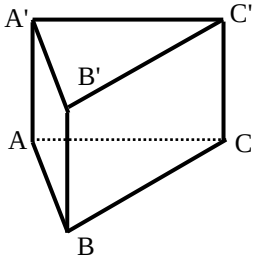
א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. מהו ערכו של α שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לבסיס ABCD?

17) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C'

ובה נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.



הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת: $\frac{A'M}{MC'}=\alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC}=\beta$.

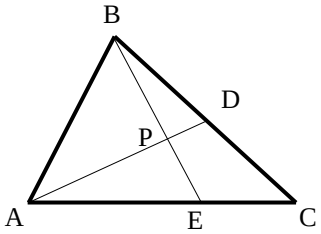
א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{NM}$.

ב. מהו ערכו של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ABB'A'.
הבע את α באמצעות β.

18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC

והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE}=2$.



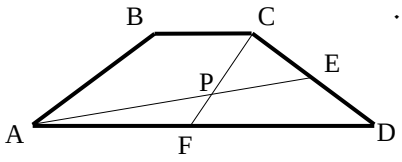
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נגדיר: $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, וכן: $\overrightarrow{AP}=t\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP}=s\cdot\overrightarrow{BE}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, t ו- s את הווקטור $\overrightarrow{AP}$ בשתי דרכים שונות.

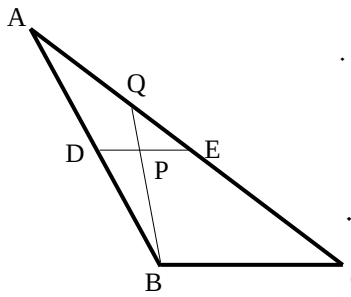
ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.

19) בטרפז $ABCD$, $(AD \parallel BC)$ שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$.



הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD
והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו-CF.
מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF.

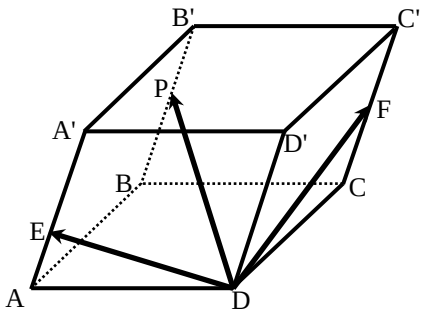
20) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$.
הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP
חותך את הצלע AC בנקודה Q.



א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\Delta QPE}}{S_{\Delta DPB}}$.

21) במקבילון $ABCDA'B'C'D'$
נתון: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$.
הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC',
הנקודה E נמצאת על המקצוע AA'
ומקיימת: $A'E = 2AE$ והנקודה P נמצאת על
המקצוע BB' ומקיימת: $\overrightarrow{B'P} = k \cdot \overrightarrow{B'B}$.
נתון: $\overrightarrow{DP} = t \cdot \overrightarrow{DE} + s \cdot \overrightarrow{DF}$.



א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו-k את הווקטור $\overrightarrow{DP}$.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB'.

ג. האם הנקודות D, E, F ו-P נמצאות על אותו מישור? נמק.

תשובות סופיות:

16) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. $\alpha=1$ ג. לא.

17) א. $\overrightarrow{NM}=(\beta-1)\underline{u}+\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}-\beta\right)\underline{v}+\underline{w}$ ב. $\beta=1$ ג. $\alpha=\frac{\beta}{1-\beta}$

18) א. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}t\underline{u}+\frac{1}{2}t\underline{v}$, $\overrightarrow{AP}=(1-s)\underline{u}+\frac{2}{3}s\underline{v}$ ב. $BP:PE=3:2$, $AP:PD=4:1$

19) $AP:PE=2:1$, $CP:PF=2:1$

20) א. $AQ:QC=1:2$ ב. $\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}}=\frac{1}{3}$

21) א. $\overrightarrow{DP}=\underline{u}+\underline{v}+(1-k)\underline{w}$ ב. $B'P:PB=1:5$ ג. כן.

מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:

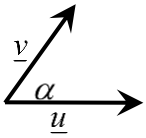
סיכום כללי:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$$

כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.

ניתן למצוא את הזווית שבין שני וקטורים ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.



גודל של וקטור נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}$, או: $|\underline{u}|^2=\underline{u}^2$.

הערה:

המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$ בין שני וקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

שאלות:

22) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

א. $\alpha=60°\ ,\ |\underline{v}|=2\ ,\ |\underline{u}|=3$

ב. $\alpha=120°\ ,\ |\underline{v}|=5\ ,\ |\underline{u}|=4$

ג. $\alpha=30°\ ,\ |\underline{v}|=6\ ,\ |\underline{u}|=2$

ד. $\alpha=180°\ ,\ |\underline{v}|=3\ ,\ |\underline{u}|=8$

ה. $\alpha=0°\ ,\ |\underline{v}|=5\ ,\ |\underline{u}|=3$

ו. $\alpha=90°\ ,\ |\underline{v}|=4\ ,\ |\underline{u}|=7$

23) חשב את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

א. $\underline{u}\cdot\underline{v}=6\ ,\ |\underline{v}|=4\ ,\ |\underline{u}|=3$

ב. $\underline{u}\cdot\underline{v}=-4\sqrt{3}\ ,\ |\underline{v}|=2\ ,\ |\underline{u}|=4$

ג. $\underline{u}\cdot\underline{v}=0\ ,\ |\underline{v}|=5\ ,\ |\underline{u}|=9$

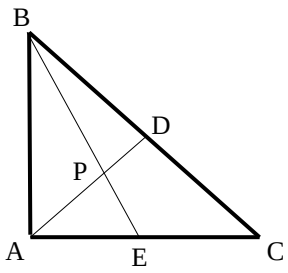
ד. $\underline{u}\cdot\underline{v}=12\ ,\ |\underline{v}|=6\ ,\ |\underline{u}|=2$

24) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא $120°$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר: $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

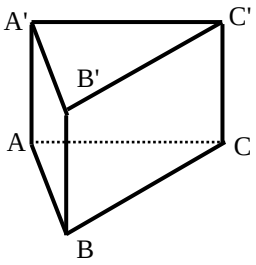
25) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר: $\overrightarrow{MN}=0.5\underline{u}-\underline{v}$.

26) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא $120°$.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PM}=4\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

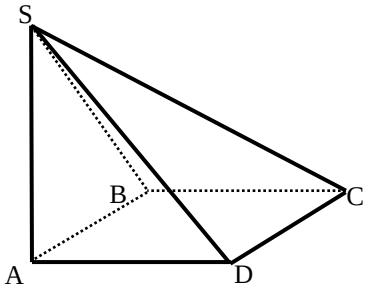
27) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle BAC=90°$).
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.
נתון: $\frac{AP}{PD}=3$, $AB=8$, $AC=12$.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle DPC$.



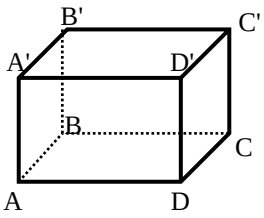
28) נתונה מנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C'
שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.
הנקודה M היא אמצע המקצוע A'C' והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $BN=2CN$.
נסמן: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle MAN$.



29) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.
נתון: $AB=AD=\frac{1}{2}AS=k$.
נסמן: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle PAQ$.



30) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $AB=\frac{1}{\sqrt{2}}AD=AA'$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע DD'.

א. מהו ערכו של α שבעבורו מתקיים: $\left|\overrightarrow{AP}\right|=\frac{5}{6}\left|\overrightarrow{AQ}\right|$?

ב. הבע באמצעות α את $\cos\sphericalangle PAQ$
והראה כי לכל ערך של α הזווית $\sphericalangle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של α שבעבורו הזווית $\sphericalangle PAQ$ מקיימת: $\cos\sphericalangle PAQ=\frac{2}{3\sqrt{5}}$?

31) הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

32) נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$.

33) נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$.

34) נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $\overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}}{2}$.

35) נתונה פירמידה משולשת SABC שבה $\overrightarrow{AS}\perp\overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{AC}$.
הוכח: $\overrightarrow{CS}\perp\overrightarrow{AB}$.

36) הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

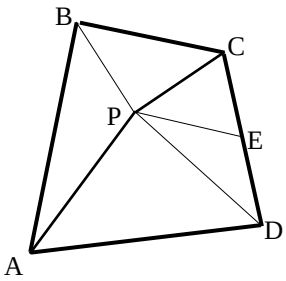
37) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.
הוכח: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$.

ב. נתונה פירמידה משולשת SABC. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC.
הוכח: $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}\right)$.

ג. נתון בנוסף כי $\overrightarrow{AS}$ ו- $\overrightarrow{AP}$ מאונכים ל- $\overrightarrow{BC}$.
הוכח כי $AB=AC$. (הדרכה: סמן $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$).

38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים ישרי זווית וש"ש ($BP=PC$, $AP=PD$).
הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח: $\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{AB}$.
(הדרכה: סמן $\overrightarrow{PA}=\underline{c}$, $\overrightarrow{PC}=\underline{b}$, $\overrightarrow{PD}=\underline{d}$, $\overrightarrow{PB}=\underline{a}$).



39) בטטראדר SABC נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\overrightarrow{AP}=\alpha\cdot\overrightarrow{AS}$.
הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\overrightarrow{SQ}=\beta\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$.

א. מצא את הקשר בין α ו- β שבעבורו $\overrightarrow{PQ}$ מקביל למישור ABC.

ב. נתון: $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BC}$. הוכח: $AB=AC$.

40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים, אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

תשובות סופיות:

22) א. 3 ב. -10 ג. $6\sqrt{3}$ ד. -24 ה. 15 ו. 0.

23) א. $60°$ ב. $150°$ ג. $90°$ ד. $0°$.

24) $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=18.248$

25) $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{29}$

26) $31.87°$

27) $55.49°$

28) $70.623°$

29) $24.095°$

30) א. $\alpha=\frac{3}{4}$ ב. $\cos\left(\sphericalangle PAQ\right)=\frac{1}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$ ג. $\alpha=\frac{1}{2}$

31) שאלת הוכחה.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) שאלת הוכחה.

36) שאלת הוכחה.

37) שאלת הוכחה.

38) שאלת הוכחה.

39) א. $\alpha+2\beta=1$ ב. שאלת הוכחה.

40) שאלת הוכחה.

מתמטיקה להנדסאים

פרק 13 - וקטורים אלגבריים

תוכן העניינים

1. שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים 123
2. פעולות אלגבריות בין וקטורים 127
3. גודל של וקטור 129
4. וקטורים מקבילים ושווים 130
5. זווית בין וקטורים 131
6. הצגה פרמטרית של ישר 132
7. מצב הדדי בין ישרים 135

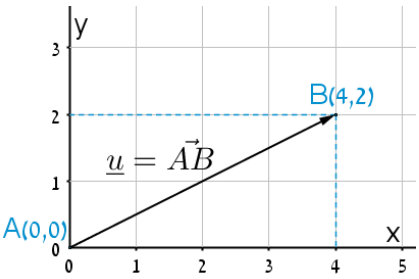
שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים:

סיכום כללי:

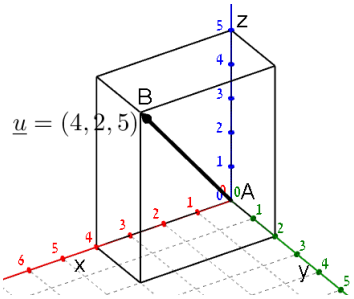
הגדרה כללית:

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.

דוגמאות:



- הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הווקטור: $\underline{u}=(4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.

ווקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים:

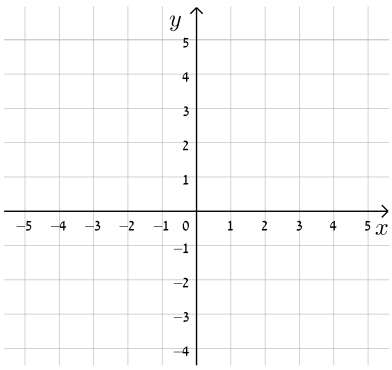
ווקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון:

- אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו-$B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$; $y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$; $z_P=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$.

שאלות:

1) שרטט את הווקטורים הבאים:



א. $\underline{u}=(4,2)$

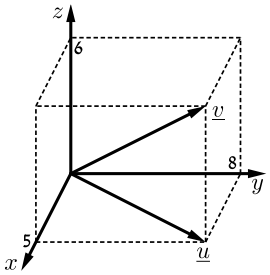
ב. $\underline{v}=(-5,1)$

ג. $\underline{w}=(3,-4)$

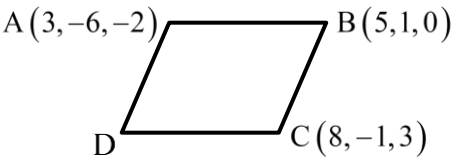
ד. $\underline{a}=(0,3)$

ה. $\underline{b}=(-5,0)$

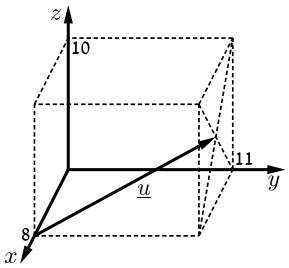
2) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט.



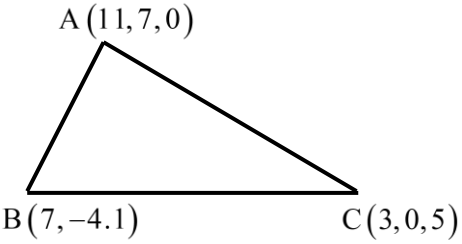
3) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים (ראה איור).
מצא את שיעורי הקודקוד D.



4) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



5) בשרטוט נתון משולש ששיעורי קודקודיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.



6) מצא את x , y ו- z אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר:
$\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ אם נתונות הנקודות $A(-3,5)$ ו-$B(6,1)$.

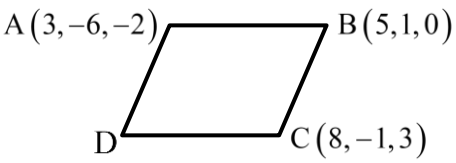
ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8,11)$ והווקטור $\overrightarrow{PQ}=(4,-3)$.

8) ענה על הסעיפים הבאים:

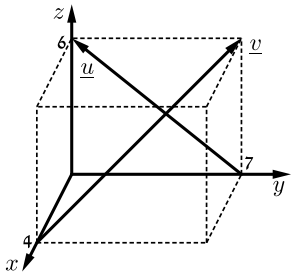
א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו-$F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$
והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

9) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקודקוד D.

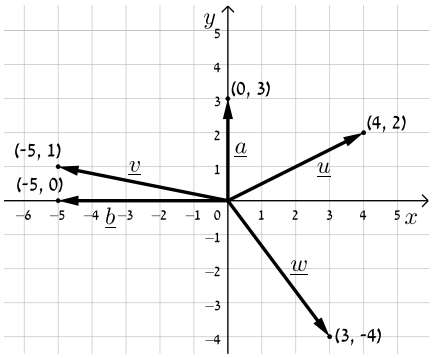


10) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



תשובות סופיות:

1) להלן סרטוט:



2) $\underline{v}=(5,8,6)$, $\underline{u}=(5,8,0)$.

3) $D(6,-8,1)$.

4) $\underline{u}=(4,11,5)$.

5) $(7,1,2)$.

6) $z=6$, $y=-2$, $x=5$.

7) א. $\overrightarrow{AB}=(9,-4)$ ב. $Q(12,8)$.

8) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N(-1,-5,10)$.

9) $D(6,-8,1)$.

10) $\underline{v}=(-4,7,6)$, $\underline{u}=(0,-7,6)$.

פעולות אלגבריות בין וקטורים:

סיכום כללי:

מכפלה סקלרית בהצגה אלגברית:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של ווקטורים: $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$, $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

שאלות:

11) נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{v}=(-1,3,-5)$, $\underline{u}=(4,0,9)$.
חשב את ערכי הווקטורים הבאים: $3\underline{u}+2\underline{v}$, $\underline{u}-2\underline{v}$, $\underline{u}-\underline{v}$, $\underline{u}+\underline{v}$.

12) נתונים הווקטורים: $\underline{w}=(2,6,-5)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$, $\underline{u}=(-3,1,4)$.
חשב את:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

ד. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ה. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$ ו. $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) נתונות הנקודות הבאות: $C(3,-1,2)$, $B(4,2,-1)$, $A(1,-3,0)$.
מצא את הווקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$ ב. $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$ ג. $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

14) נתונים שלושה וקטורים: $\underline{w}=(x,5,-10)$, $\underline{v}=(0,y,4)$, $\underline{u}=(6,-1,z)$.

א. מצא את ערכם של x,y,z המקיימים: $\underline{u}+2\underline{v}=\underline{w}$.

ב. מצא את ערכם של x,y,z המקיימים: $2\underline{v}-3\underline{w}=\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v})$.

ג. כיצד תשתנה התוצאה של סעיף א' אם: $\underline{w}=(x,2z,-10)$, $\underline{v}=(y-1,2,x)$, $\underline{u}=(6,y,z)$?

15) נתונים הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$.

א. חשב את תוצאת המכפלה הסקלרית עבור: $\underline{v}=(4,0,1)$, $\underline{u}=(-6,2,3)$.

ב. מצא את y עבורו תוצאת המכפלה הסקלרית של הווקטורים:
$\underline{v}=(2,y,4)$, $\underline{u}=(1,7,-6)$ תהיה 1-.

ג. מצא את y עבורו הווקטורים מהסעיף הקודם יהיו מאונכים זה לזה.

תשובות סופיות:

11) $3\underline{u}+2\underline{v}=(10,6,17)$; $\underline{u}-2\underline{v}=(6,-6,19)$; $\underline{u}-\underline{v}=(5,-3,14)$; $\underline{u}+\underline{v}=(3,3,4)$.

12) א. $(6,-2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

ד. $(2.5,-1,-3.5)$ ה. $(9.5,9.5,-18)$ ו. $(19,19,-36)$

13) א. $(5,7,1)$ ב. $(-8,-16,8)$ ג. $(8,12,0)$

14) א. $x=6$, $y=3$, $z=-18$ ב. $x=-1$, $y=9\frac{2}{3}$, $z=72$

ג. $z=-\frac{2}{9}$, $y=-4\frac{4}{9}$, $x=-4\frac{8}{9}$.

15) א. $\underline{u}\cdot\underline{v}=-21$ ב. $y=3$ ג. $y=3\frac{1}{7}$.

גודל של וקטור:

סיכום כללי:

גודלו של ווקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

שאלות:

16) נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{v}=(5,-1,0)$, $\underline{u}=(1,-3,2)$.
חשב את הגדלים של הוקטורים הבאים: $4\underline{u}-3\underline{v}$, $2\underline{v}+\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$.

17) נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

תשובות סופיות:

16) $|\underline{u}|=\sqrt{14}$; $|\underline{v}|=\sqrt{26}$; $|2\underline{v}+\underline{u}|=\sqrt{150}$; $|4\underline{u}-3\underline{v}|=\sqrt{266}$.

17) הוכחה.

וקטורים מקבילים ושווים:

שאלות:

18) נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

19) נתונות הנקודות הבאות: $A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראה כי: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

תשובות סופיות:

18) א. הוכחה. ב. כן.

19) א. הוכחה. ב. לא.

זווית בין וקטורים:

סיכום כללי:

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.

שאלות:

20) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

21) מצא את שטחו של משולש ABC שקודקודיו הם: $C(5,-1,0)$, $B(0,3,2)$, $A(-3,2,1)$.

22) נתונים הווקטורים: $\underline{v}=(5,0,3)$, $\underline{u}=(2,-1,0)$.
מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

תשובות סופיות:

20) א. $92.277°$ ב. $90°$ ג. $180°$.

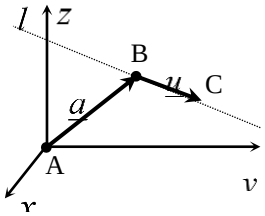
21) 10.173 יח"ש.

22) $\underline{w}=(3,6,-5)$ או $\underline{w}=(-3,-6,5)$.

הצגה פרמטרית של ישר:

סיכום כללי:

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני ווקטורים.



הווקטור $\underline{a}$ נקרא ווקטור ההעתקה.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.
הווקטור $\underline{u}$ נקרא ווקטור הכיוון של הישר.
זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$
כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר l.

<u>דוגמא</u>: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו-$C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים:

$$\underline{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,3,1) \;\; ; \;\; \underline{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l : \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$.

הערות:

- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה וווקטור הכיוון.
  ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l : \underline{x} = (7,0,10) + t(-6,9,-27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

שאלות:

23) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = (4,3,0) + t(1,-1,1)$?

24) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = t(2,-1,5)$?

25) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו-$B(1,6)$.

26) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו-$D(4,1,1)$.

27) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$
ומקביל לישר $\ell : \underline{x} = (0,3,-1) + t(-4,2,1)$.

28) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$
ומאונך לישר: $\ell : \underline{x} = (1,2,0) + s(1,-2,4)$.

29) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(4,5,6)$.
כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות x , y ו- z.

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות: $z = 4 - t$, $y = 10$, $x = 1 + 2t$.
כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

30) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

31) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$
ומקביל לציר ה- z.

32) מצא את נקודת החיתוך של הישר $\ell : \underline{x} = (1,-2,6) + t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

תשובות סופיות:

23) כן.

24) לא.

25) $\ell : \underline{x} = (-5,-2) + t(6,8)$.

26) $\ell : \underline{x} = (4,1,1) + t(1,1,3)$.

27) $\ell : \underline{x} = (2,-7,1) + s(-4,2,1)$.

28) $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(2,1,0)$.

29) א. $x = 1+4t$, $y = 2+5t$, $z = 3+6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1,10,4) + t(2,0,-1)$.

30) $\ell : \underline{x} = t(0,1,0)$.

31) $\ell : \underline{x} = (3,-1,4) + t(0,0,1)$.

32) $(7,-5,0)$.

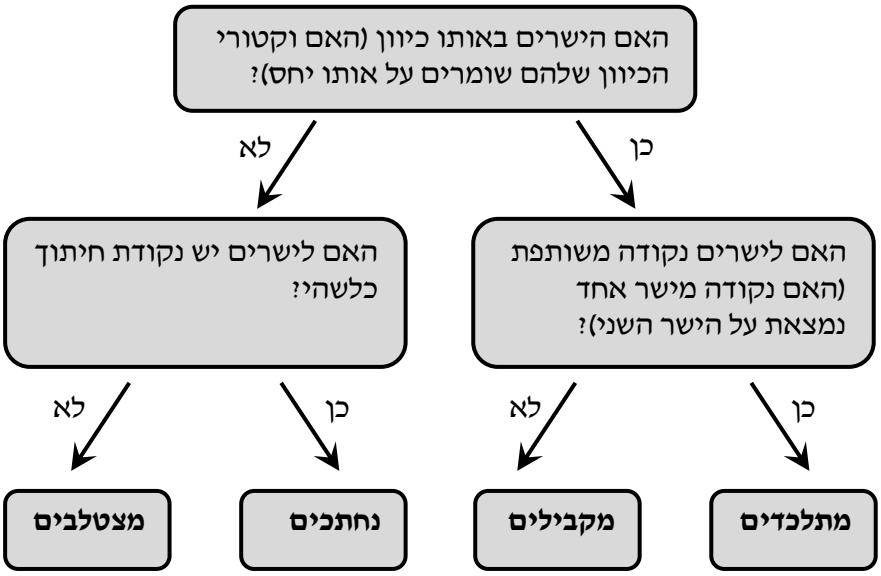
מצב הדדי בין ישרים:

סיכום כללי:

ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



שאלות:

33) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_1 : \underline{x} = (2,-3,0) + t(5,-1,2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (12,-5,4) + s(-10,2,-4)$.

34) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_3 : \underline{x} = (0,1,-7) + t(-2,1,1)$, $\ell_4 : \underline{x} = (2,0,-6) + s(6,-3,-3)$.

35) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_5 : \underline{x} = (-3,5,1) + t(4,0,-1)$, $\ell_6 : \underline{x} = (-1,7,4) + s(-1,1,2)$.

36) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_7 : \underline{x} = (3,0,0) + t(2,-2,5)$, $\ell_8 : \underline{x} = (0,1,-5) + s(3,1,-2)$.

37) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_9 : \underline{x} = (-4,1,-1) + t(3,0,-1)$, $\ell_{10} : \underline{x} = s(6,0,-2)$.

38) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{11} : \underline{x} = (2,8,-1) + t(1,0,0)$, $\ell_{12} : \underline{x} = (-5,8,2) + s(2,0,-1)$.

39) מצא את ערכו של הפרמטר k שבעבורו הישרים הבאים:
$\ell_1 : \underline{x} = (k+1,1-k,6) + t(1,-2,2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (k-1,7,-k) + s(1-k^2,k^2+2,-6)$

א. מקבילים.

ב. מתלכדים.

40) נתונות הנקודות: $D(-2,3,k)$, $C(-6,3,-1)$, $B(k,-1,3)$, $A(3,-1,5)$.
הראה כי לכל ערך של k הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

תשובות סופיות:

33) מתלכדים.

34) מקבילים.

35) נחתכים, $(1,5,0)$.

36) מצטלבים.

37) מקבילים.

38) נחתכים, $(1,8,-1)$.

39) א. $k=2$. ב. $k=-2$.

40) הוכחה.