

# מתמטיקה לביווגים



## תוכן העניינים

1	מבוא מתמטי לקורס	1
(ללא ספר)	הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות	2
32	הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות	32
54	גבול של פונקציה	54
72	רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים	72
87	הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות	87
100	חישוב נגזרת של פונקציה	100
113	משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי	113
124	כלל לופיטל	124
131	חקירת פונקציה	131
154	אינטגרלים מיידיים	154
157	אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"	157
159	אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים	159
163	אינטגרלים בשיטת ההצבה	163
166	אינטגרלים של פונקציות רציונליות	166
171	אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות	171
182	האינטגרל המסוים, אינטגרליות לפי רימן ולפי דארבו	182
197	שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)	197
219	שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)	219
224	משוואות מסדר ראשון	224
246	משוואות ליניאריות מסדר שני	246
260	שימושים של משוואות דיפרנציאליות	260
268	נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה	268

# תוכן העניינים

24. נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה ..... 273

# מתמטיקה לביולוגים

## פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

### תוכן העניינים

1	1. מבוא לתורת הקבוצות
7	2. המספרים האי-רציונליים
8	3. קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות
15	4. קבוצה צפופה
17	5. סימן הסכימה
20	6. אינדוקציה
22	7. אי שוויונים מפורסמים
23	8. פתרון אי שוויונים
25	9. עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון
28	10. שדות
30	11. הערך השלם

## מבוא לתורת הקבוצות

### שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א.  $\forall x \forall y : (x + y)^2 > 0$

ב.  $\forall x \exists y : (x + y)^2 > 0$

ג.  $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד.  $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה.  $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$  ( $k$  ו- $n$  טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את 0.

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון  $x^2 > 4$ , הוא  $x > 2$  או  $x < -2$ .

ב. אי השוויון  $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל  $x$ .

ג. לכל מספר טבעי  $n$ , המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר  $x$ ,  $|x| < 1$  אם ורק אם  $-1 < x < 1$ .

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה.  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו.  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:

$A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האיזוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א.  $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב.  $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג.  $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד.  $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה.  $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה  $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$ .

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א.  $5 \in A$       ב.  $2 \in A$       ג.  $\{2\} \in A$

ד.  $\{2\} \subseteq A$       ה.  $\{\{2\}\} \subseteq A$       ו.  $\emptyset \in A$

ז.  $\emptyset \subseteq A$       ח.  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$       ט.  $\{2, 4\} \subseteq A$

י.  $\{2, 4\} \in A$       יא.  $\{\{2, 4\}\} \in A$       יב.  $\{2, 5\} \subseteq A$

יג.  $\{2, 5\} \in A$       יד.  $\{1, 4\} \in A$

(7) מצאו שתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , המקיימות:

א.  $A \in B$

ב.  $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{4, 6, 8, 10\}$ ,  $C = \{3, 5, 7, 9\}$ ,  $D = \{6, 7, 8\}$ ,  $E = \{7, 8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה  $X$ :

א.  $X \subseteq A$  וגם  $X \not\subseteq D$ .

ב.  $X \subseteq D$  וגם  $X \not\subseteq C$ .

ג.  $X \subseteq E$  וגם  $X \not\subseteq A$ .

(9) הוכיחו:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .

**(10)** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**(11)** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^x = 0\}$$

רשמו את :

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**(12)** נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשבו את  $(A - B) - C$ .

ב. חשבו את  $A - (B - C)$ .

**(13)** נתון :  $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$ ,  $A = \{12, 15, 18\}$ ,  $B = \{13, 15, 17\}$

הדגימו את כלל דה מורגן  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**(14)** הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**(15)** מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$ , של הקבוצות הבאות :

א.  $A = [1, \infty)$

ב.  $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

**16** הציגו באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| א. $A \cap B$                    | ב. $A \cup B$                    |
| ג. $A^c$                         | ד. $A \cap B^c$                  |
| ה. $A^c \cap B$                  | ו. $A \cup B^c$                  |
| ז. $A^c \cup B$                  | ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ |
| ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ |                                  |

**17** ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו כי  $A \setminus B = A \cap B^c$ .  
הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.
- ב. נסמן:  $X = C \setminus (A \cap B)$ ,  $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ .  
הוכיחו כי  $X = Y$ .
- ג. נסמן:  $X = A \setminus (B \cup C)$ ,  $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .  
הוכיחו כי  $X = Y$ .

**18** תהיינה  $X, Y, Z$  קבוצות כלשהן.

- טענה א':  $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$ .
- טענה ב':  $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$ .
- טענה ג':  $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \setminus Z$ .
- איזו טענה נכונה לכל בחירה של  $X, Y, Z$ ?

**19** הוכיחו כי אם הנקודה  $x_1$  שייכת לסביבת  $\varepsilon$  של הנקודה  $x_0$ , אז קיימת סביבת  $\delta$  של  $x_1$  שמוכלת בסביבת  $\varepsilon$  של הנקודה  $x_0$ .

**20** הוכיחו שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

**21** הוכיחו כי אם  $x_0$  לא שייכת לקטע הסגור  $[a, b]$ , אז קיימת סביבה של הנקודה  $x_0$  אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע  $[a, b]$ .

**22** הוכיחו כי אם  $|x - x_0| < \varepsilon$ ,  $|y - y_0| < \varepsilon$ , אז  $|xy - x_0y_0| < \varepsilon(|x_0| + |y_0| + \varepsilon)$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. לכל  $x$  ולכל  $y$  מתקיים  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ב. לכל  $x$  קיים  $y$ , כך ש- $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ג. לכל  $x$  ולכל  $y$  קיים  $z$  כך ש- $xz = \frac{y}{4}$ . הטענה אינה נכונה.  
 ד. לכל  $x$  חיובי ולכל  $y$  חיובי מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . הטענה נכונה.  
 ה. לכל  $n$  טבעי המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א.  $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$  ב.  $\forall x: x^2 + 4 > 0$   
 ג.  $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$  ד.  $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א.  $A = (-4, 4)$ , בקבוצה אינסוף איברים.  
 ב.  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , בקבוצה 7 איברים.  
 ג.  $C = \{1, 2, 3\}$ , בקבוצה 3 איברים. ד.  $D = \{-3, -2, -1, 0\}$ , בקבוצה 4 איברים.  
 ה.  $E = \{0, 1\}$ , בקבוצה 2 איברים.  
 ו.  $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , בקבוצה 9 איברים.
- (4) א.  $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$  ב.  $B = \{11, 13, 17, 19\}$   
 ג.  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  ד.  $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות  $A, B$  ו- $C$  שוות זו לזו, והקבוצות  $D$  ו- $E$  שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.  
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.  
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7)  $A = \{1, 2\}$   $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א.  $A, C$  ב.  $E, D$  ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10)  $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  1)  $A \cap B = \{4, 6, 8\}$  2)  $(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$  3)
- 4)  $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$  5)  $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$
- (11)  $A \cup B = (-2, 4)$  1)  $A \cap B = \emptyset$  2)  $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$  3)  
 4)  $(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1)$  5)  $(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1)$

12) א.  $\phi$  ב.  $\{4,5,6\}$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

15) א.  $A^c = (-\infty, 1)$  ב.  $B^c = [1, 4]$  ג.  $C^c = [1, 4]$

ד.  $D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4]$

16) ראו בסרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענו ב.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

## המספרים האי-רציונליים

### שאלות

- (1) א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.  
 ב. הוכיחו כי  $\sqrt{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (2) א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכיחו שהמספר מתחלק ב-3.  
 ב. הוכיחו כי  $\sqrt{3}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (3) א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.  
 ב. הוכיחו כי  $\sqrt[3]{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (4) הוכיחו כי  $\sqrt{n}$  הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- $n$  טבעי שאינו ריבוע של מספר).
- (5) הוכיחו או הפריכו:  
 א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.  
 ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.  
 ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.  
 ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.
- (6) א. הוכיחו כי  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.  
 ב. הוכיחו כי  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  הוא מספר אי-רציונלי.  
 ג. הוכיחו כי  $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (7) א. יהי  $p$  מספר ראשוני ויהיו  $a, k$  מספרים טבעיים.  
 הוכיחו כי  $p | a \Leftrightarrow p | a^k$ .  
 ב. הוכיחו: אם  $n \neq N^k$ , אז  $\sqrt[k]{n}$  הוא מספר אי-רציונלי ( $n, k, N \in \mathbb{N}$ ).
- הערת סימון: אם מספר  $a$  מתחלק במספר  $b$  נסמן  $b | a$ ,  
 ונאמר גם "  $b$  מחלק את  $a$  ".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות

### שאלות

$$(1) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

$$(2) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{1}{n^4 + 2n + 1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

$$(3) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{n^4 + n^2 + 3}{2n^4 + 2n^2 + 8} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

$$(4) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{[cn]}{n} \mid n \in \mathbb{N}, 0 < c \in \mathbb{R} \right\}$$

- א. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמעלה ומצאו את  $\sup A$ .  
 ב. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמטה ומצאו את  $\inf A$ .

$$(5) \text{ נתונה הקבוצה } A = \{n^5 - n + 4 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

6 נתונה הקבוצה  $A = \{11 - 4^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

7 נתונה הקבוצה  $A = \left\{ \frac{4n-1}{5n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ .

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

8 מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצות הבאות, במידה והם קיימים:

א.  $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| \leq 1\}$

ג.  $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-4}{(x-2)^2} \leq 0 \right\}$

ד.  $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 1 + \frac{n+1}{n+4} \sin \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$

9 ענו על הסעיפים הבאים:

- א. נתונה קבוצה של מספרים ממשיים  $S$ . הוכיחו שאם קיים לקבוצה חסם עליון אז הוא יחיד.  
 ב. הוכיחו שלקבוצה הריקה אין חסם עליון.

10 הוכיחו את הטענות הבאות:

- א. אם  $\alpha$  הוא הסופרמום של הקבוצה  $A$ , אז לכל מספר ממשי  $\varepsilon > 0$ , קיים איבר  $x \in A$ , כך ש- $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$ .  
 ב. אם  $\beta$  הוא האינפימום של הקבוצה  $A$ , אז לכל מספר ממשי  $\varepsilon > 0$ , קיים איבר  $x \in A$ , כך ש- $\beta \leq x < \beta + \varepsilon$ .

**(11)** הוכיחו את הטענות הבאות :

- א. בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר ממשי.  
(משפט הצפיפות של הממשיים)
- ב. עבור קטעים מהטיפוס  $(-\infty, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ , לא קיים מקסימום.
- ג. עבור קטעים מהטיפוס  $(-\infty, \infty)$ ,  $(a, \infty)$ ,  $[a, \infty)$ , לא קיים מקסימום.
- ד. עבור קטעים מהטיפוס  $(-\infty, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ , הקצה הימני של הקטע הוא החסם העליון.
- ה. אם  $S$  היא קבוצה בעלת מקסימום, אז ל- $S$  יש חסם עליון, ומתקיים  $\max S = \sup S$ .

**(12)** תהי  $A$  תת-קבוצה לא ריקה של  $\mathbb{R}$ , ויהי  $x \in \mathbb{R}$ .

נגדיר את המרחק בין  $x$  ל- $A$  על ידי:  $d(x, A) = \inf \{|x - a| \mid a \in A\}$ .

אם  $\alpha \in \mathbb{R}$  הוא החסם העליון של  $A$ , הראו כי  $d(\alpha, A) = 0$ .

**(13)** הוכיחו שקבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלמעלה.

**(14)** הוכיחו שקיימת קבוצה של מספרים רציונליים, אשר חסומה מלמעלה אך אין לה סופרמום רציונלי.

**(15)** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. נניח ש- $K$  קבוצה של מספרים ממשיים החסומה מלמטה.  
נתבונן בקבוצה  $-K = \{-x \mid x \in K\}$ .  
הוכיחו שהקבוצה  $-K$  חסומה מלמעלה.
- ב. הוכיחו שלכל קבוצה לא-ריקה של מספרים ממשיים, החסומה מלמטה, קיים חסם תחתון.

**(16)** תהי  $T$  קבוצה חסומה מלעיל של מספרים ממשיים.

תהי  $S$  קבוצה חלקית לא ריקה של  $T$ .  
הוכיחו כי :

- א. ל- $T$  יש חסם עליון  $\sup T$ .
- ב. ל- $S$  יש חסם עליון  $\sup S$ .
- ג.  $\sup S \leq \sup T$ .
- ד. אם  $S$  ו- $T$  בעלות מקסימום, אז  $\max S \leq \max T$ .

- 17** יהיו  $A$  ו- $B$  שתי קבוצות לא ריקות, חסומות מלעיל, של מספרים ממשיים.
- א. נניח כי לכל  $x \in A$  קיים  $y \in B$ , כך ש- $x < y$ .  
 הוכיחו כי  $\sup A \leq \sup B$ .  
 האם יהיה נכון לומר ש- $\sup A < \sup B$ ?
- ב. נניח שבנוסף לנתון בסעיף א', נתון כי לכל  $y \in B$  קיים  $x \in A$ , כך ש- $y < x$ .  
 הוכיחו כי  $\sup A = \sup B$ .
- 18** נניח ש- $A$  ו- $B$  הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,  
 כך ש- $\sup A = \inf B$ .  
 הוכיחו שלכל מספר  $\delta > 0$ , קיים מספר  $x$  ב- $A$ , ומספר  $y$  ב- $B$ , כך ש-  
 $x + \delta > y$ .
- 19** נניח ש- $A$  ו- $B$  הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,  
 כך ש- $\sup A \leq \inf B$ .  
 נניח שלכל מספר  $\delta > 0$  קיים מספר  $x$  ב- $A$ , ומספר  $y$  ב- $B$ , כך ש- $x + \delta > y$ .  
 הוכיחו כי  $\sup A = \inf B$ .
- 20** נניח ש- $A$  קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים, שאין לה מקסימום,  
 ונניח כי  $x < \sup A$ .  
 הוכיחו שיש לפחות שני איברים בקבוצה  $A$ , שנמצאים בין  $x$  ל- $\sup A$ .
- 21** תהי  $S$  קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים.  
 הוכיחו כי אם  $c \geq 0$ , אז ל- $c \cdot S$  יש חסם עליון, ומתקיים  $\sup(c \cdot S) = c \cdot \sup S$ .
- 22** יהיו  $S$  ו- $T$  קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.  
 הוכיחו כי הקבוצה  $S + T$  היא בעלת חסם עליון ומתקיים:  
 $\sup(S + T) = \sup S + \sup T$ .
- 23** יהיו  $S$  ו- $T$  קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.  
 א. הוכיחו כי הקבוצה  $S \cup T$  היא בעלת חסם עליון.  
 ב. הוכיחו כי  $\sup(S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$ .
- 24** תהיינה  $U, T, S$  קבוצות לא-ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.  
 נניח כי לכל  $s \in S$  ולכל  $t \in T$  קיים  $u \in U$ , המקיים את התנאי:  $u \geq s + t$ .  
 הוכיחו כי  $\sup U \geq \sup T + \sup S$ .

(25) הוכיחו את הטענות הבאות :

- א. אם  $S$  ו- $T$  הן שתי קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים, כך שכל איבר של  $S$  אינו גדול משום איבר של  $T$ , אז קיימים  $\sup S, \inf T$ , ומתקיים:  $\sup S \leq \inf T$ .
- ב. לכל קבוצה לא-ריקה וחסומה  $S$  מתקיים:  $\inf S \leq \sup S$ . האם ייתכן שוויון ביניהן? באילו תנאים?

(26) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. נסחו והוכיחו את משפט ארכימדס.
- ב. נסחו והוכיחו את תכונת ארכימדס.
- ג. הוכיחו שלכל מספר ממשי  $\varepsilon > 0$  קיים מספר טבעי  $n$ , כך ש- $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .
- ד. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים  $\alpha, \beta$ , המקיימים  $\alpha < \beta$ , קיים מספר טבעי  $n$ , כך ש- $\alpha < \alpha + \frac{1}{n} < \beta$  וגם  $\alpha < \beta - \frac{1}{n} < \beta$ .

(27) תהי  $A$  תת-קבוצה לא ריקה של  $\mathbb{R}$  ויהי  $\alpha \in \mathbb{R}$  חסם מלעיל של  $A$ .

$$n \in \mathbb{N} \text{ קיים } a_n \in A \text{ כך ש-} a_n > \alpha - \frac{1}{n}$$

הוכיחו כי  $\alpha$  הוא הסופרמום של  $A$ .

(28) הוכיחו שלכל מס' ממשי  $c$  קיים מספר שלם **יחיד**  $m \in \mathbb{Z}$ , כך ש- $m \leq c < m+1$ .

למספר  $m$  קוראים הערך השלם של  $c$ , ומסמנים  $m = [c]$ .

(29) יהיו  $a$  ו- $b$  שני מספרים ממשיים המקיימים  $|a-b| < \frac{1}{n}$ , לכל מספר טבעי  $n$ .

הוכיחו כי  $a = b$ .

(30) ענו על הסעיפים הבאים :

א. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = [n, \infty)$ .

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$$

הוכיחו כי

ב. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $J_n = \left[-\frac{1}{n}, \infty\right)$ .

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset$$

הוכיחו כי

**(31)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = [a_n, b_n]$ .

נניח כי  $I_{n+1} \subset I_n$  לכל  $n$ .

הוכיחו כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ .

ב. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ .

הוכיחו כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ .

ג. בסעיף ב' התקיים כי  $I_{n+1} \subset I_n$  לכל  $n$ , וכן  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ .

האם תוצאת סעיף ב' סותרת את תוצאת סעיף א'?

**(32)** לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ .

הוכיחו כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\min A = \inf A = 0, \sup A = 1$
- (2) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\max A = \sup A = \frac{1}{4}, \inf A = 0$
- (3) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\min A = \inf A = \frac{5}{12}, \sup A = \frac{1}{2}$
- (4) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\sup A = c, \inf A = [c]$
- (5) א. הקבוצה לא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה על ידי 4. ב.  $\min A = 4$
- (6) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי 7. הקבוצה לא חסומה מלמטה.  
 ב.  $\max A = 7$
- (7) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי  $\frac{4}{5}$ , וחסומה מלמטה על ידי  $\frac{3}{5}$ ;  
 ב.  $\sup A = \frac{4}{5}, \min A = \frac{3}{5}$  לכן, הקבוצה חסומה.
- (8) א.  $\max A = \frac{5}{4}, \inf A = -1$  ב.  $\min B = 0, \max B = 2$   
 ג.  $\min C = -2, \sup C = 2$  ד.  $\inf D = 0, \sup D = 2$

שאלות 9-32 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## קבוצה צפופה

### שאלות

- (1) הוכיחו שקבוצת הממשיים צפופה בקבוצת הממשיים.
- (2) הוכיחו שקבוצת הרציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.
- (3) הוכיחו שקבוצת האי-רציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.
- (4) הוכיחו שהקבוצה  $A = \{\sqrt{10}q \mid q \in \mathbb{Q}\}$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .
- (5) הוכיחו שהקבוצה  $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .
- (6) אפשר להגדיר קבוצה צפופה בממשיים גם כך:  
 תת-קבוצה  $S$  של  $\mathbb{R}$  היא צפופה (ב- $\mathbb{R}$ ),  
 אם לכל  $x \in \mathbb{R}$  ולכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $s \in S$ , כך ש- $|s - x| < \varepsilon$ .  
 הוכיחו שאם  $S$  תת-קבוצה של  $\mathbb{R}$  מקיימת את התכונה,  
 שלכל  $a, b \in \mathbb{R}$  קיים  $s \in S$ , כך ש- $a < s < b$ , אז  $S$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .
- (7) הוכיחו שהקבוצה  $A = \{q\sqrt{10} \mid 0 < q \in \mathbb{Q}\}$  צפופה ב- $[0, 1]$ .
- (8) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע  $(1, \infty)$ .  
 הוכיחו שהקבוצה  $B = \left\{ \frac{a}{n} \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$  צפופה בקטע  $(0, 1)$ .
- (9) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע  $[0, 1]$ .  
 הוכיחו שהקבוצה  $B = \{na \mid a \in A, n \in \mathbb{N}\}$  צפופה בקטע  $[0, \infty)$ .
- (10) הוכיחו שקבוצת כל השברים העשרוניים הסופיים שלא מופיעה בהם הספרה 4, אינה צפופה בקטע  $I = [0, 1]$ .

**11**) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע  $(1, \infty)$  וצפופה בו.

הוכיחו שהקבוצה  $C = \left\{ \frac{a}{n^2(a+1)} : a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$  אינה צפופה בקטע  $[0,1]$ .

**12**) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע  $[0,1]$ .

הוכיחו שהקבוצה  $C = \left\{ \frac{a+1}{n^2} \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$  אינה צפופה בקטע  $[0,1]$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## סימן הסכימה

## שאלות

1) כתבו בפירוט את הסכומים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \sum_{n=0}^{10} 4^n & \text{ב.} & \sum_{k=1}^4 2k \\ \text{ב.} & \sum_{k=1}^4 2k & \text{ג.} & \sum_{n=4}^{10} na_n \\ \text{ד.} & \sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i & \text{ה.} & \sum_{t=1}^8 tx^t \\ \text{ז.} & \sum_{k=1}^{10} 4n & \text{ח.} & \sum_{k=-1}^3 (k^2 + 1) \\ \text{ט.} & \sum_{\ell=1}^3 (\ell^2 - x_{2\ell} - 4) & \text{ו.} & \sum_{k=4}^{10} na_{k+1} \end{array}$$

2) כתבו את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & 1+2+4+8+16+32+64+128 \\ \text{ב.} & 2+4+6+8+10+12+14+16+18+20 \\ \text{ג.} & 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 \\ \text{ד.} & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 \\ \text{ה.} & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 43 \cdot 44 \\ \text{ו.} & 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + 21 \cdot 8 \\ \text{ז.} & 5^2 + 7^2 + \dots + 27^2 \\ \text{ח.} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11} \\ \text{ט.} & \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \frac{14}{81} + \frac{18}{243} \\ \text{י.} & 4 + \frac{8}{5} + \frac{12}{25} + \frac{16}{125} + \frac{20}{625} \end{array}$$

3) חשבו את הסכומים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \sum_{k=1}^{10} 4k & \text{ב.} & \sum_{k=1}^{10} (2k + 4k^2) \\ \text{ד.} & \sum_{k=10}^{24} \frac{k^3 - k}{k+1} & \text{ה.} & \sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2) \\ \text{ג.} & \sum_{k=10}^{24} k(k-1) & \text{ו.} & \sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 1)(k-2) \end{array}$$

\* תוכלו להיעזר בנוסחאות הבאות (שמוכחות בפרק זה תחת הנושא 'אינדוקציה'):

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

(4) חשבו את הסכומים הבאים :

$$\text{א. } \sum_{k=1}^{20} \frac{5 \cdot 4^k + 8^k}{2^k} \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{11} \frac{2 \cdot 4^{k+2} + 10^k}{0.4^k} \quad \text{ג. } \sum_{k=10}^{20} 2^{2k+10}$$

$$* \text{ תוכלו להיעזר בנוסחה הבאה : } \sum_{k=1}^n a^k = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1} \quad (a \neq 1)$$

(5) חשבו את הסכומים הבאים :

$$\text{א. } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2$$

$$\text{ב. } 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 24^2$$

$$\text{ג. } 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 22^2$$

$$\text{ד. } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2$$

(6) הוכיחו כי :

$$\text{א. } \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+4}}{k+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{2k+6}}{k+3}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=4}^{n-3} \frac{4k+17+2^{2k}}{k+1} = \sum_{k=8}^{n+1} \frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$$

(7) חשבו את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום :

$$\text{א. } \sum_4^{11} k^2 \quad \text{ב. } \sum_{10}^{20} 4^{2k}$$

## תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. } 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + 4^8 + 4^9 + 4^{10}$$

$$\text{ב. } 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

$$\text{ג. } 4a_4 + 4a_5 + 4a_6 + 4a_7 + 4a_8 + 4a_9 + 4a_{10}$$

$$\text{ד. } 4 \cdot 7^2 a_7 + 4 \cdot 8^2 a_8 + 4 \cdot 9^2 a_9 + 4 \cdot 10^2 a_{10} + 4 \cdot 11^2 a_{11} + 4 \cdot 7^2 a_7$$

$$\text{ה. } 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + 8x^8$$

$$\text{ו. } na_5 + na_6 + na_7 + na_8 + na_9 + na_{10} + na_{11}$$

$$\text{ז. } 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n$$

$$\text{ח. } ((-1)^2 + 1) + (0^2 + 1) + (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1)$$

$$\text{ט. } (1^2 - x_2 - 4) + (2^2 - x_4 - 4) + (3^2 - x_6 - 4)$$

$$(2) \text{ א. } \sum_{k=0}^7 2^k \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{10} 2k \quad \text{ג. } \sum_{k=0}^9 (2k+1) \quad \text{ד. } \sum_{k=1}^7 k(k+1)$$

$$\text{ה. } \sum_{k=1}^{22} (2k-1)2k \quad \text{ו. } \sum_{k=1}^7 3k(k+1) \quad \text{ז. } \sum_{n=3}^{14} (2n-1)^2$$

$$\text{ח. } \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{ט. } \sum_{k=1}^5 \frac{4k-2}{3^k} \quad \text{י. } \sum_{k=1}^4 \frac{4k}{5^{k-1}}$$

$$(3) \text{ א. } 220 \quad \text{ב. } 1650 \quad \text{ג. } 4360$$

$$\text{ד. } 4360 \quad \text{ה. } 28 \quad \text{ו. } 4545$$

$$(4) \text{ א. } 5 \cdot (2^{21} - 2) + \frac{4}{3} (4^{20} - 1) \quad \text{ב. } 32 \cdot \frac{10(10^{11} - 1)}{10 - 1} + \frac{25(25^{11} - 1)}{25 - 1}$$

$$\text{ג. } 2^{10} \left[ \frac{4(4^{20} - 1)}{4 - 1} - \frac{4(4^9 - 1)}{4 - 1} \right]$$

$$(5) \text{ א. } 2870 \quad \text{ב. } 4886 \quad \text{ג. } 2024 \quad \text{ד. } 969$$

(6) שאלת הוכחה.

$$(7) \text{ א. } 8 \cdot \frac{8(8+1)}{2} + 9 \cdot 8 \quad \text{ב. } 4^{18} \cdot \frac{16(16^{11} - 1)}{16 - 1}$$

## אינדוקציה

### שאלות

(1) הוכיחו באינדוקציה כי  $4 \cdot 10^n + 14 \cdot 19^n$  מתחלק ב-9 לכל  $n$  טבעי.

(2) הוכיחו באינדוקציה כי  $\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$  ( $k, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ ).

(3) מצאו את ה- $n$  הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים  $2^n \geq n^2$ , והוכיחו באינדוקציה שעבור כל  $n$  טבעי החל ממנו מתקיים אי-השוויון הנ"ל.

(4) הוכיחו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי  $(1+x)^n \geq 1+nx$ , לכל  $n$  טבעי ולכל  $x \geq -1$  ממשי.  
 הערה: אי השוויון הנ"ל נקרא אי שוויון ברנולי.

ב. הוכיחו כי  $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$  לכל  $n$  טבעי.  
 רמז: היעזרו בתוצאת סעיף א'.

(5) הוכיחו באינדוקציה כי  $(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}$  לכל  $0 < x < 1, n \in \mathbb{N}$ .

(6) הוכיחו באינדוקציה כי  $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .  
 רמז: היעזרו במהלך הפתרון באי-שוויון ברנולי.

(7) נתון כי  $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, a_1 = \sqrt{2}$ .

הוכיחו באינדוקציה שלכל  $n$  טבעי מתקיים:

א.  $a_n \leq 2$

ב.  $a_n \leq a_{n+1}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

(8) הוכיחו באינדוקציה שלכל  $n$  טבעי,

אם  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2, a_1 = -1, a_2 = 0$ ,

אז  $a_n = n^2 - 2n$ .

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

9) הוכיחו באינדוקציה שלכל  $n$  טבעי,

$$\text{אם } a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, a_1 = 1, a_2 = 1$$

$$\text{אז } a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2}(-1)^n.$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיביות.

10) הוכיחו באינדוקציה כי  $4^n - 1$  מתחלק ב-15, לכל  $n$  טבעי זוגי.

$$11) \text{ הוכיחו באינדוקציה כי } \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & a \end{array} \right)^n = \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & a^n \end{array} \right) \text{ (} n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \text{)}$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו כפל מטריצות (אלגברה לינארית).

הערה: תרגילים נוספים באינדוקציה תמצאו תחת הנושא "אי שוויונים מפורסמים"

בפרק זה, בשאלה 1 ובשאלה 3 סעיף ו'.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## אי שוויונים מפורסמים

### שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים  $x, y$  המקיימים  $x < 1, y > 1$ , מתקיים  $x + y > xy + 1$ .

ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל  $n \geq 2$  טבעי:

אם  $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$ , אז  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$  ( $0 < a_i \in \mathbb{R}$ ).

(2) נסחו והוכיחו את אי שוויון הממוצעים.

(3) הוכיחו שלכל  $a, b \in \mathbb{R}$  מתקיים:

א.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (אי שוויון המשולש)

ב.  $|a - b| \leq |a| + |b|$

ג.  $|a - b| \geq |b| - |a|$ ,  $|a - b| \geq |a| - |b|$

ד.  $|a - b| \geq ||a| - |b||$

ה.  $|a + b| \geq ||a| - |b||$

ו.  $(a_i \in \mathbb{R}) |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו והוכיחו את אי שוויון קושי-שוורץ.

ב. הוכיחו כי אם  $a_1 + \dots + a_n = 1$  אז  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$ ).

הערה: אי שוויון ברנולי מוכח בפרק זה תחת הנושא "אינדוקציה".

נוכיח שם גם כמה מסקנות מעניינות ממנו.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## פתרון אי שוויונים

### שאלות

פתרו את אי השוויונים הבאים :

$$(1) \quad x^2 - 12x > -32$$

$$(2) \quad (x-3)(x-7) \geq 8x - 56$$

$$(3) \quad 2x^2 + 2x + 24 \geq 0$$

$$(4) \quad \frac{x-1}{x^2-9} > 0$$

$$(5) \quad \frac{2x-1}{x-5} \leq 0$$

$$(6) \quad \frac{x^2 - 7x + 6}{-x^2 + 3x - 7} \geq 0$$

$$(7) \quad |x+2| < 3$$

$$(8) \quad |6-2x| < x$$

$$(9) \quad |2x+3| < 8 < |5-x|$$

$$(10) \quad x^2 - 6|x+1| - 1 > 0$$

$$(11) \quad |2x-6| + |x+5| > 14 - |1-x|$$

$$(12) \quad \sqrt{x+3} < 7$$

$$(13) \quad \frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$$

$$(14) \quad \sqrt{x^2 + x - 6} < x - 3$$

הערה : לא מומלץ להתעכב יותר מידי זמן על פתרון אי שוויונים.

**תשובות סופיות**

**(1)**  $x < 4$  או  $x > 8$

**(2)**  $x \leq 7$  או  $x \geq 11$

**(3)** כל  $x$

**(4)**  $-3 < x < 1$  או  $x > 3$

**(5)**  $\frac{1}{2} \leq x < 5$

**(6)**  $1 \leq x \leq 6$

**(7)**  $-5 < x < -1$

**(8)**  $2 < x < 6$

**(9)**  $-5\frac{1}{2} < x < -3$

**(10)**  $x < -5$  או  $x > 7$

**(11)**  $x < -1$  או  $x > 4$

**(12)**  $-3 \leq x < 46$

**(13)**  $x < 0.472$

**(14)** אין פתרון.

## עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון

### שאלות

(1) חשבו, ללא מחשבון:

א.  $\frac{4! \cdot 7!}{0! \cdot 10!}$

ב.  $\frac{14! \cdot 20!}{10! \cdot 17!}$

(2) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א.  $(n-2)!(n^2 - n) = n!$

ב.  $(n-1)!n^2 + n! = (n+1)!$

ג.  $\frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} + \frac{n^2 - 2}{(n+1)!}$

(3) חשבו:

א.  $\binom{5}{3}$       ב.  $\binom{4}{1}$       ג.  $\binom{10}{0}$       ד.  $\binom{14}{11}$

(4) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א.  $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$       ב.  $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$       ג.  $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

(5) הוכיחו באינדוקציה שלכל  $n \geq 2$  טבעי מתקיים:

$$\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-2} = \binom{n}{2}$$

(6) רשמו את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א.  $(a+b)^4$       ב.  $(x+2)^5$       ג.  $(x-4)^3$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו  $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$  לכל  $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$

ב. נסחו והוכיחו (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

8) הוכיחו שלכל  $n \geq 1$  טבעי מתקיים:

$$\text{א. } \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\text{ב. } \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$\text{ג. } \binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 9\binom{n}{2} - \dots + 3^n \binom{n}{n} = 4^n$$

9) מצאו את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום  $\left(\frac{1}{2a} + 2a^2\right)^{10}$ .

10) בפיתוח של  $\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{a}\right)^{12}$ , ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא  $a^7$ . מצאו את מקום האיבר ואת ערכו.

11) מצאו, בפיתוח של  $\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right)^{10}$ , איבר שאינו מכיל את  $x$ , וחשבו את ערכו.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו, בפיתוח של  $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a} + \frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$ , את המקדם של  $\frac{1}{x}$ .

ב. חשבו את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם  $a = b = 1$ .

13) המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום  $(a+b)^n$ , הוא 15. מצאו את  $n$ .

**תשובות סופיות**

$$(1) \quad \text{א. } \frac{1}{30} \quad \text{ב. } \frac{1001}{285}$$

(2) שאלת הוכחה.

$$(3) \quad \text{א. } 10 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } 1 \quad \text{ד. } 364$$

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

$$(6) \quad \text{א. } (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\text{ב. } (x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

$$\text{ג. } (x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

$$(9) \quad T_4 = \frac{15}{2a}$$

$$(10) \quad T_7 = 924a^7$$

$$(11) \quad T_9 = 45$$

$$(12) \quad \text{א. } \frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6} \quad \text{ב. } 2^{18}$$

$$(13) \quad n = 6$$

## שדות

### שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור ( $\oplus$ ) וכפל ( $\otimes$ ) על  $R$ . בדקו, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y + 4 \\ x \otimes y &= 2xy \end{aligned} \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y \\ x \otimes y &= 2xy \end{aligned} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= y \\ x \otimes y &= y^2 \end{aligned} \quad \text{ג.}$$

2) נתונה הקבוצה  $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ .

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

הוכיחו שהקבוצה  $Q[\sqrt{2}]$ , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.

ב. הוכיחו שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.

ג. הוכיחו שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.

ד. הוכיחו שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

4) יהיו  $a, b$  איברים בשדה.

א. הוכיחו כי  $a + a = a \Leftrightarrow a = 0$ .

ב. הוכיחו כי  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ .

ג. הוכיחו כי  $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ .

5) יהיו  $a$  ו- $b$  איברים של שדה.  
הוכיחו כי:

א.  $(-1) \cdot a = -a$

ב.  $(-a)b = a(-b) = -ab$

6) הוכיחו שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.  
כלומר, הוכיחו כי  $ab = cb \Rightarrow a = c$  לכל  $a, b, c$ , בשדה ( $b \neq 0$ ).

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## הערך השלם

### שאלות

1 פתרו את המשוואות הבאות :

א.  $[x+4]=10$

ב.  $[x+4]=-10$

ג.  $[x+4]^2=100$

ד.  $[2x^2+1]=9$

ה.  $[x^2+x-1]=-2$

ו.  $[x^2-\ln x+e^x-x^5]=0.5$

2 פתרו את המשוואה  $[x+4]=2x+1$ .

3 פתרו את המשוואה  $[16x^2+7]=8x+6$ .

4 פתרו את המשוואה  $[x^2+x+4]=2x+6$ .

5 פתרו את המשוואות הבאות :

א.  $[|x-4|+x]=4x+4$

ב.  $[|x+1|-|x-1|]=x$

6 פתרו את המשוואה  $[4+[x+1]]=10$ .

7 הוכיחו כי לכל  $x$  ממשי ו- $m$  שלם מתקיים  $[x+m]=[x]+m$ .

8 פתרו את אי-השוויונים הבאים :

א.  $[x+4]<10$

ב.  $[x+4]>-10$

ג.  $[x+4]^2<100$

ד.  $[x+4]\leq 10$

9 פתרו את אי-השוויונים הבאים :

א.  $[x]^2 - 5[x] + 6 \leq 0$

ב.  $[x-1][x-2] + [x+10] > 3[x+2] + [2.44]$

10 הוכיחו כי לכל  $x$  ו- $y$  ממשיים מתקיים :

א.  $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$

ב.  $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$

### תשובות סופיות

- (1) א.  $6 \leq x < 7$     ב.  $-14 \leq x < -13$     ג.  $[6,7) \cup [14,-13)$
- ד.  $(-\sqrt{4.5}, -2] \cup [2, \sqrt{4.5})$     ה.  $-1 < x < 0$     ו.  $\emptyset$
- (2)  $x = 2.5, 3$
- (3)  $x = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$
- (4)  $x = -1, 2$
- (5) א.  $x = 0$     ב.  $x = 2, 0, -2$
- (6)  $5 \leq x < 6$
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) א.  $x < 6$     ב.  $x > -14$     ג.  $-14 < x < 6$     ד.  $x < 7$
- (9) א.  $2 \leq x < 4$     ב.  $x < 1$  or  $x \geq 5$
- (10) שאלת הוכחה.

# מתמטיקה לביולוגים

## פרק 2 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

### תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה..... (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות..... (ללא ספר)
9. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות..... (ללא ספר)
10. הפונקציות ההיפרבוליות..... (ללא ספר)
11. הצגה פרמטרית של פונקציה..... (ללא ספר)
12. הצגה פולרית של עקום..... (ללא ספר)

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 3 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

תוכן העניינים

32	1. תחום הגדרה של פונקציה
34	2. הרכבת פונקציות
37	3. הפונקציה ההפוכה
41	4. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית
46	5. פונקציה מחזורית
49	6. פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית
50	7. תרגילים משולבים

## תחום הגדרה של פונקציה

### שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{x - 4} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}} \quad (9)$$

$$y = e^{x^2 + x + 1} \quad (12)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = \tan(10x) \quad (14)$$

$$y = \log_x(x + 4) \quad (13)$$

$$y = \arctan(x + 4) \quad (16)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15)$$

$$y = \arccos(x + 1) \quad (18)$$

$$y = \arcsin(x - 4) \quad (17)$$

### תשובות סופיות

(1) כל  $x$ .

(2)  $x \neq \pm 2$

(3) כל  $x$ .

(4)  $x \neq 0, 1, -1$

(5)  $x \neq 2, -1$

(6)  $x \geq 4$

(7)  $x \leq -2, x \geq 1$

(8) כל  $x$ .

(9)  $-1 < x < 1$

(10)  $x < -2, x > 1$

(11)  $x > 0, x \neq 1$

(12) כל  $x$ .

(13)  $x > 0, x \neq 1$

(14)  $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

(15)  $x \neq \frac{\pi k}{4}$

(16) כל  $x$ .

(17)  $3 < x < 5$

(18)  $-2 < x < 0$

## הרכבת פונקציות

### שאלות

(1) נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = x - 4$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $h(x) = \frac{4}{x}$ .

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א.  $f(g(1))$       ב.  $h(g(f(5)))$       ג.  $f(g(x))$   
 ד.  $h(f(x))$       ה.  $f(f(x))$       ו.  $h(h(x))$

(2) נתון:  $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ .

חשבו  $f(f(x))$  עבור  $x = 3$ .

(3) נתון:  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ ,  $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$ .

חשבו  $f(g(x)) + g(f(x))$  עבור  $x = 8$ .

(4) נתון:  $f(x) = x^2 - 7x$ ,  $g(x) = \ln x$ .

חשבו  $f(g(x))$  עבור  $x = e^2$ .

(5) נתון:  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = \ln x$ .

חשבו  $f(g(x))$  עבור  $x = 2$ .

(6) נתון:  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$ .

חשבו  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$ .

(7) נתונות הפונקציות:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $z(x) = g(f(x))$ .

(8) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $h(x) = f(g(x))$ .

ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$  ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$ .

מה ניתן להסיק בוודאות?

1.  $n \leq -3$

2.  $n \geq 1$

3.  $n$  אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

(9) נתון  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

מצאן את  $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ times}}$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad \frac{69}{13}$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, \quad g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$n \leq -3 \quad \text{ב.} \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (9)$$

## הפונקציה ההפוכה

### שאלות

בתרגילים 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1) \qquad f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3) \qquad (x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

בתרגילים 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5) \qquad f(x) = x^2 - x \quad (6) \qquad f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

בתרגילים 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8) \qquad y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9) \qquad f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^3 \quad (10)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$$

האם הפונקציה היא חח"ע?  
מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \qquad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \qquad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \qquad f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = x^2 - 4 \qquad f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ד.}$$

**13** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1] \quad \text{ב.}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1] \quad \text{ג.}$$

**14** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  ותהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  חח"ע.

ב. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  על.

ג. אם  $f$  ו- $g$  על, אז  $h$  על.

ד. אם  $f$  ו- $g$  על, אז  $h$  חח"ע.

ה. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על, אז  $h$  חח"ע.

ו. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על, אז  $h$  על.

ז. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  חח"ע.

ח. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  על.

**15** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  ותהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ .

נתון כי  $h$  על.

הוכיחו או הפריכו:

א.  $f$  חח"ע.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $g$  על.

**16** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ ,  
ותהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ .

נתון כי  $h$  חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

א.  $g$  על.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $f$  חח"ע.

### תשובות סופיות

(1)  $f^{-1}(x) = 3x + 1$ , כל  $y$ .

(2)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $y \neq 1$ .

(3)  $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$ ,  $y \neq 3$ .

(4)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ ,  $y \geq -4$ .

(5) לא חח"ע. תמונה:  $y \leq -2$  או  $y \geq 2$ .

(6) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq -\frac{1}{4}$ .

(7) לא חח"ע. תמונה  $0 \leq y \leq 1$ .

(8) כן חח"ע. תמונה:  $y > 0$ . פונקציה הפוכה:  $x > 0$ ;  $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ .

(9) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq 2.3$  או  $y \leq -1.3$ .

(10) כן חח"ע. תמונה:  $y \neq 1$ . פונקציה הפוכה:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$ .

(11) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$ .

(12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה:  $\mathbb{R}$ ; על.

ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; לא על.

ג. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , טווח ותמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ; על.

ד. תחום הגדרה  $[0, \infty)$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $[-4, \infty)$ ; לא על.

(13) א. תחום הגדרה וטווח:  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $(0, 1]$ ; לא על.

ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R}$ , טווח ותמונה:  $(0, 1]$ ; על.

ג. תחום הגדרה  $(1, \infty]$ , טווח  $(0, 1]$ , תמונה:  $(0, 0.5)$ ; לא על.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

## פונקציה זוגית ואי זוגית

### שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות 1-8 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$y = 1 \quad (3) \qquad y = x^4 + x^{10} \quad (2) \qquad y = 4x^3 \quad (1)$$

$$y = 2^x \quad (6) \qquad y = x^2 + \sin^2 x \quad (5) \qquad y = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$y = \sin x \cdot \cos x \quad (8) \qquad y = \ln x + x^2 \quad (7)$$

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } z(x) = f(x^2), k(x) = -f(x)$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ופונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3)$$

טענה א':  $z(x)$  אי-זוגית.

טענה ב':  $k(x)$  אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(11) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ונתונה פונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{נסמן: } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4)$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(12) נתון כי  $f(x)$  פונקציה אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$  ומקיימת  $|f(x)| < 1$ .

נתון כי  $g(x)$  פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$ .

$$\text{הוכיחו שהפונקציה } z(x) = g(x) \ln \left( \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) \text{ היא אי-זוגית ב- } \mathbb{R}.$$

**(13) הוכיחו כי :**

- א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
- ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

**(14) הוכיחו כי :**

- א. סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.
- ב. מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.
- ו. הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.
- ז. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל  $x$  היא פונקציית האפס.

**(15) הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית.**

- נגדיר  $z(x) = (f(x))^n$  כאשר  $n > 1$  טבעי.  
קבעו האם הפונקציה  $z$  היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

**(16) נתונה הפונקציה  $f(x)$  המוגדרת לכל  $x$ .**

$$f_{\text{odd}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_{\text{even}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{נגדיר:}$$

- א. הוכיחו כי  $f_{\text{odd}}(x)$  היא פונקציה אי-זוגית ו- $f_{\text{even}}(x)$  היא פונקציה זוגית.
- ב. הוכיחו כי  $f(x) = f_{\text{odd}}(x) + f_{\text{even}}(x)$  והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.
- ג. הציגו את הפונקציה  $f(x) = x^2 + x + 1$  כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

**(17) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :**

- א. אם  $f$  פונקציה אי-זוגית אז  $f(0) = 0$ .
- ב. אם  $f$  פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב- $x = 0$  אז  $f(0) = 0$ .

**(18)** הוכיחו את הטענות הבאות :

- א. הפונקציה  $f(x) = \cos x$  היא זוגית.  
 ב. הפונקציה  $f(x) = \sin x$  היא אי-זוגית.  
 ג. הפונקציה  $f(x) = \tan x$  היא אי-זוגית.  
 ד. הפונקציה  $f(x) = \cot x$  היא אי-זוגית.

**(19)** נתון כי  $f(x)$  פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע

$$(-a, a) \quad (a > 0).$$

הוכיחו כי גם  $f^{-1}$  פונקציה אי-זוגית.

**(20)** הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי זוגיות :

א.  $y = \arctan x$

ב.  $y = \arcsin x$

**(21)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה זוגית :



**22** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



**23** השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.



## תשובות סופיות

שאלות 1-8 : זוגית : 2,3,5,8 ; אי-זוגית : 1,4 ; כללית : 6,7.

(9)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(10) טענה ב'.

(11)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) כאשר  $n$  זוגי – זוגית, וכאשר  $n$  אי-זוגי – אי-זוגית.

(16) א.ב. שאלת הוכחה. ג.  $f(x) = \underbrace{x}_{\text{odd}} + \underbrace{x^2 + 1}_{\text{even}}$

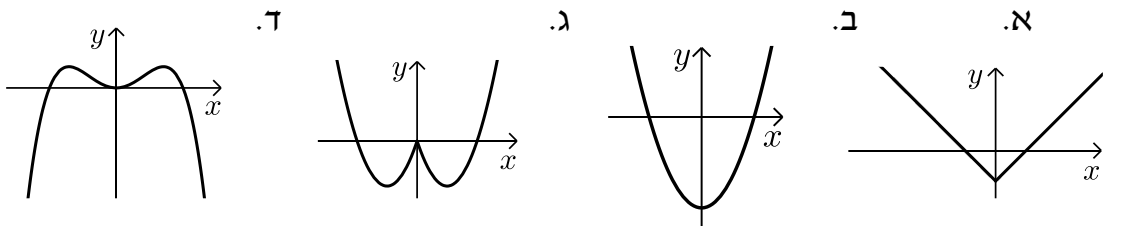
(17) שאלת הוכחה.

(18) שאלת הוכחה.

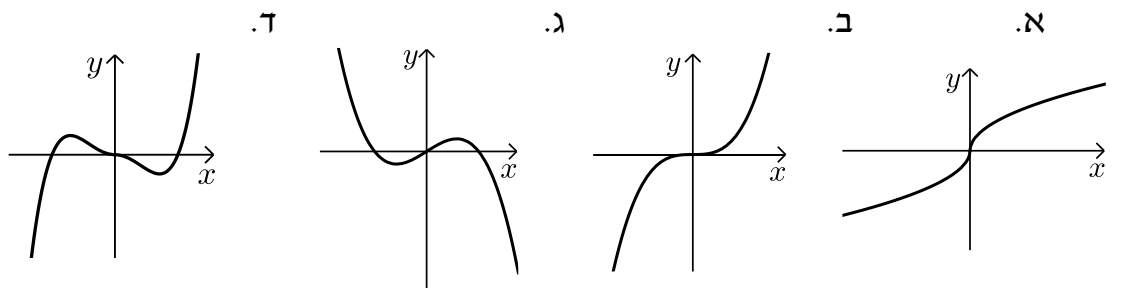
(19) שאלת הוכחה.

(20) שאלת הוכחה.

(21) להלן הגרפים :



(22) להלן הגרפים :



(23) ראו בסרטון.

## פונקציה מחזורית

### שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-20 :

$$y = 1 + 14 \cos 20x \quad (2)$$

$$y = 1 + 10 \sin(0.5x + 4) \quad (1)$$

$$y = -1 + 14 \sec 2x \quad (4)$$

$$y = -4 + 20 \tan 4x \quad (3)$$

$$y = \cos^2 2x \quad (6)$$

$$y = \sin^2 4x \quad (5)$$

$$y = (\sin x + \cos x)^2 \quad (8)$$

$$y = \cos^4 x - \sin^4 x \quad (7)$$

$$y = \cot^2 x \quad (10)$$

$$y = \cos^4 x + \sin^4 x \quad (9)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x \quad (12)$$

$$y = \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{10} \quad (11)$$

$$y = \cos 2x \cos x \quad (14)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x + \sin x \quad (13)$$

$$y = \sin^4 x \quad (16)$$

$$y = \sin^3 x \quad (15)$$

$$y = |\sin x| \quad (18)$$

$$y = \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} \quad (17)$$

$$y = \cot x - \tan x \quad (20)$$

$$y = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (19)$$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות 21-26 אינן מחזוריות :

$$y = x \sin x \quad (23)$$

$$y = x + \cos x \quad (22)$$

$$y = x + \sin x \quad (21)$$

$$y = \cos 5x + \cos \sqrt{5x} \quad (26)$$

$$y = \frac{\sin x}{x} \quad (25)$$

$$y = x^2 \cos x \quad (24)$$

הערה : בשאלות 21 ו-22 נדרש ידע בחקירת פונקציה.

(27) הוכיחו :

אם  $f(x)$  מחזורית בעלת מחזור  $p$ ,

אז  $y = a + b \cdot f(cx + d)$  מחזורית בעלת מחזור  $\frac{p}{c}$ .

(28) הוכיחו : אם  $T$  הוא מחזור של  $f(x)$ , אז לכל  $n$  שלם  $f(x + nT) = f(x)$ .

**(29)** נתון כי  $f, g$  מוגדרות לכל  $x$  ובעלת מחזור  $p_1, p_2$ , בהתאמה.

נתון כי היחס  $\frac{p_1}{p_2}$  הוא מספר רציונלי.

הוכיחו כי גם הפונקציות  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  ( $g \neq 0$ ) הן מחזוריות.

**(30)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x - [x]$ .

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?

ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

**(31)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[0,1]$ .

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית  $g(x)$ , המוגדרת לכל  $x$ , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם  $f(x)$  בקטע  $[0,1]$ , ורשמו נוסחה עבור  $f$ .

**(32)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2$  בקטע  $[0,1]$ .

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית  $g(x)$ , המוגדרת לכל  $x$ , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם  $f(x)$  ב- $[0,1]$ , ורשמו נוסחה עבור  $g$ .

## תשובות סופיות

- (1)  $4\pi$       (2)  $\frac{\pi}{10}$       (3)  $\frac{\pi}{4}$       (4)  $\pi$       (5)  $\frac{\pi}{4}$
- (6)  $\frac{\pi}{2}$       (7)  $\pi$       (8)  $\pi$       (9)  $\frac{\pi}{2}$       (10)  $\pi$
- (11)  $40\pi$       (12)  $\pi$       (13)  $2\pi$       (14)  $2\pi$       (15)  $2\pi$
- (16)  $\pi$       (17)  $\pi$       (18)  $\pi$

(19) הפונקציה היא למעשה  $y = 1$ , כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית. כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

(20)  $\frac{\pi}{2}$

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

(30) א.



ב. 1. ג. שאלת הוכחה.

(31)  $g(x) = x - k$ , עבור  $k$  שלם, זוגי.

(32)  $g(x) = (x - k)^2$ , עבור  $k$  שלם, זוגי.



## פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

### שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשבו  $f(1)$ ,  $f(4)$ ,  $f(-4)$ ,  $f(0)$ ,  $f(7)$ .

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

### תשובות סופיות

$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

(5) א.  $f(1) = 1$ ,  $f(4) = 16$ ,  $f(-4) = 4$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(7) = \text{undefind}$   
 ב.  
 ג. כללית.



## תרגילים משולבים

### שאלות

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על  $\mathbb{R}$ .

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

**(3)** נתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א':  $k(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ב':  $z(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ג':  $h(x) = k(x)z(x)$  זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

**(4)** נתונות שתי פונקציות,  $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ .

נתון ש- $f$  מונוטונית עולה ממש, ואילו  $g$  מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

תהי  $h(x) = f(g(x))$ .

איזו טענה נכונה?

א.  $h$  יורדת חלש.

ב.  $h$  עולה ממש.

ג.  $h$  עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד.  $h$  אינה חסומה בהכרח.

$$\text{(5) נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

תהי  $h(x) = f(g(x))$ .

א. מצאו את  $h$  בקטע  $[-2,0)$ .

ב. קבעו האם  $h$  חח"ע בקטע  $[-2,0)$ .

ג. קבעו האם  $h$  חסומה בקטע  $[-2,0)$ .

ד. קבעו האם  $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$  היא על.

\* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

**(6)** נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ .

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

הפונקציה  $h(x) = f(g(x))$  היא:

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = -\lfloor x \rfloor$ .

א. בדקו את מונוטוניות  $z(x) = f(g(x))$ .

ב. בדקו את מונוטוניות  $k(x) = g(f(x))$ .

ג. בדקו האם  $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$  חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם  $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$ , אז הפונקציה  $f$  יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$ :  
 $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$   
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה  $f$  עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה  $g$  עולה ממש וחח"ע.

9 מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ,

וקבעו את תחום הגדרתה.

הוכיחו שהפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקרו את מונוטוניות הפונקציה  $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$ .

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ .

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

## תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.  
ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א.  $h(x) = x^2$   
ב. הפונקציה חח"ע בקטע.  
ג. הפונקציה חסומה בקטע.  
ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה.  
ג. הפונקציה לא חח"ע.  
ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.  
ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה  $z(x)$  יורדת חלש.  
ג. הפונקציה חסומה.  
ב. הפונקציה  $k(x)$  יורדת חלש.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9)  $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ; תחום הגדרתה: כל  $x$ .
- (10) ראו באתר.
- (11) א.  $-1 \leq x \leq 2$ . ב.  $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ . ג. שאלת הוכחה.  
ד.  $-1 \leq x < \frac{1}{2}$  עלייה,  $\frac{1}{2} < x \leq 2$  ירידה.

# מתמטיקה לביולוגים

## פרק 4 - גבול של פונקציה

### תוכן העניינים

1. הסבר כללי	(ללא ספר)
2. הצבה	54
3. צמצום	55
4. הכפלה בצמוד	56
5. גבולות טריגונומטריים	57
6. פונקציה שואפת לאינסוף	60
7. הגבול של אוילר	61
8. איקס שואף לאינסוף	62
9. כלל הסנדויץ	64
10. גבול של פונקציה מפוצלת	66
11. גבול לפי הגדרה	69

## הצבה

### שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א.  $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב.  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד.  $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

### תשובה

א. 21      ב.  $\frac{11}{12}$       ג. 2      ד. 20

## צמצום

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

### תשובות סופיות

-3 (5)	$n-1$ (4)	6 (3)	$\frac{10}{8.5}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\frac{1}{5}$ (10)	$\frac{8}{17}$ (9)	27 (8)	3 (7)	32 (6)

## הכפלה בצמוד

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

## גבולות טריגונומטריים

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ):

- |   |   |
|---|---|
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2)$                          | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$  |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$                             | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3)$                                   |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6)$        | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5)$                                |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8)$                     | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$                           |
| $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 1} \quad (10)$                         | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9)$                              |
| $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \quad (12)$                     | $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (11)$                             |
| $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x} \quad (14)$                        | $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} \quad (13)$                             |
| $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (16)$                        | $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \quad (15)$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \quad (18)$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x} \quad (17)$             |

## תשובות סופיות

$\frac{1}{2}$ (5)	$\frac{1}{2}$ (4)	$\frac{1}{2}$ (3)	$\frac{3}{4}$ (2)	$\frac{3}{4}$ (1)
	$\frac{1}{4}$ (9)	4 (8)	$\frac{1}{8}$ (7)	$\frac{1}{2}$ (6)
$\frac{1}{\cos^2 a}$ (13)	$-\sin a$ (12)	$\cos a$ (11)	$-\frac{1}{2}$ (10)	
1 (17)	$\frac{2}{\pi}$ (16)	$\frac{1}{2}$ (15)	$\frac{4}{10}$ (14)	$-\frac{1}{12}$ (18)

## זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\ \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \\ \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a \end{cases}$$

## פונקציה שואפת לאינסוף

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( (\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

### תשובות סופיות

$\phi$ (4)	$-\infty$ (3)	$\phi$ (2)	$\phi$ (1)
$\phi$ (8)	$\infty$ (7)	$\infty$ (6)	$-\infty$ (5)
$-\infty$ (12)	$\phi$ (11)	1 (10)	0 (9)
			$-\infty$ (13)

## הגבול של אוילר

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

### תשובות סופיות

$$e^3 \quad (5) \qquad e^{-1} \quad (4) \qquad e^2 \quad (3) \qquad 1 \quad (2) \qquad e^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$e \quad (9) \qquad e^{30} \quad (8) \qquad e^{-12} \quad (7) \qquad e \quad (6)$$

## x שואף לאינסוף

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

- |  |   |
|--|---|
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$   | $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$  |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$                                 | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$                                |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$          | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$                           |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$  | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$                                    |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$                    |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$                         | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$                 | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$       |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$                               | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$         |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$                             | $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$    |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$                                       | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left( \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$     |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$   | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$                                      |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$   | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$                                   |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$                               | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$                               |

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x] \quad (29)$$

### תשובות סופיות

$-\infty$ (4)	4 (3)	$-\frac{\pi}{2}$ (2)	0 (1)
-1 (8)	1 (7)	-5 (6)	0 (5)
$\frac{1}{4}$ (12)	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11)	1.5 (10)	-3 (9)
2 (16)	$\frac{1}{9}$ (15)	4 (14)	0 (13)
	0 (19)	$e^{\frac{1}{3}}$ (18)	$\ln 3$ (17)
$-\infty: b=0, a < 0$ : א . $\infty: b=0, a > 0$ א . $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$ : $b \neq 0$ א (20)			
$-\frac{1}{2}$ (24)	$\frac{1}{2}$ (23)	$\frac{k}{2}$ (22)	2.5 (21)
$\frac{5}{4}$ (28)	$\frac{3^4}{2^{10}}$ (27)	$\frac{a-b}{2}$ (26)	$\frac{1}{2}$ (25)
			$\ln(6e)$ (29)

## כלל הסנדוויץ'

### שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

(11) נתונה פונקציה  $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $\lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4$ ,

ונתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$  לכל  $x$ .

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)), \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x}$$

(12) חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ .

(13) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכח:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ .

ב. האם נכונה גם הטענה:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 1$ ?

## תשובות סופיות

- 0 (5)      3 (4)       $\frac{3}{4}$  (3)      0 (2)      0 (1)
- 0 (10)      1 (9)      4 (8)       $\frac{3}{4}$  (7)      0 (6)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x} = 0$        $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16$  (11)
- $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2$        $\lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) = \tan 4$
- 0 (12)
- (13) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

## גבול של פונקציה מפוצלת

## שאלות

(1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad 3. \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \text{א.}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) \quad 2. \lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) \quad \text{ב.}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4-f} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-f} \quad \text{ג.}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 1-x^2 & 0 < x < 2 \\ 1.5x-6 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x)$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 2} [4(f(x))^2 + 10f(x)]$ .

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ \cos x & 0 < x < \pi \\ -0.5 & x \geq \pi \end{cases} \quad (3) \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x) :$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ .

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול  $\lim_{x \rightarrow \pi} [2(f(x))^2 + 3f(x)]$ .

חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  של הפונקציות הבאות:

$$(a=0), f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ x & x = 0 \\ 4 + e^x & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$(a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$(a=0), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (6)$$

$$(a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (7)$$

$$(a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{ב.}$$

## תשובות סופיות

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$  , 2.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \cancel{\exists}$  , 3.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \cancel{\exists}$  . א. (1)
1.  $\lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) = 2$  , 2.  $\lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) = 2$  . ב.
1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4 - f(x)} = \frac{1}{3}$  , 2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - f(x)} = \cancel{\exists}$  . ג.
- א. ראו בסרטון. ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$  . ג. 6 (2)
- א. ראו בסרטון. ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  ,  $\cancel{\exists} \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$  . ג. -1 (3)
- 4 (4)
- $\phi$  (5)
- $\phi$  (6)
- 1 (7)
- 1 (8)
- א. אין גבול. ב.  $\frac{1}{6}$  (9)

## גבול לפי הגדרה

### שאלות

בשאלות 1-6, על פי הגדרת הגבול, הוכיחו:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(7) \text{ חשבו, על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

הוכיחו על פי הגדרת הגבול את מקרים 8-11:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1} = 3 \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-4x}{2x+1} = -2 \quad (10)$$

$$(12) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכיחו כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו, כך שעבור כל  $x > M$  מתקיים  $f(x) < -4$ .

$$(13) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכיחו כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו, כך שעבור כל  $x > M$  מתקיים  $f^2(x) > 16$ .

$$(14) \text{ נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{הוכיחו שמתקיים } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1 \quad \text{נתון הגבול}$$

מצאו ערך של  $M > 0$ , עבורו לכל  $x > M$  הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצאו  $M$ , כך ש- $|\forall x > M : f(x) - L| < 0.1$ ).

$$(16) \quad \text{נגדיר את הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Z} \end{cases}$$

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$(17) \quad \text{בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2}, \text{ מצאו } \delta > 0, \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } |x-1| < \delta, \text{ אי-השוויון } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100} \text{ מתקיים.}$$

(18) הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L, \text{ אז: הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L.$$

$$\text{ד. אם הגבולות } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

$$(19) \quad \text{יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(20) \quad \text{יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1}{x+10} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(21) \quad \text{הוכיחו שאם } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3, \text{ אז קיימת סביבה נקובה של 0 שבה } f(x) > 2.$$

(22) הוכיחו שאם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > L$ , אז קיימת סביבה נקובה של  $x_0$  שבה  $f(x) > L$ .

(23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$

ב. האם נכונה גם הטענה:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |k|$  ( $k \neq 0$ )

## תשובות סופיות

(7)  $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר: [GOOL.co.il](http://GOOL.co.il)

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 5 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

72	1. רציפות של פונקציה
79	2. משפט ערך הביניים
83	3. תכונות נוספות של פונקציות רציפות
86	4. שיטת החצייה

## רציפות של פונקציה

### שאלות

בשאלות 1-6: בדקו את רציפות הפונקציות בנקודת התפר<sup>1</sup> שלהן, ובשאלות 1 ו-2, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ x & x = 0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

(7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 3-6: רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא. בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות 8-11: מה צריך להיות הערך הקבוע של  $k$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל  $x$ ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלה 11 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

<sup>1</sup> נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות 12-15: מה צריכים להיות הערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (12)$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^x - 2}{2^x + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (15)$$

הערה: שאלות 14-15 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

(16) הוכיחו או הפריכו:

- סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

**17** ידוע ש- $f$  רציפה ו- $g$  לא רציפה. האם  $f+g$  רציפה? הוכיחו זאת.

$$\text{18 תהי } f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$$

- א. שרטטו את גרף הפונקציה.  
 ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).  
 ג. תהי  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ , ותהי  $f(x)$  מוגדרת וחיובית לכל  $x$ .  
 האם ההרכבה  $g(f(x))$  בהכרח רציפה לכל  $x$ ?

**19** תהי  $f$  פונקציה חסומה בקטע  $(0,1)$ .

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

תהי  $g$  הפונקציה המוגדרת בקטע  $(0,2)$ , על ידי

- א. האם יתכן שהנקודה  $x_0 = 1$  היא נקודת אי-רציפות סליקה של  $g$ ? נמקו.  
 ב. האם  $g$  חסומה בקטע  $(0,2)$ ? נמקו.

**20** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  פונקציה שמקיימת  $f(x+y) = f(x)f(y)$ , לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .  
 נניח ש- $f$  רציפה ב- $x=0$ .  
 הוכיחו ש- $f$  רציפה לכל  $x$ .

**21** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  פונקציה שמקיימת  $f(x+y) = [f(x)f(y)]^2$ , לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .  
 נניח ש- $f$  רציפה ב- $x=0$ .  
 הוכיחו ש- $f$  רציפה לכל  $x$ .

$$\text{22 נתונה הפונקציה } f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$$

הוכיחו או הפריכו:

- א. הפונקציה  $f$  חסומה לכל  $x$ .  
 ב. הפונקציה  $f$  רציפה לכל  $x$ .  
 ג. הפונקציה  $f$  מונוטונית לכל  $x$ .  
 ד. הפונקציה  $f$  זוגית או אי-זוגית לכל  $x$ .

**(23)** ענו על הסעיפים הבאים :

א. פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq x$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x=0$ .

ב. פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq \sin x$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

**(24)** הפונקציה  $f(x)$  רציפה לכל  $x$ .

ידוע כי עבור  $x \neq \pm 1$ ,  $f(x)$  נתונה על ידי הנוסחה  $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$ .

מצאו את הנוסחה של  $f(x)$  לכל  $x$ .

**(25)** הפונקציות  $f(x) + 2g(x) - 3g(x) - 2g(x) - f(x)$  רציפות לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה  $|f(x) - g(x)|$  רציפה לכל  $x$ .

**(26)** תהי  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$  ומקיימת  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)(1-f(x))] = 0$ .

א. הוכיחו או הפריכו:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  או  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

**(27)** תהי  $f$  מוגדרת לכל  $x$ .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם  $f(\sin x)$  רציפה לכל  $x$ , אז  $f$  רציפה לכל  $x$ .

ב. אם  $\sin(f(x))$  רציפה לכל  $x$ , אזי  $f$  רציפה לכל  $x$ .

ג. אם לכל  $x_0$  מתקיים  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$ , אזי  $f(x) = 4$  לכל  $x$ .

כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי  $f$  רציפה לכל  $x$ ?

28) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי לכל  $x, y \in \mathbb{R}$  :

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) - |x-y|] \quad .1$$

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) + |x-y|] \quad .2$$

ב. הוכיחו כי אם  $f, g$  רציפות ב- $\mathbb{R}$  אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב- $\mathbb{R}$  :

$$z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad .1$$

$$z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad .2$$

### תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) רציפה בנקודה  $x=1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ .
- (4) רציפה בנקודות  $x=0,1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ .
- (5) לא רציפה.
- (6) לא רציפה.
- (7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.
- (8)  $k=1$
- (9)  $k=4$
- (10)  $k=\frac{2}{3}$
- (11)  $k=-1$
- (12)  $a=0, b=\frac{1}{2}$
- (13)  $a=2, b=1$  או  $a=1, b=2$
- (14)  $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (15)  $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל  $x \neq -5$ . ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (19) א. לא. ב. כן.
- (20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

(23) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & x = -1 \\ \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x \neq \pm 1 \\ \pi & x = 1 \end{cases} \quad (24)$$

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

## משפט ערך הביניים

### שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

$$(1) \quad x^3 + 4x - 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 = -\ln x$$

$$(3) \quad x - 0.25 \sin x = 7$$

$$(4) \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

בשאלות 5-6 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

$$(5) \quad e^x - 5x = 0$$

$$(6) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי  $f$  פונקציה רציפה לכל  $x$ , המקיימת:  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ .

הוכיחו שלמשוואה  $f(x) + \sin x = 4x$  יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-4, 4]$  פונקציה רציפה.

הוכיחו שלמשוואה  $2x + f(x) = 1$  יש לפחות פתרון אחד.

(8) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

בו למשוואה  $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$  יש פתרון.

(9) נגדיר  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$ .

א. חשבו את  $f(0)$ ,  $f(2)$ .

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה  $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$

יש פתרון בקטע  $(0, 2)$ ?

**10** תהיינה  $f, g$  פונקציות רציפות ב- $[a, b]$  המקיימות  $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$ .  
הוכיחו שקיימת נקודה  $a < c < b$  שבה  $f(c) = g(c)$ .

**11** נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור  $[a, b]$  שהוא חלקי לתחום הגדרתה.  
נניח ש- $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ .

הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [a, b]$  כך ש- $f(c) = c$ .  
נקודה  $c$  כנ"ל נקראת "נקודת שִׁבְת" של הפונקציה.

**12** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .

הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [0, 1]$  כך ש- $f(c) = c^{1.5}$ .

**13** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = f(1)$ .

א. הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [0, 0.5]$  כך ש- $f(c) = f(c+0.5)$ .

ב. הוכיחו כי קיימות נקודות  $c, d \in [0, 1]$  כך ש- $f(c) = f(d)$ .

**14** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) < f(2) < f(1)$ .

הוכיחו כי קיימים  $c_1, c_2 \in [0, 2]$  כך ש- $f(c_1) = f(c_2)$ .

**15** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = f(8)$ .

הוכיחו כי קיימות נקודות  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0, 8]$  כך ש-

$$f(c_1) = f(c_2), f(c_3) = f(c_4)$$

**16** הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = x + \sin x$  היא על  $\mathbb{R}$ .

**17** הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = x \cdot \sin x$  היא על  $\mathbb{R}$ .

**18** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור  $2\pi$ .

הוכיחו שקיים  $x_0 \in \mathbb{R}$  כך ש- $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$ .

**19** יהיו  $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$  קבועים המקיימים  $a_1 + \dots + a_n = 1$ .

הוכיחו כי למשוואה  $|x - a_1| + \dots + |x - a_n| = \frac{n}{2}$  יש לפחות פתרון אחד.

(20) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חח"ע ורציפה. הוכיחו כי  $f$  עולה ממש או יורדת ממש.
- ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  פונקציה חח"ע ועל. הוכיחו כי  $f$  לא רציפה ב- $\mathbb{R}$ .

(21) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  פונקציה רציפה.

הוכיחו כי קיימים אינסוף ערכים של  $x$ , שעבורם  $f(x) = \sin x$ .

(22) יהי  $P$  פולינום ממעלה זוגית, מהצורה  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ ,

ונניח כי  $a_0 < 0$ .

הוכיחו כי ל- $P$  ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

(23) יהיו  $f, g$  פונקציות רציפות המקיימות:

$$0 < k \in \mathbb{R} \text{ כאשר } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -k, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = k$$

הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה  $f(x) = g(x)$ .

(24) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ , ותהיינה  $x_1, \dots, x_n$  (כאשר  $n > 1$ )

נקודות כלשהן ב- $(a, b)$ .

הוכיחו שקיימת נקודה  $c$  בקטע  $(a, b)$ , כך ש-

$$f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

ב. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ .

האם לכל  $c \in (a, b)$ , ניתן למצוא נקודות  $x_1, \dots, x_n$ , שונות זו מזו,

$$f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n)) \text{ כך ש- } n > 1$$

הוכיחו זאת.

(25) תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע פתוח  $(a, b)$ .

$$\text{נניח כי: } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$$

הראו כי תמונת הקטע  $(a, b)$  היא  $\mathbb{R}$ .

**(26)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, המקיימת  $f(0) = -1$ ,  $f(1) = 4$ .

תהי  $S = \{x \in [0,1] \mid f(x) = 0\}$ .

א. הוכיחו ש- $S$  לא ריקה.

ב. הוכיחו שלקבוצה  $S$  יש חסם עליון, שנסמנו  $\alpha$ .

ג. הוכיחו כי  $\alpha \in (0,1]$ .

ד. הוכיחו כי  $f(\alpha) = 0$ .

**(27)** תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה, כך ש- $f(a) = f(b)$ .

הוכיחו שקיימים  $a < x_1 < x_2 < b$ , כך ש- $f(x_1) = f(x_2)$ .

**(28)** תהי  $z(x)$  פונקציה רציפה בקטע  $[a,b]$  ויהי  $0 \leq r \leq 1$ .

הוכיחו שיש  $c$  בקטע, עבורו מתקיים  $z(c) = rz(a) + (1-r)z(b)$ .

**(29)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי למשוואה  $A \sin x + B \cos x = C \sin 2x$  יש פתרון.

ב. תהי  $f(x)$  רציפה לכל  $x$  המקיימת  $f(0) > 0$ ,  $f(4) > 2f(2)$ .

הוכיחו שקיים  $c$  כך ש- $f(2c) = 2f(c)$ .

ג. תהי  $f(x)$  רציפה לכל  $x$  המקיימת  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ .

הוכיחו שקיים  $a$  כך ש- $f(a) = \frac{1}{a}$ .

**(30)** פונקציה  $f$  מוגדרת לכל  $x$ .

לפונקציה יש את התכונה הבאה:

כל ערך ממשי מתקבל על ידי הפונקציה בדיוק פעמיים.

הוכיחו כי הפונקציה אינה יכולה להיות רציפה.

## תשובות סופיות

(8)  $[0,1]$

(9) א.  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 5$ . ב. לא.

שאלות 1-7 ושאלות 10-30 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## תכונות נוספות של פונקציות רציפות

### שאלות

- (1) קבעו בכל סעיף האם הטענה נכונה או לא נכונה, והוכיחו זאת.  
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע  $[0,1]$ , שהיא:
- א. חחייע, אבל לא מונוטונית.
  - ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
  - ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
  - ד. חסומה, אבל לא רציפה.
  - ה. רציפה, אבל לא חסומה.
  - ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
  - ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
  - ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
  - ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
  - י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
  - יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע  $[0,1]$ , על ידי  $f$ , היא קטע.
- (2) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, המקיימת  $f(x) > 0$  לכל  $x \in [a,b]$ . הוכיחו שקיים  $\alpha > 0$ , כך ש-  $f(x) \geq \alpha$  לכל  $x \in [a,b]$ .
- (3) תהי  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, ונניח כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  קיים. הוכיחו ש-  $f$  חסומה.
- (4) יהיו  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות רציפות. נתון שלכל שתי נקודות  $x_1, x_2$ , המקיימות  $x_1 < x_2$ , קיימת נקודה  $x_3$  כך ש-  $x_1 < x_3 < x_2$ , שעבורה  $f(x_3) = g(x_3)$ . הוכיחו כי  $f(x) = g(x)$  לכל  $x$ .
- (5) תהי  $f: [0,1] \rightarrow (0,1)$  פונקציה על. הוכיחו ש-  $f$  לא רציפה ב-  $[0,1]$ .
- (6) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, שמקיימת  $f(x) = f(x^2)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ . הוכיחו ש-  $f$  פונקציה קבועה.

**(7)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, שמקיימת  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .  
 הוכיחו כי  $f(x) = f(1)x$ , לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**(8)** תהי  $f(x)$  פונקציה המוגדרת בקטע  $(a, b)$ , ונניח שקיים קבוע ממשי  $K$ , כך שלכל שתי נקודות,  $x_1$  ו- $x_2$ , בקטע  $(a, b)$ , מתקיים **תנאי ליפשיץ**:  
 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$   
 הוכיחו כי  $f(x)$  רציפה בקטע  $(a, b)$ .  
 \* נסו להוכיח בשתי דרכים שונות.

**(9)** הוכיחו שלכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת מינימום מוחלט.  
 באריכות:  
 הוכיחו שאם  $f$  פולינום ממעלה זוגית, אז קיימת נקודה  $x_0 \in \mathbb{R}$ , כך ש- $f(x) \geq f(x_0)$ , לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**(10)** בסעיפים א ו-ב הוכיחו:

א. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של רציונליים שמתכנסת אליו.  
 ב. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של אי-רציונליים שמתכנסת אליו.  
 ג. תהי  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ . הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בכל נקודה  $x \in \mathbb{R}$ .  
 הערה: פונקציה זאת נקראת פונקציית דיריכלה.

**(11)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $f(x)$  רציפה בנקודה  $c$ , אז  $|f(x)|$  רציפה בנקודה  $c$ .  
 ב. אם  $|f(x)|$  רציפה בנקודה  $c$ , אז  $f(x)$  רציפה בנקודה  $c$ .

בשאלות **12-13** הוכיחו:

**(12)** אם  $f$  רציפה ב- $x_0$ , אז קיימת סביבה של  $x_0$ , בה  $f$  חסומה.

**(13)** אם  $f$  רציפה ב- $x_0$ , ואם  $f(x_0) > 0$ , אז קיימת סביבה של  $x_0$ , שבה  $f(x) > 0$ .

**14** יהיו  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות רציפות המקיימות  $f(a) \neq g(a)$ , עבור  $a$  ממשי מסוים. הראו שקיימת סביבה של  $a$ , שבה  $f(x) \neq g(x)$ .

הערה

תרגיל זה מכיל בתוכו גם את הטענה הבאה:  
 תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה המקיימת  $f(a) \neq 0$ , עבור  $a$  ממשי מסוים. הראו שקיימת סביבה של  $a$ , שבה  $f(x) \neq 0$ . פשוט לקחנו  $g(x) = 0$ . בטענה זו נשתמש בשאלה האחרונה תחת הנושא 'משפט ערך הביניים', בסעיף האחרון.

**15** הוכיחו כי אם הפונקציה  $f(x)$  רציפה בנקודה  $a$ , אזי הפונקציה  $g(x)$ ,

$$g(x) = \begin{cases} -c & f(x) < -c \\ f(x) & |f(x)| \leq c \\ c & f(x) > c \end{cases}$$

המוגדרת על ידי  $a$ , גם רציפה בנקודה  $a$  (כאשר  $c$  מספר חיובי כלשהו).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \geq 1 \\ e^{-x} - e^{-1} & x < 1 \end{cases}$$

**16** נתונה הפונקציה

בדקו האם  $f$  הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את  $f^{-1}(x)$ .

**17** הוכיחו כי אם  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ו- $f(x) > 0$  לכל  $x \in [a, b]$  אז יש  $c > 0$  כך ש-  
 $f(x) > c$  לכל  $x \in [a, b]$ .

**18** הוכיחו כי אם  $f, g$  רציפות ב- $\mathbb{R}$  אז גם הפונקציה  $z(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  רציפה ב- $\mathbb{R}$ .

הערה: יש להוכיח לפי ההגדרה (בלשון  $\varepsilon, \delta$ ).  
 השוו לשאלה 28 בנושא הראשון בפרק זה.

## תשובות סופיות

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ -\ln(x + e^{-1}) & x > 0 \end{cases} \quad (16)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## שיטת החצייה

### שאלות

(1) נתונה המשוואה  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ . בעזרת שיטת החצייה בקטע  $[-2, 3]$ , מצאו שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות. מהו קירוב השורש?

(2) נתונה המשוואה:  $x^3 - x - 2 = 0$ .  
 א. מצאו קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.  
 ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של 0.001?  
 ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.

הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

### תשובות סופיות

(1) 0.07  
 (2) א.  $[1, 2]$  ב. 10 ג.  $x = 1.520$

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 6 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

87	.....	1. הגדרת הנגזרת וגזירות של פונקציה
95	.....	2. נגזרות חד צדדיות

## הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

### שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

### שאלות\*

בשאלות 1-6 חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

$$f(x) = \sin 4x \quad (3) \qquad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (2) \qquad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x+10} \quad (6) \qquad f(x) = \ln x \quad (5) \qquad f(x) = e^x \quad (4)$$

$$(7) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$$

$$(8) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$$

$$(9) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x \cdot z(x) \text{ כאשר } z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4$$

$$(10) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x > 0 \\ -(x+1)^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה  $x=1$ . האם קיים משיק בנקודה זו?

$$(11) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (n \text{ טבעי}).$$

א. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה בנקודה  $x=0$ ?

ב. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה  $x=0$ ?

\* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

$$(12) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \arctan \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ (n טבעי).}$$

- א. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה בנקודה  $x = 0$  ?  
 ב. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה  $x = 0$  ?

(13) חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4+x) - \ln 4}{x} \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x} - e}{x}$$

(14) נתון כי  $f$  גזירה בנקודה  $x_0$ . הוכח כי:

$$\text{א. } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{ב. } 2x_0 f(x_0) - x_0^2 f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 f(x_0) - x_0^2 f(x)}{x - x_0}$$

(15) נתון כי  $f$  גזירה וזוגית. הוכיחו כי  $f'$  אי זוגית.

(16) נתונה פונקציה המוגדרת ב- $[a, b]$  ומקיימת לכל  $x, y$  ב- $[a, b]$ :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

הוכיחו כי  $f$  גזירה ב- $[a, b]$  וחשבו את נגזרתה.

$$(17) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את  $f'(x)$  על פי ההגדרה.

$$(18) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את  $f'(x)$  על פי ההגדרה.

$$(19) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = |\sin^5 x|$$

א. חשבו את  $f'(x)$ .

ב. מצאו את כל הנקודות עבורן  $f'(x) = 0$ .

\* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

**(20) הוכיחו או הפריכו :**

- א. אם  $h$  גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g + h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .
- ב. אם  $h$  אינה גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g + h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .
- ג. אם  $h$  אינה גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g \cdot h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .
- ד. אם  $h$  גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g \cdot h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .

**(21) הוכיחו או הפריכו :**

- א. אם  $f$  גזירה, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x)$ .
- ב. אם הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$  קיים וסופי, אז  $f$  גזירה.

**(22) הוכיחו או הפריכו :**

- א. אם  $f$  גזירה ב- $(a, b)$  ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ , אז  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$ .
- ב. אם  $f$  גזירה ב- $(a, b)$  ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$ , אז  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ .

**(23) נתון כי  $f(x)$  רציפה ב- $x = 4$ , ומקיימת  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \pi - 10(x - 4)}{x - 4} = 0$**

הוכיחו ש- $f$  גזירה ב- $x = 4$ , וחשבו את  $f'(4)$ .

**(24) תהי  $f$  פונקציה רציפה בסביבת הנקודה  $x = 0$  המקיימת  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$**

א. הוכיחו כי  $f(0) = 0$ .

ב. הוכיחו כי  $f$  גזירה ב- $x = 0$  ו- $f'(0) = 0$ .

**(25) תהי  $f$  פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי  $f(0) = 0$  ו- $f'(0) = k$**

הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = k$

**(26) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה בנקודה  $x_0$**

א. אם  $f(x_0) \neq 0$ , הוכיחו שגם  $|f|$  גזירה ב- $x_0$ .

ב. אם  $f(x_0) = 0$ , הראו שייתכן כי  $|f|$  גזירה ב- $x_0$  וייתכן שלא.

**(27)** תהינה  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות גזירות בנקודה  $x_0$ .

נגדיר  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

הראו שאם  $f(x_0) \neq g(x_0)$ , אז  $h$  גזירה ב- $x_0$ .

**(28)** תהי  $f$  פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$ .

הוכיחו כי אם  $f$  גזירה ב-0, אז  $f'(0) = 0$ .

הערה: פתרו בשתי דרכים שונות.

**(29)** נתונה פונקציה  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(xy) = f(x) + f(y)$ ,

לכל  $x, y \in (0, \infty)$ .

נתון כי  $f$  גזירה בנקודה  $x=1$ .

א. הוכיחו כי  $f(1) = 0$  ו- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ .

ב. הראו כי  $f$  גזירה, ושלכל  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$ .

**(30)** נתון כי  $f$  פונקציה גזירה המקיימת  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$ .

הוכיחו ש- $f$  פונקציה לינארית.

**(31)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את הטענה הבאה:

אם  $f$  גזירה ב- $x_0$ , אז  $f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + a_n) - f(x_0)}{a_n}$

לכל סדרה  $a_n \rightarrow 0$ .

ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה בנקודה  $x_0 = 1$ , ו- $f(1) = 1$ .

הראו שאם  $k \in \mathbb{N}$ , אז

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right) - k \right] = \frac{k(k+1)}{2} f'(1)$

ג. חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{10}{n}} - 10 \right]$ .

32) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה  $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = (x-1)^2 D(x)$  גזירה רק בנקודה  $x=1$ .

33) פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq x^2$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה גזירה ב- $x=0$ .

34) פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq \sin^2 x$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

35) תהי  $f$  פונקציה גזירה ב- $x_0$ .

א. הוכיחו כי  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ .

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה  $f$ , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך  $f'(x_0)$  אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות  $f'(x_0)$  את הגבול  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-2h) - f(x_0+3h)}{h}$ .

36) תהי  $f$  פונקציה גזירה פעמיים ב- $x_0$ .

א. הוכיחו כי  $f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$ .

ב. תנו דוגמה של פונקציה  $f$ , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך  $f''(x_0)$  אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לופיטל'.

37) נתון כי  $f(x)$  רציפה בנקודה  $x=a$ , ונגדיר פונקציה חדשה  $z(x) = (x-a)f(x)$ . הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה  $z(x)$  גזירה בנקודה  $x=a$ .

ב.  $z'(x)$  רציפה ב- $x=a$ .

38) נניח ש- $f$  גזירה ב- $c$  ו- $f(c)=0$ . הוכיחו:

א. אם  $f'(c)=0$  אז  $|f(x)|$  גזירה ב- $c$ .

ב. אם  $|f(x)|$  גזירה ב- $c$  אז  $f'(c)=0$ .

**(39)** יהיו  $f, g$  פונקציות גזירות ב- $c$  ונניח כי  $f(c) = g(c)$ .

א. הוכיחו כי  $|f(x) - g(x)|$  גזירה ב- $c$  אם ורק אם  $f'(c) = g'(c)$ .

ב. הוכיחו כי  $z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  גזירה ב- $c$  אם ורק אם  $f'(c) = g'(c)$ .

ג. הוכיחו כי  $z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  גזירה ב- $c$  אם ורק אם  $f'(c) = g'(c)$ .

**(40)** נניח ש- $|f(x)|$  גזירה ב- $c$  ו- $f$  רציפה ב- $c$ .

הוכיחו כי  $f$  גזירה ב- $c$ .

## תשובות סופיות

$$f'(x) = 4 \cos 4x \quad (3) \quad f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad (2) \quad f'(x) = 2x + 4 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (6) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (5) \quad f'(x) = e^x \quad (4)$$

$$4 \quad (9) \quad 2 \quad (8) \quad !44 \quad (7)$$

(10) א. רציפה לכל  $x$ . ב. לא גזירה בנקודה  $x=1$ . קיים משיק אנכי בנקודה.

$$n > 2 \quad \text{ב.} \quad n > 1 \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$n > 1 \quad \text{ב.} \quad n > 1 \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$e \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{4} \quad \text{א.} \quad (13)$$

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.  $f' = 0$ .

(17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$ , ומתקיים:  $f'(0) = 0$ .

(18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$ , ומתקיים:  $f'(1) = 0$ .

$$f'(x) = \begin{cases} 5 \sin^4 x \cos x & 2n\pi < x < (2n+1)\pi \\ 0 & x = n\pi \\ -5 \sin^4 x \cos x & (2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi \end{cases} \quad \text{א.} \quad (19)$$

ב.  $x = \frac{\pi}{2}n$

(20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

(30) שאלת הוכחה.

(31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55.

(32) שאלת הוכחה.

(33) שאלת הוכחה.

(34) שאלת הוכחה.

(35) א. שאלת הוכחה. ב.  $f(x) = |x|$  ג.  $-5f'(x_0)$ (36) א. שאלת הוכחה. ב.  $f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ 

(37) שאלת הוכחה.

(38) שאלת הוכחה.

(39) שאלת הוכחה.

(40) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## נגזרות חד-צדדיות

### שאלות

1) תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases}$  על מנת להדגים שתי שיטות אלה.

בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת משיטות אלה.

בשאלות 2-9 בדקו את גזירות הפונקציות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו. בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (3) \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (5) \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (7) \qquad f(x) = 2 + 4|x-1| \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9) \qquad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

10) בדקו האם הפונקציה משאלה 5 גזירה פעמיים בנקודה  $x=0$ .

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad (11) \text{ נתונה הפונקציה}$$

א. עבור איזה ערך של הקבוע  $a$  הפונקציה רציפה בנקודה  $x=-1$ ?

ב. עבור ערך ה- $a$  שקיבלת בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם

הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה  $x=-1$ .

האם קיים משיק בנקודה זו?

\* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

**12** מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$  הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$\text{התפר: } f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax + b & x > e \end{cases}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

**13** מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$  הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$\text{התפר: } f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

$$\text{14 נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + 4x & x < 0 \\ px + q & x \geq 0 \end{cases}$$

קבעו עבור אילו ערכים של הקבועים  $p$  ו- $q$  הפונקציה הנתונה:  
א. רציפה. ב. גזירה.

**15** חשבו את  $f'(0)$ , עבור הפונקציה:  $f(x) = |x^4 - x^3 + \sin(10x) - 1|$

$$\text{16 נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt{|\cos \pi x|} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

הוכיחו שהפונקציה לא גזירה לכל  $x$  ממשי.

### תזכורת (הערך השלם)

פונקציית הערך השלם  $[x]$  מחזירה לכל מספר ממשי  $x$  את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- $x$  (מעגלת כלפי מטה). למשל:  $[4.1] = 4$ ,  $[-4.1] = -5$ .

**17** נתונה הפונקציה  $f(x) = [x] - [-x]$ .  
חשבו את  $f'(x)$ .

**18** נתונה הפונקציה  $f(x) = [x] \sin(\pi x)$ .  
חשבו את  $f'(x)$  על פי ההגדרה.

**19** נתונה הפונקציה  $f(x) = [x](1 - \cos(\pi x))$ .  
חשבו את  $f'(x)$ .

**(20)** הוכיחו שאם  $f$  היא פונקציה המקיימת  $|f(x)| \leq x^2$  לכל  $x$ , אז  $f$  גזירה ב- $x=0$ .

**(21)** תהי  $f$  פונקציה רציפה ב- $x_0=0$ . הוכיחו כי הפונקציה  $z(x) = |x|f(x)$  גזירה ב- $x_0=0$  אם ורק אם  $f(0) = 0$ .

**(22)** יהיו  $f$  ו- $g$  שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה של  $x_0 \in \mathbb{R}$ . הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } f(x_0) = g(x_0) \text{ ו-} f'_-(x_0) = g'_+(x_0),$$

אז הפונקציה  $z$ , המוגדרת על ידי  $z(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases}$ , גזירה ב- $x_0$ .

ב. אם  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  לא גזירה ב- $x_0$  ו- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ , אז  $g \circ f$  איננה גזירה ב- $\mathbb{R}$ .

ג. אם  $g$  גזירה מימין ב- $x_0$  והפונקציה  $f$  מוגדרת בסביבה מלאה של  $x_0$ , אז  $g(x_0)$  וגזירה מימין ב- $g(x_0)$ , אזי  $f \circ g$  גזירה מימין ב- $x_0$ .

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

**(23)** תהיינה  $f$  ו- $g$  פונקציות המוגדרות ב- $\mathbb{R}$ . נתון ש- $g$  היא פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$ , ולכל  $x > y$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = g\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

הוכיחו כי  $f$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ , ושכל  $x$  ממשי מתקיים  $f'(x) = g(x)$ .

$$\text{(24) נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \geq 1 \\ \frac{\pi}{4} - \arctan x & x < 1 \end{cases}$$

א. בדקו את רציפות וגזירות  $f$ .

ב. בדקו האם  $f$  הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את  $f^{-1}(x)$ .

## תשובות סופיות

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = 4 \quad (x > 1) \quad , \quad f'(x) = -4 \quad (x < 1) \quad (6)$$

$$f'(x) = 8x \quad (x \geq 0) \quad , \quad f'(x) = 4x \quad (x < 0) \quad (7)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

(10) לא גזירה פעמיים בנקודה  $x=0$ .

(11) א.  $a=1$  ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} \ln^2 x & 0 < x < e \\ \frac{3}{e} & x \geq e \end{cases} \quad a = 3/e \quad b = -2 \quad (12)$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x < 1 \\ e & x \geq 1 \end{cases} \quad a = e \quad b = 0 \quad (13)$$

(14) א.  $q=0$  ב.  $q=0, p=4$

(15) -10

(16) שאלת הוכחה.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (17)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x] \cos(\pi x) \pi & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (18)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x] \sin \pi x & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z}, x \text{ even} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z}, x \text{ odd} \end{cases} \quad (19)$$

לפתרונות מלאים בווידאו של שאלות 20-23 היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) & 0 < x < \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad (24) \quad \text{א. רציפה לכל } x \text{ וגזירה לכל } x \neq 1.$$

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 7 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

100	1. כללי הגזירה
104	2. תרגול בכללי הגזירה
107	3. תרגילים נוספים לפי סוגים
109	4. גזירה סתומה
112	5. כלל השרשרת
	6. גזירה לוגריתמית

## תרגול בכללי הגזירה

### שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 27-35 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 32 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$y = x^{\ln x} \quad (30) \quad f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

$$y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (33) \quad y = x^{\sqrt{x}} \quad (32) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (31)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (35) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (34)$$

הערה: בשאלות 28 ו-29 נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתייהן.

## תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[ \frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1-4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3-4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (20)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}} \cdot 2, \quad f''(x) = \frac{4(2x+3)}{(1-(2x+3)^2)^{1.5}} \quad (25)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (26)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left( \cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (27)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left( \frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (29)$$

$$y' = x^{\ln x} \left( \frac{2 \ln x}{x} \right) \quad (30)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (31)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left( \frac{\ln x}{2} + 1 \right) \quad (32)$$

$$y' = \left( \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \left( \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (33)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left( 1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x \right) \quad (34)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (35)$$

## תרגילים נוספים לפי סוגים

### שאלות

#### הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

- |                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$             | ב. $f(x) = x^7$             | ג. $f(x) = x^2$             |
| ד. $f(x) = x^1$             | ה. $f(x) = x^{-3}$          | ו. $f(x) = x^{-1}$          |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

#### הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

- |                           |                              |                                       |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$          | ב. $f(x) = 3x^7$             | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$            |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x^1$             | ו. $f(x) = 3x^{-2}$                   |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$   | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

#### הנגזרת של קבוע

3) גזרו את הפונקציות הבאות:

- |                |                         |
|----------------|-------------------------|
| א. $f(x) = 12$ | ב. $f(x) = \frac{7}{8}$ |
|----------------|-------------------------|

#### הנגזרת של סכום והפרש

4) גזרו את הפונקציות הבאות:

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ | ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$ |
|---------------------------------|---|

## הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (5x-2)^3 \quad \text{ב.} & f(x) = (x^3+6)^5 \\ \text{ב.} & f(x) = (x-x^2)^2 \quad \text{ג.} & f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ה.} & \end{array}$$

## הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב.} & f(x) = \frac{2}{x} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ג.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ד.} & f(x) = \frac{6}{x+5} \\ \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \quad \text{ו.} & f(x) = \frac{2}{3-x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{6}{x+5} \quad \text{ז.} & \end{array}$$

## הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (5x+1)(x-3) \\ \text{ב.} & f(x) = (5x+1)^3(x-3) \\ \text{ג.} & f(x) = x^3(6-x)^4 \end{array}$$

## הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} \\ \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \end{array}$$

## הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \sqrt{x} \\ \text{ב.} & f(x) = 4\sqrt{x+1} \\ \text{ג.} & f(x) = \sqrt{x^3-1} \\ \text{ד.} & f(x) = (3x+1)\sqrt{x} \\ \text{ה.} & f(x) = x^2\sqrt{x+3} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}} \end{array}$$

## תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = 2x & \text{ג.} & f'(x) = 7x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 3x^2 & \text{א.} \\
 f'(x) = -\frac{1}{x^2} & \text{ו.} & f'(x) = 3x^{-4} & \text{ה.} & f'(x) = 1 & \text{ד.} \\
 f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ז.}
 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = 2x^3 & \text{ג.} & f'(x) = 21x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 6x^2 & \text{א.} \\
 f'(x) = -\frac{6}{x^3} & \text{ו.} & f'(x) = 8 & \text{ה.} & f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ד.} \\
 f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ח.} & f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ז.}
 \end{array}$$

0. ב. א. (3)

$$f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{א. (4)}$$

$$f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{א. (5)}$$

$$f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = -\frac{3}{4}(5-x)^2 \quad \text{ד.} \quad f'(x) = 6(x-x^2)(1-2x) \quad \text{ג.}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{א. (6)}$$

$$f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ה.}$$

$$f'(x) = (5x+1)^2(20x-44) \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 10x-14 \quad \text{א. (7)}$$

$$f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x) \quad \text{ג.}$$

$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{א. (8)}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ד.}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{א. (9)}$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ד.}$$

## גזירה סתומה

### שאלות

- (1) גזרו את הפונקציה הסתומה  $x^2 + y^5 - 1 = 1$ .
- (2) גזרו את הפונקציה הסתומה  $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$ .
- (3) גזרו את הפונקציה הסתומה  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ .
- (4) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה  $e^{y^2-4x} + x^2 y^3 = \sin(y-2x) + 4y + 1$  חשבו את  $y'$  בנקודה  $(1,2)$ .
- (5) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה  $\sqrt{4x+y^3} + \cos^2(xy) = \ln(x^2 y + 1) + \ln e^3$  חשבו את  $y'$  בנקודה בה  $y = 0$ .
- (6) גזרו את הפונקציה הסתומה  $x^y - xy = 10$ .
- (7) גזרו את הפונקציה הסתומה  $x^y - y^x = 1$ .
- (8) נתונה פונקציה סתומה  $xy - y^3 + x^2 - x = 0$  מצאו את ערך  $y''$  בנקודה בה  $y = 1$ .
- (9) נתון עקום שמשוואתו  $yx^2 + e^y = x$ .  
 א. הראו שעבור  $x=1$  קיים ערך  $y$  אחד ויחיד ומצאו אותו.  
 ב. חשבו את  $y''$  בנקודה בה  $x=1$ .
- (10) נתון כי המשוואה  $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$ , מגדירה את  $y = y(x)$  כפונקציה סתומה של  $x$ . נתון כי  $h(y)$  גזירה ברציפות ויורדת. הוכיחו כי  $y(x)$  יורדת חזק.

## תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y'_{(1,2)} = -\frac{14}{11} \quad (4)$$

$$y'_{(1,0)} = 1 \quad (5)$$

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (6)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$y''_{(1,0)} = -\frac{9}{8} \quad \text{ב.} \quad (9)$$

$$(10) \text{ שאלת הוכחה.}$$

## כלל השרשרת

### שאלות

- (1) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(4) = 10$ .  
 נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = f(x^2)$ .  
 חשבו את  $g'(2)$ .

- (2) ענו על הסעיפים הבאים:  
 א. נתונה פונקציה  $f(x)$ . נגדיר פונקציה חדשה

$$z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f(4x+1)$$

חשב ואת  $z'(x)$ .

- ב. נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = e$

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{f^2(\ln x)}$$

חשבו את  $z'(e)$ .

$$(3) \quad g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי  $f(10) = f'(10) = 4$

חשבו  $g'(100)$ .

$$(4) \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = 4$

חשבו  $g'(1)$ .

$$(5) \quad g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

ידוע כי  $f(0) = 2$  ,  $f'(0) = 1$

חשבו  $g'(1)$

$$(6) \quad g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

ידוע כי  $f(4) = 1$  ,  $f'(4) = 2$

חשבו  $g'(1)$

$$(7) \quad g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

ידוע כי  $f(1) = 1$  ,  $f'(1) = 4$

חשבו  $g'(1)$

(8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה  $f'''(x)$  היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה  $f(x)$  אי-זוגית נגדיר  $g(x) = (f(x))^4$ . קבעו האם הפונקציה  $g'(x)$  זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית. האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?

## תשובות סופיות

(1) 40

$$z'(e) = 3\frac{3}{4} \quad \text{ב.} \quad z'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) - f'(4x+1) \cdot 4 \quad \text{א.} \quad (2)$$

(3)  $\frac{17}{80}$ 

(4) 36

(5)  $\frac{8}{9}$ 

(6) 44

(7) -2

(8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.

## גזירה לוגריתמית

### שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x} \quad (2)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$y' = y \left[ \frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left( (10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[ 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[ 3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 8 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

תוכן העניינים

113	.....	1. המשיק
115	.....	2. בעיות משיקים
117	.....	3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק
121	.....	4. הנורמל
122	.....	5. זווית שבין שתי עקומות
123	.....	6. נוסחת הקירוב הליניארי - דיפרנציאל שלם

## המשיק

## שאלות

- (1) מצאו את שיפוע הפונקציה  
 א.  $f(x) = 2x^3 - 7x$ , בנקודה  $(2, 2)$ .  
 ב.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$ , בנקודה  $x = -2$ .
- (2) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{ax}$ , כאשר  $a > 0$ .  
 המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{1}{2}$ , הוא בעל שיפוע 1.  
 מצאו את הקבוע  $a$ .
- (3) הישר  $2y - 3x = 3$  משיק לגרף הפונקציה  $h(x) = 3\sqrt{x}$ .  
 מצאו את נקודת ההשקה.
- (4) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$ , בנקודה  $(1, 15)$ , הוא  $21 \ln 3$ .  
 מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ , בנקודה  $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ , הוא  $\frac{e}{3}$ .  
 מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- (6) לאילו ערכי  $k$  ישיק הישר  $y = -5x + 6$ , לגרף הפונקציה  
 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$ ?  
 לכל ערך  $k$  כזה מצאו את נקודת ההשקה.
- (7) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ .  
 א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות  $x = 3$  ו- $x = 1$ .  
 ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א',  
 עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(8) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}$ .

מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של  $45^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(9) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ .

מצאו את שיעורי ה- $x$  של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של  $135^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(10) פונקציה  $f(x)$  גזירה ברציפות ב- $0$  ומקיימת  $f(0) = 0$ .

ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  היא  $30^\circ$ .

חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

(11) מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ , בנקודות  $x = 1$  ו- $x = 0$ .

### תשובות סופיות

(1) א. 17 ב. 4

(2)  $a = 2$

(3)  $(1, 3)$

(4)  $a = 2, b = -1$

(5)  $a = 2, b = -2$

(6) לערך  $k = 6$ , בנקודה  $x = 1$ ; לערך  $k = \frac{158}{27}$ , בנקודה  $x = \frac{1}{3}$ .

(7) א. ראו באתר. ב.  $\alpha = 63.43^\circ, \beta = 116.56^\circ$

(8)  $x = 5, x = -1$

(9)  $x = 1, x = \frac{1}{3}$

(10)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(11)  $\alpha = 33.69^\circ, \beta = 90^\circ$

## בעיות משיקים

### שאלות

(1) הישר  $y = 4x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ .

מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר  $y = 3x$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + b$ .

מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר  $y = ax + \frac{1}{2}$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x) = \frac{2}{x+c}$  בנקודה  $x = 0$ .

מצאו את  $a$  ו- $c$ .

(4) הישר  $y = x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$ .

מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(5) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $x = e$ .

בשאלות 6-7 מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

(6)  $(2, -3)$ ,  $y = x^2 - 2x + 1$

(7)  $(-3, 1)$ ,  $y = \sqrt{x}$

(8) מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות  $y = x^2$  ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$ .

(9) הפונקציות  $y = \frac{1}{x}$  ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$  משיקות זו לזו.

מצאו את  $k$  ואת נקודת ההשקה.

10 נתון כי  $f$  גזירה לכל  $x$ .

א. הוכיחו כי הפונקציה  $z(x) = x^2 f(3x-2)$  גזירה לכל  $x$ .

ב. הישר  $2y = 10x + 11$  משיק לגרף הפונקציה  $z(x)$  בנקודה  $x = -1$ .

מצאו את השיפוע של  $f(x)$  בנקודה  $x = -5$ .

### תשובות סופיות

1 נקודת ההשקה היא  $(-1, 5)$  ומשוואת המשיק היא  $y = 4x + 9$ .

2 נקודת ההשקה היא  $(4, 12)$  ו-  $b = 4$ .

3 נקודת ההשקה היא  $(0, \frac{1}{2})$  ומשוואת המשיק היא  $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$ .

4 נקודת ההשקה היא  $(0, 1)$  ומשוואת המשיק היא  $y = x + 1$ .

5 משוואת המשיק היא  $y = \frac{1}{e}x$ .

6  $y = 6x - 15, (4, 9)$  ;  $y = -2x + 1, (0, 1)$

7 המשיק  $(9, 3), y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ .

8  $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

9 נקודת ההשקה  $(1, 1), k = 1.5$ .

10 א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.

## בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

### שאלות

(1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 2(4x+3)^3$  , בנקודה  $x = -1$  .

(2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^4 - 2x$  , ששיפועו 2 .

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 + 1$  , בנקודה  $x = 0$  .

(4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$  , בנקודה  $x_1 = 1$  .

(5) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{2}{ax+3}$  , בנקודה  $y = 2$  , הוא -4 .  
מצאו את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

(6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3x^3}$  , היוצרים זווית של  $135^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  .

(7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$  , ששיפועו -2 .

(8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$  , בנקודה  $x_1 = 2$  .

(9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$  , בנקודה  $(1,6)$  , הוא -6 .  
מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  , ואת משוואת המשיק.

(10) נתונה הפונקציה  $y = e^{2x} + 3ex$  , והעבירו לה משיק בנקודה  $x = 2$  .  
מצאו את משוואת המשיק.

(11) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ , בנקודה  $x = 0$ .

(12) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ , בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = e$ .

(13) לפונקציה  $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$  העבירו משיק בנקודה שבה  $x = e^2$ . מצאו את משוואת המשיק.

(14) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$ , בנקודה  $x = 1$ .

(15) הגרפים של  $f(x) = \ln x$  ו- $g(x) = 1 - x$  נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק. מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

(16) מצאו את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 25$ , בנקודה  $(3, 4)$ .

(17) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $xy^2 + y - x = xy$ , דרך הנקודה  $(1, 1)$ .

(18) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

(19) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $\sqrt{xy + y} + x^2y = xy^2$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

(20) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $e^{-y^2} + y = y^2 - 1$ , דרך הנקודה  $(0, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

**(21)** נתונה הפונקציה הסתומה  $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן  $y = 0$ .

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$y = 24x + 22 \quad (1)$$

$$y = 2x - 3 \quad (2)$$

$$y = 1 \quad (3)$$

$$y = -12x + 9 \quad (4)$$

$$a = 2, \quad y = -4x - 2 \quad (5)$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, \quad y = -x - 1\frac{1}{3} \quad (6)$$

$$y = -2x + 8 \quad (7)$$

$$y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16} \quad (8)$$

$$a = 6, \quad b = 2, \quad y = -6x + 12 \quad (9)$$

$$y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4 \quad (10)$$

$$y = 3x + 1 \quad (11)$$

$$y = (-e^2 + e)x + e^2, \quad y = (e - 1)x + e \quad (12)$$

$$y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2} \quad (13)$$

$$y = (\ln 2 + 1)x - 1 \quad (14)$$

$$y = \frac{1}{e}x \quad (15)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (16)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (17)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (18)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6} \quad (19)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (20)$$

$$(21) \quad \text{א. } (0,0), (1,0) \quad \text{ב. בראשית הצירים: } y = -x, \text{ המשוואה השנייה: } y = x - 1.$$

## הנורמל

### שאלות

- (1) מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2x-2}$ , בנקודה  $(3,2)$ .
- (2) מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = x^4$ , המאונך לישר העובר דרך הנקודות  $(5,0)$  ו- $(2,4)$ .
- (3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ , בנקודה מסוימת, היא  $4y + x = 6$ . מצאו את הנקודה.

### תשובות סופיות

- (1)  $y = -2x + 8$
- (2)  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$
- (3)  $(2,1)$

## זווית שבין שתי עקומות

### שאלות

- (1) מצאו את הזווית בין הפונקציות  $y = f(x) = x^2$  ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$ .
- (2) מצאו את הזווית בין המעגל  $x^2 + y^2 = 8$  והפרבולה  $y^2 = 2x$ .
- (3) הוכיחו שהאליפסה  $x^2 + 2y^2 = 8$  וההיפרבולה  $x^2 - y^2 = 2$  נחתכות בזווית ישרה.

### תשובות סופיות

- (1)  $71.57^\circ$
- (2)  $71.56^\circ$
- (3) שאלת הוכחה.

## נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

### שאלות

(1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:  
 $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$

(2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:  
 $\ln 2, \sqrt[3]{9}$

### תשובות סופיות

$$\sqrt{5} \cong 2.25, \sqrt{8} \cong 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \cong 1, \sqrt[3]{9} \cong 2\frac{1}{12} \quad (2)$$

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 9 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

- 124 ..... 1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף.
- 127 ..... 2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף.
- 128 ..... 3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף.
- 129 ..... 4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף.
- 130 ..... 5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל.

## גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה  $\frac{0}{0}$  ו-  $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3) \qquad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (5) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (15) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

## תשובות סופיות

$\frac{1}{6}$ (5)	4 (4)	$n-1$ (3)	$\frac{20}{17}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\ln \frac{a}{b}$ (10)	1 (9)	$-\frac{3}{2}$ (8)	$\frac{5}{6}$ (7)	$\frac{3}{2}$ (6)
1 (15)	2 (14)	$-\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{6}$ (12)	$\frac{1}{2}$ (11)
$\frac{1}{2}$ (20)	$\frac{1}{6}$ (19)	$\frac{a}{b}$ (18)	$\frac{a}{b}$ (17)	1 (16)
$-\frac{1}{2}$ (25)	$-\frac{1}{3}$ (24)	$\frac{1}{3}$ (23)	$\frac{1}{8}$ (22)	$\frac{1}{2}$ (21)
$\frac{1}{2}$ (30)	$\frac{2}{3}$ (29)	1 (28)	1 (27)	$-\frac{3}{4}$ (26)
0 (35)	$\infty$ (34)	0 (33)	$\infty$ (32)	$\frac{1}{2}$ (31)

## גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה  $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left( \frac{x+3}{x-3} \right) \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x-3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[ \sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (9)$$

תשובות סופיות

0 (5)	0 (4)	0 (3)	0 (2)	$\infty$ (1)
	$\frac{5}{2}$ (9)	6 (8)	0 (7)	0 (6)

## גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה  $\infty - \infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (6)$$

### תשובות סופיות

$$0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\ln \frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{3} \quad (6)$$

## גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

## שאלות

גבולות מהצורה:  $1^{\pm\infty}$ ,  $0^{\pm\infty}$ ,  $\infty^0$ 

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, (a > 0) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2)^{\cot^2 x} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1} \quad (15)$$

## תשובות סופיות

$e^2$ (5)	1 (4)	1 (3)	1 (2)	$e$ (1)
1 (10)	$e^{-1/2}$ (9)	$e^{1/3}$ (8)	$e^3$ (7)	1 (6)
0 (15)	$e$ (14)	1 (13)	$e$ (12)	1 (11)

## מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

### שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ .  
הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים.  
לבסוף, חשבו את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

# מתמטיקה לביולוגים

## פרק 10 - חקירת פונקציה

### תוכן העניינים

131	1. מושגי יסוד
132	2. חקירת פולינום
133	3. חקירת פונקציה רציונלית
137	4. חקירת פונקציה מעריכית
140	5. חקירת פונקציה לוגריתמית
144	6. חקירת פונקציה עם שורשים
145	7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט
148	8. חקירת פונקציה טריגונומטרית
152	9. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

## הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
  - תחום הגדרה ורציפות.
  - נקודות חיתוך עם הצירים.
  - זוגיות ואי-זוגיות.
  - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
  - תחומי עלייה וירידה.
  - נקודות קיצון.
  - תחומי קמירות וקעירות.
  - נקודות פיתול.
  - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

## חקירת פולינום

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

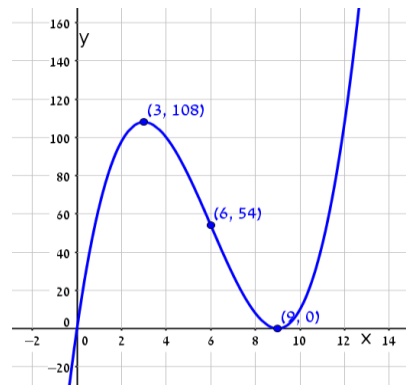
$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

## תשובות סופיות

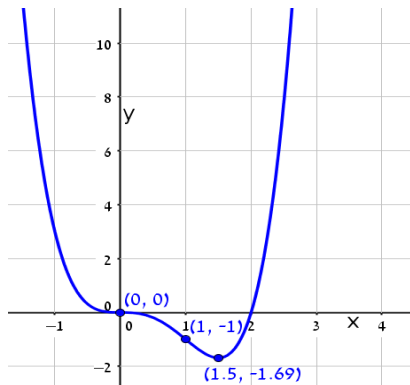
- (1) תחום הגדרה: כל  $x$ . נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  ו- $9$ .  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(9, 0)$ , מקסימום:  $(3, 108)$ .  
 תחום עלייה:  $x < 3$  or  $x > 9$ , ירידה:  $3 < x < 9$ .  
 תחום קמירות:  $x > 6$ , קעירות:  $x < 6$ .  
 נקודת פיתול:  $(6, 54)$ .
- (2) תחום הגדרה: כל  $x$ . נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  ו- $1$ .  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(1.5, \frac{-27}{16})$ .  
 תחום עלייה:  $x > 1.5$ , ירידה:  $x < 1.5$ .  
 תחום קמירות:  $x < 0$  or  $x > 1$ , קעירות:  $0 < x < 1$ .  
 נקודות פיתול:  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$ .

## גרפים

(1)



(2)



## חקירת פונקציה רציונלית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (7)$$

### הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת  $y = x - 1$ .

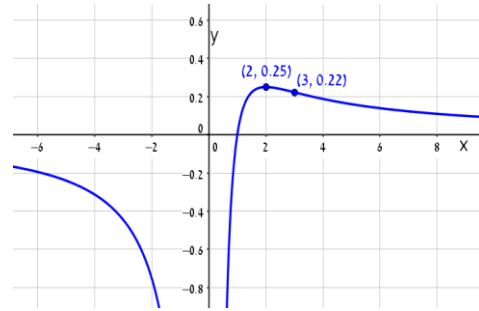
## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=0$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(2, 0.25)$ . נקודת פיתול:  $\left(3, \frac{2}{9}\right)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 2$ , ירידה:  $x > 2$  or  $x < 0$ .  
תחום קמירות:  $x > 3$ , קעירות:  $0 < x < 3$  or  $x < 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq -1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=-1$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=2$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מינימום:  $(0, 0)$ . נקודת פיתול:  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$ .  
תחום עלייה:  $x < -1$  or  $x > 0$ , ירידה:  $-1 < x < 0$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < \frac{1}{2}$  or  $x < -1$ , קעירות:  $x > \frac{1}{2}$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq \pm 2$ . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=-2$ , משופעת: הישר  $y=x$  ב- $\pm\infty$ ,  
אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מינימום:  $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$ , מקסימום:  $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$ .  
תחום עלייה:  $x < -\sqrt{12}$  or  $x > \sqrt{12}$ , ירידה:  $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$  and  $x \neq \pm 2$ .  
נקודת פיתול:  $(0, 0)$ .  
תחום קמירות:  $-2 < x < 0$  or  $x > 2$ , קעירות:  $x < -2$  or  $0 < x < 2$ .
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq -1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=-1$ , משופעת: הישר  $y=x-2$  ב- $\pm\infty$ ,  
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$ .  
תחום עלייה:  $x > -1$  or  $x < -3$ , ירידה:  $-3 < x < -1$ .  
נקודת פיתול:  $(0, 0)$ .  
תחום קמירות:  $x > 0$ , קעירות:  $-1 < x < 0$  or  $x < -1$ .

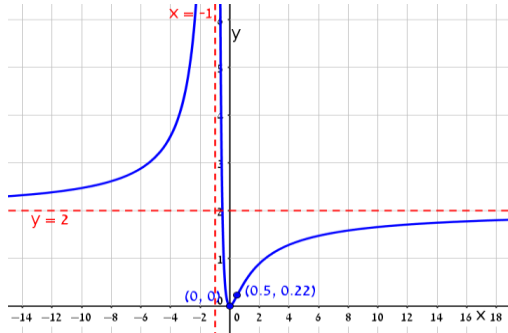
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ :  $-1$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=1$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.  
נקודות פיתול:  $(-1,0)$ ,  $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$ .
- תחום קמירות:  $-3 < x < -1$  &  $x > 1$ , קעירות:  $-1 < x < 1$  or  $x < -3$ .
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 2$ ,  $x \neq 5$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{1}{10}$ , עם ציר ה- $x$ :  $\pm 1$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=5$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(2.78, -3.88)$ , מינימום:  $(0.36, -0.11)$ .  
תחום עלייה:  $0.36 < x < 2$  or  $2 < x < 2.78$ ,  
ירידה:  $x < 0.36$  or  $2.78 < x < 5$  or  $x > 5$ . נקודת פיתול:  $(-1,0)$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < 2$  or  $x > 5$ , קעירות:  $2 < x < 5$  or  $x < -1$ .
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq \pm 2$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{3}{4}$ , עם ציר ה- $x$ :  $x=1$ ,  $x=3$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=-2$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.  
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.  
נקודת פיתול:  $(0.85, -0.09)$ .
- תחום קמירות:  $0.85 < x < 2$  or  $x < -2$ , קעירות:  $-2 < x < 0.85$  or  $x > 2$ .
- (8) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 1$ ,  $x \neq -1$ .  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$ .  
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר  $x=-1$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(-2, -4)$ , מינימום:  $(0,0)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 1$  or  $x < -2$  or  $x > 1$ , ירידה:  $-1 < x < 0$  or  $-2 < x < -1$ .  
נקודת פיתול: אין.  
תחום קמירות:  $-1 < x < 1$  or  $x > 1$ , קעירות:  $x < -1$ .

גרפים

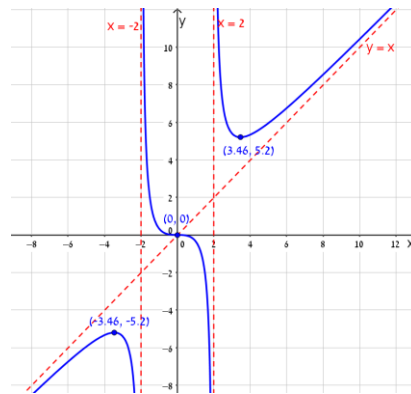
(1)



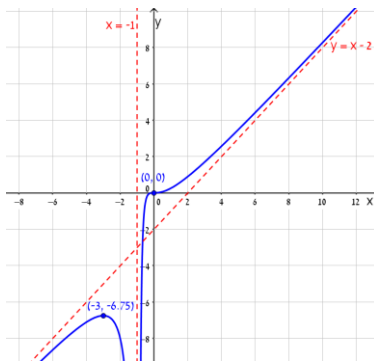
(2)



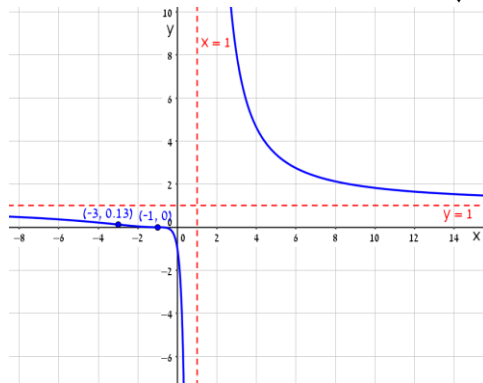
(3)



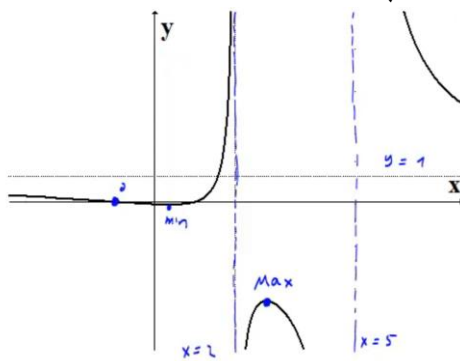
(4)



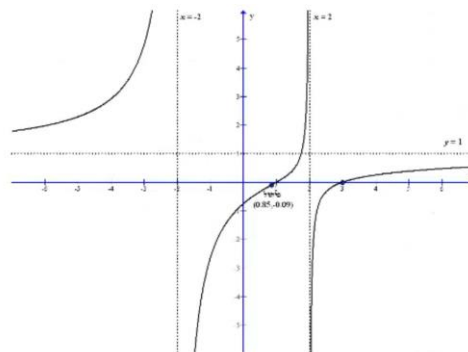
(5)



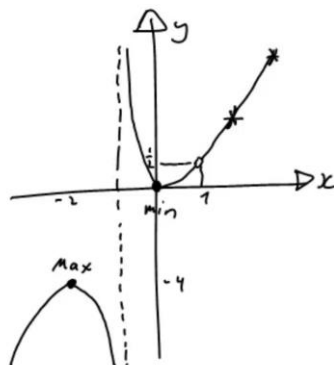
(6)



(7)



(8)



## חקירת פונקציה מעריכית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

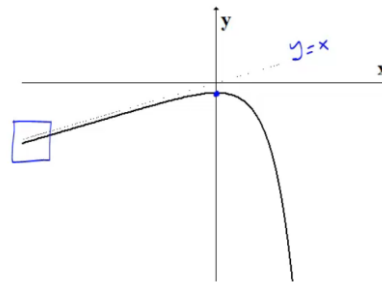
$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

## תשובות סופיות

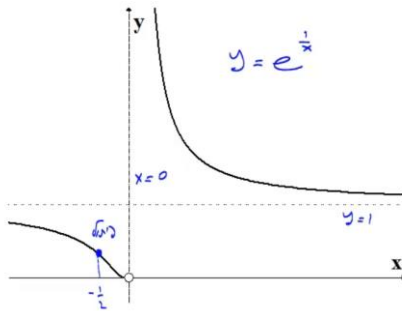
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ : אין (ראו בהרחבה בסרטון).  
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר  $y=x$  ב- $-\infty$  בלבד.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(0, -1)$ . תחום עלייה:  $x < 0$ , ירידה:  $x > 0$ .  
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל  $x$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : אין.  
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית):  $x=0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין.  
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.  
נקודת פיתול:  $(-0.5, e^{-2})$ .  
תחום קמירות:  $x > 0$  or  $-0.5 < x < 0$ , תחום קעירות:  $x < -0.5$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $-2$ .  
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית):  $x=0$ , משופעת: הישר  $y=x+3$  ב- $\pm\infty$ .  
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום:  $(-1, e^{-1})$ , מינימום:  $(2, 4e^{\frac{1}{2}})$ .  
תחום עלייה:  $x > 2$  or  $x < -1$ , ירידה:  $-1 < x < 0$  or  $0 < x < 2$ .  
נקודת פיתול:  $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$ .  
תחום קמירות:  $x > 0$  or  $-0.4 < x < 0$ , תחום קעירות:  $x < -0.4$ .
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר  $y=0$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$ , מינימום:  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$ .  
תחום עלייה:  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ , ירידה:  $x > \frac{1}{2}$  or  $x < -\frac{1}{2}$ .  
נקודות פיתול:  $(0, 0)$ ,  $(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$ ,  $(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$ .  
תחום קמירות:  $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$  or  $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$ , תחום קעירות:  
 $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$  or  $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$ .

## גרפים

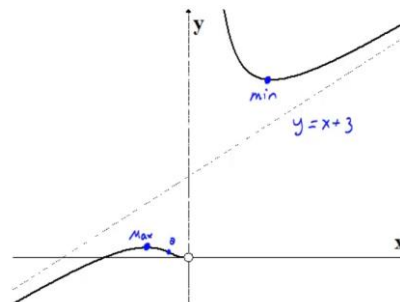
(1)



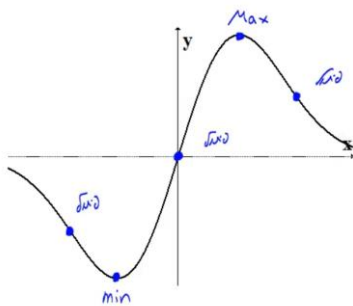
(2)



(3)



(4)



## חקירת פונקציה לוגריתמית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

### הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

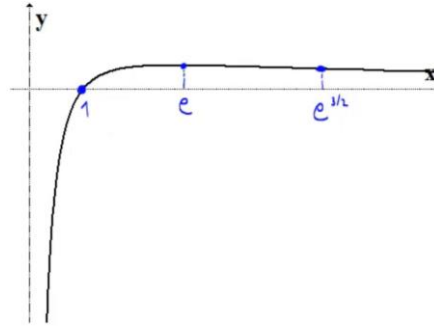
## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
 אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y = 0$  ב- $\infty$ .  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ .  
 תחום עלייה:  $0 < x < e$ , ירידה:  $x > e$ .  
 נקודת פיתול:  $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$ .  
 תחום קמירות:  $x > e^{1.5}$ , קעירות:  $0 < x < e^{1.5}$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר  $x = 0$ ,  
 משופעת ואופקית: הישר  $y = 0$  ב- $\infty$ .  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$ .  
 תחום עלייה:  $0 < x < e^2$ , ירידה:  $x > e^2$ .  
 נקודת פיתול:  $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$ . תחום קמירות:  $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$ , קעירות:  $x > e^{\frac{8}{3}}$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x < 2$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{1}{2} \ln 2$ , עם ציר ה- $x$ : 1.  
 אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 2$ , משופעת: אין.  
 נקודות קיצון: אין.  
 תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.  
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, -e^{-1})$ .  
 תחום עלייה:  $x > e^{-1}$ , ירידה:  $0 < x < e^{-1}$ .  
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

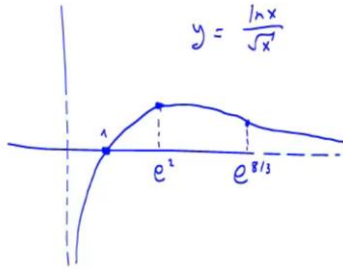
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $x = e^1$ ,  $x = e^{-3}$ .  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, -4)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e^{-1}$ , ירידה:  $0 < x < e^{-1}$ .  
 נקודת פיתול:  $(1, -3)$ . תחום קמירות:  $x > 1$ , קעירות:  $0 < x < 1$ .
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $x = e^{1.5}$ ,  $x = e^{-0.5}$ .  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{\frac{1}{2}}, -4)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e^{\frac{1}{2}}$ , ירידה:  $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$ .  
 נקודת פיתול:  $(e^{1.5}, 0)$ . תחום קמירות:  $0 < x < 1.5$ , קעירות:  $x > 1.5$ .
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : אין.  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 1$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, 2)$ ,  $(e, 2)$ .  
 תחום עלייה:  $e^{-1} < x < 1$  or  $x > e$ , ירידה:  $1 < x < e$  or  $x < e^{-1}$ .  
 נקודת פיתול:  $(5.15, 3.06)$ .  
 תחום קמירות:  $1 < x < 5.15$  or  $0 < x < 1$ , קעירות:  $x > 5.15$ .

## גרפים

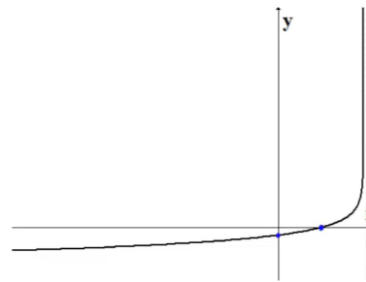
(1)



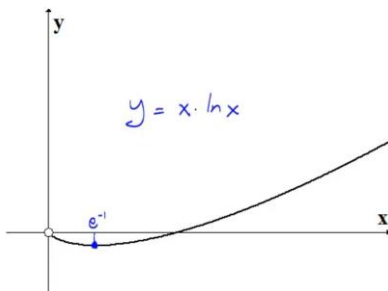
(2)



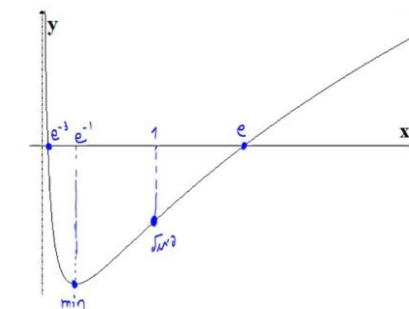
(3)



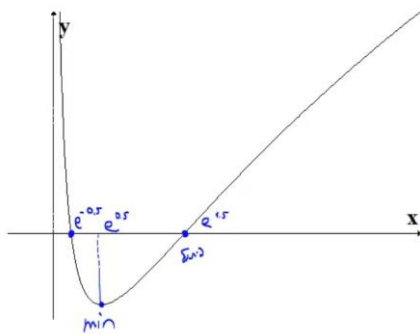
(4)



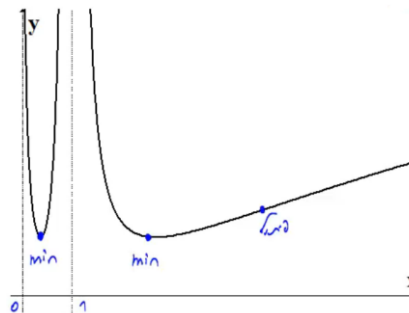
(5)



(6)



(7)



## חקירת פונקציה עם שורשים

### שאלה

(1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ .

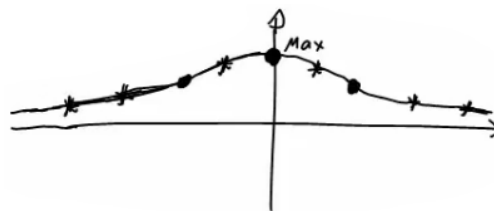
### תשובה

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ .  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $1$ , עם ציר ה- $x$ : אין.  
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית:  $y = 0$ .  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(0,1)$ . תחום עלייה:  $x < 0$ , ירידה:  $x > 0$ .

נקודות פיתול:  $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$

תחום קמירות:  $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$  or  $x < \sqrt{\frac{1}{2}}$ , קעירות:  $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$

גרף:



## חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 1)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (3)$$

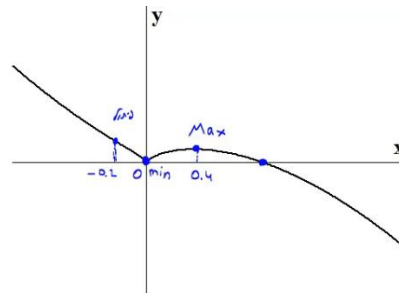
$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

## תשובות סופיות

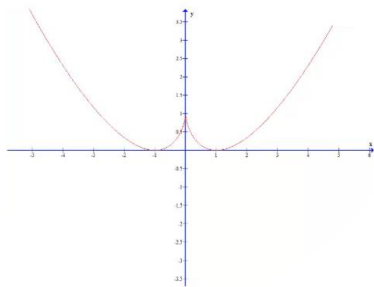
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  או  $1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$ , מינימום:  $(0, 0)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < \frac{2}{5}$ , ירידה:  $x < 0$  or  $x > \frac{2}{5}$ .  
נקודות פיתול:  $(-0.2, 0.41)$ .  
תחום קמירות:  $x < -0.2$ , קעירות:  $-0.2 < x < 0$  or  $x > 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ .  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $1$ , עם ציר ה- $x$ :  $-1$  או  $1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(0, 1)$ , מינימום:  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ .  
תחום עלייה:  $-1 < x < 0$  or  $x > 1$ , ירידה:  $x < -1$  or  $0 < x < 1$ .  
נקודות פיתול: אין.  
תחום קמירות: קמורה לכל  $x$ .  
תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: זוגית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ :  $\pm 1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מינימום:  $(0, -1)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 1$  or  $x > 1$ , ירידה:  $x < -1$  or  $-1 < x < 0$ .  
נקודות פיתול:  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < 1$ , קעירות:  $x > 1$  or  $x < -1$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 2$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1.5$ , עם ציר ה- $x$ :  $3$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 2$ ,  
משופעת ואופקית: הישר  $y = 1$  ב- $\infty$ , ו- $y = -1$  ב- $-\infty$ .  
נקודות קיצון: מינימום:  $(3, 0)$ .  
תחום עלייה:  $x > 3$ , ירידה:  $2 < x < 3$  or  $x < 2$ .  
נקודות פיתול:  $(3, 0)$ .  
תחום קמירות:  $2 < x < 3$ , קעירות:  $x > 3$  or  $x < 2$ .

## גרפים

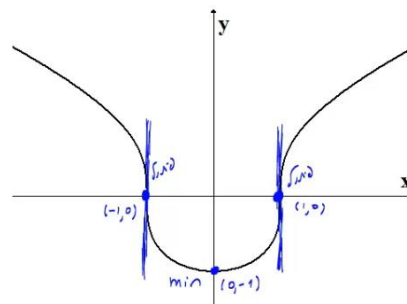
(1)



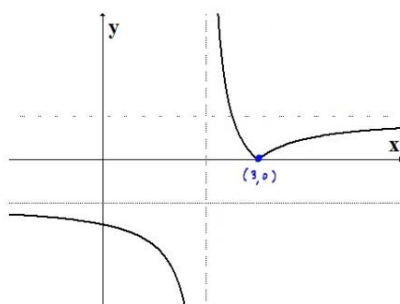
(2)



(3)



(4)



## חקירת פונקציה טריגונומטרית

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + 2\cos x$  בתחום  $[0, 2\pi]$ .  
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x - 3\tan x$  בתחום  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ .

- חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
  - תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
  - מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
  - מציאת אסימפטוטות אנכיות.
  - מציאת נקודות פיתול.
  - מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
  - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$  בתחום  $[0, \pi]$ .  
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

4 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$  בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5 נתונה הפונקציה הבאה:  $y = (\sin x + 1) \cdot \cos x$  בתחום:  $0 \leq x \leq 1.5\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה:  $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$  בתחום הנתון?

6 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ .

- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום  $[0, \pi]$ .
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום  $[-\pi, \pi]$ .

7 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$  בתחום:  $-0.25\pi < x < 0.25\pi$ .

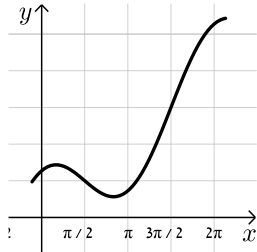
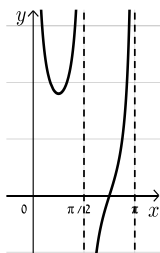
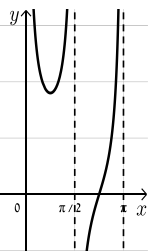
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

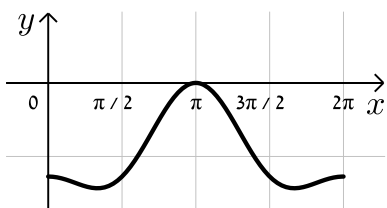
חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$[0, 2\pi], \quad f(x) = 8 \cos x + 2 \cos 2x - 3 \quad (8)$$

$$[0, \pi], \quad f(x) = 2 \cos^2 x - \sin 2x \quad (9)$$

## תשובות סופיות

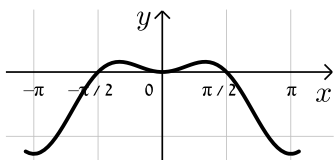
(1) א.  $0 < x < 2\pi$ .ב.  $\max(2\pi, 2\pi + 2)$  קצה,  $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$ ,  $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$ ,  $\min(0, 2)$  קצה.ג. תחומי עלייה:  $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$  או  $0 < x < \frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה:  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ .ד.  $(0, 2)$ . ה. אין. ו.  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .ז. קעירות כלפי מעלה:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ,קעירות כלפי מטה:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  או  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ .(2) א.  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$  וגם  $x \neq \frac{\pi}{2}$ .ב.  $\min\left(\frac{2}{3}\pi, 13.57\right)$  קצה,  $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right)$ ,  $\min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right)$  קצה.ג. תחומי עלייה:  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה:  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$  וגם  $x \neq \frac{\pi}{2}$ .ד.  $(0, 0)$ . ה. אנכית:  $x = \frac{\pi}{2}$ . ו.  $(0, 0)$ .ז. קעירות כלפי מעלה:  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$  או  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0$ ,קעירות כלפי מטה:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .(3) א.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ . ב.  $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$ .ג. תחומי עלייה:  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ,  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ , תחומי ירידה:  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ .ד.  $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ . ה. אנכית:  $x = \pi$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = 0$ .(4) א.  $(\pi, 0), (0, -2)$ .ב.  $\max\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right)$ ,  $\max(2\pi, -2)$ ,  $\max(0, -2)$ ,  $\min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right)$ ,  $\max(\pi, 0)$ .ג. עולה:  $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ ,  $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$ ; יורדת:  $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{3}$ . גרף:



5 א.  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ ,  $(0, 1)$

ב.  $(0, 1)$ ,  $(\frac{\pi}{6}, 1.29)$ ,  $(\frac{5\pi}{6}, -1.29)$ ,  $(1.5\pi, 0)$

ד. 2 פתרונות.

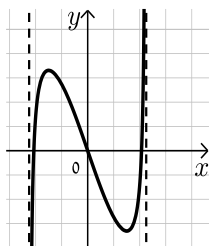


6 א. חיתוך:  $(0, 0)$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ , קיצון:  $\min(\pi, -2)$  קצה,

$\max(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4})$  קצה.

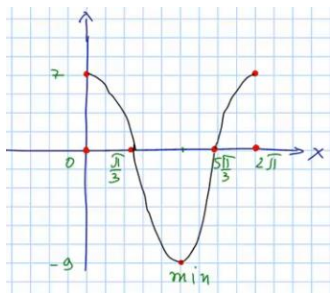
7 א.  $(0, 0)$ ,  $(\pm 0.23\pi, 0)$  ב.  $x = \pm 0.25\pi$

ג.  $\min(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27})$ ,  $\max(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27})$



8 נקודות חיתוך עם ציר ה-y: 7, עם ציר ה-x:  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = \frac{5\pi}{3}$ ,  $x = 7$

נקודות קיצון: מינימום:  $(\pi, -9)$ , מקסימום:  $(0, 7)$ ,  $(2\pi, 7)$



נקודות פיתול:  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = \frac{5\pi}{3}$

תחום קמירות:  $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

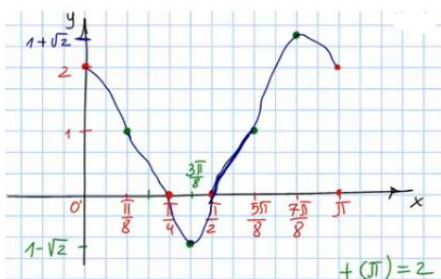
קעירות:  $0 < x < \frac{\pi}{3}$  or  $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

תחום עלייה:  $x > 3$ , ירידה:  $x < 2$  or  $2 < x < 3$

9 נקודות חיתוך עם ציר ה-y: 2, עם ציר ה-x:  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$

נקודות קיצון: מינימום:  $(\frac{3\pi}{8}, 1 - \sqrt{2})$ , מקסימום:  $(\frac{7\pi}{8}, 1 + \sqrt{2})$

תחום עלייה:  $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$ , ירידה:  $0 < x < \frac{3\pi}{8}$  or  $\frac{7\pi}{8} < x < \pi$



נקודות פיתול:  $(\frac{\pi}{8}, 1)$ ,  $(\frac{5\pi}{8}, 1)$

תחום קמירות:  $\frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}$

קעירות:  $0 < x < \frac{\pi}{8}$  or  $\frac{5\pi}{8} < x < \pi$

## חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

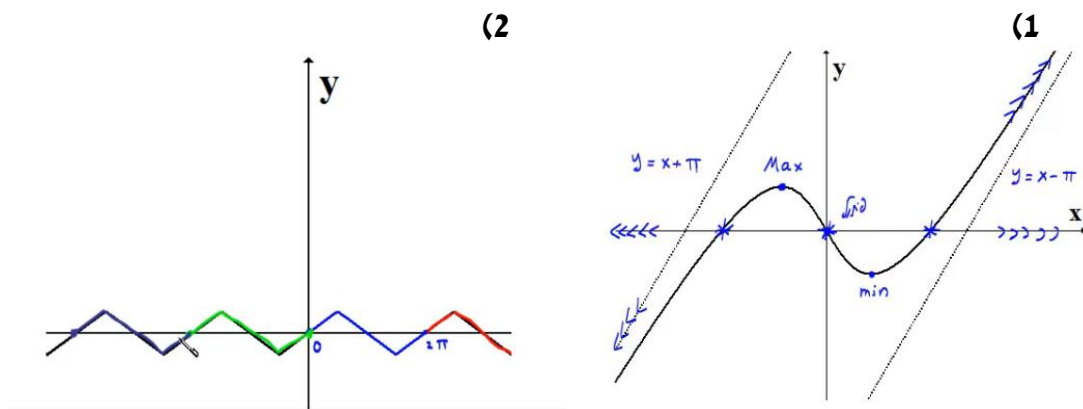
$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (2)$$

$$f(x) = x - 2 \arctan x \quad (1)$$

## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ .  
 אסימפטוטה אנכית: אין,  
 משופעת: הישר  $y = x + \pi$  ב- $-\infty$ , אופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(-1, 0.575)$ , מינימום:  $(1, -0.575)$ .  
 תחום עלייה:  $x < -1$  or  $x > 1$ , ירידה:  $-1 < x < 1$ .  
 נקודות פיתול:  $(0, 0)$ .  
 תחום קמירות:  $x > 0$ , קעירות:  $x < 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית.  
 מחזוריות: כן, ממחזור  $2\pi$ .  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $x = 0, \pi, 2\pi$ .  
 אסימפטוטה אנכית: אין,  
 משופעת: הישר  $y = x + \pi$  ב- $-\infty$ , אופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , מינימום:  $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ .  
 תחום עלייה:  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  or  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ , ירידה:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ .  
 נקודות פיתול: אין.

## גרפים



# מתמטיקה לביולוגים

פרק 11 - אינטגרלים מידיים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים ..... 154

## אינטגרלים מיידיים

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ):

$$\int 4dx \quad (1) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7) \qquad \int \left( \frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10) \qquad \int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$ ):

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19) \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$ ):

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \qquad \int \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

$$\left( \int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} \right)$$

$$\int \left( 4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx : \text{חשבו את האינטגרל} \quad (30)$$

$$\left( \int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} \right)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x} + c \quad (3) \qquad \frac{x^5}{5} + c \quad (2) \qquad 4x + c \quad (1)$$

$$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) \qquad -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) \qquad \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) \qquad -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8) \qquad \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) \qquad -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) \qquad \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$

$$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) \qquad \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) \qquad \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$

$$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) \qquad \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$

$$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19) \qquad -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$

$$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) \qquad \frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21) \qquad \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$

$$x + \ln|x+2| + c \quad (25) \qquad \frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24) \qquad x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$

$$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28) \qquad \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27) \qquad 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30) \qquad 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$

$$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33) \qquad \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32) \qquad \frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 12 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים ..... 157

## אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

### שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24) \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

## תשובות סופיות

- |  |  |  |
|--|--|--|
| $\frac{1}{3} \ln  x^3 + 1  + c$ (3)              | $\ln  \sin x  + c$ (2)                       | $\ln  x^2 + 1  + c$ (1)                        |
| $e^2 \ln  e^x + 1  + c$ (6)                      | $\ln  \ln  x   + c$ (5)                      | $-\ln  \cos x  + c$ (4)                        |
| $-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c$ (9)                   | $e^{\tan x} + c$ (8)                         | $e^{x^2} + c$ (7)                              |
| $\sin(\ln x) + c$ (12)                           | $\sin(\sin x) + c$ (11)                      | $\sin(2x^2 + 1) + c$ (10)                      |
| $-2 \cos(\sqrt{x}) + c$ (15)                     | $-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + c$ (14)        | $\frac{1}{40} \sin(10x^4 + 1) + c$ (13)        |
| $\frac{1}{2} (\tan x)^2 + c$ (18)                | $\frac{1}{2} (\arctan x)^2 + c$ (17)         | $\frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$ (16)               |
| $\frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c$ (21)   | $\sqrt{2 \sin x} + c$ (20)                   | $2\sqrt{x^2 + 1} + c$ (19)                     |
| $\frac{2}{3} (\arctan x)^{\frac{3}{2}} + c$ (24) | $\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$ (23) | $\frac{2}{9} (x^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + c$ (22) |

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 13 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים.....159

## אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \qquad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \qquad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \qquad \int x \arctan x dx \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \qquad \int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \qquad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

(24) מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int x^n e^x dx$  כאשר  $n$  טבעי.

(25) חשבו את  $\int x^4 e^x dx$ .

(26) מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int \cos^n x dx$  כאשר  $n$  טבעי.

(27) חשבו את  $\int \cos^4 x dx$ .

(28) מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int \sin^n x dx$  באשר  $n$  טבעי.

(29) חשבו את  $\int \sin^4 x dx$ .

(30) מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$  באשר  $n$  טבעי.

(31) חשבו את  $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$ .

(32) חשבו את האינטגרלים  $\int e^{ax} \cos bxdx$ ,  $\int e^{ax} \sin bxdx$ .

## תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left( \ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left( \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln |x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left( \frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left( -\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left( -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left( \frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bxdx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 14 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... 163

## אינטגרלים בשיטת ההצבה

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left( \frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left( \frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left( x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left( \frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left( \ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 15 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

- 166 ..... 1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית.
- 168 ..... 2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית.
- 169 ..... 3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית.

## אינטגרלים של פונקציה רציונלית

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

## תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left( \frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

## חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (5)$$

## אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}} \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx \quad (7)$$

## תשובות סופיות

$$-1.5 \ln |1 - \sqrt[3]{x^2}| + c \quad (1)$$

$$6 \left( \frac{(1 + \sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[6]{x})}{2} + 3(1 + \sqrt[6]{x}) - \ln |1 + \sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left( \frac{(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1 + \sqrt[4]{x-1}) - \ln |1 + \sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln |\sqrt[3]{x} + 1| - \frac{1}{2} \ln \left( (\sqrt[3]{x} - 0.5)^2 + 0.75 \right) - \sqrt{3} \arctan \left( \frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (4)$$

$$-\ln |1 + e^x| + x + c \quad (5)$$

$$2\sqrt{1 + e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} \right| + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| + c \quad (7)$$

## נוסחאות

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 16 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא ..... (ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות ..... 171
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות ..... 173
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית ..... 174
5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים ..... 175
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות ..... 178

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int \tan x dx = -\ln  \cos x  + c$	$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \ln  \cos(ax+b)  + c$
$\int \cot x dx = \ln  \sin x  + c$	$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a} \ln  \sin(ax+b)  + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

זכרו כי :

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

- |  |   |
|--|---|
| $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$ <b>(2)</b>                           | $\int \left( \sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx$ <b>(1)</b>          |
| $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$ <b>(4)</b>                       | $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$ <b>(3)</b>                                   |
| $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$ <b>(6)</b>                         | $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$ <b>(5)</b>                                |
| $\int \tan^2 x dx$ <b>(8)</b>                                    | $\int \sin x \cos x \cos 2x dx$ <b>(7)</b>                                |
| $\int \sin 7x \cos 5x dx$ <b>(10)</b>                            | $\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2}$ <b>(9)</b>                            |
| $\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$ <b>(12)</b>                      | $\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx$ <b>(11)</b>                   |
| $\int \sin^2 4x dx$ <b>(14)</b>                                  | $\int \cos^2 x dx$ <b>(13)</b>  |
| $\int \sin^3 4x dx$ <b>(16)</b>                                  | $\int \cos^3 x dx$ <b>(15)</b>  |
| $\int \sin^4 4x dx$ <b>(18)</b>                                  | $\int \cos^4 x dx$ <b>(17)</b>  |
| $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx$ <b>(20)</b> | $\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx$ <b>(19)</b>                     |
| $\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx$ <b>(22)</b>                | $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx$ <b>(21)</b> |
| $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ <b>(24)</b>                          | $\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$ <b>(23)</b>             |

## תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \tan 4x + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (4)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad (6)$$

$$\tan x - x + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{12} \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \quad (10)$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad (12)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14)$$

$$-\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 12x + c \quad (16)$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad (18)$$

$$2 \sin x + c \quad (20)$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (22)$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad (1)$$

$$-10 \cot 10x + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (5)$$

$$-\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad (7)$$

$$\tan x - \cot x + c \quad (9)$$

$$\sin x + c \quad (11)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13)$$

$$\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + c \quad (15)$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (17)$$

$$-\cot x - x + c \quad (19)$$

$$\ln |\cos x| + c \quad (21)$$

$$3x + \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \sin x + c \quad (23)$$

$$\frac{1}{8} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x \right) + c \quad (24)$$

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \int f(t) dt \quad \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right.$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \int f(t) (-dt) \quad \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right.$$

זכרו כי :

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2)$$

$$\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (3)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6)$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5)$$

$$\int \tan^5 x dx \quad (8)$$

$$\int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12)$$

$$\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c \quad (2)$$

$$\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \left( \cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c \quad (4)$$

$$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c \quad (3)$$

$$-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c \quad (5)$$

$$\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c \quad (8)$$

$$\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (12)$$

$$-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c \quad (11)$$

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad \text{זכרו כי:}$$

$$\left. \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right\}$$

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2)$$

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} + c \quad (1)$$

$$\ln \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \quad (2)$$

$$-x + 2 \left( \frac{2}{3\sqrt{1/3}} \arctan \left( \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}} \right) \right) + c \quad (3)$$

## הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt)$$

$$\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right)$$

$$\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right)$$

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx \quad (2)$$

$$\int \sqrt{4x^2-1} dx \quad (3)$$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x^2+2x-3} dx \quad (6)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad (11)$$

## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{4} \cot\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \right| + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \left[ \ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \right] + c \quad (3)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + c \quad (4)$$

$$2 \left\{ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right\} + c \quad (5)$$

$$\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} + c \quad (6)$$

$$\frac{9}{2} \left\{ \arcsin \frac{x+3}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin \frac{x+3}{3}\right) \right\} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{16} \left\{ \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arctan \frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} \right\} \quad (10)$$

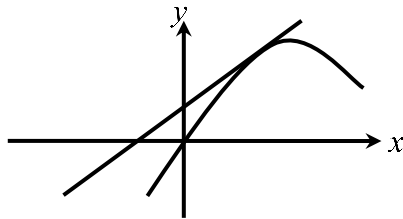
$$\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c \quad (11)$$

## חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה  $f(x) = x + 2\sin x$ .

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

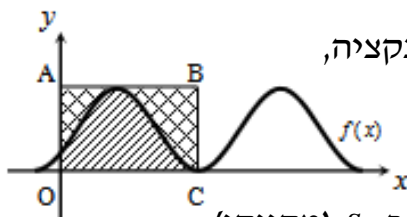


א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ , ברביע הראשון והשני.

(2) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$ ,

בתחום  $-0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$ .



נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה- $x$  מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון, המסומנת ב- $C$ , כך שנוצר המלבן  $ABCO$ .

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- $S_1$  (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- $y$  יסומן ב- $S_2$ .

א. מצאו את משוואת הצלע  $AB$  של המלבן.

ב. חשבו את היחס  $\frac{S_1}{S_2}$ .

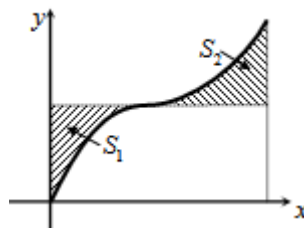
(3) באיור שלהלן נתונה הפונקציה  $y = \sin x + x$ , בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

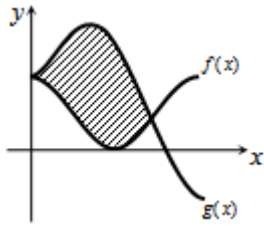
א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 2\pi$ ,

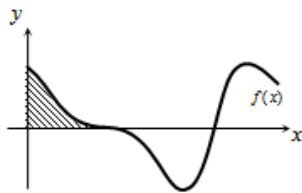
ונעביר ישר המקביל לציר ה- $x$  מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.

הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט,  $S_1$  ו- $S_2$ , שווים.

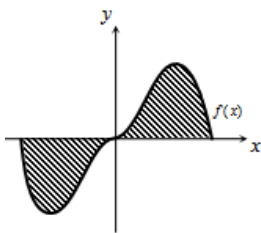




- 4 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות  
 $f(x) = \cos^2 x$  ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ , בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .  
 א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.  
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.  
 השתמשו בזהות  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .



- 5 הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$ .  
 א. מצאו את שיעורי ה- $x$  של הנקודות המקיימות  
 $f'(x) = 0$ , בתחום  $0 < x < 2\pi$ .  
 ידוע כי הנקודה המקיימת  $f'(x) = 0$ , אשר אינה קיצון,  
 נמצאת על ציר ה- $x$ .  
 ב. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.  
 חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



- 6 נתונה הפונקציה  $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$ .  
 א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא  $y' = x^2 \sin x$ .  
 באיור שלהלן נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 \sin x$ ,  
 בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .  
 ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.  
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  בתחום הנתון.

- 7 נתונה הפונקציה  $f(x) = a \cos x + b \sin x$ , כאשר  $a, b$  פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{4}$ ,

והיא חיובית בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  הוא  $2\sqrt{2} - 2$ .

מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

## תשובות סופיות

א.  $y = x + 2$       ב.  $\pi$  יח"ש.      (1)

א.  $y = 1$       ב.  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$       (1)

א. אין נקודת קיצון, הנקודה  $(\pi, \pi)$  היא נקודת פיתול.      (2)

ב.  $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$

א.  $(0, 1)$ ,  $(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4})$       ב.  $S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$       (3)

א.  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$       ב.  $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$       ג.  $\frac{1}{2}$  יח"ש.      (4)

א. שאלת הוכחה.      ב. שאלת הוכחה.      ג.  $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$       (5)

$b = -2, a = 2$       (6)

## נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 17 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים

182	1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א
188	2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים
191	3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות
194	4. משפטי האינטגרביליות
195	5. אינטגרביליות לפי דארבו

## האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-9:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx \quad (9)$$

**(10) הוכיחו כי :**

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx \quad \text{ב.}$$

**(11) הוכיחו שלכל פונקציה רציפה  $f$  :**

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \quad \text{ב.}$$

**(12) תהי  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת על ידי  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$  .**

$$\text{פתרו את המשוואה } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

**(13) ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של  $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$** 

$$\text{(14) חשבו: } \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx$$

$$\text{(15) חשבו: } \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

**(16) נתונה פונקציה רציפה  $f$ . הוכיחו :**

$$\text{א. אם } f \text{ זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 17-18 :

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (17)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (18)$$

(19) נתון כי  $f(x)$  פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל  $x$ , ונתון כי  $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \left( \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) dx$$

חשבו את האינטגרל

(20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx \quad \text{ב.}$$

$$(n \in \mathbb{N}) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx \quad \text{ג.}$$

(21) (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

$$\text{א. חשבו את האינטגרל } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ , בעזרת ההצבה } t = \frac{1}{x}$$

$$\text{ב. חשבו את האינטגרל } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ ישירות.}$$

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

$$(22) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

(23) ענו על הסעיפים הבאים :

$$\text{א. בעזרת ההצבה } t = \tan x \text{ חשבו את האינטגרל } \int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\text{ב. חשבו את ערך האינטגרל } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$(24) \text{ חשבו את ערך האינטגרל } \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \cos^2 x} dx$$

(25) תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה פעמיים בקטע  $[a, b]$ .

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = a$  יוצר זווית  $\frac{\pi}{3}$  עם הכיוון

החיובי של ציר  $x$  והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = b$  יוצר זווית  $\frac{\pi}{4}$  עם הכיוון החיובי של ציר  $x$ .

$$\text{חשבו את ערך האינטגרל } \int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x} dx$$

(26) הוכיחו:

אם  $f$  פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם  $T$  המחזור של  $f$

$$\text{אז לכל מספר ממשי } a \text{ מתקיים } \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

(27) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם  $f$  ו- $g$  פונקציות רציפות ב- $[a, b]$ , ואם  $\int_a^b f(t) dt = 0$  וגם

$$\int_a^b g(t) dt = 0 \text{ , אז } \int_a^b f(t) g(t) dt = 0$$

ב. אם  $f$  זוגית ואינטגרלית בכל קטע,

$$\text{אז הפונקציה } g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ אי-זוגית.}$$

## תשובות סופיות

(1)  $-6$

(2)  $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3)  $-2e^{-1} + 1$

(4)  $\frac{1}{5}$

(5)  $\arctan 6 - \arctan 3$

(6)  $\frac{\pi}{2}$

(7)  $\frac{17}{12}$

(8)  $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(9)  $\frac{17}{6}$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12)  $x = e^2$

(13)  $0$

(14)  $\frac{\pi}{4}$

(15)  $\frac{\pi^2}{4}$

(16) שאלת הוכחה.

(17)  $0$

(18)  $2 \arctan 4$

(19)  $0$

(20) א, ב, ג.  $\frac{\pi}{4}$

(21) א.  $0$  ב.  $\frac{\pi}{2}$  ג. ראו בסרטון.

(22) שאלת הוכחה.

(23) א.  $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$  ב.  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(24)  $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

(25)  $1 - \sqrt{3}$

**(26)** שאלת הוכחה.

**(27)** שאלת הוכחה.

## מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

### שאלות

- (1) תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית, ונניח כי  $m \leq f(x) \leq M$  לכל  $x$  בקטע  $[a, b]$ . הוכיחו כי  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות 10-2:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (2)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (3)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (6)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (7)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (10)$$

**(11)** תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית. בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם  $|f|$  אינטגרבילית בקטע,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

הוכיחו כי

**(12)** תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה המקיימת  $|f(x)| \leq \int_0^x f(t) dt$  לכל  $x \in [0, 1]$ . הוכיחו כי  $f(x) = 0$  לכל  $x \in [0, 1]$ .

**(13)** תהי  $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ , כך ש- $f''(x) > 0$  לכל  $x \in [0, a]$ .

$$\int_0^a f(x) dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$$

תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

**(14)** תהי  $g$  פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ , המקיימת  $\int_a^b |g(t)| dt = 0$ .

הוכיחו כי לכל  $x$  בקטע  $(a, b)$ , מתקיים  $g(x) = 0$ .

**(15)** תהי  $f$  פונקציה אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ , המקיימת  $\int_a^b f(x) dx > 1$ .

הוכיחו שקיים  $x_0$  בקטע  $[a, b]$ , עבורו  $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$ .

**(16)** יהי  $n$  מספר טבעי, ותהי  $f$  פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע  $[1, n]$ .

הוכיחו כי  $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \dots + f(n)$

**(17)** חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$

**(18)** הוכיחו שאם הפונקציה  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$ , גזירה בקטע  $(a, b)$

$$\text{וגם } f'(x) \leq M \text{ לכל } x \text{ בקטע זה, וכן } f(a) = 0, \text{ אז } \int_a^b f(x) dx \leq \frac{M(b-a)^2}{2}$$

**(19)** יהיו  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי  $f$  עולה ו- $g$  אי-שלילית.

$$\text{הוכיחו שקיים } c \in [a, b], \text{ כך ש-} \int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-7:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] \quad (7)$$

$$\text{חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right) \quad (8)$$

\* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות 9-12 על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + \dots + n &= 0.5n(n+1) \\
 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\
 \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha &= \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (12)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (11)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (9)$$

$$(13) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^4 x^2 dx.$$

$$(14) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^2 \frac{1}{x} dx.$$

$$. P = \left\{ 1 = 2^{\frac{0}{n}}, 2^{\frac{1}{n}}, 2^{\frac{2}{n}}, 2^{\frac{3}{n}}, \dots, 2^{\frac{n}{n}} = 2 \right\} \text{ רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע}$$

**תשובות סופיות**

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$1 - \cos 1 \quad (2)$$

$$\ln 2 \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) \quad (5)$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad (6)$$

$$\ln 2 \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{3} \quad (10)$$

$$\frac{1}{4} \quad (11)$$

$$2 \quad (12)$$

$$21 \quad (13)$$

$$0.5 \quad (14)$$

## משפטי האינטגרביליות

### שאלות

1) בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ :

$$[a, b] = [0, 2] \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$[a, b] = [-4, 14] \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \quad \text{ב.}$$

$$[a, b] = [0, 9] \quad f(x) = \begin{cases} 4x & x \neq 1 \\ -41 & x = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

2) ענו על הסעיפים הבאים:

- הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע  $[a, b]$ .
- מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.
- מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע  $[-1, 1]$ , שאינה אינטגרבילית בקטע.

3) לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

- קיימת פונקציה אינטגרבילית  $f$ , בקטע  $[a, b]$ , שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.
- קיימת פונקציה  $f$ , החסומה בקטע  $[a, b]$  וגזירה בקטע  $(a, b)$ , שאינה אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{4} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 2 & x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{4) נתונה הפונקציה}$$

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע  $[0, 1]$ ?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## אינטגרביליות לפי דארבו

### שאלות

- (1) נתונה  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , המוגדרת על ידי  $f(x) = x$ .
- א. מצאו את האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

- (2) נתונה  $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת על ידי  $f(x) = x^2$ .
- א. מצאו את האינטגרל העליון והתחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו בקטע ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

$$(3) \text{ נתונה הפונקציה הבאה } f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 0.5 \\ 2 & x = 0.5 \\ 1 & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו.

- (4) נתונה הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  בקטע  $[0,1]$ .
- א. בדקו, לפי ההגדרה של דארבו, האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע.
- ב. תנו דוגמה לפונקציה  $f$ , כך ש-  $|f|$  ו-  $f^2$  אינטגרביליות, אך  $f$  לא אינטגרבילית.

- (5) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה. נניח שקיימת חלוקה  $P$  של הקטע  $[a,b]$ , כך ש-  $L(P, f) = U(P, f)$ . הוכיחו ש-  $f$  פונקציה קבועה.

- (6) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה. נניח שקיימת חלוקה  $P_n$  של הקטע  $[a,b]$ , כך ש-  $U(P_n, f) - L(P_n, f) \rightarrow 0$ .
- א. הוכיחו ש-  $f$  אינטגרבילית בקטע.

ב. הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, f) = \int_a^b f(x) dx$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית בעזרת קריטריון רימן. בנוסף, חשבו את האינטגרל המסוים של הפונקציה בקטע.

א.  $f(x) = x$ , בקטע  $[0,1]$ .

ב.  $f(x) = x^2$ , בקטע  $[0,2]$ .

(8) הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x}$  אינטגרבילית בקטע  $[1,2]$  בעזרת קריטריון רימן.

### תשובות סופיות

$$\int_0^1 f dx = \frac{1}{2} \quad \text{ב.} \quad \int_0^1 f = \int_0^1 f = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\int_0^2 f dx = \frac{8}{3} \quad \text{ב.} \quad \int_0^2 f = \int_0^2 f = \frac{8}{3} \quad \text{א.} \quad (2)$$

(3) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (4)$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 18 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

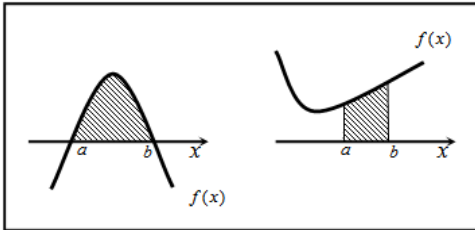
תוכן העניינים

197	.....	1. חישוב שטחים
217	.....	2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y
218	.....	3. אורך קשת

## חישוב שטחים

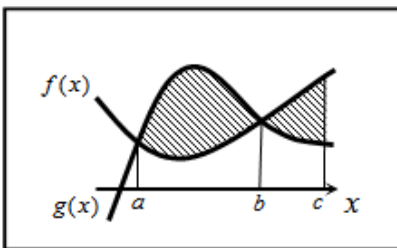
## חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$  :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

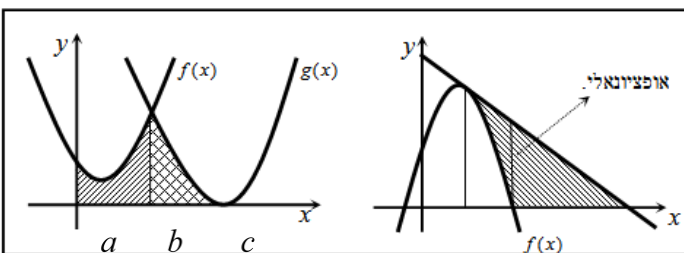


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

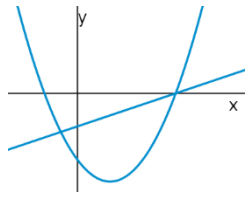
$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$  :

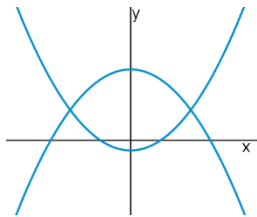


$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

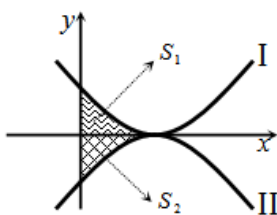
## שאלות



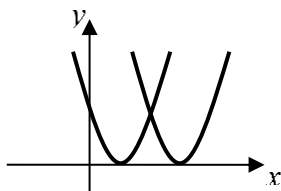
- (1) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 4x - 12$  ו-  $g(x) = x - 6$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של  $f$  ו-  $g$ .



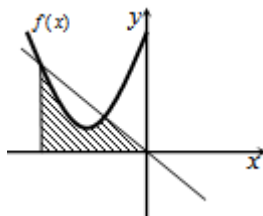
- (2) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = 7 - x^2$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של  $f$  ו-  $g$ .



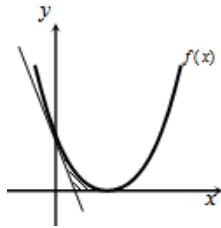
- (3) נתונות הפונקציות  $f(x) = (x-2)^2$  ו-  $g(x) = -(x-2)^2$ ,  
 כמתואר באיור.  
 א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.  
 ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים  
 ב-  $S_1$  ו-  $S_2$ , כמתואר באיור.  
 הראו כי השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$  שווים זה לזה.



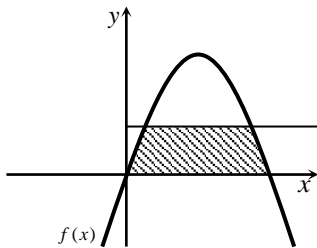
- (4) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ,  $g(x) = x^2 - 6x + 9$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$ .



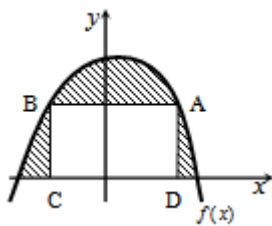
- (5) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 + 6x + 12$ .  
 ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה  
 בנקודה שבה  $x = -4$ , כמתואר באיור.  
 א. מצאו את משוואת הישר.  
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.  
 ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר  $x = -4$ .



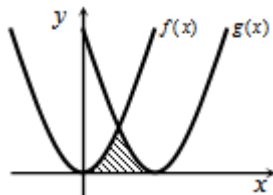
- 6) נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-2)^2$ .  
 בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  נעביר משיק.  
 א. מצאו את משוואת המשיק.  
 ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .  
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



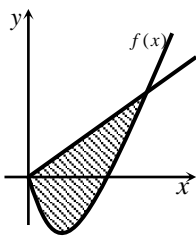
- 7) נתונה הפונקציה  $f(x) = kx - x^2$ .  
 הישר  $y = 9$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.  
 ידוע כי שיעור ה- $x$  של אחת מנקודות אלה הוא  $x = 9$ .  
 א. מצאו את ערך הפרמטר  $k$ .  
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.  
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



- 8) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ , המתוארת באיור שלהלן, היא  $f'(x) = 3 - 2x$ . ישר  $AB$ , שמשוואתו  $y = 6$ , חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודות  $A$  ו- $B$ . מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$ , כך שנוצר מלבן  $ABCD$ . ידוע ששיעור ה- $x$  של הנקודה  $A$  הוא  $x = 4$ .  
 א. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



- 9) באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה  $f(x) = x^2$  את גרף הפונקציה  $g(x)$ , בנקודה שבה  $x = 2$ . הנגזרת של הפונקציה  $g(x)$  היא  $g'(x) = 2x - 8$ .  
 א. מצאו את הפונקציה  $g(x)$ .  
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



10 באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$  והישר  $y = 2x$ .

נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = 2x - 6$ ,

וידוע כי הישר חותך את הפונקציה

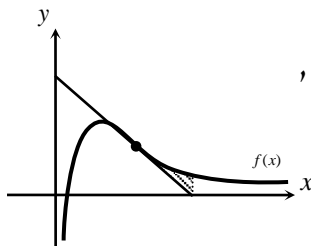
בנקודה שבה ערך ה- $y$  הוא  $y = 16$ .

א. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

11 ענו על הסעיפים הבאים:



א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ ,

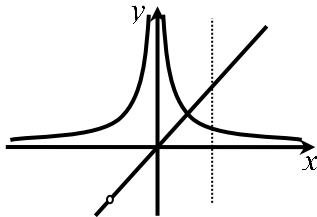
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה

והמשיק שמצאת בסעיף א'.

חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- $x$ ,

היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

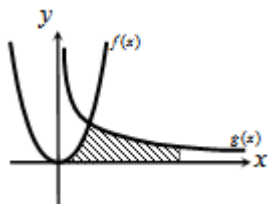


12 נתונות שתי פונקציות  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$ .

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר  $x = 2$  וציר ה- $x$ .

13 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות



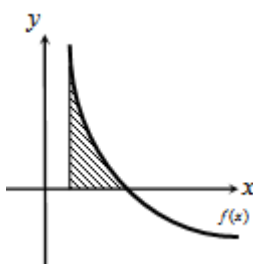
$f(x) = 2x^2$  ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$  (קבוע,  $a > 0$ ), בתחום  $x > 0$ .

ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,

בנקודה הנמצאת על הישר  $y = 4x$ .

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת  $a$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר  $x = 4$ .



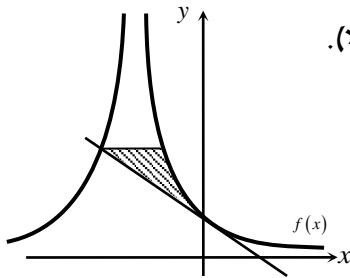
14 גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{a - x^2}{x^2}$  (קבוע  $a$ )

חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $(6, 0)$ .

א. מצאו את  $a$  וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

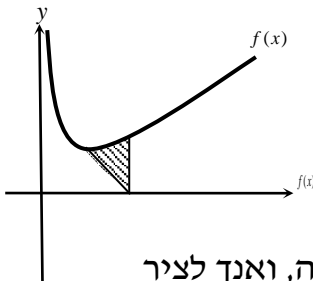
ציר ה- $x$  והישר  $x = 2$ .



15 נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$  (פרמטר חיובי).

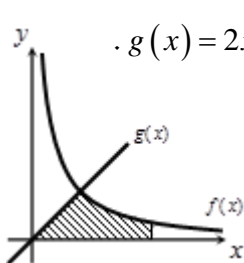
ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ , הוא  $-\frac{1}{9}$ .

- א. מצאו את ערך הפרמטר  $A$ .
- ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ .
- ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -4.5$ .
- ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.
- ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).



16 באיור שלהלן נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$ .

- א. מצאו את נקודת המינימום שלה.
- ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר ישר לנקודה  $(2,0)$ , שעל ציר ה- $x$ .
- מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- $x$ , היוצא מהנקודה  $(2,0)$  עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

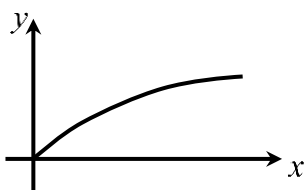


17 באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$  ו- $g(x) = 2x - 1$ .

- א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.
- ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר  $x = 9$ .

18 נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$ .

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- $y$ .



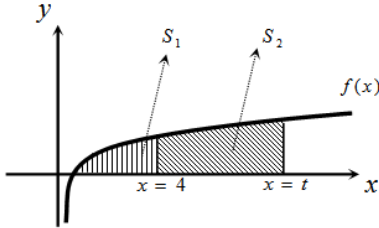
19 נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  ברביע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים, חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר  $x = \sqrt{3}$ .

**(20)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

נעביר שני אנכים לציר ה- $x$ ,  $x = 4$  ו- $x = t$  (כאשר  $t > 4$ ).  
 נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  ב- $S_1$ ,  
 ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והאנכים ב- $S_2$ .

ידוע כי  $8S_1 = S_2$ .  
 מצאו את  $t$ .



**(21)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$ .

א. ענו על הסעיפים הבאים:

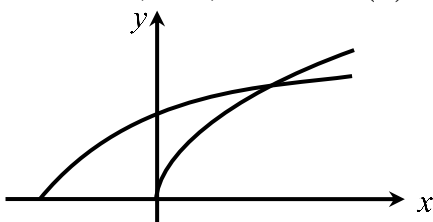
1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא  $m = \frac{17}{16}$ .

מצאו את נקודת ההשקה.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  ואנך לציר ה- $x$  מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

**(22)** נתונות שתי פונקציות  $f(x) = \sqrt{x+b}$ ,  $g(x) = \sqrt{2x}$ , כאשר  $(b > 0)$ .



גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- $x$  הוא  $2\frac{2}{3}$  יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר  $b$ .

**(23)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = x^2$  ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$ ,

ברביע הראשון.

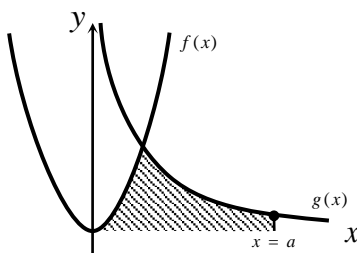
נעביר ישר  $x = a$ , החותך את גרף הפונקציה  $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה- $x$  והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $85\frac{1}{3}$ .

מצאו את  $a$ .



**(24)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$  ו-  $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$ .

נעביר שני ישרים  $x = k$  ו-  $x = t$ , אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

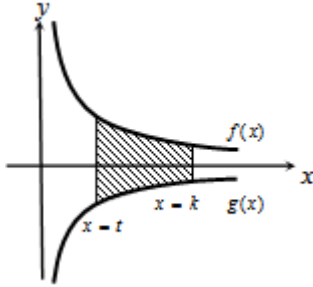
ידוע כי  $AB = 2CD$ .

א. הראו כי  $k = 4t$ .

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות

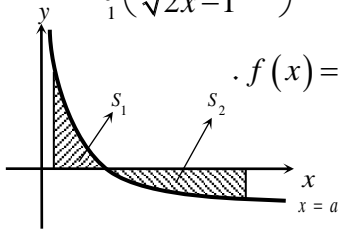
לבין הישרים  $x = k$  ו-  $x = t$ , הוא  $S = 12$ .

מצאו את  $t$ .



**(25)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של  $a$ ,  $(a > 1)$  יתקיים  $\int_1^a \left( \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$ .



ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$ .

נעביר שני אנכים לציר ה- $x$ ,  $x = 1$  ו-  $x = 13$ ,

כך שנוצרים השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$ .

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

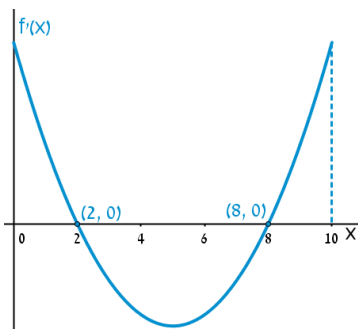
ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- $x$  והאנך  $x = 1$ , כלומר את  $S_1$ .

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח  $S_2$ .

נמקו.



**(26)** הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 10$ .

בציור מתואר גרף הנגזרת  $f'(x)$ .

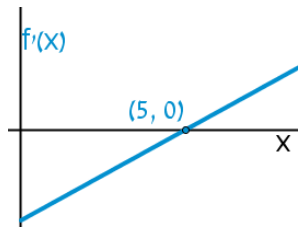
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

אם  $f(2) = 6$ ,  $f(0) = -4$ ,  $f(5) = 0$ ,

וכן  $f(10) > 0$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים

ברביע הראשון, עד לנקודה שבה  $x = 2$ .



**(27)** להלן גרף הפונקציה  $f'(x)$ , אשר חותך את

ציר ה- $x$  בנקודה אחת בלבד,  $(5, 0)$ .

א. מצאו את התחומים שבהם  $f'(x)$  חיובית,

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי שיעור ה- $y$

שלה הוא  $y = -2$ .

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- $y$  כאשר  $y = 8$ .

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים.

**(28)** באיור שלהלן מתוארת הנגזרת  $f'(x)$ .

א. האם לפונקציה  $f(x)$  יש נקודות קיצון? נמקו.

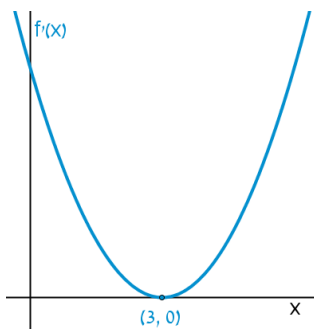
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

אם ידוע כי  $f(3) = 4$ , וכי היא חותכת את

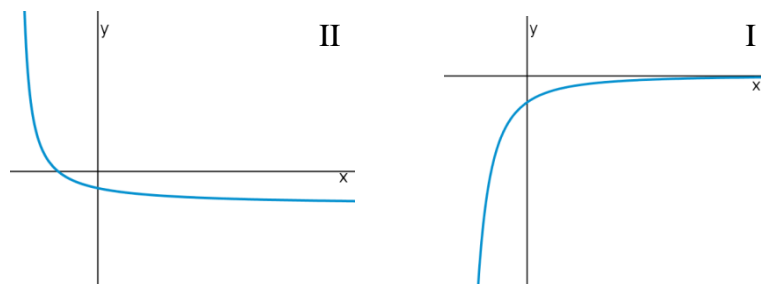
ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -5$ .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.



**(29)** באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$ :

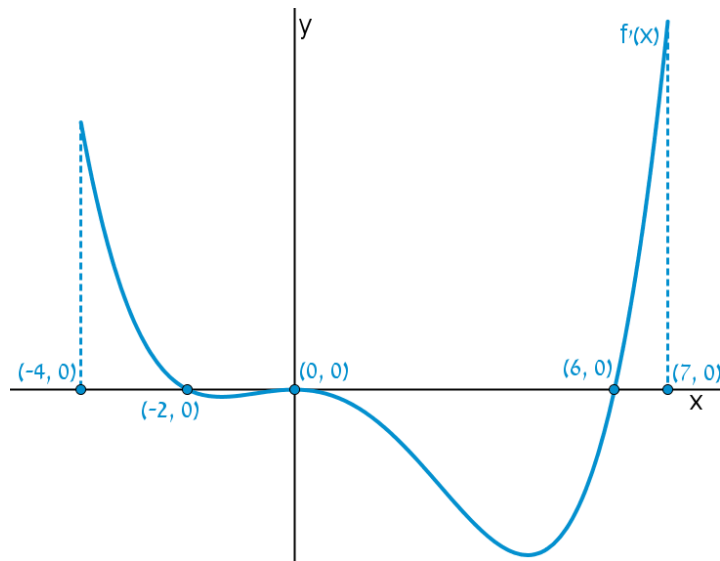


א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון  $f(10) = -3$ , וכי  $f(x)$  חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -2$ .

מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת  $f'(x)$ , הצירים והישר  $x = 10$ ?

30 נתון גרף הנגזרת  $f'(x)$  :

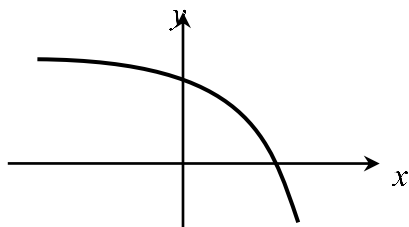


- א. שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-4 \leq x \leq 7$ ,  
 לפי הנתונים  $f(0) = -2$ ,  $f(-2) = 7.6$  ו-  $f(6) = -606.8$ .
- ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע השלישי.
- ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע הרביעי.

## פונקציות מעריכיות

## אינטגרלים מייזים של פונקציות מעריכיות

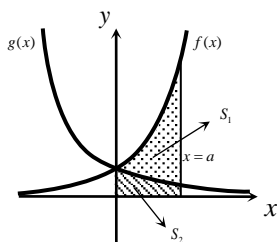
אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



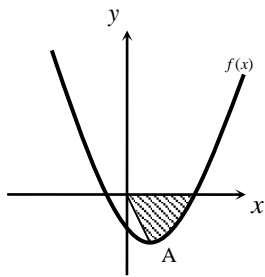
- (31)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 5 - e^x$ .  
 העבירו לפונקציה משיק ששיפועו  $-e$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .  
 ניתן להשאיר  $e$  ו- $\ln$  בתשובה.

- (32)** נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{bx}$ , כאשר  $b > 0$ .  
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים וציר ה- $y$  הוא  $\frac{e-2}{4}$ .  
 מצאו את ערכו של הפרמטר  $b$ .

- (33)** נתונות הפונקציות  $f(x) = e^{-x}$  ו- $g(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ .  
 מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  ברביע הראשון הורידו אנך לשני הצירים. המשך האנך לציר ה- $y$  חותך את הפונקציה  $f(x)$ , ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- $x$ , כך שנוצר מלבן. הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא  $\frac{3}{e}$ .

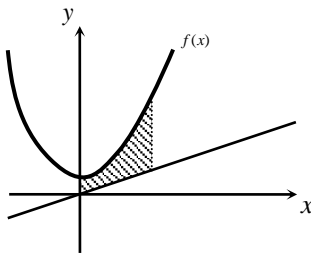


- (34)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = e^{2x}$  ו- $g(x) = e^{-2x}$ .  
 נעביר אנך לציר ה- $x$  את הישר  $x = a$ , כאשר  $a > 0$ , כמתואר באיור.  
 אנך זה יוצר את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$ .  
 ידוע כי השטח  $S_1$  גדול פי 3 מהשטח  $S_2$ .  
 מצאו את  $a$ .



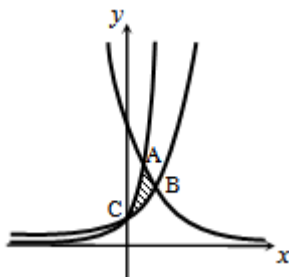
**(35)** נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$ .

- הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.  
 א. מצאו את שיעורי הנקודה A.  
 מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.  
 ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.  
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה-x, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בנקודה שבה  $x = 1.7$ .



**(36)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$ .

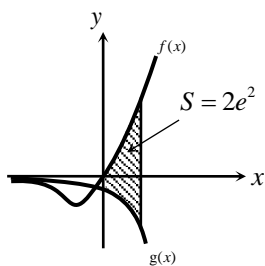
- ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה  $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$ .  
 א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.  
 ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$ , והישר  $y = 0.1x$ .  
 חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה-y והאנך  $x = 2$ .



**(37)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

$$1. f(x) = 2^x \quad 2. g(x) = 4^x \quad 3. h(x) = 2^{4-2x}$$

- א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.  
 ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).  
 ג. חשבו את השטח המסומן באיור.



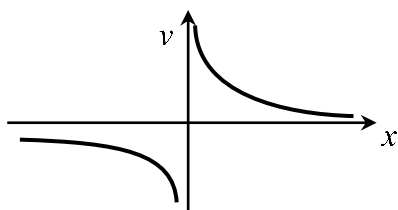
**(38)** ענו על הסעיפים הבאים:

- א. גזרו את הפונקציה  $y = e^x(x-1)$ .  
 ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = xe^x - 1$  ו- $g(x) = -e^x$ .  
 נעביר ישר  $x = a$ , כאשר  $a > 0$ , החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה-y והישר (מקווקו).  
 ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ .  
 מצאו את a.

## פונקציות לוגריתמיות

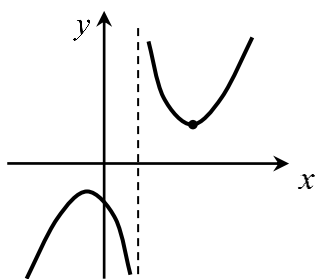
## אינטגרלים מייזים של פונקציות לוגריתמיות

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + c$



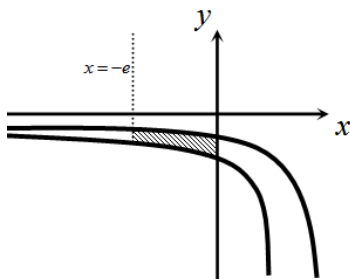
(39) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x = -1$  ו- $x = -4$  וציר ה- $x$ . ניתן להשאיר  $\ln$  בתשובה.



(40) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = 2$ , ואנך לציר ה- $x$  העובר בנקודת המינימום שלה. אפשר להשאיר ביטוי עם  $\ln$  בתשובה.

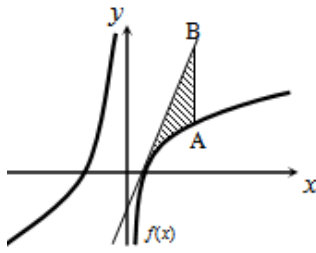


(41) באיור שלהלן נתונות הפונקציות  $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$ , בתחום  $x < 0$ .

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה  $x = 3$ .

- מצאו את  $a$  וכתבו את שתי הפונקציות.
- חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- $y$  והישר  $x = -e$ .

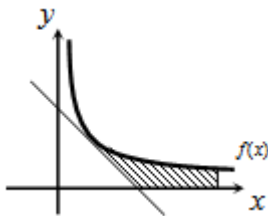


(42) נתונה הפונקציה  $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$ .

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  היא  $y = 18x - 9$ .  
א. מצאו את  $a$  ו- $b$  וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה- $y$ , שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

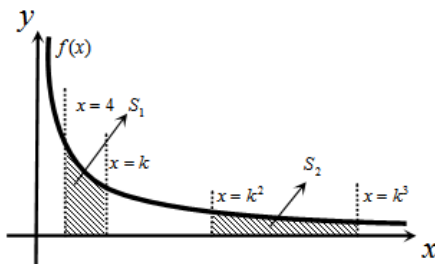
- ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



(43) נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 2$  היא  $y = 4 - x$ .  
א. מצאו את  $f(x)$ .

- ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$  ומשיק, בתחום  $x > 0$ .  
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- $x$  והישר  $x = e^2$ .



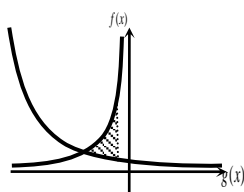
(44) באיור שלהלן נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad x > 0$$

נעביר את הישרים  $x = k$ ,  $x = k^2$ ,  $x = k^3$  ו- $x = 4$  ( $x > 4$ ).

א. הביעו באמצעות  $k$  את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$ .

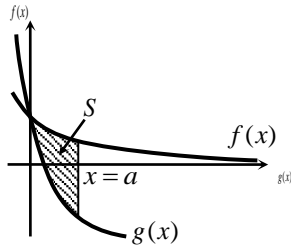
- ב. הראו כי ההפרש  $S_2 - S_1$  אינו תלוי ב- $k$ , וחשבו את ערכו.  
ג. נתון כי השטח  $S_2$  גדול פי 3 מהשטח  $S_1$ . מצאו את  $k$ .



(45) נתונות הפונקציות  $f(x) = -\frac{4}{x}$  ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$ .

גרף  $g(x)$  חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 0.4$ .  
א. מצאו את הפונקציה  $g(x)$ .

- ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.  
ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר  $x = -1$ .



**46** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות  
 $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$  ו-  $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$   
 בתחום  $x \geq 0$ .

א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$ .

ב. נעביר ישר  $x = a$  ( $a > 1$ ), המאונך

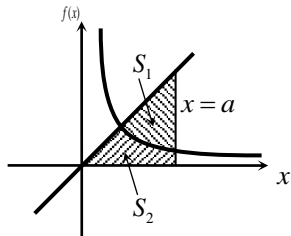
לציר ה- $x$ , חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח  $S$  (ראה איור).

מצאו את ערכו של  $a$ , עבורו מתקיים  $S = 4$ .

**47** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{3x-1}$  והישר  $y = x$ .

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.



נעביר אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$ , הנמצאו מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים

$S_1$  ו- $S_2$ , המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של  $a$ , עבורו השטח  $S_2$

$$\text{יהיה שווה ל-} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7.$$

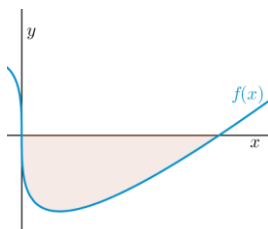
ג. עבור ערך ה- $a$  שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים  $\frac{S_1}{S_2}$ .

## פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

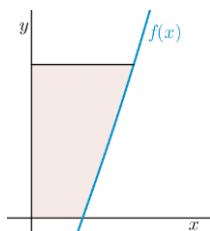
אינטגרלים מייזים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

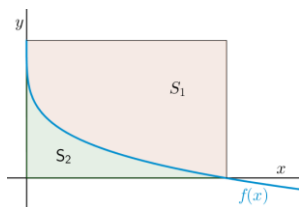
תנאי לקיום האינטגרציה  $\frac{m}{n} \neq -1$ .



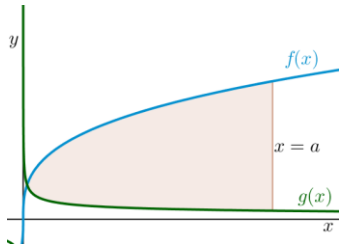
- (48) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה  $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$ .
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
  - חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



- (49) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$ .
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
  - מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
  - נעביר אנך לציר ה- $y$  מהנקודה  $(4, 6)$ . חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.



- (50) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$ .
- נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן, ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- $S_1$ , ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- $S_2$ .
- מצאו את היחס  $\frac{S_1}{S_2}$ .



51) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים

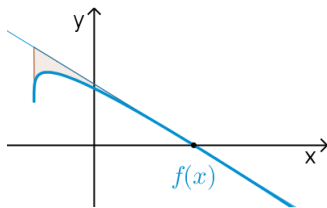
בתחום  $x > 0$ .

ב. נעביר אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$  (פרמטר).

ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך,

הוא  $\frac{3}{16} \cdot 42$  יח"ש.

מצאו את  $a$ .



52) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$ , פרמטר  $a$ .

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה

שבה  $x = 2$ .

א. מצאו את הפרמטר  $a$  וכתבו את הפונקציה.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

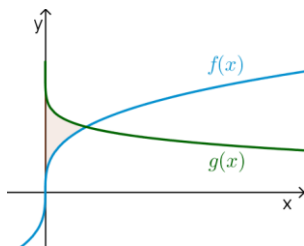
ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  והמשיק שמצאנו בסעיף

הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה

שמצאנו בסעיף ג'.

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה  $f(x)$  והמשיק.



53) באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = 2 - \sqrt{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים

וציר ה- $y$ .

54) הנגזרת של  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$

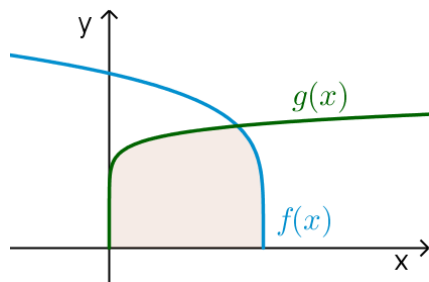
בנקודה שבה  $x = 1.2$ .

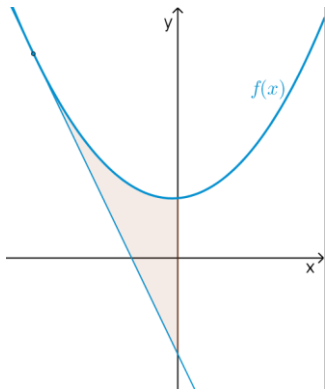
א. מצאו את  $f(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף

הפונקציה  $f(x)$ , גרף הפונקציה

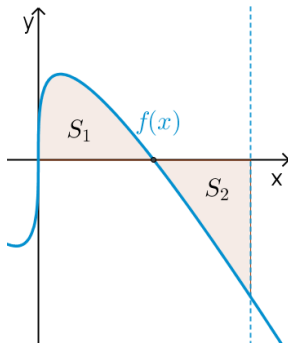
$g(x) = \sqrt[10]{x}$  וציר ה- $x$ .





55) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$ .

- א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -3$ .
- ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , המשיק וציר ה- $y$ .



56) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$ .

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  יסומן ב- $S_1$ . נעביר ישר  $x = k$ , אשר יוצר את השטח  $S_2$ , כמתואר באיור. מצאו את  $k$ , אם ידוע כי  $S_1 = S_2$ .

## תשובות סופיות

- (1)  $57\frac{1}{6}$  יח"ש.
- (2)  $21\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (3) א.  $f(x) = I$ ,  $g(x) = II$  ב. שאלת הוכחה.
- (4)  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (5) א.  $y = -x$  ב.  $(-3, 3)$  ג.  $7\frac{5}{6}$  יח"ש.
- (6) א.  $y = -4x + 4$  ב.  $(1, 0)$  ג.  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (7) א.  $k = 10$  ב.  $(1, 9)$  ג.  $81\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (8) א.  $f(x) = -x^2 + 3x + 10$  ב.  $27\frac{1}{6}$  יח"ש.
- (9) א.  $g(x) = (x-4)^2$  ב.  $5\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (10) א.  $f(x) = x^2 - 6x$  ב.  $(0, 0)$  ג.  $85\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (11) א.  $y = -x + 2$  ב.  $\frac{1}{8}$  יח"ש.
- (12) 1 יח"ש.
- (13) א.  $a = 32$ ,  $(2, 8)$  ב.  $13\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (14) א.  $a = 36$ ,  $f(x) = \frac{36-x^2}{x^2}$  ב. 8 יח"ש.
- (15) א.  $A = 6$  ב.  $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$  ג. הוכחה. ד.  $(-1.5, \frac{2}{3})$  ה.  $\frac{5}{8}$  יח"ש.
- (16) א.  $\min(0.5, 1.5)$  ב. 1.75 יח"ש.
- (17) א.  $(4, 8)$  ב. 48 יח"ש.
- (18) 2.26 יח"ש.
- (19) 0.5 יח"ש.
- (20)  $t = 16$
- (21) א. i.  $x > 0$  ii.  $(4, 0)$  iii.  $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$  ב.  $(16, 14)$  ג. 88 יח"ש.
- (22)  $b = 2$
- (23)  $a = 9$

- (24) א. שאלת הוכחה. ב.  $t=1$ .
- (25) א.  $a=13$ . ב.  $(5,0)$ . ג. i.  $S_1=2$ . ii.  $S_2=|-S_1|=2$ .
- (26) ב. 10 יח"ש.
- (27) א. חיובית:  $x>5$ , שלילית:  $x<5$ . ב. עולה:  $x>5$ , יורדת:  $x<5$ . ג.  $\min(5,-2)$ . ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.
- (28) א. לא. הנקודה  $(3,0)$  היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה. ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש. ד. 1 יח"ש.
- (29) א.  $f(x): \mathbb{R}, f'(x): \mathbb{I}$ . ב. 1 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (30) א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (31)  $S=0.192$  יח"ש.
- (32)  $b=2$ .
- (33) שאלת הוכחה.
- (34)  $a=\ln 2$ .
- (35) א.  $A(1,-e-2)$ . ב.  $y=-(e+2)x$ . ג.  $S=4.744$  יח"ש.
- (36) א.  $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}, a=-2$ . ב. 1.52.
- (37) א.  $A(1,4), B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right), C(0,1)$ . ב.  $S=1.03$  יח"ש.
- (38) א.  $y'=xe^x$ . ב.  $a=2$ .
- (39)  $S=\ln 4$  יח"ש.
- (40)  $S=4\ln 2-2$  יח"ש.
- (41) א.  $f(x)=\frac{2}{x-1}, g(x)=\frac{1}{x-2}, a=2$ . ב.  $S=1.76$  יח"ש.
- (42) א.  $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}, a=2, b=-4$ . ב.  $x=2$ . ג.  $S=6+\ln 256 \approx 11.54$  יח"ש.
- (43) א.  $f(x)=\frac{4}{x}$ . ב.  $S=6-4\ln 2$  יח"ש.
- (44) א.  $S_1=2\ln k - \ln 16, S_2=2\ln k$ . ב.  $S_2-S_1=\ln 16$ . ג.  $k=8$ .
- (45) א.  $g(x)=\frac{2}{2x+5}$ . ב.  $(-2,2)$ . ג.  $S=\ln 5\frac{1}{3} \approx 1.674$  יח"ש.
- (46) ב.  $a=2$ .
- (47) א.  $(1,1)$ . ב.  $a=5$ . ג.  $\frac{S_1}{S_2}=5.955$ .
- (48) א.  $(0,0), (8,0)$ . ב.  $S=16$  יח"ש.
- (49) א.  $x>0$ . ב.  $(2,0)$ . ג.  $S=18.149$  יח"ש.

$$\frac{S_1}{S_2} = 4 \quad (50)$$

$$a = 8 \quad \text{ב.} \quad \left(\frac{1}{8}, 2\right) \quad \text{א.} \quad (51)$$

$$(-1.2, 1.2) \quad \text{ג.} \quad x \geq -1.2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, \quad a = 1 \quad \text{א.} \quad (52)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ה.} \quad \text{יח"ש.} \quad y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16} \quad \text{ד.} \quad (53)$$

$$S = \frac{11}{28} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad (1, 1) \quad \text{א.} \quad (54)$$

$$S = 1\frac{5}{66} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א.} \quad (55)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א.} \quad (56)$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296\dots \quad \text{ג.} \quad (0, 0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \text{כל } x \quad (57)$$

## חישוב שטחים ביחס לציר ה- $y$

### שאלות

(1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה  $y^2 = -x$  והישר  $y = x + 6$ .

(2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה  $x = y^2 + 2$  והישר  $y = x - 8$ .

### תשובות סופיות

(1)  $20\frac{5}{6}$

(2)  $20\frac{5}{6}$

## אורך קשת

### שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

$$(1 \leq x \leq 8), y = x^{2/3} \quad \text{(2)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad \text{(1)}$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad \text{(4)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad \text{(3)}$$

$$(1 \leq x \leq 8), x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad \text{(6)}$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad \text{(5)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \ln x \quad \text{(8)}$$

$$(0 \leq y \leq 4), x = 3y^{3/2} - 1 \quad \text{(7)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = x^2 \quad \text{(9)}$$

### תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad \text{(1)}$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad \text{(2)}$$

$$\frac{1097}{480} \quad \text{(3)}$$

$$21 \quad \text{(4)}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}3^{1.5} \right\} \quad \text{(5)}$$

$$9 \quad \text{(6)}$$

$$\frac{8}{243} \{82^{1.5} - 1\} \quad \text{(7)}$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad \text{(8)}$$

$$\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17}+4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5}+2) \quad (\text{Decimal: } 3.16784) \quad \text{(9)}$$

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 19 - שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)

תוכן העניינים

- 219 ..... 1. חישוב נפח גוף-סיבוב
- 222 ..... 2. חישוב שטח מעטפת גוף-סיבוב
- 223 ..... 3. חישוב נפח גוף כללי

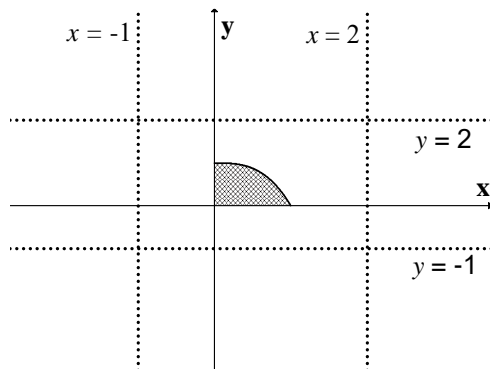
## חישוב נפח גוף-סיבוב

### שאלות

(1) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות  $y = x^2$  ו- $y = 2x - 1$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
 חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:  
 א. שיטת הדיסקות (cavalieri).  
 ב. שיטת הקליפות הגליליות.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות  $y = x^2$  ו- $y = 2x - 1$  מסתובב סביב ציר ה- $y$ .  
 חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:  
 א. שיטת הדיסקות (cavalieri).  
 ב. שיטת הקליפות הגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x) = 1 - x^3$  והצירים, מסתובב סביב ציר כלשהו.  
 מצאו את נפח הגוף המתקבל בכל מקרה בשאלות 3-8:



(3) ציר ה- $x$ .

(4) הישר  $y = -1$ .

(5) הישר  $y = 2$ .

(6) ציר ה- $y$ .

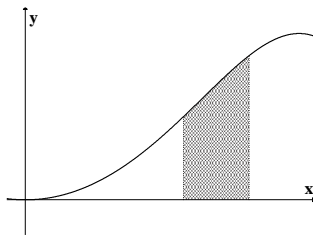
(7) הישר  $x = -1$ .

(8) הישר  $x = 2$ .

(9) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

(10) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

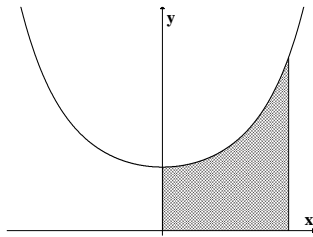
(11) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח כדור.



**(12)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = \sin(x^2)$

והישרים  $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ ,  $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$ ,  $y = 0$

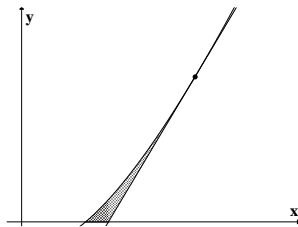
מסתובב סביב ציר ה- $y$ .  
מהו נפח הגוף המתקבל?



**(13)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = e^{x^2}$

והישרים  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$

מסתובב סביב ציר ה- $y$ .  
מהו נפח הגוף המתקבל?



**(14)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x) = x \ln x$

המשיק לגרף בנקודה  $(e, e)$  וציר ה- $x$ ,

מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
מהו נפח הגוף המתקבל?

**(15)** השטח הכלוא בין הגרפים של  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = 2x + 8$ ,  $x = 0$

מסתובב סביב הישר  $x = 4$ .

מצאו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

## תשובות סופיות

$$\frac{64}{15}\pi \text{ ב.} \quad \frac{64}{15}\pi \text{ א.} \quad (1)$$

$$\frac{8}{3}\pi \text{ ב.} \quad \frac{8}{3}\pi \text{ א.} \quad (2)$$

$$\frac{9\pi}{14} \quad (3)$$

$$\frac{15\pi}{7} \quad (4)$$

$$\frac{33\pi}{14} \quad (5)$$

$$\frac{3\pi}{5} \quad (6)$$

$$2.1\pi \quad (7)$$

$$\frac{12\pi}{5} \quad (8)$$

$$V = \pi R^2 \cdot H \quad (9)$$

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} \quad (10)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (11)$$

$$\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1) \quad (12)$$

$$\pi(e-1) \quad (13)$$

$$\frac{e^3-4}{54}\pi \quad (14)$$

$$128\pi \quad (15)$$

## חישוב שטח מעטפת של גוף-סיבוב

### שאלות

- (1) הפונקציה  $y = \sqrt{4-x^2}$ , עבור  $-1 \leq x \leq 1$ , מסתובבת סביב ציר ה- $x$ . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?
- (2) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של חרוט.
- (3) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של כדור.
- (4) הפונקציה  $x = \sqrt{9-y^2}$ , עבור  $-2 \leq y \leq 2$ , מסתובבת סביב ציר ה- $y$ . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

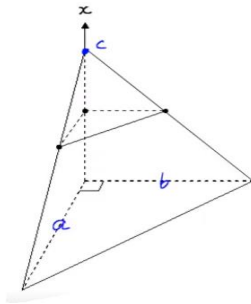
### תשובות סופיות

- (1)  $8\pi$
- (2)  $S = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$
- (3)  $S = 4\pi R^2$
- (4)  $24\pi$

## חישוב נפח גוף כללי

### שאלות

(1) מצאו נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה  $h$  ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו  $a$ .



(2) חשבו את נפחה של פירמידה, שבסיסה הוא משולש ישר זווית (ראו איור).

### תשובות סופיות

$$V = \frac{a^2 h}{3} \quad (1)$$

$$\frac{abc}{6} \quad (2)$$

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 20 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא	(ללא ספר)
2. הפרדת משתנים	224
3. משוואה הומוגנית	226
4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$	228
5. משוואה מדויקת	229
6. גורם אינטגרציה	231
7. משוואה לינארית מסדר ראשון	234
8. משוואת ברנולי	236
9. משוואת ריקטי	237
10. הצבות שונות ומשונות	238
11. משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה	239
12. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון	241
13. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד	243

## הפרדת משתנים

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2) = 1 \quad ; \quad (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 \quad ; \quad y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

## תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x| - c}, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

## משוואה הומוגנית

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 8-1 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xy' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $n$ , על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של  $n$  שנמצא בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

## משוואה מהצורה $(ax + by + c)dx + (dx + ey + f)dy = 0$

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x + y + 2} \quad (1)$$

$$(x + 2y + 3)dx + (2x + 4y - 1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3 + x + 2y}{1 + x + y} \quad (4)$$

$$(2x + y - 3)dx + (x + y - 1)dy = 0 \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$x = \frac{1}{2}(x + y + 1) + \frac{1}{4} \ln(2(x + y + 1) + 1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x - 1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y + 2}{x - 1} - 1 \right| - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{y + 2}{x - 1} + 1 \right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x + 2y + 3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x - 1| = \frac{1}{4} \left[ -(2 + \sqrt{2}) \ln \left| \sqrt{2} - 2 \frac{y + 2}{x - 1} \right| + (-2 + \sqrt{2}) \ln \left| \sqrt{2} + 2 \frac{y + 2}{x - 1} \right| \right] + c \quad (4)$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x - 2| = \frac{1}{2} \ln \left( 2 + 2 \frac{y + 1}{x - 2} + \left( \frac{y + 1}{x - 2} \right)^2 \right) + c \quad (5)$$

## משוואה מדויקת

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-6:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$(y^2 e^{-xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{-xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left( y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2 \right) dx + \left( \frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right) dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } (3x^2 + ye^{-xy})dx + (2y^3 + kxe^{-xy})dy = 0, \text{ כאשר } k \text{ קבוע.}$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $k$ , על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של  $k$  שנמצא בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

## גורם אינטגרציה

### שאלות

(1) הראו שהמשוואה  $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$  אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $\frac{1}{xy^3}$ .

(2) הראו שהמשוואה  $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right) dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right) dy = 0$  אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $ye^x$ .

(3) הראו שהמשוואה  $(x+2)\sin y dx + x \cos y dy = 0$  אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $xe^x$ .

פתרו את המשוואות בשאלות 4-9:

(4)  $(x^2 + y^2 + x) dx + (xy) dy = 0$

(5)  $(x - x^2 - y^2) dx + y dy = 0$

(6)  $(2xy^3 + y^4) dx + (xy^3 - 2) dy = 0$

(7)  $(y^2 - y) dx + x dy = 0$

(8)  $(y - xy^2) dx + (x + x^2y^2) dy = 0$

(9)  $y(1) = -1 ; \quad y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$

$$(10) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה מד"ר לא מדויקת}$$

א. הוכיחו: אם  $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$ , אז  $e^{\int f(x)dx}$  הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכיחו: אם  $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$ , אז  $e^{-\int g(y)dy}$  הוא גורם אינטגרציה.

$$(11) \quad (y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של  $xy$  בלבד. כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה  $\mu(xy)$ .

$$(12) \quad (5x^2 + 3y^3 + 2xy)dx + (3x^2 + 3xy^2 + 6y^3)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה}$$

מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה  $\mu(x+y)$ .

$$(13) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $\frac{x}{y}$  בלבד.

$$(14) \quad (x^2 y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של  $x^\alpha y^\beta$ . כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה  $\mu(x^\alpha y^\beta)$ .

$$(15) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $xy$  בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה  $(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$ .

$$(16) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $x+y$  בלבד.

## תשובות סופיות

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

שאלת הוכחה. (10)

$$\mu(xy) = (xy)^2 \quad (11)$$

$$\mu(x+y) = (x+y)^2 \quad (12)$$

$$\text{if: } \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} = h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM}} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{xy^3} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{ב.} \quad \text{if: } \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}} \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$\text{if: } \frac{M_y - N_x}{N - M} = h(x+y) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}} \quad (16)$$

## משוואות ליניאריות מסדר ראשון

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

## תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[ \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) [x^2 - 4x + C] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2 (y + c) \quad (9)$$

## משוואות ברנולי

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left( \frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left( \frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

## משוואות ריקטי

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (1)$$

$$y' = 1 + (x - y)^2 \quad (2)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}} \quad (1)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x} \quad (3)$$

## הצבות שונות ומשוונות

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$y' = \cos(y - x) \quad (1)$$

$$y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right); \quad y(1) = 0 \quad (2)$$

$$y' - x^2 y + y^2 = x - \frac{x^4}{4}, \quad y(0) = 1 \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{1}{\sin z} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}\right) \quad (2)$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} \quad (3)$$

## משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן  $p = y' = \frac{dy}{dx}$ .

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$(p = y') \quad 4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$(p = y') \quad x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (2)$$

$$(p = y') \quad xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (3)$$

$$(p = y') \quad y = 2px + p^4 x^2 \quad (4)$$

$$(p = y') \quad xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (5)$$

$$(p = y') \quad (y > 0) \quad 6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (6)$$

**תשובות סופיות**

$$(y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left( \ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (1)$$

$$(\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0 \quad (2)$$

$$\left( y + 0.5x - \frac{c_1}{x} \right) \cdot \left( \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2 \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (5)$$

$$6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0 \quad (6)$$

## פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

### שאלות

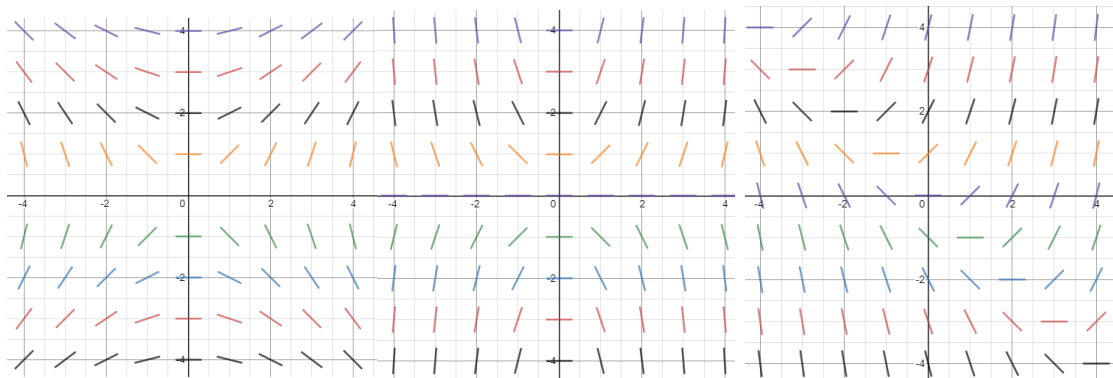
(1) שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית  $y' = 2y - x$ .

(2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

א.  $y' = \frac{x}{y}$

ב.  $y' = xy$

ג.  $y' = x + y$



איור 3

איור 2

איור 1

(3) נתונה המד"ר  $y' = y - x$ ,  $y(0) = 2$ .

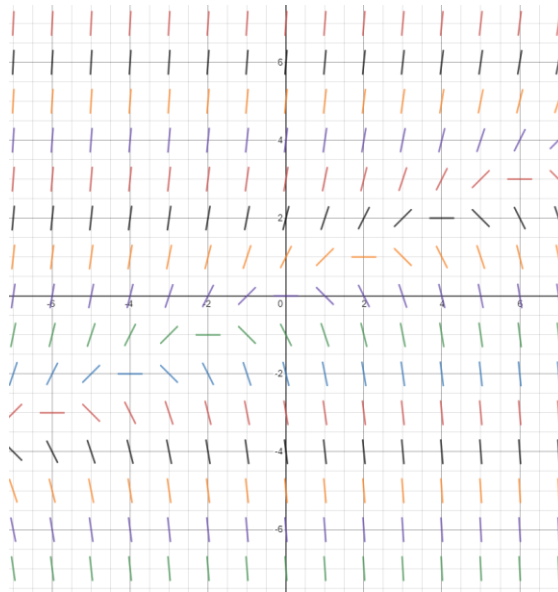
מצאו בקירוב את  $y(1)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.1$ .

(4) נתונה המד"ר  $y' = x + y$ ,  $y(1) = 2$ .

מצאו בקירוב את  $y(2)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.2$ .

## תשובות סופיות

(1)



(2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

(3)  $y(1) = 4.593$

(4)  $y(2) = 6.95328$

## משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

### שאלות

(1) נתונה הבעיה  $y(2) = -1$ ,  $y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$ .

א. הוכיחו ש-  $y_1(x) = -x + 1$ ,  $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2$  הם פתרונות לבעיה.

קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

(2) נתונה הבעיה  $y(0) = 0$ ,  $y' = \sqrt[3]{y} + 4$ .

א. הוכיחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכיחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכיחו שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

(3) פתרו את הבעיה  $y(4) = 0$ ,  $y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$ .

(4) נתונה הבעיה  $y(0) = 4$ ,  $y' = (y-1)(x^2 + y)^5$ .

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

(5) נתונה המד"ר  $ydx = (2x + y^3)dy$ .

א. הראו שעבור  $x = x(y)$  המד"ר ליניארית מסדר ראשון,

ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,

מהן נקודות ההתחלה  $(x_0, y_0)$ , כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,

העובר דרך  $(x_0, y_0)$ .

צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.

מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך  $(x_0, y_0)$ ?

$$(6) \quad \begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו 3 קירובי פיקארד לפתרון הבעיה.  
 ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר  $n$  (הוכיחו באינדוקציה).  
 ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר  $n$  מתכנס לפתרון כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

$$(7) \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{x} |\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases} \quad \text{כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה} \quad ? (x > 0)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.  
 ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.  
 ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(9) \quad \begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.  
 ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.  
 ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(10) \quad \begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(11) \quad \begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(12) \quad \begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

## תשובות סופיות

- (1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר. ג. שאלת הוכחה.
- (2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.
- (3)  $y(x) = 0$
- (4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- (5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.  
ב. כל נקודת התחלה  $(x_0, y_0)$ , שעבורה  $y_0 \neq 0$ .  
הקטע הארוך ביותר:  $(0, \infty)$  או  $(-\infty, 0)$ .
- (6) א.  $y_0(x) = 1, y_1(x) = 1 + x^2, y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}, y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$   
ב.  $y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$ . ג. הוכחה.
- (7) אחד.
- (8) א.  $[-0.08, 0.08]$  ב.  $[-0.1, 0.1]$  ג. הוכחה.
- (9) א.  $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$  ב.  $[-0.5, 0.5]$  ג. הוכחה.
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 21 - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה. 246
2. משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים. 248
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל". 250
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם". 252
5. וריאציית פרמטרים. 254
6. השיטה האופרטורית. 255
7. משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משוואת אוילר (ללא ספר). 257
8. משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל. 257
9. הוורונסקיאן ושימושו. 258

## משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(x \neq 0) \quad x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y'' \tan x - 1 = y' \quad (2)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

$$(\cos y \neq 0) \quad y'' \tan y = 2(y')^2 \quad (8)$$

### תשובות סופיות

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1 (x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k; y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[ \frac{c^2 (x+k)^4}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = -(cx + k); y = c \quad (8)$$

## משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-11 :

$$y'' - 100y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (3)$$

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = 1, \quad 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (4)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (5)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 10y' + 125y = 0 \quad (8)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3; \quad y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{a^2} y(x) = 0 & (a > 0) \\ y(0) = 4 \\ y(\infty) = y(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$(12) \quad y y'' + (y')^2 = 0 \quad \text{נתונה המד"ר}$$

א. הראו כי  $y_1 = 4$  ו-  $y_2 = \sqrt{x}$  הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראו כי הפתרון  $z(x) = y_1(x) + y_2(x)$ , אינו פתרון של המד"ר.

האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

### תשובות סופיות

$$(1) \quad y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x}$$

$$(2) \quad y = c_1 + c_2 e^{4x}$$

$$(3) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{7x}$$

$$(4) \quad z = e^x$$

$$(5) \quad y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$(6) \quad x(t) = c_1 e^{\frac{-t}{2}} + c_2 t e^{\frac{-t}{2}}$$

$$(7) \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$(8) \quad y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x]$$

$$(9) \quad y = e^2 \sin 3x$$

$$(10) \quad y = e^{\frac{-4x}{5}} \left[ c_1 \cos \left( \frac{2}{5} x \right) + c_2 \sin \left( \frac{2}{5} x \right) \right]$$

$$(11) \quad y = 4e^{\frac{-|x|}{a}}$$

(12) שאלת הוכחה.

## השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (8)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (9)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (8)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (9)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (10)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (7)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (9)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + t e^{-2t} \quad (10)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3x e^x + 2e^{3x} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## וריאציית פרמטרים

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 ; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (5)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6)$$

### תשובות סופיות

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[ \ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-2x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[ \frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} [2(x+1)^{3/2}] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1+e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1+e^{-x}) - (1+e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

## השיטה האופרטורית

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

בשאלות אלו הסימון הוא:  $(aD^2 + bD + c)y = Q(x) \Leftrightarrow ay'' + by' + cy = Q(x)$ .

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (1)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (3)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (4)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (5)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x \quad (6)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2\cos x \cos 2x \quad (7)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1 \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (3)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x \quad (7)$$

## משוואה ליניארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

### שאלות

(1) פתרו  $y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$ , כאשר ידוע  $y_1(x) = e^{2x}$ .

(2) פתרו  $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ .

(3) הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר ליניארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$(0 < x < 1), \quad (1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x}$$

כאשר ידוע ש-  $y_1(x) = e^x$ , פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

### תשובות סופיות

(1)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$

(2)  $y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$

(3) שאלת הדגמה.

## הוורונסקיאן ושימושיו

### שאלות

- (1) האם ייתכן כי  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = \sin x$  הם שני פתרונות של המשוואה  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ , עם מקדמים רציפים בקטע  $[0, \pi]$ ?
- (2) הראו כי הפונקציות  $y_1(x) = \sin x^2$ ,  $y_2(x) = \cos x^2$  הן פתרונות בת"ל של המשוואה  $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ , בקטע  $(-4, \infty)$ .  
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור  $x = 0$ .  
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?
- (3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות  $y_1(x) = xe^x$ ,  $y_2(x) = e^{-x}$  הן פתרונות של המשוואה  $y'' - \frac{2}{1+2x}y' - \frac{2x+3}{1+2x}y = 0$ , בקטע  $(-\frac{1}{2}, \infty)$ .  
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?
- (4) נתונות שתי פונקציות  $y_1 = x^3$ ,  $y_2 = |x^3|$ , בקטע  $[-4, 4]$ .  
א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.  
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.  
ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?  
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר  $xy'' - 2y' = 0$ .  
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?
- (5) ענו על הסעיפים הבאים:  
א. יהיו  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  פונקציות גזירות פעמיים בקטע  $I$ , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- $I$ .  
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  הם פתרונות שלה.  
ב. רשמו משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע  $x > 0$ , שהפונקציות  $y_1(x) = x^2$ ,  $y_2(x) = x^4$  הן פתרונות שלה.

- 6 נתון כי  $y_1(x), y_2(x)$  הם פתרונות של המד"ר  $y''(x) + p(x)y' + q(x) = 0$ , בקטע  $I$ , כאשר  $p, q$  רציפות בקטע  $I$ .  
 הראו כי אם קיימת נקודה  $c$  בקטע  $I$ , שעבורה  $y_1(c) = y_2(c) = 0$ , אז  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

### תשובות סופיות

- 1 לא.  
 2  $W = -2x$   
 3 כן.  
 4 א.  $W = 0$  ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.  
 5 א. שאלת הוכחה. ב.  $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$   
 6 שאלת הוכחה.

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 22 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

תוכן העניינים

260	1. בעיות גדילה ודעיכה.....
262	2. בעיות בגיאומטריה אנליטית.....
264	3. עקומות אורתוגונליות.....
265	4. בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום.....
266	5. בעיות שונות.....

## בעיות גדילה ודעיכה

### שאלות

- 1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה. ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.
- א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?
- ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?
- ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?
- \*הניחו שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).
- 2) האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית. בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים, ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.
- א. מצאו את אחוז הגידול השנתי.
- ב. מצאו כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת), היו בעיר 550 אלף תושבים.
- 3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%. כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש"ח.
- א. כמה כסף הפקיד האדם?
- ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש"ח?
- 4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית. בספירה הראשונית היו 1,000 חיות. בספירה השנייה שנעשתה, כעבור 20 חודשים, היו 1,400 חיות בר. מצאו אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה, היו בשמורה 2,000 חיות בר.
- 5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים. ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד, פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.
- א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1,000 שנים, מכמות התחלתית של 100 גרם?
- ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם, מכמות התחלתית של 100 גרם?

- 6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע. בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.
- א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?
- ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

### תשובות סופיות

- |                     |                  |                |
|---------------------|------------------|----------------|
| 1) א. 7.28 מיליארד. | ב. 3.54 מיליארד. | ג. בשנת 2,106. |
| 2) א. 2%            | ב. 15.92 שנים.   |                |
| 3) א. 4093.65 ש.    | ב. 13.41 שנים.   |                |
| 4) 40.77 חודשים.    |                  |                |
| 5) א. 88.69 גרם.    | ב. 19,188 שנים.  |                |
| 6) א. 3.04 שבועות.  | ב. 14.6 שבועות.  |                |

## בעיות גיאומטריות

### שאלות

(1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה  $(x, y)$  על העקום,

$$\text{שווה ל-} -\frac{x}{y}.$$

מצאו את משוואת העקום.

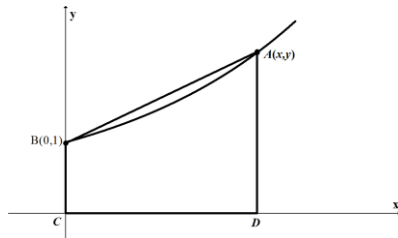
(2) מצאו את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

(3) מצאו את משוואת העקום, ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

(4) תרגמו את התיאור המילולי הבא למשוואה דיפרנציאלית ופתרו אותה:  
 נתון עקום ברביע הראשון, העובר בנקודה  $(2, 4)$ .  
 נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה  $A(x, y)$  שעליו,  
 ובין שיפוע הישר המחבר את  $A$  עם ראשית הצירים,  
 שווה לשיעור ה- $y$  של הנקודה  $A$ .

(5) מצאו את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה  $(3, 4)$ , אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

(6) קטע הנורמל לעקום בנקודה  $(x, y)$  שבין נקודה זו וציר ה- $x$ , נחצה על ידי ציר ה- $y$ .  
 מצאו את משוואת עקום זה.



(7) נתון עקום העובר בנקודה  $B(0,1)$ .

בכל נקודה  $A$  שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז  $ABCD$ , הנראה בציור. מהי משוואת העקום?

(8) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה  $(1, 3)$ ,

ושיפוע המשיק אליו בנקודה  $(x, y)$  שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$ .

מצאו את משוואת העקום.

(9) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה  $(1,2)$ ,  
 ושכל נקודה  $(x, y)$  שעליו שיפוע הנורמל הוא  $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$ .

(10) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה  $(0,1)$ , כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר ה- $y$ , המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו  $M(x, y)$  והקטע  $OM$ , מהראשית  $O$  ל- $M$ , הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע  $MN$  (כאשר  $N$  היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר ה- $y$ ). ציירו ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

### תשובות סופיות

$$x^2 + y^2 = k \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = k \quad (2)$$

$$y^2 = ax \quad (3)$$

$$y = 2xe^{x-2} \quad (4)$$

$$y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2} \quad (5)$$

$$2x^2 + y^2 = k \quad (6)$$

$$y = 2e^{x/4} - 1 \quad (7)$$

$$2xy + x^2 = 7 \quad (8)$$

$$x^3 - 3y^2x = 11 \quad (9)$$

$$2 = y + \sqrt{y^2 + x^2} \quad (10)$$

## עקומות אורתוגונליות

### שאלות

מצאו את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות 1-4:

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$xy = c \quad (2)$$

$$x^2 + 2y^2 = c \quad (3)$$

ב. מצאו את העקומה האורתוגונלית לעקומה  $x^2 + 2y^2 = 9$ ,  
 בנקודה  $(1, 2)$  שעליה.

$$x^2 + y^2 = cx \quad (4)$$

5) מצאו את משפחת העקומות, היוצרות זווית של  $45^\circ$   
 עם משפחת המעגלים  $x^2 + y^2 = c$ .

### תשובות סופיות

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$y^2 - x^2 = k \quad (2)$$

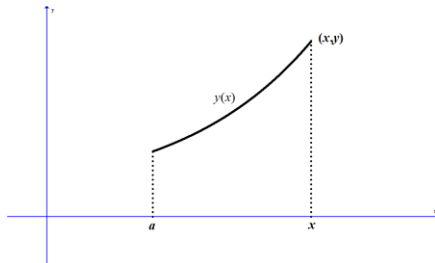
$$y = ax^2, \quad y = 2x^2 \quad (3)$$

$$y = m(x-c)^2 \quad y > 0 \quad (4)$$

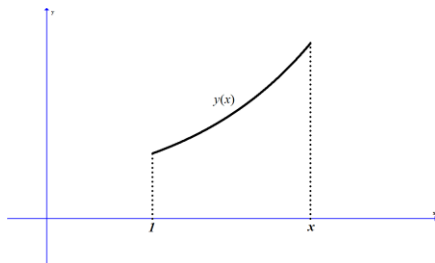
$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln \left( \left( \frac{y}{x} \right)^2 + 1 \right) = -\arctan \left( \frac{y}{x} \right) + c \quad (5)$$

## בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום

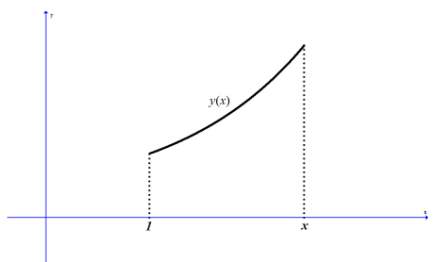
### שאלות



- (1) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = a$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי השטח  $S$  פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות  $(a, y(a))$  ו- $(x, y(x))$ . מצאו את משוואת העקום.



- (2) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי  $y(1) = 2$ . האם קיים עקום כזה, כך ששטחו של  $S$  שווה ל- $2y(x)$ ?



- (3) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי  $y(1) = 2$ . האם קיים עקום כזה, כך שהשטח של  $S$  שווה ל- $2 - y(x)$ ?

### תשובות סופיות

$$y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k} x + C\right) \quad (1)$$

(2) לא.

(3) כן.

## בעיות שונות

### שאלות

- (1) בזמן  $t = 0$ , יש במיכל 4 ק"ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים. נניח שמי מלח, בריכוז של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב.
- א. חשבו את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.  
 ב. תוך כמה זמן תהיה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?
- (2) סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש. ברגע  $t = 0$ , כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחרור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה. משקל החותר והסירה הוא 500 ק"ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל- $2v$ , כאשר  $v$  נמדדת במטר/שנייה.
- א. מצאו את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.  
 ב. מצאו כעבור כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.  
 ג. מצאו את המהירות הסופית.
- (3) חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.
- א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?  
 ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?
- (4) נתון מיכל בצורת גליל, שרדיוס בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונלי לשורש מגובהם. נסמן ב- $h(t)$  את גובה פני המים, וב- $k$  את קבוע הפרופורציה.
- א. רשמו מד"ר עבור גובה פני המים,  $h(t)$ .  
 מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?  
 ב. ידוע כי  $k = -2\pi$ . פתרו את המד"ר.  
 תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

- (5) כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ, נמס, כך שהקצב שבו רדיוסו קטן – פרופורציונלי לשטח פניו.  
 לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס"מ.  
 א. רשמו נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן  $t$ .  
 ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג  $\frac{1}{64}$  מנפחו ההתחלתי?
- (6) מבלון מלא אוויר, שרדיוסו  $R$ , מתחיל לצאת אוויר.  
 קצב יציאת האוויר הוא  $3V(t)$ , כאשר  $V(t)$  הוא נפח הבלון בזמן  $t$ .  
 הוכיחו כי כעבור  $\ln 2$  שניות נפח הבלון יקטן לכדי שמינית מנפחו ההתחלתי.  
 הערה: בשאלות 5 ו-6 נדרש ידע בהפרדת משתנים.

### תשובות סופיות

- (1) א. 26.75 ק"ג. ב. 0.942 דקות.
- (2) א. 4.09 מטר/שניה. ב. 72 שניות. ג. 10 מטר/שניה.
- (3) א.  $43\frac{1}{3}^{\circ}$ . ב. 1.13 שעות.
- (4) א.  $h(0) = 4$ ;  $\pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$ . ב.  $h = (2-t)^2$ ;  $t = \sqrt{2} + 2$ .
- (5) א.  $R(t) = \frac{12}{2t+3}$ . ב. 4.5 שעות.
- (6) שאלת הוכחה.

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 23 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

268	.....	1. הצגה פרמטרית של עקום.
270	.....	2. הנגזרת ושימושיה.
271	.....	3. שימושי האינטגרל המסוים.

## הצגה פרמטרית של עקום

### שאלות

(1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א.  $t \geq 0, x = t^2 + 1, y = t^2$

ב.  $0 \leq t \leq \pi, x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג.  $\pi \leq t \leq 2\pi, x = \cos t, y = 4 \sin t$

(2) עברו מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א.  $1 \leq x \leq 4, y = x^4 + 1$

ב.  $-2 \leq x \leq 2, y = -\sqrt{4-x^2}$

ג.  $-2 \leq x \leq 2, y = +\sqrt{4-x^2}$

(3) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור. על ידי חילוץ של הפרמטר  $t$ , מצאו משוואה מתאימה, שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים  $x$  ו- $y$  בלבד:

א.  $x = t - 4, y = t^2$

ב.  $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג.  $x = 4 + \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד.  $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה.  $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20t-5t^2}{4+t^2}$

ו.  $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$  ( $k$  קבוע).

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4 \quad \text{ב. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{ג. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$$

$$(3) \quad \text{א. } y = (x + 4)^2 \quad \text{ב. } (x + 4)^2 + \left(\frac{y - 1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

## הנגזרת ושימושיה

### שאלות

$$(1) \quad \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases} \quad \text{חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה}$$

הנתונה בצורה פרמטרית .

$$(2) \quad \begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{נתון העקום}$$

א. שרטטו את העקום.

ב. חשבו את  $y'(x)$  בשלוש דרכים שונות.

ג. מצאו את משוואת המשיק לעקום, בנקודה בה  $t = -1$ .

ד. מצאו את משוואת הנורמל לעקום, בנקודה בה  $t = -1$ .

$$(3) \quad \begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases} \quad \text{נתון העקום}$$

א. שרטטו את העקום.

ב. מצאו את משוואת המשיק לעקום בנקודה  $(0, 0)$ .

ג. מצאו את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי, ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של  $t$  העקום קמור/קעור?

### תשובות סופיות

$$(1) \quad y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3}$$

$$(2) \quad \text{א. ראו בסרטון. ב. } y' = \frac{-2}{2t+1} \quad \text{ג. } y = 2x+3 \quad \text{ד. } y = -0.5x+3$$

$$(3) \quad \text{א. ראו בסרטון. ב. } y = \pm\sqrt{3}x \quad \text{ג. אופקי- } (0, -9) \quad \text{אנכי } (2, -6), (-2, -6) \\ \text{ד. } -1 < t < 1 \quad \text{קמור. } t > 1 \quad \text{או } t < -1 \quad \text{קעור.}$$

## שימושי האינטגרל המסוים

$$(1) \quad \text{חשבו את השטח הכלוא בעקום } C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}$$

$$(2) \quad \text{חשבו את השטח הכלוא בתוך האליפסה } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ כאשר } a, b > 0$$

\* שימו לב שאם  $a = b = r$ , נקבל שטח הכלוא בתוך מעגל עם רדיוס  $r$ .

$$(3) \quad \text{חשבו את השטח הכלוא בין העקום } 0 \leq t \leq \pi, \quad x = \cos t, \quad y = t + \sin t$$

לבין ציר ה- $x$ .

$$(4) \quad \text{חשבו את השטח הכלוא בין העקום } 0 \leq t \leq 2\pi, \quad x = 4\cos t, \quad y = \sin^2 t$$

לבין ציר ה- $x$ .

$$(5) \quad \text{חשבו את אורך העקום } 0 \leq t \leq 2\pi \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

$$(6) \quad \text{חשבו את אורך העקום } \begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}, \text{ מהנקודה } (1, 0) \text{ לנקודה } (-1, \pi)$$

(7) חלקיק נע לאורך מסלול, המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

מצאו את המרחק שהחלקיק עבר והשוו אותו לאורך העקום עצמו.

$$(8) \quad \text{חלק העקום } \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, \text{ שבין } t = 0 \text{ לבין } t = \pi, \text{ מסתובב סביב ציר ה-} x$$

מהו שטח המעטפת הנוצרת?

$$(9) \quad \text{חלק העקום } \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \text{ שבין } t = 0 \text{ לבין } t = \frac{\pi}{2}, \text{ מסתובב סביב ציר ה-} y$$

מהו שטח המעטפת הנוצרת?

$$(10) \quad \text{חשבו את אורך העקום } -\pi \leq t \leq 2\pi \quad \begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}$$

11) חשבו את אורך העקום  $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t)\mathbf{k}$  ,  $1 \leq t \leq 3$ .

### תשובות סופיות

8/3 (1)

$\pi ab$  (2)

$1.5\pi$  (3)

$16/3$  (4)

8 (5)

4 (6)

(7) אורך העקום הוא  $2\pi$ . המרחק שעבר החלקיק הוא  $4\pi$ .

$4\pi r^2$  (8)

$6\pi/5$  (9)

$6\pi\sqrt{29}$  (10)

$\sqrt{3}e(e^2 - 1)$  (11)

# מתמטיקה לביולוגים

פרק 24 - נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה

תוכן העניינים

273	1. קואורדינטות קוטביות.....
275	2. הנגזרת ושימושיה.....
276	3. שימושי האינטגרל המסוים.....

## קואורדינטות קוטביות

### שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית  $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$  לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית  $(-1, -1)$  לנקודה קוטבית.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית  $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$  לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית  $(0, -4)$  לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית  $(-2, 2)$  לנקודה קוטבית.

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה  $4x - x^2 = 1 + xy$  לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה  $r = -4 \cos \theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה  $x^2 + y^2 = 4y$  לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה  $x = 10$  לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה  $y = 4$  לקואורדינטות פולריות.

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה  $r = 4$  לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המירו את המשוואה  $\theta = \pi/4$  לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשוואה  $r = 2 \cos \theta + 4 \sin \theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המירו את המשוואה  $6r^3 \sin \theta = 4 - \cos \theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

## תשובות סופיות

$$(1) \quad (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \text{ ב.}$$

$$(2) \quad (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ ב.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4}\right) \text{ ג.}$$

$$(3) \quad 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ א.} \quad (x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב.}$$

$$(4) \quad r = 4 \sin \theta \text{ א.} \quad r \cos \theta = 10 \text{ ב.} \quad r \sin \theta = 4 \text{ ג.}$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 = 4^2 \text{ א.} \quad y = x \text{ ב.} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג.}$$

$$(6) \quad 6(\sqrt{x^2 + y^2})^3 \cdot y = 4\sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ד.}$$

## הנגזרת ושימושיה

### שאלות

(1) מצאו את משוואת המשיק לעקום  $r = 3 + 8\sin \theta$  בנקודה  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

(2) מצאו את משוואת המשיק לעקום  $r = 1 - 2\sin \theta$  בראשית הצירים.

### תשובות סופיות

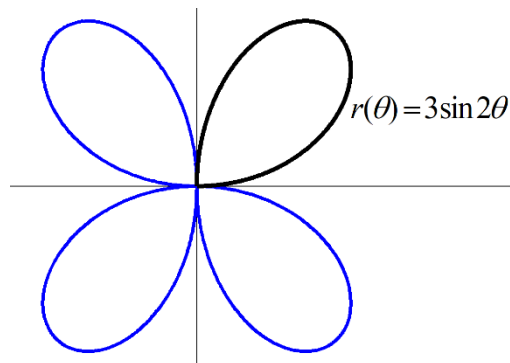
$$y = \frac{11\sqrt{3}}{5}x - \frac{98}{5} \quad (1)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad (2)$$

## שימושי האינטגרל המסוים

### שאלות

- (1) חשבו את השטח של הלולאה הפנימית של  $r = 2(1 + 2\cos\theta)$ .
- (2) חשבו את השטח הכלוא בתוך  $r = 6 + 4\cos\theta$  ומשמאל לציר ה- $y$ .
- (3) חשבו את השטח הכלוא בתוך  $r = 3 + 2\sin\theta$ .
- (4) חשבו את השטח המוגבל בתוך  $r = 3 + 2\sin\theta$  ומחוץ ל- $r = 2$ .
- (5) חשבו את השטח המוגבל בתוך  $r = 2$  ומחוץ ל- $r = 3 + 2\sin\theta$ .
- (6) חשבו את השטח המוגבל בתוך  $r = 2$  ובתוך  $r = 3 + 2\sin\theta$ .
- (7) חשבו את השטח הכלוא בתוך המעגל  $r = 2\sin\theta$  ומחוץ למעגל  $r = 1$ .
- (8) מצאו את אורך הקרדיואידה  $r = 1 + \cos\theta$ .
- (9) מצאו את האורך של עלה אחד של הוורד  $r = 3\sin 2\theta$ .  
אין צורך לחשב את האינטגרל!



- (10) מצאו את אורך העקום  $r = \theta$ , כאשר  $0 \leq \theta \leq 1$ .
- (11) העקום  $r = \cos\theta$ , כאשר  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

**(12)** העקום  $r = 4 + 4\sin\theta$ , כאשר  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , מסתובב סביב ציר ה- $y$ .  
 מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

### תשובות סופיות

$$S = 4\pi - 6\sqrt{3} = 2.174 \quad (1)$$

$$S = 22\pi - 48 \quad (2)$$

$$S = 11\pi \quad (3)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} = 24.187 \quad (4)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3} = 2.196 \quad (5)$$

$$10.37 \quad (6)$$

$$S = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (7)$$

$$8 \quad (8)$$

$$\ell = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\cos^2 2\theta} d\theta \quad (9)$$

$$\ell = \frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)}{2} \quad (10)$$

$$S_x = \pi \quad (11)$$

$$S_y = 102.4\pi \quad (12)$$

## נספח - גרפים נפוצים בקואורדינטות פולריות

### קווים

$$(1) \quad r \cos \theta = a \quad - \text{ הישר } x = a$$

$$(2) \quad r \sin \theta = b \quad - \text{ הישר } y = b$$

$$(3) \quad \theta = \beta \quad - \text{ הישר העובר דרך הראשית } y = (\tan \beta)x$$

### מעגלים

$$1. \quad r = a \quad - \text{ מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו } a$$

$$2. \quad r = 2a \cos \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנקודה } (a, 0) \text{ ורדיוסו } |a|$$

$$3. \quad r = 2b \sin \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנקודה } (0, b) \text{ ורדיוסו } |b|$$

$$4. \quad r = 2a \cos \theta + 2b \sin \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנק' } (a, b) \text{ ורדיוסו } \sqrt{a^2 + b^2}$$

### קרדיוודות ולמניסקטות

$$(1) \quad \text{קרדיוודות } r = a \pm a \cos \theta, r = a \pm a \sin \theta$$

גרף בצורת לב שמכיל את הראשית.

$$(2) \quad \text{למניסקטות עם לולאה פנימית } r = a \pm b \cos \theta, r = a \pm b \sin \theta \quad (a < b)$$

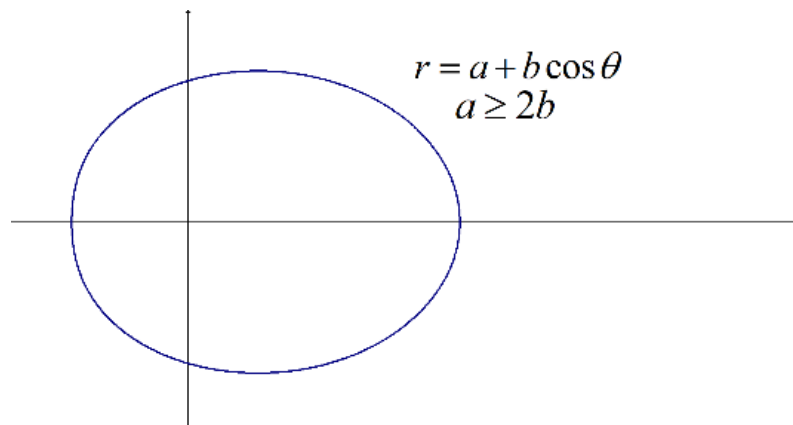
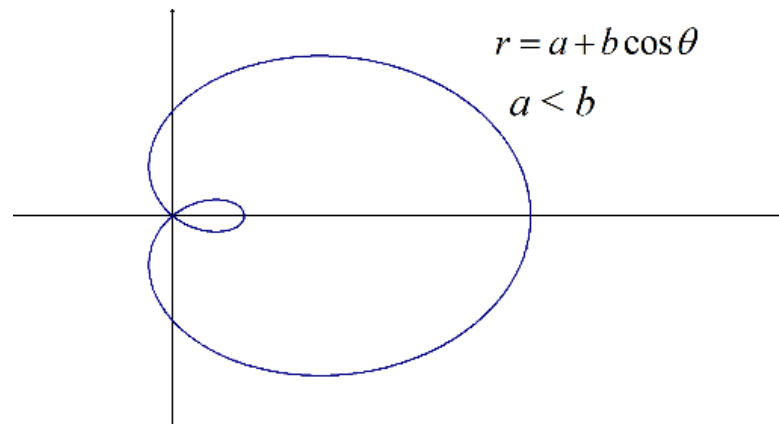
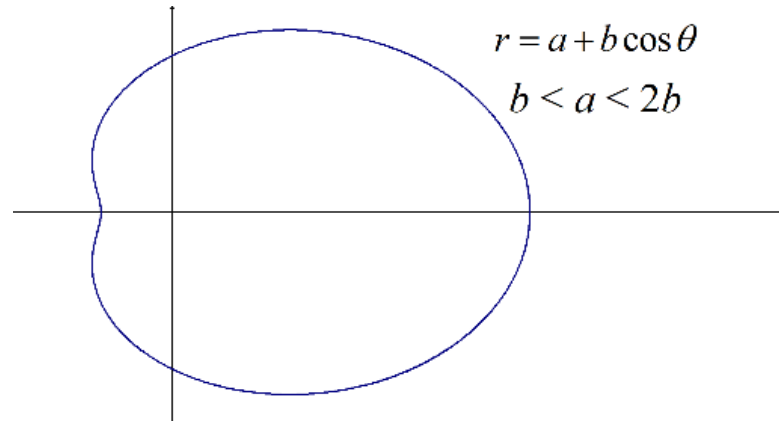
גרף שיכיל לולאה פנימית ושתמיד יכיל את הראשית.

$$(3) \quad \text{למניסקטות ללא לולאה פנימית } r = a \pm b \cos \theta, r = a \pm b \sin \theta \quad (a > b)$$

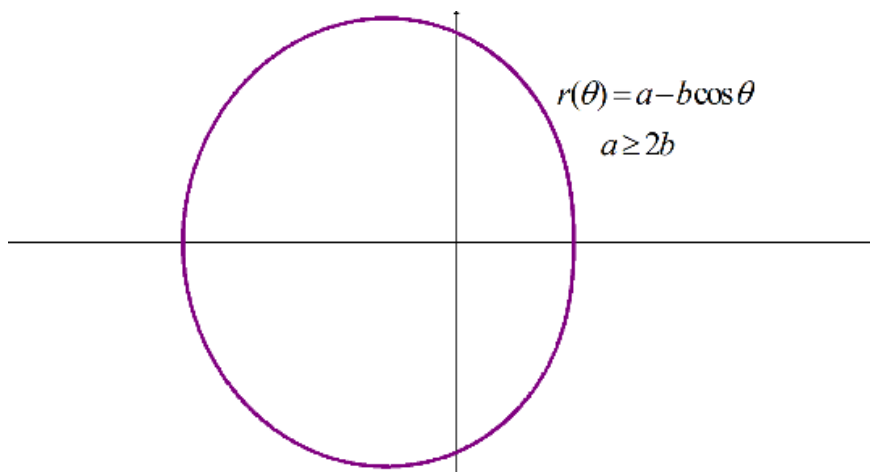
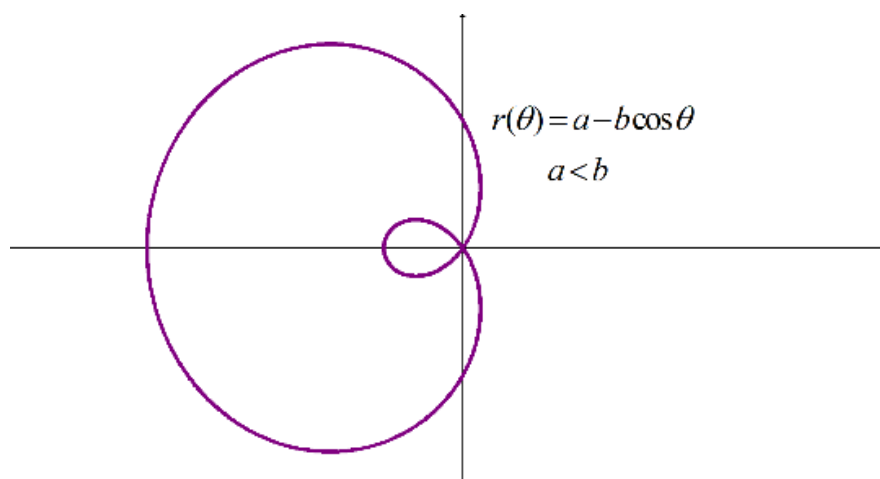
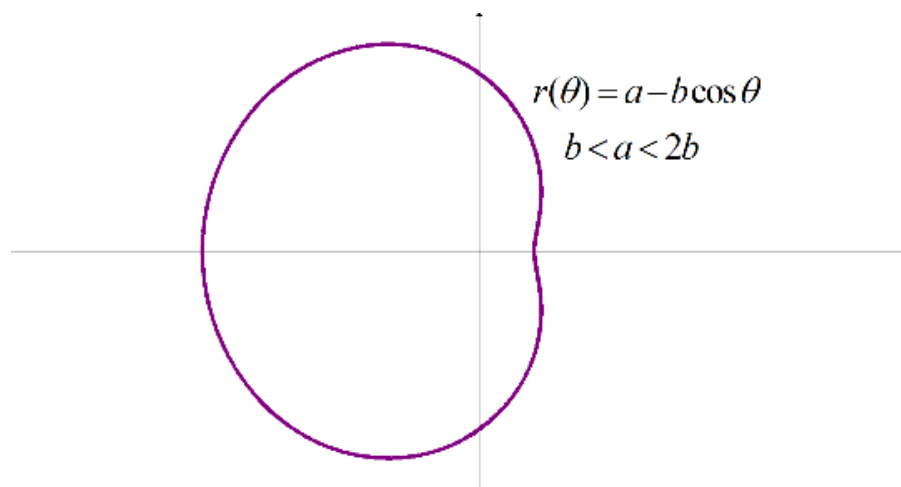
גרף ללא לולאה פנימית שאינו מכיל את הראשית.

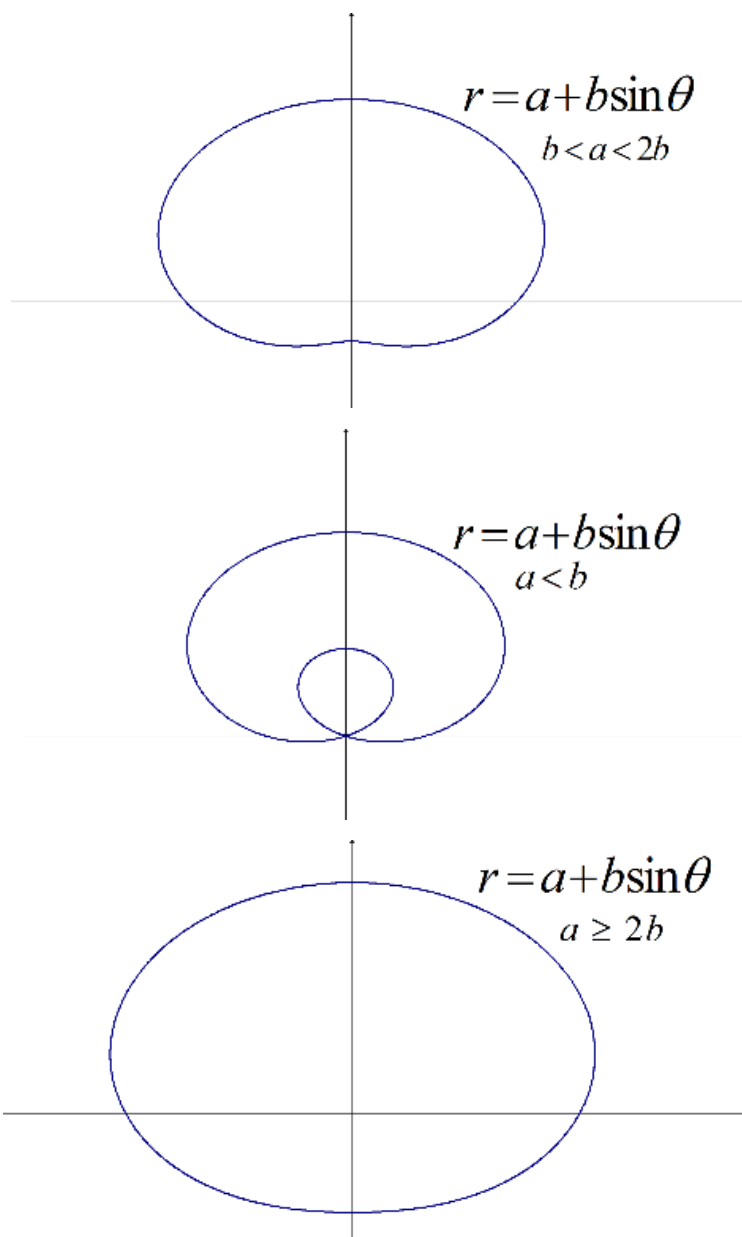
$$* \text{ נשרטט בדרך כלל עבור מחזור שלם } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

**למינסקטות ביתר פירוט**

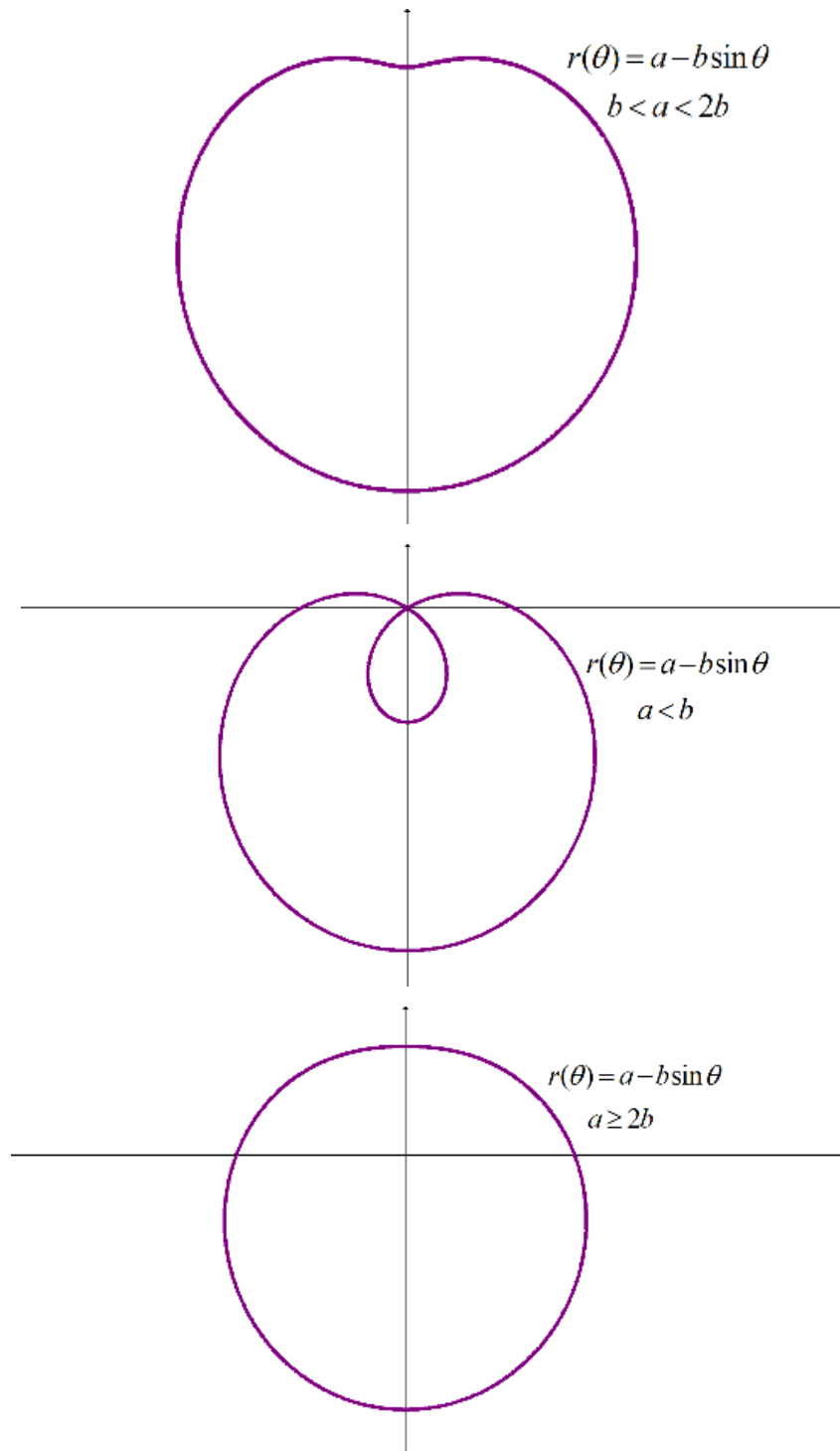
 הגרף של  $r = a + b \cos \theta$  :


הגרף של  $r = a - b \cos \theta$



הגרף של  $r = a + b\sin\theta$ 

הגרף של  $r = a - b \sin \theta$



## גרפים נפוצים נוספים

