# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

# תוכן העניינים

# תוכן העניינים

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

### תוכן העניינים

# מבוא לתורת הקבוצות

## שאלות

**1)** רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y : (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y : (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0 , \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ ($k$ ו- $n$ טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את $0$.

**2)** רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל $x$.

ג. לכל מספר טבעי $n$, המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר $x$, $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

**3)** רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 4\}$

**4)** הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה: $A = \{x \mid$ מקיים תכונה מסוימת $x\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי־זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 4, 3, 2, 1.

**5)** ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A=\{11,13,17,19\}$

ב. $B=\{x\,|\,10<x<20,\ \text{מספר ראשוני } x\}$

ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$

ד. $D=\{x\,|\,x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

ה. $E=\{x\,|\,x=2m,\ \text{שלם זוגי } m\}$

**6)** נתונה הקבוצה הבאה $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.
מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5\in A$ ב. $2\in A$ ג. $\{2\}\in A$

ד. $\{2\}\subseteq A$ ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$ ו. $\phi\in A$

ז. $\phi\subseteq A$ ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$ ט. $\{2,4\}\subseteq A$

י. $\{2,4\}\in A$ יא. $\{\{2,4\}\}\in A$ יב. $\{2,5\}\subseteq A$

יג. $\{2,5\}\in A$ יד. $\{1,4\}\in A$

**7)** מצאו שתי קבוצות, $A$ ו- $B$, המקיימות:

א. $A\in B$

ב. $A\subseteq B$

**8)** נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ , $B=\{4,6,8,10\}$ , $C=\{3,5,7,9\}$ , $D=\{6,7,8\}$ , $E=\{7,8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה $X$:

א. $X\subseteq A$ וגם $X\not\subseteq D$.

ב. $X\subseteq D$ וגם $X\not\subseteq C$.

ג. $X\subseteq E$ וגם $X\not\subseteq A$.

**9)** הוכיחו: $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

**10)** נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ , $B=\{4,6,8,10\}$ , $C=\{3,5,7,9\}$ , $D=\{6,7,8\}$ .

רשמו את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

**11)** נתונות הקבוצות הבאות:

$A=[1,4)$ , $B=(-2,1)$ , $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0\le x\le 4\}$ , $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2^x=0\}$

רשמו את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

**12)** נתונות 3 קבוצות:

$A=\{4,5,6,7,8\}$ , $B=\{5,6,7,8,9\}$ , $C=\{4,5,6,10\}$

א. חשבו את $(A-B)-C$.

ב. חשבו את $A-(B-C)$.

**13)** נתון: $U=\{11,12,13,14,15,16,17,18\}$ , $A=\{12,15,18\}$ , $B=\{13,15,17\}$.

הדגימו את כלל דה מורגן $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

**14)** הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

**15)** מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות:

א. $A=[1,\infty)$

ב. $B=(-\infty,1)\cup(4,\infty)$

ג. $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-5x+4>0\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-1|<2 \ \vee \ x>4\}$

**16)** הציגו באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

א. $A\cap B$
ב. $A\cup B$
ג. $A^c$
ד. $A\cap B^c$
ה. $A^c\cap B$
ו. $A\cup B^c$
ז. $A^c\cup B$
ח. $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$
ט. $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$

**17)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $A\setminus B=A\cap B^C$.
הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.

ב. נסמן: $X=C\setminus(A\cap B),\ Y=(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$.
הוכיחו כי $X=Y$.

ג. נסמן: $X=A\setminus(B\cup C),\ Y=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.
הוכיחו כי $X=Y$.

**18)** תהיינה $X,Y,Z$ קבוצות כלשהן.
טענה א': $X\cap Y\cap Z=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus Z)\cup(Z\setminus X)$.
טענה ב': $((X\cap Y)\cup Z)^C=(X^C\cup Y^C)\cap Z^C$.
טענה ג': $X\setminus(Y\setminus Z)=(X\setminus Y)\setminus Z$.
איזו טענה נכונה לכל בחירה של $X,Y,Z$?

**19)** הוכיחו כי אם הנקודה $x_1$ שייכת לסביבת $\varepsilon$ של הנקודה $x_0$,
אז קיימת סביבת $\delta$ של $x_1$ שמוכלת בסביבת $\varepsilon$ של הנקודה $x_0$.

**20)** הוכיחו שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

**21)** הוכיחו כי אם $x_0$ לא שייכת לקטע הסגור $[a,b]$, אז קיימת סביבה
של הנקודה $x_0$ אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע $[a,b]$.

**22)** הוכיחו כי אם $|x-x_0|<\varepsilon,\ |y-y_0|<\varepsilon$, אז $|xy-x_0y_0|<\varepsilon(|x_0|+|y_0|+\varepsilon)$.

## תשובות סופיות

1) א. לכל $x$ ולכל $y$ מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ב. לכל $x$ קיים $y$, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ג. לכל $x$ ולכל $y$ קיים $z$ כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.

ד. לכל $x$ חיובי ולכל $y$ חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.

ה. לכל $n$ טבעי המספר $n^3-n$ מתחלק ב-6. הטענה נכונה.

2) א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$

ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x: |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

3) א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.

ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

4) א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$

ג. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2\ ,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ד. $D=\{1,4,9,16\}$

5) הקבוצות $A$, $B$ ו- $C$ שוות זו לזו, והקבוצות $D$ ו- $E$ שוות זו לזו.

6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

7) $B=\{\{1,2\},1,2\}$ $A=\{1,2\}$

8) א. $A,\ C$ ב. $E,\ D$ ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

9) שאלת הוכחה.

10) $1)\ A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$ , $2) A\cap B=\{4,6,8\}$ , $3)(A\cup B)\cap C=\{3,5,7,9\}$

$4)(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$ , $5)(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$

11) $1)\ A\cup B=(-2,4)$ , $2) A\cap B=\phi$ , $3)(A\cup B)\cap C=(0,4)$ ,

$4)(B\cup C)\cap(B\cup D)=(-2,1)$ , $5)(B\cap C)\cup(B\cap D)=[0,1)$

**12)** א. $\phi$ ב. $\{4,5,6\}$

**13)** ללא פתרון.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** א. $A^C=(-\infty,1)$ ב. $B^C=[1,4]$ ג. $C^C=[1,4]$

ד. $D^C=(-\infty,1]\cup[3,4]$

**16)** ראו בסרטון.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** טענו ב.

**19)** שאלת הוכחה.

**20)** שאלת הוכחה.

**21)** שאלת הוכחה.

**22)** שאלת הוכחה.

# המספרים האי-רציונליים

## שאלות

**1)** א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

**2)** א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכיחו שהמספר מתחלק ב-3.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

**3)** א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

**4)** הוכיחו כי $\sqrt{n}$ הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- $n$ טבעי שאינו ריבוע של מספר).

**5)** הוכיחו או הפריכו:
א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.
ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.

**6)** א. הוכיחו כי $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ג. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

**7)** א. יהי $p$ מספר ראשוני ויהיו $a,k$ מספרים טבעיים.
הוכיחו כי $p|a^k \Rightarrow p|a$.
ב. הוכיחו: אם $n \neq N^k$, אז $\sqrt[k]{n}$ הוא מספר אי-רציונלי $(n,k,N \in \mathbb{N})$.

הערת סימון: אם מספר $a$ מתחלק במספר $b$ נסמן $b|a$,
ונאמר גם "$b$ מחלק את $a$".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

# קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות

## שאלות

**1)** נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{n-1}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

**2)** נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{1}{n^4+2n+1}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

**3)** נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{n^4+n^2+3}{2n^4+2n^2+8}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

**4)** נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{[cn]}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\ ,\ 0<c\in\mathbb{R}\right\}$.

א. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמעלה ומצאו את $\sup A$.

ב. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמטה ומצאו את $\inf A$.

**5)** נתונה הקבוצה $A=\left\{n^5-n+4 | n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה במידה והם קיימים.

6) נתונה הקבוצה $A=\{11-4^n | n\in\mathbb{N}\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

7) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{4n-1}{5n} | n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

8) מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצות הבאות, במידה והם קיימים:

א. $A=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n^2} | n\in\mathbb{N}\right\}$

ב. $B=\{x\in\mathbb{Z} \,|\, |x-1|\le 1\}$

ג. $C=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x^2-4}{(x-2)^2}\le 0\right\}$

ד. $D=\left\{x\in\mathbb{R} \,|\, x=1+\frac{n+1}{n+4}\sin\frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{N}\right\}$

9) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה קבוצה של מספרים ממשיים $S$.
הוכיחו שאם קיים לקבוצה חסם עליון אז הוא יחיד.

ב. הוכיחו שלקבוצה הריקה אין חסם עליון.

10) הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $\alpha$ הוא הסופרמום של הקבוצה $A$, אז לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$, קיים איבר $x\in A$, כך ש- $\alpha-\varepsilon<x\le\alpha$.

ב. אם $\beta$ הוא האינפימום של הקבוצה $A$, אז לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$, קיים איבר $x\in A$, כך ש- $\beta\le x<\beta+\varepsilon$.

**11)** הוכיחו את הטענות הבאות:

א. בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר ממשי.
(משפט הצפיפות של הממשיים)

ב. עבור קטעים מהטיפוס $(a,b),[a,b),(-\infty,b)$, לא קיים מקסימום.

ג. עבור קטעים מהטיפוס $[a,\infty),(a,\infty),(-\infty,\infty)$, לא קיים מקסימום.

ד. עבור קטעים מהטיפוס $(a,b),[a,b),(-\infty,b)$, הקצה הימני של הקטע הוא החסם העליון.

ה. אם $S$ היא קבוצה בעלת מקסימום, אז ל- $S$ יש חסם עליון, ומתקיים $\max S=\sup S$.

**12)** תהי $A$ תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$, ויהי $x\in\mathbb{R}$.
נגדיר את המרחק בין $x$ ל- $A$ על ידי: $d(x,A)=\inf\{|x-a| \mid a\in A\}$.
אם $\alpha\in\mathbb{R}$ הוא החסם העליון של $A$, הראו כי $d(\alpha,A)=0$.

**13)** הוכיחו שקבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלמעלה.

**14)** הוכיחו שקיימת קבוצה של מספרים רציונליים, אשר חסומה מלמעלה אך אין לה סופרמום רציונלי.

**15)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נניח ש- $K$ קבוצה של מספרים ממשיים החסומה מלמטה.
נתבונן בקבוצה $-K=\{-x \mid x\in K\}$.
הוכיחו שהקבוצה $-K$ חסומה מלמעלה.

ב. הוכיחו שלכל קבוצה לא-ריקה של מספרים ממשיים, החסומה מלמטה, קיים חסם תחתון.

**16)** תהי $T$ קבוצה חסומה מלעיל של מספרים ממשיים.
תהי $S$ קבוצה חלקית לא ריקה של $T$.
הוכיחו כי:

א. ל- $T$ יש חסם עליון $\sup T$.

ב. ל- $S$ יש חסם עליון $\sup S$.

ג. $\sup S\le\sup T$.

ד. אם $S$ ו- $T$ בעלות מקסימום, אז $\max S\le\max T$.

**17)** יהיו $A$ ו- $B$ שתי קבוצות לא ריקות, חסומות מלעיל, של מספרים ממשיים.

א. נניח כי לכל $x \in A$ קיים $y \in B$, כך ש- $x < y$.
הוכיחו כי $\sup A \leq \sup B$.
האם יהיה נכון לומר ש- $\sup A < \sup B$?

ב. נניח שבנוסף לנתון בסעיף א', נתון כי לכל $y \in B$ קיים $x \in A$, כך ש- $y < x$.
הוכיחו כי $\sup A = \sup B$.

**18)** נניח ש- $A$ ו- $B$ הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים, כך ש- $\sup A = \inf B$.
הוכיחו שלכל מספר $\delta > 0$, קיים מספר $x$ ב- $A$, ומספר $y$ ב- $B$, כך ש- $x + \delta > y$.

**19)** נניח ש- $A$ ו- $B$ הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים, כך ש- $\sup A \leq \inf B$.
נניח שלכל מספר $\delta > 0$ קיים מספר $x$ ב- $A$, ומספר $y$ ב- $B$, כך ש- $x + \delta > y$.
הוכיחו כי $\sup A = \inf B$.

**20)** נניח ש- $A$ קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים, שאין לה מקסימום, ונניח כי $x < \sup A$.
הוכיחו שיש לפחות שני איברים בקבוצה $A$, שנמצאים בין $x$ ל- $\sup A$.

**21)** תהי $S$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים.
הוכיחו כי אם $c \geq 0$, אז ל- $c \cdot S$ יש חסם עליון, ומתקיים $\sup(c \cdot S) = c \cdot \sup S$.

**22)** יהיו $S$ ו- $T$ קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
הוכיחו כי הקבוצה $S + T$ היא בעלת חסם עליון ומתקיים:
$\sup(S + T) = \sup S + \sup T$.

**23)** יהיו $S$ ו- $T$ קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
א. הוכיחו כי הקבוצה $S \cup T$ היא בעלת חסם עליון.
ב. הוכיחו כי $\sup(S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$.

**24)** תהיינה $U, T, S$ קבוצות לא-ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
נניח כי לכל $s \in S$ ולכל $t \in T$ קיים $u \in U$, המקיים את התנאי: $u \geq s + t$.
הוכיחו כי $\sup U \geq \sup T + \sup S$.

**25)** הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $S$ ו-$T$ הן שתי קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים, כך שכל איבר של $S$ אינו גדול משום איבר של $T$, אז קיימים $\sup S, \inf T$, ומתקיים: $\sup S \le \inf T$.

ב. לכל קבוצה לא-ריקה וחסומה S מתקיים: $\inf S \le \sup S$. האם ייתכן שוויון ביניהן? באילו תנאים?

**26)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו והוכיחו את משפט ארכימדס.

ב. נסחו והוכיחו את תכונת ארכימדס.

ג. הוכיחו שלכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי $n$, כך ש- $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

ד. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים $\alpha, \beta$, המקיימים $\alpha < \beta$, קיים מספר טבעי $n$, כך ש-$\alpha < \alpha + \frac{1}{n} < \beta$ וגם $\alpha < \beta - \frac{1}{n} < \beta$.

**27)** תהי $A$ תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל של $A$.
נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$, כך ש-$a_n > \alpha - \frac{1}{n}$.
הוכיחו כי $\alpha$ הוא הסופרמום של $A$.

**28)** הוכיחו שלכל מס' ממשי $c$ **קיים** מספר שלם **יחיד** $m \in \mathbb{Z}$, כך ש-$m \le c < m+1$.
למספר $m$ קוראים הערך השלם של $c$, ומסמנים $m = [c]$.

**29)** יהיו $a$ ו- $b$ שני מספרים ממשיים המקיימים $|a-b| < \frac{1}{n}$, לכל מספר טבעי $n$.
הוכיחו כי $a = b$.

**30)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. לכל $n$ טבעי נגדיר $I_n = [n, \infty)$.
הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

ב. לכל $n$ טבעי נגדיר $J_n = \left[-\frac{1}{n}, \infty\right)$.
הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \ne \phi$.

**31)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. לכל $n$ טבעי נגדיר $I_n=[a_n,b_n]$.

נניח כי $I_{n+1}\subset I_n$ לכל $n$.

הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$.

ב. לכל $n$ טבעי נגדיר $I_n=\left(0,\frac{1}{n}\right)$.

הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

ג. בסעיף ב' התקיים כי $I_{n+1}\subset I_n$ לכל $n$, וכן $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

האם תוצאת סעיף ב' סותרת את תוצאת סעיף א'?

**32)** לכל $n$ טבעי נגדיר $I_n=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$.

הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

## תשובות סופיות

**1)** א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A = \inf A = 0, \sup A = 1$

**2)** א. הקבוצה חסומה. ב. $\max A = \sup A = \frac{1}{4}, \inf A = 0$

**3)** א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A = \inf A = \frac{5}{12}, \sup A = \frac{1}{2}$

**4)** א. הקבוצה חסומה. ב. $\sup A = c, \inf A = [c]$

**5)** א. הקבוצה לא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה על ידי 4. ב. $\min A = 4$

**6)** א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי 7. הקבוצה לא חסומה מלמטה.
ב. $\max A = 7$

**7)** א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי $\frac{4}{5}$, וחסומה מלמטה על ידי $\frac{3}{5}$;
לכן, הקבוצה חסומה. ב. $\sup A = \frac{4}{5}, \min A = \frac{3}{5}$

**8)** א. $\inf A = -1, \max A = \frac{5}{4}$ ב. $\min B = 0, \max B = 2$
ג. $\sup C = 2, \min C = -2$ ד. $\sup D = 2, \inf D = 0$

שאלות **9-32** הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# קבוצה צפופה

## שאלות

1) הוכיחו שקבוצת הממשיים צפופה בקבוצת הממשיים.

2) הוכיחו שקבוצת הרציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.

3) הוכיחו שקבוצת האי-רציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.

4) הוכיחו שהקבוצה $A=\left\{\sqrt{10}q \mid q\in\mathbb{Q}\right\}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$.

5) הוכיחו שהקבוצה $A=\left\{\sqrt{m}-\sqrt{n} \mid m,n\in\mathbb{N}\right\}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$.

6) אפשר להגדיר קבוצה צפופה בממשיים גם כך:
תת-קבוצה $S$ של $\mathbb{R}$ היא צפופה (ב- $\mathbb{R}$),
אם לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים $s\in S$, כך ש- $|s-x|<\varepsilon$.
הוכיחו שאם $S$ תת-קבוצה של $\mathbb{R}$ מקיימת את התכונה,
שלכל $a,b\in R$ קיים $s\in S$, כך ש- $a<s<b$, אז $S$ צפופה ב- $\mathbb{R}$.

7) הוכיחו שהקבוצה $A=\left\{q\sqrt{10} \mid 0<q\in\mathbb{Q}\right\}$ צפופה ב- $[0,1]$.

8) תהי $A$ קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע $(1,\infty)$.
הוכיחו שהקבוצה $B=\left\{\frac{a}{n} \mid a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ צפופה בקטע $(0,1)$.

9) תהי $A$ קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע $[0,1]$.
הוכיחו שהקבוצה $B=\left\{na \mid a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ צפופה בקטע $[0,\infty)$.

10) הוכיחו שקבוצת כל השברים העשרוניים הסופיים שלא מופיעה בהם הספרה 4,
אינה צפופה בקטע $I=[0,1]$.

**11)** תהי $A$ קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע $(1,\infty)$ וצפופה בו.

הוכיחו שהקבוצה $C=\left\{\frac{a}{n^2(a+1)}:a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ אינה צפופה בקטע $[0,1]$.

**12)** תהי $A$ קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע $[0,1]$.

הוכיחו שהקבוצה $C=\left\{\frac{a+1}{n^2}\mid a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ אינה צפופה בקטע $[0,1]$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# הערך השלם

## שאלות

1) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $[x+4]=10$

ב. $[x+4]=-10$

ג. $[x+4]^2=100$

ד. $[2x^2+1]=9$

ה. $[x^2+x-1]=-2$

ו. $[x^2-\ln x+e^x-x^5]=0.5$

2) פתרו את המשוואה $[x+4]=2x+1$.

3) פתרו את המשוואה $[16x^2+7]=8x+6$.

4) פתרו את המשוואה $[x^2+x+4]=2x+6$.

5) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $[|x-4|+x]=4x+4$

ב. $[|x+1|-|x-1|]=x$

6) פתרו את המשוואה $[4+[x+1]]=10$.

7) הוכיחו כי לכל $x$ ממשי ו- $m$ שלם מתקיים $[x+m]=[x]+m$.

8) פתרו את אי-השוויונים הבאים:

א. $[x+4]<10$

ב. $[x+4]>-10$

ג. $[x+4]^2<100$

ד. $[x+4]\le 10$

9) פתרו את אי-השוויונים הבאים:

א. $[x]^2-5[x]+6\le 0$

ב. $[x-1][x-2]+[x+10]>3[x+2]+[2.44]$

10) הוכיחו כי לכל $x$ ו- $y$ ממשיים מתקיים:

א. $[x]+[y]\le[x+y]\le[x]+[y]+1$

ב. $x<y \Rightarrow [x]\le[y]$

## תשובות סופיות

1) א. $6\le x<7$  ב. $-14\le x<-13$  ג. $[6,7)\cup[14,-13)$

ד. $\left(-\sqrt{4.5},-2\right]\cup\left[2,\sqrt{4.5}\right)$  ה. $-1<x<0$  ו. $\phi$

2) $x=2.5,\ 3$

3) $x=\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{8}$

4) $x=-1,\ 2$

5) א. $x=0$  ב. $x=2,\ 0,\ -2$

6) $5\le x<6$

7) שאלת הוכחה.

8) א. $x<6$  ב. $x>-14$  ג. $-14<x<6$  ד. $x<7$

9) א. $2\le x<4$  ב. $x<1$ or $x\ge 5$

10) שאלת הוכחה.

# סימן הסכימה

## שאלות

**1)** כתבו בפירוט את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$ ב. $\sum_{k=1}^{4} 2k$ ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$

ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$ ה. $\sum_{t=1}^{8} tx^t$ ו. $\sum_{k=4}^{10} na_{k+1}$

ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$ ח. $\sum_{k=-1}^{3} \left(k^2+1\right)$ ט. $\sum_{\ell=1}^{3} \left(\ell^2 - x_{2\ell} - 4\right)$

**2)** כתבו את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$

ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$

ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

ד. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8$

ה. $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+...+43\cdot 44$

ו. $3\cdot 2+6\cdot 3+9\cdot 4+12\cdot 5+15\cdot 6+18\cdot 7+21\cdot 8$

ז. $5^2+7^2+...+27^2$

ח. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{10\cdot 11}$

ט. $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\frac{18}{243}$

י. $4+\frac{8}{5}+\frac{12}{25}+\frac{16}{125}+\frac{20}{625}$

**3)** חשבו את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$ ב. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k+4k^2\right)$ ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$

ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3-k}{k+1}$ ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$ ו. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k^2+1\right)(k-2)$

* תוכלו להיעזר בנוסחאות הבאות (שמוכחות בפרק זה תחת הנושא 'אינדוקציה'):

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

**4)** חשבו את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{20}\frac{5\cdot 4^k+8^k}{2^k}$   ב. $\sum_{k=1}^{11}\frac{2\cdot 4^{k+2}+10^k}{0.4^k}$   ג. $\sum_{k=10}^{20}2^{2k+10}$

* תוכלו להיעזר בנוסחה הבאה: $(a\neq 1)$ $\sum_{k=1}^{n}a^k=\frac{a\left(a^n-1\right)}{a-1}$.

**5)** חשבו את הסכומים הבאים:

א. $1^2+2^2+3^2+...+20^2$

ב. $4^2+5^2+6^2+...+24^2$

ג. $2^2+4^2+6^2+...+22^2$

ד. $1^2+3^2+5^2+...+17^2$

**6)** הוכיחו כי:

א. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k+4}}{k+2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{2k+6}}{k+3}$

ב. $\sum_{k=4}^{n-3}\frac{4k+17+2^{2k}}{k+1}=\sum_{k=8}^{n+1}\frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$

**7)** חשבו את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

א. $\sum_{4}^{11}k^2$   ב. $\sum_{10}^{20}4^{2k}$

## תשובות סופיות

1) א. $4^0+4^1+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+4^8+4^9+4^{10}$

ב. $2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4$

ג. $4a_4+4a_5+4a_6+4a_7+4a_8+4a_9+4a_{10}$

ד. $4\cdot7^2a_7+4\cdot8^2a_8+4\cdot9^2a_9+4\cdot10^2a_{10}+4\cdot11^2a_{11}+4\cdot7^2a_7$

ה. $1x^1+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+7x^7+8x^8$

ו. $na_5+na_6+na_7+na_8+na_9+na_{10}+na_{11}$

ז. $4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n$

ח. $\left((-1)^2+1\right)+\left(0^2+1\right)+\left(1^2+1\right)+\left(2^2+1\right)+\left(3^2+1\right)$

ט. $\left(1^2-x_2-4\right)+\left(2^2-x_4-4\right)+\left(3^2-x_6-4\right)$

2) א. $\sum_{k=0}^{7}2^k$ ב. $\sum_{k=1}^{10}2k$ ג. $\sum_{k=0}^{9}(2k+1)$ ד. $\sum_{k=1}^{7}k(k+1)$

ה. $\sum_{k=1}^{22}(2k-1)2k$ ו. $\sum_{k=1}^{7}3k(k+1)$ ז. $\sum_{n=3}^{14}(2n-1)^2$

ח. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$ ט. $\sum_{k=1}^{5}\frac{4k-2}{3^k}$ י. $\sum_{k=1}^{4}\frac{4k}{5^{k-1}}$

3) א. 220 ב. 1650 ג. 4360

ד. 4360 ה. 28 ו. 4545

4) א. $5\cdot\left(2^{21}-2\right)+\frac{4}{3}\left(4^{20}-1\right)$ ב. $32\cdot\frac{10\left(10^{11}-1\right)}{10-1}+\frac{25\left(25^{11}-1\right)}{25-1}$

ג. $2^{10}\left[\frac{4\left(4^{20}-1\right)}{4-1}-\frac{4\left(4^{9}-1\right)}{4-1}\right]$

5) א. 2870 ב. 4886 ג. 2024 ד. 969

6) שאלת הוכחה.

7) א. $\frac{8(8+1)(2\cdot8+1)}{6}+6\cdot\frac{8(8+1)}{2}+9\cdot8$ ב. $4^{18}\cdot\frac{16\left(16^{11}-1\right)}{16-1}$

# אינדוקציה

## שאלות

1) הוכיחו באינדוקציה כי $4\cdot 10^n+14\cdot 19^n$ מתחלק ב-9 לכל $n$ טבעי.

2) הוכיחו באינדוקציה כי $\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$ $\left(k,n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}\right)$.

3) מצאו את ה-$n$ הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים $2^n\ge n^2$,
והוכיחו באינדוקציה שעבור כל $n$ טבעי החל ממנו מתקיים אי-השוויון הנ"ל.

4) הוכיחו את הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו באינדוקציה כי $(1+x)^n\ge 1+nx$, לכל $n$ טבעי ולכל $x\ge -1$ ממשי.
הערה: אי השוויון הנ"ל נקרא אי שוויון ברנולי.

ב. הוכיחו כי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, לכל $n$ טבעי.
רמז: היעזרו בתוצאת סעיף א'.

5) הוכיחו באינדוקציה כי $(1-x)^n<\dfrac{1}{1+xn}$ לכל $0<x<1,\ n\in\mathbb{N}$.

6) הוכיחו באינדוקציה כי $n!\le\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
רמז: היעזרו במהלך הפתרון באי-שוויון ברנולי.

7) נתון כי $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$.
הוכיחו באינדוקציה שלכל $n$ טבעי מתקיים:
א. $a_n\le 2$
ב. $a_n\le a_{n+1}$
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

8) הוכיחו באינדוקציה שלכל $n$ טבעי,
אם $a_1=-1,\ a_2=0$ , $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$,
אז $a_n=n^2-2n$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

**9)** הוכיחו באינדוקציה שלכל $n$ טבעי,

אם $a_1=1,\ a_2=1$ , $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$ ,

אז $a_n=\frac{1}{6}\cdot 3^n-\frac{1}{2}(-1)^n$ .

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיביות.

**10)** הוכיחו באינדוקציה כי $4^n-1$ מתחלק ב-15, לכל $n$ טבעי **זוגי**.

**11)** הוכיחו באינדוקציה כי $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & a^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}^n$ $\left(n\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{R}\right)$ .

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו כפל מטריצות (אלגברה לינארית).

**הערה**: תרגילים נוספים באינדוקציה תמצאו תחת הנושא "אי שוויונים מפורסמים" בפרק זה, בשאלה 1 ובשאלה 3 סעיף ו'.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

# אי שוויונים מפורסמים

## שאלות

**1)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים $x, y$ המקיימים $x<1, y>1$, מתקיים $x+y>xy+1$.

ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n\geq 2$ טבעי:
אם $a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n=1$, אז $a_1+a_2+\ldots+a_n\geq n$ $\left(0<a_i\in\mathbb{R}\right)$.

**2)** נסחו והוכיחו את **אי שוויון הממוצעים**.

**3)** הוכיחו שלכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים:

א. $|a+b|\leq|a|+|b|$ **(אי שוויון המשולש)**

ב. $|a-b|\leq|a|+|b|$

ג. $|a-b|\geq|a|-|b|,\ \ |a-b|\geq|b|-|a|$

ד. $|a-b|\geq\left||a|-|b|\right|$

ה. $|a+b|\geq\left||a|-|b|\right|$

ו. $|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$ $\left(a_i\in\mathbb{R}\right)$

**4)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו והוכיחו את **אי שוויון קושי-שוורץ**.

ב. הוכיחו כי אם $a_1+..+a_n=1$ אז $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geq\frac{1}{n}$ $\left(n\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{R}\right)$.

הערה: **אי שוויון ברנולי** מוכח בפרק זה תחת הנושא "אינדוקציה".
נוכיח שם גם כמה מסקנות מעניינות ממנו.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

# פתרון אי שוויונים

## שאלות

פתרו את אי השוויונים הבאים:

1) $x^2-12x>-32$

2) $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

3) $2x^2+2x+24\geq 0$

4) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

5) $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

6) $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

7) $|x+2|<3$

8) $|6-2x|<x$

9) $|2x+3|<8<|5-x|$

10) $x^2-6|x+1|-1>0$

11) $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

12) $\sqrt{x+3}<7$

13) $\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$

14) $\sqrt{x^2+x-6}<x-3$

הערה: לא מומלץ להתעכב יותר מידי זמן על פתרון אי שוויונים.

## תשובות סופיות

1) $x>8$ או $x<4$

2) $x\geq 11$ או $x\leq 7$

3) כל $x$

4) $x>3$ או $-3<x<1$

5) $\frac{1}{2}\leq x<5$

6) $1\leq x\leq 6$

7) $-5<x<-1$

8) $2<x<6$

9) $-5\frac{1}{2}<x<-3$

10) $x>7$ או $x<-5$

11) $x>4$ או $x<-1$

12) $-3\leq x<46$

13) $x<0.472$

14) אין פתרון.

# עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון

## שאלות

**1)** חשבן, ללא מחשבון:

א. $\frac{4!\cdot 7!}{0!\cdot 10!}$

ב. $\frac{14!\cdot 20!}{10!\cdot 17!}$

**2)** הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2-n)=n!$

ב. $(n-1)!n^2+n!=(n+1)!$

ג. $\frac{n^2-2}{(n+1)!}+\frac{(n+2)^2}{(n+2)!}=\frac{1}{(n-1)!}$

**3)** חשבן:

א. $\binom{5}{3}$ ב. $\binom{4}{1}$ ג. $\binom{10}{0}$ ד. $\binom{14}{11}$

**4)** הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $1=\binom{n}{0}=\binom{n}{n}$ ב. $\binom{n-1}{k-1}=\frac{k}{n}\binom{n}{k}$ ג. $\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$

**5)** הוכיחו באינדוקציה שלכל $n\geq 2$ טבעי מתקיים:

$$\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-2}=\binom{n}{2}$$

**6)** רשמו את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $(a+b)^4$ ב. $(x+2)^5$ ג. $(x-4)^3$

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$ לכל $0\leq k\leq n$, $k,n\in\mathbb{N}$.

ב. נסחו והוכיחו (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

**8)** הוכיחו שלכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים:

א. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$

ב. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

ג. $\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+9\binom{n}{2}-\ldots+3^n\binom{n}{n}=4^n$

**9)** מצאו את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום $\left(\frac{1}{2a}+2a^2\right)^{10}$.

**10)** בפיתוח של $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{a}\right)^{12}$, ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא $a^7$.
מצאו את מקום האיבר ואת ערכו.

**11)** מצאו, בפיתוח של $\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)^{10}$, איבר שאינו מכיל את $x$, וחשבו את ערכו.

**12)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו, בפיתוח של $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a}+\frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$, את המקדם של $\frac{1}{x}$.

ב. חשבו את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם $a=b=1$.

**13)** המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום $(a+b)^n$, הוא 15.
מצאו את $n$.

## תשובות סופיות

1) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{1001}{285}$

2) שאלת הוכחה.

3) א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 364

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) א. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

ב. $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

ג. $(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) $T_4 = \frac{15}{2a}$

10) $T_7 = 924a^7$

11) $T_9 = 45$

12) א. $\frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6}$ ב. $2^{18}$

13) $n = 6$

# שדות

## שאלות

**1)** בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור ($\oplus$) וכפל ($\otimes$) על $R$.
בדקו, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

א. $x \oplus y = x + y + 4$
$x \otimes y = 2xy$

ב. $x \oplus y = x + y$
$x \otimes y = 2xy$

ג. $x \oplus y = y$
$x \otimes y = y^2$

**2)** נתונה הקבוצה $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

הוכיחו שהקבוצה $Q[\sqrt{2}]$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.
ב. הוכיחו שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.
ג. הוכיחו שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.
ד. הוכיחו שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

**4)** יהיו $a, b$ איברים בשדה.

א. הוכיחו כי $a + a = a \Leftarrow a = 0$.
ב. הוכיחו כי $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
ג. הוכיחו כי $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

**5)** יהיו $a$ ו- $b$ איברים של שדה.
הוכיחו כי:

א. $(-1)\cdot a=-a$

ב. $(-a)b=a(-b)=-ab$

**6)** הוכיחו שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.
כלומר, הוכיחו כי $ab=cb\ \Rightarrow\ a=c$ , לכל $a,b,c$ , בשדה $(b\neq 0)$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 2 - אי שוויונים אלגבריים

### תוכן העניינים

# אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

**פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:**

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

**פעולות אסורות לביצור בפתרון אי-שוויון:**

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $45x-26>109$

**2)** $6x>2(3x-1)$

**3)** $2(x-5)\ge\frac{1}{2}(4x+6)$

**4)** $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

**5)** $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

**6)** $4(6x-8)<8(3x-4)$

**7)** $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\ge 12-x$

**8)** $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

## תשובות סופיות:

1) $x>3$
2) כל $x$
3) אף $x$
4) $x>-2$
5) $x<5$
6) אף $x$
7) $x\geq 12$
8) $x>-13$

# אי-שוויונים ממעלה שנייה:

## סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2+bx+c \gtrless 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x^2 < 144$

2) $x^2 - 12x > -32$

3) $(x+2)(x+5) < 0$

4) $(x+2)(x+4) < 35$

5) $-x^2 + 13x + 30 < 0$

6) $(x-3)(x-7) \geq 8x - 56$

7) $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$

8) $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$

9) $-3x^2 + 12x > 0$

10) $x^2 - 10x + 25 > 0$

11) $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$

12) $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$

## תשובות סופיות:

1) $-12 < x < 12$

2) $x < 4$ , $x > 8$

3) $-5 < x < -2$

4) $-9 < x < 3$

5) $x < -2$ , $x > 15$

6) $x \leq 7$ , $x \geq 11$

7) $-4 < x < 8$

8) $-4 \leq x \leq 0$

9) $0 < x < 4$

10) $x > 5$ , $x < 5$

11) $x < 3$ , $x > 5$

12) כל $x$

# אי-שוויונים ממעלה שלישית:

## סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3-4x^2+4x+1>0$ , $x^4+2x^2+1<0$ וכו'.

בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.

לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

2) $x(x^2+x+1)>0$

3) $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

4) $x^3-25x\ge 0$

5) $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

6) $(x^2+8x+20)(3x-5)\le 0$

7) $(x^2-x-6)(x-1)<0$

8) $x^3-6x^2+9x\le 0$

9) $(x^2+6)(x+3)>0$

10) $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

## תשובות סופיות:

1) $1<x<2\ ,\ x>3$

2) $x>0$

3) $-2\le x\le -1\ ,\ x\ge \frac{1}{2}$

4) $-5\le x\le 0\ ,\ x\ge 5$

5) $x>2$

6) $x\le 1\frac{2}{3}$

7) $x<-2\ ,\ 1<x<3$

8) $x\le 0\ ,\ x=3$

9) $x>-3$

10) $x<1\ ,\ 2<x<4$

# אי-שוויונים עם מנה:

## סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (או $\frac{f(x)}{g(x)}<0$) נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$ ו-$g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4}<0$ בו: $f(x)=2x+4$ ו-$g(x)=x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

### הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

2) $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

3) $\frac{1}{x^2-16}>0$

4) $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

5) $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

6) $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

7) $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

8) $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

9) $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

10) $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

## תשובות סופיות:

1) $-3<x<1\ ,\ x>3$

2) $x<-\frac{2}{3}\ ,\ x\geq-\frac{1}{2}$

3) $x<-4\ ,\ x>4$

4) $2<x<3\ ,\ x>3$

5) $\frac{1}{2}\leq x<5$

6) $x>1$

7) $x>-2$

8) $2<x<3$

9) $1\leq x\leq 6$

10) $x<2\ ,\ x>6$

# אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

## סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שיווינים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a<b$ וגם $b<c$ , ניתן לכתוב: $a<b<c$.

מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שיווינים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $3<x+1<5$

2) $0<\frac{1}{x+4}<2$

3) $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

4) $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

5) $6x-38\le x-3\le 5x+7$

6) $6<\frac{2x+10}{3}\le\frac{7x-20}{5}$

7) $-1\le\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

8) $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

## תשובות סופיות:

1) $2<x<4$

2) $x>-3\frac{1}{2}$

3) $x>0$

4) $x<2\frac{2}{5}\ ,x>2\frac{2}{3}$

5) $-2.5\le x\le 7$

6) $x\ge 10$

7) $1\le x<13$

8) $\phi$

# שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x \le -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \le 5 \cup 0 < x < 8\}$

2) $x(x+5)-3x+15 \le 2x-1-x(4-x)$

3) $\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \le 0$

4) $\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$

5) $\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \ge 0$

6) $x(x+3)(2x-5) < 0$

7) $\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$

8) $\frac{5-2x}{(x-8)^2} \le 0$

9) $\frac{x-3}{x^2+2} > 0$

10) $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$

11) $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$

12) $\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$

13) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$

14) $\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \ge \frac{x}{x-4}-\frac{x}{x-2}$

15) $6 < 5x-x^2 \cap x^2 > 3x+10$

16) $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$

17) $1 < \frac{x-1}{x-4} \le 2$

18) לאלו ערכי $x$ נמצאת הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה: $g(x)=\frac{x+1}{x+3}$ ?

## תשובות סופיות:

1) $-2<x\le-\frac{3}{4}$

2) $x\le-4$

3) $-4\le x<2\ ,\ 3\le x$

4) $x<-7\ ,\ -\frac{1}{3}<x<2\ ,\ x>5$

5) $-1<x\le1.5\ ,\ 4<x\le12$

6) $x<-3\ ,\ 0<x<2.5$

7) $x<-1\ ,\ 2<x<6\ ,\ x>6$

8) $2.5\le x<8\ ,\ x>8$

9) $x>3$

10) $x<-3\ ,\ 0<x<1\ ,\ x>4$

11) $-1<x<0\ ,\ 1<x<3\ ,\ x>3$

12) $x>7$

13) $x<-2\ ,\ 2<x<4$

14) $x\le0\ ,\ 1\le x<2\ ,\ x>4$

15) אף $x$

16) $x\ne1$

17) $x\ge7$

18) $-3<x<-\frac{3}{5}\ ,\ x>3$

# תחום הגדרה:

## שאלות:

**1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-4}$

ב. $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

ג. $f(x)=\sqrt{12x-x^2-x^3}$

ד. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2-4}}$

ה. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-x}$

ו. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

**2)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

ב. $f(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג. $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ד. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

**3)** תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1\le x\le 4$.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$.

**4)** תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}$ הוא $x>2$ , $x\le -2$.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$.

**5)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+6}-a}$ , ($a$ פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות $a$ את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{x+5}}$.
ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים.
מצא את תחום הערכים האפשריים של הפרמטר $a$.

## תשובות סופיות:

1) א. $x \ge 1\frac{1}{3}$ ב. $x \le -1 , x \ge 6$ ג. $x \le -4 , 0 \le x \le 3$

ד. $-5 \le x < -2 , x > 2$ ה. $-2 \le x < 2 , x > 2$ ו. $x \le -\frac{1}{3} , 1 \le x < \frac{3}{2} , x > \frac{3}{2}$

2) א. $x \ge 7$ ב. $-6 \le x \ne -2$ ג. $x \le -1\frac{1}{2} \;,\; x \ge 1$

ד. $-2 \le x \ne 1 \;,\; x \le -3$.

3) $a = 5$.

4) $a = 2$.

5) א. $x \ge a^2 - 6$ ב. $0 < a \le 1$.

# אי שוויונים עם ערך מוחלט:

## סיכום כללי:

**כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:**

| **מקרה** | $\|x\|<a$ | $\|x\|>a$ |
|---|---|---|
| **פתרון** | $-a<x<a$ | $x<-a \ \bigcap \ x>a$ |

**כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:**

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

## שאלות:

**1)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x+2|<3$ ב. $|2x+1|>7$

ג. $|6-2x|<x$ ד. $|2x+1|-3x>4$

**2)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1<|4-3x|<7$ ב. $|2x+3|<8<|5-x|$

**3)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x^2+6x-4|<12$ ב. $|x^2+x-10|>3x-2$

ג. $|x^2-3x|<4$ ד. $|6x^2-7x-4|>1$

ה. $x^2-6|x|+5\le 0$ ו. $x^2-6|x+1|-1>0$

**4)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x-3|+|2x+2|>7$

ב. $|x+8|<11-|1-3x|$

ג. $|3-2x|-11>4-|6+x|$

ד. $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

ה. $|5+4x|-|3-x|+\left|4-\frac{1}{2}x\right|\le 22$

ו. $|x+3|+|x^2-5x+4|<19$

**5)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\ge 3$

ב. $1\le\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\le 2$

ג. $\frac{|x-6|+8x}{x-12}\le 12$

ד. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|>5$

**6)** פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

א. $\sqrt{x^2-|x-12|}<x$

ב. $2-\sqrt{1-x}\le|x+2|-3$

ג. $\sqrt{|2x+1|-x-1}\le 4-|3x|$

ד. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$

## תשובות סופיות:

1) א. $-5<x<1$
ב. $3<x$ או $x<-4$
ג. $2<x<6$
ד. $x<-1$.

2) א. $1\frac{2}{3}<x<3\frac{2}{3}$ או $-1<x<1$
ב. $-5\frac{1}{2}<x<-3$

3) א. $-2<x<2$ או $-8<x<-4$
ב. $4<x$ או $x<2$
ג. $-1<x<4$
ד. $x<-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}\ ,\ x>\frac{5}{3}$
ה. $1\le x\le 5$ או $-5\le x\le -1$
ו. $x<-5\ ,\ x>7$

4) א. $2<x$ או $x<-2$
ב. $-1<x<1$
ג. $4<x$ או $x<-6$
ד. $4<x$ או $x<-1$
ה. $-7\frac{3}{7}\le x\le 4$
ו. $-2<x<6$.

5) א. $\frac{7}{6}\le x<2\ ,\ x>2$
ב. $0\le x\le\frac{2}{3}\ ,\ x\ge 6$
ג. $x<12\ ,\ x\ge 46$
ד. $\frac{1}{2}<x<1\ ,\ 1<x<2\ ,\ 2<x\le 4$

6) א. $x=-1\ ,\ x\ge 3\ ,\ x\ne 12$
ב. $x\le\frac{-15+\sqrt{33}}{2}$
ג. $0\le x\le 1\ ,\ -1\le x\le -\frac{2}{3}$
ד. $-1<x<\sqrt[3]{4}$

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 3 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

תוכן העניינים

# משולש ישר זווית:

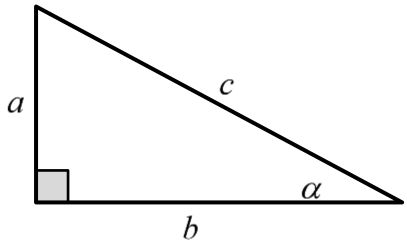
## סיכום כללי:

### הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:

$$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

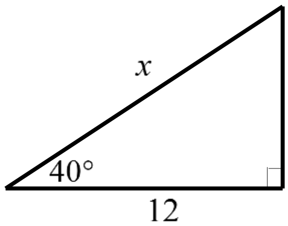



משפט פיתגורס: $a^2+b^2=c^2$

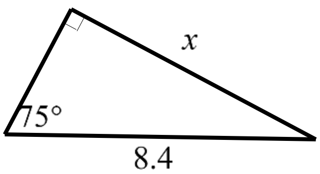
## שאלות:

**1)** מצא את ערכו של $x$ / $\alpha$ במשולשים ישרי הזווית הבאים:

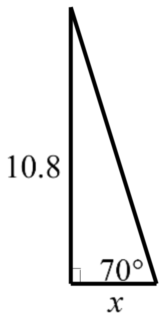
א.



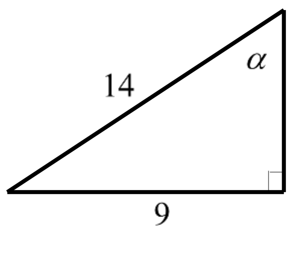

ב.



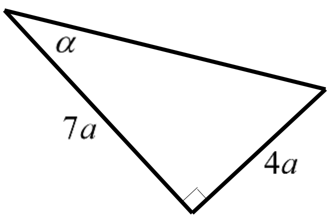

ג.



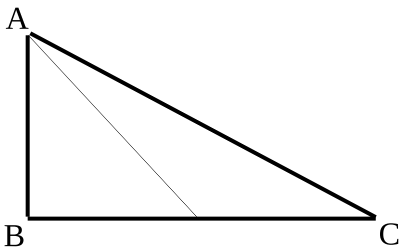

ד.



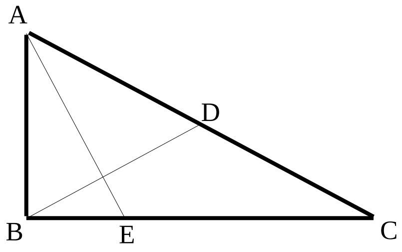

ה.




**2)** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\measuredangle B=90^\circ)$.
AD הוא התיכון לניצב BC.
נתון: $\measuredangle C=28^\circ$ , 6 ס"מ = AB.
מצא את AD ואת $\measuredangle BAD$.

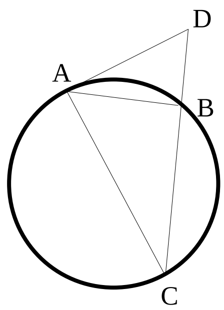


**3)** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\measuredangle B=90°)$. BD הוא התיכון ליתר ו-AE הוא חוצה הזווית $\measuredangle A$.
נתון: BD = 5.6 ס״מ, BC = 8 ס״מ.
מצא את BE ואת $\measuredangle BAE$.



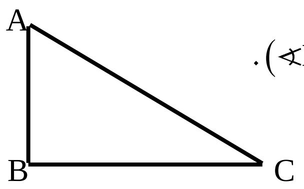

**4)** מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסוניו 24 ס״מ ו-18 ס״מ.

**5)** המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל.
המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D.
נתון: BD=4 ס״מ, $\measuredangle DAB=32°$.
מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

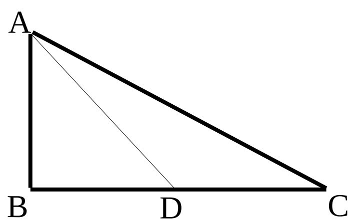



**6)** במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס״מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא $34.92°$. מצא את שטח המשולש.

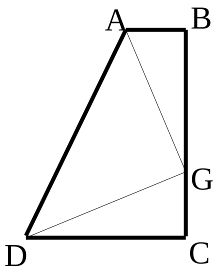
**7)** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\measuredangle B=90°)$.
נתון: $\measuredangle A=\alpha$ , $AB=a$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו-$a$ את היקף המשולש.



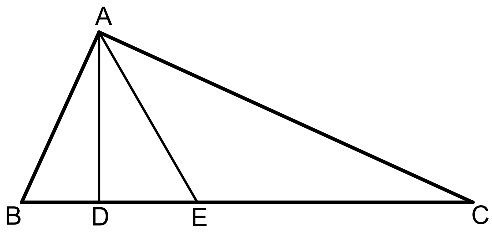

**8)** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\measuredangle B=90°)$.
AD הוא התיכון לניצב BC.
נתון: $\measuredangle C=\alpha$ , $AB=b$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו-$b$ את אורכי הקטעים BD ו-AD.




**9)** במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא $\alpha$ ואורך חוצה זווית זו הוא $k$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו-$k$ את שטח המשולש ואת אורך היתר.



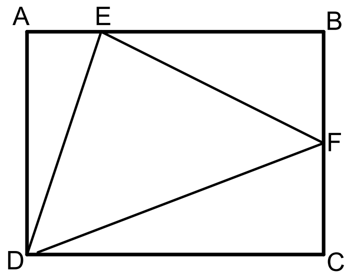

**10)** טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית $(\measuredangle B = \measuredangle C = 90°)$.
הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$.
נתון: $AG = DG = m$ , $\measuredangle BAG = \beta$.
הבע באמצעות $\beta$ ו- $m$ את שטח הטרפז.




**11)** המשולש ABC הוא ישר זווית $(\measuredangle A = 90°)$.
הקטעים AD ו-AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית.
מסמנים: $DE = k$ , $\measuredangle DAE = \alpha$.

א. הבע באמצעות $k$ ו- $\alpha$ את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי: $\alpha = 30$ ו- $k = 2$.




**12)** במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו-F הנמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה כך ש-E מקיימת: $3AE = BE$ ו-F היא אמצע הצלע BC.
אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE.
מעבירים את הקטעים EF , DF ו-DE כך שנוצר במשולש DEF.

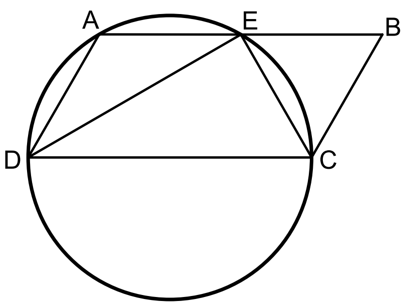
א. סמן ב- $t$ את אורך הקטע AE והבע באמצעות $t$ את אורכי צלעות המשולש DEF.

ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

**13)** משולש שווה שוקיים שאורך שוקו $k$ וזווית הבסיס שלו היא $\beta$ חוסם מעגל.
הבע באמצעות $\beta$ ו- $k$ את רדיוס המעגל.

**14)** בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא $b$ והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא $\alpha$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו- $b$ את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

**הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:**



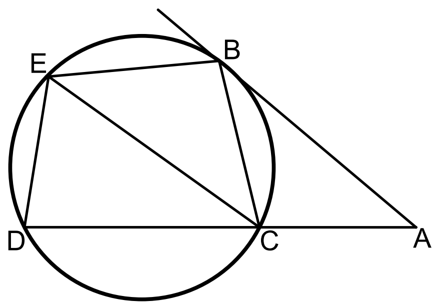

**15)** דרך הקודקודים A , C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E, $(AE = BE)$.

נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.

א. הוכח כי המיתר CE חוצה את זוויות C.

ב. רדיוס המעגל יסומן ב- $R$.
הבע באמצעות $R$ את היקף המקבילית.

ג. מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא $16\sqrt{3}$סמ"ר.




**16)** מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD.
מעבירים את המיתרים BC ו-BE אשר זהים באורכם.
כמו כן מעבירים את המיתר DE.
אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.

א. הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.

ב. הוכח כי: $2\cdot\sphericalangle BEC = \sphericalangle EDC$ .

ג. נתונים: $\sphericalangle A = 40^\circ$ , 6 ס"מ = AC, 9 ס"מ = AB , 8 ס"מ = CE.
חשב את שטח המרובע ABEC.

## תשובות סופיות:

1) א. $x=15.665$ ב. $x=8.114$ ג. $x=3.931$ ד. $\alpha=40.005^\circ$ ה. $\alpha=29.745^\circ$.

2) $\sphericalangle BAD=43.24^\circ$ , AD = 8.236 ס"מ.

3) $\sphericalangle BAE=22.792^\circ$ , BE = 3.294 ס"מ.

4) $106.26^\circ$ , $106.26^\circ$ , $73.74^\circ$ , $73.74^\circ$.

5) $R=$ 6.04 ס"מ.

6) $S=$ 28.618 סמ"ר.

7) $P=a\left(1+\tan\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)$.

8) $BD=\dfrac{b}{2\tan\alpha}$ , $AD=\sqrt{b^2+\dfrac{b^2}{4\tan^2\alpha}}$.

9) $S=\dfrac{k^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\tan\alpha}{2}$ , $AC=\dfrac{k\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

10) $\dfrac{(m\sin\beta+m\cos\beta)^2}{2}$.

11) א. $S=\dfrac{k^2}{\cos2\alpha\tan^2\alpha}$ ב. 24 סמ"ר.

12) א. $DF=t\sqrt{18.25}$ , $EF=t\sqrt{11.25}$ , $DE=t\sqrt{10}$ ב. $47.14^\circ$ , $51^\circ$ , $81.86^\circ$.

13) $R=k\cos\beta\tan\dfrac{\beta}{2}$.

14) $S=\dfrac{1}{2}b^2\sin\alpha(1+\sin\alpha)$ , $\dfrac{1}{2}b\sin\alpha+\dfrac{\frac{1}{2}b\sin\alpha}{\tan\frac{\alpha}{2}}$.

15) א. שאלת הוכחה. ב. $6R$ ג. 4 ס"מ.

16) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 32.78 סמ"ר.

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 4 - זהויות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

# זהויות יסוד:

## סיכום כללי:

| | | |
|---|---|---|
| קשרים בין פונקציות | $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ , $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ | $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$<br>$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$ |
| זוויות משלימות ל- $90°$ | $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$ | $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$ |
| | $\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$ | $\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$ |
| קשרים בין פונקציות | $\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ | $\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ |

## שאלות:

### הוכחת זהויות יסודיות:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

1) $\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$

2) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$

3) $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\tan\alpha$

4) $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=1+\cos^2\alpha$

5) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=2$

6) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

7) $\frac{\cos(90°-\alpha)}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

8) $\sin^2(\alpha+45°)+\sin^2(45°-\alpha)=1$

9) $\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\tan\alpha$

10) $\frac{\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha}=\tan^3\alpha$

11) $\frac{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\cot\alpha$

12) $\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=1$

13) $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\cot\alpha$

14) $\frac{\sin^3\alpha}{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}=\tan\alpha$

15) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$

16) $\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$

## הוכחות מתקדמות:

**17)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=2+4\cot^2\alpha$.

**18)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

**19)** הוכח את הזהות הבאה: $(\cot\alpha-\tan\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=(1+\cot^2\alpha)(1+\tan\alpha)(1-\tan\alpha)$.

**20)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\cot^4\alpha$.

**21)** הוכח את הזהות הבאה: $1-\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha)=\cos^4\alpha$.

**22)** הוכח את הזהות הבאה: $\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)^2=4+4\cot^2\alpha$.

**23)** הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

**24)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\tan\alpha\tan\beta$.

## הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:

**25)** נתון כי: $\sin\alpha+\cos\alpha=k$.

הבע באמצעות $k$ את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

ב. $\sin\alpha-\cos\alpha$.

ג. $\tan\alpha+\cot\alpha$.

ד. $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

**26)** נתון כי: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

מבלי למצוא את $\alpha$ חשב את: $\tan^2\alpha-2\cot^2\alpha$.

**27)** נתון כי: $\tan\alpha=\sqrt{7}$.

מבלי למצוא את $\alpha$ חשב את: $\dfrac{\sqrt{7}\sin\alpha+6\cos\alpha}{\sqrt{28}\sin\alpha-\cos\alpha}$.

**28)** חשב את ערך המכפלה הבאה: $\tan 1°\cdot\tan 2°\cdot\tan 3°\cdot\dots\cdot\tan 88°\cdot\tan 89°$.

## תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) שאלת הוכחה.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) שאלת הוכחה.
22) שאלת הוכחה.
23) שאלת הוכחה.
24) שאלת הוכחה.
25) א. $\frac{k^2-1}{2}$ ב. $\pm\sqrt{2-k^2}$ ג. $\frac{2}{k^2-1}$ ד. $\frac{k}{2}\left(3-k^2\right)$
26) -7.75
27) 1
28) 1

# ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

## סיכום כללי:

| | $\alpha=0°$ | $\alpha=30°$ | $\alpha=45°$ | $\alpha=60°$ | $\alpha=90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\tan\alpha$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\phi$ |
| $\cot\alpha$ | $\phi$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |

**הערות:**

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של $0°$ ו- $90°$ תִּלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי: $\frac{\sqrt{0}}{2},\frac{\sqrt{1}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{4}}{2}$ אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל.
  עבור שורת ה- $\cos\alpha$ יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי $\tan\alpha$ ולסובב עבור ערכי $\cot\alpha$.

## שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

**1)** $\sin 30°+\cos 30°$.

**2)** $\frac{\sin 30°\cdot\cos 30°}{\sin 60°}$.

**3)** $\tan 45°+\frac{\sin 45°}{\cos 45°}$.

4) $\frac{1+\cos 60°}{2\sin 60°}$ .

5) $\cos^2 45° + \sin^2 30°$ .

6) $\frac{\tan^2 60° \cdot \cos^2 30°}{\cos^2 60°}$ .

7) $\frac{\tan 30° \cdot \cot 60° - \cot 45° \cdot \tan 45°}{4\left(\sin^2 60° - \frac{1}{4}\right)}$ .

8) $\frac{27\cot^4 60°}{\sin 30° \cdot \cos 45° \cdot \tan 60°}$ .

## תשובות סופיות:

1) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2) $\frac{1}{2}$

3) $2$

4) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

5) $\frac{3}{4}$

6) $9$

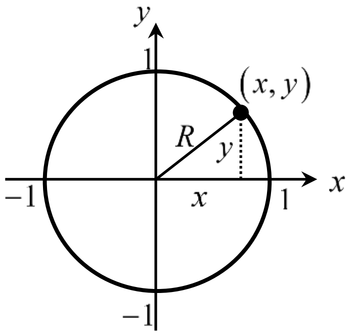
7) $-\frac{1}{3}$

8) $2\sqrt{6}$

# מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

## סיכום כללי:

### הגדרת מעגל היחידה:




- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות $(1,0)$ , $(0,1)$ , $(-1,0)$ , $(0,-1)$ מתאימות לזוויות של $0°$ , $90°$ , $180°$ , $270°$ .

### הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

| רביע | סינוס | קוסינוס | טנגנס |
|---|---|---|---|
| II<br>III<br>VI | $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$<br>$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$<br>$\sin(-a)=-\sin\alpha$ | $\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha$<br>$\cos(180^o+\alpha)=-\cos\alpha$<br>$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ | $\tan(180^o-\alpha)=-\tan\alpha$<br>$\tan(180^o+\alpha)=\tan\alpha$<br>$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ |
| סימנים | $\begin{array}{c\|c} + & + \\ \hline - & - \end{array}$ | $\begin{array}{c\|c} - & + \\ \hline - & + \end{array}$ | $\begin{array}{c\|c} - & + \\ \hline + & - \end{array}$ |

### זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{array}{l}\tan(\alpha+180°k)=\tan\alpha \\ \cot(\alpha+180°k)=\cot\alpha\end{array}} \quad , \quad \boxed{\begin{array}{l}\sin(\alpha+360°k)=\sin\alpha \\ \cos(\alpha+360°k)=\cos\alpha\end{array}}$$

כאשר $k$ הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

## שאלות:

**1)** העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120°$
ב. $\cos 150°$
ג. $\tan 160°$
ד. $\cot 130°$
ה. $\sin 215°$
ו. $\cos 245°$
ז. $\tan 230°$
ח. $\cot 200°$
ט. $\sin 300°$
י. $\cos 310°$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150°$
ב. $\cos 210°$
ג. $\tan 120°$
ד. $\sin 330°$
ה. $\tan 225°$
ו. $\sin 315°$
ז. $\cos 120°$
ח. $\tan(-30°)$
ט. $\cos(-45°)$
י. $\sin 510°$
יא. $\cos 930°$
יב. $\tan(-225°)$

**3)** חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

א. $\left(\sin 240° \cdot \tan 150° + \cos(-60°)\right)^2$.
ב. $8\sin^2 150° \cdot \tan 135° - 2 \cdot \sin 135° \cdot \cos(-135°)$.
ג. $\frac{\cot 225°}{\sin(-225°) - \cos 135°} + \tan^2 210°$.

**4)** הוכח כי אם $\alpha$, $\beta$ ו- $\gamma$ הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

א. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$.
ב. $\sin\left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}$.

## תשועות סופיות:

1) א. $\sin 60^\circ$   ב. $-\cos 30^\circ$   ג. $-\tan 20^\circ$   ד. $-\cot 50^\circ$
ה. $-\sin 35^\circ$   ו. $-\cos 65^\circ$   ז. $\tan 50^\circ$   ח. $\cot 20^\circ$
ט. $-\sin 60^\circ$   י. $\cos 50^\circ$

2) א. $\frac{1}{2}$   ב. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$   ג. $-\sqrt{3}$   ד. $-\frac{1}{2}$
ה. $1$   ו. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$   ז. $-\frac{1}{2}$   ח. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
ט. $\frac{\sqrt{2}}{2}$   י. $\frac{1}{2}$   יא. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$   יב. $-1$

3) א. $1$   ב. $-1$   ג. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$.

4) שאלת הוכחה.

# סכום והפרש זוויות:

## סיכום כללי:

סכום והפרש עבור $\sin(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cos(\alpha\pm\beta)$ יחושב לפי:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta)&=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha\\ \cos(\alpha\pm\beta)&=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}.$$

סכום והפרש עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha\pm\beta)&=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\\ \cot(\alpha\pm\beta)&=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}\end{aligned}}.$$

**הערה:**

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

א. $\sin 75^\circ$ ב. $\sin 15^\circ$ ג. $\sin 105^\circ$

ד. $\sin(-15^\circ)$ ה. $\cos 75^\circ$ ו. $\cos 15^\circ$

ז. $\cos(-105^\circ)$ ח. $\cos 165^\circ$ ט. $\cos(-195^\circ)$

**2)** חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin 65^\circ\cos 25^\circ+\sin 25^\circ\cos 65^\circ$.

ב. $5\cos 50^\circ\cos 20^\circ+5\sin 50^\circ\sin 20^\circ$.

**3)** הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\sin(60°+\alpha)+\sin(60°-\alpha)=\sqrt{3}\cos\alpha$.

ב. $\cos(45°-\alpha)-\cos(45°+\alpha)=\sqrt{2}\sin\alpha$.

ג. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

ד. $\tan\alpha-\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

**4)** נתון: $\cos\beta=\frac{8}{17}$ , $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ ו- $\alpha,\beta$ זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של $\alpha$ ו- $\beta$ חשב:

א. $\sin(\alpha+\beta)$.

ב. $\cos(\alpha+\beta)$.

ג. $\tan(\alpha+\beta)$.

**5)** הוכח את הזהות: $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$.

**6)** הוכח את הזהות: $(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin2\alpha+\cos2\alpha)=\sin3\alpha+\cos\alpha$.

**7)** הוכח את הזהות: $\tan7\alpha-\tan5\alpha-\tan2\alpha=\tan7\alpha\tan5\alpha\tan2\alpha$.

**8)** הוכח את הזהות: $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

**9)** הוכח את הזהות: $\cot\alpha-\cot\beta=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

**10)** הוכח את הזהות הבאה:

$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

**(11** הוכח כי מתקיים: $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$.

**(12** הוכח כי מתקיים: $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$.

**(13** נתון כי: $\sin 76^\circ = m$. הבע את $\sin 31^\circ$ באמצעות $m$.

**(14** הזוויות $\alpha$ ו- $\beta$ הן זוויות חדות.
נתון כי: $\tan\alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$ ו- $\tan\beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$.
הראה כי מתקיים: $\alpha + \beta = 60^\circ$.

**(15** היעזר בנוסחה: $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$ ומצא את $\tan x$ ו- $\tan y$
אם ידוע כי: $\tan(x+y) = -3$ ו- $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$. הבחן בין שני מקרים.

## תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ב. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ג. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ד. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ה. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ו. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ז. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ח. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ט. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) א. $1$ ב. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

3) שאלת הוכחה.

4) א. $\frac{84}{85}$ ב. $-\frac{13}{85}$ ג. $-6\frac{6}{13}$

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(m-\sqrt{1-m^2}\right)$.

15) שאלת הוכחה.

16) 1 ו-2 או $-\frac{1}{2}$ ו- $-1$.

# זווית כפולה:

## סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha\end{array}}$$

## שאלות:

**1)** הוכח את הזהויות הבאות:

א. $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$

ב. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$

ג. $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$

ד. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

ה. $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\cot 2\alpha$

ו. $\frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2}\cot 2\alpha$

ז. $\cos^2 2\alpha = 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha + 1$

ח. $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

**2)** הוכח את הזהות: $\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\sin 3\alpha$
לפי: $\sin(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

**3)** הוכח את הזהות: $\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\cos 3\alpha$
לפי: $\cos(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

**4)** נתונה זווית חדה $\alpha$ המקיימת: $\sin\alpha = \frac{40}{41}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\cos\alpha$.

ב. $\tan\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

ה. $\tan 2\alpha$.

5) נתונה זווית חדה $\alpha$ המקיימת: $\tan\alpha = \frac{5}{12}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\sin\alpha$.
ב. $\cos\alpha$.
ג. $\sin 2\alpha$.
ד. $\cos 2\alpha$.

6) נתונה זווית $\alpha$ ברביע הראשון וזווית $\beta$ ברביע השני המקיימות: $\sin\alpha = \frac{5}{13}$
ו- $\cos\beta = -0.8$. מבלי למצוא את $\alpha$ ו- $\beta$ חשב את הביטויים הבאים:

א. $\sin(\alpha+\beta)$.
ב. $\cos(\alpha+\beta)$.
ג. $\sin(2\alpha+\beta)$.

7) נתון כי $\sin\alpha + \cos\alpha = 1.2$ עבור $0° < \alpha < 90°$. חשב את $\sin 2\alpha$.

8) פשט את הביטוי הבא: $\sqrt{\frac{1+\cos 8\alpha}{2}}$.

9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 16° \cos 16°}{3-6\sin^2 29°}$.

10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin^2 78° - \cos^2 78°}{\sin 66°}$.

11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{5\tan 15°\left(1-2\cos^2 15°\right)}{1-\tan^2 15°}$.

## תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) א. $\frac{9}{41}$ ב. $4\frac{4}{9}$ ג. $\frac{720}{1681}$ ד. $-\frac{1519}{1681}$
ה. $-\frac{720}{1519}$
5) א. $\frac{5}{13}$ ב. $\frac{12}{13}$ ג. $\frac{120}{169}$ ד. $\frac{119}{169}$
6) א. $\frac{16}{65}$ ב. $-\frac{63}{65}$ ג. $-\frac{123}{845}$
7) 0.44.
8) $\cos 4\alpha$.
9) $\frac{1}{6}$.
10) 1.
11) ‎-1.25.

# סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

## סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

**הערה:**

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

## שאלות:

1) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 5\alpha+\sin 3\alpha=2\sin 4\alpha\cos\alpha$.

2) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha-\sin 2\alpha=2\sin 2.5\alpha\cos 4.5\alpha$.

3) הוכח את הזהות הבאה: $\cos\alpha+\cos 5\alpha=2\sin 2\alpha\cos 3\alpha$.

4) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 5\alpha-\cos 2\alpha=-2\sin 3.5\alpha\cos 1.5\alpha$.

5) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha$.

6) הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

7) הוכח את הזהות הבאה: $\sin(2\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin\beta$.

8) הוכח את הזהות הבאה: $\dfrac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\sin 4\alpha-\sin 2\alpha}=2\cos\alpha$.

9) הוכח את הזהות הבאה: $2\sin\alpha = \frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha}$.

10) הוכח את הזהות הבאה: $\tan 2\alpha = \frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$.

11) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{2\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} = \tan\alpha + \tan 3\alpha$.

12) פשט את הביטוי: $\frac{1+\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}$ ומצא את ערכו מבלי להיעזר במחשבון אם ידוע כי $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$.

13) נתון כי $\alpha$ ו- $\beta$ הן זוויות חדות המקיימות: $\sin\alpha = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ ו- $\sin\beta = \frac{n^2-m^2}{m^2+n^2}$.
הראה כי: $\alpha + \beta = 90°$.

14) היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\cos 6\alpha \cos 2\alpha - \cos 5\alpha \cos\alpha = -\sin 7\alpha \sin\alpha$.

15) היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\sin 4\alpha \sin 2\alpha - \sin 5\alpha \sin\alpha + \cos 3\alpha \cos\alpha = \cos 2\alpha$.

16) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 52.5° \cdot \sin 7.5°$.

17) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 35° \sin 55°}{\cos 40° \cos 20° - 0.25}$.

18) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\cos 20° \cos 40° \cos 80°$.

19) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 5° \cdot \sin 25° \cdot \sin 35° \cdot \sin 55° \cdot \sin 65° \cdot \sin 85°$.

## תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) $-\frac{7}{9}$.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.
17) $1$.
18) $\frac{1}{8}$.
19) $\frac{1}{64}$.

# מכפלת פונקציות:

## סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום:

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

## שאלות:

1) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}(\sin 8\alpha+\sin 6\alpha)$.

2) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 11\alpha\sin 3\alpha=\frac{1}{2}(\sin 14\alpha-\sin 8\alpha)$.

3) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 4\alpha\cos 10\alpha=\frac{1}{2}(\cos 6\alpha+\cos 14\alpha)$.

4) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 3\alpha\sin 7\alpha=\frac{1}{2}(\cos 4\alpha-\cos 10\alpha)$.

5) הוכח את הזהות הבאה: $2\sin 7\alpha\sin 2\alpha+\cos 9\alpha=\cos 5\alpha$.

6) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cos\alpha=\sin 3\alpha\cos 8\alpha$.

7) הוכח את הזהות הבאה: $\sin\alpha\sin 3\alpha=\cos 2\alpha-\cos 3\alpha\cos\alpha$.

8) הוכח את הזהות הבאה: $2\left(\sin^2\beta-\sin^2\alpha\right)=\cos 2\alpha-\cos 2\beta$.

9) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{2}{\cot\beta-\tan\alpha}=\tan(\alpha+\beta)-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

## תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 5 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

### תוכן העניינים

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 6 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

### תוכן העניינים

# תחום הגדרה של פונקציה

## שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

**1)** $y=x^3-x^2-4x+1$

**2)** $y=\frac{1}{x^2-4}$

**3)** $y=\frac{4x+1}{x^2+1}$

**4)** $y=\frac{1}{x^3-x}$

**5)** $y=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

**6)** $y=\sqrt{x-4}$

**7)** $y=\sqrt{x^2+x-2}$

**8)** $y=\sqrt[3]{x^2+x-1}$

**9)** $y=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

**10)** $y=\ln\left(x^2+x-2\right)$

**11)** $y=\log x+\frac{1}{\log x}$

**12)** $y=e^{x^2+x+1}$

**13)** $y=\log_x\left(x+4\right)$

**14)** $y=\tan\left(10x\right)$

**15)** $y=\cot\left(4x\right)$

**16)** $y=\arctan\left(x+4\right)$

**17)** $y=\arcsin\left(x-4\right)$

**18)** $y=\arccos\left(x+1\right)$

## תשובות סופיות

1) כל $x$.

2) $x \neq \pm 2$

3) כל $x$.

4) $x \neq 0,1,-1$

5) $x \neq 2,-1$

6) $x \geq 4$

7) $x \leq -2 \, , x \geq 1$

8) כל $x$.

9) $-1 < x < 1$

10) $x < -2 \, , x > 1$

11) $x > 0 \, , x \neq 1$

12) כל $x$.

13) $x > 0 \, , x \neq 1$

14) $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

15) $x \neq \frac{\pi k}{4}$

16) כל $x$.

17) $3 < x < 5$

18) $-2 < x < 0$

# הרכבת פונקציות

## שאלות

**1)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x-4$ , $g(x)=x^2$ , $h(x)=\frac{4}{x}$.

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$

ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

**2)** נתון: $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$.

חשבו $f(f(x))$ עבור $x=3$.

**3)** נתון: $g(x)=\frac{5-x}{x-7}$ $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$.

חשבו $f(g(x))+g(f(x))$ עבור $x=8$.

**4)** נתון: $g(x)=\ln x$, $f(x)=x^2-7x$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x=e^2$.

**5)** נתון: $g(x)=\ln x$ $f(x)=e^{2x}$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x=2$.

**6)** נתון: $g(x)=\begin{cases} x+3 & x>4 \\ 3x & x\le 4 \end{cases}$ , $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ x^2 & x\le 0 \end{cases}$.

חשבו $f(g(x)), g(f(x))$.

**7)** נתונות הפונקציות:

$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ -x^2-2x-1 & x\ge 1 \end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\le -1 \\ \sqrt{x+1} & x>-1 \end{cases}$.

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x)=g(f(x))$.

**8)** נתונות הפונקציות:

$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ -x^2-2x-1 & x\ge 1 \end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\le -1 \\ \sqrt{x+1} & x>-1 \end{cases}$.

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x)=f\left(g(x)\right)$.

ב. נתון ש- $n\in\mathbb{Z}$ ו- $h(n)\notin\mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

1. $n\le -3$
2. $n\ge 1$
3. $n$ אי-זוגי שלילי.
4. אף תשובה אינה נכונה.

**9)** נתון $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

מצאו את $f^n(x)=\underbrace{f(f(f(...(f(x)))}_{n\text{ times}}$.

## תשובות סופיות

1) א. $-3$ ב. $4$ ג. $x^2-4$ ד. $\frac{4}{x-4}$ ה. $x-8$ ו. $x$

2) $3$

3) $\frac{69}{13}$

4) $-10$

5) $4$

6) $g(f(x))=\begin{cases} x^2+3 & x<2 \\ 3x^2 & -2\le x\le 0 \\ \frac{1}{x}+3 & 0<x<\frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x\ge\frac{1}{4} \end{cases}$, $f(g(x))=\begin{cases} \frac{1}{x+3} & x>4 \\ \frac{1}{3x} & 0<x\le 4 \\ (3x)^2 & x\le 0 \end{cases}$

7) $z(x)=\begin{cases} 4x^2+16x+12 & x<-1.5 \\ -4x^2-20x-25 & -1.5\le x\le -1 \\ x-3 & -1<x<0 \\ -x-2-2\sqrt{x+1} & x\ge 0 \end{cases}$

8) א. $h(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-3} & x<-\sqrt{3} \\ 2x^2-4 & -\sqrt{3}\le x<1 \\ -2x^2-4x+2 & x\ge 1 \end{cases}$ ב. $n\le -3$

9) $f^n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

# הפונקציה ההפוכה

## שאלות

בתרגילים **1-4** הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

**1)** $f(x)=\frac{x-1}{3}$ **2)** $f(x)=\frac{x+1}{x}$

**3)** $f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$ **4)** $f(x)=x^2-4 \quad (x\ge 0)$

בתרגילים **5-7**, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע.
בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

**5)** $f(x)=x+\frac{1}{x}$ **6)** $f(x)=x^2-x$ **7)** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

בתרגילים **8-10**, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע,
אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

**8)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ **9)** $y=\frac{x^2+3}{2x-1}$ **10)** $f(x)=\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^3$

**11)** נתונה $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$.
האם הפונקציה היא חח"ע?
מצאו את התמונה של הפונקציה.

**12)** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{x-1}{3}$

ב. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{x+1}{x}$

ג. $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$ $\quad f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$

ד. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2-4$

**13)** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה.
בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

ב. $f:\mathbb{R}\to(0,1]$ $\qquad g(x)=\frac{1}{x^2+1}$

ג. $f:(1,\infty)\to(0,1]$ $\qquad h(x)=\frac{1}{x^2+1}$

**14)** תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$ ,
ותהי $h:A\to C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x)=g(f(x))$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f$ ו- $g$ חח"ע, אז $h$ חח"ע.
ב. אם $f$ ו- $g$ חח"ע, אז $h$ על.
ג. אם $f$ ו- $g$ על, אז $h$ על.
ד. אם $f$ ו- $g$ על, אז $h$ חח"ע.
ה. אם $f$ חח"ע ו- $g$ על, אז $h$ חח"ע.
ו. אם $f$ חח"ע ו- $g$ על, אז $h$ על.
ז. אם $f$ על ו- $g$ חח"ע, אז $h$ חח"ע.
ח. אם $f$ על ו- $g$ חח"ע, אז $h$ על.

**15)** תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$ ,
ותהי $h:A\to C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x)=g(f(x))$.
נתון כי $h$ על.
הוכיחו או הפריכו:

א. $f$ חח"ע.
ב. $f$ על.
ג. $g$ חח"ע.
ד. $g$ על.

**16)** תהיינה שתי פונקציות $f:A\rightarrow B,\ \ g:B\rightarrow C$ ,

ותהי $h:A\rightarrow C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f(x)\right)$ .

נתון כי $h$ חח"ע.

הוכיחו או הפריכו :

א. $g$ על.

ב. $f$ על.

ג. $g$ חח"ע.

ד. $f$ חח"ע.

## תשובות סופיות

1) $f^{-1}(x)=3x+1$ , כל $y$.

2) $f^{-1}(x)=\frac{1}{x-1}$ , $y\neq 1$

3) $y\neq 3$ , $f^{-1}(x)=\frac{2x-2}{x-3}$

4) $y\geq -4$ , $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}$

5) לא חח"ע. תמונה: $y\leq -2$ או $y\geq 2$.

6) לא חח"ע. תמונה: $y\geq -\frac{1}{4}$.

7) לא חח"ע. תמונה $0\leq y\leq 1$ .

8) כן חח"ע. תמונה: $y>0$ . פונקציה הפוכה: $x>0$ $f^{-1}(x)=1-\frac{1}{x^2}$ .

9) לא חח"ע. תמונה: $y\geq 2.3$ או $y\leq -1.3$

10) כן חח"ע. תמונה: $y\neq 1$ . פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x)=\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}$ .

11) לא חח"ע. תמונה: $y\geq \frac{6}{\sqrt{3}}$ .

12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: $\mathbb{R}$ ; על.
ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ; לא על.
ג. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ ; על.
ד. תחום הגדרה $[0,\infty)$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $[-4,\infty)$ ; לא על.

13) א. תחום הגדרה וטווח: $\mathbb{R}$, תמונה: $(0,1]$ ; לא על
ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}$, טווח ותמונה: $(0,1]$ ; על.
ג. תחום הגדרה $[1,\infty)$, טווח $(0,1]$, תמונה: $(0,0.5)$ ; לא על.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

# פונקציה זוגית ואי זוגית

## שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות **1-8** הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

**1)** $y=4x^3$ **2)** $y=x^4+x^{10}$ **3)** $y=1$

**4)** $y=\frac{1}{x}$ **5)** $y=x^2+\sin^2 x$ **6)** $y=2^x$

**7)** $y=\ln x+x^2$ **8)** $y=\sin x\cdot\cos x$

**9)** נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
נסמן: $k(x)=-f(x),\ z(x)=f(x^2)$.
בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות $k,z$, האם היא זוגית או אי-זוגית.

**10)** נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ופונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
נסמן: $z(x)=-g(x^3)$ ו- $k(x)=-f(x^3)$.
טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.
טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.
איזו טענה נכונה?

**11)** נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונתונה פונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
נסמן: $k(x)=f(-x)+x^{11}g(|x|)$ , $z(x)=-g(-4x)\cdot f(x^4)$
בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות $z,k$, האם היא זוגית או אי-זוגית.

**12)** נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$ ומקיימת $|f(x)|<1$.
נתון כי $g(x)$ פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.
הוכיחו שהפונקציה $z(x)=g(x)\ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)$ היא אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$.

**13)** הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית

ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

**14)** הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.

ב. מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.

ה. הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ו. הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.

ז. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל $x$ היא פונקציית האפס.

**15)** הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

נגדיר $z(x)=\left(f(x)\right)^n$ כאשר $n>1$ טבעי.

קבעו האם הפונקציה $z$ היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

**16)** נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל $x$.

נגדיר: $f_{even}(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f_{odd}(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

א. הוכיחו כי $f_{odd}(x)$ היא פונקציה אי-זוגית ו- $f_{even}(x)$ היא פונקציה זוגית.

ב. הוכיחו כי $f(x)=f_{odd}(x)+f_{even}(x)$ והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.

ג. הציגו את הפונקציה $f(x)=x^2+x+1$ כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

**17)** הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $f$ פונקציה אי-זוגית אז $f(0)=0$.

ב. אם $f$ פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב- $x=0$ אז $f(0)=0$.

**18)** הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הפונקציה $f(x)=\cos x$ היא זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)=\sin x$ היא אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)=\tan x$ היא אי-זוגית.

ד. הפונקציה $f(x)=\cot x$ היא אי-זוגית.

**19)** נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע $(-a,a)$ $(a>0)$.

הוכיחו כי גם $f^{-1}$ פונקציה אי-זוגית.

**20)** הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי זוגיות:

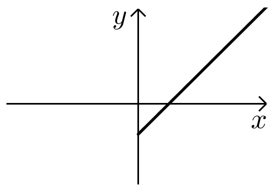
א. $y=\arctan x$

ב. $y=\arcsin x$

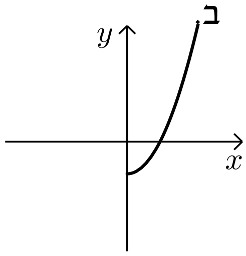
**21)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל $x$.

השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

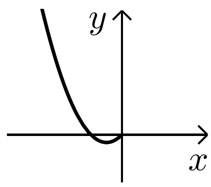
א.



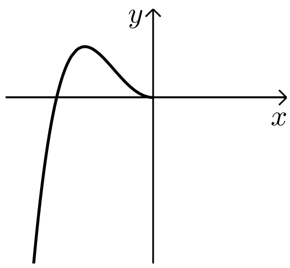

ב.




ג.

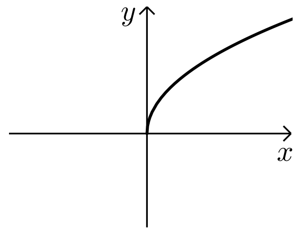



ד.

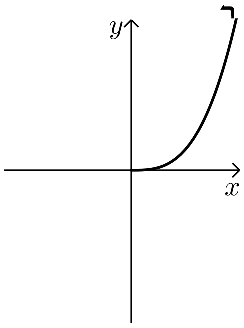


**22)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל $x$.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

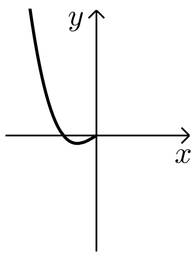
א.



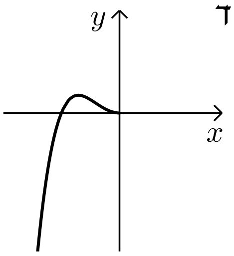

ב.



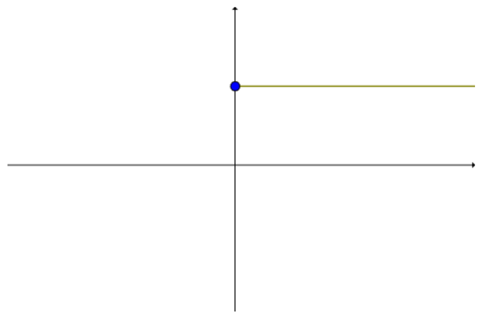

ג.

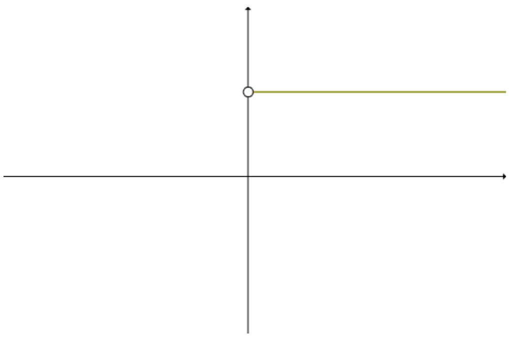



ד.




**23)** השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.





## תשובות סופיות

שאלות **1-8** : זוגית : **2,3,5,8** ; אי- זוגית : **1,4** ; כללית : **6,7**.

**9)** $k$ אי-זוגית, $z$ זוגית.

**10)** טענה ב'.

**11)** $k$ אי-זוגית, $z$ זוגית.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** כאשר $n$ זוגי – זוגית, וכאשר $n$ אי-זוגי – אי-זוגית.

**16)** א.+ב. שאלת הוכחה. ג. $f(x)=\underbrace{x}_{odd}+\underbrace{x^2+1}_{even}$

**17)** שאלת הוכחה.

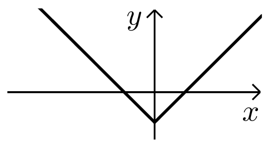
**18)** שאלת הוכחה.

**19)** שאלת הוכחה.

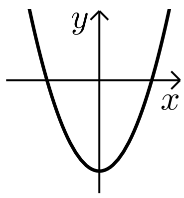
**20)** שאלת הוכחה.

**21)** להלן הגרפים :

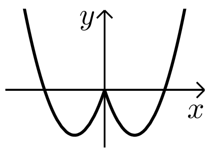
א.



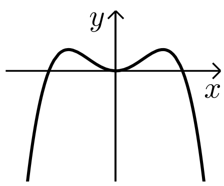
ב.



ג.

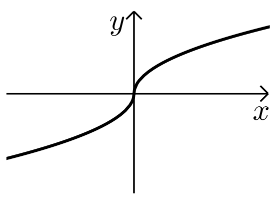


ד.

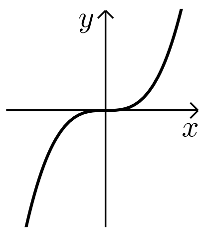


**22)** להלן הגרפים :

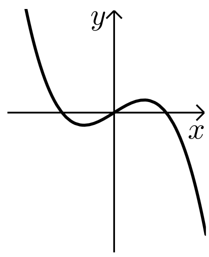
א.



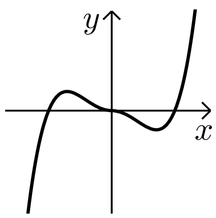
ב.



ג.



ד.



**23)** ראו בסרטון.

# פונקציה מחזורית

## שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-20**:

**1)** $y=1+10\sin(0.5x+4)$

**2)** $y=1+14\cos 20x$

**3)** $y=-4+20\tan 4x$

**4)** $y=-1+14\sec 2x$

**5)** $y=\sin^2 4x$

**6)** $y=\cos^2 2x$

**7)** $y=\cos^4 x-\sin^4 x$

**8)** $y=(\sin x+\cos x)^2$

**9)** $y=\cos^4 x+\sin^4 x$

**10)** $y=\cot^2 x$

**11)** $y=\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{10}$

**12)** $y=\sin 4x+\sin 14x$

**13)** $y=\sin 4x+\sin 14x+\sin x$

**14)** $y=\cos 2x\cos x$

**15)** $y=\sin^3 x$

**16)** $y=\sin^4 x$

**17)** $y=\frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}$

**18)** $y=|\sin x|$

**19)** $y=\sin^2 x+\cos^2 x$

**20)** $y=\cot x-\tan x$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות **21-26** אינן מחזוריות:

**21)** $y=x+\sin x$

**22)** $y=x+\cos x$

**23)** $y=x\sin x$

**24)** $y=x^2\cos x$

**25)** $y=\frac{\sin x}{x}$

**26)** $y=\cos 5x+\cos\sqrt{5}x$

הערה: בשאלות **21** ו-**22** נדרש ידע בחקירת פונקציה.

**27)** הוכיחו:

אם $f(x)$ מחזורית בעלת מחזור $p$,

אז $y=a+b\cdot f(cx+d)$ מחזורית בעלת מחזור $\frac{p}{c}$.

**28)** הוכיחו: אם $T$ הוא מחזור של $f(x)$, אז לכל $n$ שלם $f(x+nT)=f(x)$.

**29)** נתון כי $f, g$ מוגדרות לכל $x$ ובעלת מחזור $p_1, p_2$, בהתאמה.

נתון כי היחס $\frac{p_1}{p_2}$ הוא מספר רציונלי.

הוכיחו כי גם הפונקציות $(g \neq 0)$ $\frac{f}{g}$, $f \cdot g$, $f \pm g$ הן מחזוריות.

**30)** נתונה הפונקציה $f(x) = x - [x]$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?

ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

**31)** נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית $g(x)$, המוגדרת לכל $x$,
שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ בקטע $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור $f$.

**32)** נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית $g(x)$, המוגדרת לכל $x$,
שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ ב-$[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור $g$.

## תשובות סופיות

**1)** $4\pi$    **2)** $\frac{\pi}{10}$    **3)** $\frac{\pi}{4}$    **4)** $\pi$    **5)** $\frac{\pi}{4}$

**6)** $\frac{\pi}{2}$    **7)** $\pi$    **8)** $\pi$    **9)** $\frac{\pi}{2}$    **10)** $\pi$

**11)** $40\pi$    **12)** $\pi$    **13)** $2\pi$    **14)** $2\pi$    **15)** $2\pi$

**16)** $\pi$    **17)** $\pi$    **18)** $\pi$

**19)** הפונקציה היא למעשה $y=1$ , כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית.
כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

**20)** $\frac{\pi}{2}$

**21)** שאלת הוכחה.

**22)** שאלת הוכחה.

**23)** שאלת הוכחה.

**24)** שאלת הוכחה.

**25)** שאלת הוכחה.

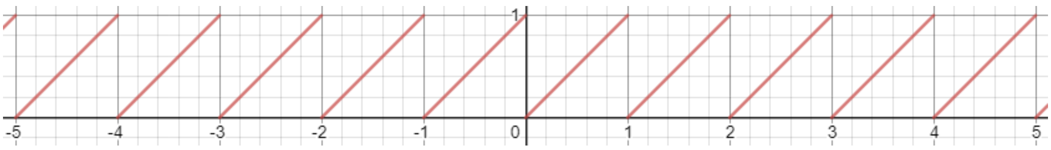
**26)** שאלת הוכחה.

**27)** שאלת הוכחה.

**28)** שאלת הוכחה.

**29)** שאלת הוכחה.

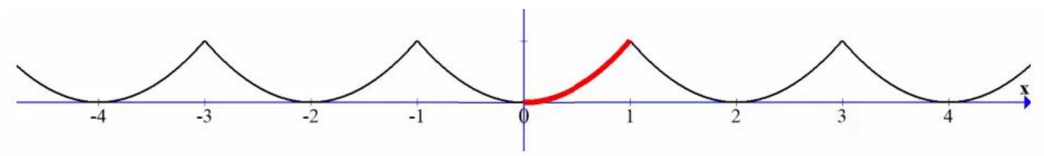
**30)** א.




ב. 1      ג. שאלת הוכחה.

**31)** $g(x)=x-k,\ k-1\le x\le k+1$ עבור $k$ שלם, זוגי.

**32)** $g(x)=(x-k)^2,\ k-1\le x\le k+1$ עבור $k$ שלם, זוגי.



# פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

## שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות **4-1** כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

**1)** $y=|x-2|$

**2)** $y=3|x+1|$

**3)** $y=x^2+2|x-1|$

**4)** $y=\frac{|x|}{x}$

**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 4 \\ -x & x<0 \end{cases}$ .

א. חשבו $f(1),\ f(4),\ f(-4),\ f(0),\ f(7)$ .

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

## תשובות סופיות

**1)** $y=\begin{cases} x-2 & x\ge 2 \\ 2-x & x<2 \end{cases}$

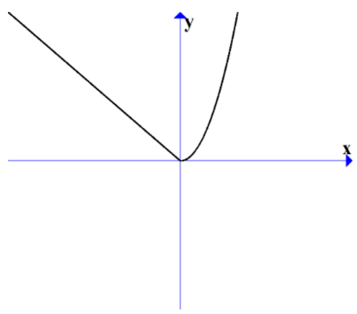
**2)** $y=\begin{cases} 3x+3 & x\ge -1 \\ -3x-3 & x<-1 \end{cases}$

**3)** $y=\begin{cases} x^2+2x-2 & x\ge 1 \\ x^2-2x+2 & x<1 \end{cases}$

**4)** $y=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

**5)** א. $f(1)=1,\ f(4)=16,\ f(-4)=4,\ f(0)=0,\ f(7)=\text{undefind}$

ב.




ג. כללית.

# תרגילים משולבים

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>1 \\ x^3+1 & -1\le x\le 1 \\ x+1 & x<-1 \end{cases}$.

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על $\mathbb{R}$.

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

**2)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x} & x>1 \\ x^5+1 & -1\le x\le 1 \\ x+1 & x<-1 \end{cases}$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.
קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על $\mathbb{R}$.

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

**3)** נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , זוגית ומונוטונית עולה ממש,
ופונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.
נסמן: $z(x)=-g\left(x^3\right)$ ו- $k(x)=-f\left(x^3\right)$.
טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ג': $h(x)=k(x)z(x)$ זוגית.
מי מבין הטענות נכונה?

**4)** נתונות שתי פונקציות, $f,g:[0,1]\to[0,1]$ .
נתון ש- $f$ מונוטונית עולה ממש, ואילו $g$ מונוטונית יורדת חלש,
אך אינה יורדת ממש.
תהי $h(x)=f\left(g(x)\right)$.
איזו טענה נכונה?
א. $h$ יורדת חלש.
ב. $h$ עולה ממש.
ג. $h$ עולה חלש, אך אינה עולה ממש.
ד. $h$ אינה חסומה בהכרח.

**5)** נתונות הפונקציות $g(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<0 \\ -x^2-2x-1 & x\geq 0\end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases} x+4 & x\leq 0 \\ \sqrt{x} & x>0\end{cases}$ .
תהי $h(x)=f(g(x))$ .
א. מצאו את $h$ בקטע $[-2,0)$.
ב. קבעו האם $h$ חח"ע בקטע $[-2,0)$.
ג. קבעו האם $h$ חסומה בקטע $[-2,0)$.
ד. קבעו האם $h:[-2,0)\to[0,4]$ היא על.
* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

**6)** נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$ : $f(x)=x^3,\ \ g(x)=(-1)^{\lfloor x\rfloor}$ .
קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.
הפונקציה $h(x)=f\left(g(x)\right)$ היא:
א. חסומה.
ב. אי-זוגית.
ג. חח"ע.
ד. מונוטונית.

**7)** נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$ : $f(x)=x^3,\ g(x)=-\lfloor x \rfloor$ .

א. בדקו את מונוטוניות $z(x)=f\left(g(x)\right)$ .

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x)=g\left(f(x)\right)$ .

ג. בדקו האם $h(x)=\sqrt[3]{f(x)}-g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a<b \Leftarrow f(a)\geq f(b)$ , אז הפונקציה $f$ יורדת חלש.

**8)** נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$ :
$$f(x)=\left(3\lfloor x \rfloor\right)^3+27\lfloor x \rfloor$$
$$g(x)=f(x)+x^3-28$$
.

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה $f$ עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה $g$ עולה ממש וחח"ע.

**9)** מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ ,

וקבעו את תחום הגדרתה.

הוכיחו שהפונקציה על $\mathbb{R}$ .

הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

**10)** חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}$ .

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

**11)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$ .

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

## תשובות סופיות

**1)** א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.

**2)** אף טענה אינה נכונה.

**3)** טענה ב' נכונה.

**4)** טענה א' נכונה.

**5)** א. $h(x)=x^2$ ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.

**6)** א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.

**7)** א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.

**8)** שאלת הוכחה.

**9)** $f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ ; תחום הגדרתה: כל $x$.

**10)** ראו באתר.

**11)** א. $-1\le x\le 2$ ב. $0\le y\le \frac{3}{2}$ ג. שאלת הוכחה.
ד. $-1\le x<\frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2}<x\le 2$ ירידה.

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 7 - גבול של פונקציה

### תוכן העניינים

# הצבה

## שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 4} x^2+x+1$

ב. $\lim\limits_{x\to 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim\limits_{x\to 100} 20$

## תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

# צמצום

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^7-x}{x-1}$

4) $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

5) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-5x+2}{6x^2-5x+1}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

7) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

8) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

9) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^3-4x^2+x-4}$

10) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[5]{x}+1}{x+1}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{10}{8.5}$ 3) 6 4) $n-1$ 5) -3

6) 32 7) 3 8) 27 9) $\frac{8}{17}$ 10) $\frac{1}{5}$

# הכפלה בצמוד

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}$

2) $4$

3) $-\frac{1}{12}$

4) $\frac{3}{8}$

5) $\frac{1}{6}$

6) $\frac{3}{4}$

7) $\frac{1}{3}$

8) $-\frac{8}{3}$

9) $\frac{1}{2}$

# גבולות טריגונומטריים

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$):

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{4x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin 2x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

10) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{x^2-1}$

11) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

12) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$

13) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}$

14) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 4x}{\sin 10x}$

15) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

16) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2 x}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{2}$ 5) $\frac{1}{2}$

6) $\frac{1}{2}$ 7) $\frac{1}{8}$ 8) $4$ 9) $\frac{1}{4}$

10) $-\frac{1}{2}$ 11) $\cos a$ 12) $-\sin a$ 13) $\frac{1}{\cos^2 a}$

14) $\frac{4}{10}$ 15) $\frac{1}{2}$ 16) $\frac{2}{\pi}$ 17) $1$

18) $\frac{-1}{12}$

### זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\begin{cases} \sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ \sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} \\ \cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2} \\ \tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b} \\ \tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b \\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\pi n=0 \\ \cos\pi n=(-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\cos a \\ \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin a \end{cases}$$

# פונקציה שואפת לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+4}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)^2}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^2}{(2-x)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to 2^-}-\frac{1}{2}\ln(2-x)$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left((\ln x)^2+2\ln x-3\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

12) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\cdot\cot x$

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}}$

## תשובות סופיות

1) $\phi$ 2) $\phi$ 3) $-\infty$ 4) $\phi$

5) $-\infty$ 6) $\infty$ 7) $\infty$ 8) $\phi$

9) $0$ 10) $1$ 11) $\phi$ 12) $-\infty$

13) $-\infty$

# $x$ שואף לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-x}\right)^{\ln x}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x+e^{x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^3+10x}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+6}{2x+10}-\frac{x}{2}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6-5x}}{x^3-2x^2+1}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+2x^2+6+27x^6}}{\sqrt{3x^3+10x+4x^4}}$

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

13) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{16^x+4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4\cdot 9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

15) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4\cdot 9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x^3-5x-1}{x^3-2x^2+1}\right)$

18) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{x^4+2x^2+6}{3x^4+10x}}$

19) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}\right)$

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}}$

21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+kx}-x\right)$

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

24) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

25) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x^2\right)$

26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-4)^{10}(3x^2-1)^4}{x^2(2x-5)^{10}(x^3+1)^2}$

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^5}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}$

29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(5\cdot 2^{x+2}+6\cdot e^{x+1}\right)-x\right]$

## תשובות סופיות

1) $0$
2) $-\frac{\pi}{2}$
3) $4$
4) $-\infty$
5) $0$
6) $-5$
7) $1$
8) $-1$
9) $-3$
10) $1.5$
11) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$
12) $\frac{1}{4}$
13) $0$
14) $4$
15) $\frac{1}{9}$
16) $2$
17) $\ln 3$
18) $e^{\frac{1}{3}}$
19) $0$
20) אם $b\neq 0$ : $\lim=\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$ . אם $b=0\,,\,a>0$ : $\infty$ . אם: $b=0\,,\,a<0$ : $-\infty$ .
21) $2.5$
22) $\frac{k}{2}$
23) $\frac{1}{2}$
24) $-\frac{1}{2}$
25) $\frac{1}{2}$
26) $\frac{a-b}{2}$
27) $\frac{3^4}{2^{10}}$
28) $\frac{5}{4}$
29) $\ln(6e)$

# הגבול של אוילר

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$):

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$

4) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1}$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x$

6) $\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2}$

8) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x}$

9) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{x}\right)^x$

## תשובות סופיות

1) $e^{\frac{1}{2}}$ 2) $1$ 3) $e^2$ 4) $e^{-1}$ 5) $e^3$

6) $e$ 7) $e^{-12}$ 8) $e^{30}$ 9) $e$

# כלל הסנדוויץ'

## שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-10**:

**1)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

**2)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(2x+1)}{x}$

**3)** $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

**4)** $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+\sin 2x}{x^2+\cos 3x}$

**5)** $\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

**6)** $\lim_{x\to 0}x^2\cdot\cos\left(\ln x^2\right)$

**7)** $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\arctan(2x-3)}{4x+\arctan(x-\ln x)}$

**8)** $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{2^x+3^x+4^x}$

**9)** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}[x]$

**10)** $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}[x]$

**11)** נתונה פונקציה $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיימת $\lim_{x\to 2}z(x)=4$,

ונתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיימת $4z(x)\le f(x)\le\left(z(x)\right)^2$, לכל $x$.

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x\to 2}f(x)\ ,\ \lim_{x\to 2}\tan(z(x))\ ,\ \lim_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)\ ,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(z(x)\right)}{x}$$

**12)** חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

**13)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכח: $\lim_{x\to c}|f(x)|=0 \Leftarrow \lim_{x\to c}f(x)=0$.

ב. האם נכונה גם הטענה: $\lim_{x\to c}|f(x)|=1 \Leftarrow \lim_{x\to c}f(x)=\pm 1$.

## תשובות סופיות

1) $0$    2) $0$    3) $\frac{3}{4}$    4) $3$    5) $0$

6) $0$    7) $\frac{3}{4}$    8) $4$    9) $1$    10) $0$

11) $\lim_{x\to 2} f(x)=16$ , $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(z(x)\right)}{x}=0$ , $\lim_{x\to 2}\tan(z(x))=\tan 4$ , $\lim_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)=2$

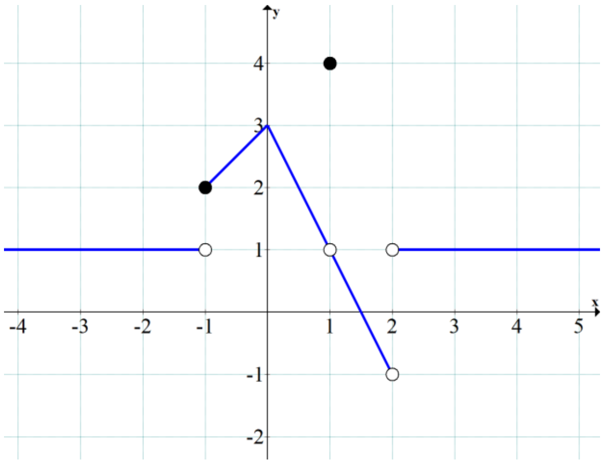
12) $0$

13) א. שאלת הוכחה.    ב. לא.

# גבול של פונקציה מפוצלת

## שאלות

**1)** להלן גרף של פונקציה:




חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

א. 1. $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ 3. $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

ב. 1. $\lim\limits_{x\to1}\left(3f-f^2\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to-1}\left(3f-f^2\right)$

ג. 1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{4-f}$ 2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1-f}$

**2)** נגדיר פונקציה $f(x)$ : $f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0.5 & x=0\\ 1-x^2 & 0<x<2\\ 1.5x-6 & x\ge2\end{cases}$.

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim\limits_{x\to2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim\limits_{x\to2}\left[4\left(f(x)\right)^2+10f(x)\right]$.

**3)** נגדיר פונקציה $f(x)$ : $f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0.5 & x=0\\ \cos x & 0<x<\pi\\ -0.5 & x\ge\pi\end{cases}$ .

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim\limits_{x\to\pi} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim\limits_{x\to\pi}\left[2\left(f(x)\right)^2+3f(x)\right]$.

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

**4)** $(a=0),\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 4x}{x} & x>0\\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x<0\end{cases}$

**5)** $(a=1)\ ,\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x>1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x<1\end{cases}$

**6)** $(a=0)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

**7)** $(a=\infty)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

**8)** $(a=-\infty)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

**9)** א. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

ב. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

## תשובות סופיות

**1)** א. $1.\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1\ ,\ 2.\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\nexists\ \ ,\ 3.\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)=\nexists$

ב. $1.\ \lim\limits_{x\to 1}\left(3f-f^2\right)=2\ \ ,\ 2.\ \lim\limits_{x\to -1}\left(3f-f^2\right)=2$

ג. $1.\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{4-f(x)}=\dfrac{1}{3}\ \ ,\ 2.\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-f(x)}=\nexists$

**2)** א. ראו בסרטון. ב. $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=1,\ \lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=-3$ ג. $6$

**3)** א. ראו בסרטון. ב. $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=1,\ \nexists\lim\limits_{x\to \pi} f\left(x\right)$ ג. $-1$

**4)** $4$

**5)** $\phi$

**6)** $\phi$

**7)** $1$

**8)** $-1$

**9)** א. אין גבול. ב. $\dfrac{1}{6}$

# גבול לפי הגדרה

## שאלות

בשאלות 1-6, **על פי הגדרת הגבול**, הוכיחו:

1) $\lim_{x\to 2} 7x+14=28$

2) $\lim_{x\to 4} x^2+x=20$

3) $\lim_{x\to 24} \sqrt{x+1}=5$

4) $\lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$

5) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x}{x^2-2}=1$

6) $\lim_{x\to \alpha} \sin x=\sin \alpha$

7) חשבו, **על פי הגדרת הגבול**: $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.

הוכיחו **על פי הגדרת הגבול** את מקרים **8-11**:

8) $\lim_{x\to 2} \frac{3+x}{x^2+1}=1$

9) $\lim_{x\to \infty} \frac{x+7}{x+2}=1$

10) $\lim_{x\to \infty} \frac{3-4x}{2x+1}=-2$

11) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1}=3$

12) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to \infty} f(x)=-5$.
הוכיחו כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f(x)<-4$.

13) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to \infty} f(x)=5$.
הוכיחו כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f^2(x)>16$.

14) נניח $f$ פונקציה ממשית וחיובית בתחום $[a,\infty)$ המקיימת $\lim_{x\to \infty} f(x)=0$.
הוכיחו שמתקיים $\lim_{x\to \infty} \sqrt{f(x)}=0$.

**15)** נתון הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+3x+2}=1$.
מצאו ערך של $M>0$, עבורו לכל $x>M$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול עד כדי $0.1$ (במילים אחרות, מצאו $M$, כך ש-$\forall x>M:\ \left|f(x)-L\right|<0.1$).

**16)** נגדיר את הפונקציה $f(x)=\begin{cases}2 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}\end{cases}$.
האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.
א. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ ב. $\lim\limits_{x\to 2.5}f(x)$ ג. $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$

**17)** בהינתן הגבול $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x+4}{x+11}=\frac{1}{2}$, מצאו $\delta>0$, כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $|x-1|<\delta$, אי-השוויון $\left|\frac{2x+4}{x+11}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{100}$ מתקיים.

**18)** הוכיחו או הפריכו:
א. אם $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$, אז $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=0$.
ב. אם $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=0$, אז $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=0$.
ג. אם $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=L$, אז: הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ קיים ושווה ל-$L$ או $-L$.
ד. אם הגבולות $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$ ו-$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ קיימים,
אז גם הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ קיים.

**19)** יש להוכיח כי $\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2}{x+3}\neq1$ לפי ההגדרה.

**20)** יש להוכיח כי $\lim\limits_{x\to4}\frac{2x+1}{x+10}\neq1$ לפי ההגדרה.

**21)** הוכיחו שאם $\lim\limits_{x\to0}f(x)=3$, אז קיימת סביבה נקובה של 0 שבה $f(x)>2$.

**22)** הוכיחו שאם $\lim_{x \to x_0} f(x) > L$, אז קיימת סביבה נקובה של $x_0$ שבה $f(x) > L$.

**23)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו: $\lim_{x \to c} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to c} f(x) = 0$.

ב. האם נכונה גם הטענה: $\lim_{x \to c} |f(x)| = |k| \Leftrightarrow \lim_{x \to c} f(x) = k \quad (k \neq 0)$.

## תשובות סופיות

**7)** $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר: GOOL.co.il

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 8 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

### תוכן העניינים

# רציפות של פונקציה

## שאלות

בשאלות **1-6**: בדקו את רציפות הפונקציות ב״נקודת התפר״[1] שלהן,
ובשאלות **1** ו-**2**, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

**1)** $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 2 \\ 5-x & x>2 \end{cases}$

**2)** $f(x)=\begin{cases} x & x\ge 1 \\ x^2 & x<1 \end{cases}$

**3)** $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\le 1 \\ |x-2| & 1<x<2 \\ 1 & x=2 \\ x-2 & x>2 \end{cases}$

**4)** $f(x)=\begin{cases} \sin x & x<0 \\ x^2 & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ x-3 & x\ge 2 \end{cases}$

**5)** $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x>0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$

**6)** $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x>0 \\ 2 & x=0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$

**7)** עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **3-6**:
רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא.
בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות **8-11**: מה צריך להיות הערך הקבוע של $k$, על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל $x$?

**8)** $f(x)=\begin{cases} kx^2+x-2 & x\le 2 \\ 5kx-6 & x>2 \end{cases}$

**9)** $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x-1} & x\ne 1 \\ k & x=1 \end{cases}$

**10)** $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & x\ne 2 \\ k & x=2 \end{cases}$

**11)** $f(x)=\begin{cases} 2x-k & x\le 0 \\ x^{2x} & x>0 \end{cases}$

הערה: שאלה **11** ניתן לפתור רק בעזרת ׳כלל לופיטל׳.

[1] נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות **15-12** : מה צריכים להיות הערכים של הקבועים $a$ ו- $b$,
על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

**12)**
$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\le 0 \\ \dfrac{\sin x}{2x} & 0<x<\pi \\ a\cos x & x\ge \pi \end{cases}$$

**13)**
$$f(x)=\begin{cases} a\sqrt[3]{x}+x^2 & x<-1 \\ bx^2+x-1 & -1\le x\le 1 \\ 4\dfrac{\sqrt{x-1+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x>1 \end{cases}$$

**14)**
$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x>1 \\ (x-1)\ln(x+1)+b & 0\le x\le 1 \\ a\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-2}{2^{\frac{1}{x}}+4} & x<0 \end{cases}$$

**15)**
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x<1 \\ ax^2+b & 1\le x\le 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x>2 \end{cases}$$

***הערה: שאלות 15-14 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.***

**16)** הוכיחו או הפריכו :
א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

**17)** ידוע ש- $f$ רציפה ו- $g$ לא רציפה. האם $f+g$ רציפה?
הוכיחו זאת.

**18)** תהי $f(x)=\begin{cases}|x|-1 & |x+1|\ge 4\\ 2 & |x+1|<4\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי $g(x)=x+\frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל $x$.
האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל $x$?

**19)** תהי $f$ פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.
תהי $g$ הפונקציה המוגדרת בקטע $(0,2)$, על ידי $g(x)=\begin{cases}f(x) & 0<x<1\\ x^2 & 1\le x<2\end{cases}$.

א. האם יתכן שהנקודה $x_0=1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של $g$? נמקו.

ב. האם $g$ חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.

**20)** תהי $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y)=f(x)f(y)$, לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
נניח ש- $f$ רציפה ב- $x=0$.
הוכיחו ש- $f$ רציפה לכל $x$.

**21)** תהי $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y)=\left[f(x)f(y)\right]^2$, לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
נניח ש- $f$ רציפה ב- $x=0$.
הוכיחו ש- $f$ רציפה לכל $x$.

**22)** נתונה הפונקציה $f(x)=x-\frac{1}{2}\lfloor 2x\rfloor$.
הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה $f$ חסומה לכל $x$.

ב. הפונקציה $f$ רציפה לכל $x$.

ג. הפונקציה $f$ מונוטונית לכל $x$.

ד. הפונקציה $f$ זוגית או אי-זוגית לכל $x$.

**23)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \le x$ לכל $x$.
הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x=0$.

ב. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \le \sin x$ לכל $x$.
הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

**24)** הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל $x$.
ידוע כי עבור $x \ne \pm 1$, $f(x)$ נתונה על ידי הנוסחה $f(x)=\frac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$.
מצאו את הנוסחה של $f(x)$ לכל $x$.

**25)** הפונקציות $3g(x)+2f(x)$ ו- $f(x)-2g(x)$ רציפות לכל $x$.
הוכיחו שהפונקציה $|f(x)-g(x)|$ רציפה לכל $x$.

**26)** תהי $f(x)$ מוגדרת לכל $x$ ומקיימת $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)(1-f(x))\right]=0$.

א. הוכיחו או הפריכו: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ או $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

**27)** תהי $f$ מוגדרת לכל $x$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f(\sin x)$ רציפה לכל $x$, אז $f$ רציפה לכל $x$.

ב. אם $\sin(f(x))$ רציפה לכל $x$, אזי $f$ רציפה לכל $x$.

ג. אם לכל $x_0$ מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=4$, אזי $f(x)=4$ לכל $x$.
כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי $f$ רציפה לכל $x$?

**28)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) - |x-y|]$
2. $Max\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) + |x-y|]$

ב. הוכיחו כי אם $f, g$ רציפות ב- $\mathbb{R}$ אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב- $\mathbb{R}$:

1. $z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$
2. $z_2(x) = Max\{f(x), g(x)\}$

## תשובות סופיות

1) רציפה.

2) רציפה.

3) רציפה בנקודה $x=1$ , לא רציפה בנקודה $x=2$ .

4) רציפה בנקודות $x=0,1$ , לא רציפה בנקודה $x=2$ .

5) לא רציפה.

6) לא רציפה.

7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.

8) $k=1$

9) $k=4$

10) $k=\frac{2}{3}$

11) $k=-1$

12) $a=0$ , $b=\frac{1}{2}$

13) $a=1$ , $b=2$ או $a=2$ , $b=1$ .

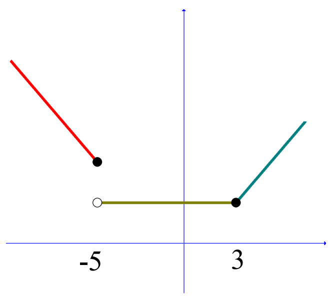
14) $a=-2e^{-1}$ , $b=e^{-1}$

15) $a=\frac{e}{3}$ , $b=-\frac{e}{3}$

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) א.




ב. הפונקציה רציפה לכל $x\neq-5$ . ב- $-5$ יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.

19) א. לא. ב. כן.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

23) שאלת הוכחה.

24) $$f(x)=\begin{cases} -\pi & x=-1 \\ \dfrac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x\neq \pm 1 \\ \pi & x=1 \end{cases}$$

25) שאלת הוכחה.

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

# משפט ערך הביניים

## שאלות

בשאלות **1-4** הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

**1)** $x^3+4x-1=0$

**2)** $x^2=-\ln x$

**3)** $x-0.25\sin x=7$

**4)** $x^3+bx^2+cx+d=0$

בשאלות **5-6** הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

**5)** $e^x-5x=0$

**6)** $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f$ פונקציה רציפה לכל $x$, המקיימת: $f(0)=1,\ \ f(1)=2$.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)+\sin x=4x$ יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to[-4,4]$ פונקציה רציפה.
הוכיחו שלמשוואה $2x+f(x)=1$ יש לפחות פתרון אחד.

**8)** מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,
בו למשוואה $x^2=10-\frac{1}{x}$ יש פתרון.

**9)** נגדיר $f(x)=x^2+\frac{1}{x-1}$.

א. חשבו את $f(2)$ , $f(0)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2+\frac{1}{x-1}=0$
יש פתרון בקטע $(0,2)$?

**10)** תהיינה $f,g$ פונקציות רציפות ב-$[a,b]$ המקיימות $f(a)<g(a), f(b)>g(b)$
הוכיחו שקיימת נקודה $a<c<b$ שבה $f(c)=g(c)$.

**11)** נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ שהוא חלקי לתחום הגדרתה.
נניח ש- $f([a,b])\subseteq[a,b]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)=c$.
נקודה $c$ כנ"ל נקראת "**נקודת שֶׁבֶת**" של הפונקציה.

**12)** נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to[0,1]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)=c^{1.5}$.

**13)** נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=f(1)$.
א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[0,0.5]$ כך ש- $f(c)=f(c+0.5)$.
ב. הוכיחו כי קיימות נקודות $c,d\in[0,1]$ כך ש- $f(c)=f(d)$.

**14)** נתונה פונקציה רציפה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)<f(2)<f(1)$.
הוכיחו כי קיימים $c_1,c_2\in[0,2]$ כך ש- $f(c_1)=f(c_2)$.

**15)** נתונה פונקציה רציפה $f:[0,8]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=f(8)$.
הוכיחו כי קיימות נקודות $c_1,c_2,c_3,c_4\in[0,8]$ כך ש-
$f(c_1)=f(c_2),\ f(c_3)=f(c_4)$.

**16)** הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x+\sin x$ היא על $\mathbb{R}$.

**17)** הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x\cdot\sin x$ היא על $\mathbb{R}$.

**18)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור $2\pi$.
הוכיחו שקיים $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x_0+\pi)=f(x_0)$.

**19)** יהיו $0\le a_1,\dots,a_n\le 1$ קבועים המקיימים $a_1+\dots+a_n=1$.
הוכיחו כי למשוואה $|x-a_1|+\dots+|x-a_n|=\frac{n}{2}$ יש לפחות פתרון אחד.

**20)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ורציפה.
הוכיחו כי $f$ עולה ממש או יורדת ממש.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ פונקציה חח"ע ועל.
הוכיחו כי $f$ לא רציפה ב- $\mathbb{R}$.

**21)** תהי $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ פונקציה רציפה.
הוכיחו כי קיימים אינסוף ערכים של $x$, שעבורם $f(x)=\sin x$.

**22)** יהי $P$ פולינום ממעלה **זוגית**, מהצורה $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$,
ונניח כי $a_0<0$.
הוכיחו כי ל- $P$ ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

**23)** יהיו $f,g$ פונקציות רציפות המקיימות:
$\lim_{x\to\infty} f(x)=k,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-k,\ \lim_{x\to\infty} g(x)=-k,\ \lim_{x\to-\infty} g(x)=k$, כאשר $0<k\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x)=g(x)$.

**24)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $(a,b)$, ותהיינה $x_1,\ldots,x_n$ (כאשר $n>1$)
נקודות כלשהן ב- $(a,b)$.
הוכיחו שקיימת נקודה $c$ בקטע $(a,b)$, כך ש-
$f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$.

ב. תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $(a,b)$.
האם לכל $c\in(a,b)$, ניתן למצוא נקודות $x_1,\ldots,x_n$, שונות זו מזו,
כאשר $n>1$, כך ש- $f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$?
הוכיחו זאת.

**25)** תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע פתוח $(a,b)$.
נניח כי: $\lim_{x\to b^-} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$.
הראו כי תמונת הקטע $(a,b)$ היא $\mathbb{R}$.

**26)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(0)=-1,\ f(1)=4$.
תהי $S=\{x\in[0,1]\mid f(x)=0\}$.
א. הוכיחו ש- $S$ לא ריקה.
ב. הוכיחו שלקבוצה $S$ יש חסם עליון, שנסמנו $\alpha$.
ג. הוכיחו כי $\alpha\in(0,1]$.
ד. הוכיחו כי $f(\alpha)=0$.

**27)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, כך ש- $f(a)=f(b)$.
הוכיחו שקיימים $a<x_1<x_2<b$, כך ש- $f(x_1)=f(x_2)$.

**28)** תהי $z(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ויהי $0\le r\le 1$.
הוכיחו שיש $c$ בקטע, עבורו מתקיים $z(c)=rz(a)+(1-r)z(b)$.

**29)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו כי למשוואה $A\sin x+B\cos x=C\sin 2x$ יש פתרון.
ב. תהי $f(x)$ רציפה לכל $x$ המקיימת $f(4)>2f(2),\ f(0)>0$.
הוכיחו שקיים $c$ כך ש- $f(2c)=2f(c)$.
ג. תהי $f(x)$ רציפה לכל $x$ המקיימת $f(0)=1,\ f(1)=2$.
הוכיחו שקיים $a$ כך ש- $f(a)=\frac{1}{a}$.

**30)** פונקציה $f$ מוגדרת לכל $x$.
לפונקציה יש את התכונה הבאה:
כל ערך ממשי מתקבל על ידי הפונקציה בדיוק פעמיים.
הוכיחו כי הפונקציה אינה יכולה להיות רציפה.

## תשובות סופיות

**8)** $[0.1,1]$

**9)** א. $f(0)=-1$ , $f(2)=5$ ב. לא.

שאלות **1-7** ושאלות **10-30** הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

# תכונות נוספות של פונקציות רציפות

## שאלות

**1)** קבעו בכל סעיף האם הטענה נכונה או לא נכונה, והוכיחו זאת.
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$, שהיא:

א. חח״ע, אבל לא מונוטונית.
ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
ד. חסומה, אבל לא רציפה.
ה. רציפה, אבל לא חסומה.
ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע $[0,1]$, על ידי $f$, היא קטע.

**2)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(x)>0$, לכל $x\in[a,b]$.
הוכיחו שקיים $\alpha>0$, כך ש- $f(x)\ge\alpha$, לכל $x\in[a,b]$.

**3)** תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונניח כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ קיים.
הוכיחו ש- $f$ חסומה.

**4)** יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות. נתון שלכל שתי נקודות $x_1,x_2$, המקיימות $x_1<x_2$, קיימת נקודה $x_1<x_3<x_2$, שעבורה $f(x_3)=g(x_3)$.
הוכיחו כי $f(x)=g(x)$, לכל $x$.

**5)** תהי $f:[0,1]\to(0,1)$ פונקציה על.
הוכיחו ש- $f$ לא רציפה ב- $[0,1]$.

**6)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שמקיימת $f(x)=f(x^2)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.
הוכיחו ש- $f$ פונקציה קבועה.

**7)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שמקיימת $f(x+y)=f(x)+f(y)$, לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי $f(x)=f(1)x$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

**8)** תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $(a,b)$, ונניח שקיים קבוע ממשי $K$, כך שלכל שתי נקודות, $x_1$ ו- $x_2$, בקטע $(a,b)$, מתקיים **תנאי ליפשיץ**:

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le K|x_1-x_2|$$

הוכיחו כי $f(x)$ רציפה בקטע $(a,b)$.
* נסו להוכיח בשתי דרכים שונות.

**9)** הוכיחו שלכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת מינימום מוחלט.
באריכות:
הוכיחו שאם $f$ פולינום ממעלה זוגית, אז קיימת נקודה $x_0\in\mathbb{R}$, כך ש- $f(x)\ge f(x_0)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

**10)** בסעיפים א ו-ב הוכיחו:
א. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של רציונליים שמתכנסת אליו.
ב. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של אי-רציונליים שמתכנסת אליו.
ג. תהי $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בכל נקודה $x\in\mathbb{R}$.
הערה: פונקציה זאת נקראת פונקציית דִירִיכְלֶה.

**11)** הוכיחו או הפריכו:
א. אם $f(x)$ רציפה בנקודה $c$, אז $|f(x)|$ רציפה בנקודה $c$.
ב. אם $|f(x)|$ רציפה בנקודה $c$, אז $f(x)$ רציפה בנקודה $c$.

בשאלות **12-13** הוכיחו:

**12)** אם $f$ רציפה ב-$x_0$, אז קיימת סביבה של $x_0$, בה $f$ חסומה.

**13)** אם $f$ רציפה ב-$x_0$, ואם $f(x_0)>0$, אז קיימת סביבה של $x_0$, שבה $f(x)>0$.

**14)** יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $f(a)\neq g(a)$ ,
עבור $a$ ממשי מסוים.
הראו שקיימת סביבה של $a$, שבה $f(x)\neq g(x)$ .

<u>הערה</u>
תרגיל זה מכיל בתוכו גם את הטענה הבאה:
תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $f(a)\neq 0$ , עבור $a$ ממשי מסוים.
הראו שקיימת סביבה של $a$, שבה $f(x)\neq 0$ .
פשוט לקחנו $g(x)=0$ .
בטענה זו נשתמש בשאלה האחרונה תחת הנושא 'משפט ערך הביניים', בסעיף האחרון.

**15)** הוכיחו כי אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $a$, אזי הפונקציה $g(x)$ ,
המוגדרת על ידי $g(x)=\begin{cases}-c & f(x)<-c\\ f(x) & |f(x)|\le c\\ c & f(x)>c\end{cases}$ , גם רציפה בנקודה $a$
(כאשר $c$ מספר חיובי כלשהו).

**16)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{x} & x\ge 1\\ e^{-x}-e^{-1} & x<1\end{cases}$ .
בדקו האם $f$ הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את $f^{-1}(x)$ .

**17)** הוכיחו כי אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ו- $f(x)>0$ לכל $x\in[a,b]$ אז יש $c>0$ כך ש-
$f(x)>c$ לכל $x\in[a,b]$ .

**18)** הוכיחו כי אם $f,g$ רציפות ב- $\mathbb{R}$ אז גם הפונקציה $z(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ רציפה ב- $\mathbb{R}$ .
הערה: יש להוכיח לפי ההגדרה (בלשון $\varepsilon,\delta$).
השוו לשאלה 28 בנושא הראשון בפרק זה.

## תשובות סופיות

**16)** $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & -1<x\le 0\\ -\ln\left(x+e^{-1}\right) & x>0\end{cases}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

# שיטת החצייה

## שאלות

**1)** נתונה המשוואה $x^3-2x^2-x+2=0$ . בעזרת שיטת החצייה בקטע $[-2,3]$,
מצאו שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות.
מהו קירוב השורש?

**2)** נתונה המשוואה : $x^3-x-2=0$ .
א. מצאו קטע שאורכו לא עולה על $1$, המכיל שורש של המשוואה.
ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של $0.001$ ?
ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של $0.001$ .

הערה : בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

## תשובות סופיות

**1)** $0.07$

**2)** א. $[1,2]$ ב. $10$ ג. $x=1.520$

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 9 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

# הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

**שימו לב**

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

## שאלות*

בשאלות **1-6** חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

**1)** $f(x)=x^2+4x+1$ **2)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$ **3)** $f(x)=\sin 4x$

**4)** $f(x)=e^x$ **5)** $f(x)=\ln x$ **6)** $f(x)=\sqrt{x+10}$

**7)** חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$.

**8)** חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$.

**9)** חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x\cdot z(x)$ כאשר $\lim_{x\to 0} z(x)=4$, $z(0)=1$.

**10)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-1} & x>0\\ -(x+1)^2 & x\le 0\end{cases}$.

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

**11)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\frac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ ($n$ טבעי).

א. עבור אילו ערכים של $n$ הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של $n$ הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

**12)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} x^n \arctan\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ ($n$ טבעי).

א. עבור אילו ערכים של $n$ הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$ ?

ב. עבור אילו ערכים של $n$ הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$ ?

**13)** חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(4+x)-\ln 4}{x}$

ב. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{1+x}-e}{x}$

**14)** נתון כי $f$ גזירה בנקודה $x_0$. הוכח כי:

א. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ב. $2x_0 f(x_0)-x_0^2 f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2 f(x_0)-x_0^2 f(x)}{x-x_0}$

**15)** נתון כי $f$ גזירה וזוגית. הוכיחו כי $f'$ אי זוגית.

**16)** נתונה פונקציה המוגדרת ב- $[a,b]$ ומקיימת לכל $x,y$ ב- $[a,b]$:

$|f(x)-f(y)|\leq|x-y|^2$.

הוכיחו כי $f$ גזירה ב- $[a,b]$ וחשבו את נגזרתה.

**17)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in\mathbb{Q} \\ x^3 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

**18)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

**19)** נתונה הפונקציה $f(x)=\left|\sin^5 x\right|$.

א. חשבו את $f'(x)$.

ב. מצאו את כל הנקודות עבורן $f'(x)=0$.

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

**20)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם $h$ גזירה ב-$x_0$ ו-$g$ אינה גזירה ב-$x_0$, אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-$x_0$.

ב. אם $h$ אינה גזירה ב-$x_0$ ו-$g$ אינה גזירה ב-$x_0$, אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-$x_0$.

ג. אם $h$ אינה גזירה ב-$x_0$ ו-$g$ אינה גזירה ב-$x_0$, אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-$x_0$.

ד. אם $h$ גזירה ב-$x_0$ ו-$g$ אינה גזירה ב-$x_0$, אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-$x_0$.

**21)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f$ גזירה, אז $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$.

ב. אם הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$ קיים וסופי, אז $f$ גזירה.

**22)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f$ גזירה ב-$(a,b)$ ו-$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$.

ב. אם $f$ גזירה ב-$(a,b)$ ו-$\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$.

**23)** נתון כי $f(x)$ רציפה ב-$x=4$, ומקיימת $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-\pi-10(x-4)}{x-4}=0$.

הוכיחו ש-$f$ גזירה ב-$x=4$, וחשבו את $f'(4)$.

**24)** תהי $f$ פונקציה רציפה בסביבת הנקודה $x=0$ המקיימת $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

א. הוכיחו כי $f(0)=0$.

ב. הוכיחו כי $f$ גזירה ב-$x=0$ ו-$f'(0)=0$.

**25)** תהי $f$ פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי $f(0)=0$ ו-$f'(0)=k$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty} x f\left(\frac{1}{x}\right)=k$.

**26)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0$.

א. אם $f(x_0)\neq 0$, הוכיחו שגם $|f|$ גזירה ב-$x_0$.

ב. אם $f(x_0)=0$, הראו שייתכן כי $|f|$ גזירה ב-$x_0$ וייתכן שלא.

**27)** תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות בנקודה $x_0$.
נגדיר $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
הראו שאם $f(x_0)\neq g(x_0)$, אז $h$ גזירה ב- $x_0$.

**28)** תהי $f$ פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.
הוכיחו כי אם $f$ גזירה ב- 0, אז $f'(0)=0$.

הערה: פתרו בשתי דרכים שונות.

**29)** נתונה פונקציה $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(xy)=f(x)+f(y)$,
לכל $x,y\in(0,\infty)$.
נתון כי $f$ גזירה בנקודה $x=1$.

א. הוכיחו כי $f(1)=0$ ו- $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

ב. הראו כי $f$ גזירה, ושלכל $x>0$, $f'(x)=\frac{f'(1)}{x}$.

**30)** נתון כי $f$ פונקציה גזירה המקיימת $\frac{f(x)+f(y)}{2}=f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.
הוכיחו ש- $f$ פונקציה לינארית.

**31)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את הטענה הבאה:
אם $f$ גזירה ב- $x_0$, אז $f'(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_0+a_n)-f(x_0)}{a_n}$
לכל סדרה $a_n\to 0$.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0=1$, ו- $f(1)=1$.
הראו שאם $k\in\mathbb{N}$, אז
$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(f(1+\tfrac{1}{n})+f(1+\tfrac{2}{n})+\ldots+f(1+\tfrac{k}{n})\right)-k\right]=\frac{k(k+1)}{2}f'(1)$$

ג. חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{10}{n}}-10\right]$.

**32)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x)=(x-1)^2D(x)$ גזירה **רק** בנקודה $x=1$.

**33)** פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)|\le x^2$ לכל $x$.
הוכיחו שהפונקציה גזירה ב- $x=0$.

**34)** פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)|\le \sin^2 x$ לכל $x$.
הוכיחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

**35)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב- $x_0$.

א. הוכיחו כי $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה $f$, באופן שהגבול בסעיף א' קיים,
אך $f'(x_0)$ אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות $f'(x_0)$ את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0+3h)}{h}$.

**36)** תהי $f$ פונקציה גזירה פעמיים ב- $x_0$.

א. הוכיחו כי $f''(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה $f$, באופן שהגבול בסעיף א' קיים,
אך $f''(x_0)$ אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לופיטל'.

**37)** נתון כי $f(x)$ רציפה בנקודה $x=a$, ונגדיר פונקציה חדשה $z(x)=(x-a)f(x)$.
הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה $z(x)$ גזירה בנקודה $x=a$.

ב. $z'(x)$ רציפה ב- $x=a$.

**38)** נניח ש- $f$ גזירה ב- $c$ ו- $f(c)=0$.
הוכיחו:

א. אם $f'(c)=0$ אז $|f(x)|$ גזירה ב- $c$.

ב. אם $|f(x)|$ גזירה ב- $c$ אז $f'(c)=0$.

**39)** יהיו $f,g$ פונקציות גזירות ב- $c$ ונניח כי $f(c)=g(c)$ .

**א.** הוכיחו כי $|f(x)-g(x)|$ גזירה ב- $c$ אם ורק אם $f'(c)=g'(c)$ .

**ב.** הוכיחו כי $z_1(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ גזירה ב- $c$ אם ורק אם $f'(c)=g'(c)$ .

**ג.** הוכיחו כי $z_2(x)=Max\{f(x),g(x)\}$ גזירה ב- $c$ אם ורק אם $f'(c)=g'(c)$ .

**40)** נניח ש- $|f(x)|$ גזירה ב- $c$ ו- $f$ רציפה ב- $c$ .

הוכיחו כי $f$ גזירה ב- $c$ .

## תשובות סופיות

1) $f'(x)=2x+4$
2) $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$
3) $f'(x)=4\cos 4x$
4) $f'(x)=e^x$
5) $f(x)=\frac{1}{x}$
6) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+10}}$
7) $44!$
8) 2
9) 4
10) א. רציפה לכל $x$. ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.
11) א. $n>1$ ב. $n>2$
12) א. $n>1$ ב. $n>1$
13) א. $\frac{1}{4}$ ב. $e$
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) שאלת הוכחה. $f'=0$
17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים: $f'(0)=0$.
18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$, ומתקיים: $f'(1)=0$.
19) א. $f'(x)=\begin{cases} 5\sin^4 x\cos x & 2n\pi<x<(2n+1)\pi \\ 0 & x=n\pi \\ -5\sin^4 x\cos x & (2n+1)\pi<x<(2n+2)\pi \end{cases}$ ב. $x=\frac{\pi}{2}n$
20) שאלת הוכחה.
21) שאלת הוכחה.
22) שאלת הוכחה.
23) שאלת הוכחה.
24) שאלת הוכחה.
25) שאלת הוכחה.
26) שאלת הוכחה.
27) שאלת הוכחה.
28) שאלת הוכחה.
29) שאלת הוכחה.
30) שאלת הוכחה.
31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55
32) שאלת הוכחה.

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** שאלת הוכחה.

**35)** א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=|x|$ ג. $-5f'(x_0)$

**36)** א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$

**37)** שאלת הוכחה.

**38)** שאלת הוכחה.

**39)** שאלת הוכחה.

**40)** שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# נגזרות חד-צדדיות

## שאלות

**1)** תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\ge 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$ על מנת להדגים שתי שיטות אלה.

בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת משיטות אלה.

בשאלות **2-9** בדקו את גזירות הפונקציות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו.

בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

**2)** $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x\ge 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

**3)** $f(x)=\begin{cases} x^2-5x & x\ge 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

**4)** $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\ge 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$

**5)** $f(x)=\begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5<x<0 \\ x^2+2x & x\ge 0 \end{cases}$

**6)** $f(x)=2+4|x-1|$

**7)** $f(x)=3x^2+x|x|+1$

**8)** $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

**9)** $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

**10)** בדקו האם הפונקציה משאלה **5** גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

**11)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x\ge -1 \\ \frac{1}{x}+a & x<-1 \end{cases}$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע $a$ הפונקציה רציפה בנקודה $x=-1$?

ב. עבור ערך ה- $a$ שקיבלת בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=-1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?!

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

**12)** מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים $a$ ו- $b$ הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases}\ln^3 x & 0<x\le e\\ ax+b & x>e\end{cases}$.
עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

**13)** מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים $a$ ו- $b$ הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases}e^x & 0<x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$.
עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

**14)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}+4x & x<0\\ px+q & x\ge 0\end{cases}$.
קבעו עבור אילו ערכים של הקבועים $p$ ו- $q$ הפונקציה הנתונה:
א. רציפה. ב. גזירה.

**15)** חשבו את $f'(0)$, עבור הפונקציה: $f(x)=\left|x^4-x^3+\sin(10x)-1\right|$.

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|\cos\pi x|} & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.
הוכיחו שהפונקציה לא גזירה לכל $x$ ממשי.

**תזכורת (הערך השלם)**

פונקציית הערך השלם $[x]$ מחזירה לכל מספר ממשי $x$ את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- $x$ (מעגלת כלפי מטה). למשל: $[4.1]=4$ , $[-4.1]=-5$.

**17)** נתונה הפונקציה $f(x)=[x]-[-x]$.
חשבו את $f'(x)$.

**18)** נתונה הפונקציה $f(x)=[x]\sin(\pi x)$.
חשבו את $f'(x)$ **על פי ההגדרה**.

**19)** נתונה הפונקציה $f(x)=[x]\left(1-\cos(\pi x)\right)$.
חשבו את $f'(x)$.

**20)** הוכיחו שאם $f$ היא פונקציה המקיימת $\left|f\left(x\right)\right| \le x^2$ לכל $x$,
אז $f$ גזירה ב-$x=0$.

**21)** תהי $f$ פונקציה רציפה ב-$x_0=0$.
הוכיחו כי הפונקציה $z\left(x\right)=\left|x\right| f\left(x\right)$ גזירה ב-$x_0=0$ אם ורק אם $f\left(0\right)=0$.

**22)** יהיו $f$ ו-$g$ שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה של $x_0 \in \mathbb{R}$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f(x_0)=g(x_0)$ ו-$f_-^{'}(x_0)=g_+^{'}(x_0)$,
אז הפונקציה $z$, המוגדרת על ידי $z(x)=\begin{cases} f(x) & x \le x_0 \\ g(x) & x \ge x_0 \end{cases}$, גזירה ב-$x_0$.

ב. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לא גזירה ב-$x_0$ ו-$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ב-$\mathbb{R}$,
אז $g \circ f$ איננה גזירה ב-$\mathbb{R}$.

ג. אם $g$ גזירה מימין ב-$x_0$ והפונקציה $f$ מוגדרת בסביבה מלאה של
$g(x_0)$ וגזירה מימין ב-$g(x_0)$, אזי $f \circ g$ גזירה מימין ב-$x_0$.

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

**23)** תהיינה $f$ ו-$g$ פונקציות המוגדרות ב-$\mathbb{R}$.
נתון ש-$g$ היא פונקציה רציפה ב-$\mathbb{R}$, ולכל $x>y$
מתקיים $g\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.
הוכיחו כי $f$ גזירה ב-$\mathbb{R}$, ושלכל $x$ ממשי מתקיים $f'(x)=g(x)$.

**24)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \ge 1 \\ \frac{\pi}{4}-\arctan x & x<1 \end{cases}$.

א. בדקו את רציפות וגזירות $f$.

ב. בדקו האם $f$ הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את $f^{-1}(x)$.

## תשובות סופיות

1) $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\ge 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

2) $f'(x)=\begin{cases}2x-4 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

3) $f'(x)=\begin{cases}2x-5 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

4) $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\ge 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

5) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+2x} & -0.5<x<0\\ 2x+2 & x\ge 0\end{cases}$

6) $f'(x)=4\ (x>1)\quad,\quad f'(x)=-4\ (x<1)$

7) $f'(x)=8x\ (x\ge 0)\quad,\quad f'(x)=4x\ (x<0)$

8) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

10) לא גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

11) א. $a=1$ ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

12) $a=3/e\quad b=-2$ $\quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x}\ln^2 x & 0<x<e\\ \dfrac{3}{e} & x\ge e\end{cases}$

13) $a=e\quad b=0$ $\quad f'(x)=\begin{cases}e^x & 0<x<1\\ e & x\ge 1\end{cases}$

14) א. $q=0$ ב. $q=0, p=4$

15) $-10$

16) שאלת הוכחה.

17) $f'(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Z}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$

(18 $f'(x)=\begin{cases}[x]\cos(\pi x)\pi & x\notin\mathbb{Z}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$

(19 $f'(x)=\begin{cases}[x]\sin\pi x & x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & x\in\mathbb{Z},\ x\text{ even}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z},\ x\text{ odd}\end{cases}$

לפתרונות מלאים בווידאו של שאלות **20-23** היכנסו לאתר www.GooL.co.il

**(24** א. רציפה לכל $x$ וגזירה לכל $x\neq 1$.     ב. $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & -1<x\le 0\\ \tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right) & 0<x<\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 10 - חישוב נגזרת של פונקציה

### תוכן העניינים

# תרגול בכללי הגזירה

## שאלות

גזרו <u>פעמיים</u> את הפונקציות הבאות (בשאלות **27-35** מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

**1)** $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

**2)** $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

**3)** $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

**4)** $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

**5)** $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

**6)** $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

**7)** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

**8)** $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

**9)** $f(x)=x\cdot\ln x$

**10)** $f(x)=x^2\cdot\ln x$

**11)** $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

**12)** $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-32$

**13)** $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

**14)** $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

**15)** $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

**16)** $f(x)=x\cdot e^{-2x^2}$

**17)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

**18)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

**19)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

**20)** $f(x)=\sin(x^3)$

**21)** $f(x)=\cos(x^4)$

**22)** $f(x)=\sin^3 x$

**23)** $f(x)=\tan(x^2)$

**24)** $f(x)=\ln(\cos x^2)$

**25)** $f(x)=\arcsin(2x+3)$

**26)** $f(x)=\arctan(x^2)$

**27)** $f(x)=(x+1)^{\sin x}$

**28)** $f(x)=(\sin x)^x$

**29)** $f(x)=(\cos x)^{\ln x}$

**30)** $y=x^{\ln x}$

**31)** $y=\sqrt[x]{x}$

**32)** $y=x^{\sqrt{x}}$

**33)** $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

**34)** $y=(x^2+1)^x$

**35)** $y=(x+1)^{(x+1)}$

**הערה:** בשאלות **28** ו-**29** נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתיהן.

## תשובות סופיות

1) $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2},\ \ f''(x)=\frac{4}{x^3}$

2) $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2},\ \ f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$

3) $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3},\ \ f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$

4) $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2},\ \ f''(x)=\frac{4x\cdot(2x^2+24)}{(x^2-4)^3}$

5) $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},\ \ f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$

6) $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4},\ \ f''(x)=12\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

7) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\ \ f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

8) $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x^{1.5}},\ \ f''(x)=\frac{3\ln x-8}{4x^{2.5}}$

9) $f'(x)=\ln x+1,\ \ f''(x)=\frac{1}{x}$

10) $f'(x)=x(2\ln x+1),\ \ f''(x)=2\ln x+3$

11) $f'(x)=\frac{1}{2(2-x)},\ \ f''(x)=\frac{1}{(4-2x)^2}$

12) $f'(x)=\frac{2}{x}(\ln x+1),\ \ f''(x)=\frac{-2\ln x}{x^2}$

13) $f'(x)=\frac{2}{x}\left[\frac{(\ln x)^4-1}{(\ln x)^3}\right],\ \ f''(x)=-\frac{2}{x^2}\left\{\frac{(\ln x)^5-(\ln x)^4-(\ln x)-3}{(\ln x)^4}\right\}$

14) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\ \ f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)$

15) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right),\ \ f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right)$

16) $f'(x)=e^{-2x^2}(1-4x^2),\ \ f''(x)=-4xe^{-2x^2}(3-4x^2)$

17) $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}},\ \ f''(x)=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^4}}$

18) $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}},\ \ f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}}$

19) $f'(x)=\frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}},\ \ f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$

20) $f'(x)=\cos(x^3)\cdot 3x^2,\ \ f''(x)=-9x^4\sin(x^3)+6x\cdot\cos(x^3)$

21) $f'(x)=-\sin(x^4)\cdot 4x^3,\ \ f''(x)=-16x^6\cos(x^4)-12x^2\cdot\sin(x^4)$

22) $f'(x)=3\sin^2 x\cdot\cos x,\ \ f''(x)=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x$

23) $f'(x)=\frac{2x}{\cos^2(x^2)},\ \ f''(x)=\frac{2\cdot\cos^2(x^2)-8x^2\cos(x^2)\sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$

24) $f'(x)=\tan(x^2)\cdot(-2x),\ \ f''(x)=\frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)}-2\tan(x^2)$

25) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}\cdot 2,\ \ f''(x)=\frac{4(2x+3)}{\left(1-(2x+3)^2\right)^{1.5}}$

26) $f'(x)=\frac{2x}{1+x^4},\ \ f''(x)=\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$

27) $f'(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln(x+1)+\frac{\sin x}{x+1}\right)$

28) $f'(x)=\left(\sin x\right)^{x}\left(\ln(\sin x)+\cot x\cdot x\right)$

29) $f'(x)=\left(\cos x\right)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}-\tan x\cdot\ln x\right)$

30) $y'=x^{\ln x}\left(\frac{2\ln x}{x}\right)$

31) $y'=x^{\frac{1}{x}-2}\left(1-\ln x\right)$

32) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)$

33) $y'=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sqrt{x}\right)$

34) $y'=\left(x^2+1\right)^{x}\left(1\cdot\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\cdot x\right)$

35) $y'=\left(x+1\right)^{(x+1)}\left[\ln\left(x+1\right)+1\right]$

# תרגילים נוספים לפי סוגים

## שאלות

### הנגזרת של פונקציית חזקה

**1)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$

ב. $f(x)=x^7$

ג. $f(x)=x^2$

ד. $f(x)=x^1$

ה. $f(x)=x^{-3}$

ו. $f(x)=x^{-1}$

ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$

ח. $f(x)=x\frac{1}{3}$

ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

### הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

**2)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$

ב. $f(x)=3x^7$

ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$

ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$

ה. $f(x)=8x^1$

ו. $f(x)=3x^{-2}$

ז. $f(x)=\frac{4}{x}$

ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$

ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

### הנגזרת של קבוע

**3)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$

ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

### הנגזרת של סכום והפרש

**4)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$

ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$

### הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

### הנגזרת של אחד חלקי איקס

6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$ ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

### הנגזרת של מכפלה

7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$

ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$

### הנגזרת של מנה

8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x}$ ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

### הנגזרת של שורש

9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$ ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$

## תשובות סופיות

**1)**

א. $f'(x)=3x^2$ ב. $f'(x)=7x^6$ ג. $f'(x)=2x$

ד. $f'(x)=1$ ה. $f'(x)=3x^{-4}$ ו. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

ז. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

**2)**

א. $f'(x)=6x^2$ ב. $f'(x)=21x^6$ ג. $f'(x)=2x^3$

ד. $f'(x)=\frac{6x^5}{7}$ ה. $f'(x)=8$ ו. $f'(x)=-\frac{6}{x^3}$

ז. $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$ ח. $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $f'(x)=\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$

**3)** א. 0 ב. 0

**4)** א. $f'(x)=3x^2+4x-3$ ב. $f'(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$

**5)** א. $f'(x)=15(5x-x)^2$ ב. $f'(x)=15x^2(x^3+6)^4$

ג. $f'(x)=6(x-x^2)(1-2x)$ ד. $f'(x)=-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $f'(x)=\frac{8(x+1)^3}{3}$

**6)** א. $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{x^2}$ ג. $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$ ד. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

ה. $f'(x)=-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ו. $f'(x)=\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $f'(x)=-\frac{6}{(x+3)^2}$

**7)** א. $f'(x)=10x-14$ ב. $f'(x)=(5x+1)^2(20x-44)$

ג. $f'(x)=x^2(6-x)^3(18-7x)$

**8)** א. $f'(x)=\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $f'(x)=\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$

ד. $f'(x)=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ ה. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ו. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

**9)** א. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$

ד. $f'(x)=\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $f'(x)=\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $f'(x)=\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

# גזירה סתומה

## שאלות

**1)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2+y^5-1=1$.

**2)** גזרו את הפונקציה הסתומה $4\ln x+10\ln y=y^2$.

**3)** גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}$.

**4)** נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $e^{y^2-4x}+x^2y^3=\sin(y-2x)+4y+1$.
חשבו את $y'$ בנקודה $(1,2)$.

**5)** נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $\sqrt{4x+y^3}+\cos^2(xy)=\ln(x^2y+1)+\ln e^3$.
חשבו את $y'$ בנקודה בה $y=0$.

**6)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-xy=10$.

**7)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-y^x=1$.

**8)** נתונה פונקציה סתומה $xy-y^3+x^2-x=0$.
מצאו את ערך $y''$ בנקודה בה $y=1$.

**9)** נתון עקום שמשוואתו $yx^2+e^y=x$.
א. הראו שעבור $x=1$ קיים ערך $y$ אחד ויחיד ומצאו אותו.
ב. חשבו את $y''$ בנקודה בה $x=1$.

**10)** נתון כי המשוואה $h(y)-x+1=2x^3+4e^y+2y$,
מגדירה את $y=y(x)$ כפונקציה סתומה של $x$.
נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

## תשובות סופיות

1) $y'=\frac{-2x}{5y^4-1}$, $\quad 5y^4-1\neq 0,$

2) $y'=\frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y}-2y}$, $\quad \frac{10}{y}-2y\neq 0,$

3) $y'=\frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}$, $\quad \sqrt{x}\neq 0, \quad \sqrt{x}\neq 1,$

4) $y'_{(1,2)}=-\frac{14}{11}$

5) $y'_{(1,0)}=1$

6) $y'=\frac{y-x^y\cdot\frac{y}{x}}{x^y\cdot\ln x-x}$, $\quad x^y\cdot\ln x-x\neq 0,$

7) $y'=\frac{-x^y\cdot\frac{y}{x}+y^x\cdot\ln y}{x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}}$, $\quad x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}\neq 0,$

8) $-1$

9) ב. $y''_{(1,0)}=-\frac{9}{8}$

10) שאלת הוכחה.

# כלל השרשרת

## שאלות

**1)** נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4)=10$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f(x^2)$.
חשבו את $g'(2)$.

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. נתונה פונקציה $f(x)$. נגדיר פונקציה חדשה
$z(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)-f(4x+1)$.
חשב ואת $z'(x)$.

ב. נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1)=2,\ f'(1)=e$.
נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f^2(\ln x)+\frac{1}{f^2(\ln x)}$.
חשבו את $z'(e)$.

**3)** נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f^2(\sqrt{x})-1}{f(\sqrt{x})}$.
ידוע כי $f(10)=f'(10)=4$.
חשבו $g'(100)$.

**4)** נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$.
ידוע כי $f(1)=1\ ,\ f'(1)=4$.
חשבו $g'(1)$.

**5)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^2(\ln x)}{f(\ln x)+1}$.
ידוע כי $f'(0)=1\ ,\ f(0)=2$.
חשבו $g'(1)$.

**6)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^{10}(4x)+1}{f\left(\frac{4}{x}\right)+1}$.
ידוע כי $f'(4)=2\ ,\ f(4)=1$.
חשבו $g'(1)$.

**7)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{\sqrt[4]{f^7\left(x^2\right)}}{f\left(x^4\right)}$.
ידוע כי $f'(1)=4\ ,\ f(1)=1$.
חשבו $g'(1)$.

**8)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה $f''''(x)$ היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית נגדיר $g(x)=\left(f(x)\right)^4$.
קבעו האם הפונקציה $g'(x)$ זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית.
האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?

## תשובות סופיות

1) $40$

2) א. $z'(x)=f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)-f'(4x+1)\cdot 4$ ב. $z'(e)=3\frac{3}{4}$

3) $\frac{17}{80}$

4) $36$

5) $\frac{8}{9}$

6) $44$

7) $-2$

8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.

# גזירה לוגריתמית

## שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

1) $$y=\sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}}\cdot\sqrt[10]{(2x+1)^7}$$

2) $$y=\left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x}$$

3) $$y=\frac{(x+2)^{3x+4}\cdot(5x+6)}{(7x+8)\cdot(9x+10)}$$

## תשובות סופיות

1) $$y'=y\left[\frac{1}{4}\frac{1}{10x-1}\cdot 10+\frac{7}{10}\frac{1}{2x+1}\cdot 2-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\right]$$

2) $$y'=\left((10x+1)^{\frac{1}{4}}\right)^{2^x}\cdot\frac{1}{4}\left[2^x\cdot\ln 2\cdot\ln(10x+1)+\frac{1}{10x+1}\cdot 10\cdot 2^x\right]$$

3) $$y'=y\left[3\cdot\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}(3x+4)+\frac{1}{5x+6}\cdot 5-\frac{1}{7x+8}\cdot 7-\frac{1}{9x+10}\cdot 9\right]$$

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 11 - חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות

### תוכן העניינים

# נגזרת הפונקציה ההפוכה

## שאלות

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות:

**1)** $$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**2)** $$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

**3)** $$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

# נגזרת מסדר גבוה

## שאלות

חשבו את הנגזרת ה- $n$, $f^{(n)}(x)$ , של הפונקציות הבאות :

1) $y=\frac{1}{x+a}$

2) $y=\frac{2x+3}{x^2-3x+2}$

3) $y=\frac{x}{(x^2-1)(x-2)}$

4) $y=\frac{x^4}{x^2-1}$

## תשובות סופיות

1) $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot(x+a)^{-n-1}$

2) $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot\left(-5(x-1)^{-n-1}+7(x-2)^{-n-1}\right)$

3) $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot\left(-\frac{1}{2}(x-1)^{-n-1}-\frac{1}{6}(x+1)^{-n-1}+\frac{2}{3}(x-2)^{-n-1}\right)$

4) $y'=2x-\frac{1}{2}\left((x-1)^{-2}-(x+1)^{-2}\right)$ , $y''=2+\left((x-1)^{-3}-(x+1)^{-3}\right)$

$y^{(n)}=\frac{1}{2}(-1)^n\cdot n!\cdot\left((x-1)^{-n-1}-(x+1)^{-n-1}\right),(n>2)$

# נוסחת לייבניץ

## שאלות

חשבו את הנגזרת העשירית , $y^{(10)}$ , של הפונקציות הבאות :

1) $y=x^3e^x$

2) $y=x^3\sin 5x$

## תשובות סופיות

1) $\left(e^x\cdot x^3\right)^{(10)}=e^x\left[x^3+103x^2+456x+120\cdot 6\right]$

2) $\left(\sin 5x\cdot x^3\right)^{(10)}=-5^{10}x^3\sin 5x+6\cdot 5^{10}x^2\cos 5x+54\cdot 5^9x\sin 5x-24\cdot 5^9\cos 5x$

# גזירה פרמטרית

## שאלה

1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה הבאה,
הנתונה בצורה פרמטרית $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t\cos t \end{cases}$.

## תשובה

1) $y' = \dfrac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}$ , $y'' = \dfrac{(-t\cos t - 2\sin t)(1-\cos t) - \sin t(\cos t - t\sin t)}{(1-\cos t)^3}$

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 12 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

תוכן העניינים

# המשיק

## שאלות

**1)** מצאו את שיפוע הפונקציה

א. $f(x)=2x^3-7x$ , בנקודה $(2,2)$.

ב. $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$ , בנקודה $x=-2$.

**2)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$ , כאשר $a>0$.

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$ , הוא בעל שיפוע 1.

מצאו את הקבוע $a$.

**3)** הישר $2y-3x=3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x)=3\sqrt{x}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

**4)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=a\cdot 3^{2x-1}+3^{x-b}$ , בנקודה $(1,15)$ , הוא $21\ln 3$.

מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**5)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{\ln^2 x+a}{\ln x+b}$ , בנקודה $\left(\frac{1}{e},-1\right)$ , הוא $\frac{e}{3}$.

מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**6)** לאילו ערכי $k$ ישיק הישר $y=-5x+6$ , לגרף הפונקציה

$f(x)=x^3-2x^2-4x+k$ ?

לכל ערך $k$ כזה מצאו את נקודת ההשקה.

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-4x+5$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות $x=3$ ו- $x=1$.

ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א',
עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$.

**8)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2+1}{x-2}$.
מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של $45°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$.

**9)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+5$.
מצאו את שיעורי ה- $x$ של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של $135°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$.

**10)** פונקציה $f(x)$ גזירה ברציפות ב- $0$ ומקיימת $f(0)=0$.
ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ היא $30°$.
חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

**11)** מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$, בנקודות $x=1$ ו- $x=0$.

## תשובות סופיות

**1)** א. $17$ ב. $4$

**2)** $a=2$

**3)** $(1,3)$

**4)** $a=2,\ b=-1$

**5)** $a=2,\ b=-2$

**6)** לערך $k=6$, בנקודה $x=1$; לערך $k=\frac{158}{27}$, בנקודה $x=\frac{1}{3}$.

**7)** א. ראו באתר. ב. $\alpha=63.43°,\ \ \beta=116.56°$

**8)** $x=5,\ x=-1$

**9)** $x=1,\ x=\frac{1}{3}$

**10)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

**11)** $\alpha=33.69°,\ \ \beta=90°$

# בעיות משיקים

## שאלות

1) הישר $y=4x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+3$.
מצאו את $b$ ואת נקודת ההשקה.

2) הישר $y=3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+b$.
מצאו את $b$ ואת נקודת ההשקה.

3) הישר $y=ax+\frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)=\frac{2}{x+c}$ בנקודה $x=0$.
מצאו את $a$ ו- $c$.

4) הישר $y=x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^x$.
מצאו את $b$ ואת נקודת ההשקה.

5) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\ln x$ בנקודה $x=e$.

בשאלות **6-7** מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

6) $y=x^2-2x+1$, $(2,-3)$

7) $y=\sqrt{x}$, $(-3,1)$

8) מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות $y=x^2$ ו- $y=-\frac{1}{4}x^2-5$.

9) הפונקציות $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ משיקות זו לזו.
מצאו את $k$ ואת נקודת ההשקה.

**10)** נתון כי $f$ גזירה לכל $x$.

א. הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=x^2 f(3x-2)$ גזירה לכל $x$.

ב. הישר $2y=10x+11$ משיק לגרף הפונקציה $z(x)$ בנקודה $x=-1$.
מצאו את השיפוע של $f(x)$ בנקודה $x=-5$.

## תשובות סופיות

1) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y=4x+9$.

2) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b=4$.

3) נקודת ההשקה היא $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}$.

4) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y=x+1$.

5) משוואת המשיק היא $y=\frac{1}{e}x$.

6) $(0,1)$, $y=-2x+1$ ; $(4,9)$, $y=6x-15$

7) המשיק $(9,3)$, $y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$.

8) $y=-2x-1$, $y=2x-1$

9) $k=1.5$, נקודת ההשקה $(1,1)$.

10) א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.

# בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

## שאלות

1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$ , בנקודה $x=-1$ .

2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$ , ששיפועו $2$ .

3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^3+1$ , בנקודה $x=0$ .

4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$ , בנקודה $x_1=1$ .

5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{2}{ax+3}$ , בנקודה $y=2$ , הוא $-4$.
מצאו את ערכו של הפרמטר $a$ ואת משוואת המשיק.

6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x^3}$ , היוצרים זווית של $135°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ , ששיפועו $-2$.

8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ ,
בנקודה $x_1=2$ .

9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ , בנקודה $(1,6)$ , הוא $-6$ .
מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ , ואת משוואת המשיק.

10) נתונה הפונקציה $y=e^{2x}+3ex$ , והעבירו לה משיק בנקודה $x=2$ .
מצאו את משוואת המשיק.

**11)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f\left(x\right)=e^{2x}+xe^{-x}$ , בנקודה $x=0$ .

**12)** מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f\left(x\right)=\left(e+1\right)e^{x}-e^{2x}$ ,
בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=e$ .

**13)** לפונקציה $g\left(x\right)=\frac{\ln x^{2}}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x=e^{2}$ .
מצאו את משוואת המשיק.

**14)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=x\cdot\ln\left(x^{2}+1\right)$ , בנקודה $x=1$
.

**15)** הגרפים של $f\left(x\right)=\ln x$ ו- $g\left(x\right)=1$ נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק.
מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

**16)** מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^{2}+y^{2}=25$ , בנקודה $\left(3,4\right)$ .

**17)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$xy^{2}+y-x=xy$ , דרך הנקודה $\left(1,1\right)$ .

**18)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$x^{2}y+e^{y^{2}-4x}=\ln x+1$ ,
דרך הנקודה $\left(1,2\right)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

**19)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$\sqrt{xy+y}+x^{2}y=xy^{2}$ ,
דרך הנקודה $\left(1,2\right)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

**20)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$e^{xy^{2}}+y=y^{2}-1$ ,
דרך הנקודה $\left(0,2\right)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

**21)** נתונה הפונקציה הסתומה $x+y\cdot e^{y}=xy^{2}+x^{2}$ .

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y=0$ .

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

## תשובות סופיות

1) $y=24x+22$

2) $y=2x-3$

3) $y=1$

4) $y=-12x+9$

5) $a=2,\quad y=-4x-2$

6) $y=-x+1\frac{1}{3},\quad y=-x-1\frac{1}{3}$

7) $y=-2x+8$

8) $y=\frac{11}{16}x-\frac{30}{16}$

9) $a=6,\ b=2,\quad y=-6x+12$

10) $y=\left(2e^4+3e\right)x-3e^4$

11) $y=3x+1$

12) $y=\left(-e^2+e\right)x+e^2,\quad y=\left(e-1\right)x+e$

13) $y=-\frac{2}{e^4}x+\frac{6}{e^2}$

14) $y=\left(\ln 2+1\right)x-1$

15) $y=\frac{1}{e}x$

16) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$

17) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

18) $y=\frac{1}{5}x+1\frac{4}{5}$

19) $y=\frac{1}{5}x+1\frac{5}{6}$

20) $y=\frac{4}{3}x+2$

21) א. $(0,0),\ (1,0)$ ב. בראשית הצירים: $y=-x$, המשוואה השנייה: $y=x-1$.

# הנורמל

## שאלות

**1)** מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{2x-2}$ , בנקודה $(3,2)$.

**2)** מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x)=x^4$ , המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5,0)$ ו- $(2,4)$.

**3)** משוואת נורמל לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+1$ , בנקודה מסוימת, היא $4y+x=6$.
מצאו את הנקודה.

## תשובות סופיות

**1)** $y=-2x+8$

**2)** $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

**3)** $(2,1)$

# זווית שבין שתי עקומות

## שאלות

1) מצאו את הזווית בין הפונקציות $y=f\left(x\right)=x^2$ ו- $y=g\left(x\right)=\frac{1}{x}$ .

2) מצאו את הזווית בין המעגל $x^2+y^2=8$ והפרבולה $y^2=2x$ .

3) הוכיחו שהאליפסה $x^2+2y^2=8$ וההיפרבולה $x^2-y^2=2$ נחתכות בזווית ישרה.

## תשובות סופיות

1) $71.57°$
2) $71.56°$
3) שאלת הוכחה.

# נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

## שאלות

1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
$\sqrt{5},\ \sqrt{8},\ \sqrt{27}$

2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
$\ln 2,\ \sqrt[3]{9}$

## תשובות סופיות

1) $\sqrt{5}\cong 2.25,\ \sqrt{8}\cong 2\frac{5}{6},\ \sqrt{27}=5\frac{1}{5}$

2) $\ln 2\cong 1,\ \sqrt[3]{9}\cong 2\frac{1}{12}$

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 13 - כלל לופיטל

### תוכן העניינים

# גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

## שאלות

### גבולות מהצורה $\frac{0}{0}$ ו- $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי- רציונאליים):

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\quad (a,b>0)$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^2-2x+1}$

14) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)+x}{x}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(ax^2\right)}{bx^2}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(ax\right)}{\sin\left(bx\right)}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

21) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

22) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(1-\cos x\right)}{x^4}$

23) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x\left(1+x\right)}{x^3}$

24) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\sin\left(x^2\right)}{x^4}$

25) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x^2\right)}{x^4}$

26) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan\left(x^2+3x\right)}{\arcsin\left(x^2-4x\right)}$

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\tanh x$

28) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sinh x}$

29) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cosh x-2}{1-\cos 2x}$

30) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x+3}$

31) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$

32) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x+x+1}{e^x}$

33) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\ln x\right)^2+2\ln x-3}{x}$

34) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\sin x\right)}{\ln\left(\tan x\right)}$

35) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

## תשובות סופיות

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) $\frac{5}{6}$ | 2) $\frac{20}{17}$ | 3) $n-1$ | 4) $4$ | 5) $\frac{1}{6}$ |
| 6) $\frac{3}{2}$ | 7) $\frac{5}{6}$ | 8) $-\frac{3}{2}$ | 9) $1$ | 10) $\ln\frac{a}{b}$ |
| 11) $\frac{1}{2}$ | 12) $\frac{1}{6}$ | 13) $-\frac{1}{2}$ | 14) $2$ | 15) $1$ |
| 16) $1$ | 17) $\frac{a}{b}$ | 18) $\frac{a}{b}$ | 19) $\frac{1}{6}$ | 20) $\frac{1}{2}$ |
| 21) $\frac{1}{2}$ | 22) $\frac{1}{8}$ | 23) $\frac{1}{3}$ | 24) $-\frac{1}{3}$ | 25) $-\frac{1}{2}$ |
| 26) $-\frac{3}{4}$ | 27) $1$ | 28) $1$ | 29) $\frac{2}{3}$ | 30) $\frac{1}{2}$ |
| 31) $\frac{1}{2}$ | 32) $\infty$ | 33) $0$ | 34) $\infty$ | 35) $0$ |

# גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

## גבולות מהצורה $\infty\cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln x$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\cdot\ln x$

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x$

7) $\lim\limits_{x\to 3^+}(x^2-9)\cdot\ln(x-3)$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left[\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right]$

## תשובות סופיות

1) $\infty$ 2) $0$ 3) $0$ 4) $0$ 5) $0$

6) $0$ 7) $0$ 8) $6$ 9) $\frac{5}{2}$

# גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

## שאלות

### גבולות מהצורה $\infty-\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

3) $\lim_{x\to0^+}\left[\ln(3x)-\ln(\sin 5x)\right]$

4) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

5) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

6) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

## תשובות סופיות

1) $0$

2) $\frac{1}{2}$

3) $\ln\frac{3}{5}$

4) $\frac{1}{2}$

5) $-\frac{1}{2}$

6) $\frac{1}{3}$

# גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה:** $\infty^0$ , $0^{\pm\infty}$ , $1^{\pm\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

2) $\lim_{x\to 0^+} (ax)^x \ , \ (a>0)$

3) $\lim_{x\to 2^+} (2x-4)^{x-2}$

4) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

5) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

6) $\lim_{x\to 0}(1+\tan 3x)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

8) $\lim_{x\to 0}\left(\cos x^2\right)^{\frac{1}{x^4}}$

9) $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

10) $\lim_{x\to 0^+} x^{\tan x}$

11) $\lim_{x\to 0}(x+1)^{\cot x}$

12) $\lim_{x\to 0^+} (x+\sin x)^{\tan x}$

13) $\lim_{x\to 0^+} \left(1+x^2\right)^{\cot^2 x}$

14) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

15) $\lim_{x\to 1^-}[\ln(1-\ln x)]^{x-1}$

## תשובות סופיות

1) $e$ 2) $1$ 3) $1$ 4) $1$ 5) $e^2$

6) $1$ 7) $e^3$ 8) $e^{1/3}$ 9) $e^{-1/2}$ 10) $1$

11) $1$ 12) $e$ 13) $1$ 14) $e$ 15) $0$

# מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

## שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים.
לבסוף, חשבו את הגבול.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

## תשובות סופיות

1) $1$

2) $\dfrac{1}{4}$

3) $\dfrac{3}{4}$

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 14 - חקירת פונקציה

### תוכן העניינים

# הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
   - תחום הגדרה ורציפות.
   - נקודות חיתוך עם הצירים.
   - זוגיות ואי-זוגיות.
   - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
   - תחומי עלייה וירידה.
   - נקודות קיצון.
   - תחומי קמירות וקעירות.
   - נקודות פיתול.
   - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד מכאן.

   בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

# חקירת פולינום

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=x(x-9)^2$    2) $f(x)=x^4-2x^3$

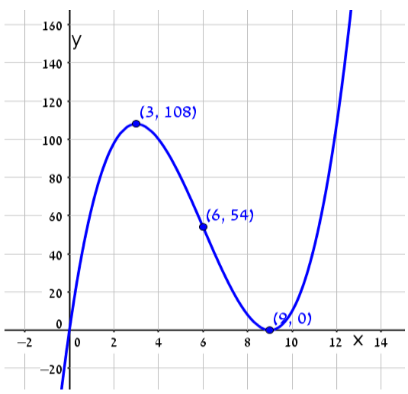
## תשובות סופיות

1) תחום הגדרה: כל $x$. נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0 ו-9.
נקודות קיצון: מינימום: $(9,0)$, מקסימום: $(3,108)$.
תחום עלייה: $x<3 \quad or \quad x>9$, ירידה: $3<x<9$.
תחום קמירות: $x>6$, קעירות: $x<6$.
נקודת פיתול: $(6,54)$.

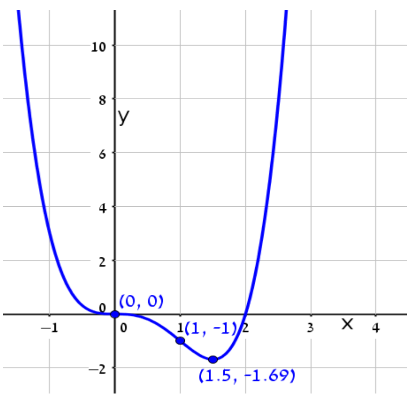
2) תחום הגדרה: כל $x$. נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0 ו-2.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(1.5,\frac{-27}{16}\right)$.
תחום עלייה: $x>1.5$, ירידה: $x<1.5$.
תחום קמירות: $x>1 \quad or \quad x<0$, קעירות: $0<x<1$.
נקודות פיתול: $(1,-1),\ (0,0)$.

**גרפים**

1)




2)



# חקירת פונקציה רציונלית

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

2) $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

3) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

4) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

5) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

6) $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

7) $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

8) $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

**הערות**

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת $y=x-1$.

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2,0.25)$. נקודת פיתול: $\left(3,\frac{2}{9}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<2$, ירידה: $x>2 \ \ or \ \ x<0$.
תחום קמירות: $x>3$, קעירות: $0<x<3 \ \ or \ \ x<0$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,0)$. נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$.
תחום עלייה: $x<-1 \ \ or \ \ x>0$, ירידה: $-1<x<0$.
תחום קמירות: $x<-1 \ \ or \ \ -1<x<\frac{1}{2}$, קעירות: $x>\frac{1}{2}$.

**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=-2, \ \ x=2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(-\sqrt{12},-\sqrt{27}\right)$, מקסימום: $\left(\sqrt{12},\sqrt{27}\right)$.
תחום עלייה: $x<-\sqrt{12} \ \ or \ \ x>\sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12}<x \neq \pm 2<\sqrt{12}$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>2 \ \ or \ \ -2<x<0$, קעירות: $x<-2 \ \ or \ \ 0<x<2$.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-3,-\frac{27}{4}\right)$.
תחום עלייה: $x<-3 \ or \ \ x>-1$, ירידה: $-3<x<-1$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $x<-1 \ \ or \ \ -1<x<0$.

**5)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : $-1$, עם ציר ה- $x$ : $-1$.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3,\frac{1}{8}\right)$.
תחום קמירות: $-3<x<-1$ & $x>1$, קעירות: $-1<x<1$ or $x<-3$.

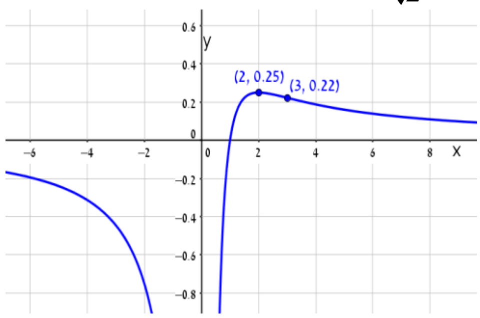
**6)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$, $x \neq 5$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : $y=-\frac{1}{10}$, עם ציר ה- $x$ : $\pm 1$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78,-3.88)$, מינימום: $(0.36,-0.11)$.
תחום עלייה: $0.36<x<2$ or $2<x<2.78$,
ירידה: $x>5$ or $2.78<x<5$ or $x<0.36$. נקודת פיתול: $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<2$ or $x>5$, קעירות: $2<x<5$ or $x<-1$.

**7)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : $y=-\frac{3}{4}$, עם ציר ה- $x$ : $x=1$, $x=3$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(0.85,-0.09)$.
תחום קמירות: $0.85<x<2$ or $x<-2$, קעירות: $-2<x<0.85$ or $x>2$.

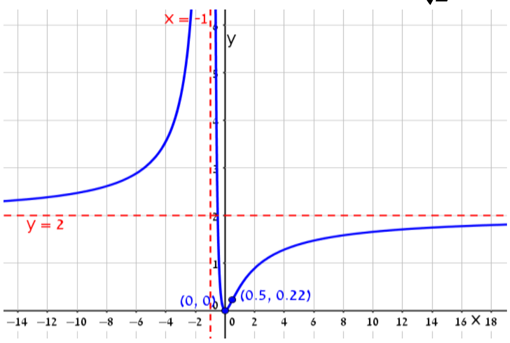
**8)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$, $x \neq -1$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-2,-4)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $x<-2$ or $0<x<1$ or $x>1$, ירידה: $-2<x<-1$ or $-1<x<0$.
נקודת פיתול: אין.
תחום קמירות: $-1<x<1$ or $x>1$, קעירות: $x<-1$.

## גרפים

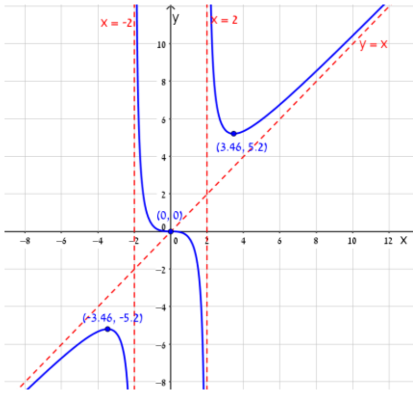
1)



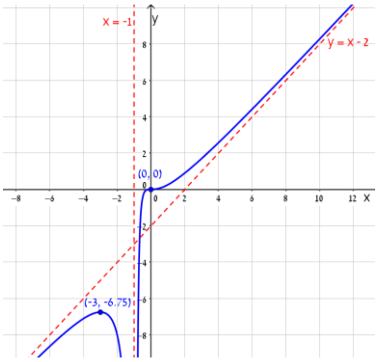

2)



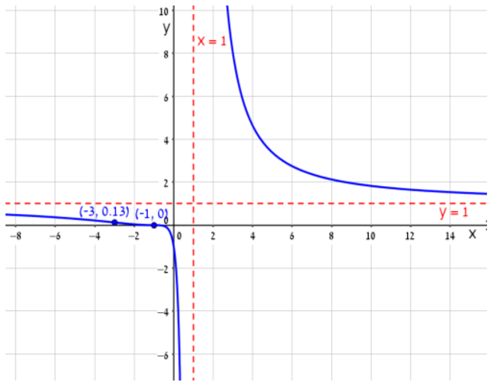

3)



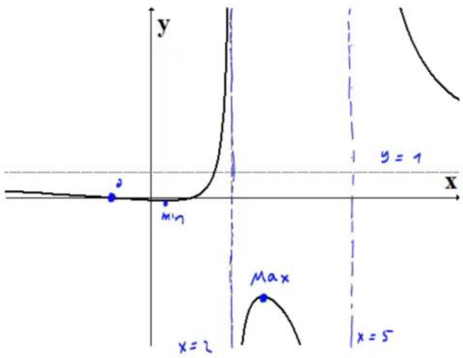

4)



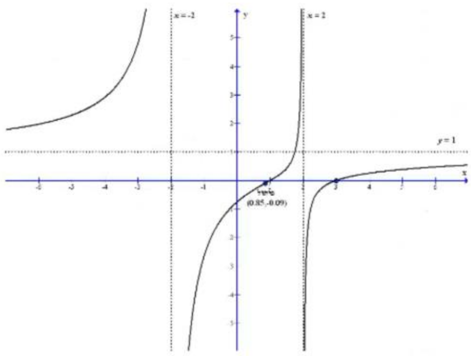

5)



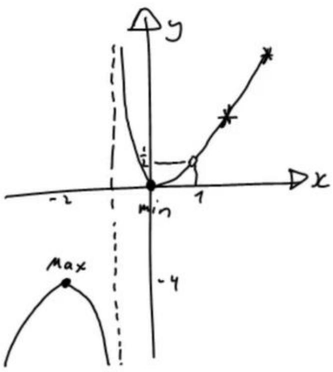

6)




7)




8)



# חקירת פונקציה מעריכית

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**1)** $f\left(x\right)=x-e^{x}$

**2)** $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{x}}$

**3)** $f(x)=\left(x+2\right)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

**4)** $f\left(x\right)=x\cdot e^{-2x^{2}}$

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $-1$, עם ציר ה- $x$: אין (ראו בהרחבה בסרטון).
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y=x$ ב- $-\infty$ בלבד.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,-1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל $x$.

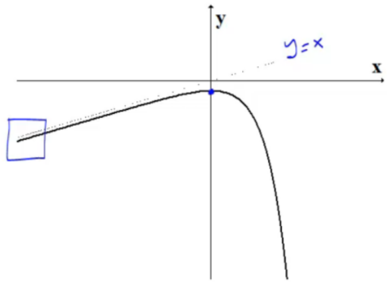
**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: אין.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $\left(-0.5,e^{-2}\right)$.
תחום קמירות: $-0.5<x<0 \;\; or \;\; x>0$, תחום קעירות: $x<-0.5$.

**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: $-2$.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת: הישר $y=x+3$ ב- $\pm\infty$.
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-1,e^{-1}\right)$, מינימום: $\left(2,4e^{\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $x<-1 \;\; or \;\; x>2$, ירידה: $-1<x<0 \;\; or \;\; 0<x<2$.
נקודת פיתול: $\left(-0.4,1.6e^{-2.5}\right)$.
תחום קמירות: $-0.4<x<0 \;\; or \;\; x>0$, תחום קעירות: $x<-0.4$.

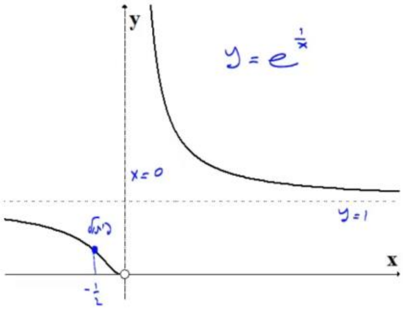
**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, מינימום: $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, ירידה: $x<-\frac{1}{2} \;\; or \;\; x>\frac{1}{2}$.
נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{3}{4}},\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}},-\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $(0,0)$.
תחום קמירות: $-\sqrt{\frac{3}{4}}<x<0 \;\; or \;\; x>\sqrt{\frac{3}{4}}$, תחום קעירות:
$0<x<\sqrt{\frac{3}{4}} \;\; or \;\; x<-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

**גרפים**

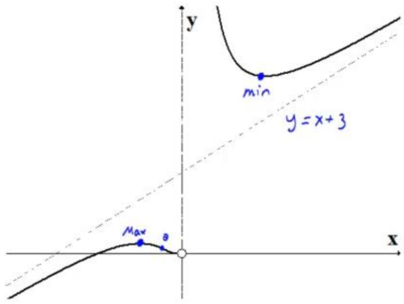
**1)**



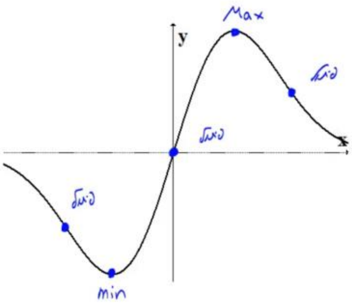

**2)**




**3)**




**4)**



# חקירת פונקציה לוגריתמית

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

2) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

3) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

4) $f(x)=x\cdot\ln x$

5) $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

6) $f(x)=4\ln^2 x-4\ln x-3$

7) $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

**הערה**

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e,\frac{1}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<e$, ירידה: $x>e$.
נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},\frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
תחום קמירות: $x>e^{1.5}$, קעירות: $0<x<e^{1.5}$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: 1.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x=0$,
משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2,\frac{2}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<e^2$, ירידה: $x>e^2$.
נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}},\frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$. תחום קמירות: $0<x<e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x>e^{\frac{8}{3}}$.

**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x<2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $y=-\frac{1}{2}\ln 2$, עם ציר ה- $x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$, משופעת: אין.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-e^{-1}\right)$.
תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

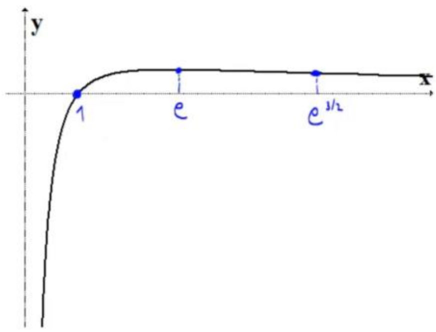
5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: $x=e^{1},\ \ x=e^{-3}$.
אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-4\right)$.
תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.
נקודת פיתול: $(1,-3)$. תחום קמירות: $x>1$, קעירות: $0<x<1$.

6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: $x=e^{1.5},\ \ x=e^{-0.5}$.
אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{\frac{1}{2}},-4\right)$.
תחום עלייה: $x>e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0<x<e^{\frac{1}{2}}$.
נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},0\right)$. תחום קמירות: $0<x<1.5$, קעירות: $x>1.5$.

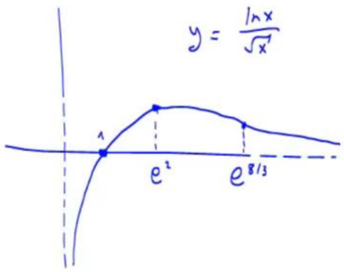
7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0,\ \ x\neq 1$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: אין.
אסימפטוטה אנכית: $x=1$, משופעת ואופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},2\right),\ (e,2)$.
תחום עלייה: $e^{-1}<x<1\ \ or\ \ x>e$, ירידה: $x<e^{-1}\ \ or\ \ 1<x<e$.
נקודת פיתול: $(5.15,3.06)$.
תחום קמירות: $1<x<5.15\ \ or\ \ 0<x<1$, קעירות: $x>5.15$.

## גרפים

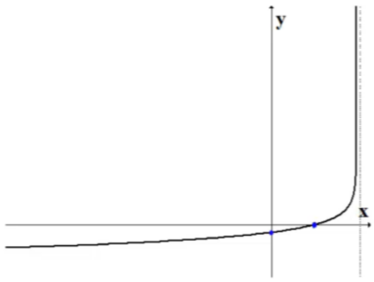
**1)**



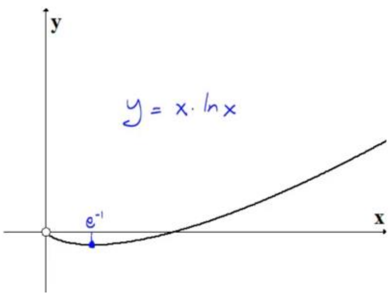

**2)**



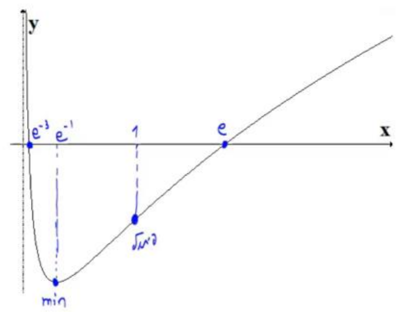

**3)**



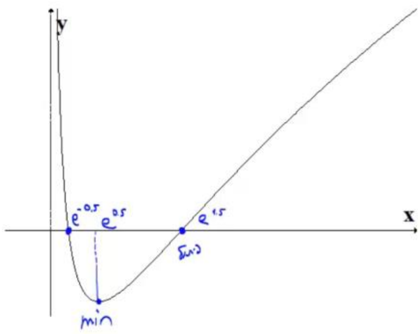

**4)**



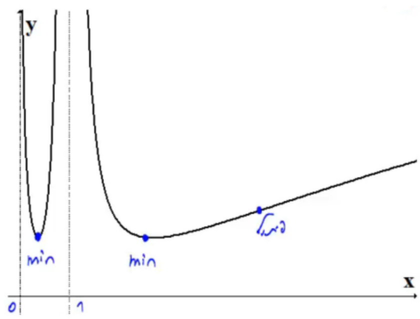

**5)**




**6)**




**7)**



# חקירת פונקציה עם שורשים

## שאלה

**1)** חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

## תשובה

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$.

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 1, עם ציר ה- $x$: אין.

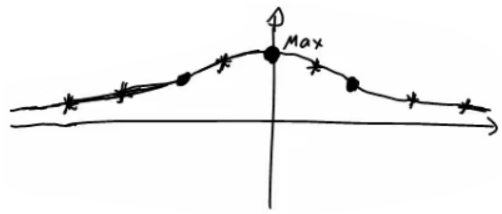
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y=0$.

נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.

נקודות פיתול: $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

תחום קמירות: $x<\sqrt{\frac{1}{2}}$ $or$ $x<-\sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}}<x<\sqrt{\frac{1}{2}}$.

גרף:



# חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}$

2) $f(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

4) $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-2}$

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0 או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5},0.326\right)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $0<x<\frac{2}{5}$, ירידה: $x<0\ \ or\ \ x>\frac{2}{5}$.
נקודות פיתול: $(-0.2,0.41)$.
תחום קמירות: $x<-0.2$, קעירות: $x>0\ \ or\ \ -0.2<x<0$.

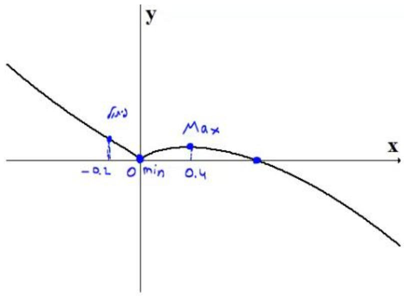
**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 1, עם ציר ה- $x$: 1- או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$, מינימום: $(-1,0),\ (1,0)$.
תחום עלייה: $-1<x<0\ \ or\ \ x>1$, ירידה: $x<-1\ \ or\ \ 0<x<1$.
נקודות פיתול: אין.
תחום קמירות: קמורה לכל $x$.

**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $-1$, עם ציר ה- $x$: $\pm 1$.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,-1)$.
תחום עלייה: $0<x<1\ \ or\ \ x>1$, ירידה: $x<-1\ \ or\ \ -1<x<0$.
נקודות פיתול: $(1,0),\ (-1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<1$, קעירות: $x>1\ \ or\ \ x<-1$.

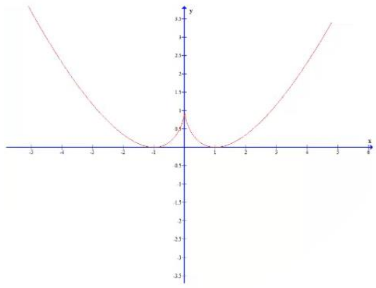
**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $-1.5$, עם ציר ה- $x$: 3.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$,
משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\infty$, ו- $y=-1$ ב- $-\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(3,0)$.
תחום עלייה: $x>3$, ירידה: $x<2\ \ or\ \ 2<x<3$.
נקודות פיתול: $(3,0)$.
תחום קמירות: $2<x<3$, קעירות: $x>3\ or\ \ x<2$.

## גרפים

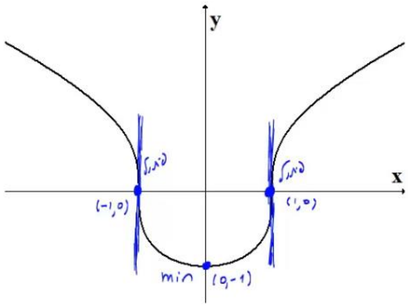
**1)**



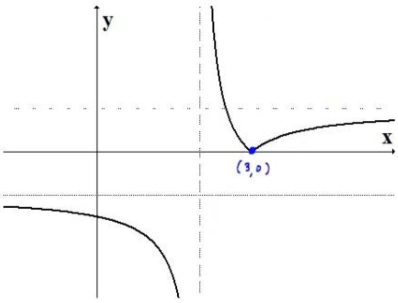

**2)**



**3)**




**4)**



# חקירת פונקציה טריגונומטרית

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\cos x$ בתחום $[0,2\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**2)** נתונה הפונקציה: $f(x)=4x-3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**3)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0,\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ בתחום הנתון.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**4)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x-\cos x-2$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**5)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=(\sin x+1)\cdot\cos x$ בתחום: $0\le x\le 1.5\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x\cdot(\sin x+1)=1$ בתחום הנתון?

**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$.

א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0,\pi]$.
ב. הוכח שהפונקציה זוגית.
ג. שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi,\pi]$.

**7)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan 2x-8\sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi<x<0.25\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**8)** $f(x)=8\cos x+2\cos 2x-3$, $[0,2\pi]$

**9)** $f(x)=2\cos^2 x-\sin 2x$, $[0,\pi]$

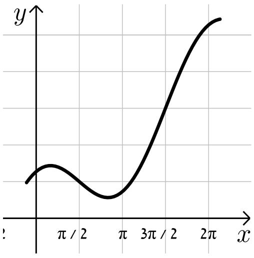
## תשובות סופיות

(1 א. $0<x<2\pi$.

ב. $\max(2\pi,2\pi+2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$ , $\max\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$ , $\min(0,2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$ .

ד. $(0,2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ , $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.



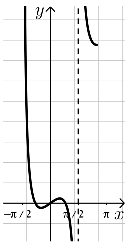

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ ,

קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$.

(2 א. $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi,13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6},0.36\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{6},-0.36\right)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$.

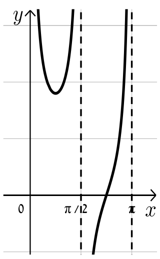


ד. $(0,0)$ ה. אנכית: $x=\frac{\pi}{2}$ ו. $(0,0)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6}\le x\le 0$,

קעירות כלפי מטה: $0<x<\frac{\pi}{2}$.

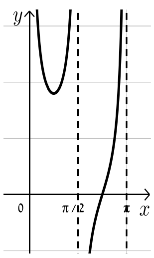
(3 א. $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ ; $0<x<\frac{\pi}{2}$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$.



ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ , $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה: $0<x<\frac{\pi}{4}$

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi,0\right)$ ה. אנכית: $x=\pi$ , $x=\frac{\pi}{2}$ , $x=0$.

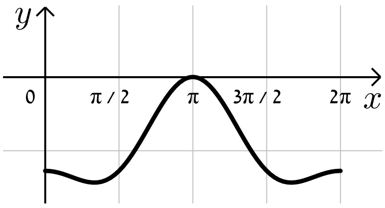
(4 א. $(\pi,0),(0,-2)$



ב. $\max(\pi,0)$, $\min\left(\frac{\pi}{3},-2.25\right)$, $\max(0,-2)$, $\max(2\pi,-2)$, $\max\left(1\frac{2}{3}\pi,-2.25\right)$

ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi<x<2\pi$ , $\frac{\pi}{3}<x<\pi$ , יורדת: $\pi<x<1\frac{2}{3}\pi$ , $0<x<\frac{\pi}{3}$. גרף:

**5)** א. $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ , $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ , $(0,1)$

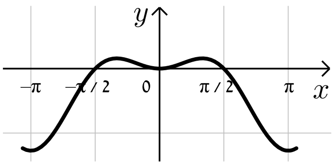



ב. $(0,1),\left(\frac{\pi}{6},1.29\right),\left(\frac{5}{6}\pi,-1.29\right),(1.5\pi,0)$

ד. 2 פתרונות.

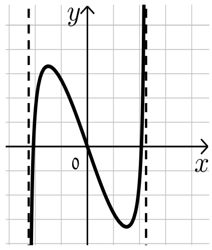
**6)** א. חיתוך: $(0,0),\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ , קיצון: $\min(\pi,-2)$ קצה,

$\min(0,0),\ \max\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ קצה.



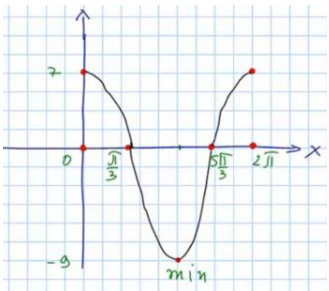

**7)** א. $(0,0),(\pm 0.23\pi,0)$ ב. $x=\pm 0.25\pi$.

ג. $\max\left(-\frac{\pi}{6},\sqrt{27}\right)$ , $\min\left(\frac{\pi}{6},-\sqrt{27}\right)$.




**8)** נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 7, עם ציר ה- $x$: $x=\frac{\pi}{3},\ x=\frac{5\pi}{3},\ x=7$.

נקודות קיצון: מינימום: $(\pi,-9)$, מקסימום: $(0,7),\ (2\pi,7)$.




נקודות פיתול: $x=\frac{\pi}{3},\ x=\frac{5\pi}{3}$.

תחום קמירות: $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$,

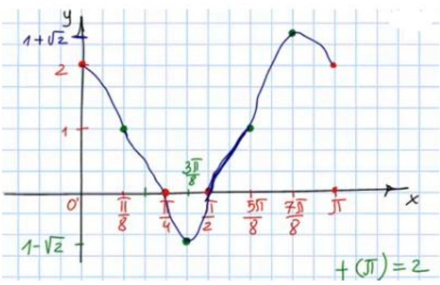
קעירות: $0<x<\frac{\pi}{3}$ or $\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$.

תחום עלייה: $x>3$, ירידה: $x<2$ or $2<x<3$.

**9)** נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 2, עם ציר ה- $x$: $x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{\pi}{2}$.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(\frac{3\pi}{8},1-\sqrt{2}\right)$, מקסימום: $\left(\frac{7\pi}{8},1+\sqrt{2}\right)$.

תחום עלייה: $\frac{3\pi}{8}<x<\frac{7\pi}{8}$, ירידה: $0<x<\frac{3\pi}{8}$ or $\frac{7\pi}{8}<x<\pi$.




נקודות פיתול: $\left(\frac{5\pi}{8},1\right),\ \left(\frac{\pi}{8},1\right)$.

תחום קמירות: $\frac{\pi}{8}<x<\frac{5\pi}{8}$,

קעירות: $0<x<\frac{\pi}{8}$ or $\frac{5\pi}{8}<x<\pi$.

# חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=x-2\arctan x$

2) $f(x)=\arcsin(\sin x)$

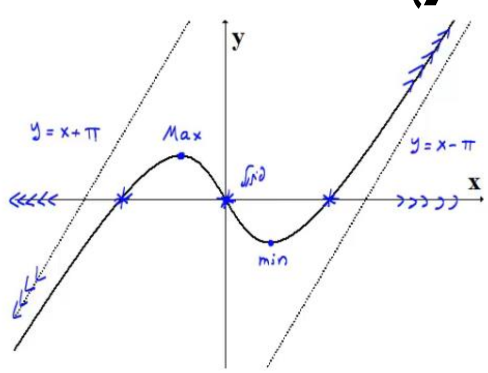
## תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: אי-זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב-$-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-1,0.575)$, מינימום: $(1,-0.575)$.
תחום עלייה: $x<-1$ or $x>1$, ירידה: $-1<x<1$.
נקודות פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $x<0$.

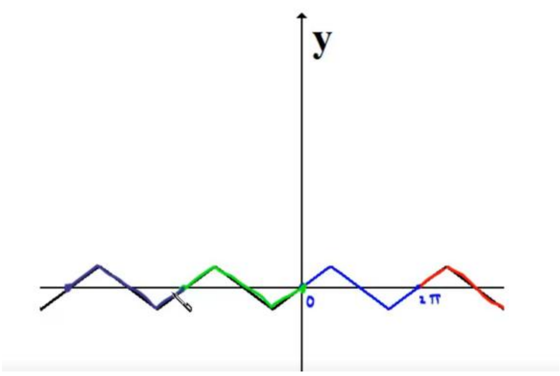
2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: אי-זוגית.
מחזוריות: כן, ממחזור $2\pi$.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: $x=0,\ \pi,\ 2\pi$.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב-$-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, מינימום: $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right)$.
תחום עלייה: $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ or $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$, ירידה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.
נקודות פיתול: אין.

### גרפים

1)




2)



# חקירת פונקציה – שאלות כלליות

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$ , וידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון.
מצאו את הקבוע $a$.

**2)** נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$ , וידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.
מצאו את הקבועים $a,b$.

**3)** נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$ , וידוע שהנקודה $x=1$ נקודת פיתול.
מצאו את הקבוע $a$.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$ , וידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת פיתול.
מצאו את הקבועים $a,b$.

**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
בנקודה $x=3$ הוא 33.
מצאו את $a$.

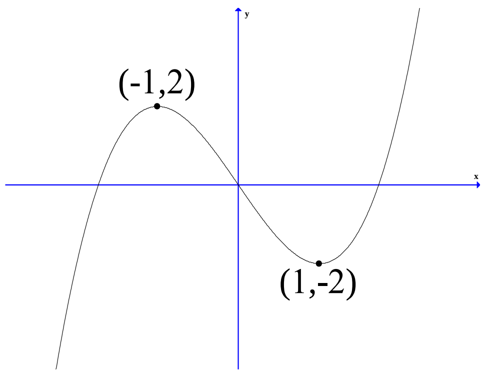
**6)** נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$ .
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3,9)$ הוא 12.
מצאו את $a,b$.

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^3+x^2}{2x^3+x+6}$ .
ידוע שהישר $y=4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את $a$.

**8)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^2+bx+4}{x}$ .
ידוע שהישר $y=0.5x+1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את $a$ ואת $b$.

**9)** נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+2x+4}{x^2+ax+6}$ .
ידוע שהישר $x=1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את $a$ .

שאלות **10-17** מתייחסות לגרף הפונקציה $f\left(x\right)=x^3-3x$ :




**10)** מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f\left(x\right)=5$ ?

**11)** מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f\left(x\right)=2$ ?

**12)** מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f\left(x\right)=0.5$ ?

**13)** עבור איזה ערך של $k$ , למשוואה $f\left(x\right)=k$ יש בדיוק פתרון אחד?

**14)** עבור איזה ערך של $k$ , למשוואה $f\left(x\right)=k$ יש בדיוק שני פתרונות?

**15)** עבור איזה ערך של $k$ , למשוואה $f\left(x\right)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

**16)** האם קיים ערך של $k$ , עבורו למשוואה $f\left(x\right)=k$ אין פתרון?

**17)** מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.

**18)** נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(2)=4$ .
נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ .

א. חשבו $z'(0.5)$ .

ב. נתון בנוסף כי $f$ עולה. הוכיחו כי $z$ יורדת.

**19)** נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1)=2,\ f'(1)=e$ .

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f^2(\ln x)+\frac{1}{x}$ .

א. האם $z$ עולה או יורדת בנקודה $x=e$ ?

ב. נתון בנוסף כי $f$ שלילית ועולה.

מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של $z$ ?

**20)** נתונה פונקציה $f(x)$ חיובית ויורדת.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=\sqrt{f(x^2)+4}$ .

מי מהבאים בהכרח נכון?

א. $z$ עולה לכל $x$ .

ב. $z$ יורדת לכל $x$ .

ג. $z$ עולה לכל $x>0$ .

ד. $z$ יורדת לכל $x>0$ .

**21)** נתונה פונקציה $f(x)$ , המקיימת $f'(1)=e$ .

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=x^2+f(\ln x)$ .

א. חשבו את $g'(e)$ .

ב. הוכיחו שהפונקציה $g$ עולה בנקודה $x=e$ .

חשבו את הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{g(e+h)-g(e)}{h}$ .

**22)** הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ידוע שנקודת החיתוך היחידה של $f(x)$ עם ציר ה- $x$ היא ב- $x=0$ .

נגדיר $g(x)=\left(f(x)\right)^2$ . איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה**:

א. אם $f$ עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$ יש נקודת מינימום.

ב. אם $f$ יורדת בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$ יש נקודת מינימום.

ג. אם $f$ עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$ אין נקודת קיצון.

**23)** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה פעמיים לכל $x$ ומקיימת $f''(x)=a\cdot f(x)$ ,
כאשר $a<0$ .
איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה**:

א. בתחום בו $f(x)$ שלילית , $f(x)$ קמורה (קעורה כלפי מעלה).
ב. אם $f(x)$ חיובית בתחום מסוים אז $f'(x)$ יורדת באותו התחום.
ג. אם בתחום מסוים $f(x)$ עולה וחותכת את ציר $x$ בנקודה $(n,0)$ , אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=n$ הוא המקסימלי באותו התחום.
ד. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אז $f(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

## תשובות סופיות

1) $a=-\frac{2}{3}$

2) $a=-4\ ,\ b=6$

3) $a=-\frac{1}{3}$

4) $a=-1\ ,\ b=3$

5) $a=1$

6) $a=\frac{2}{3}\ ,\ b=-1$

7) $a=8$

8) $a=\frac{1}{2}\ ,\ b=1$

9) $a=-7$

10) 1

11) 2

12) 3

13) $k<-2\ ,\ k>2$

14) $k=\pm2$

15) $-2<k<2$

16) לא

17) $x<-1\ ,\ -1<x<1\ ,\ x>1$

18) א. $z'(0.5)=-16$ ב. שאלת הוכחה.

19) א. עולה. ב. יורדת.

20) ד

21) א. $2e+1$ ב. שאלת הוכחה. ג. $2e+1$

22) ג

23) ד

# הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

## שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

1) $8x^3 \le 3x^4 + 6x^2$ , $(-\infty < x < \infty)$

2) $x < 2\sin x$ , $\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right)$

3) $\sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$ , $(x > 0)$

4) $\ln(x+1) \le x$ , $(x \ge 0)$

5) נתון כי $f$ רציפה לכל $x \ge 0$, $f'(x) > 0$ לכל $x > 0$, וכן $f(0) = 0$.
הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $\ln(1+f(x)) > f(x) - \frac{1}{2}(f(x))^2$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 15 - משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב

תוכן העניינים

# מציאת מספר הפתרונות של משוואה

## שאלות

בשאלות **1-4** הוכיחו שלמשוואות יש בדיוק פתרון אחד:

**1)** $x^3+4x-1=0$

**2)** $x^2=-\ln x$

**3)** $x-0.25\sin x=7$

**4)** $-4x^3+21x^2-48x+28=0$

**5)** נתונה המשוואה $ax^3+bx^2+cx+d=0$, ונתון כי $b^2<3ac$.
מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכיחו זאת.

עבור כל אחת מהמשוואות **6-9**, מצאו את מספר הפתרונות ופתרו אותה:

**6)** $e^{x-1}=x$

**7)** $\arctan x-x=0$

**8)** $\ln(x+5)-4=x$

**9)** $x^2+x\sin x=1-\cos x$

**10)** תהי $f$ פונקציה גזירה לכל $x$, המקיימת: $f(1)=2$, $f(0)=1$, $f'(x)\le 1$.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)+\sin x=4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

הוכיחו שלמשוואות בשאלות **11-13** יש בדיוק שני פתרונות:

**11)** $e^x-5x=0$    **12)** $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$    **13)** $1+4x^4=8x^3$

בכל אחת מהמשוואות **14-17**, מצאו קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הניחו שכל הפרמטרים שונים מאפס):

**14)** $ax^2+bx+c=0$

**15)** $ax^3+bx^2+cx+d=0$

**16)** $x+a\cos(bx)=1$

**17)** $ax^n+bx^{n-2}+cx^{n-4}-d=0$ $(n>4,\ odd)$

**18)** מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $a^2x+e^x=a$ כאשר $a$ קבוע ממשי.

**19)** הוכיחו שלמשוואה $2ax^3+a^2+x^2=0$ קיים פתרון אחד ויחיד כאשר $a$ קבוע ממשי.

**20)** הוכיחו שלמשוואה $x^2+x^3+5x=1$ יש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד.
הערה: שאלה זו יש לפתור תוך שימוש במשפט רול.

**21)** נתון הפולינום $p(x)=3x^4-2x^3+x^2+cx-1$.
א. הוכיחו שלפולינום יש לכל היותר שני שורשים.
ב. נתון בנוסף כי $|c|<1$.
מה מספר השורשים של הפולינום?

## תשובות סופיות

**1)** שאלת הוכחה.

**2)** שאלת הוכחה.

**3)** שאלת הוכחה.

**4)** שאלת הוכחה.

**5)** פתרון יחיד.

**6)** $x=1$

**7)** $x=0$

**8)** $x=-4$

**9)** $x=0$

**10)** שאלת הוכחה.

**11)** שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** $b^2-4ac=0$

**15)** $4b^2-12ac<0$

**16)** $\frac{1}{ab}>1$ , $\frac{1}{ab}<-1$

**17)** $b^2(n-2)^2-4anc(n-4)<0$

**18)** אם $a=0$ , למשוואה אין פתרון. אם $a\neq0$ , למשוואה יש פתרון יחיד.

**19)** שאלת הוכחה.

**20)** שאלת הוכחה.

**21)** א. שאלת הוכחה. ב. שני שורשים שונים.

# פתרון משוואות פולינומיאליות

## שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים בשאלות **3-1**:

**1)** $$\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$$

**2)** $$\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$$

**3)** $$\frac{4x^2+x-1}{x-2}$$

פתרו את המשוואות הבאות:

**4)** $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

**5)** $k^3+2k^2-3k+20=0$

**6)** $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

**7)** $k^3-6k^2+12k-8=0$

**8)** $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

**9)** $k^3-k^2+k-1=0$

**10)** $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

**11)** $7x^3-33x^2+21x+61=0$

## תשובות סופיות

1) $x^2+1$

2) $0$

3) $4x+9+\dfrac{17}{x-2}$

4) $k_1=1,\quad k_2=-2,\quad k_3=3,\quad k_4=-5$

5) $k_1=-4,\quad k_{2,3}=1\pm 2i$

6) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=-1,\quad k_4=-1,\quad k_5=-1$

7) $k_1=2,\quad k_2=2,\quad k_3=2$

8) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=1,\quad k_4=-1\quad k_5=1\quad k_6=-1$

9) $k_1=1,\quad k_{2,3}=\pm i$

10) $k_1=1,\quad k_2=2,\quad k_{3,4}=\pm 2i$

11) פתרון מקורב: $x=0.8459$ .

# שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות (שאלה **2** בשיטת ניוטון-רפסון):

**1)** $1+4x^4=8x^3$

**2)** $-4x^3+21x^2-48x+28=0$

## תשובות סופיות

**1)** פתרון מדויק $x=-1$.

**2)** פתרונות מקורבים: $x=1.9672$, $x=0.5576$.

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 16 - משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו

תוכן העניינים

# משפט רול

## שאלות

**1)** בדקו האם הפונקציה הנתונה, $f(x)$ בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצאו את כל ערכי $c$ המקיימים את מסקנת משפט רול:

א. $[0,2]$ $\quad f(x)=x^3-3x^2+2x$

ב. $[-1,1]$ $\quad f(x)=\frac{x^2-1}{x-2}$

**2)** נתון ש- $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$.

הראו ש- $f(1)=f(5)$, אך אין נקודה $c$, כך ש- $f'(c)=0$.

האם הדבר סותר את משפט רול? נמקו.

**3)** תהי $f$ פונקציה גזירה פעמיים ב- $\mathbb{R}$,

ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות, $x_0,x_1,x_2$, עבורן $f(x_0)=f(x_1)=f(x_2)$.

הוכיחו שקיים $c$ ממשי, כך ש- $f''(c)=0$.

**4)** תהי $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שלכל $n$ טבעי מתקיים $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$.

הוכיחו שקיימת $x_0\in(0,1)$, כך ש- $f'''(x_0)=0$.

**5)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שמתקיים $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$.

הראו שלמשוואה $f'''(x)=0$ יש פתרון.

**6)** נתון כי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נתון בנוסף כי $f$ פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב- $x_0=2$.

הוכיחו כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

**7)** נתונה פונקציה $f$, גזירה ב- $\mathbb{R}$.
תהי $g$ מוגדרת על ידי $g(x)=(x^2-1)f(x)$.
הראו כי $g$ גזירה ב- $\mathbb{R}$, והוכיחו כי הנגזרת, $g'$,
מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע $(-1,1)$.

**8)** הוכיחו:
אם $f$ גזירה ב- $\mathbb{R}$ ו- $f(1)=0$, אז הפונקציה $g(x)$, המוגדרת על ידי
$g(x)=xf(x)$, גזירה ב- $\mathbb{R}$, וישנו פתרון ממשי למשוואה $g'(x)=0$.

**9)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0$ ו- $f(x)>0$ לכל $0<x\le 1$.
הוכיחו שקיים $c\in(0,1)$, כך ש- $\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}=2\frac{f'(c)}{f(c)}$.

**10)** אם $c_0+\frac{c_1}{2}+\ldots+\frac{c_{n-1}}{n}+\frac{c_n}{n+1}=0$ $(c_i\in\mathbb{R})$,
הוכיחו שלמשוואה $c_0+c_1x+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n=0$
יש לפחות פתרון אחד בקטע $(0,1)$.

**11)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0,\ f(1)=1$.
הראו שלמשוואה $f'(x)=2x$ קיים פתרון בקטע $(0,1)$.

**12)** תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות.
נניח שלכל $x$ ממשי מתקיים $f'(x)g(x)\ne g'(x)f(x)$.
הראו שבין כל שני שורשים של $f$ קיים לפחות שורש אחד של $g$.

**13)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה,
כך ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $f'(0)>0,\ f'(1)>0$.
א. הוכיחו שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.
ב. הוכיחו שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.
ג. הוכיחו שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע $(0,1)$.

**14)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נניח שלכל $n$ טבעי $f\left(\frac{1}{n}\right)=1$.

חשבו את $f''(0)$.

ב. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים, כך ש- $f''(0)>0$.

הוכיחו שקיים $n$ טבעי, כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)\neq 1$.

**15)** תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נניח שלכל $n$ טבעי $f\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$.

חשבו את $f''(1)$.

**16)** נתון כי $f,g$ גזירות לכל $x$ וכי $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)\neq 0$ ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו שלמשוואה $f(x)g(x)=A$ יש לכל היותר פתרון אחד.

$A$ קבוע כלשהו.

**17)** נתון כי $f$ גזירה לכל $x$ וכי $f'(x)$ חד-חד ערכית ב- $\mathbb{R}$.

תהי $x_0$ נקודה כלשהי.

הוכיחו כי לגרף של $y=f(x)$ ולישר המשיק בנקודה $x_0$ יש נקודה משותפת אחת ויחידה - $x_0$.

במילים אחרות: הוכיחו כי הגרף של $y=f(x)$ נמצא כולו מעל המשיק או מתחתיו.

**18)** נתון כי $f$ גזירה פעמיים בקטע $(a,b)$, ולכל $x\in(a,b)$ מתקיים $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.

נתון שלמשוואה $f'(x)=0$ יש שלושה פתרונות בקטע.

הוכיחו שלמשוואה $f(x)=0$ יש לפחות שני פתרונות בקטע.

תנו דוגמה לפונקציה $f$ המקיימת $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.

**19)** נתון כי $f(x),\ g(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע $(a,b)$.

נתון בנוסף כי $f(a)=g(a),\ f(b)=g(b)$.

הוכיחו שקיימת נקודה $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=g'(c)$.

**20)** הפונקציות $f$ ו- $g$ רציפות ב- $[a,b]$ וגזירות ב- $(a,b)$.
ידוע כי $f(a) \ge g(a)$ ו- $f'(x) > g'(x)$ ב- $(a,b)$.
הוכיחו כי $f(x) > g(x)$ ב- $(a,b]$.

## תשובות סופיות

**1)** א. כן, $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. ב. כן, $2-\sqrt{3}$.

**2)** לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x=3$.

**14)** א. 0 ב. שאלת הוכחה.

**15)** 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a,b]$

## שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $\dfrac{b-a}{b}<\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)<\dfrac{b-a}{a}\quad (0<a<b)$

2) $\dfrac{b-a}{2\sqrt{b}}<\sqrt{b}-\sqrt{a}<\dfrac{b-a}{2\sqrt{a}}\quad (0<a<b)$

3) $(a-b)e^{-a}<e^{-b}-e^{-a}<(a-b)e^{-b}\quad (a<b)$

4) $\dfrac{b-a}{\cos^2 a}<\tan b-\tan a<\dfrac{b-a}{\cos^2 b}\quad \left(0<a<b<\dfrac{\pi}{2}\right)$

5) $\dfrac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\dfrac{b-a}{1+a^2}\quad (0<a<b)$

6) $\dfrac{b-a}{\sqrt{1-a^2}}<\arcsin b-\arcsin a<\dfrac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}\quad (0<a<b<1)$

7) $\dfrac{b-a}{\sqrt{1+b^2}}<\dfrac{\operatorname{arcsinh}(b)-\operatorname{arcsinh}(a)}{b-a}<\dfrac{b-a}{\sqrt{1+a^2}}\quad (0<a<b)$

8) $\dfrac{b-a}{1-a^2}<\operatorname{arctanh}(b)-\operatorname{arctanh}(a)<\dfrac{b-a}{1-b^2}\quad (0<a<b<1)$

**9)** $\sqrt[n]{b}\cdot\frac{b-a}{n\cdot b}<\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{a}\cdot\frac{b-a}{n\cdot a}$ $(0<a<b)$

**10)** $\frac{2b(b-a)}{b^2+1}<\ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right)<\frac{2a(b-a)}{a^2+1}$ $(1<a<b)$

**11)** $\ln b-\ln a+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\le\frac{1}{4}(b-a)$ $(1<a<b<3)$

**12)** $|\sin x_2-\sin x_1|\le|x_2-x_1|$ $(x_1<x_2)$

**13)** $|\cos x_2-\cos x_1|\le|x_2-x_1|$ $(x_1<x_2)$

**14)** $|\arctan y-\arctan x|\le|y-x|$ $(x<y)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[0,x]$

## שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

**1)** $x < \tan x < \dfrac{x}{\cos^2 x}$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

**2)** $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ $(x > 0)$

**3)** $x < \arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0 < x < 1)$

**4)** $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \operatorname{arcsinh}(x) < x$ $(x > 0)$

**5)** $x < \operatorname{arctanh}(x) < \dfrac{x}{1-x^2}$ $(0 < x < 1)$

**6)** $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ $(x > 0)$

**7)** $1+x < e^x < 1+xe^x$ $(x > 0)$

**8)** $\sin x \le x$ $(x > 0)$

**9)** $\tan x < 4x$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{3}\right)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# משפט לגראנז' – הוכחת אי-שוויונים עם מספרים

## שאלות

הוכיחו את אי-השוויונים הבאים :

**1)** $\frac{1}{3} < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2}$

**2)** $\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2} < 1.5$

**3)** $\frac{3}{25} + \frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}$

**4)** $\frac{\sqrt{3}}{15} + \frac{\pi}{6} < \arcsin(0.6) < \frac{1}{8} + \frac{\pi}{6}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# משפט לגראנז' – שאלות כלליות

## שאלות

**1)** תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל $x$, המקיימת $|f'(x)| \le 5$.
ידוע כי $f(4)=18$ , $f(1)=3$.
הוכיחו כי $f(2)=8$.

**2)** תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל $x$, המקיימת $|f'(x)| \le 7$.
ידוע כי $f(4)=18$ , $f(1)=3$.
הוכיחו כי $4 \le f(2) \le 10$.

**3)** תהי $f$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$, ונניח ש- $f(a)=f(b)=0$,
וכן שקיימת נקודה $c$, כאשר $c \in (a,b)$, כך ש- $f(c)>0$.
הוכיחו שקיימת נקודה $m$ בקטע $(a,b)$, כך ש- $f''(m)<0$.

**4)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $(a,b)$, כך ש- $f'$ חסומה בקטע $(a,b)$.

א. הוכיחו שקיים $M>0$, כך שלכל $x$ ו- $y$ ב- $(a,b)$ מתקיים:
$|f(y)-f(x)| \le M|y-x|$.

ב. הוכיחו ש- $f$ רציפה במידה שווה ב- $(a,b)$.
כלומר, הוכיחו שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל $x$ ו- $y$ ב- $(a,b)$,
המקיימים $|x-y|<\delta$, מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

**5)** נניח כי $f$ רציפה ב- $[0,\infty)$ וגזירה ב- $(0,\infty)$.
כמו כן, $f(0)=0$, ו- $f'$ מונוטונית עולה.

א. הוכיחו כי $f'(x) > \dfrac{f(x)}{x}$ ב- $(0,\infty)$.

ב. הוכיחו כי $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ מונוטונית עולה ב- $(0,\infty)$.

**6)** תהיינה $f,g$ פונקציות רציפות ב- $[a,\infty)$ וגזירות ב- $(a,\infty)$.
נתון כי $f(a)=g(a)$ ו- $f'(x)\le g'(x)$ לכל $x>a$.
הוכיחו כי $f(x)\le g(x)$ לכל $x\ge a$.

**7)** נניח כי $f$ גזירה ב- $(0,\infty)$.
א. נתון כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.
הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=0$.
ב. נתון כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)>0$.
הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

**8)** תהי $f$ פונקציה גזירה לכל $x$.
הוכח:
א. אם הגבולות $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיימים, אז הם שווים זה לזה.
ב. אם $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=L$ אז $L=0$ (ללא שימוש בכלל לופיטל).
ג. ייתכן שהגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיים אבל הגבול $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ לא קיים.
ד. אם הגבול $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ קיים אז גם הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיים ושני הגבולות שווים זה לזה.
ה. אם $\lim_{x\to\infty} f'(x)>0$ $\left(\lim_{x\to\infty} f'(x)<0\right)$ אז $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\left(\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty\right)$.
הערה: סעיף ג' הוא למעשה הכללה של סעיף א'.

**9)** נניח כי $f$ גזירה ב- $\mathbb{R}$.
האם נכון לומר כי מתקיים $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$?
הוכיחו או הפריכו.
הערה: למרות שתרגיל זה אפתור ללא שימוש במשפט לגראנז',
הכנסתי אותו כאן בזכות הקשר שלו לשאלה הקודמת.

**10)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $|f'(x)|<1$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכיחו שקיים לכל היותר $c$ אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c$.

**11)** תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ פונקציה גזירה, כך ש- $f'(x)<0$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכיחו שקיים בדיוק $c$ אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c^2$.

**12)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב- $[a,b]$.

הוכיחו שקיימים $c_1,c_2,c_3\in(a,b)$, כך ש- $c_2\neq c_3$ ו- $f'(c_1)=\frac{f'(c_2)+f'(c_3)}{2}$.

**13)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים.

נניח שהישר, המחבר את הנקודות $(0,f(0))$ ו- $(1,f(1))$,

חותך את הגרף של $f$ בנקודה $(a,f(a))$, כאשר $0<a<1$.

הוכיחו שקיים $x_0\in[0,1]$, כך ש- $f''(x_0)=0$.

**14)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח ש- $f$ גזירה ב- $(a,b)$ ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=L$, כאשר $L\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $f'_+(a)$ קיים וש- $f'_+(a)=L$.

**15)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה שמקיימת $f(0)=0$.

נניח שלכל $x\in[0,1]$ מתקיים $|f'(x)|\le|f(x)|$.

הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

**16)** נתון כי $f$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a,b)$.

א. ידוע כי $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכיחו כי $f$ קבועה ב- $[a,b]$.

ב. ידוע כי $f'(x)=m$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכיחו כי $f$ לינארית ב- $[a,b]$.

**17)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון כי $f,g$ רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע $(a,b)$.
ידוע כי $f'(x)=g'(x)$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכיחו כי $f(x)=g(x)+c$ ב- $[a,b]$.

ב. הוכיחו כי $\arcsin(x)-\frac{\pi}{2}=\arccos(x)$... 

**18)** נתון כי $f$ גזירה בקטע $(a,b)$ ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$.

א. הוכח כי $f'$ לא חסומה בקטע.

ב. האם בהכרח $f'$ שואפת ל- $\infty$ או $-\infty$?

## תשובות סופיות

**8)** ב. 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# משפט הערך הממוצע המוכלל של קושי

## שאלות

**1)** הוכיחו שלכל $1\le a<b$ מתקיים $n(\ln b-\ln a)<b^n-a^n$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

**2)** הוכיחו כי עבור כל $a,b$ המקיימים $0<a<b<1$,
מתקיים $\frac{b}{1+b^2}<\frac{\arctan b-\arctan a}{\ln b-\ln a}<\frac{a}{1+a^2}$.

**3)** הוכיחו כי עבור כל $a,b$ המקיימים $1<a<b$,
מתקיים $\frac{2\sqrt{a}}{1+a^2}<\frac{\arctan b-\arctan a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}<\frac{2\sqrt{b}}{1+b^2}$.

**4)** הוכיחו כי $|\tan y-\tan x|\le 8|\sin x-\sin y|$ לכל $x,y\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$.

**5)** הוכיחו כי $\arctan x>\ln(1+x)$ לכל $x\in(0,1)$.

**6)** הוכיחו שלכל $x\neq 0$ מתקיים $1-\frac{1}{2}x^2<\cos x$.

**7)** תהי $f$ פונקציה רציפה ב-$[0,1]$ וגזירה ב-$(0,1)$.
הוכיחו שבקטע $(0,1)$ קיים פתרון למשוואה $f(1)-f(0)=\frac{f'(x)}{2x}$.

**8)** תהי $f$ פונקציה רציפה ב-$[0,1]$ וגזירה ב-$(0,1)$, ויהי $n$ מספר טבעי כלשהו.
הוכיחו שקיים $0<c<1$, המקיים $f(1)-f(0)=\frac{f'(c)}{nc^{n-1}}$.

**9)** יהיו $a$ ו-$b$ מספרים חיוביים כלשהם.
הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $\left(a^3-b^3\right)\cos x=3x^2\left(\sin a-\sin b\right)$.

**10)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב-$[a,b]$, כאשר $a \ge 0$.

הוכיחו שקיימים $c_1, c_2 \in [a,b]$, כך ש- $\frac{f'(c_2)}{2c_2} = \frac{f'(c_1)}{a+b}$.

**11)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $[a,b]$, כאשר $ab > 0$.

הוכיחו שלמשוואה $f'(x) \cdot x - f(x) = \frac{1}{b-a} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}$

קיים פתרון בקטע $[a,b]$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# משפט דרבו

## שאלות

**1)** האם קיימת פונקציה גזירה $f$, שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4x & x<1\\ x-1 & x\ge 1\end{cases}$ ?

**2)** האם קיימת פונקציה גזירה $f$, שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4x & x\ne 1\\ 0 & x=1\end{cases}$ ?

**3)** האם קיימת פונקציה גזירה $f$, שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4 & x=0\\ x^2 & x\ne 0\end{cases}$ ?

**4)** האם קיימת פונקציה גזירה $f$, שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ \frac{1}{x^2} & x\ne 0\end{cases}$ ?

**5)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$.

הוכיחו:

אם $f'$ לא רציפה ב-$x_0$, אז $x_0$ היא לא נקודת אי-רציפות סליקה.

ב. האם קיימת פונקציה $f$, גזירה ב-$\mathbb{R}$,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}4 & x=0\\ x^2 & x\ne 0\end{cases}$ ?

**6)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$.

הוכיחו:

אם $f'$ לא רציפה ב-$x_0$, אז $x_0$ היא לא נקודת אי-רציפות מסוג I.

ב. האם קיימת פונקציה $f$ גזירה ב-$\mathbb{R}$,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}x+1 & x\ge 1\\ 4x & x<1\end{cases}$ ?

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$.

הוכיחו:

אם $f'$ לא רציפה ב- $x_0$, אז $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)\neq\pm\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)\neq\pm\infty$.

כלומר, $x_0$ היא לא נקודת אי-רציפות מסוג שני, שבה אחד הגבולות החד-צדדיים אינסופי.

ב. האם קיימת פונקציה $f$, גזירה ב- $\mathbb{R}$,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\end{cases}$ ?

**8)** האם קיימת פונקציה $f$, גזירה ב- $[0,1]$,

שהנגזרת שלה ב- $[0,1]$ נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ ?

**9)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב- $\mathbb{R}$, ונניח כי $f(0)=0,\ f(1)=f(2)=1$.

הוכיחו שקיים $x\in(0,2)$, שעבורו $f'(x)=\dfrac{1}{4}$.

**10)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $(a,b)$, ומקיימת $f'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו כי $f$ מונוטונית בקטע $(a,b)$.

**11)** ממשפט דרבו נובע, שהנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת את תכונת ערך הביניים (למרות שהנגזרת לא בהכרח רציפה).

האם הנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת גם את משפטי ויירשטראס?

הוכיחו או הפריכו זאת.

**12)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$, המקיימת $0\le f'(x)\le 2$, לכל $x$ בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודה $x$ ב- $[0,1]$, כך ש- $f'(x)=x^2+x$.

**13)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$, המקיימת $0\le f'(x)\le 1$, לכל $x$ בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודה $x$ ב- $[0,1]$, כך ש- $f'(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+15}}$.

14) תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, המקיימת $0\le f'(x)\le 1$, לכל $x$ בקטע.
הוכיחו כי קיימת נקודה $x$ בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, כך ש- $f'(x)=\sin x$.

15) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, לא קבועה שמקיימת $f(0)=f(1)=0$.
הוכיחו שקיים $x$ ב- $(0,1)$, שעבורו $f'(x)$ רציונלי השונה מ-0.

## תשובות סופיות

1) לא.
2) לא.
3) לא.
4) לא.
5) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
6) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
7) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
8) לא.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 17 - אינטגרלים מיידיים

תוכן העניינים

# אינטגרלים מיידיים

## שאלות

חשבון את האינטגרלים בשאלות **1-12** (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

1) $\int 4dx$    2) $\int x^4 dx$    3) $\int \frac{1}{x^2} dx$

4) $\int \sqrt{x} dx$    5) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$    6) $\int 4x^{10} dx$

7) $\int (2x^2 - x + 1) dx$    8) $\int \left( \frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx$    9) $\int (x^2+1)^2 dx$

10) $\int (x^2+1)(x+2) dx$    11) $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx$    12) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

חשבון את האינטגרלים בשאלות **13-20**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$)

13) $\int (4x+1)^{10} dx$    14) $\int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx$    15) $\int \frac{4}{(x-2)^5} dx$

16) $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$    17) $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$    18) $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}$    20) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$

חשבון את האינטגרלים בשאלות **21-26**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

21) $\int \frac{1}{4x} dx$    22) $\int \frac{1+x+x^2}{x} dx$    23) $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

24) $\int \frac{1}{4x-1} dx$    25) $\int \frac{x+3}{x+2} dx$    26) $\int \frac{4x+1}{x+2} dx$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **27-29**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax+b}dx = \frac{e^{ax+b}}{a}+c$)

**27)** $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$ **28)** $\int\left(e^{x+1}\right)^2 dx$ **29)** $\int\left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

**30)** חשבו את האינטגרל: $\int \frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x}dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int a^{mx+n}dx = \frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+c$)

חשבו את האינטגרלים בשאלות **31-33**:

**31)** $\int \frac{1}{1+4x^2}dx$ **32)** $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ **33)** $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx$

## תשובות סופיות

1) $4x+c$

2) $\frac{x^5}{5}+c$

3) $-\frac{1}{x}+c$

4) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$

5) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$

6) $\frac{4x^{11}}{11}+c$

7) $\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

8) $-\frac{1}{x^3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+c$

9) $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$

10) $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$

11) $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$

12) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c$

13) $\frac{(4x+11)^{11}}{44}+c$

14) $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$

15) $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$

16) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$

17) $10\sqrt{2x+4}+c$

18) $-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$

19) $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{3/2}+x^{3/2}\right)+c$

20) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$

21) $\frac{\ln|x|}{4}+c$

22) $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$

23) $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

24) $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$

25) $x+\ln|x+2|+c$

26) $4\left(x-1.75\ln|x+2|\right)+c$

27) $\frac{e^{4x}}{4}-e^{-x}+c$

28) $\frac{e^{2x+2}}{2}+c$

29) $8e^{\frac{x}{2}}-\frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4}+c$

30) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}+\frac{(200)^x}{\ln(200)}+c$

31) $\frac{1}{2}\arctan(2x)+c$

32) $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c$

33) $-\left(x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)+c$

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 18 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

# אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

## שאלות

**הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.**

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

2) $\int \cot x dx$

3) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

4) $\int \tan x dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

6) $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$

7) $\int e^{x^2} 2x dx$

8) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

9) $\int e^{-2x^2} x dx$

10) $\int \cos\left(2x^2+1\right)\cdot 4x dx$

11) $\int \cos(\sin x)\cdot \cos x dx$

12) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

13) $\int \cos\left(10x^4+1\right)x^3 dx$

14) $\int \sin\left(x^2+1\right)x dx$

15) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

16) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x}dx$

19) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

20) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x}}dx$

21) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

22) $\int x^2\sqrt{x^3+4}dx$

23) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

24) $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$

## תשובות סופיות

1) $\ln|x^2+1|+c$

2) $\ln|\sin x|+c$

3) $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+c$

4) $-\ln|\cos x|+c$

5) $\ln|\ln|x||+c$

6) $e^2\ln|e^x+1|+c$

7) $e^{x^2}+c$

8) $e^{\tan x}+c$

9) $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$

10) $\sin(2x^2+1)+c$

11) $\sin(\sin x)+c$

12) $\sin(\ln x)+c$

13) $\frac{1}{40}\sin(10x^4+1)+c$

14) $-\frac{1}{2}\cos(x^2+1)+c$

15) $-2\cos(\sqrt{x})+c$

16) $\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$

17) $\frac{1}{2}(\arctan x)^2+c$

18) $\frac{1}{2}(\tan x)^2+c$

19) $2\sqrt{x^2+1}+c$

20) $\sqrt{2\sin x}+c$

21) $\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+c$

22) $\frac{2}{9}(x^3+4)^{\frac{3}{2}}+c$

23) $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+c$

24) $\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}}+c$

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 19 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

### תוכן העניינים

# האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

## שאלות

חשבנו את האינטגרלים בשאלות **1-9**:

**1)** $\int_{1}^{4}\left(x^2-4x+1\right)dx$

**2)** $\int_{1}^{2}\frac{4x+1}{2x^2+x+5}dx$

**3)** $\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$

**4)** $\int_{1}^{e}\frac{\ln^4 x}{x}dx$

**5)** $\int_{1}^{4}\frac{1}{x^2+4x+5}dx$

**6)** $\int_{0}^{\pi}\cos^2 10xdx$

**7)** $\int_{0}^{4}f\left(x\right)dx$, כאשר $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<1\\ \frac{1}{x^2} & x\ge 1\end{cases}$.

**8)** $\int_{-1}^{4}\sqrt{4+\left|x-1\right|}dx$

**9)** $\int_{0}^{2}\max\left\{x,x^2\right\}dx$

**10)** הוכיחו כי:

א. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

ב. $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

**11)** הוכיחו שלכל פונקציה רציפה $f$ :

א. $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

ב. $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

**12)** תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$ .

פתרו את המשוואה $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2$ .

**13)** ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של $\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$ .

**14)** חשבו: $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x}+\sqrt[4]{\cos x}}dx$ .

**15)** חשבו: $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ .

**16)** נתונה פונקציה רציפה $f$ . הוכיחו:

א. אם $f$ זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ .

ב. אם $f$ אי-זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ .

חשבו את האינטגרלים בשאלות **17-18**:

**17)** $\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^5\right)\cos x dx$

**18)** $\int_{-4}^{4}\frac{\sin x+1}{x^2+1}dx$

**19)** נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל $x$, ונתון כי $|f(x)|\le\frac{1}{2}$.

חשבו את האינטגרל $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)dx$.

**20)** חשבו את ערך האינטגרלים הבאים:

א. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ב. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ג. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\tan^n x}dx\quad\left(n\in\mathbb{N}\right)$

**21)** (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$, בעזרת ההצבה $t=\frac{1}{x}$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$ ישירות.

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

**22)** הוכיחו כי $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

**23)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. בעזרת ההצבה $t=\tan x$ חשבו את האינטגרל $\int\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

ב. חשבו את ערך האינטגרל $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

**24)** חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x}dx$.

**25)** תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=a$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם הכיוון החיובי של ציר $x$ והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=b$ יוצר זווית $\frac{\pi}{4}$ עם הכיוון החיובי של ציר $x$.

חשבו את ערך האינטגרל $\int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x}dx$.

**26)** הוכיחו:

אם $f$ פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם $T$ המחזור של $f$ אז לכל מספר ממשי $a$ מתקיים $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

**27)** הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f$ ו- $g$ פונקציות רציפות ב- $[a,b]$, ואם $\int_a^b f(t)dt=0$ וגם $\int_a^b g(t)dt=0$, אז $\int_a^b f(t)g(t)dt=0$.

ב. אם $f$ זוגית ואינטגרבילית בכל קטע, אז הפונקציה $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ אי-זוגית.

## תשובות סופיות

1) $-6$

2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

3) $-2e^{-1}+1$

4) $\frac{1}{5}$

5) $\arctan 6-\arctan 3$

6) $\frac{\pi}{2}$

7) $\frac{17}{12}$

8) $\frac{2}{3}\left(-16+6^{1.5}+7^{1.5}\right)$

9) $\frac{17}{6}$

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) $x=e^2$

13) $0$

14) $\frac{\pi}{4}$

15) $\frac{\pi^2}{4}$

16) שאלת הוכחה.

17) $0$

18) $2\arctan 4$

19) $0$

20) א, ב, ג. $\frac{\pi}{4}$

21) א. $0$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. ראו בסרטון.

22) שאלת הוכחה.

23) א. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+c$ ב. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

24) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

25) $1-\sqrt{3}$

**(26** שאלת הוכחה.

**(27** שאלת הוכחה.

# מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

## שאלות

**1)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית,
ונניח כי $m\le f(x)\le M$ לכל $x$ בקטע $[a,b]$.
הוכיחו כי $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות **2-10**:

**2)** $$\frac{2}{41}\le\int_{-1}^{3}\frac{dx}{1+x^4}\le 4$$

**3)** $$6\le\int_{-4}^{2}\sqrt{1+x^2}\,dx\le 6\sqrt{17}$$

**4)** $$2\le\int_{0}^{2}e^{x^2}dx\le 2e^4$$

**5)** $$\frac{1}{2}e^{-10}\le\int_{0}^{10}\frac{e^{-x}}{x+10}dx\le 1$$

**6)** $$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}}\le\int_{3}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}}$$

**7)** $$\frac{\pi}{14}\le\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{3+4\sin^2 x}dx\le\frac{\pi}{6}$$

**8)** $$\frac{2}{9}\le\int_{-1}^{1}\frac{dx}{8+x^3}\le\frac{2}{7}$$

**9)** $$-\frac{1}{2}\le\int_{0}^{1}x\cdot\sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx\le\frac{1}{2}$$

**10)** $\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right)dx \le \frac{\pi^4}{6}$

**11)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.
בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע,
הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

**12)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $|f(x)| \le \int_0^x f(t)dt$ לכל $x\in[0,1]$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

**13)** תהי $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ , כך ש- $f''(x)>0$ לכל $x\in[0,a]$.
הוכיחו כי $\int_0^a f(x)dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$.
תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

**14)** תהי $g$ פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b |g(t)|dt = 0$.
הוכיחו כי לכל $x$ בקטע $(a,b)$, מתקיים $g(x)=0$.

**15)** תהי $f$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(x)dx > 1$.
הוכיחו שקיים $x_0$ בקטע $[a,b]$, עבורו $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$.

**16)** יהי $n$ מספר טבעי, ותהי $f$ פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע $[1,n]$.
הוכיחו כי $f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1) \le \int_1^n f(x)dx \le f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$.

**17)** חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k$.

**18)** הוכיחו שאם הפונקציה $f$ רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע $(a,b)$
וגם $f'(x)\le M$ לכל $x$ בקטע זה, וכן $f(a)=0$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\frac{M(b-a)^2}{2}$.

**19)** יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות.
נניח כי $f$ עולה ו-$g$ אי-שלילית.
הוכיחו שקיים $c\in[a,b]$, כך ש-$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(b)\int_a^c g(x)dx+f(a)\int_c^b g(x)dx$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-7**:

**1)** $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}$$

**2)** $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}$$

**3)** $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right\}$$

**4)** $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right\}$$

**5)** $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$$

**6)** $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}\right\}$$

**7)** $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{n}{(n+n)^2}\right]$$

**8)** חשבו: $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$.

* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות **9-12** על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$1+2+3+...+n=0.5n(n+1)$$
$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+...+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

**9)** $\int_0^1 xdx$ **10)** $\int_0^1 x^2dx$ **11)** $\int_0^1 x^3dx$ **12)** $\int_0^\pi \sin xdx$

**13)** חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^4 x^2dx$.

**14)** חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע $P=\left\{1=2^{\frac{0}{n}},2^{\frac{1}{n}},2^{\frac{2}{n}},2^{\frac{3}{n}},...,2^{\frac{n}{n}}=2\right\}$.

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{5}$

2) $1-\cos 1$

3) $\ln 2$

4) $\frac{\pi}{4}$

5) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

6) $\frac{2^{1.5}}{1.5}-\frac{2}{3}$

7) $\ln 2$

8) $-1$

9) $\frac{1}{2}$

10) $\frac{1}{3}$

11) $\frac{1}{4}$

12) $2$

13) $21$

14) $0.5$

# משפטי האינטגרביליות

## שאלות

**1)** בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ :

א. $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{x-1} & x\neq 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,2]$

ב. $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ $\quad [a,b]=[-4,14]$

ג. $f(x)=\begin{cases} 4x & x\neq 1 \\ -41 & x=1 \end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,9]$

**2)** ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע $[a,b]$ .

ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.

ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע $[-1,1]$, שאינה אינטגרבילית בקטע.

**3)** לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

א. קיימת פונקציה אינטגרבילית $f$ , בקטע $[a,b]$, שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.

ב. קיימת פונקציה $f$ , החסומה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a,b)$, שאינה אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Q},\ x\neq \frac{1}{2},\ x\neq\frac{1}{4} \\ 1 & x\notin\mathbb{Q} \\ 2 & x=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$ .

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# אינטגרביליות לפי דארבו

## שאלות

**1)** נתונה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ , המוגדרת על ידי $f(x)=x$ .

א. מצאו את האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של הפונקציה בקטע.

ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

**2)** נתונה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^2$ .

א. מצאו את האינטגרל העליון והתחתון של הפונקציה בקטע.

ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו בקטע ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

**3)** נתונה הפונקציה הבאה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<0.5\\ 2 & x=0.5\\ 1 & 0.5<x\le 1\end{cases}$ .

הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ בקטע $[0,1]$ .

א. בדקו, לפי ההגדרה של דארבו, האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע.

ב. תנו דוגמה לפונקציה $f$ , כך ש- $|f|$ ו- $f^2$ אינטגרביליות, אך $f$ לא אינטגרבילית.

**5)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שקיימת חלוקה $P$ של הקטע $[a,b]$, כך ש- $L(P,f)=U(P,f)$ .

הוכיחו ש- $f$ פונקציה קבועה.

**6)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שקיימת חלוקה $P_n$ של הקטע $[a,b]$, כך ש- $U(P_n,f)-L(P_n,f)\to 0$ .

א. הוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית בקטע.

ב. הוכיחו כי $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}L(P_n,f)=\lim_{n\to\infty}U(P_n,f)$ .

**7)** בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית בעזרת קריטריון רימן. בנוסף, חשבו את האינטגרל המסוים של הפונקציה בקטע.

**א.** $f(x)=x$ , בקטע $[0,1]$.

**ב.** $f(x)=x^2$ , בקטע $[0,2]$.

**8)** הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ אינטגרבילית בקטע $[1,2]$ בעזרת קריטריון רימן.

## תשובות סופיות

**1)** א. $\overline{\int_0^1} f=\underline{\int_0^1} f=\frac{1}{2}$ ב. $\int_0^1 f\,dx=\frac{1}{2}$

**2)** א. $\overline{\int_0^2} f=\underline{\int_0^2} f=\frac{8}{3}$ ב. $\int_0^2 f\,dx=\frac{8}{3}$

**3)** שאלת הוכחה.

**4)** א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

**5)** שאלת הוכחה.

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** שאלת הוכחה.

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 20 - המשפט היסודי של החדו"א, משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

### תוכן העניינים

# המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

## שאלות

בשאלות **1** ו-**2**, על סמך המשפט היסודי של החדו"א,
הוכיחו כי אם $f(x)$ רציפה וגם $a(x)$ ו- $b(x)$ גזירות, אזי:

**1)** $I(x)=\int_a^{b(x)} f(t)dt \Rightarrow I'(x)=f(b(x))b'(x)$

**2)** $I(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \Rightarrow I'(x)=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$

גזרו את הפונקציות בשאלות **3-6**:

**3)** $I(x)=\int_2^{x} e^{-t^2}dt$

**4)** $I(x)=\int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2}dt$

**5)** $I(x)=\int_2^{x^3+x} t\ln t\,dt$

**6)** $I(x)=\int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

חשבו את הגבולות בשאלות **7-9**:

**7)** $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{tdt}{\cos t}}{\sin^2 x}$

**8)** $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt$

**9)** $\lim_{x\to 4}\frac{x}{x-4}\int_4^x e^{t^2}dt$

**10)** חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$.

**11)** חקרו את הפונקציה $F(x)=\int\limits_0^x (t+1)^4(t-1)^{10}dt$, לפי הפירוט הבא:
תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

**12)** נתונה הפונקציה $g(t)=\int_0^{t^2-1} f(x)dx$, כאשר $f(x)=2+\int\limits_0^x\left(e^{y^2}+2\right)^2 dy$.
חשבו את $g''(1)$ (הניחו כי $f$ רציפה).

**13)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נגדיר $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי $g''(x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

**14)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ויהי $\alpha\neq 0$.
נגדיר $g(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)\sin\left[\alpha(x-t)\right]dt$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי $f(x)=g''(x)+\alpha^2 g(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

**15)** תהי $f$ פונקציה רציפה וחיובית לכל $x\geq 0$.
הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x t\,f(t)dt}$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,\infty)$.

**16)** מצאו את $\int\limits_e^4 f(x)dx$, אם נתון כי $\int\limits_2^x \frac{t^3-t+2}{t^2-t}dt=\int\limits_2^x f(t)dt+2\int\limits_2^x \frac{1}{t-1}dt$.

**17)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $F(x)=\int\limits_0^{\sin x} e^{t^2}dt$, בנקודה $x_0=2\pi$.

## תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) $I'(x)=e^{-x^2}$

4) $I'(x)=\frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2}\cdot 3x^2$

5) $I'(x)=(x^3+x)(3x^2+1)\ln(x^3+x)$

6) $I'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}-\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

7) $\frac{1}{2}$

8) $\frac{2}{3}$

9) $4e^{16}$

10) $0$

11) תחום הגדרה: כל $x$.
נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל $x$.
נקודות פיתול: $x=-1,1,-\frac{3}{7}$.
תחומי קמירות: $x>1$ , $-1<x<-\frac{3}{7}$.
תחומי קעירות: $-\frac{3}{7}<x<1$ , $x<-1$.

12) $40$

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) $14-2\ln 4-\frac{1}{2}e^2-e$

17) $y=x-2\pi$

# המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי תיאוריה

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f$ המוגדרת בקטע $[0,2]$ כך: $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\le 2\end{cases}$ .

א. הוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$ לכל $x$ בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x)=f(x)$ ?

**2)** נתונה הפונקציה $f$ המוגדרת בקטע $[-1,1]$ כך: $f(x)=\begin{cases}0 & x\ne 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ .

א. הוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x)=\int\limits_{-1}^x f(t)dt$ לכל $x$ בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x)=f(x)$ ?

**3)** נגדיר $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & ;\ x\ne 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$ .

נגדיר $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & ;\ x\ne 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$ .

הוכיחו כי $F'=f$ ב- $[-1,1]$, אבל $\int_{-1}^1 f(t)dt$ לא קיים.

האם הדבר עומד בסתירה למשפט היסודי של החדו״א?

**4)** נתונה פונקציה אינטגרבילית $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ .

הוכיחו כי $\int_a^b f(t)dt=\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$ .

**5)** תהי $f$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int\limits_a^b f\left(t\right)dt>1$.

הוכיחו שקיים $x_1$, בקטע $\left(a,b\right)$, עבורו $\int\limits_a^{x_1} f\left(t\right)dt=1$.

**6)** תהי $f$ פונקציה רציפה ומחזורית לכל $x$, עם מחזור $p$.

הוכיחו שלאינטגרל $\int_x^{x+p} f(t)dt$ יש את אותו הערך לכל $x\in\mathbb{R}$.

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי הפונקציה $f(x)=\int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int\limits_0^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$ קבועה בקטע $(0,\infty)$,

ומצאו את הקבוע הממשי $C$ עבורו מתקיים $f(x)=C$ לכל $x\in(0,\infty)$.

ב. הוכיחו כי $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ לכל $x>0$.

**8)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונניח כי $\int_0^1 f(x)dx=1$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c\in\left(0,1\right)$, כך ש- $f(c)=3c^2$.

**9)** תהי $f$ פונקציה רציפה ב- $\left[0,\pi/2\right]$ ונניח כי $\int_0^{\pi/2} f(t)dt=0$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c\in\left(0,\pi/2\right)$, כך ש- $f(c)=2\cos 2c$.

**10)** תהי $f:[0,\frac{\pi}{4}]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכיחו שקיים $c\in[0,\pi/4]$, כך ש- $f(c)=2\cos 2c\int_0^{\pi/4} f(t)dt$.

**11)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

הוכיחו שקיים $c\in(0,1)$, כך ש- $\int_0^1 f(x)dx=f(0)+\frac{1}{2}f'(c)$.

**12)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח כי $\forall x\in[a,b]\ \ \int_a^x f(t)dt=\int_x^b f(t)dt$.

הוכיחו כי $\forall x\in[a,b]\ \ f(x)=0$.

**13)** תהי $f$ פונקציה רציפה ב-$[a,b]$, ונניח כי קיימות שתי נקודות, $x_1 < x_2$,
בקטע $(a,b)$, שעבורן מתקיים $\int_a^{x_1} f(t)dt = \int_a^{x_2} f(t)dt$.

א. הוכיחו כי קיים $c$, בקטע $(a,b)$, כך ש-$f(c)=0$.

ב. האם הטענה שבסעיף א' נכונה גם אם לא נדרוש ש-$f$ רציפה ב-$[a,b]$, ונסתפק בדרישה החלשה יותר, ש-$f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$? נמקו.

**14)** מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)=e^{-|x|}$.

**15)** תהי $f$ פונקציה אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$,
ונניח שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=\int_0^x f(t)dt$.
הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$ (כלומר, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=0$).

### תשובות סופיות

**1)** א. שאלת הוכחה. ב. $F(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 1\\ x-1 & 1<x\le 2\end{cases}$ ג. רציפה ולא גזירה.
ד. לא.

**2)** א. שאלת הוכחה. ב. $F(x)=0$ לכל $x$ בקטע הנתון. ג. רציפה וגזירה.
ד. לא.

**7)** א. $C=0$ ב. שאלת הוכחה.

**14)** $F(x)=\begin{cases}-e^{-x}+D+2 & x\ge 0\\ e^{x}+D & x<0\end{cases}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

## שאלות

**1)** בסרטון התיאוריה הוכחנו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט ערך הביניים של קושי.
נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט הערך הממוצע של לגראנז'.

**2)** תהי $f$ רציפה ב-$[a,b]$, ו-$\int_a^b f(x)dx=1$.
הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $(b-a)f(x)=1$.

**3)** תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, ונניח כי $a\le x_1<x_2\le b$
וכי $\int_a^{x_2} f(t)dt=\int_a^{x_1} f(t)dt$.
הוכיחו שקיים $x$, בקטע $(a,b)$, שעבורו $f(x)=0$.

**4)** הוכיחו, ללא חישוב האינטגרל, כי $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

**5)** תהי $f$ פונקציה רציפה ויורדת בקטע $[n,n+1]$.
הוכיחו כי $f(n+1)<\int_n^{n+1} f(x)dx<f(n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

**6)** יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.
הוכיחו שקיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)=g(c)$.

**7)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)dx=f(0)$.

**8)** תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נתון כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=a$.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx=a$.

**9)** חשבו את הערך הממוצע של הפונקציה $f(x)=\sin x\sin(x+\alpha)$ בקטע $[0,2\pi]$.

**10)** ניזכר במשפט הערך הממוצע לאינטגרלים.
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$
הראו שהמשפט לעיל אינו נכון, אם נחליף את דרישת הרציפות בדרישה לאינטגרביליות.

**11)** הוכח כי $\frac{6}{\ln 2}\le\int_2^4\frac{x}{\ln x}dx\le\frac{3}{\ln 2}$.

**12)** הוכח כי $\frac{2\pi^2}{9}\le\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}dx\le\frac{\pi^2}{9}$.

**13)** הוכח כי $\frac{1}{2}\ln 2\le\int\limits_0^{\pi/4}e^{-x^2}\tan x dx\le\frac{1}{2e}\ln 2$.

**14)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
הוכח כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$.

**15)** נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע האינטגרלי השני.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 21 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

### תוכן העניינים

# פתרון מערכת משוואות ליניאריות

## שאלות

**1)** מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2y=0 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y=-7 \\ x-y=-1 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} x-y=0 \\ 2x+y=3 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} 2x+y=4 \\ x+y=3 \end{matrix}$

**2)** רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{matrix}$

בשאלות **3-5** בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

**3)** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2,\ R_1 \to 2R_1$
$R_3 \to R_3+R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

**4)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2+R_1$
$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3-3R_2$

**5)** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1+3R_3, R_2 \to R_2+3R_3$
$R_1 \to 5R_1-8R_2$

**6)** מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

א. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

בשאלות **7-15** הביאו את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת**
(בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

**7)**
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

**8)**
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**9)**
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

**10)**
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**11)**
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

**12)**
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**13)**
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**14)**
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

**15)**
$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$$
$F=\mathbb{C}$ , $F=\mathbb{R}$

* בשאלה **15**, יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{C}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{R}$.

בשאלות **27-16** פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

**16)**
$$\begin{aligned} 2x+3y&=8 \\ 5x-4y&=-3 \end{aligned}$$

**17)**
$$\begin{aligned} 4x+8y&=20 \\ 3x+6y&=15 \end{aligned}$$

**18)**
$$\begin{aligned} 8x-4y&=10 \\ -6x+3y&=1 \end{aligned}$$

**19)**
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2-3x_3&=5 \\ 3x_1-2x_2+2x_3&=5 \\ 10x_1-6x_2-2x_3&=32 \end{aligned}$$

**20)**
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=-11 \\ 2x+3y-z&=-5 \\ 3x+y-z&=2 \end{aligned}$$

**21)**
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=3 \\ 4x+6y+16z&=8 \\ 3x+2y+17z&=1 \end{aligned}$$

**22)**
$$\begin{aligned} x+3y&=2 \\ 2x+y&=-1 \\ x-y&=-2 \end{aligned}$$

**23)**
$$\begin{aligned} 4x-7y&=0 \\ 8x-14y&=2 \\ -16x+28y&=4 \end{aligned}$$

**24)**
$$\begin{aligned} 3x-2y&=1 \\ -9x+6y&=-3 \\ 6x-4y&=2 \end{aligned}$$

**25)**
$$\begin{aligned} x+2y-3z+2t&=2 \\ 2x+5y-8z+6t&=5 \\ 6x+8y-10z+4t&=8 \end{aligned}$$

**26)**
$$\begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0 \end{aligned}$$

**27)**
$$\begin{aligned} x+2y+2z&=2 \\ 3x-2y-z&=5 \\ 2x-5y+3z&=-4 \\ 2x+8y+12z&=0 \end{aligned}$$

## תשובות סופיות

**1)** א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

**2)** א. $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

**3)** $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

**6)** א. $R_1 \to 2R_1 + R_2$ ב. $R_2 \to R_2 - 4R_1$ ג. $R_2 \to 2R_2 + 4R_1$

**7)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

**8)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**9)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

**10)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**11)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**12)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15) $\underset{F=\mathbb{C}}{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ , $\underset{F=\mathbb{R}}{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

16) $(x,y)=(1,2)$ 17) $(x,y)=(5-2t,t)$ 18) $\phi$

19) $\phi$ 20) $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$

21) $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$ 22) $(x,y)=(-1,1)$

23) $\phi$ 24) $(x,y)=\left(\frac{1+2t}{3},t\right)$

25) $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$ 26) $\phi$

27) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

# חקירת מערכת משוואות ליניאריות (עם פרמטר)

## שאלות

בשאלות **1-6** מצאו לאילו ערכי $k$ (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

**1)**
$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

**2)**
$$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

**3)**
$$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

**4)**
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

**5)**
$$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

**6)**
$$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

בשאלות **7-9** מצאו לאילו ערכי $k$ (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

**7)**
$$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

**8)**
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

**9)**
$$\begin{aligned} 3x+4y-z&=2\\ kx-2y+z&=-1\\ x+8y-3z&=k\\ 2x+6y-2z&=0.5k+1 \end{aligned}$$

בשאלות **10-12** מצאו לאילו ערכים של $a$ ושל $b$ (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

**10)**
$$\begin{aligned} x+2y-4z&=b\\ 7x-10y+16z&=7\\ 2x-ay+3z&=1 \end{aligned}$$

**11)**
$$\begin{aligned} 2x+4y+az&=-1\\ x+2y+4z&=-4\\ x+2y-4z&=0\\ x+2y+6z&=-2b \end{aligned}$$

**12)**
$$\begin{aligned} x+y-z+t&=1\\ ax+y+z+t&=b\\ 3x+2y+at&=1+a \end{aligned}$$

**13)** נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} x+az&=1\\ y+2z&=2\\ bx+cy+dz&=3 \end{aligned}$$

א. מצאו תנאי עבור $a,b,c,d$, כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצאו תנאי עבור $b,c,d$, כך שלכל $a$, למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

**14)** נתונה המערכת: $\begin{cases} x+y-z=1\\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1\\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.

א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.

ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.

ג. מצאו לאילו ערכי $k$ יש למערכת:

1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.

ה. מצאו לאילו ערכי $k$ יש למערכת פתרון שבו $z=0$.

ו. מצאו לאילו ערכי $k$ יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.

ז. מצאו עבור איזה ערך של $k$ פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$.
האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.

ח. מצאו לאיזה ערך של $k$, $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

**15)** נתונות המשוואות של 3 מישורים: $\begin{cases} 3x+my=3\\ mx+2y-mz=1\\ -x+mz=-1 \end{cases}$.

בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע $m$ שלושת המישורים:

א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).

ב. לא נפגשים באף נקודה.

ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).

ד. האם קיים ערך של $m$ עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?

## תשובות סופיות

1) 1. $k \neq 1,\ k \neq -2$ 2. $k=1$ 3. $k=-2$

2) 1. $k \neq 1,\ k \neq -2$ 2. $k=-2$ 3. $k=1$

3) 1. $k \neq -1,\ k \neq \frac{4}{7}$ 2. $k=\frac{4}{7}$ 3. $k=-1$

4) 1. $k \neq 1,\ k \neq -0.4$ 2. $k=1,\ k=-0.4$

5) 1. $k \neq \pm 1,\ k \neq -2$ 2. $k=\pm 1, k=-2$

6) 1. $k \neq -1,\ k \neq -3,\ k \neq 2$ 3. $k=-1,\ k=-3,\ k=2$

7) 1. $k=-1$ 2. $k \neq \pm 1$ 3. $k=1$

8) 2. $k=3$ 3. $k \neq 3$

9) 1. $k \neq 1$ 2. $k=1$

10) 1. $a \neq 2$ 2. $a=2,\ b \neq -3$ 3. $a=2, b=-3$

11) 2. $b \neq 2.5$ או $a \neq -6$. 3. $a=-6,\ b=2.5$

12) 2. $a=2,\ b \neq 2$ 3. $a=2,\ b=2$ או $a \neq 2$.

13) א. $ab+2c \neq d$ ב. $b=0,\ c=1.5, d=3$

14) א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1 \\ 4 & -6 & k+2 & 4 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix}$

ג. 1. $k \neq 2$ , $k \neq -1$ . 2. $k=-1$ 3. $k=2$ ד. $(x,y,z)=(1+0.2t, 0.8t, t)$

ה. $k=\pm 2$ ו. $k=-2$ ז. $k=2$ , לא. ח. $k=-2$

15) א. $m \neq 0,-2,3$ ב. $m=-2,3$ ג. $m=0$ ד. לא.

# פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות

## שאלות

**1)** פתרו את המערכת $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ 4x-2y+5z=12 \end{cases}$.

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

**2)** פתרו את המערכת $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ x+y+z=4 \end{cases}$.

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

**3)** נתונה המערכת: $\begin{cases} x-y=1 \\ -x+2y-z=k \\ 2x+my+z=3 \end{cases}$.

א. מצאו את ערכי $m$, עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.

ב. עבור ערך $m$ שנמצא ב-א, מצאו את ערכי $k$, עבורם למערכת פתרון.

ג. עבור ערכי $m, k$ שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

**4)** נתון שהחמישייה $(4t-2s+4,-t+s,2,t,s)$ מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.

ב. החמישייה $(4,0,2,0,0)$, היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.

ג. החמישייה $(4,0,2,1,1)$, היא פתרון של המערכת הנתונה.

ד. לכל $a$ ממשי, החמישייה $(4a,0,2a,0,0)$ אינה פתרון של המערכת הנתונה.

ה. החמישייה $(4t-2s,-t+s,0,t,s)$, היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ו. החמישייה $(0,1,0,1,2)$, היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

**5)** נתונה המערכת ההומוגנית $\begin{cases} 3x+my=0 \\ mx+2y-mz=0 \\ -x+mz=0 \end{cases}$.

יהי $W$ אוסף הפתרונות של המערכת.

עבור אילו ערכים של הקבוע $m$ (אם בכלל) $W$ הוא:

א. נקודה (מצאו נקודה זו).

ב. ישר (מצאו ישר זה).

ג. מישור (מצאו מישור זה).

**6)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$.

נסמן ב-$A'$ את הצורה המדורגת של $A$.

ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.

מצאו את $A$.

## תשובות סופיות

**1)** פתרון כללי של המערכת $\left(4-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t+2,t\right)$.

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $\left(-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t,t\right)$.

**2)** למערכת פתרון יחיד $(x,y,z)=(1,1,2)$.

למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד $(0,0,0)$.

**3)** א. $m=-3$ ב. $k=-2$ . ג. פתרון כללי של המערכת $(x,y,z)=(t,t-1,t)$.

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $(t,t,t)$.

**4)** א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה.

ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה.

ז. הטענה לא נכונה.

**5)** א. $m\neq 0,-2,3$. הנקודה היא $(x,y,z)=(0,0,0)$.

ב. אם $m=0$ נקבל ישר $\underline{x}=t(0,0,1)$. אם $m=2$ נקבל ישר $\underline{x}=t(2,-1,1)$,

אם $m=3$ נקבל ישר $\underline{x}=t(3,-3,1)$.

ג. אין ערכים של $m$ עבורם נקבל מישור.

**6)** $$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&8\\4&8&12&16\\-3&-6&-9&-12\end{pmatrix}$$

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 22 - מטריצות

### תוכן העניינים

# מטריצות

## שאלות

**1)** נתונות המטריצות הבאות: $A_{4\times 6}, B_{4\times 6}, C_{6\times 2}, D_{4\times 2}, E_{6\times 4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

א. $A+B$ ב. $AB$ ג. $AC-D$ ד. $AE-B$

ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. $E^TB$

ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

**2)** מצאו את $x,y,z$, אם ידוע כי: $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$.

בשאלות **3-8** נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

**3)** א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

**4)** $2tr\left(D^2-2E\right)$

**5)** א. $4C^T+A$ ב. $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$

**6)** $I_2BC$

**7)** $tr\left(C^TC\right)$

**8)** $DABC$

**9)** נתון כי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$.
נתון כי $(A-I)(A+I)=0$.
הוכיחו או הפריכו: $A=I$ או $A=-I$.

**10)** אפיינו את כל המטריצות $A_{2\times 2}$ שמקימות $A^2=-4I$.

**11)** הוכיחו כי לכל $n$ טבעי מתקיים $\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

**12)** שתי מטריצות $A$ ו-$B$ יקראו מתחלפות אם $AB=BA$.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:
א. אם המטריצות $A$ ו-$B$ מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז המטריצות $A$ ו-$B$ מתחלפות.
ב. אם המטריצה $A$ מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז $A^T=-A$.

**13)** תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$.
נתון כי $AA^T=0$. הוכיחו כי $A=0$.
האם הטענה נשארת נכונה אם איברי $A$ מרוכבים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

**14)** יהיו $A$ ו-$B$ מטריצות ריבועיות המקיימות $AB=BA$ (מטריצות מתחלפות).
א. הוכיחו כי לכל $k$ טבעי מתקיים $AB^k=B^kA$.
ב. הוכיחו כי לכל $k$ טבעי מתקיים $(AB)^k=A^kB^k$.

**15)** לפי נוסחת הבינום של ניוטון $(A+B)^n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k$, כאשר $A,B\in\mathbb{R},\ n,k\in\mathbb{N}$.
א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם $A$ ו-$B$ מטריצות ריבועיות מסדר $\ell$?
ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות $A$ ו-$B$, על מנת שנוסחת הבינום תהיה נכונה עבורן.
ג. מצאו את הפיתוח של $(A+I)^n$ ו-$(A-I)^n$, כאשר $A$ ו-$I$ ריבועיות מסדר $\ell$.

**16)** א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
ב. נניח ש- $A$ ו- $B$ מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.
הוכיחו שגם המטריצות $AB$ ו- $A+B$ נילפוטנטיות.

**17)** תהי $A_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\min\{i,j\}$.
תהי $B_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & else\end{cases}$.
א. כתבו את המטריצות $A$ ו- $B$ בצורה מפורשת.
ב. המטריצה $C$ מקיימת $C=A\cdot B$.
חשבו את $C$ ומצאו נוסחה עבור $c_{ij}$ לכל $1\le i,j\le n$.

**18)** מצאו מטריצה ממשית $A$, כך שיתקיים $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}A-\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}A\right)^T=A-A^T$.

## תשובות סופיות

**1)** א. $4\times 6$ ב. לא. ג. $4\times 2$ ד. לא. ה. לא. ו. $6\times 6$
ז. $6\times 2$ ח. לא ט. $6\times 4$ י. $6\times 6$

**2)** $(x,y,z)=(2,1,-1)$

**3)** א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

**4)** 230

**5)** א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

**6)** $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

**7)** 63

**8)** $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** $A=\begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

**11)** שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** א+ב. שאלת הוכחה.

ג.

$$(A+I)^n=\binom{n}{0}A^n+\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}A^1+\binom{n}{n}I$$

$$(A-I)^n=\binom{n}{0}A^n-\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}-\ldots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n-1}A^1+(-1)^n\binom{n}{n}I$$

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** א.
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&\cdots&1\\1&2&2&2&2&\cdots&2\\1&2&3&3&3&\cdots&3\\1&2&3&4&4&\cdots&4\\1&2&3&4&5&\cdots&5\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&2&3&4&5&\cdots&n\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&\iddots&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ב. $c_{ij}=\min\{i,n+1-j\}$
$$C=\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1&1&1&1\\2&\cdots&2&2&2&2&1\\3&\cdots&3&3&3&2&1\\4&\cdots&4&4&3&2&1\\5&\cdots&5&4&3&2&1\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n&\cdots&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

**18)** $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$

# מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

## שאלות

מטריצה ריבועית $A$ תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

**1)** ידוע ש-$A$ מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):
1. $AA^T$ סימטרית.
2. $A + A^T$ סימטרית.
3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.

**2)** ידוע ש-$A$ ו-$B$ אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:
1. $BABABA$ אנטי-סימטרית.
2. $A^2 - B^2$ סימטרית.
3. $A^2 + B$ סימטרית.

**3)** ידוע ש-$A$ ו-$B$ סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$.
מי מבין הבאים נכון:
1. $AB^3$ אנטי-סימטרית.
2. $AB^2$ סימטרית.
3. $(A-B)^2$ סימטרית.

**4)** ידוע ש-$A$ סימטרית ו-$B$ אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.
הוכיחו:
1. $AB$ אנטי-סימטרית.
2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.

**5)** נתון: $A, B, AB$ סימטריות מאותו סדר.
הוכיחו כי $A^4B^4 = B^4A^4$.

## תשובות סופיות

**1)** 1,2,3
**2)** 2
**3)** 1,2,3
**4)** שאלת הוכחה.
**5)** שאלת הוכחה.

# המטריצה ההופכית

## שאלות

בשאלות **1-9** מצאו את ההופכה של כל מטריצה.
בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

**1)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

**4)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

**7)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

**10)** עבור אילו ערכים של הקבוע $k$ המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ **הפיכה**?

**11)** עבור אילו ערכים של הקבוע $k$ המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **איננה** הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות **12-14** הן הפיכות מסדר $n$, וחלצו את $X$:

**12)** א. $AXC = D$ ב. $A^{-1}XC = A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^TP = A$

**13)** א. $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$ ב. $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

**14)** $ABC^TX^{-1}BA^TC = AB^T$

**15)** נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

חשבו את $X$, אם ידוע כי $B^2X(2B)^{-1} = B + I$.

**16)** נתון $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$. חשבו את $Y$, אם ידוע כי $BYB^T=B^{-1}+B$.

**17)** נתון $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\4&7\end{pmatrix}$.

חשבו את $B$, אם נתון בנוסף כי: $5A^TB\left(I+2A\right)^{-2}=\left(7A\right)^{-2}$.

**18)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון: $A$ מטריצה ריבועית המקיימת $A^2-5A-2I=0$.
הוכיחו כי $A$ הפיכה ובטאו את $A^{-1}$ במונחי $A$ ו- $I$.

ב. נתון: $A$ מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$.
הוכיחו כי $A$ הפיכה ובטאו את $A^{-1}$ במונחי $A$ ו- $I$.

**19)** נתון כי $p(x)=x^3-4x^2-20x+48$, $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$.

א. חשבו את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש-$A$ הפיכה,
ובטאו את $A^{-1}$ בעזרת $A$ ו- $I$ בלבד.

**20)** נתון כי $A$ מטריצה ריבועית המקיימת $A^4=0$.

א. הוכיחו כי $A$ לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה $A-I$ הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

**21)** נתון כי $\begin{cases}P^{-1}AP=B\\Q^{-1}BQ=C\end{cases}$.

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה $D$, כך ש- $D^{-1}AD=C$.

* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:
הוכיחו: אם $A$ דומה ל- $B$ ו- $B$ דומה ל- $C$, אז $A$ דומה ל- $C$.
(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

**הערה:** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

**22)** תהיינה $A,B$ מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\ge 2$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
א. $AB=BA$.
ב. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח $B$ הפיכה.
ג. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח $A$ הפיכה.
ד. אם $(AB)^{100}=I$, אז בהכרח $(BA)^{100}=I$.
ה. אם $(AB)^{100}=0$, אז בהכרח $(BA)^{101}=0$.

**23)** תהיינה $A,B$ מטריצות מסדר $n\times n$, עבורן $A^2+AB=I$.
א. הוכיחו ש-$AB=BA$.
ב. אם נתון בנוסף ש-$B^2+BA$ היא מטריצת האפס,
הוכיחו שגם $B$ היא מטריצת האפס.

**24)** תהיינה $A,B$ מטריצות כלשהן.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
א. אם $AB=I$ אז $B=A^{-1}$.
ב. אם המכפלה $AB$ היא מטריצה ריבועית, אזי $A,B$ מטריצות ריבועיות.
ג. אם המכפלה $AB$ היא מטריצה הפיכה, אזי $A,B$ מטריצות ריבועיות.
ד. המכפלה $AB$ לא הפיכה.
ה. אם $A$ מטריצה ריבועית והמכפלה $AB$ מוגדרת, אזי $B$ מטריצה ריבועית.

**25)** מטריצה ריבועית $A$ תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2=A$.
הוכיחו:
א. למעט המקרה בו $A=I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.
ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.
ג. אם $A$ מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2,
אז $tr(A)=1$ או ש-$A$ מטריצה אלכסונית.
ד. $A$ אידמפוטנטית $\Leftrightarrow$ $A^n=A$, לכל $n$ טבעי.

**26)** נתונה $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$.
מצאו תנאי על הקבועים $a,b,c,d$ כך ש- $M$ תהיה הפיכה ומצאו את $M^{-1}$ במקרה זה.

**27)** נתון כי $A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}$ הפיכה.

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

א. $$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y&=\alpha_{13}\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y&=\alpha_{23}\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y&=\alpha_{33}\end{aligned}$$

ב. $$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+w&=0\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z-4w&=1\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z+3w&=-4\end{aligned}$$

ג. $$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z&=3\\ \alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z&=1\\ \alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z&=1\end{aligned}$$

**28)** תהיינה $A,B$ מטריצות מסדר $n\times n$.

הוכיחו:

א. אם $BA=I-A^2$ וגם $B^2=-AB$, אז $B=0$.

ב. אם $A^2=2I$, אז $A+I$ ו-$A-I$ הפיכות.

**29)** תהיינה $A,B$ מטריצות מסדר $n\times n$, כך ש-$B^2A=-2B^3$ $(1)$ וגם $B^3+AB^2=3I$ $(2)$.

הוכיחו ש-$A$ ו-$B$ הפיכות, ובטאו את $A^{-1}$ ו-$B^{-1}$ באמצעות $B$.

**30)** תהיינה $A,B$ מטריצות מסדר $n\times n$, כך ש-$B=BA+2I$.

א. הוכיחו ש-$B$ הפיכה.

ב. ידוע ש-$B$ סימטרית.

הוכיחו כי $A$ סימטרית.

**31)** תהי $A$ מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים $n$ טבעי כך ש-$A^n=0$).

א. הוכיחו כי $A$ לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי $I-A$ ו-$I+A$ הפיכות.

ג. נגדיר: $e^A=I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\ldots+\frac{1}{n!}A^n+\ldots$.

הוכיחו: אם $e^A=I$ אז $A=0$.

**32)** נתונות שתי מטריצות, $A$ ו-$B$, מסדר $n$.
סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

א. ל-$A$ ול-$A^T$ יש אותה צורה מדורגת קנונית.

ב. אם $A,B$ מדורגות קנונית, אז $A+B$ מדורגת קנונית.

ג. אם $A,B$ מדורגות קנונית, אז $A-B$ מדורגת קנונית.

ד. אם בצורה המדורגת קנונית של $B$ יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של $AB$ יש שורת אפסים.

## תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

10) $k \neq 1,\ k \neq -2$ 11) $k=1,\ k=-4$

12) א. $A^{-1}DC^{-1}$ ב. $D$ ג. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$

13) א. $CD^2 - A$ ב. $\left(A+C^{-1}\right)^{-1} A$

14) $BA^TC(B^{-1})^T BC^T$ 15) $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

16) $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$ 17) $B = \frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

18) א. $A^{-1} = 0.5A - 2.5I$ ב. $A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I$

19) א. $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I$

20) א. שאלת הוכחה. ב. $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) $M^{-1} = \frac{1}{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)} M^T \quad \left((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)\right)$

**27)** א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.
**28)** שאלת הוכחה.
**29)** שאלת הוכחה.
**30)** שאלת הוכחה.
**31)** שאלת הוכחה.
**32)** ד

# דרגה של מטריצה

## שאלות

**1)** אמתו את המשפט $rank\left(A\right)=rank\left(A^{T}\right)$,

על המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&10\\5&6&7&8&14\\6&8&10&12&24\\3&2&1&0&-6\end{pmatrix}$.

**2)** אמתו את המשפט $rank\left(AB\right)\le\min\left\{rank(A),rank(B)\right\}$,

עבור $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\6&8&10&12\\3&2&1&0\end{pmatrix}$.

**3)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1-k&0&0&0\\0&1-k&0&0\\0&0&4-k&1\\0&0&0&10-k\end{pmatrix}$.

חשבו את $rank\left(A\right)$.

**4)** נתון כי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n>1$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $rank\left(A\right)=n-1\ \Rightarrow\ rank\left(A^{2}\right)=n-1$

ב. $rank\left(A\right)=n-1\ \Leftarrow\ rank\left(A^{2}\right)=n-1$

**5)** נתון כי $A,B$ מטריצות ריבועיות מסדר $n>1$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $rank\left(A\right)=rank\left(AB\right)$, אז בהכרח $B$ הפיכה.

ב. ייתכן ש-$rank\left(A\right)<rank\left(AB\right)$.

ג. אם $rank\left(A\right)>rank\left(B\right)$, אז $rank\left(AB\right)>rank\left(B\right)$.

**6)** נתון $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&1\end{pmatrix}$ , $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$ .

א. חשבון את $rank(B)$ , $rank(A)$ .

ב. חשבון את $rank\left(B^{10}A^{14}\right)$.

**7)** נניח כי $A,B$ שתי מטריצות ריבועיות מסדר $n$.

הוכיחו כי $rank\begin{pmatrix}A&A\\A&B\end{pmatrix}\le 2rank(A)+rank(B)$.

**8)** תהי $A_{8x7}$ מטריצה, כך ש- $rank(A)=3$.

הוכיחו כי קיימות 3 מטריצות $A_1,A_2,A_3$ , שלכל אחת מהן דרגה 1,
כך ש- $A=A_1+A_2+A_3$.

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר $mxn$ שדרגתה $k$.

**9)** נתונות שתי מטריצות $B_{5\times3}$ , $A_{3\times5}$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $rank(AB)=rank(BA)$

ב. $rank(AB)\neq rank(BA)$

ג. המטריצה $BA$ לא הפיכה.

**10)** תהי $A$ מטריצה מסדר $m\times n$ , ותהי $B$ מטריצה מסדר $n\times m$.

הוכיחו:

א. אם $AB=I_m$ אז $rank(A)=rank(B)=m$.

ב. אם $BA=I_n$ אז $rank(A)=rank(B)=n$.

ג. אם $AB=I_m$ וגם $BA=I_n$ אז בהכרח $m=n$.

ד. אם $A$ לא ריבועית אז לא ייתכן שגם $AA^T=I_m$ וגם $A^TA=I_n$.

**11)** בשדה **F** נתונים $a_1,a_2,...,a_m$ איברים, שלא כולם אפס, ו- $b_1,b_2,...,b_n$ איברים, שלא כולם אפס.

קבעו מהי דרגתה של המטריצה $M=\left(m_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ , כאשר $m_{ij}=a_ib_j$.

**12)** תהי $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=b_i^2-b_j^2$, כאשר $b_1,b_2,...,b_n$ מספרים ממשיים שונים ו- $n\ge 3$.

א. הוכיחו שהמטריצה לא הפיכה.

ב. האם הטענה תישאר נכונה אם נשנה את הנתון ל- $n\ge 2$? הוכיחו או הפריכו.

**13)** תהיינה $A,B$ מטריצות מעל $\mathbb{R}$, מסדר $m\times n$, כך שלכל $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$, $x\ne\underline{0}$, מתקיים $A\underline{x}\ne B\underline{x}$.

מה הדרגה של המטריצה $A-B$?

**14)** תהיינה $A,B$ מטריצות מסדר $n\times n$.

א. נתון שכל פתרון של המערכת $(AB)\underline{x}=\underline{0}$, הוא פתרון של המערכת $A\underline{x}=\underline{0}$.

הוכיחו שהדרגה של $AB$ שווה לדרגה של $A$.

ב. הוכיחו: אם $A$ הפיכה, אז $\rho(AB)=\rho(A)$.

ג. הוכיחו שאם $\rho(AB)<\rho(A)$, אז $A$ לא הפיכה.

**15)** תהי $A$ מטריצה מסדר $n\times n$.

א. הוכיחו כי $P(A)\subseteq P(A^2)$.

ב. נתון כי $\rho(A^2)<\rho(A)$.

הוכיחו שקיים $v\in\mathbb{R}^n$, כך ש- $Av\ne 0$ וגם $A^2v=0$.

## תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) אם $k=1$, אז $rank(A)=2$. אם $k=4, k=10$, אז $rank(A)=3$.
אם $k\neq 1,4,10$ $rank(A)=4$.
4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.
ג. הטענה אינה נכונה.
6) א. $rank(B)=3$, $rank(A)=2$. ב. $rank(B^{10}A^{14})=2$
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) 1
12) שאלת הוכחה.
13) $n$
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.

# בחזרה למערכת משוואות ליניארית

## שאלות

1) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות $A$, $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$, המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x}=\underline{b}$ :

א. $$\begin{aligned} 2x+y-z&=3\\ x+2y-4z&=5\\ 6x+4y+z&=2 \end{aligned}$$

ב. $$\begin{aligned} 2x-3y+z+t&=1\\ 4x+y+2z&=4\\ y+z+t&=1\\ x-4z-2y&=10 \end{aligned}$$

בשאלות 2-6 נתון כי $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}4&-2&4\\1&-1&1\\1&-6&3\end{pmatrix}$.

בטאו כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות ליניאריות :

2) $A\underline{x}=\underline{b}$

3) $A\underline{x}=4\underline{x}+\underline{b}$

4) $A\underline{x}=-k\underline{x}+\underline{b}$

5) $A\underline{x}=\underline{x}$

6) $A^T\underline{x}=2\underline{x}+3\underline{b}$

7) פתרו את מערכת המשוואות $\begin{aligned} 2x-y+z&=3\\ 3x-2y+2z&=5\\ 5x-3y+4z&=11 \end{aligned}$ ,

בעזרת המטריצה ההפוכה.

8) פתרו את מערכת המשוואות $\begin{aligned} x+4y+2z+4t&=1\\ x+2y-z&=0\\ y+z+t&=1\\ x+3y-z-2t&=0 \end{aligned}$ ,

בעזרת המטריצה ההפוכה.

9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים :

$(x,y,z)=(-1,4,-2)$ , $(x,y,z)=(2,-8,4)$.

הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

**10)** למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים:
$(x,y,z)=(-1,4,-2)$ , $(x,y,z)=(2,3,4)$.
מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

**11)** נתונה המערכת $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.
מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע $k$, למערכת:
א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

**12)** נתון $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$ , $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}$.
ידוע כי $rank(A)=3$, וידוע כי למערכת $Ax=b$ יש פתרון.
מצאו את הקבועים $k,m$.

**13)** נתונה מטריצה ריבועית $A$, המקיימת את התכונה הבאה:
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה $A$ שווה 0.
הוכיחו ש-$A$ מטריצה **לא** הפיכה.

**14)** נתונה מטריצה ריבועית הפיכה $A$, המקיימת את התכונה הבאה:
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה $A$ שווה $k$.
הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.
בטאו קבוע זה בעזרת $k$.

**15)** מטריצה $A$ מקיימת $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=0$.
הוכיחו כי הווקטור $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

**16)** יהיו $A,B$ מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.
א. אם למערכת $(AB)x=0$ קיימים שני פתרונות שונים,
אז בהכרח $A$ לא הפיכה.
ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת $(AB)x=0$,
אז למערכת $(BA)x=0$ קיים פתרון שונה מ-0.
ג. אם למערכת $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.
ד. אם למערכת $(A^tA)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $A$ לא הפיכה.
ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$,
אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון שונה מ-0.

**17)** נתונה מערכת משוואות מעל $\mathbb{R}$ : $Ax=d$ $(d\neq 0)$.
נתון כי $A$ מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת $rank(A)=2$.
ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
$u=(x_1,x_2,6,7),\ \ v=(y_1,y_2,1,2),\ \ w=(z_1,z_2,4,3)$.
מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
א. $x=au+bv+cw$
ב. $x=(a+b+1)u-av-bw$
ג. $x=au+bv+w$
ד. $x=(a-b)u+(b-c)v+(c-a)w$
ה. $x=(a+b)u-(av+bw+u)$, כאשר $a,b,c\in\mathbb{R}$.

**הערה:** בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:
בהינתן מערכת הומוגנית $Ax=0$ :
1. אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
2. מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות.
בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

**18)** נתונה מערכת $A_{m\times n}\cdot x=b$.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $u$ וגם $\lambda u$ $(\lambda\neq 1)$ פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.
ב. אם $u$ ו- $v$ וגם $\alpha u+\beta v$ $(\alpha,\beta\neq 0)$ פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.
ג. אם הווקטורים $(1,2,...,n),\ (n,...,2,1)$ פותרים את המערכת והווקטור $(n+1,...,n+1)$ לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.

**19)** תהי $A$ מטריצה כך שלמערכת $Ax=0$ פתרון יחיד.
הוכיחו או הפריכו:
א. $A$ הפיכה.
ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים $A^T$ פתרון יחיד.
ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים $A$ פתרון יחיד.

**20)** תהי $A_{m\times n}$ מטריצה ממשית כך ש- $m<n$.
הוכיחו או הפריכו:
א. ממד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$ הוא $n-m$.
ב. למערכת $\left(A^T A\right)x=0$ יש אינסוף פתרונות.
ג. ייתכן מצב בו למערכת $\left(A^T A\right)x=0$ יש פתרון יחיד.
ד. ייתכן מצב בו למערכת $\left(AA^T\right)x=0$ יש פתרון יחיד.

**21)** תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$, כך שלכל מטריצה ריבועית $B\neq 0$ מסדר $n$, מתקיים $AB\neq 0$.
הוכיחו ש- $rank(A)=n$.

**22)** תהי $A$ מטריצה ממשית מסדר $m\times n$.
לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.
א. אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$,
אז בהכרח למערכת $A^T x=b$, יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ב. עבור $m=n$, אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$,
אז בהכרח למערכת $A^T x=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ג. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m<n$.
ד. ייתכן ש- $A^T A=I_n$ וגם $AA^T=I_m$.
ה. אם $m\neq n$ ואם למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

**23)** תהא $A\in M_{4\times 4}\left(R\right)$ ויהי $b\in R^4$.
ידוע כי $u$ ו- $v$ פתרונות של המערכת הלא הומוגנית $Ax=b$.
א. נגדיר $w=\alpha u+\beta v$.
הוכיחו כי אם גם $w$ פתרון של המערכת $Ax=b$, אז $\alpha+\beta=1$.
ב. נניח בנוסף כי $w=-u+2v$ הוא פתרון של המערכת $A^2x=b$.
הוכיחו כי $A-I$ לא הפיכה.

**24)** נתון $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 3 & -8 & -8 \end{pmatrix}$, ויהי $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

א. הראו כי $v=(2,-1,1,-1,1)^T$ הוא פתרון של המערכת $Ax=b$.

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

ג. מצאו $C,D\in M_{5\times 2}(\mathbb{R})$, כך ש- $C\neq D$ ו- $AC=AD=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

## תשובות סופיות

**1)** א. $\underline{b}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$ $\quad \underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-4\\4&4&1\end{pmatrix}$

ב. $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\10\end{pmatrix}$ $\quad \underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix}2&-3&1&1\\4&1&2&0\\0&1&1&1\\1&-2&-4&0\end{pmatrix}$

**2)** $$\begin{aligned}4x-2y+4z&=1\\x-y+z&=2\\x-6y+3z&=3\end{aligned}$$

**3)** $$\begin{aligned}-2y+4z&=1\\x-5y+z&=2\\x-6y-z&=3\end{aligned}$$

**4)** $$\begin{aligned}(4+k)x-2y+4z&=1\\x+(k-1)y+z&=2\\x-6y+(3+k)z&=3\end{aligned}$$

**5)** $$\begin{aligned}3x-2y+4z&=0\\x-2y+z&=0\\x-6y+2z&=0\end{aligned}$$

**6)** $$\begin{aligned}2x+y+z&=3\\-2x-3y-6z&=6\\4x+y+z&=9\end{aligned}$$

**7)** $(x,y,z)=(1,2,3)$

**8)** $(x,y,z,t)=(-13,4,-5,2)$

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-6\end{pmatrix}$

**11)** אם $k\neq 2$ או $k\neq -1$, אז יש פתרון אחד.
אם $k=2$, אז יש אינסוף פתרונות.
אם $k=-1$, אז אין פתרונות.

**12)** $m=5, k=9$

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** סכום האיברים בכל שורה של $A^{-1}$ הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$.

**15)** שאלת הוכחה.

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** שאלת הוכחה.

**19)** שאלת הוכחה.

**20)** שאלת הוכחה.

**21)** שאלת הוכחה.

**22)** שאלת הוכחה.

**23)** שאלת הוכחה.

**24)** א. שאלת הוכחה. ב. $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-t,-2s,s,-t,-t,t)$

ג. $(t=s=1)$ $D=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $(t=s=0)$ $C=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

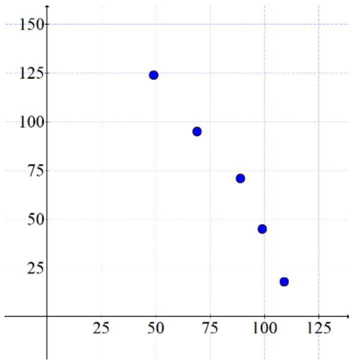
# שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה לינארית

## שאלות

**1)** נתונות חמש נקודות במישור : $(-4,-1),\ (-2,0),\ (2,4),\ (4,5),\ (5,6)$ .
מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.

**2)** בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.

| $price\,(x)$ | $Demand\,/\,sales\,(y)$ |
|---|---|
| 49$ | 124 |
| 69$ | 95 |
| 89$ | 71 |
| 99$ | 45 |
| 109$ | 18 |




א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.
ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54$.
ג. מה משמעות השיפוע של הישר?
ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ״ל.

### תשובות סופיות

**1)** $f(x)=0.8x+2$

**2)** א. $f(x)=-1.7x+211$ ב. 119.2 יחידות.
ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש.
ד. 14.41

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 23 - דטרמיננטות

### תוכן העניינים

# חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

## שאלות

בשאלות **1-5** חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

**1)** א. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

**2)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

**3)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

**4)** $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

**5)** $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

בשאלות **6-7** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

**6)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

**7)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

בשאלות **8-10** חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

**8)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

**9)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

**10)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

בשאלות **11-12** הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

**11)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix}$

**12)** א. $\begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix}$ ד. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

בשאלות **13-15** נתון כי: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$.

חשבו:

**13)** $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$

**14)** $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$

**15)** $\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

**16)** הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

**17)** הוכיחו כי: $(y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix}$.

**18)** חשבו: $\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

**19)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות $A$ ו-$B$ מסדר $n$ הנבדלות ביניהן רק בשורה ה-$k$ $(1 \le k \le n)$.
תהי $C$ מטריצה הזהה למטריצות $A$ ו-$B$ אך נבדלת מהן בשורה ה-$k$, שם היא שווה לסכום השורה ה-$k$ של $A$ והשורה ה-$k$ של $B$.
הוכיחו כי $|A|+|B|=|C|$.

ב. חשבו: $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix}$.

## תשובות סופיות

| | | |
|---|---|---|
| **1)** א. $ad-bc$ | ב. 29 | ג. $-1$ |
| **2)** א. $-1$ | ב. $-3$ | ג. $-14$ |
| **3)** א. 24 | ב. 234 | ג. $-300$ |
| **4)** 9 | | |
| **5)** 6 | | |
| **6)** א. 0 | ב. 0 | ג. 3 |
| **7)** א. 24 | ב. 44 | ג. 104 |
| **8)** 120 | | |
| **9)** 114 | | |
| **10)** 6 | | |

**11)** פתרונות באתר : www.GooL.co.il

**12)** פתרונות באתר.

**13)** $-8$

**14)** 16

**15)** 9

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** $(k-1)^4(k+4)$

**19)** א. שאלת הוכחה. ב. 0

# חישוב דטרמיננטה כללית מסדר $n$

## שאלות

**1)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j<n\\ a & 1\le i\le n,\ j=n\\ a & 1\le j\le n,\ i=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים $a_0,\dots,a_{n-1}$, המטריצה הבאה הפיכה:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}?$$

**2)** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה על ידי:

$$a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1,\ j=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

האם קיים ערך של $n$ עבורו דרגת המטריצה קטנה מ- $n$?

**3)** חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\ne 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}$.

**4)** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י: $a_{ij}=|i-j|$.

**5)** חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i\ne j\end{cases}$.

**6)** חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר $n$, כאשר $n \ge 1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}.$$

**7)** חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי:

א. $a_{ij}=\min\{i,j\}$

ב. $a_{ij}=Max\{i,j\}$

**8)** המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}\min\{3(i-1),3(j-1)\} & 1<i,j\le n \\ 1 & i=1 \; or \; j=1\end{cases}$.

חשבו את $|A|$.

**9)** המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}\min\{k(i-1),k(j-1)\} & 1<i,j\le n \\ 1 & i=1 \; or \; j=1\end{cases}$.

חשבו את $|A|$ ומצאו עבור אילו ערכים של הקבוע $k$ המטריצה הפיכה.

**10)** חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר $n$, כאשר $n\ge 3$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix} \quad \left( a_{ij}=\begin{cases} 0 & i=j \\ 1 & 2\le i\le n,\; j=1 \\ 1 & 2\le j\le n,\; i=1 \\ x & else \end{cases} \right).$$

**11)** תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\begin{cases} ij & i\ne j \\ 1+ij & i=j\end{cases}$.

חשבו את $D_n=|A_{n\times n}|$.

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

**12)** המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \end{cases}$.

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב $D_n=|A_{n\times n}|$.

ב. הניחו כי $a=3,b=1,c=2$ וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.
2. את הדטרמיננטה עבור $n=20$.

**13)** נתונה מטריצה $A_{n\times n}$.

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:
מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.
בסוף התהליך מקבלים מטריצה $B$.
חשבו את $|B|$ במונחי $|A|$.

**14)** חשבו את $D_n=\begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & else \end{cases}$.

**15)** חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix} 2 & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases} i & i+j=n+1 \\ 2 & else \end{cases}$.

**16)** חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix} a & & & b \\ & & b & \\ & \iddots & & \\ b & & & a \end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases} b & i+j=n+1 \\ a & else \end{cases}$.

**17)** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:
$a_{ij}=\min\{i,n-j+1\}$.

**18)** חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר $n$, כאשר $n\geq 2$

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

## תשובות סופיות

1) א. $|A|=a-(n-1)a^2$ ב. $A$ הפיכה אם ורק אם $a_0\neq 0$.

2) א. $(-1)^{n+1}n!$ ב. לא.

3) $|A|=n!$

4) $|A|=(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$

5) $|A|=(a-b)^{n-2}[a+(n-1)b]$

6) $(-3)^{n-1}(2n-3)n!$

7) א. $|A|=1$ ב. $|A|=(-1)^{n+1}n$

8) $|A|=2\cdot 3^{n-2}$

9) $|A|=(k-1)\cdot k^{n-2}$ והמטריצה הפיכה אם ורק אם $k\neq 1$ וגם $k=0$.

10) $|A|=(-1)^{n-1}x^{n-2}(n-1)$

11) $D_n=1+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

12) א. $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-1},\ D_2=a^2-bc,\ D_3=a^3-2abc$

ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$ ב.2. $D_{20}=2^{21}-1$

13) $$|B|=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}|A| & n\text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}|A| & n\text{ odd}\end{cases}$$

14) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}} & n\ even\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n\ odd\end{cases}$$

15) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+2}{2}}2(n-2)! & n\ even\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}2(n-2)! & n\ odd\end{cases}$$

16) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n\ even\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n\ odd\end{cases}$$

17) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n\ odd\\ (-1)^{\frac{n-2}{2}+n-1} & n\ even\end{cases}$$

18) $$D_n=\begin{cases}a_n(-1)^{\frac{n}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n\ even\\ a_n(-1)^{\frac{n-1}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n\ odd\end{cases}$$

# חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

## שאלות

בשאלות **1-2** נתון כי $A$ ו- $B$ מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$.
חשבון:

**1)** א. $\left|ABA^{-1}B^T\right|$ ב. $|4A^2B^3|$

**2)** א. $|-A^{-2}B^TA^3|$ ב. $|-2A^2A^T adjB|$

**3)** נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$.
הוכיחו: $|A|=|B|$.

**4)** נתון: $A$ ו- $B$ מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש- $2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשבו את $|B|$.

**5)** נתון: $A$ ו- $B$ מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש- $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשבו את $|A|, |B|$.

**6)** הוכיחו: 1. $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$ 2. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

**7)** נתון כי $A$ מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכיחו ש- $|A|=0$.

**8)** נתון: $A$ מטריצה מסדר $n$, $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$, ו- $B$ הפיכה.
מצאו את $n$.

**9)** נתון: $\det\left(A_{nxn}\right)=2, \det\left(B_{nxn}\right)=\dfrac{1}{3}$.
חשבו: $\det\left|\dfrac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$.

**10)** נתון $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

הוכיחו כי $\det(M)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$.

## תשובות סופיות

**1)** א. 4 ב. $2^{13}$

**2)** א. $-8$ ב. $-2^{11}$

**3)** שאלת הוכחה.

**4)** $\frac{81}{32}$

**5)** $|A|=18,\ |B|=-2/3$

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** 7

**9)** $4^n$

**10)** שאלת הוכחה.

# כלל קרמר

## שאלות

בשאלות **1-3** פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

**1)**
$$\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$$

**2)**
$$\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$$

**3)**
$$\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$$

**4)** נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$$

א. עבור איזה ערך של $k$ למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של $k$ למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים $k$ עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש- $x=y=z=t=r$.

**5)** יהיו $A,B$ מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $\left(A^tA\right)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

## תשובות סופיות

**1)** $x=1,\ y=2$

**2)** $x=1,\ y=1,\ z=2$

**3)** $x=y=z=t=1$

**4)** א. $k\neq 1,\ k\neq -4$ ב. $k=-2$ ג. לא. ד. הוכחה.

**5)** א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. לא נכונה.

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 24 - מרחבים וקטורים

### תוכן העניינים

# מרחבים ותת-מרחבים

### סימון

$R^n$ - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד $n$ מעל השדה הממשי $R$.

$M_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר $n$ מעל השדה הממשי $R$.

$P_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- $n$ מעל השדה $R$.

$F[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f:R\to R)$ מעל השדה $R$.

### שאלות

בשאלות **1-7** בדקו האם $W$ תת-מרחב של $R^3$ :

**1)** $W=\{(a,b,c)\,|\,a+b+c=0\}$

**2)** $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c\}$

**3)** $W=\{(a,b,c)\,|\,a=3b\}$

**4)** $W=\{(a,b,c)\,|\,a<b<c\}$

**5)** $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c^2\}$

**6)** $W=\{(a,b,c)\,|\,c-b=b-a\}$
כלומר, $a$, $b$ ו- $c$ מהווים סדרה חשבונית.

**7)** $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$
כלומר, $a$, $b$ ו- $c$ מהווים סדרה הנדסית.

בשאלות **8-15** בדקו האם $W$ תת-מרחב של $M_n[R]$ :

**8)** $W$ מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A|\ A=A^T\}$.

**9)** $W$ מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה $B$.
כלומר, $W=\{A|\ AB=BA\}$.

**10)** $W$ מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס.
כלומר, $W=\{A|\ |A|=0\}$.

**11)** $W$ מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A|\ A^2=A\}$.

**12)** $W$ מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

**13)** $W$ מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה $B$ הוא אפס.
כלומר, $W=\{A|\ AB=0\}$.

**14)** $W$ מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A|\ tr(A)=0\}$.

**15)** $W$ מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות **16-21** בדקו האם $W$ הוא תת-מרחב של $P_n[R]$ :

**16)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x)|\ p(4)=0\}$.

**17)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

**18)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה $\geq 4$.
כלומר, $W=\{p(x)|\deg(p)\leq 4\}$.

**19)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של $x$.

**20)** $W$ מורכב מכל הפולינומים ממעלה $n$, כאשר $4\leq n\leq 7$.

**21)** $W=\{p(x)|\ p(0)=1\}$

בשאלות **30-22** בדקו האם $W$ הוא תת-מרחב של $F[R]$ :

**22)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
כלומר, לכל $x$ ממשי $W=\{f(x)\,|\,f(-x)=f(x)\}$.

**23)** $W$ מורכב מכל הפונקציות החסומות.
כלומר, לכל $x$ ממשי $W=\{f(x)\,|\,|f(x)|\le M\}$.

**24)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

**25)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

**26)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

**27)** $W=\left\{f(x)\,|\,\int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- $f$ אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

**28)** $W=\{f(x)\,|\,f'(x)=0\}$ (הנח ש- $f$ גזירה לכל $x$).

**29)** $W=\{f(x)\,|\,f'(x)=1\}$ (הנח ש- $f$ גזירה לכל $x$).

**30)** $W=\{f(x)\,|\,f(x)=f(x+1)\}$

**31)** בדקו האם $W=\{(z_1,z_2,z_3)\,|\,z_2=\bar{z}_1, z_3=z_1+\bar{z}_1\}$ הוא תת-מרחב של $C^3$ :
א. מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.
ב. מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

**32)** נתונה המטריצה
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
א. מצאו וקטור $b$, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון.
ב. מהי קבוצת כל הווקטורים $b$, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון?
ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של $R^5$ ?

**33)** יהי $V$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה $F$.

א. מצאו תנאי על $k$, עבורו הקבוצה $W=\{p\in V \mid p(0)=p(1)=p(2)=k\}$, הינה תת-מרחב של $V$.

ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- $V$, שפורשים את $W$.

הערה: לפתרון סעיף זה עברו קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית'.

## תשובות סופיות

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1)** | כן | **2)** | כן | **3)** | כן | **4)** | לא | **5)** | לא |
| **6)** | כן | **7)** | לא | **8)** | כן | **9)** | כן | **10)** | לא |
| **11)** | לא | **12)** | כן | **13)** | כן | **14)** | כן | **15)** | כן |
| **16)** | כן | **17)** | לא | **18)** | כן | **19)** | כן | **20)** | לא |
| **21)** | לא | **22)** | כן | **23)** | כן | **24)** | כן | **25)** | כן |
| **26)** | כן | **27)** | לא | **28)** | כן | **29)** | לא | **30)** | כן |

**31)** א. כן ב. לא

**32)** א. $u=(1,0,0,0,0)$ ב. $B=\{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5) \mid -b_1+b_2+2b_3\neq 0\}$
ג. לא.

**33)** א. $k=0$ ב. $W=span\{2x-3x^2+x^3, 6x-7x^2+x^4\}$

# צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

## שאלות

בשאלות **1-7** נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1=(4,1,1,5),\ \ u_2=(0,11,-5,3),\ \ u_3=(2,-5,3,1),\ \ u_4=(1,3,-1,2)$$

**1)** א. האם $u_1$ הוא צירוף ליניארי של $u_4$?

ב. האם $u_1$ שייך ל- $Sp\{u_4\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלויה ליניארית?

**2)** א. האם $u_3$ הוא צירוף ליניארי של $u_1$ ו- $u_2$?

ב. האם $u_3$ שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

**3)** א. האם $u_4$ הוא צירוף ליניארי של $u_1$ ו- $u_2$?

ב. האם $u_4$ שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

**4)** נתון $v=(4,12,k,-2k)$.

א. מה צריך להיות ערכו של $k$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה צירוף ליניארי של $u_1$ ו- $u_2$?

ב. מה צריך להיות ערכו של $k$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה צריך להיות ערכו של $k$, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

**5)** נתון $v=(a,b,c,d)$.

א. מה התנאים על $a,b,c,d$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה צירוף ליניארי של $u_1$ ו- $u_2$?

ב. מה התנאים על $a,b,c,d$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה התנאים על $a,b,c,d$, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

**6)** הביעו את הווקטור $v=(10,8,0,14)$ כצירוף לינארי של $u_1$, $u_2$ ו-$u_3$.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

**7)** הביעו את הווקטור $v=(7,10,-2,11)$ כצירוף לינארי של $u_1$, $u_2$, $u_3$ ו-$u_4$.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

## תשובות סופיות

**1)** א. לא. ב. לא. ג. לא.

**2)** א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1=2u_3+u_2,\ \ u_2=u_1-2u_3$.

**3)** א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1=4u_4-u_2,\ \ u_2=4u_4-u_1$.

**4)** א+ב+ג. $k=-4$

**5)** $a=5t+3s,\ b=4t-13s,\ c=7s,\ d=7t$

**6)** $v=2u_1+u_2+u_3$ , אינסוף.

**7)** $v=\frac{7}{4}u_1+\frac{3}{4}u_2$ , אינסוף.

# מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

## פרק 25 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

# ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

## שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **5-1** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים :

**1)** $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

**2)** $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

**3)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

**4)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

**5)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

**6)** תהי $A$ מטריצה ממשית ריבועית מסדר $3\times3$.

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

והם מתאימים לערכים העצמיים : $\lambda_1=6,\ \lambda_2=2$ , $\lambda_3=-4$.

מצאו את המטריצה $A$.

**7)** קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר $3\times3$,

בעלת וקטורים עצמיים $v_3=\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

המתאימים לערכים העצמיים : $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$ , $\lambda_3=3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

**8)** הוכיחו או הפריכו:

א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.

ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.

ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה $A$ אשר הווקטור $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

**9)** נתונה מטריצה ריבועית $A$.

הוכיחו או הפריכו:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה $A$, אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם $A$ הפיכה ו-$\lambda$ ע"ע של $A$, אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של $A^{-1}$.

ג. ל-$A$ ול-$A^T$ יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל-$A$ ול-$A^T$ יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של $A$ הוא $\lambda$, אז $\lambda$ הוא ע"ע של $A$.

ו. אם $A^{-1} = A^T$ ואם $\lambda$ הוא ע"ע של $A$, אז $\lambda = \pm 1$.

ז. אם $A^2 = A$ ואם $\lambda$ הוא ע"ע של $A$, אז $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

## תשובות סופיות

**1)** ערכים עצמיים: $x_1 = 2,\ x_{2,3} = 3$ ,

וקטורים עצמיים: $v_{x=3}^{(1)} = (1,0,1),\ v_{x=3}^{(2)} = (1,1,0),\ V_{x=2} = (1,1,1)$

**2)** $x=1,\ x=3,\ x=-2$ , $v_{x=1} = (-1,4,1)$ , $v_{x=3} = (1,2,1)$ , $v_{x=-2} = (-1,1,1)$

**3)** $x=1,\ x=4,\ x=-1$ , $v_{x=1} = (1,-2,1)$ , $v_{x=4} = (1,1,1)$ , $v_{x=-1} = (-1,0,1)$

**4)** $x=-1,\ x=3$ , $v_{x=1} = (-1,2)$ , $v_{x=3} = (1,2)$

**5)** $x=1, x=1\pm\sqrt{3}i$ , $\boldsymbol{v}_{x=1} = \langle 1,1,1\rangle$ , $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3}i} = \left(1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2\right)$ ,

$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3}i} = \left(1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2\right)$

**6)** $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

**7)** אין כזו מטריצה.

**8)** א. הפרכה: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . ב. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ג. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ד. שאלת הוכחה.

**9)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה. ד. הפרכה.

ה. שאלת הוכחה. ו. שאלת הוכחה. ז. שאלת הוכחה.