מתמטיקה כללית



תוכן העניינים

1. מבוא לתורת הקבוצות 1
2. מבוא לאלגברה 11
3. משוואות אלגבריות 57
4. אי שוויונים אלגבריים 79
5. סדרות 95
6. סימן הסכימה (סיגמה) 119
7. אינדוקציה מתמטית 122
8. חוקי החזקות והשורשים 136
9. מבוא לגאומטריה של המישור 146
10. גיאומטריה אוקלידית - משולשים 154
11. גיאומטריה אוקלידית - מרובעים 175
12. גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים 199
13. גיאומטריה אוקלידית - המעגל 213
14. גיאומטריה אוקלידית - פרופורציה ודמיון 238
15. גיאומטריה אוקלידית - שאלות חזרה 262
16. גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר 277
17. גיאומטריה אנליטית - המעגל 302
18. גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה 321
19. גיאומטריה אנליטית - ההיפרבולה 331
20. גיאומטריה אנליטית - מקומות גיאומטרים והוכחות 337

מתמטיקה כללית

פרק 1 - מבוא לתורת הקבוצות

תוכן העניינים

1. כללי 1

כללי:

סיכום כללי:

הגדרות יסודיות:

- גרירה חד כיוונית $\Rightarrow$: $A\Rightarrow B$ פירושו: אם A מתקיים אז גם B מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית $\Leftrightarrow$ (אם ורק אם): $A\Leftrightarrow B$ פירושו: $A\Rightarrow B$ וגם $B\Rightarrow A$.
- הסימן 'או': $\vee$.
- הסימן 'וגם': $\wedge$.

קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה:

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
  - על מנת לציין שהאיבר a שייך לקבוצה A נרשום $a\in A$.
  - על מנת לציין שהאיבר a אינו שייך לקבוצה A נרשום $a\notin A$.

שוויון בין קבוצות:

שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.

פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא: $A=B\Leftrightarrow\left(x\in A\Leftrightarrow x\in B\right)$.

הקבוצה ריקה:

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב- ϕ, כלומר $\phi=\{\}$.

קבוצה סופית ואינסופית:

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.

עוצמה של קבוצה:

מספר האיברים של קבוצה A נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן $|A|$.

תת-קבוצה:

אם קבוצה A מוכלת בקבוצה B, נסמן זאת: $A\subseteq B$.

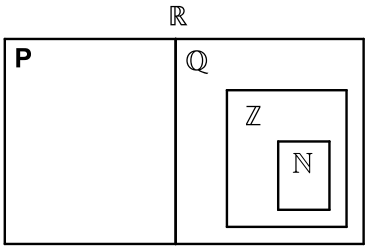
תמיד מתקיים:

- $A\subseteq A$.
- $\phi\subseteq A$.

עבור שוויון קבוצות נדרוש: $A=B\Leftrightarrow\left(x\in A\Leftrightarrow x\in B\right)$ או $A=B\Leftrightarrow\left(A\subseteq B\wedge B\subseteq A\right)$.

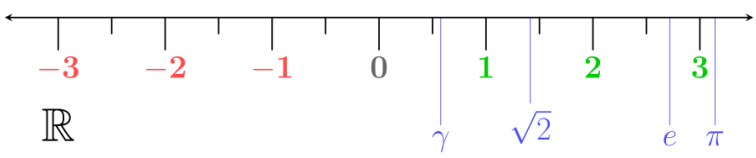
קבוצות מספרים מיוחדות:

- קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,....\}$.
- קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,....\}$.
- קבוצת המספרים הרציונאליים: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\;\middle|\;p,q\in\mathbb{Z},q\neq0\right\}$.
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט P).
- קבוצת המספרים הממשיים: $\mathbb{R}$ (כוללת את $\mathbb{Q}$ ואת P).



ציר המספרים:

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:



קטעים על ציר המספרים:

תיאור מילולי	סימון קבוצות	סימון קטעים
הקטע הפתוח מ-a ל-b לא כולל נקודות הקצה	$\{x \mid a < x < b\}$	(a,b)
הקטע הסגור מ-a ל-b וכולל נקודות קצה	$\{x \mid a \le x \le b\}$	$[a,b]$
קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את a ולא את b	$\{x \mid a \le x < b\}$	$[a,b)$
קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את b ולא את a	$\{x \mid a < x \le b\}$	$(a,b]$
הקרן הפתוחה מ-a עד ∞ ללא a	$\{x \mid a < x < \infty\}$	(a,∞)
הקרן הסגורה מ-a עד ∞ כולל a	$\{x \mid a \le x < \infty\}$	$[a,\infty)$
הקרן הפתוחה מ-$-\infty$ עד b ללא b	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	$(-\infty,b)$
הקרו הסגורה מ-$-\infty$ עד b כולל b	$\{x \mid -\infty < x \le b\}$	$(-\infty,b]$

קבוצת החזקה של קבוצה נתונה:

קבוצת כל התת-קבוצות של קבוצה נתונה נקראת קבוצת החזקה של A ומסומנת $P(A)$.

איחוד וחיתוך קבוצות:

- איחוד קבוצות A ו-B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת: $A \cup B$.
- חיתוך קבוצות A ו-B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת: $A \cap B$.

	תכונות החיתוך	תכונות האיחוד
	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cup B$	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
	$A \cap \phi = \phi$	$A \cup \phi = A$
		$A \subseteq A \cup B$

הדיסטריביוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

הפרש קבוצות:

ההפרש של שתי קבוצות A ו-B המסומן $A-B$ הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי A שאינם איברי B, כלומר: $A-B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}$.

משלים של קבוצה:

ההפרש $U-A$ מסומן ב-A^c או ב-A' ונקרא **המשלים** של A כאשר U היא הקבוצה האוניברסלית.

כללי דה-מורגן:

- $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.
- $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

דיאגרמת וון:

תיאור גרפי של קבוצות ויחסים ביניהם.

שאלות:

1) רשום את הטענות הבאות במילים ובדוק האם הן נכונות:

א. $\forall x\forall y:\ (x+y)^2>0$

ב. $\forall x\exists y:\ (x+y)^2>0$

ג. $\forall x\forall y\exists z:\ xz=\frac{y}{4}$

ד. $\forall x>0,\forall y>0\ ,\ \sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n\exists k, n^3-n=6k$ (k ו- n טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את 0.

2) רשום כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2>4$, הוא $x>2$ או $x<-2$.

ב. אי השוויון $x^2+4>0$, מתקיים לכל x.

ג. לכל מספר טבעי n, המספר n^3-n מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x, $|x|<1$ אם ורק אם $-1<x<1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2<16\}$

ב. $B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x^2<16\}$

ג. $C=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x^2<16\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,(x+4)(x-1)<0\}$

ה. $E=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x^3+x^2-2x=0\}$

ו. $F=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,|x|<4\}$

4) הגדר את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה $\{x|$ מקיים תכונה מסוימת $\}$ A.

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי־זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 4, 3, 2, 1.

5) ציין אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A=\{11,13,17,19\}$

ב. $B=\{x \mid 10<x<20,\ x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$

ד. $D=\{x \mid x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

ה. $E=\{x \mid x=2m,\ m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה הבאה: $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5\in A$ ב. $2\in A$ ג. $\{2\}\in A$

ד. $\{2\}\subseteq A$ ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$ ו. $\phi\in A$

ז. $\phi\subseteq A$ ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$ ט. $\{2,4\}\subseteq A$

י. $\{2,4\}\in A$ יא. $\{\{2,4\}\}\in A$ יב. $\{2,5\}\subseteq A$

יג. $\{2,5\}\in A$ יד. $\{1,4\}\in A$

7) מצא שתי קבוצות, A ו-B, המקיימות:

א. $A\in B$

ב. $A\subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$E=\{7,8\}$, $D=\{6,7,8\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$.

קבע איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X:

א. $X\subseteq A$ וגם $X\not\subseteq D$.

ב. $X\subseteq D$ וגם $X\not\subseteq C$.

ג. $X\subseteq E$ וגם $X\not\subseteq A$.

9) הוכח: $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

10) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$.

רשום את:

א. $A\cup B$ ב. $A\cap B$ ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$ ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

11) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=[1,4)$, $B=(-2,1)$, $C=\{x\in R\,|\,0\le x\le 4\}$, $D=\{x\,|\,2^x=0\}$.

רשום את:

א. $A\cup B$ ב. $A\cap B$ ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$ ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

12) נתונות 3 קבוצות: $A=\{4,5,6,7,8\}$, $B=\{5,6,7,8,9\}$, $C=\{4,5,6,10\}$.

א. חשב את $(A-B)-C$.

ב. חשב את $A-(B-C)$.

13) נתון: $A=\{12,15,18\}$, $B=\{13,15,17\}$, $U=\{11,12,13,14,15,16,17,18\}$.

הדגם את כלל דה מורגן $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

14) הוכח את כלל דה מורגן הראשון $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

15) מצא את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות:

א. $A=[1,\infty)$

ב. $B=(-\infty,1)\cup(4,\infty)$

ג. $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-5x+4>0\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-1|<2\ \vee\ x>4\}$

16) הצג באמצעות דיאגרמת וון את הקבוצות הבאות:

א. $A\cap B$
ב. $A\cup B$
ג. A^c
ד. $A\cap B^c$
ה. $A^c\cap B$
ו. $A\cup B^c$
ז. $A^c\cup B$
ח. $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$
ט. $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$

17) נתונה הקבוצה: $A=\{\phi,4,\{4\}\}$.
רשמו את $P(A)$.

18) הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:
א. לכל קבוצה A מתקיים $A\subseteq P(A)$.
ב. לכל קבוצה A מתקיים $A\not\subseteq P(A)$.

19) הוכיחו כי: $A\subseteq B\ \Rightarrow\ P(A)\subseteq P(B)$.

תשובות סופיות:

1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ב. לכל x קיים y, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.

ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.

ה. לכל n טבעי המספר n^3-n מתחלק ב-6. הטענה נכונה.

2) א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$

ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x: |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

3) א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.

ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים.

ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

4) א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$

ג. $D=\{1,4,9,16\}$ ד. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$

5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.

6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

7) $B=\{\{1,2\},1,2\}$, $A=\{1,2\}$.

8) א. A, C ב. E, D ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

9) הוכחה.

10) א. $A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$ ב. $A\cap B=\{4,6,8\}$

ג. $(A\cup B)\cap C=\{3,5,7,9\}$ ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$.

11) א. $A\cup B=(-2,4)$ ב. $A\cap B=\phi$

ג. $(A\cup B)\cap C=(0,4)$ ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)=(-2,1)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)=[0,1)$.

12) א. ϕ ב. $\{4,5,6\}$.

13) ללא פתרון.

14) הוכחה.

15) א. $A^c=(-\infty,1)$ ב. $B^c=[1,4]$ ג. $C^c=[1,4]$ ד. $D^c=(-\infty,1]\cup[3,4]$.

16) ראו סרטון.

17) $P(A)=\{\phi,\{\phi\},\{4\},\{\{4\}\},\{\phi,4\},\{4,\{4\}\},\{\phi,\{4\}\},\{\phi,4,\{4\}\}\}$.

18) הוכחה.

19) הוכחה.

מתמטיקה כללית

פרק 2 - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

1. מספרים מכוונים 11
2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים 15
3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים 17
4. שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים 18
5. כפל וחילוק שברים 24
6. חיבור וחיסור שברים 26
7. בעיות יסודיות באחוזים 30
8. חזרה על תבניות מספר 32
9. כינוס איברים 34
10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים 36
11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר 38
12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים 40
13. פירוק הטרינום 43
14. שברים אלגברים 45
15. כפל וחילוק של שברים אלגברים 49
16. חיבור וחיסור של שברים אלגברים 51
17. שברים כפולים 55

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2- ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שוני סימן - התוצאה תהיה שלילית.

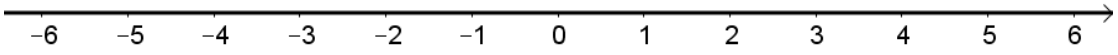
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-2\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ -5\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ 4\ ,\ -3\frac{1}{2}$$



2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3+2$

ב. $-3-2$

ג. $3-2$

ד. $-3+2$

ה. $-1-4$

ו. $7+10$

ז. $-6+5$

ח. $-7+3$

3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $5+7-23+1$

ב. $5-8-12+17$

ג. $3-14+2+6$

ד. $-4-11+2+9$

ה. $6-21+3-7$

ו. $-7-13+5-3$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $4\cdot 9$

ב. $4\cdot(-7)$

ג. $(-6)\cdot(-5)$

ד. $(-5)\cdot(-3)$

ה. $(-2)\cdot 8$

ו. $(-8)\cdot 5$

ז. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)$

ח. $2\cdot 3\cdot 3$

ט. $(-2)\cdot 3\cdot(-3)$

י. $(-2)\cdot(-3)\cdot 3$

יא. $2\cdot 3\cdot(-3)$

יב. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)$

יג. $(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

יד. $1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה:

א. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-2)$

ב. $(-5)\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ג. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ד. $5\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-5):(-25)$

ב. $(-30):3$

ג. $40:(-10)$

ד. $(-32):(-4)$

ה. $(-6):18$

ו. $4:(-16)$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{-60}{12}$

ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות:

א. $0:5$

ב. $(-2)\cdot 0$

ג. $0\cdot(-3)\cdot 4$

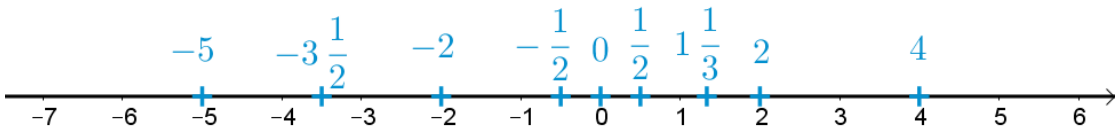
ד. $6:0$

ה. $0+4$

ו. $0-4$

תשובות סופיות:

1) להלן מערכת הצירים:



2) א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5
ו. 17 ז. -1 ח. -4.

3) א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18.

4) א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16
ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18
יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16.

5) א. + ב. + ג. - ד. -.

6) א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$.

7) א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4.

8) א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4.

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. 3^2
ב. 3^3
ג. $(-3)^3$
ד. $(-2)^3$
ה. 4^3
ו. 3^4
ז. $(-5)^3$
ח. 10^4
ט. $-(-3)^4$
י. -5^4
יא. -4^3
יב. $-(-2)^6$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt[3]{-27}$
ב. $\sqrt[4]{625}$
ג. $\sqrt[4]{-16}$
ד. $\sqrt[5]{-32}$
ה. $-\sqrt[4]{81}$
ו. $-\sqrt[3]{1000}$

תשובות סופיות:

1) א. 9 ב. 27 ג. -27 ד. -8 ה. 64 ו. 81
ז. -125 ח. 10000 ט. -81 י. -625 יא. -64 יב. -64

2) א. -3 ב. 5 ג. לא מוגדר ד. -2 ה. -3 ו. -10

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

1) $\sqrt{81}+3\cdot 2^3-40:8$

2) $(-3)^2:9-2\cdot\left(-4^2\right)$

3) $\sqrt{144}-20:4+3\cdot(-2)^2$

4) $3+4\cdot\left[-3+4\cdot(-2)\right]+\sqrt{10+6}$

5) $(-3)^4:(-9)-5\cdot(-2)^3$

6) $-\sqrt{9}+5^2:(-4-1)-24:12\cdot 3$

7) $-2^5:(-8)+4^2-3\cdot 5$

8) $\sqrt[3]{-27}+4\cdot 3^2-2\cdot 3^3$

9) $\left[6\cdot(-1)^4-10\cdot(-1)^3\right]\cdot(-1)^5$

10) $\left(8-\sqrt[3]{64}\right)\cdot\left(2\cdot(-4)-\sqrt[5]{243}\right)$

11) $\dfrac{3^2\cdot(8-2\cdot 3)^3}{\left(5^2\cdot 3-72\right)\cdot(-4)}+2\cdot\left\{15-20:(4+3\cdot 2)\right\}$

תשובות סופיות:

1) 28	**2)** 33	**3)** 19	**4)** -37
5) 31	**6)** -14	**7)** 5	**8)** -21
9) -16	**10)** -44	**11)** 20	

שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ...
שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{X\,X}_{\text{שלמים}}.\underbrace{Y\,Y\,Y}_{\text{שברים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

אחוזים - הגדרה:

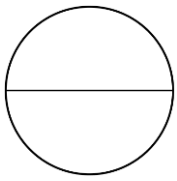
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45% , והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

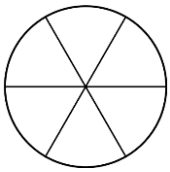
שאלות:

1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

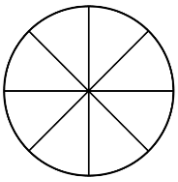
א. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגול



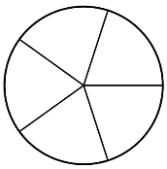
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגול



ג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

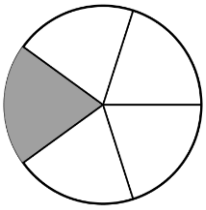


ד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגול

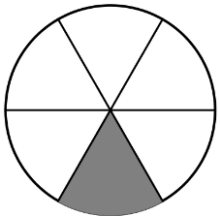


2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

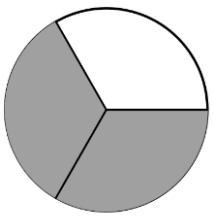
א. שבר:



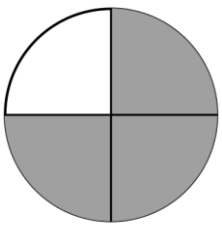
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן:

א. $\frac{25}{30}$ ב. $\frac{10}{30}$ ג. $\frac{6}{24}$ ד. $\frac{4}{20}$

ה. $\frac{35}{56}$ ו. $\frac{24}{42}$ ז. $\frac{36}{48}$ ח. $\frac{33}{121}$

5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים:

א. $-\frac{20}{3}$ ב. $\frac{19}{4}$ ג. $\frac{12}{5}$ ד. $\frac{22}{5}$

ה. $-\frac{34}{6}$ ו. $-\frac{50}{7}$ ז. $\frac{47}{8}$ ח. $\frac{60}{9}$

6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים:

א. $1\frac{2}{3}$ ב. $3\frac{5}{6}$ ג. $4\frac{1}{2}$ ד. $6\frac{1}{4}$

ה. $11\frac{3}{4}$ ו. $-2\frac{5}{8}$ ז. $-6\frac{2}{7}$ ח. $12\frac{7}{9}$

7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $\frac{3}{10}$ או $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{8}$ או $\frac{7}{6}$

ג. $\frac{2}{3}$ או $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{5}{18}$ או $\frac{7}{12}$

8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים:

א. 0.7 ב. 0.07 ג. 0.007 ד. 0.34

ה. 0.304 ו. 0.65 ז. 1.2 ח. 1.02

ט. 1.42 י. 3.5 יא. 6.03 יב. 5.125

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$ ב. $\frac{3}{100}$ ג. $\frac{3}{1000}$ ד. $\frac{23}{1000}$

ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{3}{4}$ ז. $\frac{2}{5}$ ח. $\frac{4}{25}$

ט. $\frac{7}{50}$ י. $\frac{3}{20}$ יא. $\frac{7}{8}$ יב. $\frac{9}{16}$

יג. $9\frac{1}{10}$ יד. $3\frac{1}{5}$ טו. $4\frac{7}{8}$ טז. $-4\frac{1}{16}$

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית
(היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$ ב. $\frac{5}{6}$ ג. $\frac{3}{7}$ ד. $\frac{2}{11}$

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25% ב. 32% ג. 64% ד. 80%

ה. 120% ו. 5% ז. 300% ח. 150%

12) המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{4}{5}$ ד. $\frac{7}{20}$

ה. $\frac{11}{40}$ ו. $\frac{70}{125}$ ז. $\frac{5}{6}$ ח. $\frac{4}{9}$

תשובות סופיות:

1) תשובה מודגמת בסרטון.

2) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$

3) א. $\frac{40}{80},\frac{18}{36},\frac{4}{8}$ ב. $\frac{180}{300},\frac{75}{125},\frac{30}{50}$ ג. $\frac{440}{700},\frac{160}{256},\frac{80}{128}$

4) א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$
ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$

5) א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$
ז. $5\frac{7}{8}$ ח. $6\frac{2}{3}$

6) א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$
ז. $-\frac{44}{7}$ ח. $\frac{115}{9}$

7) א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$

8) א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$
ז. $1\frac{1}{5}$ ח. $1\frac{1}{50}$ ט. $1\frac{21}{50}$ י. $3\frac{1}{2}$ יא. $6\frac{3}{100}$ יב. $5\frac{1}{8}$

9) א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75
ז. 0.4 ח. 0.16 ט. 0.14 י. 0.15 יא. 0.875
יב. 0.5625 יג. 9.1 יד. 3.2 טו. 4.875 טז. -4.0625

10) א. $0.\overline{6}$ ב. $0.8\overline{3}$ ג. 0.428 ד. $0.\overline{18}$

11) א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$
ז. 3 ח. $1\frac{1}{2}$

12) א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$ ב. $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$ ג. $\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{10}$

ד. $3\cdot\frac{4}{5}$ ה. $6\cdot\frac{2}{3}$ ו. $\frac{12}{25}\cdot 5$

ז. $1\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{4}$ ח. $3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{2}{5}$ ט. $3\frac{3}{7}\cdot 2\frac{2}{5}$

י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ יא. $\frac{4}{5^3}$ יב. $\frac{4^3}{5}$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5}:\frac{4}{9}$ ב. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ ג. $\frac{3}{25}:\frac{7}{10}$

ד. $8:\frac{2}{9}$ ה. $10:\frac{2}{3}$ ו. $\frac{5}{6}:3$

ז. $\frac{2}{5}:5$ ח. $3\frac{3}{4}:5\frac{5}{8}$ ט. $2\frac{2}{5}:1\frac{3}{15}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. 4 ו. $2\frac{2}{5}$

ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$

2) א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. 36 ה. 15 ו. $\frac{5}{18}$

ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. 2

חיבור וחיסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b, המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.

  דוגמא: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$, $\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2-3}{7}=\frac{-1}{7}$.

- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.

  דוגמא: $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{3-10}{12}=-\frac{7}{12}$, $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$.

- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.

  דוגמא: $3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$.

  חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.

  דוגמא: $3-\frac{1}{4}=2\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$.

דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

דוגמא: $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{6}=\frac{17}{5}+\frac{13}{6}=\frac{17\cdot 6}{30}+\frac{13\cdot 5}{30}=\frac{102+65}{30}=\frac{167}{30}=5\frac{17}{30}$.

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

דוגמא: $2\frac{3}{4}-5\frac{1}{3}=(2-5)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=-3+\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=-3+\frac{5}{12}=-2\frac{7}{12}$.

שאלות:

1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3 ב. 2 ו-4 ג. 3 ו-5 ד. 6 ו-10

ה. 4 ו-10 ו. 4 ו-6 ז. 3, 5 ו-10 ח. 2, 3 ו-8

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$ ב. $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$

ג. $\frac{4}{13}+\frac{9}{13}$ ד. $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$

ה. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$ ו. $\frac{8}{9}-\frac{7}{9}$

ז. $\frac{2}{12}-\frac{5}{12}$ ח. $\frac{2}{5}-\frac{6}{5}$

ט. $\frac{2}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}$ י. $\frac{7}{15}+\frac{8}{15}-\frac{6}{15}$

3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6}-\frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6}-\frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+\frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{3}{5}$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2+\frac{5}{6}$

ב. $2-\frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3}+4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8}-6\frac{1}{2}$

ז. $2+\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+\frac{8}{20}$

5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14}:\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11}\cdot 2\frac{3}{4}-6:\frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5}:\frac{9}{10}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{4}$

תשובות סופיות:

1) א. 6 ב. 4 ג. 15 ד. 30 ה. 20 ו. 12
ז. 30 ח. 24

2) א. $\frac{4}{5}$ ב. $\frac{7}{9}$ ג. 1 ד. $1\frac{3}{4}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{1}{9}$
ז. $-\frac{1}{4}$ ח. $-\frac{4}{5}$ ט. $1\frac{5}{8}$ י. $\frac{3}{5}$

3) א. $1\frac{5}{6}$ ב. $\frac{7}{10}$ ג. $\frac{7}{12}$ ד. $-\frac{1}{8}$ ה. 5 ו. $3\frac{5}{6}$
ז. $\frac{19}{21}$ ח. $-\frac{1}{10}$

4) א. $2\frac{5}{6}$ ב. $1\frac{1}{6}$ ג. $3\frac{1}{12}$ ד. $1\frac{5}{12}$ ה. $7\frac{11}{12}$ ו. $-\frac{5}{8}$
ז. $2\frac{13}{18}$ ח. $-\frac{1}{20}$

5) א. $2\frac{11}{24}$ ב. $1\frac{1}{10}$ ג. $-13\frac{3}{4}$ ד. $2\frac{5}{6}$ ה. $3\frac{5}{18}$

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $\frac{40}{100}\cdot 120 = 48$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48**.

שאלות:

1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
א. כמה בנות בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
א. כמה תלמידים בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
א. מהו מחירו בסוף העונה?
ב. מה גודל ההנחה?

4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
א. מה מחירו הסופי?
ב. מה גודל ההתייקרות?

5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

7) ענה על השאלות הבאות:

א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.
מה אחוז הבנים בקהל?

ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.
מה אחוז הבנות בכיתה?

ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

תשובות סופיות:

1) א. 18 בנות. ב. 12 בנים.

2) א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.

3) א. 240 ₪ ב. 60 ₪

4) א. 540 ₪ ב. 40 ₪

5) 4.9755 ₪

6) 400 ₪

7) א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).
ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3\cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה-x הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$

ב. x^2+3x כאשר $x=2$

ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$

ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$

ה. x^3+1 כאשר $x=-2$

ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$

ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$

ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה-x הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$.

ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$.

3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

א. $a^2+2ab+b^2$ עבור: $a=3\ ,\ b=-5$.

ב. $(x-3)^2+3x^2b$ עבור: $x=5\ ,\ b=-1$.

ג. $-x^3-2xy+y^4$ עבור: $x=-2\ ,\ y=-1$.

ד. $\frac{(a-2c)^4}{a}-a^2$ עבור: $a=2\ ,\ c=-2$.

ה. $\frac{4a^2-3b}{c}$ עבור: $a=-1\ ,\ b=2\ ,\ c=-4$.

ו. $\sqrt{c-3a}$ עבור: $a=-1\ ,\ c=13$ ועבור: $a=\frac{1}{3}\ ,\ c=82$.

ז. $\frac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ עבור: $m=3\ ,\ q=48\ ,\ p=-5$.

תשובות סופיות:

1) א. 11 ב. 10 ג. -12 ד. -65 ה. -7 ו. 5

ז. -10 ח. 45

2) א. $\frac{10}{27}$ ב. $5\frac{22}{27}$

3) א. 4 ב. -71 ג. 5 ד. 644 ה. $\frac{1}{2}$

ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שניה: 9 ז. -37

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x+6x-5x=(3+6-5)x=4x$.

איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.

כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

כנס איברים דומים:

1) $5x+7x-4x$

2) $9x^2-2x^2-3x^2-2x^2$

3) $-10xy+15xy+xy-2yx$

4) $x^2y-3yx^2+x^2y$

5) $8a^2+10a-5a^2-11a+a^2$

6) $2x^2-3m^2-x^2+3m^2$

7) $3xy+y-30y+6yx-7y$

8) $mn^2+4m^2n+6n^2m-10nm^2+mn^2$

9) $-6+x^3+4-3x^3+17x^3-17$

10) $y^2+x^2-5x^2+5y^2+4x^2-6y^2$

11) $7x^2-3x-4x+2$

12) $5xy+2x-3yx-x+1$

13) $3-x-x^2+4x+5x^2-12$

14) $x+xy+y-6yx-6y-6x$

15) $mn+n-5m+5nm-14n+3m$

16) $ab^2+6ba^2-6b+16a^2b+3b-6b^2a$

17) $z^3-4z^2+7-z^3-8+8z^2$

18) $4x^2z+6xz^2-6-xz^2+12+10zx^2$

19) $2-x^3-3-4x^2+2x+x^3+x^2-2$

20) $x^3-3x-4x^2+2x+x^3+x^2-2x^3$

21) $2a^2b+3x^2y+5a^2b+10x^2y$

22) $12x^2y^3+13a^2-20x^2y^3+2a^2$

23) $2y^2-4x^3y^2-10y^2-x^3y^2$

24) $-2x^3y+5x^2-4yx^3-6x^2$

25) $2a^2b+2b+3a^2+5b$

26) $5a^2b-8ab^2+20a^2b-14ab^2$

27) $-12x^2+2y^2+3x^2y+14xy^2-5xy^2-6y^2+2xy+11x^2+x^2y-9xy$

28) $21x^3y^3+x^2y^2-3xy^3+x^3y-15x^2y^2-7x^3y+12x^3y^3-4xy^3+4xy^3-6x^3y$

תשובות סופיות:

(1 $8x$

(2 $2x^2$

(3 $4xy$

(4 $-x^2y$

(5 $4a^2-a$

(6 x^2

(7 $9xy-36y$

(8 $8mn^2-6nm^2$

(9 $15x^3-19$

(10 0

(11 $7x^2-7x+2$

(12 $2xy+x+1$

(13 $4x^2+3x-9$

(14 $-5x-5y-5xy$

(15 $-13n-2m+6mn$

(16 $-5ab^2+22a^2b-3b$

(17 $4z^2-1$

(18 $14x^2z+5xz^2+6$

(19 $-3x^2+2x-3$

(20 $-3x^2-x$

(21 $7a^2b+13x^2y$

(22 $-8x^2y^3+15a^2$

(23 $-8y^2-5x^3y^2$

(24 $-6x^3y-x^2$

(25 $2a^2b+3a^2+7b$

(26 $25a^2b-22ab^2$

(27 $-x^2-4y^2+4x^2y+9xy^2-7xy$

(28 $33x^3y^3-14x^2y^2-3xy^3-12x^3y$

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

- $a(b+c)=ab+ac$.
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x\cdot 3x$ ב. $-4x\cdot(-7x)$ ג. $-2x\cdot(-4x)\cdot(-3)$

ד. $8m^2\cdot 4m^3$ ה. $3a^3\cdot(-2a^2)$ ו. $-b\cdot 4b^2\cdot\frac{b^2}{2}$

ז. $a\cdot 3b$ ח. $4a^2\cdot 7b^2$ ט. $ab\cdot(-2a^2b)$

2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$ ב. $2(-3x^2+5x-1)$

ג. $(7x-2)4$ ד. $(1-2x)(-2)$

ה. $a(3a-1)$ ו. $b(b^2-3b+4)$

ז. $2x(5x+3)$ ח. $5x(x^2+2x-3)$

ט. $3t^2(4t-t^2+6)$ י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$ ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$

ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$ ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

ה. $(3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$

ו. $3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+2)$ ב. $(x+3)(x-7)$

ג. $(3-x)(x+4)$ ד. $(3x+4)(5x+1)$

ה. $3(4x+1)(2x-3)$ ו. $-2(3x-1)(5-2x)$

5) פשט את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+3)+2(3-x)$

ב. $(a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$

ג. $(2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6)$

ד. $-x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2)$

תשובות סופיות:

1) א. $6x^2$ ב. $28x^2$ ג. $-24x^2$ ד. $32m^5$ ה. $-6a^5$ ו. $-2b^5$

ז. $3ab$ ח. $28a^2b^2$ ט. $-2a^3b^2$

2) א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$

ה. $3a^2-a$ ו. b^3-3b^2+4b ז. $10x^2+6x$ ח. $5x^3+10x^2-15x$

ט. $12t^3-3t^4+18t^2$ י. $10d^5-7.5d^2$

3) א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$

ו. $10y^2+32y-27$

4) א. x^2+x-2 ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$

ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$

5) א. x^2+3 ב. 7 ג. $18m^2-6m-39$ ד. $-3x^5y^3+3x^4y^2$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$ ב. $(x+2)^2$ ג. $(4x+5)^2$

ד. $(6x+2)^2$ ה. $(7x+y)^2$ ו. $(5x+2y)^2$

ז. $(x^2+7)^2$ ח. $(x^2+y^2)^2$ ט. $(x^3+2y^2x)^2$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$ ב. $(x-2)^2$ ג. $(5-x)^2$

ד. $(6x-1)^2$ ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$ ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$

ז. $(3m-2n)^2$ ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ ט. $\left(x^2y^2-7\right)^2$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$ ב. $(3+x)(x-3)$

ג. $(3x-1)(3x+1)$ ד. $(5-7x)(7x+5)$

ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$

ז. $(x^2+y)(x^2-y)$ ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$

ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$

ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$

ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$

ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$

ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

תשובות סופיות:

1) א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$

ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$

ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$

2) א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$

ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$

ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$

3) א. x^2-25 ב. x^2-9 ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$

ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. x^4-y^2 ח. $9a^4b^6-16$

4) א. x^2+2 ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$

ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:
  - הוצאת מספר משותף: $2x-8=2(x-4)$.
  - הוצאת אות משותפת: $x^2-12x=x(x-12)$.
  - הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2-21x=3x(x-7)$.
- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:
  - נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
  - נוסחה להפרש ריבועים: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x-12$ ב. $6y-4$

ג. $20-8a$ ד. $4a^3+8b$

ה. $75m^2+25m+15$ ו. $40a^2-8b^2+64c^2$

2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. y^2+5y ב. $3x-11x^3$

ג. $6y^2+5y^3+4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7-\frac{1}{4}a^5+a^3$

3) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $2x^2-8x$

ב. $3t^2+12t$

ג. $5n^3-20n^2+50n$

ד. $8y^2+6y^3-2y^4$

ה. $4x^2y^2+16x^2y-20xy^2$

ו. $27mn-3n^2m+9n^3m$

4) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $x^2+10x+25$

ב. $x^2+12x+36$

ג. $y^2-18y+81$

ד. $y^2-22y+121$

ה. $4x^2+4x+1$

ו. $16y^2-8y+1$

ז. $9x^2-24x+16$

ח. $25x^2+70x+49$

5) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. r^2-25

ב. x^2-81

ג. $25y^2-49$

ד. $121x^2-1$

ה. x^2y^2-4

ו. $9y^4-169x^4$

6) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר:

א. $y-y^3$

ב. x^3-10x^2+25x

ג. m^4-1

ד. $196x^4-140x^3+25x^2$

תשובות סופיות:

1) א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$

ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$

2) א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$

ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$

3) א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$

ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$

4) א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$

ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$

5) א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$

ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$

6) א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$

ד. $x^2(14x-5)^2$.

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: ax^2+bx+c כאשר a, b ו-c הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו-m_2, שמקיימים: $m_1\cdot m_2=ac$ ו-$m_1+m_2=b$.

לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2+bx+c=ax^2+m_1x+m_2x+c$.

השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2+m_1x}+\underbrace{m_2x+c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו-m_2 באופן הבא: $m_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $m_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום כמכפלה: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)\left(x-m_2\right)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד אז $m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$ נכתוב: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. x^2+5x+4 ב. $x^2-8x+15$ ג. $x^2-33x+62$

ד. $2x^2+7x-15$ ה. $3x^2-11x+6$ ו. $6x^2+5x+1$

ז. $2x^2+x-6$ ח. $x^2-18x+81$ ט. x^2+2x+8

2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

א. $6x^2+5x+1$ ב. x^2+5x+4

ג. $4x^2+20x+25$ ד. $3x^2-x+20$

תשובות סופיות:

1) א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$

ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$

ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.

2) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

דוגמא לשברים אלגבריים: $\frac{4}{x-x^3}$, $\frac{3x}{x^2+1}$, $\frac{x+1}{x+2}$.

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: $\frac{3x+5}{4}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

דוגמא: השבר $\frac{1}{x+4}$ לא מוגדר כאשר $x=-4$ מכיוון שמתקבל: $\frac{1}{0}$.

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x\neq -4$ ומשמעו היא ש-x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט 4-, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים.
במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

- צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: $\frac{2x+8}{x+4}=\frac{2\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=\frac{2\cdot 1}{1}=2$.
- צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: $\frac{3x-15}{x^2-10x+25}=\frac{3\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}}}=\frac{3\cdot 1}{x-5}=\frac{3}{x-5}$.
- צמצום ע"י פירוק טרינום: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$.

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$

ב. $\frac{5}{x-6}$

ג. $\frac{x+7}{2x-8}$

ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$

ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$

ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$

ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$

ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$

ב. $\frac{a-x}{a}$

ג. $\frac{a-ax}{a}$

ד. $\frac{x+1}{y+1}$

ה. $\frac{x}{x+y}$

ו. $\frac{6x}{6y}$

ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$

ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

ט. $\frac{4x^2y}{xy}$

י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$

ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$

ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$

ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$

ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$

ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$

ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$

ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2+10x+25}{2x+10}$

ב. $\frac{8n-n^2}{n^2-16n+64}$

ג. $\frac{z^3-4z^2}{2z^2-16z+32}$

ד. $\frac{4m^2+20m+25}{4m^2+10m}$

ה. $\frac{18y^2-24y+8}{2y-3y^2}$

ו. $\frac{a^3+4a^2b+4ab^2}{3ab+6b^2}$

5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$

ב. $\frac{m^2-12m+32}{m-4}$

ג. $\frac{4y-10}{2y^2+y-15}$

ד. $\frac{3z^2+26z+16}{3z+2}$

ה. $\frac{x^2+5x-36}{x^3+9x^2}$

ו. $\frac{9n^2-12n}{4+5n-6n^2}$

ז. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

ח. $\frac{x^2-14x+49}{x^2+x-56}$

ט. $\frac{3a^2b-10ab^2+3b^3}{-3a^3b+11a^2b^2-6ab^3}$

י. $\frac{m^3n-m^2n^2-m^2+mn}{2m^2n^3+mn^2-3n}$

תשובות סופיות:

1) א. $x\neq -3$ ב. $x\neq 6$ ג. $x\neq 4$ ד. $x\neq 0\ ,\ x\neq 4$

ה. $x\neq -1$ ו. $x\neq 2\ ,\ x\neq -2$ ז. $y\neq 0\ ,\ y\neq -1\ ,\ y\neq 1$

ח. $x\neq 0\ ,\ x\neq 1\ ,\ x\neq 4$

2) א. x ב. לא ניתן לצמצם ג. $1-x$

ד. לא ניתן לצמצם ה. לא ניתן לצמצם ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$

ח. לא ניתן לצמצם ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם

3) א. $3\ ,\ x\neq -4$ ב. $\frac{m}{4}\ ,\ m\neq -4$ ג. $\frac{2}{a}\ ,\ a\neq 0,6$

ד. $-\frac{x}{3}\ ,\ x\neq 5$ ה. $-3\ ,\ y\neq \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ ו. $\frac{2x^2}{3}\ ,\ x\neq \frac{1}{2}$

ז. $\frac{3}{y(y-3)}\ ,\ y\neq 0,3$ ח. $\frac{3z^2-12z+4}{z+5}\ ,\ z\neq 0,-5$

4) א. $\frac{x+5}{2}\ ,\ x\neq -5$ ב. $\frac{n}{8-n}\ ,\ n\neq 8$ ג. $\frac{z^2}{2(z-4)}\ ,\ z\neq 4$

ד. $\frac{2m+5}{2m}\ ,\ m\neq 0,-\frac{5}{2}$ ה. $\frac{2(2-3y)}{y}\ ,\ y\neq 0,\frac{2}{3}$ ו. $\frac{a(a+2b)}{3b}\ ,\ b\neq 0,\ a\neq -2b$

5) א. $\frac{1}{x-5}\ ,\ x\neq 5,-2$ ב. $m-8\ ,\ m\neq 4$ ג. $\frac{2}{y+3}\ ,\ x\neq -3,\frac{5}{2}$

ד. $z+8\ ,\ z\neq -\frac{2}{3}$ ה. $\frac{x-4}{x^2}\ ,\ x\neq 0,-9$ ו. $\frac{-3n}{2n+1}\ ,\ n\neq -\frac{1}{2},\frac{4}{3}$

ז. $\frac{x+2}{x+3}\ ,\ x\neq -2,-3$ ח. $\frac{x-7}{x+8}\ ,\ x\neq 7,-8$

ט. $\frac{3a-b}{a(2b-3a)}\ ,\ a\neq 0\ ,\ b\neq 0,\ a\neq 3b\ ,\ 2b\neq 3a$ י. $\frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}\ ,\ mn\neq 1,-\frac{3}{2},n\neq 0$

כפל וחילוק של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.

חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3x+3}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3(x+1)}=\frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{3x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}}=\frac{1}{3x}$.

- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y}:\frac{12}{y^2+y}=\frac{4x}{y}\cdot\frac{y^2+y}{12}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}x}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}(y+1)}{\underset{3}{\cancel{12}}}=\frac{x(y+1)}{3}$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{8}$

ב. $\frac{x}{3}\cdot\frac{9}{x^2}$

ג. $7y\cdot\frac{5}{y^2}$

ד. $6x^2\cdot\frac{3}{40x}$

ה. $\left(x^2+3x\right)\cdot\frac{2}{3x+9}$

ו. $\left(a^2-25\right)\cdot\frac{20}{5a+25}$

ז. $\frac{w^2-9}{w}\cdot\frac{w^2}{2w+6}$

ח. $\frac{y+4}{y^2+16}\cdot\frac{y^2-16}{2y+8}$

ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90}\cdot\frac{12}{2z-10}$

י. $\frac{5n^2}{n^2-121}\cdot\frac{2n^2+44n+242}{n+2}\cdot\frac{n^2+4n+4}{n}$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8}:\frac{x}{6}$

ב. $\frac{y}{25}:\frac{5}{y}$

ג. $a^2:\frac{1}{6a}$

ד. $\frac{5}{6a}:a^2$

ה. $\left(d^2-3d\right):\frac{5d-15}{5d}$

ו. $\frac{t}{t+4}:\frac{3t}{t+4}$

ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2}:\frac{y^2-16}{7y^2}$

ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36}:\frac{a+8}{a+6}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$ ה. $\frac{2x}{3}$

ו. $4(a-5)$ ז. $\frac{w(w-3)}{2}$ ח. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$ ט. $\frac{z+15}{z-5}$ י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$

2) א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{y^2}{125}$ ג. $6a^3$ ד. $\frac{5}{6a^3}$ ה. d^2 ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$ ח. $\frac{a-8}{a-6}$

חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים.

נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים.

כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף.
לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת.

דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x}=\frac{1+(x+1)}{x}=\frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)+3}{x+2}=\frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x(x+1)}=\frac{x+x+1}{x(x+1)}=\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-3x}=\frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{3}{(x-3)^2}-\frac{2}{(x-3)(x+3)}=\frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}=\frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6}+\frac{a-5}{6}$

ב. $\frac{5}{x}+\frac{4x+3}{x}$

ג. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3+4x}{x+1}$

ד. $\frac{7z}{2z-3}-\frac{4z}{2z-3}-\frac{z+3}{2z-3}$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab}-\frac{5}{bc}$

ב. $\frac{1}{xy}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xz}$

ג. $\frac{c}{ab}-\frac{ad}{bc}+\frac{2b}{cd}$

ד. $-\frac{5}{x}+\frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)}-\frac{2}{z(z-2)}$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $1-\frac{2}{x}$

ב. $1+\frac{3}{y^2}$

ג. $2+\frac{2}{x+1}$

ד. $3-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}$

ה. $\frac{a+1}{a^2}-\frac{3-a}{4a}-3$

ו. $\frac{x}{9yz}+\frac{z}{3y^2x}+\frac{3-y}{12xz}-3\frac{1}{2}$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x}$

ב. $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y}$

ג. $\frac{a+1}{a+2}+\frac{3}{a}$

ד. $\frac{1}{z+3}+\frac{2}{3z}-\frac{3}{z}$

5) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{24}{a^2-9}+\frac{4}{a+3}$

ב. $\frac{3}{x^2-16}+\frac{2}{(x+4)^2}$

ג. $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{3y}{4-y^2}$

ד. $\frac{3z}{z^2+4z+3}-\frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$

ה. $\frac{x-1}{x^2+3x-40}+\frac{2}{-x^2+8x-15}$

ו. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7}+\frac{a+3}{a^2+14a+49}$

ז. $\frac{x}{x-3}+\frac{9-x}{x^2-8x+15}$

ח. $\frac{1}{a-b}+\frac{2}{a+2b}-\frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

6) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{4}{x}\cdot\frac{x^2}{8}+\frac{9}{x+1}\cdot\frac{x+1}{18}$

ב. $\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot\frac{x^2}{7x+14}$

ג. $\frac{7}{y^2}:\frac{6}{y^3}-\frac{y-4}{63}\cdot\frac{3y-4}{y^2-8y+16}$

ד. $\left(3x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right):\frac{6x^3+2x-4}{x^2}$

ה. $\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3}-\frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right):\frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1

2) א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d-a^2d^2+2ab^2}{abcd}$

ד. $\frac{-5y^2+x+1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$

3) א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$

ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2+a+4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z}$

4) א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$

ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$

5) א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$

ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$

ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$

6) א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

1) $\frac{\frac{4x}{12}}{x}$

2) $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5}$

3) $\frac{5}{\frac{t}{30t^2}}$

4) $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54}$

5) $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{\frac{y^2}{3-y}}$

6) $\frac{\frac{4x}{x+1}}{\frac{8}{x^2+2x+1}}$

7) $\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{\frac{40}{15c+15}}$

8) $\frac{\frac{t^2-t-20}{16t+8}}{\frac{25-t^2}{2t+1}}$

9) $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}}$

תשובות סופיות:

1) $\frac{x^2}{3}$

2) 2.5

3) $\frac{1}{6t^3}$

4) $\frac{t-9}{54t^2}$

5) $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$

6) $\frac{x(x+1)}{2}$

7) $\frac{c}{c-4}$

8) $\frac{t+4}{-8(t+5)}$

9) $\frac{5}{x}$

מתמטיקה כללית

פרק 3 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

1. משוואות ממעלה ראשונה 57
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה 59
3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון 62
4. משוואה ממעלה שנייה 63
5. משוואות דו-ריבועיות 65
6. משוואות עם פרמטרים 67
7. משוואות עם שורשים 69
8. משוואות עם ערך מוחלט 71
9. מערכת משוואות ממעלה שנייה 72
10. משוואות מתקדמות מסכמות 74
11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית 77

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $6x+2=8$

ב. $7-2x=7$

ג. $2x+x=24$

ד. $2x+6=8+x$

ה. $-7x+5+2x=4x-13$

ו. $6x-3+5-7x=x-5x-7$

ז. $2-5x+7=-3x+8$

ח. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$

ב. $7x-4(3-4x)=-x$

ג. $6(4-x)-(6-x)=3x$

ד. $5x-(3x-7)4=21$

ה. $x(x-5)=x^2-7x+8$

ו. $(7-x)(1-x)-(x-3)^2=0$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1$

ג. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ד. $\frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1$

ה. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

ו. $5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0$

ב. $\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0$

ג. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ד. $\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2}$

ה. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ו. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12$

תשובות סופיות:

1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$

ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$.

2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$.

3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$.

4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$.

5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6$, $x\neq 3$.

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1 , b_1 , c_1 ו- a_2 , b_2 , c_2 הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=3x-1 \\ \frac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

פתרון של מערכת משוואות:

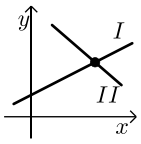
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

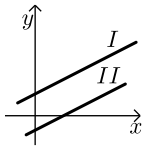
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

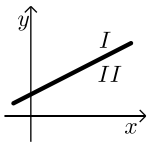
- הישרים נחתכים:
במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:
במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:
במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}3x+y=11\\y=5\end{cases}$ ב. $\begin{cases}y=x-3\\y=2x+4\end{cases}$ ג. $\begin{cases}-3x+2y=-16\\x=5y+14\end{cases}$

ד. $\begin{cases}5x-2y=-2\\x+4y=4\end{cases}$ ה. $\begin{cases}-5x+7y=-26\\x+3y=-8\end{cases}$ ו. $\begin{cases}2x+3y=5\\5x+7y=11\end{cases}$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+3y=5\\x-3y=3\end{cases}$ ב. $\begin{cases}5x+2y=14\\5x+3y=23\end{cases}$

ג. $\begin{cases}5y=2x\\4x=5y+8\end{cases}$ ד. $\begin{cases}4x=3y-29\\5y=9-13x\end{cases}$

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+2y=1\\4x+8y=5\end{cases}$ ב. $\begin{cases}2(x-y)+4y=1+x\\2-7y+x=3(x-y)\end{cases}$.

4) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases}$.

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases}$

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) א. $(2,5)$ ב. $(-7,-10)$ ג. $(4,-2)$ ד. $(0,1)$ ה. $(1,-3)$ ו. $(-2,3)$.

2) א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$.

3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4) א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$ ג. $(7,2)$.

5) א. $(1,1)$ ב. $(-3,1)$ ג. $(1,1)$.

6) א. $(-1,-3)$ ב. $(2,10)$ ג. $(-2,4)$.

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0\cdot x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+4=6+x$

2) $3x+6-x=4+2x+2$

3) $6(x-2)=2x+5+4x$

4) $5x-3+x=4x+2x-3$

5) נתונה המשוואה: $\square+5x=3-2(x+2)$.

א. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

1) אף פתרון.

2) אינסוף פתרונות.

3) אין פתרון.

4) אינסוף פתרונות.

5) א. 8- ב. 1- ג. $-7x-1$

ד. $-7x+k$ כאשר k הוא מספר כלשהו השונה מ- 1-.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.

פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.

2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.

3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$

ב. $-x^2+10x-16=0$

ג. $25x^2-20x+4=0$

ד. $2x^2-6x+5=0$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $4x^2-5x+7=4-x^2+13$

ב. $-x(x-5)=(1-3x)(1-x)+4$

ג. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$

ד. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

א. $x^2-36=0$ ב. $32x^2-18=0$

ג. $4x-x(x+2)=3(x-1)-x-6$ ד. $(2x-1)^2+(2x+1)^2=10$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

א. $-7x^2-14x=0$ ב. $5x^2-x=0$

ג. $6x(x-2)-1=4x-3(x+1)+2$ ד. $(5x-2)^2=(x-2)(x+3)+10$

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$ ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$ ד. $\frac{x}{2x^2-72}+\frac{2}{x^2+12x+36}=\frac{8x-15}{24-4x}+2$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x_1=2\ ,\ x_2=8$ ג. $x=\frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.

2) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1$ ב. $x_1=1\ ,\ x_2=1\frac{1}{4}$ ג. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$

ד. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$.

3) א. $x=\pm 6$ ב. $x=\pm\frac{3}{4}$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=\pm 1$

4) א. $x_1=0\ ,\ x_2=-2$ ב. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=2\frac{1}{6}$

ד. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{7}{8}$.

5) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq -3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$

ד. $x_1=-7.6\ ,\ x_2=-4\frac{2}{7}$.

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא x.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t\rightarrow at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5x^4+3x^2-8=0$

2) $x^4-3x^2+2=0$

3) $13x^2\left(3x^2-1\right)-2=3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

4) $x^2\left(x^2+1\right)=10\left(3x^2-10\right)$

5) $x^6+x^3=56$

6) $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

7) $x-9\sqrt{x}+14=0$

8) $x^8-4x^4-50=31x^4-84$

9) $125x^6-1=124\left(x^6+x^3+1\right)$

10) $\left(2x^2-x\right)^2-4\left(2x^2-x\right)+3=0$

11) $\left(x^2+2x\right)^2+7x^2+14x=-6$

12) $\frac{21}{x^2-4x+10}=6+x^2-4x$

13) $\frac{12}{x^2+2x-8}=1+\frac{7.5}{x^2+2x-3}$

14) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

15) $\frac{3}{3x^2-15}+\frac{1}{x^2+5}=\frac{10}{x^4-25}$

16) $\frac{x^2-1}{4x^2-28}+2=\frac{9}{x^4-8x^2+7}+\frac{x^2}{2x^2-2}$

17) $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^2+35=12\left(2x+\frac{3}{x}\right)$

18) $\frac{3x^4}{\left(x+2\right)^2}+\frac{3x^2}{x+2}=6$

19) $\left(2x-x^2+3\right)\left(2x-x^2-2\right)=0$

20) $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x-8\right)=-24$

תשובות סופיות:

1) $x=\pm 1$
2) $x=\pm 1,\pm\sqrt{2}$
3) $x=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3}$
4) $x=\pm 2,\pm 5$
5) $x_1=\sqrt[3]{7}\ ,\ x_2=-2$
6) $x=-2,\sqrt[3]{4}$
7) $x_1=4\ ,\ x_2=49$
8) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{34}\ ,\ x_{3,4}=\pm 1$
9) $x=5,-1$
10) $x_1=1.5\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=1\ ,\ x_4=-\frac{1}{2}$
11) $x=-1$
12) $x_{1,2}=1,3$
13) $x_1=0\ ,\ x_2=-2\ ,\ x_3=3.06\ ,\ x_4=-5.06$
14) $x_1=0\ ,\ x_2=-2$
15) אין פתרונות.
16) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$
17) $x=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},3$
18) $x=-1,2$
19) $x=3,-1$
20) $x=\pm 1,4,6$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים.
את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות.
פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x=\frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצאות הפרמטר m.

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m\neq 0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{1}{3}(a-3x)=\frac{1}{a}(ax-3)$

ג. $(x-2a)(x-2b)=x^2-2(a^2+b^2)$

ד. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

ה. $\frac{x}{a^2-a}-\frac{1}{2a}=\frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a}-\frac{2}{a^3-2a^2+a}$

2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+my=1\\x+y=m\end{cases}$

ב. $\begin{cases}ax+y=2\\x+ay=4\end{cases}$

ג. $\begin{cases}\frac{x}{m}+y=m\\x-m^2y=1\end{cases}$

ד. $\begin{cases}(m-1)x-(2m+3)y=5\\(m+2)x-(2m-1)y=10m\end{cases}$

ה. $\begin{cases}(2a+b)x-(2a-b)y=8ab\\(2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2\end{cases}$

3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2-2x+4a=a^2+3$

ג. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

ד. $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}=0$

ה. $(m^2+1)x^2-m^2x-1=0$

ו. $\frac{a}{x}+\frac{1}{b}=\frac{x}{a}+b$

ז. $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=\frac{b-6}{2-b}\ ,\ b\neq 2$ ב. $x=\frac{a^2+9}{6a}\ ,\ a\neq 0$ ג. $x=a+b$ ד. $x=-m$ ה. $x=a+1$

2) א. $m\neq 1\ ,\ (m+1,-1)$ ב. $a\neq\pm 1\ ,\ \left(\frac{2a-4}{a^2-1},\frac{4a-2}{a^2-1}\right)$

ג. $m\neq 0-1\ ,\ \left(m^2-m+1,\frac{m-1}{m}\right)$ ד. $m\neq 1,-2\ ,\ (2m+1,m-2)$

ה. $b\neq\pm 2a\ ,\ (2a+b,2a-b)$

3) א. $x=m+1,\mathrm{m}-1$ ב. $x=a-1,3-a$ ג. $x=m-5,-2m$

ד. $a\neq 0\ ,\ x\neq\pm a\ ,\ x=\pm a\sqrt{3}$ ה. $x=1,-\frac{1}{m^2+1}$

ו. $a,b\neq 0\ ,\ x=\frac{a}{b},-ab$ ז. $x=\frac{a+b}{a-b},\frac{a-b}{a+b}\ ,\ a\neq\pm b$.

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x}=a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x=a^2 \rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=\left(a\right)^2$.

הערות:

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$ שבה $a<0$ אין פתרון.
3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$
2) $\sqrt{x+2}=x$
3) $\sqrt{3x+1}+x=13$
4) $\sqrt{2x+7}+4=x$
5) $\sqrt{x-1}+3=x$
6) $\sqrt{10x+6}+9=x$
7) $\sqrt{x+6}-2=2x$
8) $\sqrt{24-x}+3=2x$
9) $\sqrt{x+16}+4=2x$
10) $2x=16-3\sqrt{x-1}$
11) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$
12) $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$
13) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-5}=\sqrt{11-x^2}$
14) $\sqrt{2x-1}+3=\sqrt{7x+1}$
15) $\sqrt{9x-8}-3\sqrt{x+4}=-2$
16) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$
17) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$
18) $\sqrt{2x-2}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x-2}$
19) $3\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}$

תשובות סופיות:

1) $x=22$
2) $x=2$
3) $x=8$
4) $x=9$
5) $x=5$
6) $x=25$
7) $x=0.25$
8) $x=3.75$
9) $x=4.25$
10) $x=5$
11) $x=6$
12) $x=4,-3$
13) $x=3$
14) $x=5$
15) $x=12$
16) $x=2,2\frac{8}{9}$
17) $x=6$
18) $x=1$
19) $x=2$

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x|=a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $|3x+14|=7$
2) $|3x-24|=x$
3) $|12-x|=3x$
4) $2x-|8-x|=10$
5) $|4x-5|=|2x+13|$
6) $|14-3x|=2|x+5|$
7) $|x|+7=|2x|$
8) $|x+2|+6=|2x-4|$
9) $|x+2|+|2x-6|=|4x+8|$
10) $|10-3x|-|x+4|=|2x-6|$

תשובות סופיות:

1) $x=-\frac{7}{3},\ -7$
2) $x=6,12$
3) $x=3$
4) $x=6$
5) $x=9,-1\frac{1}{3}$
6) $x=24,\frac{4}{5}$
7) $x=\pm 7$
8) $x=12,-1\frac{1}{3}$
9) $x=0,-12$
10) $x=0$

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ x^2+3y=10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-2y^2=17 \\ xy=-10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 \\ x+6y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2-2xy+8y^2=8 \\ 3xy-2y^2=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-y^2=33 \\ x+y=11 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 16x^2-y^2=391 \\ 4x-y=23 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4xy+x=-15 \\ \frac{3}{y}-2x=16 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{4}{y}-\frac{1}{x}=-19 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=21 \\ \frac{8}{x}-\frac{1}{y}=13 \end{cases}$

12) $\begin{cases} xy=24 \\ (y-x)^2-7(y-x)+10=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2y-xy^2=84 \\ x^2-2xy+y^2+5x-5y=24 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3} \\ x^2+y^2=9xy+25 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(2,4),(4,2)$

2) $(\pm 4,-2)$

3) $(\pm 2,\pm 1)$

4) $(5,-2),(-5,2)$

5) $\left(-2,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{11},\frac{1}{11}\right)$

6) $\left(3,\frac{1}{2}\right),\left(-3,-\frac{1}{2}\right),(2,1),(-2,-1)$

7) $(7,4)$

8) $(5,-3)$

9) $\left(-5,\frac{1}{2}\right)$, $\left(-24,-\frac{3}{32}\right)$

10) $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

11) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

12) $(4,6)$, $(-6,-4)$, $(3,8)$, $(-8,-3)$

13) $(-1.65,6.35)$, $(-6.35,1.65)$, $(7,4)$, $(-4,-7)$

14) $(5,45)$, $(-5,-45)$, $(45,5)$, $(-45,-5)$

משוואות מסכמות מתקדמות:

סיכום כללי:

תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.

- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.

- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.

- משוואה עם פרמטר/ים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטר/ים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטר/ים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+\sqrt{x+6}-6=0$

2) $x^2+5x-\sqrt{x^2+5x}-30=0$

3) $4x^2+16x-4\sqrt{x^2+4x}-3=0$

4) $2x^2+6x-\sqrt{x^2+3x+5}=5$

5) $x^2-\sqrt{16x^2+48}+7=0$

6) $x^2-\sqrt{6x^2-15}=1$

7) $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

8) $\frac{\sqrt{x^2+4x-12}}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+5}=\frac{7}{\sqrt{x-1}}$

9) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$

10) $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$

11) $\sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}}-\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}=2$

12) $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}$

פתור את המשוואות הבאות עבור $a>0$:

13) $x^2+ax-2a\sqrt{x^2+ax-a^2}=0$

14) $x^2+ax-2a\sqrt{3x^2+3ax-9a^2}=0$

פתור את המשוואות הבאות:

15) $\left|3-\left|2-x\right|+\left|x\right|\right|=1$

16) $\left|4-\left|5-x\right|\right|=\left|x+3\right|$

17) $\left|\frac{x+\left|3-x\right|}{x+2}\right|=18$

18) $\sqrt{25+\left|16x^2-25\right|}=4+4\left|x+1\right|$

19) $\frac{x^3-5x}{\sqrt{2x^2-4x-1}-\left|x\right|+2}=0$

20) הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה: $\frac{\left|x+2\right|}{\left|x\right|+2}=\left|2-x\right|+2$.

תשובות סופיות:

1) $x=3$
2) $x_1=4\ ,\ x_2=-9$
3) $x_1=0.5\ ,\ x_2=-4.5$
4) $x_1=1\ ,\ x_2=-4$
5) $x_{1,2}=\pm 1$
6) $x_{1,2}=\pm 2$
7) $x=1$.
8) $x=3$.
9) $x=2$.
10) $3.5\le x\le 7$.
11) $x=4$.
12) $x=1\ ,\ x=\frac{9}{16}$.
13) $x_1=-2a\ ,\ x_2=a$
14) $x_1=-2a\ ,\ x_2=3a$
15) $x\le 0$.
16) $x=-1$.
17) $x=-\frac{39}{18},-\frac{33}{18}$.
18) $x=-\frac{1}{4}\ ,\ x\le\frac{5}{4}$.
19) $x=-\sqrt{5}$.
20) שאלת הוכחה.

ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)$$

שאלות:

פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

1) $(x-3)^3$

2) $(2y+5)^3$

3) $8x^3-1$

4) $8y^3+343$

5) a^6-27

6) $x^3y^6z^9-1$

7) $11+88x^{12}$

8) $64mn^4-8m^4n^7$

9) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^3+6x^2+12x+8}$

10) $\dfrac{x^3+64}{x^2+4x}$

משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

11) $x^3-12x^2+48x-64=0$

12) $125x^3=1-15x+75x^2$

13) $x^3+x-30=0$

14) $x^3-7x-6=0$

משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

15) $2x^3-7x^2+7x-2=0$

16) $2x^3+5x^2-2x-5=0$

מערכת משוואות:

17) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x^3+y^3=243 \\ x+y=9 \end{cases}$.

18) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x^3-y^3=91 \\ x^2y-xy^2=30 \end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x^3-9x+27x-27$

2) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$

3) $(a^2-3)(a^4+3a^2+9)$

4) $8(1+2x^4)(1-2x^4+4x^8)$

5) $\frac{1}{x+2}$

6) $x=4$

7) $x=3$

8) $x_{1,2,3}=\frac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ 2$

9) $(3,6)\ ,\ (6,3)$

10) $8y^3+60y^2+150y+125$

11) $(2y+7)(4y^2-17y+49)$

12) $(xy^2z^3-1)(x^2y^4z^6+xy^2z^3+1)$

13) $8mn^4(2-mn)(4+2mn+m^2n^2)$

14) $\frac{x^2-4x+16}{x}$

15) $x=\frac{1}{-}$

16) $x_{1,2,3}=-2\ ,\ -1\ ,\ 3$

17) $x_{1,2,3}=-2.5\ ,\ -1\ ,\ 1$

18) $(-5,-6)\ ,\ (6,5)$

מתמטיקה כללית

פרק 4 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

1. אי שוויונים ממעלה ראשונה 79
2. אי שוויונים ממעלה שנייה 81
3. אי שוויונים ממעלה שלישית 82
4. אי שוויונים עם מנה 83
5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו 85
6. שאלות מסכמות 86
7. אי שוויונים עם שורשים 88
8. מציאת תחום הגדרה 90
9. אי שוויונים עם ערך מוחלט 92

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $45x-26>109$

2) $6x>2(3x-1)$

3) $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

4) $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

5) $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

6) $4(6x-8)<8(3x-4)$

7) $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\geq 12-x$

8) $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

תשובות סופיות:

1) $x>3$
2) כל x
3) אף x
4) $x>-2$
5) $x<5$
6) אף x
7) $x\geq 12$
8) $x>-13$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2+bx+c \begin{matrix}>\\<\end{matrix} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x^2<144$

2) $x^2-12x>-32$

3) $(x+2)(x+5)<0$

4) $(x+2)(x+4)<35$

5) $-x^2+13x+30<0$

6) $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

7) $(x-5)^2+x(x+2)<89$

8) $(5x+6)^2\leq 4(x-3)^2$

9) $-3x^2+12x>0$

10) $x^2-10x+25>0$

11) $(x-3)^2>(x-1)(x+6)-x^2-3x$

12) $2x^2+2x+24\geq 0$

תשובות סופיות:

1) $-12<x<12$

2) $x<4\ ,\ x>8$

3) $-5<x<-2$

4) $-9<x<3$

5) $x<-2\ ,\ x>15$

6) $x\leq 7\ ,\ x\geq 11$

7) $-4<x<8$

8) $-4\leq x\leq 0$

9) $0<x<4$

10) $x>5\ ,\ x<5$

11) $x<3\ ,\ x>5$

12) כל x

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3-4x^2+4x+1>0$, $x^4+2x^2+1<0$ וכו'.

בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.

לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

2) $x(x^2+x+1)>0$

3) $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

4) $x^3-25x\ge 0$

5) $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

6) $(x^2+8x+20)(3x-5)\le 0$

7) $(x^2-x-6)(x-1)<0$

8) $x^3-6x^2+9x\le 0$

9) $(x^2+6)(x+3)>0$

10) $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

תשובות סופיות:

1) $1<x<2$, $x>3$

2) $x>0$

3) $-2\le x\le -1$, $x\ge \frac{1}{2}$

4) $-5\le x\le 0$, $x\ge 5$

5) $x>2$

6) $x\le 1\frac{2}{3}$

7) $x<-2$, $1<x<3$

8) $x\le 0$, $x=3$

9) $x>-3$

10) $x<1$, $2<x<4$

אי-שוויונים עם מנה:

סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (או $\frac{f(x)}{g(x)}<0$) נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$ ו-$g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4}<0$ בו: $f(x)=2x+4$ ו-$g(x)=x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

2) $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

3) $\frac{1}{x^2-16}>0$

4) $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

5) $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

6) $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

7) $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

8) $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

9) $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

10) $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

תשובות סופיות:

1) $-3<x<1\ ,\ x>3$

2) $x<-\frac{2}{3}\ ,\ x\geq-\frac{1}{2}$

3) $x<-4\ ,\ x>4$

4) $2<x<3\ ,\ x>3$

5) $\frac{1}{2}\leq x<5$

6) $x>1$

7) $x>-2$

8) $2<x<3$

9) $1\leq x\leq 6$

10) $x<2\ ,\ x>6$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שיוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a<b$ וגם $b<c$, ניתן לכתוב: $a<b<c$.

מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שיוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $3<x+1<5$

2) $0<\frac{1}{x+4}<2$

3) $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

4) $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

5) $6x-38\le x-3\le 5x+7$

6) $6<\frac{2x+10}{3}\le\frac{7x-20}{5}$

7) $-1\le\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

8) $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

תשובות סופיות:

1) $2<x<4$

2) $x>-3\frac{1}{2}$

3) $x>0$

4) $x<2\frac{2}{5}\ ,\ x>2\frac{2}{3}$

5) $-2.5\le x\le 7$

6) $x\ge 10$

7) $1\le x<13$

8) ϕ

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x \le -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \le 5 \cup 0 < x < 8\}$

2) $x(x+5)-3x+15 \le 2x-1-x(4-x)$

3) $\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \le 0$

4) $\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$

5) $\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \ge 0$

6) $x(x+3)(2x-5) < 0$

7) $\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$

8) $\frac{5-2x}{(x-8)^2} \le 0$

9) $\frac{x-3}{x^2+2} > 0$

10) $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$

11) $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$

12) $\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$

13) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$

14) $\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \ge \frac{x}{x-4}-\frac{x}{x-2}$

15) $6 < 5x-x^2 \cap x^2 > 3x+10$

16) $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$

17) $1 < \frac{x-1}{x-4} \le 2$

18) לאלו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה $g(x)=\frac{x+1}{x+3}$?

תשובות סופיות:

1) $-2 < x \le -\frac{3}{4}$

2) $x \le -4$

3) $-4 \le x < 2 \ , \ 3 \le x$

4) $x < -7 \ , \ -\frac{1}{3} < x < 2 \ , \ x > 5$

5) $-1 < x \le 1.5 \ , \ 4 < x \le 12$

6) $x < -3 \ , \ 0 < x < 2.5$

7) $x < -1 \ , \ 2 < x < 6 \ , \ x > 6$

8) $2.5 \le x < 8 \ , \ x > 8$

9) $x > 3$

10) $x < -3 \ , \ 0 < x < 1 \ , \ x > 4$

11) $-1 < x < 0 \ , \ 1 < x < 3 \ , \ x > 3$

12) $x > 7$

13) $x < -2 \ , \ 2 < x < 4$

14) $x \le 0 \ , \ 1 \le x < 2 \ , \ x > 4$

15) אף x

16) $x \ne 1$

17) $x \ge 7$

18) $-3 < x < -\frac{3}{5} \ , \ x > 3$

אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a\geq 0$	$\sqrt{f(x)}<a$	$0\leq f(x)<a^2$
$a<0$	$\sqrt{f(x)}<a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)}>a$	כל x בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $\sqrt{x+3}<7$

2) $\sqrt{2x-5}\geq 1$

3) $\sqrt{2x^2+5x-6}>2-x$

4) $\sqrt{x^2+x-6}<x-3$

5) $\sqrt{x^2+3x+2}-1<\sqrt{x^2-x+1}$

6) $\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x^2-x+1}<1$

7) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>\frac{3}{2}$

8) $\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$

9) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$

10) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x}$

11) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$

12) $\sqrt{1+\frac{9}{x}}+5\sqrt{\frac{x}{x+9}}\geq 4$

תשובות סופיות:

1) $-3 \le x < 46$.
2) $x \ge 3$.
3) $x > 1 \ , \ x < -10$.
4) $\varnothing$.
5) $-1 \le x < \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \ , \ x \le -2$.
6) $-2 \le x < \frac{-13+\sqrt{73}}{16} \ , \ x \le -3$.
7) $\frac{12}{25} < x \le \frac{1}{2}$.
8) $x < 2\sqrt{5} - 4$.
9) $1 < x \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.
10) $-\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \le 1$ שזה: $-2.618 < x \le 1$.
11) $2.5 \le x < 3$.
12) $x > 0 \ , \ x < -9$.

תחום הגדרה:

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-4}$

ב. $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

ג. $f(x)=\sqrt{12x-x^2-x^3}$

ד. $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$

ה. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$

ו. $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1\le x\le 4$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x>2\ ,\ x\le -2$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, (a פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.
ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים.
מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a.

תשובות סופיות:

1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1 \, , \, x \geq 6$ ג. $x \leq -4 \, , \, 0 \leq x \leq 3$

ד. $-5 \leq x < -2 \, , \, x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2 \, , \, x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3} \, , \, 1 \leq x < \frac{3}{2} \, , \, x > \frac{3}{2}$

2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2} \, , \, x \geq 1$

ד. $-2 \leq x \neq 1 \, , \, x \leq -3$.

3) $a = 5$.

4) $a = 2$.

5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$.

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

מקרה	$\lvert x\rvert < a$	$\lvert x\rvert > a$
פתרון	$-a < x < a$	$x < -a \cap x > a$

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\lvert x+2\rvert < 3$ ב. $\lvert 2x+1\rvert > 7$

ג. $\lvert 6-2x\rvert < x$ ד. $\lvert 2x+1\rvert - 3x > 4$

2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1 < \lvert 4-3x\rvert < 7$ ב. $\lvert 2x+3\rvert < 8 < \lvert 5-x\rvert$

3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\lvert x^2+6x-4\rvert < 12$ ב. $\lvert x^2+x-10\rvert > 3x-2$

ג. $\lvert x^2-3x\rvert < 4$ ד. $\lvert 6x^2-7x-4\rvert > 1$

ה. $x^2-6\lvert x\rvert+5 \le 0$ ו. $x^2-6\lvert x+1\rvert-1 > 0$

4) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x-3|+|2x+2|>7$

ב. $|x+8|<11-|1-3x|$

ג. $|3-2x|-11>4-|6+x|$

ד. $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

ה. $|5+4x|-|3-x|+\left|4-\frac{1}{2}x\right|\le 22$

ו. $|x+3|+|x^2-5x+4|<19$

5) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\ge 3$

ב. $1\le\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\le 2$

ג. $\frac{|x-6|+8x}{x-12}\le 12$

ד. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|>5$

6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

א. $\sqrt{x^2-|x-12|}<x$

ב. $2-\sqrt{1-x}\le|x+2|-3$

ג. $\sqrt{|2x+1|-x-1}\le 4-|3x|$

ד. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$

תשובות סופיות:

1) א. $-5<x<1$ ב. $3<x$ או $x<-4$

ג. $2<x<6$ ד. $x<-1$.

2) א. $1\frac{2}{3}<x<3\frac{2}{3}$ או $-1<x<1$ ב. $-5\frac{1}{2}<x<-3$

3) א. $-2<x<2$ או $-8<x<-4$ ב. $4<x$ או $x<2$

ג. $-1<x<4$ ד. $x<-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$, $x>\frac{5}{3}$

ה. $1\le x\le 5$ או $-5\le x\le -1$ ו. $x<-5$, $x>7$

4) א. $2<x$ או $x<-2$ ב. $-1<x<1$

ג. $4<x$ או $x<-6$ ד. $4<x$ או $x<-1$

ה. $-7\frac{3}{7}\le x\le 4$ ו. $-2<x<6$.

5) א. $\frac{7}{6}\le x<2$, $x>2$ ב. $0\le x\le\frac{2}{3}$, $x\ge 6$

ג. $x<12$, $x\ge 46$ ד. $\frac{1}{2}<x<1$, $1<x<2$, $2<x\le 4$

6) א. $x=-1$, $x\ge 3$, $x\ne 12$ ב. $x\le\frac{-15+\sqrt{33}}{2}$

ג. $-\frac{2}{3}\le x\le 1$, $-1\le x\le 0$ ד. $-1<x<\sqrt[3]{4}$

מתמטיקה כללית

פרק 5 - סדרות

תוכן העניינים

1. הקדמה כללית ..... (ללא ספר)
2. סדרה חשבונית 95
3. סדרה הנדסית 102
4. סדרות מעורבות 107
5. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת 109
6. סדרת נסיגה 115

סדרה חשבונית:

סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר a_1 והפרשה הוא d

נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה חשבונית:**

כלל נסיגה של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1

נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

- **נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:**

סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים: $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$.

שאלות:

1) נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7...$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.

2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.

3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, ..., 49.5$.

4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24.
מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.

5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?

6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?

7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $82,85,88,91,...$.

8) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3,3x-4,x^2-1$.

9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+3 \\ a_1=5 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

10) בסדרה חשבונית $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.

א. הוכח: $a_5=0$.

ב. נתון: $a_3-a_{11}=24$. מצא את a_1 ואת d.

ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n=2a_n-3$.
מצא את ערך האיבר השלילי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.

11) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3,2,7,12,...$.

12) נתונה הסדרה החשבונית: $5,-1,-7,-13,\ldots$.
כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?

13) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?

14) נתונה הסדרה החשבונית: $-63,-67,-71,\ldots$.
כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?

15) נתונה הסדרה החשבונית: $31,22,13,4,\ldots$.
בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.

16) נתונה הסדרה החשבונית: $599,\ldots,19,14,9,4$.
מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.

17) סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב- 1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.

א. בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d.

ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?

18) נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.

א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

19) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5 , ה-7 וה- 16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.

ב. מצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה.

ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

20) נתונים שני טורים חשבוניים: $\begin{cases}150,144,138,...\\90,93,96,...\end{cases}$.

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

ב. מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

21) נתונות שתי סדרות חשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה הוא d_2. ידוע כי: $d_1=-2d_2$.

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n.

א. מצא את הפרש הסדרה a_n - d_1.

ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50}.

מצא את a_1 ואת b_1.

22) נתונה הסדרה החשבונית: $-13,-17,-21,...$.

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

23) בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.

הוכח כי $nd=60$.

24) בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

25) לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את x.

ii. מצא את הפרש הסדרה.

ב. ידוע כי: $a_{12}=0$. מצא את a_1.

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=308$.

מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

26) בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6.
האיבר הראשון אינו אפס.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. $a_1=-4d$.

ii. $S_9=0$.

ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.
מצא את a_1 ואת d.

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

27) בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח כי $nd=66$.

ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים הראשונים.

ג. סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

28) אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.
ההצעה הראשונה:
לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.
ההצעה השנייה:
לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.
ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.

א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.

ב. מה מחיר הרכב?

תשובות סופיות:

1) $a_{43}=-235$.

2) $a_1=-5$, $d=4$.

3) 20 איברים.

4) 48 איברים.

5) 15 קפיצות.

6) 58 מספרים.

7) 31 איברים חיוביים.

8) $x=1$, $x=4$.

9) $a_{19}=59$.

10) א. הוכחה. ב. $a_1=12$, $d=-3$. ג. $b_5=-3$.

11) $S_{14}=413$.

12) 21 איברים.

13) 16 דקות.

14) 37 איברים.

15) 3647.

16) 23920.

17) א. $n=\sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.

18) א. $a_1=6$, $a_2=10$, $a_3=14$ ב. $d=4$.

19) א. $a_1=50$, $d=-6$ ב. $a_{10}=-4$ ג. $n=6$.

20) א. $n=81$ ב. $n=16$.

21) א. $d_1=4$ ב. $a_1=-52$, $b_1=95$.

22) אי-זוגיים: $S=99$ זוגיים: $S=135$.

23) שאלת הוכחה.

24) 29 איברים.

25) א. i. $x=-50$ ii. $d=11$ ב. $a_1=-121$ ג. $S=2156$.

26) א. הוכחה. ב. $a_1=-8$, $d=2$ ג. $n=36$.

27) א. הוכחה. ב. $S=22a_1+693$ ג. $a_9=1$.

28) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 ₪.

סדרה הנדסית:

סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר a_1 ומנתה היא q
נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה הנדסית:**

כלל נסיגה של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1
נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:**

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$.

שאלות:

1) נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

2) מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{64}{81}$.

3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?

7) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית: $x-6,\ x+4,\ 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.

8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n \\ a_1=3 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.

9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: $5,\ 10,\ 20,\ 40,\ldots$.

10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?

11) סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?

12) בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.

13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב- 120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

14) המספרים: $2x-3\ ,\ x-9\ ,\ x-13$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

א. מצא את x.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.

ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.

ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=5^{11}$.
מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

15) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: a_{n+1} ,....., $36\ ,\ 12\ ,\ 4$. מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1=a_1+\frac{a_2}{6}\ \ ,\ \ b_2=a_2+\frac{a_3}{6}\ \ ,\ \ b_3=a_3+\frac{a_4}{6}\ \ ,\ .....\ ,\ \ b_n=a_n+\frac{a_{n+1}}{6}.$$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n
ובין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ-a_8.

16) נתונה הסדרה ההנדסית: $7,14,28,...$.
בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

17) בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

18) נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים.
בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

19) בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

20) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.

בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.

ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

21) בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

22) באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה:

תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת,
כנגד השנייה - שתי אבנים,
כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...
המלך הסכים להצעה.

א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?

ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.

ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים, כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

תשובות סופיות:

1) $a_9 = 729$.

2) $n = 7$.

3) $a_1 = \pm\frac{1}{4}, q = \pm 2$.

4) $a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3$.

5) $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5$.

6) 5 דקות.

7) $x = 11 \to q = 3$, $x = -\frac{2}{3} \to q = -\frac{1}{2}$.

8) $a_8 = 384$.

9) $S_9 = 2555$.

10) 5 דקות.

11) $n = 4$, יש 12 איברים בסדרה.

12) $q = 2$.

13) $n = 6$.

14) א. $x = 14$ ב.i. $a_n = 5^{n-1}$ ב.ii. a_6 , a_7 ג. $S_7^* = 61,034,375$.

15) א. $q = 3$. ג. b_5 , b_6.

16) אי-זוגיים: $S = 595$, זוגיים: $S = 1190$.

17) $q = 4$.

18) $\frac{q+1}{q}$.

19) $a_1 = \frac{3}{8}$.

20) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$ ב. $a_n = 3^{n-1}$ ג. a_5 , a_6.

21) א. $q = 2$ ב. $a_1 = 1$ ג. $S_{6(p)} = 2730$.

22) א. $a_{25} = 16,777,216$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו לו 20,000,000 אבנים.

ג. $4,16,64,...,2^{24}$, $S_n = 22,369,620$.

סדרות מעורבות:

שאלות:

1) נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 3.
אם נכפול את המספר הראשון ב-3, נוסיף למספר השני 4 ונחסיר מהמספר השלישי 4 תתקבל סדרה חשבונית. מצא את המספרים.

2) נתונות שתי סדרות שמתחילות במספר 2 ובשתיהן 3 איברים.
סדרה אחת היא חשבונית והשנייה הנדסית. האיבר השלישי בשתי הסדרות זהה והאיבר השני בסדרה ההנדסית קטן ב-4 מהאיבר השני בסדרה החשבונית.
מצא את מנת הסדרה ההנדסית.

3) נתונים ארבעה מספרים בעלי התכונות הבאות:
הראשון, השני והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 2.
הראשון, השלישי והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית וסכומם $22\frac{1}{2}$. מצא את ארבעת המספרים.

4) ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה.
האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.

א. מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.

ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום 60.

ג. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.

5) נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 , ...$
וסדרה הנדסית: $b_1 , b_2 , b_3 , ...$. ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.

א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.

ב. נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.

ג. בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212-. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

תשובות סופיות:

1) המספרים הם: 18, 6, 2.

2) $q=-1$ או $q=3$.

3) המספרים הם: 12 , 7.5 , 6 , 3.

4) א. 12, 10, 8 ב. 5 ג. 6.

5) א. $q=-2$ ג. $a_1=2$.

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

סיכום כללי:

- **הגדרה:**

סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q|<1$, $(q\neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

מתקבל הכלל הבא: $S=\frac{a_1}{1-q}$.

- **סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה: $S_n=\frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה באופן הבא: $S_n=\frac{a_k\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

שאלות:

1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ \ldots$

2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32.
מצא את האיבר הראשון בסדרה.

3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

***הערה: שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.**

5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n שמנתה q , $\left(q\neq 0\ ,\ |q|<1\right)$
מגדירים שלוש סדרות חדשות: b_n , c_n ו- d_n באופן הבא:

הסדרה:	b_n	c_n	d_n
הכלל:	$b_1=a_1$ $b_2=a_1+a_2$ $b_3=a_1+a_2+a_3$ $\vdots$ $b_n=a_1+a_2+a_3+..+a_n=S_{a(n)}$	$c_1=a_2^2-a_1^2$ $c_2=a_3^2-a_2^2$ $c_3=a_4^2-a_3^2$ $\vdots$ $c_n=a_{n+1}^2-a_n^2$	$d_1=S_a+a_1$ $d_2=S_a+a_2$ $d_3=S_a+a_3$ $\vdots$ $d_n=S_a+a_n$

הסכום S_a הוא סכום הסדרה a_n , והסכום: $S_{a(n)}$ הוא סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n.

א. קבע אלו מבין הסדרות b_n , c_n ו- d_n הן הנדסיות והבע את מנתן ע"י q.

ב. הבע באמצעות a_1 בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.

ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א' ב- $S_{(S)}$. הוכח כי לא קיים ערך של q עבורו סכום ריבועי האיברים $S_{(S)}$, שווה לסכום הסדרה הנ"ל בריבוע.

6) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: a_n שמנתה q.
מגדירים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$\ldots, b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q} \ldots, b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q} , b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q} , b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q}$$

כאשר: S_n^* מייצג את סכום הסדרה a_n החל מהאיבר a_n (ועד אינסוף).

א. הוכח כי הסדרה b_n היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות a_1 ו- q.

ב. ידוע כי סכום הסדרה b_n הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה a_n גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה b_n. מצא את a_1 ו- q.

ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים: $b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots = 42$.

ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n.

ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n.

ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^*. חשב את סכום הסדרה b_n^*.

ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^{**}. חשב את סכום הסדרה b_n^{**}.

ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה b_n. מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(S)}$ (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית b_n ב- S_b.
הראה כי: $S_b^2 \neq S_{(S)}$.

ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה a_n וסכום איברי הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, a_4+a_5, \ldots$.

א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.

ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.
מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

8) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

מחברים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n.

ב. הוכח כי הסדרה b_n גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.

ג. הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n.

ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n.

9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \ldots$ שמנתה היא q, $(0<q<1)$.
נגדיר את הסכומים הבאים: $V=a_3+a_7+a_{11}+\ldots$, $T=a_1+a_2+a_5+a_6+a_9+a_{10}+\ldots$.
נתון כי: $T=6V$.

א. מצא את מנת הסדרה q.

ב. פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?

ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.

10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ שמנתה היא q.
בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_{2n}^2$.

א. הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.
בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ב. מצא את מנת הסדרה.

ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו.
ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר a_n.

11) נתונה סדרה הנדסית אינסופית ..... a_1 , a_2 , a_3 שמנתה היא q , $(q \neq 0 \ , \ |q|<1)$.

נגדיר את הסכומים הבאים: $V = a_2 + a_7 + a_{12} + ...$, .. , $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13}$.

נתון כי: $V = 0.3T$.

א. מצא את מנת הסדרה q.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.

ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.

ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

תשובות סופיות:

1) $S=18$.

2) $a_1=24$.

3) $a_1=50\ ,\ q=\frac{1}{5}$ או $a_1=12\frac{1}{2}\ ,\ q=\frac{4}{5}$.

4) $S=18\frac{2}{3}$.

5) א. הסדרה b_n: $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{q-1}}{\frac{a_n\left(q^n-1\right)}{q-1}}=\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{a_n\left(q^n-1\right)}=q\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q^n-1}$

היות והיא תלויה ב-n היא אינה הנדסית.

הסדרה c_n הנדסית: $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{n+2}^2-a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^4-a_n^2q^2}{a_n^2q^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^2\left(q^2-1\right)}{a_n^2\left(q^2-1\right)}=q^2$.

הסדרה d_n: $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S+a_{n+1}}{S+a_n}=\frac{\frac{a_1}{1-q}+a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q}+a_n}=\frac{a_1+(1-q)a_{n+1}}{a_1+(1-q)a_n}=\frac{a_1\left(1+(1-q)q^n\right)}{a_1\left(1+(1-q)q^{n-1}\right)}=\frac{q^n-q^{n+1}+1}{q^{n-1}-q^n+1}$

היות והיא תלויה ב-n היא אינה הנדסית. ב. $S_{(c_n)}=\frac{c_1}{1-q_c}=\frac{a_2^2-a_1^2}{1-q^2}=\frac{a_1^2\left(q^2-1\right)}{1-q^2}=-a_1^2$.

ג. מההשוואה: $S_{(s)}=S^2$ מקבלים כי פתרון המשוואה הוא: $q=0,\pm1$.
כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה a_n היא שבר.
עבור $|q|>1$ הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של q עבורו השוויון יתקיים. מש"ל.

6) א. $b_n=\frac{a_1}{1-q}q^{n-1}$ ב. $a_1=56\ ,\ q=\frac{1}{3}$ ג. הוכחה. ד. 31.5
ה. 94.5 ו. -63 ז. 63 ח. 7938
ט. הסכום: S^2 משמעו: $\left(b_1+b_2+...+b_n+..\right)^2$.
הסכום: $S_{(s)}$ משמעו: $b_1^2+b_2^2+...+b_n^2+..$. ברור כי הביטויים אינם שווים.

7) א. הוכחה. ב. $a_1=16\ ,\ q=\frac{1}{3}$.

8) א. $q=0.6$ ב. $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n-1}+a_{2n}}=q^2$ ד. $a_1=200$

9) א. $q=\frac{1}{2}$ ב. פי 5 ג. $a_1=1024$

10) א. הוכחה. ב. $q=0.5$ ג. $a_5=20$.

11) א. $q=\frac{1}{3}$ ב. $a_1=-16$ ג. $S=288$.

סדרת נסיגה:

שאלות:

1) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2n-11 \\ a_1=-6 \end{cases}$.

א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.

ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את a_{14} ו- a_{12}.

ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא k.
הבע באמצעות k את a_{32} ו- a_{30}.

ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 133.

ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

2) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2n \\ a_1=0 \end{cases}$.

נתון כי $a_k=72$. הבע באמצעות k את a_{k+2}.

3) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+n^2-31 \\ a_7=t \end{cases}$

מצא את ערכו של t שבעבורו האיברים a_7, a_8, a_9 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

4) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=a_n+6n-2$
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n=a_{n+1}-a_n$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את b_1.

5) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=3a_n+4$.
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n=a_n+2$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון: $b_5=162$. חשב את a_1.

6) סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_1=3\ ,\ a_{n+1}=3a_n+10n-5$.
מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל n טבעי: $b_n=a_n+5n$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

ב. חשב את האיבר b_5.

ג. חשב את הסכום: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{12}$.

7) סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הנוסחה: $a_1=k\ ,\ a_{n+1}=8n-a_n+3$.

א. הבע באמצעות k את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.

ג. חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

8) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1=2\ ,\ a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+3}$.

מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n=\dfrac{4-7a_n}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את הסכום הבא: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{22}$.

9) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1=1\ ,\ a_{n+1}=3n-a_n-7$.

א. חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.

ב. הוכח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+2}=a_n+3$.

ג. כתוב נוסחה לסכום n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ד. חשב את הסכום הבא: $a_1+a_3+a_5+.....+a_{17}$.

10) סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=a_n+2\cdot 3^n+2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע את a_{n+2} באמצעות a_n.

ii. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.

ב. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא: $S_n=1.5\cdot 3^n+n^2+n-1.5$.

חשב את הסכום הבא: $a_6+a_7+a_8+....+a_{11}$.

ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

11) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה: $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+5}$, $a_1=6$.

מגדירים סדרה חדשה b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n=\frac{a_n+3}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית ומצא את מנתה.

ב. כתוב נוסחה ל- b_n באמצעות n בלבד.

ג. חשב את הסכום הבא: $b_1-b_2+b_3-b_4+.....-b_{10}$.

תשובות סופיות:

1) א. $a_3=-22$ ב. $a_{14}=33\ ,\ a_{12}=5$ ג. $a_{32}=k+51\ ,\ a_{30}=k-49$

ד. a_{62}, a_{63}

2) $a_{k+2}=74+4k$

3) $t=-33$

4) א. $d=6$ ב. $b_1=4$

5) א. $q=3$ ב. $a_1=0$

6) א. $b_{n+1}=3b_n$ ב. $b_5=648$ ג. $S=1594320$

7) א. $a_1=k\ ,\ a_2=11-k\ ,\ a_3=k+8\ ,\ a_4=19-k$ ב. 8

ג. 830

8) ב. $S_{11(p)}=267\frac{2}{3}$

9) א. $a_1=1\ ,\ a_2=-5\ ,\ a_3=4\ ,\ a_4=-2\ ,\ a_5=7$ ג. $S_{n(o)}=1.5n^2-0.5n$

ד. $S_{9(o)}=117$

10) א. i. $a_{n+2}=a_n+8\cdot 3^n+4$ ii. a_4

ב. $S_{6-11}=265458$ ג. $a_1=5$.

11) א. $q=2.5$ ב. $b_n=1.5\cdot 2.5^{n-1}$ ג. $S_{10}^{*}=-4086.74$

מתמטיקה כללית

פרק 6 - סימן הסכימה (סיגמה)

תוכן העניינים

1. כללי 119

סימן הסכימה (סיגמה):

שאלות:

1) כתוב בפירוט את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$ ב. $\sum_{k=1}^{4} 2k$ ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$

ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$ ה. $\sum_{t=1}^{8} tx^t$ ו. $\sum_{k=4}^{10} na_k$

ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$ ח. $\sum_{k=-1}^{3} \left(k^2+1\right)$ ט. $\sum_{l=1}^{3} \left(l^2 - x_l - 4\right)$

2) כתוב את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$

ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$

ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

ד. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8$

ה. $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+...+44\cdot 45$

ו. $3\cdot 2+6\cdot 3+9\cdot 4+12\cdot 5+15\cdot 6+18\cdot 7+21\cdot 8$

ז. $5^2+7^2+...+27^2$

ח. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{10\cdot 11}$

ט. $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\frac{18}{243}$

י. $4+\frac{8}{5}+\frac{12}{25}+\frac{16}{125}+\frac{20}{625}$

3) חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$ ב. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k+4k^2\right)$ ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$

ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3-k}{k+1}$ ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$ ו. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k^2+1\right)(k-2)$

* תוכל להיעזר בנוסחאות הבאות: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

4) חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{20}\frac{5\cdot 4^k+8^k}{2^k}$ ב. $\sum_{k=1}^{11}\frac{2\cdot 4^{k+2}+10^k}{0.4^k}$ ג. $\sum_{k=10}^{20}2^{2k+10}$

* תוכל להיעזר בנוסחה הבאה: $\sum_{k=1}^{n}a^k=\frac{a\left(a^n-1\right)}{a-1}\quad(a\neq 1)$.

5) חשב את הסכומים הבאים:

א. $1^2+2^2+3^2+...+20^2$ ב. $4^2+5^2+6^2+...+24^2$

ג. $2^2+4^2+6^2+...+22^2$ ד. $1^2+3^2+5^2+...+17^2$

6) הוכח כי:

א. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k+4}}{k+2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{2k+6}}{k+3}$

ב. $\sum_{k=4}^{n-3}\frac{4k+17+2^{2k}}{k+1}=\sum_{k=8}^{n+1}\frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$

7) חשב את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

א. $\sum_{4}^{11}k^2$ ב. $\sum_{10}^{20}4^{2k}$

תשובות סופיות:

1) א. $4^0+4^1+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+4^8+4^9+4^{10}$

ב. $2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4$

ג. $4a_4+4a_5+4a_6+4a_7+4a_8+4a_9+4a_{10}$

ד. $4\cdot7^2a_7+4\cdot8^2a_8+4\cdot9^2a_9+4\cdot10^2a_{10}+4\cdot11^2a_{11}+4\cdot7^2a_7$

ה. $1x^1+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+7x^7+8x^8$

ו. $na_5+na_6+na_7+na_8+na_9+na_{10}+na_{11}$

ז. $4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n$

ח. $\left((-1)^2+1\right)+\left(0^2+1\right)+\left(1^2+1\right)+\left(2^2+1\right)+\left(3^2+1\right)$

ט. $\left(1^2-x_2-4\right)+\left(2^2-x_4-4\right)+\left(3^2-x_6-4\right)$

2) א. $\sum_{k=0}^{7}2^k$ ב. $\sum_{k=1}^{10}2k$ ג. $\sum_{k=0}^{9}(2k+1)$ ד. $\sum_{k=1}^{7}k(k+1)$

ה. $\sum_{k=1}^{22}(2k-1)2k$ ו. $\sum_{k=1}^{7}3k(k+1)$ ז. $\sum_{n=3}^{14}(2n-1)^2$

ח. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$ ט. $\sum_{k=1}^{5}\frac{4k-2}{3^k}$ י. $\sum_{k=1}^{4}\frac{4k}{5^{k-1}}$

3) א. 220 ב. 1650 ג. 255 ד. 9160 ה. 28 ו. 4545

4) א. $5\cdot\left(2^{21}-2\right)+\frac{4}{3}\left(4^{20}-1\right)$ ב. $32\cdot\frac{10\left(10^{11}-1\right)}{10-1}+\frac{25\left(25^{11}-1\right)}{25-1}$

ג. $2^{10}\left[\frac{4\left(4^{20}-1\right)}{4-1}-\frac{4\left(4^9-1\right)}{4-1}\right]$

5) א. 2870 ב. 2856 ג. 2024 ד. 969

6) הוכחה.

7) א. $9\cdot8+6\cdot\frac{8(8+1)}{2}+\frac{8(8+1)(2\cdot8+1)}{6}$ ב. $4^{18}\cdot\frac{16\left(16^{11}-1\right)}{16-1}$

מתמטיקה כללית

פרק 7 - אינדוקציה מתמטית

תוכן העניינים

1. שאלות העוסקות בתכונות התחלקות 122
2. סדרות 125
3. עצרת 127
4. שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים 128
5. שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים 129
6. שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה 130
7. שאלות כוללות ומסכמות 132
8. מושג הסכימה וכתיבה מקוצרת של אינדוקציות 134

שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

סיכום כללי:

מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:

בדיקה:

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור $n=1$ (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור $n=2,3$).

הנחת האינדוקציה:

נניח כי עבור $n=k$ (k טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

הוכחת האינדוקציה:

נוכיח כי עבור $n=k+1$ טענת האינדוקציה מתקיימת.

סיכום:

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

שאלות:

1) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 8^n-3^n מתחלק ב-5 ללא שארית לכל n טבעי.

2) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 11^n-4^n מתחלק ב-7 ללא שארית לכל n טבעי.

3) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8\cdot 7^n+4^{n+2}$ מתחלק ב-24 ללא שארית לכל n טבעי.

4) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5\cdot 3^{2n}-5^{n+1}$ מתחלק ב-20 ללא שארית לכל n טבעי.

5) a_n הוא האיבר במקום ה-n בסדרה החשבונית: $1,3,5,7,\ldots$ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $2^{a_n}+4$ מתחלק ב-12 ללא שארית לכל n טבעי הגדול מ-1.

6) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^2+n מתחלק ב-2 ללא שארית לכל n טבעי.

7) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

8) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n-2n-1 מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.

9) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9\left(9^n-1\right)-40n$ מתחלק ב-32 ללא שארית לכל n טבעי.

10) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n+5^n-2^n\left(2^n+1\right)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

11) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 7^n+2^{2n} מתחלק ב-11 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.

12) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי a^n-b^n מתחלק ב-$(a+b)$ ללא שארית לכל n טבעי זוגי.

13) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^{n+2}+1$ מותיר שארית 2 בחלוקתו ב- 3 לכל n טבעי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

סדרות:

סיכום כללי:

תזכורת:

- סדרה היא אוסף מספרים: $a_1, a_2, ..., a_n$, כאשר n הוא מיקום האיבר בסדרה ו- a_n הוא ערך האיבר העומד במקום ה- n-י בסדרה.
  - סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.
  - סכום n האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- S_n והוא מקיים: $S_n = a_1 + ... + a_n$.

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 + d(n-1)$ כאשר d הפרש הסדרה.
  - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$.

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 q^{n-1}$ כאשר q היא מנת הסדרה.
  - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$.

שאלות:

14) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $1+2+3+4+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$.

15) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $4+7+10+13+...+(3n+1)=\frac{n}{2}(3n+5)$.

16) נתונה סדרה שבה: $a_n=n(n+2)$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$.

17) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

18) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$\frac{6}{1\cdot3\cdot5}+\frac{6}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

19) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+...+n\cdot3^{n-1}=\frac{1}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right].$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

עצרת:

סיכום כללי:

תזכורת – מושג העצרת:

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$.

מגדירים: $0!=1$ ותמיד מתקיימים השוויונות: $n!=n\cdot(n-1)!$, $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$.

שאלות:

20) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

21) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{4}+\frac{3\cdot 4!}{8}+...+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$

22) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$p!+\frac{(p+1)!}{1!}+\frac{(p+2)!}{2!}+...+\frac{(p+n-1)!}{(n-1)!}=\frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

23) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)...\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{n!}$$

24) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1\cdot 4}-\frac{11}{4\cdot 7}+\frac{17}{7\cdot 10}-...+\frac{(-1)^{n-1}(6n-1)}{(3n-2)(3n+1)}=1+\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

שאלות:

25) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+...+2n=n(2n+1)$$

26) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

27) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+...+3n\cdot 2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

שאלות:

28) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=2n(2n+1)$$

29) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

30) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+3}\right)...\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

31) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$$

32) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

שאלות:

33) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{n}{n+1}$$

34) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 2-\frac{1}{n}$$

35) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$$

36) נתונה סדרה שבה: $a_n=n^n$. נגדיר: $T_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $T_n\le n^{\frac{n}{2}(n+1)}$.

37) נתון אי-השוויון: $2^n>n^2$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

38) נתון אי-השוויון: $4^n>5n^2+1$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

39) נתון אי-השוויון: $n^3-n<5^{n-1}$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

40) נתון אי-השוויון: $3^n+4^n+5^n<6^n$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

41) נתון אי-השוויון: $n^n \geq n!$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי.

42) נתון אי-השוויון: $a^n + b^n < (a+b)^n$, $(a,b>0)$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-1.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות כוללות ומסכמות:

שאלות:

43) נתון השוויון: $4+7+10+13+...=\frac{n}{2}(3n+5)$.

א. מצא את האיבר במקום ה-n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג. חשב את הסכום: $37+40+43+...+85$.

44) נתון השוויון: $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+...=2-\frac{2n+2}{3^n}$. מצא את האיבר במקום ה-$n$.

45) נתון השוויון: $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots=\frac{n}{4n+1}$.

א. מצא את האיבר במקום ה-n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג. חשב את הסכום: $\frac{1}{25\cdot29}+\frac{1}{29\cdot33}+\frac{1}{33\cdot37}+\cdots+\frac{1}{89\cdot93}$.

46) נתון השוויון: $(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום: $26^2+27^2+28^2+...+48^2$.

47) נתון השוויון: $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $4^2+6^2+8^2+\cdots+(4n)^2$.

48) נתונים השוויונים הבאים:

א. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7}{3}(n^2+3n-1)$.

ב. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=n^2+11n-5$.

ג. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7n}{2}(n+1)$.

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל n טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

49) נתון השוויון: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=an(2n+b)$.

א. נתון כי השוויון נכון עבור $n=1$ ו-$n=2$. מצא את ערכי a ו-b.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

50) נתון אי-השוויון: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-2.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{18}>\frac{1}{2}$.

51) נתון אי-השוויון: $n^2<2^n$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-4.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $5^2\cdot 6^2\cdot 7^2\cdot 8^2\cdot\ldots\cdot 20^2<2^{200}$.

52) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום $9+27+81+\cdots+3^{3n+1}$ מתחלק ב-117 ללא שארית לכל n טבעי.

53) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

ב. נתון כי $a+b$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
הוכח כי a^3+b^3 מתחלק ב-6 ללא שארית.

54) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח את הטענה: אם ל-n טבעי מסוים 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם $3^{n+2}+5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.

ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל n טבעי אי-זוגי?

ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n+5^n מתחלק ב-8 ללא שארית לכל n טבעי אי-זוגי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

מושג הסכימה וכתיבה מקוצרת של אינדוקציות:

סיכום כללי:

סימון הסכימה (קרי: סיגמה) מוגדר באופן הבא: $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

מקור הסימון נובע מהמילה Sum ומשמעו הוא סכימה של איברים המתחילים בערך המצוין בתחתית הסימון $\left(\sum_{\boxed{k=1}}^{n}\right)$ עד לערך המצוין בחלקו העליון $\left(\sum_{k=1}^{\boxed{n}}\right)$.

דוגמאות:

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n$.
- $\sum_{k=3}^{12} k^2 = 3^2+4^2+...+12^2$.
- $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{5}+\frac{1}{9}+....+\frac{1}{4n+1}$.

שאלות:

1) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

2) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

3) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

4) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n-1)$.

5) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4^{k-1}}=4-\frac{1}{4^{n-1}}$.

6) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{3n}k=1\frac{1}{2}n(3n+1)$.

7) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{3n}(4k-1)=3n(6n+1)$.

8) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\frac{n}{2}(3n+1)$.

9) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}3^{n+k}=\frac{3^{n+1}(3^n-1)}{2}$.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

מתמטיקה כללית

פרק 8 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

1. חוקי החזקות 136
2. חוקי השורשים 141
3. כתיבה מדעית של מספרים 145

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

1. $a^0=1$
2. $a^1=a$
3. $a^n\cdot a^m=a^{m+n}$
4. $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
5. $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$
6. $a^m\cdot b^m=\left(a\cdot b\right)^m$
7. $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$
8. $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. a^2a^6 ב. $t^3t^5t^7$ ג. $b^2b^5b^{12}b^3$

ד. $\frac{k^8}{k^3}$ ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$ ו. $\frac{c^6}{c^2}$

ז. $\frac{a^3a^{19}}{a^{15}}$ ח. $\frac{x^{30}}{x^9x^{18}}$ ט. $\frac{y^3y^{15}}{y^4y^{14}}$

י. $3^23^33^4$ יא. $\frac{2^{16}2^2}{2^{10}}$ יב. $\frac{5^{20}5^35^{16}}{5^45^{22}5^8}$

2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $\frac{3^42^7}{2^63^2}$ ב. $\frac{a^{10}b^{13}a^3}{b^4b^6b^2a^{12}}$ ג. $\frac{x^8y^5y^9x^2}{y^4x^4}$

3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^62^{17}3^32^4}{3^42^33^2}$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243\cdot2^n$ לבין הביטוי הנתון.

4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3\cdot 2^7}{2^4\cdot 2^5}$ ב. $\frac{9^3\cdot 27^2}{3^9\cdot 81}$

ג. $\frac{10^9\cdot 25^5\cdot 8^{-1}}{40^3\cdot 125^5}$ ד. 2^3+2^5

5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$.

א. $\left(a^2\right)^4$ ב. $\left(c^3\right)^{10}$ ג. $\left(x^3x^{10}\right)^2$

ד. $\frac{\left(b^2\right)^3}{b^2b^3}$ ה. $\frac{n^7n^8}{\left(n^3\right)^4}$ ו. $\frac{d^{20}\left(d^4\right)^2}{d^{12}\left(d^3\right)^2}$

ז. $\frac{2^5\left(2^4\right)^2 2^3}{\left(2^32^2\right)^3}$ ח. $\frac{3^6\left(3^33^2\right)^6}{3^{28}\left(3^2\right)^3}$ ט. $\frac{\left(8^3\right)^8 8^{11}}{\left(8^28\right)^3 8^8}$

י. $\frac{\left(2^4\right)^5\left(3^6\right)^7 2^{20}}{3^{35}2^{40}}$ יא. $\frac{\left(3^2\right)^6 5^{31}3^7}{\left(5^2\right)^{10}5^{11}3^{18}}$ יב. $\frac{\left(3^2\right)^7 5^{10}\left(5^3\right)^2}{3^95^{16}}$

6) לפניך הביטויים הבאים: $\left(\left(3^2\right)^3\right)^4$ ו- $\left(\left(3^6\right)^n\right)^2$.
מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^33^5}{2^23^4}$ ב. $\frac{5^{20}3^{14}3^8}{3^{20}5^{12}5^8}$ ג. $\frac{7^{12}2^22^6}{2^57^{10}7}$

8) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^29\cdot 81^2$ ב. $64^22^38^2$ ג. $125\cdot 25\cdot 5^5$

ד. $\frac{2^4\cdot 16^5}{8\cdot 512}$ ה. $\frac{\left(4^2\right)^3 16}{64\cdot 2^3}$ ו. $\frac{\left(\left(3^4\right)^4\right)^5}{81^327^43^5}$

9) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{\left(2a^2b\right)^3\cdot\left(ab^{-3}\right)^2}{4ab^{-2}\cdot\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^4}$

ב. $\dfrac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\dfrac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\dfrac{4^{b+3}}{4^{b+1}+4^{b+2}}$

ד. $\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{x^{n+3}+x^{n+5}}{x^{n+2}}$

10) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $\left(ab\right)^n=a^nb^n$ ו-$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

א. $\left(a^2b\right)^3$

ב. $\left(m^4n^3\right)^5$

ג. $\left(x^{12}y^3\right)^3$

ד. $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^4$

ה. $\left(\dfrac{i^4}{k^3}\right)^7$

ו. $\left(\dfrac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$

ז. $\left(\dfrac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6$

ח. $\left(\dfrac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2$

ט. $\left(\dfrac{\left(b^{12}c\right)^2c^{14}}{c\left(c^3b^5\right)^4b^3}\right)^2$

11) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\left(\dfrac{3^92^62^2}{3^62^53^2}\right)^2$

ב. $\left(\dfrac{\left(5^4\right)^23^6}{3^55^7}\right)^2$

ג. $\left(\dfrac{7^3\cdot16\cdot128\cdot49}{\left(2^27\right)^5}\right)^3$

12) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\dfrac{1}{4^6}$

ב. $\dfrac{1}{5^3}$

ג. $\dfrac{1}{2^{10}}$

ד. $\dfrac{1}{8}$

ה. $\dfrac{1}{81}$

ו. $\dfrac{1}{125}$

13) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\dfrac{1}{4^{-3}}$

ב. $\dfrac{1}{3^{-2}}$

ג. $\dfrac{1}{5^{-3}}$

14) חשב את הביטויים הבאים:

א. $3^2\cdot 3^{-5}\cdot 3^7$

ב. $2^{-8}\cdot 512\cdot 2^2$

ג. $5^6\cdot 5^{-3}\cdot 5^{-2}$

ד. $2^{14}\cdot 3^{-6}\cdot 2^{16}\cdot 3^4\cdot 2^{-30}$

ה. $\frac{2^{-5}\cdot 5^3\cdot 2^{14}}{5^2\cdot 5^{-10}\cdot 5^8\cdot 2^6}$

ו. $\frac{3^{-6}\cdot 7^7\cdot 7^{-4}}{3^{-4}\cdot 3^{-3}\cdot 7^3}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

ב. $\frac{\left(4^4\right)^{-4}3^{-11}}{\left(3^{-2}4^3\right)^{-6}}$

ג. $\frac{2^{-3}5^4}{5^4\cdot 125\cdot\left(5^2 2\right)^{-3}\cdot 2^{-4}}$

16) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a^{n+2}\cdot a^{2-3n}}{\left(a^3\right)^{n+1}}$

ב. $\frac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\frac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\frac{\left(m^{n+2}\right)^3\cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}}\cdot\left(m^3\right)^{n-2}}$

תשובות סופיות:

1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5.

2) א. 18 ב. ab ג. x^6y^{10}.

3) $n=16$.

4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40.

5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5.

6) $n=2$.

7) א. 6 ב. 9 ג. 56.

8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}.

9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x}+x$.

10) א. a^6b^3 ב. $m^{20}n^{15}$ ג. $x^{36}y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21}b^3$
ז. $x^{12}y^{18}$ ח. t^4r^{12} ט. b^2c^6.

11) א. 576 ב. 225 ג. 8

12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}.

13) א. 64 ב. 9 ג. 125.

14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3.

15) א. $5^{24}\cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3\cdot 2^4$.

16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}.

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

1. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
4. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a\cdot b}$
5. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

א. $3^{\frac{1}{4}}$ ב. $2^{\frac{3}{5}}$ ג. $6^{\frac{5}{6}}$

ד. $-12^{\frac{2}{7}}$ ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$ ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$

ז. $5^{-\frac{1}{4}}$ ח. $27^{-\frac{1}{3}}$ ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$ ב. $-\sqrt{25}$ ג. $\sqrt[3]{8}$

ד. $-\sqrt[7]{128}$ ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$ ו. $\left(\sqrt[5]{1024}\right)^2$

ז. $\left(\sqrt[5]{-243}\right)^3$ ח. $\sqrt[4]{-16}$ ט. $\sqrt[4]{-25^2}$

י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $8^{\frac{2}{3}}$ ב. $32^{-\frac{3}{5}}$ ג. $128^{-\frac{2}{7}}$

ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ז. $81^{\frac{3}{4}}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ ח. $343^{-\frac{2}{3}}\cdot 100^{\frac{1}{2}}$ ט. $16^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$.

21) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ ג. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$

ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ ח. $\frac{\sqrt[3]{500}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2}\cdot\sqrt[3]{4}}$ ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2}\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400}\sqrt{2}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

א. $3\sqrt{2}$ ב. $5\sqrt{3}$ ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ד. $2\sqrt[3]{3}$ ה. $x\sqrt{x}$

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

א. $2\sqrt{5}$ ב. $4\sqrt[3]{2}$ ג. $2\sqrt[5]{3}$

ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ז. $-5\sqrt[3]{2}$ ח. $-5\sqrt[4]{2}$ ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$

ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$

ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$

ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{18}-\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7}+\sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}$

ד. $\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$

ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160}-\sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{-2.5}\cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{2}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}$

ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}}\cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}}\cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{-\frac{1}{8}}\cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ

ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$.

18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16

ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5.

19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$

ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$.

20) $\sqrt{2}$.

21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2

ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$.

22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$.

23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$

ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$.

24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$.

25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$

ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$.

26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$

ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$.

27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$.

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000
ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000
ד. 23,400,000
ה. 0.0003
ו. 0.00000042
ז. 0.000000042
ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$
ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$
ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$
ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$
ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

28) א. $1.5\cdot10^{7}$ ב. $1.5\cdot10^{6}$ ג. $1.5\cdot10^{11}$ ד. $2.34\cdot10^{7}$ ה. $3\cdot10^{-4}$
ו. $4.2\cdot10^{-7}$ ז. $4.2\cdot10^{-8}$ ח. $4.2\cdot10^{-10}$.

29) א. $9\cdot10^{12}$ ב. $4\cdot10^{12}$ ג. $1.25\cdot10^{11}$ ד. $1.25\cdot10^{14}$ ה. $1.6\cdot10^{-15}$
ו. $6.4\cdot10^{-14}$ ז. $1.25\cdot10^{-16}$ ח. $3.43\cdot10^{-25}$.

מתמטיקה כללית

פרק 9 - מבוא לגאומטריה של המישור

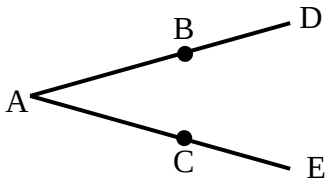
תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות ..... (ללא ספר)
2. חיבור וחיסור קטעים 146
3. חישובי זוויות וחיבור וחיסור זוויות 147
4. זוויות קדקודיות וזוויות צמודות 149
5. זוויות בין ישרים מקבילים 151

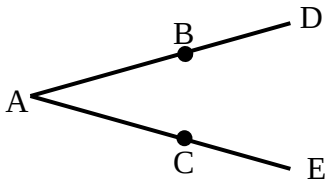
חיבור וחיסור קטעים:

שאלות:

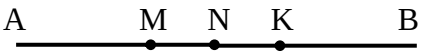
1) באיור שלפניך נתון: $AB = AC \ , \ BD = CE$.
הוכח: $AD=AE$.



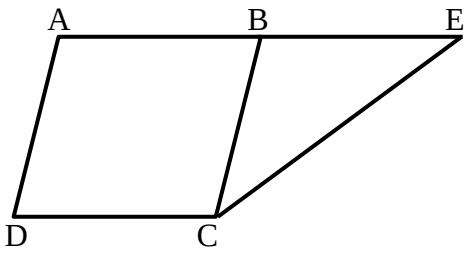
2) באיור שלפניך נתון: $AD = AE \ , \ AB = AC$.
הוכח: $BD = CE$.



3) הנקודות A, M, N, K, B נמצאות על ישר אחד.
נתון כי: $AM = KB \ , \ MN = NK$.
הוכח: $AN = BN$.



4) בסרטוט שלפניך נתון כי: $BC = AB \ , \ BE + BC = 2AB$.
הוכח: $AB = BE$.



תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

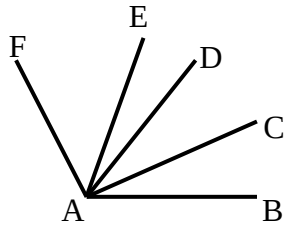
3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה.

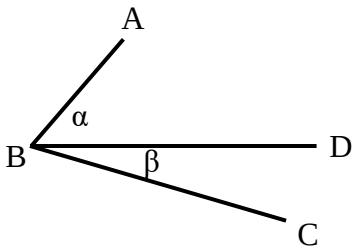
חישובי זוויות וחיבור וחיסור זוויות:

שאלות:

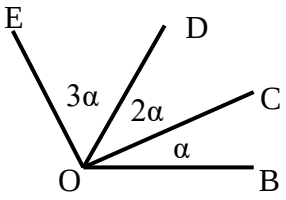
5) נתון: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAC$, $\sphericalangle FAE = 2\cdot\sphericalangle EAD$.
וכן: $\sphericalangle FAD = 60°$, $\sphericalangle EAB = 80°$.
חשב את הזויות הבאות:
$\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle EAC$, $\sphericalangle FAB$.



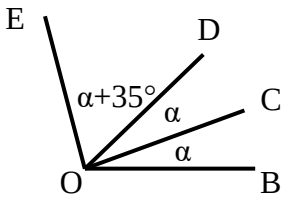
6) באיור שלפניך נתון: $\sphericalangle ABC = 69°$.
נתון כי: $\alpha = 2\beta$ (זוויות סמוכות).
מצא את α ואת β .



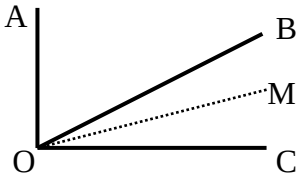
7) באיור שלפניך מספר קרניים היוצאים מהנקודה O.
הנתונים הם: $\sphericalangle EOB = 138°$.
חשב את הזוויות הבאות:
$\sphericalangle COB$, $\sphericalangle DOC$, $\sphericalangle EOD$.



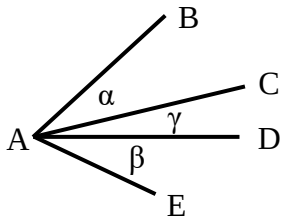
8) באיור שלפניך נתון: $\sphericalangle EOB = 110°$.
שאר הנתונים מופיעים בתרשים.
חשב את הזוויות הבאות:
$\sphericalangle DOC$, $\sphericalangle EOC$.



9) נתון האיור הבא ובו: $\sphericalangle AOC = 90°$.
OM חוצה את זווית BOC.
מתקיים: $\sphericalangle AOB = 3\sphericalangle MOC$.
חשב את: $\sphericalangle BOM$, $\sphericalangle AOM$.



10) בסרטוט שלפניך נתון: $\alpha = \beta$.
הוכח כי: $\sphericalangle EAC = \sphericalangle BAD$.



תשובות סופיות:

5) $\sphericalangle CAB = 30^\circ$, $\sphericalangle EAC = 50^\circ$, $\sphericalangle FAB = 120^\circ$.

6) $\alpha = 46^\circ$, $\beta = 23^\circ$.

7) $\sphericalangle DOE = 69^\circ$, $\sphericalangle COD = 46^\circ$, $\sphericalangle BOC = 23^\circ$.

8) $\sphericalangle DOC = 25^\circ$, $\sphericalangle EOC = 85^\circ$.

9) $\sphericalangle BOM = 18^\circ$, $\sphericalangle AOM = 72^\circ$.

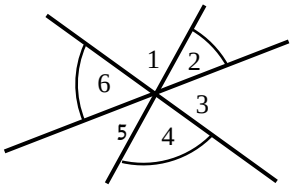
10) שאלת הוכחה.

זוויות קדקודיות וזוויות צמודות:

שאלות:

11) חשב את סכום הזויות הבאות (נמק):

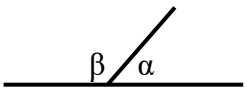
$\sphericalangle 2+\sphericalangle 4+\sphericalangle 6$



12) באיור שלפניך הזוויות α ו- β הן זוויות צמודות.

ידוע כי: $\alpha=63°$.

מצא את זווית β .

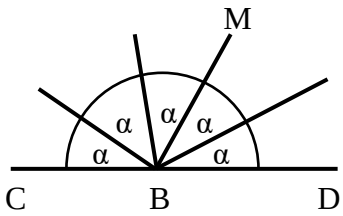


13) באיור שלפניך הזווית CBD היא שטוחה.

כל הזוויות שוות ל- α .

א. חשב את α .

ב. חשב את זווית CBM.

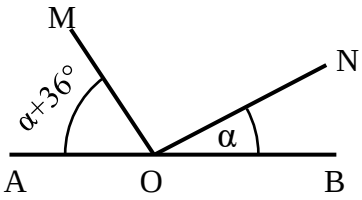


14) בסרטוט שלפניך ידוע:

הזווית AOB היא שטוחה.

נתון: $\alpha=27°$.

הוכח כי: $MO\perp NO$.

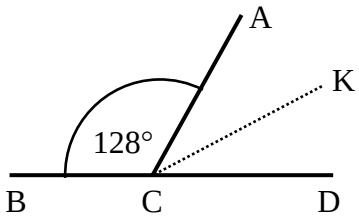


15) הזוויות $\sphericalangle ACD$ ו- $\sphericalangle ACB$ הן צמודות.

ידוע כי CK חוצה זווית ACD.

כמו כן: $\sphericalangle ACB=128°$.

חשב את זווית BCK.



תשובות סופיות:

11) $180°$.

12) $\beta = 117°$.

13) א. $\alpha = 36°$ ב. $\sphericalangle CBM = 108°$.

14) שאלת הוכחה.

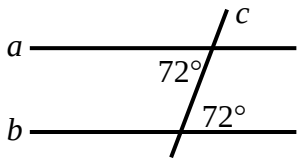
15) $\sphericalangle BCK = 154°$.

זוויות בין ישרים מקבילים:

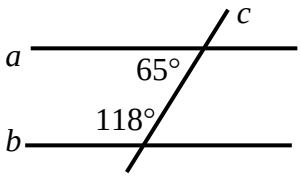
שאלות:

16) קבע בכל מקרה האם הישרים a ו-b מקבילים או שלא. נמק.

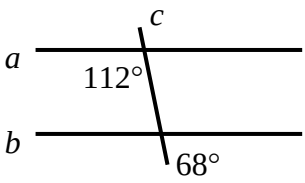
א.



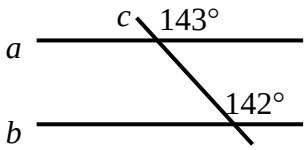
ב.



ג.

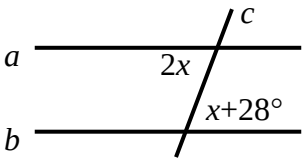


ד.

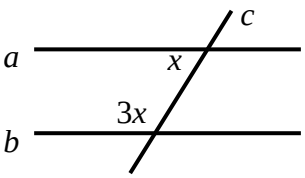


17) הישרים a ו-b מקבילים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:

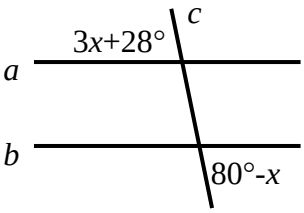
א.



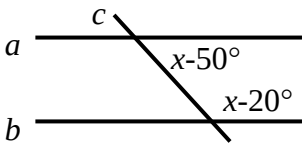
ב.



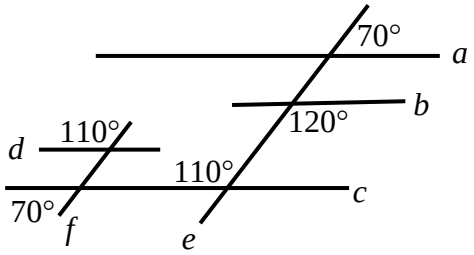
ג.



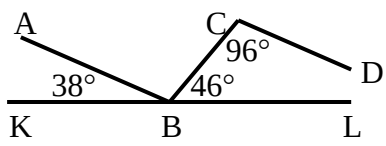
ד.



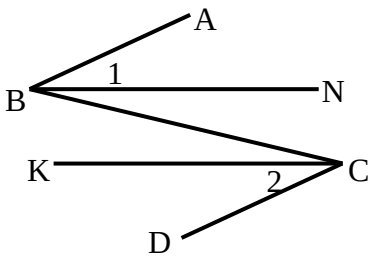
18) מצא את זוגות הישרים המקבילים בסרטוט הבא.
נמק.



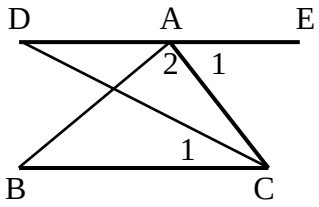
19) בסרטוט שלפניך נתון כי KL הוא קו ישר.
שאר הזוויות מופיעות בתרשים.
הוכח כי: $AB \parallel CD$.



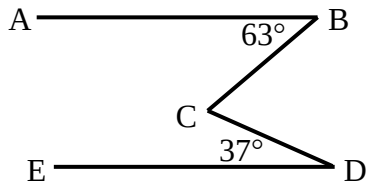
20) באיור שלפניך נתון כי:
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$, $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle C_2$.
הוכח כי: $BN \parallel CK$.



21) באיור שלפניך מופיע קטע ישר DE.
מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
מחברים את BC וידוע כי $BC \parallel DE$.
מעבירים את CD – חוצה זווית C.
נתון: $\sphericalangle A_2 = 85°$, $\sphericalangle A_1 = 68°$.
א. חשב את הזווית $\sphericalangle C_1$.
ב. חשב את הזווית $\sphericalangle B$.



22) בסרטוט שלפניך נתון:
$AB \parallel DE$, $\sphericalangle B = 63°$, $\sphericalangle D = 37°$.
חשב את גודל הזווית BCD.



תשובות סופיות:

16) א. כן ב. לא ג. כן ד. לא.

17) א. $28°$ ב. $45°$ ג. $13°$ ד. $125°$.

18) $a \parallel c \parallel d$, $e \parallel f$.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) א. $34°$ ב. $27°$.

22) $\sphericalangle BCD = 100°$.

מתמטיקה כללית

פרק 10 - גיאומטריה אוקלידית - משולשים

תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות 154
2. זוויות במשולשים 156
3. משולש שווה שוקיים ושווה צלעות 159
4. חפיפת משולשים 161
5. זווית חיצונית במשולש 167
6. משולש ישר זווית 168
7. קטע אמצעים במשולש 171
8. מפגש תיכונים במשולש 173

הגדרות כלליות:

סוגי משולשים:

ניתן למיין את המשולשים לפי זוויות או לפי צלעות.
לפי זוויות:

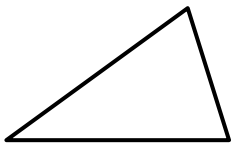
1. משולש חד זווית – משולש שכל זוויותיו חדות.
2. משולש ישר זווית – משולש בעל זווית ישרה.
3. משולש קהה זווית – משולש בעל זווית קהה.

לפי צלעות:

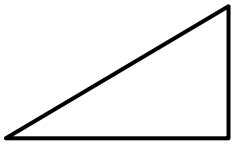
4. משולש שונה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שונות באורכן.
5. משולש שווה שוקיים – משולש שבו שתי צלעות שוות.
6. משולש שווה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שוות באורכן.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:

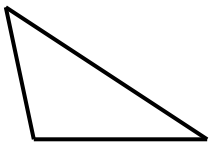
1. משולש חד זווית:



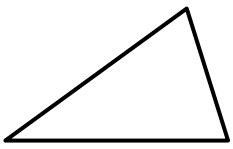
2. משולש ישר זווית:



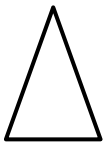
3. משולש קהה זווית:



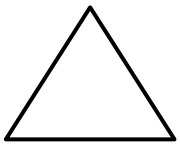
4. משולש שונה צלעות:



5. משולש שווה שוקיים:



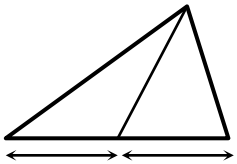
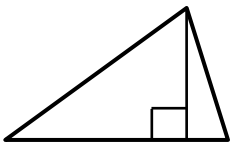
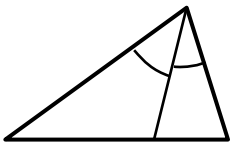
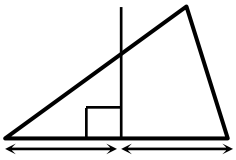
6. משולש שווה צלעות:



קטעים מיוחדים במשולשים:

1. תיכון – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו וחוצה אותה.
2. גובה – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו ומאונך לה.
3. חוצה זווית – קטע היוצא מקדקוד וחוצה את הזווית שממנה הוא יוצא.
4. אנך אמצעי – קטע היוצא מאמצע צלע ומאונך לה.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:

1. 
2. 
3. 
4. 

משפטים כלליים במשולשים:

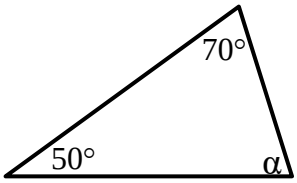
- סכום הזוויות במשולש הוא $180°$.
- סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
- במשולש מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה ולהפך.
  במשולש מול הזווית הקטנה נמצאת הצלע הקטנה ולהפך.
  במשולש מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות ולהפך.

זוויות במשולשים:

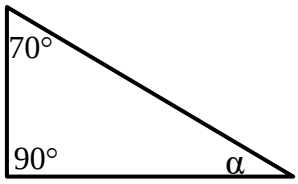
שאלות:

1) חשב את הזוויות בכל אחד מהמשולשים שלפניך:

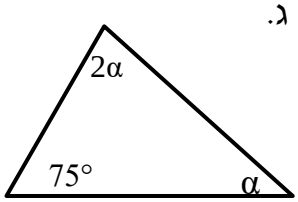
א.



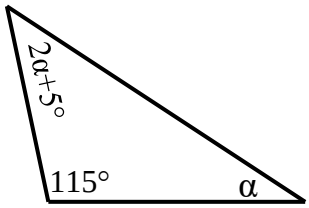
ב.



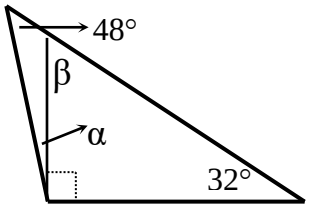
ג.



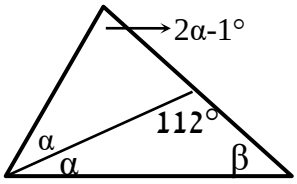
ד.



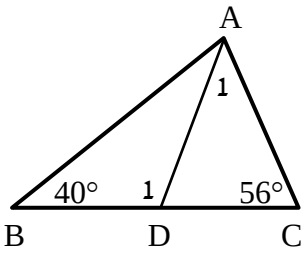
ה.



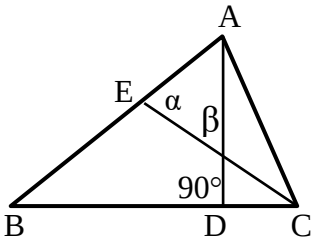
ו.



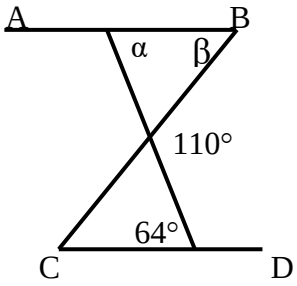
2) במשולש שלפניך נתון AD חוצה זווית A.
נתון: $\sphericalangle C = 56°$, $\sphericalangle B = 40°$.
חשב את הזוויות $\sphericalangle D_1$, $\sphericalangle A_1$.



3) נתון משולש ABC ובו AD גובה לצלע BC.
$\sphericalangle D = 90°$ הקטע CE חוצה זווית $\sphericalangle C$.
כמו כן: $\beta = 63°$, $\alpha = 75°$.
חשב את זוויות המשולש ABC.



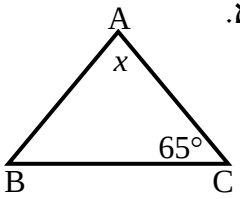
4) בסרטוט שלפניך נתון: $AB \parallel CD$.
מצא את הזוויות α ו- β.



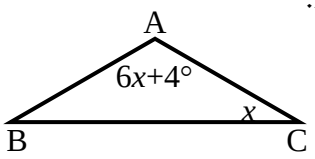
5) שלוש זוויות המשולש מתייחסות זו לזו כמו: 1:2:6.
חשב את זוויות המשולש.

6) בסרטוטים שלפניך נתונים משולשים שווי שוקיים $(AB=AC)$ שאחת מזוויותיהם נתונה. מצא את הגודל x בכל סרטוט.

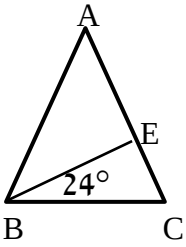
א.



ב.



7) הגובה לשוק המשולש שווה השוקיים ABC , $(AB=AC)$ יוצר זווית בת $24°$ עם הבסיס BC.
מצא את זוויות המשולש ABC.



8) חשב את זוויות המשולשים בכל אחד מהמקרים הבאים:

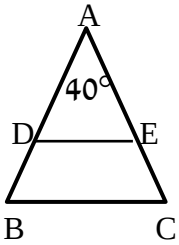
א. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה פי ארבעה מזווית הראש.
מצא את זוויות המשולש.

ב. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה ב-$12°$ מזווית הראש.
מצא את זוויות המשולש.

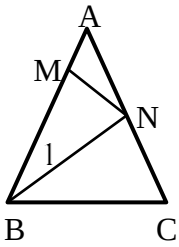
9) באיור שלפניך נתון: $AB=AC$, $AD=AE$, $\sphericalangle A=40°$.

א. חשב את הזוויות: $\sphericalangle E$, $\sphericalangle D$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle B$.

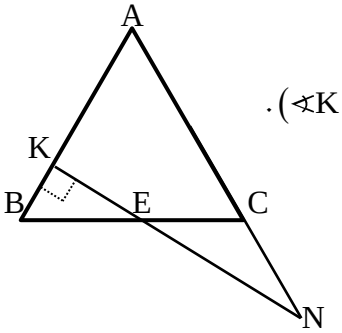
ב. הוכח: $DE \parallel BC$.



10) באיור שלפניך נתון: $AB=AC$.
מעבירים את הקטעים BN ו- MN כך שמתקיים:
$BM=BN=BC$.
נתון בנוסף: $\sphericalangle A=32°$.
חשב את זוויות: $\sphericalangle ANM$, $\sphericalangle B_1$.



11) משולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB=AC)$.
בנקודה K כלשהי על AB מעלים אנך ל-AB $(\sphericalangle K=90°)$.
אנך זה חותך את BC בנקודה E
ואת המשך AC בנקודה N.
מתקיים: $CE=CN$.
חשב את זוויות המשולש ABC.



תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 60°$ ב. $\alpha = 20°$ ג. $\alpha = 35°$ ד. $\alpha = 20°$
ה. $\alpha = 10°\ ,\ \beta = 58°$ ו. $\alpha = 37\frac{2}{3}°\ ,\ \beta = 30\frac{1}{3}°$.

2) $\sphericalangle A_1 = 42°\ ,\ \sphericalangle D_1 = 98°$

3) $\sphericalangle A = 78°\ ,\ \sphericalangle B = 48°\ ,\ \sphericalangle C = 54°$.

4) $\alpha = 64°\ ,\ \beta = 46°$.

5) $20°\ ,\ 40°\ ,\ 120°$.

6) א. $x = 50°$ ב. $x = 22°$.

7) $\sphericalangle A = 48°\ ,\ \sphericalangle B = \sphericalangle C = 66°$.

8) א. $20°\ ,\ 80°\ ,\ 80°$ ב. $52°\ ,\ 64°\ ,\ 64°$

9) א. $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = 70°$. ב. שאלת הוכחה

10) א. $\sphericalangle ANM = 37°\ ,\ \sphericalangle B_1 = 42°$.

11) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$.

משולש שווה שוקיים ושווה צלעות:

סיכום כללי:

משפטים במשולש שווה שוקיים:

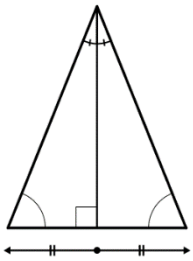
- במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
(משפט הפוך) משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים.
- במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים.
(משפט הפוך) משולש שבו חוצה זווית הוא גם גובה או חוצה זווית הוא גם תיכון או גובה הוא גם תיכון הוא משולש שווה שוקיים.

משפטים במשולש שווה צלעות:

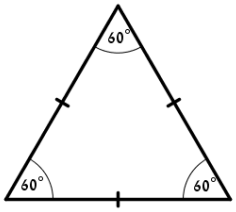
- במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות $60°$.
(משפט הפוך) משולש שבו כל הזוויות שוות הוא משולש שווה צלעות.

איורים:

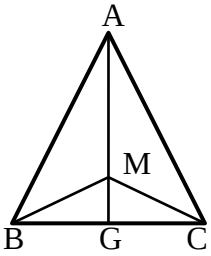
משפט במשולש שווה שוקיים



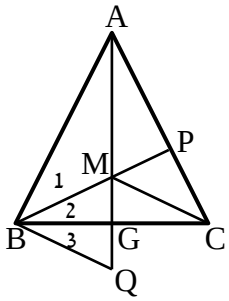
משפט במשולש שווה צלעות



שאלות:



12) המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים (AB=AC) .
AG חוצה את זווית A∢ .
M היא נקודה כלשהי על AG.
הוכח כי: BM = CM .



13) המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים (AB=AC) .
AG ו-BP חוצים את הזוויות A∢ ו-ABC∢ בהתאמה.
הנקודה Q נמצאת על המשך AG .
נתון: GM = GQ .
הוכח: $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_3$.

תשובות סופיות:

12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.

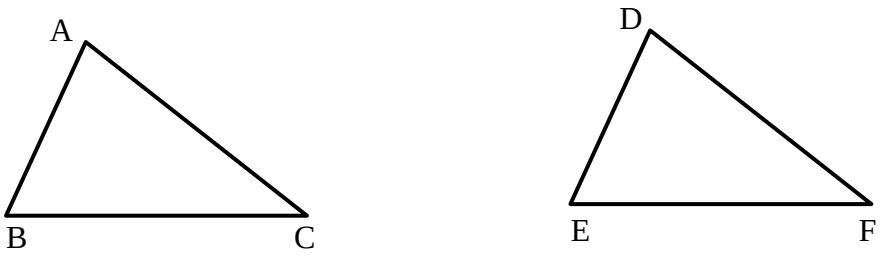
חפיפת משולשים:

סיכום כללי:

הגדרה:

משולשים חופפים הם משולשים ששווים זה לזה בכל צלעותיהם ובכל זוויותיהם בהתאמה.

סימון מתמטי: $\Delta ABC \cong \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} AB = DE \ , \ AC = DF \ , \ BC = EF \\ \sphericalangle A = \sphericalangle D \ , \ \sphericalangle B = \sphericalangle E \ , \ \sphericalangle C = \sphericalangle F \end{cases}$.



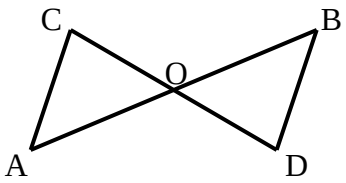
משפטי החפיפה:

- משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ):
אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (ז.צ.ז):
אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות והצלע שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ):
אם בין שני משולשים שוות שלוש צלעות בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז):
אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

שאלות:

שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-זווית-צלע:

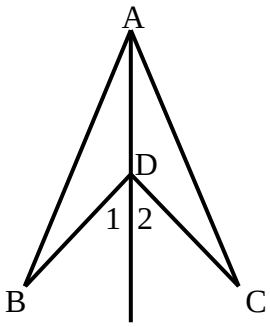
14) באיור שלפניך הקטעים AB ו- CD חוצים זה את זה בנקודה O.



הוכח: $\Delta ACO \cong \Delta BDO$.

15) באיור שלפניך נתון: $BD = CD$.

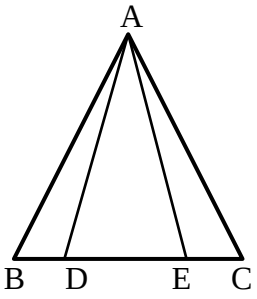
כמו כן: $\sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2$.



הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

16) בסרטוט שלפניך נתון:

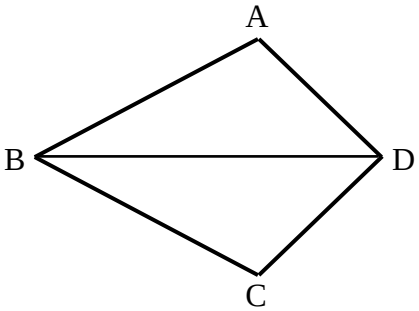
$BE = CD$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C$, $AB = AC$.



הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.

שאלות העוסקות במשפט חפיפה זווית-צלע-זווית:

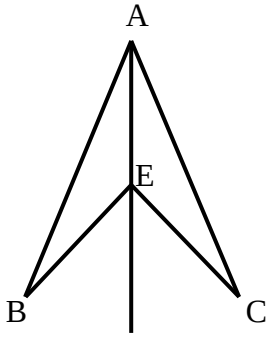
17) במרובע ABCD נתון כי BD חוצה את זוויות $\sphericalangle B$ ו- $\sphericalangle D$.



הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.

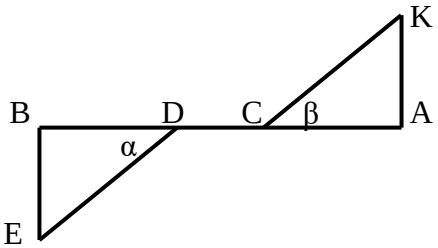
18) בסרטוט שלפניך נתון:

AE חוצה את הזוויות $\sphericalangle BAC$ ו- $\sphericalangle BEC$.



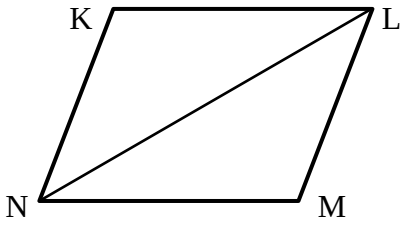
הוכח: $\Delta ABE \cong \Delta ACE$.

19) בציור שלפניך נתון:
$AC = BD \ , \ \alpha = \beta$
$AB \perp BE \ , \ AB \perp AK$.
הוכח: $\Delta AKC \cong \Delta BED$.



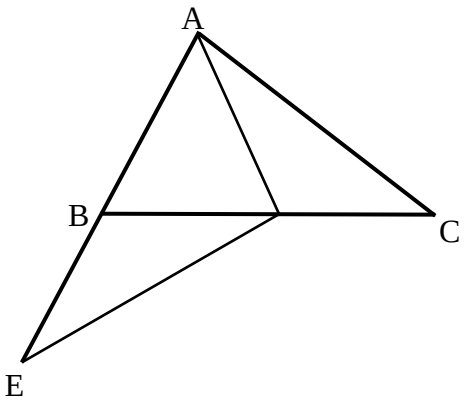
שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-צלע:

20) באיור שלפניך נתון:
$KL = MN \ , \ KN = LM$.
הוכח: $\Delta KLN \cong \Delta MLN$.



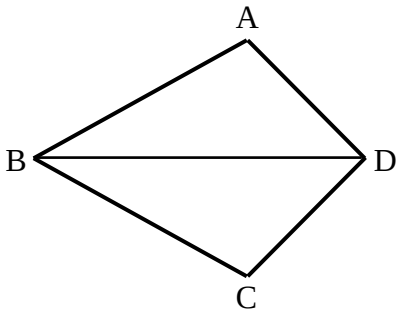
שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-זווית שמול הצלע הגדולה:

21) בציור שלפניך נתון:
$AC = DE \ , \ AB = BE = AD$
הוכח כי הנקודה D היא אמצע BC.

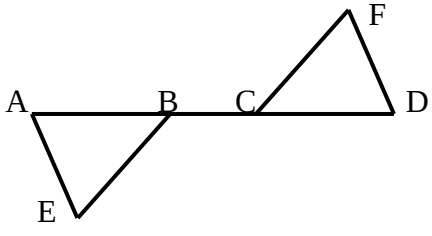


שאלות העוסקות בשלושת משפטי החפיפה יחדיו:

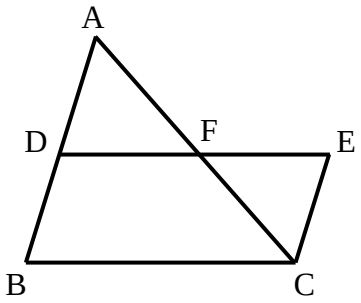
22) במרובע ABCD נתון:
$AB = BC \ , \ AD = CD$.
הוכח: $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.



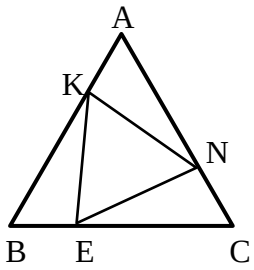
23) הקטע AD הוא קו ישר.
נתון: $AC = BD \ , \ AE = DF$.
כמו כן מתקיים: $\sphericalangle A = \sphericalangle D$.
הוכח כי הקטעים BE ו- FC שווים.



24) באיור שלפניך נתון:
הנקודה F היא אמצע הקטע AC.
מתקיים: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACE$.
הקטעים BD ו- CE שווים.
הוכח את הטענות הבאות:
א. F היא אמצע הקטע DE.
ב. D היא אמצע הקטע AB.

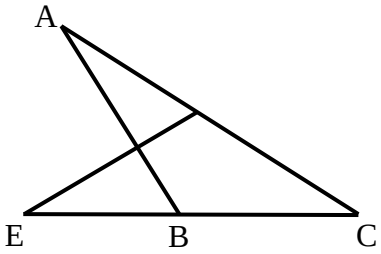


25) המשולש ABC הוא שווה צלעות.
נתון: $AK = BE = CN$.
הוכח כי ΔKEN הוא גם משולש שווה צלעות.

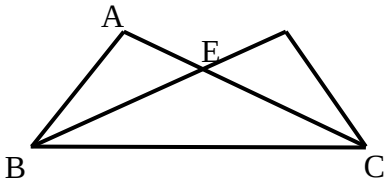


שאלות העוסקות במשולשים המכסים חלקית זה את זה:

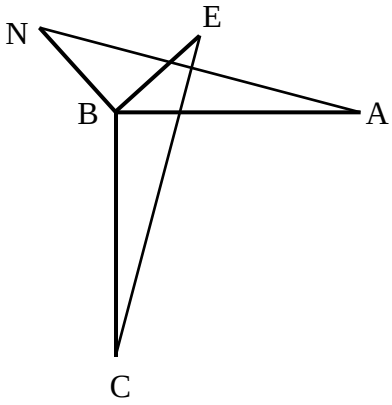
26) בציור שלפניך נתון: $AC = CE \ , \ DC = BC$.
הוכח:
א. $\Delta CDE \cong \Delta CBA$.
ב. $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABE$.



27) באיור שלפניך נתון:
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB$, $\sphericalangle DBC = \sphericalangle ACB$.
הוכח: $AB = CD$.

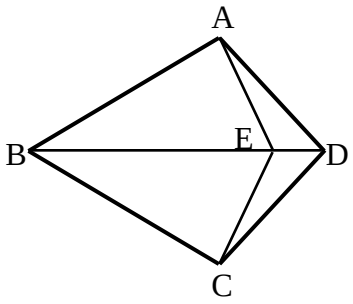


28) בציור שלפניך נתון:
$AB = BC \ , \ BE = BN$
$AB \perp BC \ , \ BE \perp BN$
הוכח: $AN = CE$.

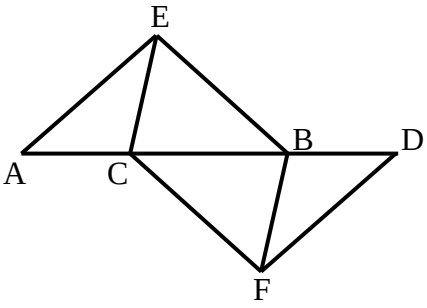


שאלות העוסקות בשתי חפיפות:

29) בסרטוט שלפניך נתון כי BD הוא קו ישר.
מתקיים: $AB = BC$, $AD = CD$.
הנקודה E נמצאת על BD.
הוכח כי: $AE = CE$.

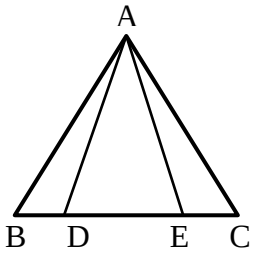


30) בציור שלפניך נתון כי AD הוא קו ישר. מתקיים: $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $\sphericalangle AEC = \sphericalangle DFB$
וכן $AE = DF$. הוכח:
א. $CE = BF$.
ב. $BE = CF$.

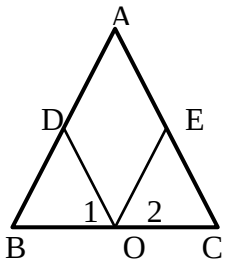


שאלות העוסקות בחפיפות עם משולש שווה שוקיים:

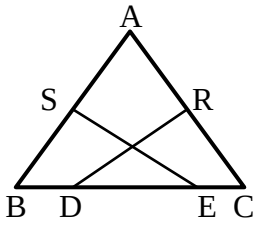
31) נתון משולש שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$.
מתקיים: $BD = CE$.
הוכח: $AD = AE$.

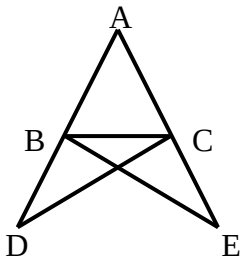


32) בסרטוט שלפניך נתון משולש
שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$.
הנקודה O היא אמצע BC.
מתקיים: $\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_2$.
הוכח: $AD = AE$.

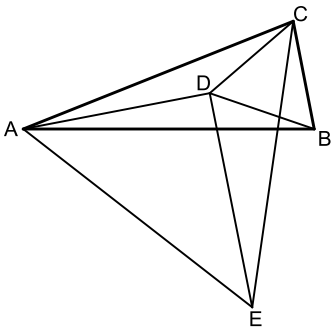


33) במשולש שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$
הנקודות S ו-R הן אמצעי השוקיים.
ידוע כי $BD = CE$.
הוכח כי: $SE = RD$.





34) נתון משולש ABC. הקטעים AD ו-AE ישרים ונתון בנוסף כי: $BD = CE$, $DC = BE$.
הוכח: $AB = AC$.



35) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$.
על השוק AC ועל הבסיס BC בונים משולשים שווי צלעות ACE ו-BCD.
מחברים את הנקודה D עם הקדקודים A ו-E.

א. הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

ב. ידוע גם כי: $DE \parallel BC$.
הוכח: $\sphericalangle ADE = 90°$.

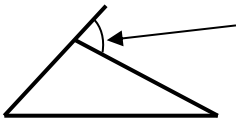
תשובות סופיות:

14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) שאלת הוכחה.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) שאלת הוכחה.
22) שאלת הוכחה.
23) שאלת הוכחה.
24) שאלת הוכחה.
25) שאלת הוכחה.
26) שאלת הוכחה.
27) שאלת הוכחה.
28) שאלת הוכחה.
29) שאלת הוכחה.
30) שאלת הוכחה.
31) שאלת הוכחה.
32) שאלת הוכחה.
33) שאלת הוכחה.
34) שאלת הוכחה.
35) שאלת הוכחה.

זווית חיצונית במשולש:

סיכום כללי:

הגדרה:



זווית חיצונית למשולש היא זווית הכלואה בין צלע במשולש להמשך צלע הסמוכה לה.

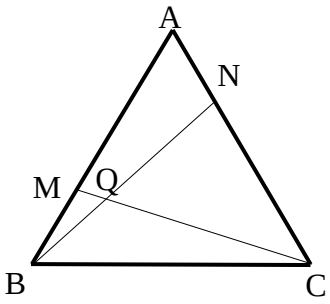
משפט:

זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

שאלות:

36) הוכח את המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

37) המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה צלעות.



נתון: $AN = BM$.

הוכח: $\sphericalangle NQC = 60°$.

תשובות סופיות:

36) שאלת הוכחה.

37) שאלת הוכחה.

משולש ישר זווית:

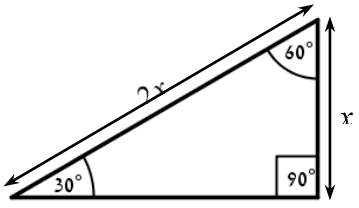
סיכום כללי:

משפטים במשולש ישר זווית:

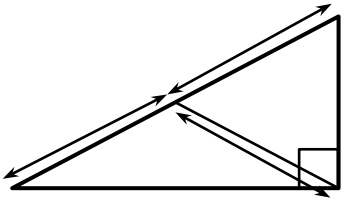
- סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא $90°$.
- במשולש שזוויותיו $90°$, $60°$, $30°$, הניצב שמול הזווית של ה-$30°$ שווה למחצית היתר.
(משפט הפוך ל-2) אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה היא בת $30°$.
- במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
(משפט הפוך ל-4) אם במשולש תיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש ישר זווית (כאשר הזווית ממנה יוצא התיכון היא הזווית הישרה).
- משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.
כלומר: $(\text{יתר})^2 = (\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2$.
- (משפט הפוך למשפט פיתגורס) אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית, אז המשולש ישר זווית.

איורים:

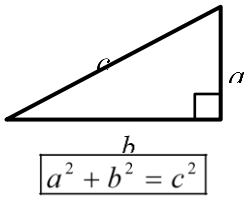
משולש $90°,60°,30°$



תיכון ליתר



משפט פיתגורס



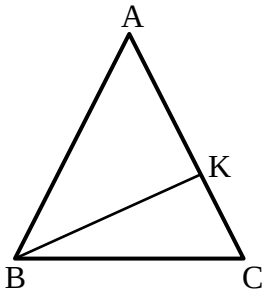
שאלות:

38) באיור שלפניך נתון משולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$.

זווית הבסיס: $\sphericalangle C=75°$

וכן: 16 ס"מ =AC. מעבירים גובה BK לשוק AC.

מצא את אורך הגובה BK.

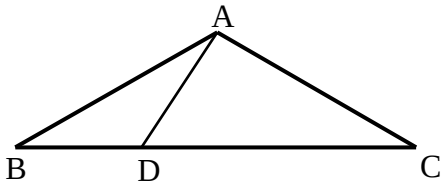


39) המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$.

נתון: $\sphericalangle DAC=90°$, $\sphericalangle ABD=30°$,

18 ס"מ = BC.

חשב את אורכו של הקטע BD.



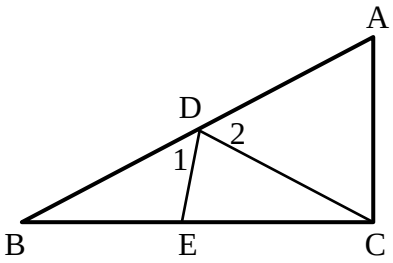
40) המשולש ΔABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle C=90°)$.

מעבירים תיכון CD ליתר AB במשולש.

הנקודה E נמצאת על BC כך ש- $CD=CE$.

ידוע כי: $\sphericalangle CED=80°$.

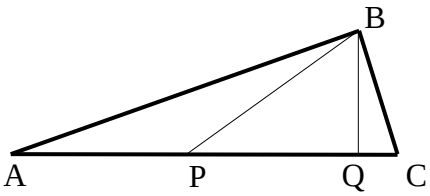
מצא את הזוויות: $\sphericalangle D_2$, $\sphericalangle D_1$



41) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC=90°)$. BQ הוא הגובה ליתר AC ו-BP הוא התיכון ליתר AC.

נתון: $BQ=\frac{1}{2}BP$.

חשב את גודלה של הזווית C.

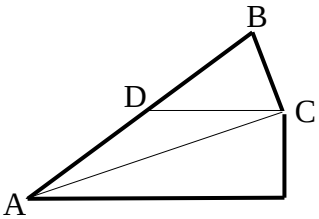


42) המשולש BCD שבציור הוא משולש שווה שוקיים $(BD=DC)$.

AC חוצה את הזווית $\sphericalangle BAE$.

נתון: $DC \parallel AE$.

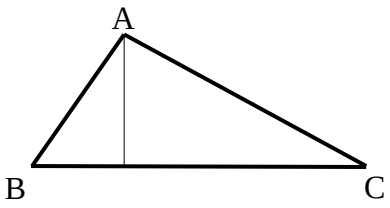
חשב את גודלה של הזווית $\sphericalangle ACB$.



43) AD הוא גובה במשולש ABC.
נתון: AB = 15 ס"מ , AC = 20 ס"מ,
BC = 25 ס"מ .

א. מצא את אורכו של AD
ואת שטח המשולש ABC .

ב. האם המשולש ABC ישר זווית? נמק.



תשובות סופיות:

38) 8 ס"מ.
39) 6 ס"מ.
40) $\sphericalangle D_1 = 60°$, $\sphericalangle D_2 = 40°$
41) $75°$
42) $90°$
43) א. AD = 12 ס"מ , S_{ABC} = 150 סמ"ר .
ב. כן.

קטע אמצעים במשולש:

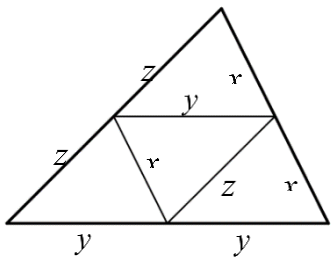
סיכום כללי:

הגדרה:

קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.

- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- (משפט הפוך 1): קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית חוצה את הצלע השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).
- (משפט הפוך 2): קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

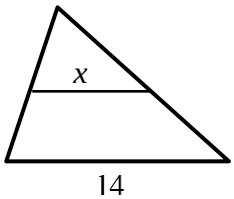
איור – קטע אמצעים במשולש:



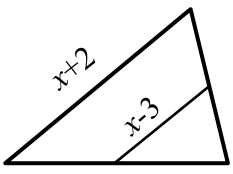
שאלות:

44) לפניך משולשים עם קטע אמצעים בתוכם.
מצא את x בכל אחד מהמקרים:

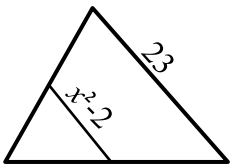
א.



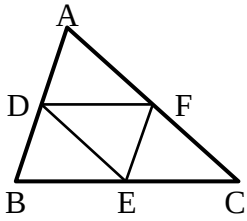
ב.



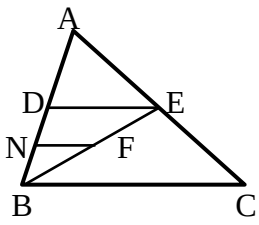
ג.



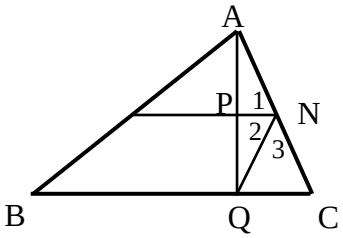
45) הנקודות D, E ו-F הם נקודות האמצע במשולש ΔABC.
נתון: DE= 9 ס"מ, EF= 12 ס"מ, DF = 10 ס"מ.
חשב את היקף המשולש ΔABC.



46) הקטע DE הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC.
הקטע FN הוא קטע אמצעים במשולש ΔBDE.
נתון: 3 ס"מ = NF. מצא את אורך הצלע BC.



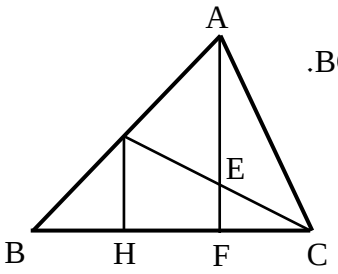
47) הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC
AQ הוא גובה לצלע BC.
הוכח: $\sphericalangle N_1 = \sphericalangle N_2$.



48) AF הוא גובה לצלע BC ו- GC הוא תיכון לצלע AB במשולש ΔABC. הקטע GH מאונך לצלע BC.

א. הוכח: HF =BH.

ב. נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס"מ.
חשב את אורך הקטע EF.



תשובות סופיות:

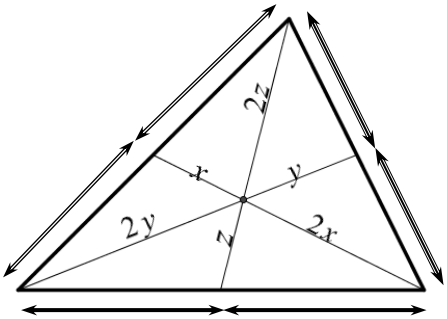
44) א. $x=7$ ב. $x=8$ ג. $x=\sqrt{13.5}$.
45) 62 ס"מ.
46) 12 ס"מ.
47) שאלת הוכחה.
48) א. שאלת הוכחה. ב. 3 ס"מ.

מפגש תיכונים במשולש:

סיכום כללי:

- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון ביחס של 1:2 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.
- אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של 1:2 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.
- נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.

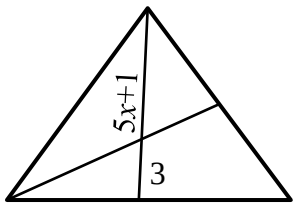
איור – מפגש תיכונים במשולש:



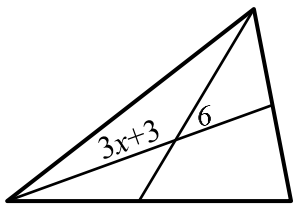
שאלות:

49) הקטעים שבמשולשים הם תיכונים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:

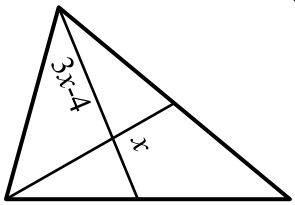
א.



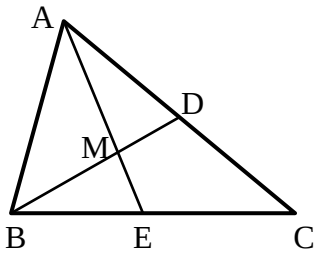
ב.



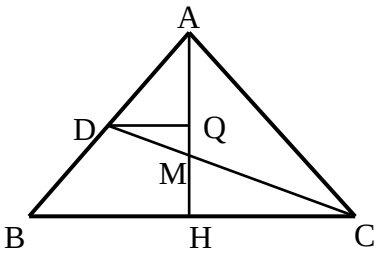
ג.



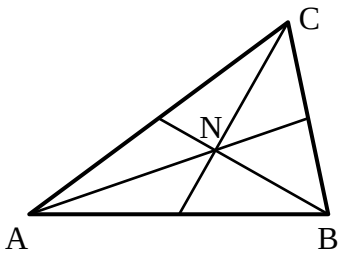
50) הקטעים AE ו-BD הם תיכונים במשולש ΔABC אשר נחתכים בנקודה M.
נתון: $AD = AM$ וכן: 30 ס"מ = AC.
חשב את AE.



51) המשולש ΔABC שבציור הוא משו"ש ($AB=AC$) שבו AH הוא הגובה לבסיס BC.
CD, התיכון לשוק AB,
יוצר זווית של $30°$ עם הבסיס BC.
נתון: $BC=12\sqrt{3}$ס"מ, $DQ \parallel BC$.
חשב את אורך הקטע MQ.



52) במשולש ΔABC נחתכים התיכונים בנקודה N.
נתון: $\sphericalangle CNB=90°$.
הוכח: $BC=AN$.



תשובות סופיות:

49) א. $x=1$ ב. $x=3$ ג. $x=4$
50) 22.5 ס"מ.
51) 3 ס"מ.
52) שאלת הוכחה.

מתמטיקה כללית

פרק 11 - גיאומטריה אוקלידית - מרובעים

תוכן העניינים

1. מרובע כללי 175
2. המקבילית 177
3. המלבן 182
4. המעוין 185
5. הריבוע 188
6. הטרפז 190
7. הדלתון 196
8. סיכום משפחת המרובעים 198

מרובע כללי:

סיכום כללי:

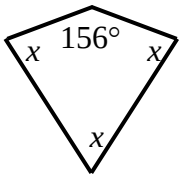
הגדרה: מרובע הוא מצולע בעל 4 צלעות.

משפט: סכום זוויות במרובע הוא $360°$.

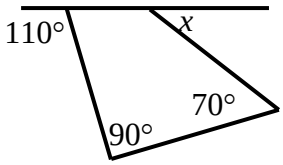
שאלות:

1) בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים.
חלק מהזוויות מסומנות ב-x.
מצא את x ואת הזוויות של כל מרובע.

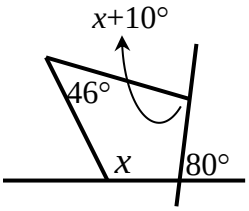
א.



ב.

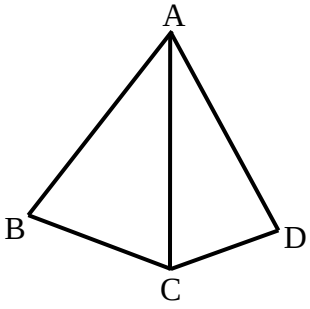


ג.

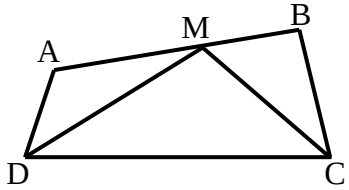


2) מצא את זוויות המרובע בכל אחד מהמקרים הבאים:
כל זווית במרובע (פרט לראשונה) גדולה ב-$10°$ מהזווית הקודמת לה.
זוויות המרובע מתייחסות זו לזו כמו: $1:2:3:4$.

3) המשולשים ABC ו-ACD שבציור הם משולשים שווי שוקיים ($AB=AC=AD$).
נתון: $\sphericalangle BAD=80°$.
חשב את גודלה של הזווית BCD.



4) בסרטוט שלפניך נתון מרובע ABCD.
CM חוצה את זווית C ו-DM חוצה את זווית D.
ידוע כי: $CM=DM$, $\sphericalangle A=130°$, $\sphericalangle DMC=110°$.
מצא את שאר זוויות המרובע ABCD.



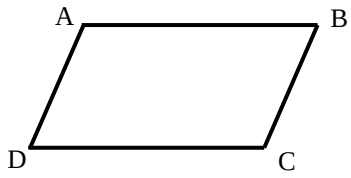
תשובות סופיות:

1) א. $x=68°$. ב. $x=50°$. ג. $x=102°$
2) א. $75°\ ,\ 85°\ ,\ 95°\ ,\ 105°$ ב. $36°\ ,\ 72°\ ,\ 108°\ ,\ 144°$
3) $140°$.
4) $\sphericalangle B=90°\ ,\ \sphericalangle C=\sphericalangle D=70°$

המקבילית:

סיכום כללי:

הגדרה: מקבילית היא מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.



- במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
- במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות.
- במקבילית סכום כל שתי זוויות סמוכות הוא $180°$.
- במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
- היקף מקבילית = סכום הצלעות, שטח מקבילית = צלע · גובה לצלע.

כדי להוכיח כי מרובע הוא מקבילית נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית.
- מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.
- מרובע שבו זוג צלעות שוות ומקבילות הוא מקבילית.
- מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
- מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

שאלות:

5) נתונה מקבילית ABCD.
בכל אחד מהסעיפים הבאים הזוויות מיוצגות ע"י תבניות מספר שונות.
מצא את זוויות המקבילית בכל מקרה.

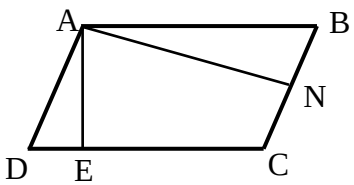


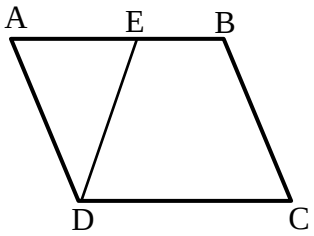
א. $\sphericalangle A = x$, $\sphericalangle B = x - 70°$.

ב. $\sphericalangle B = 3x - 130°$, $\sphericalangle D = x + 10°$.

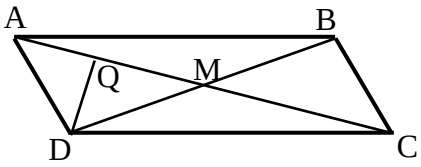
ג. $\sphericalangle A = x + 20°$, $\sphericalangle C = 100° - x$.

6) המרובע ABCD הוא מקבילית
ובו: $AE \perp CD$, $AN \perp BC$.
הוכח כי: $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAN$.

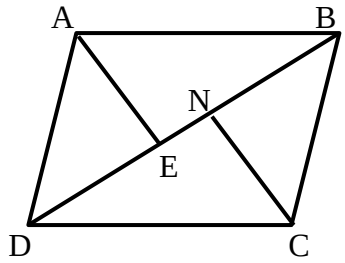




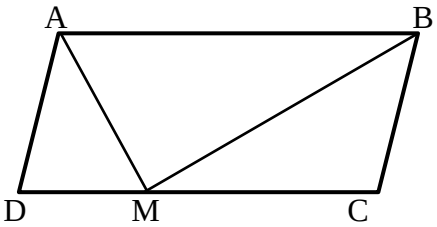
7) במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AB כך שמתקיים: $DE = BC$.
הוכח כי: $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EDC$.



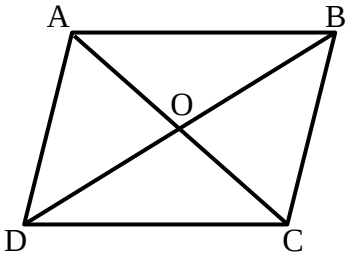
8) נתונה מקבילית ABCD שאלכסוניה נפגשים בנקודה M.
נתון: $AC = 20$ ס"מ, $BC = \frac{1}{2}BD$ ו- $DQ \perp AC$.
חשב את אורך הקטע AQ.



9) הוכח כי במקבילית הקדקודים הנגדיים נמצאים במרחקים שווים מאלכסון המקבילית שאינו עובר דרכם, כלומר הוכח: $AE = CN$.

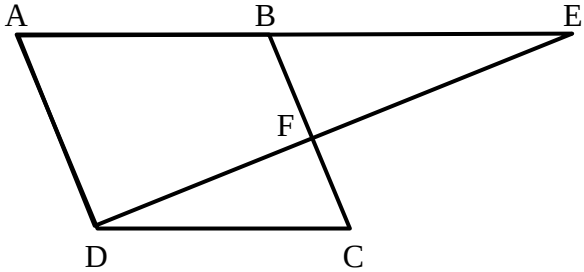


10) במקבילית ABCD הקטעים AM ו-BM הם חוצי הזוויות של A ו-B בהתאמה אשר נפגשים בנקודה M שעל הצלע DC.
א. הוכח כי: $AB = 2BC$.
ב. הוכח כי המשולש AMB הוא ישר זווית.



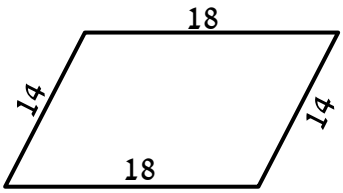
11) המרובע ABCD הוא מקבילית.
O – פגישת האלכסונים.
נתון: $DO = 3x - 10$, $BO = x + 8$, $AO = x + 1$.
מצא את אורכי האלכסונים AC ו-BD.

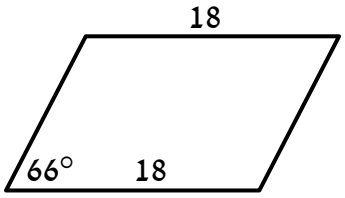
12) נתונה מקבילית ABCD ובה: $\sphericalangle ADC = 120°$, $\sphericalangle BEF = \frac{1}{2}\sphericalangle EAD$.
הוכח כי: $BC \perp ED$.

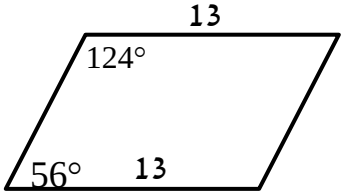


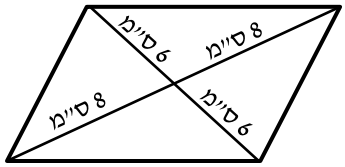
13) בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים.
קבע אלו מהם הם מקביליות וציין מדוע.

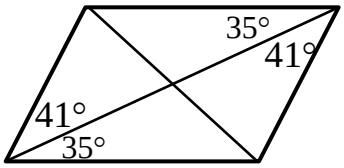
א.


ב.


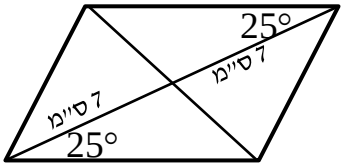
ג.


ד.


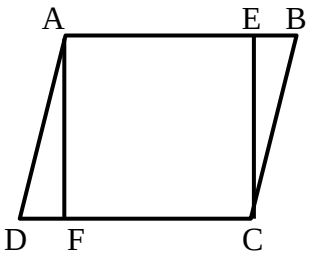
ה.


ו.


ז.


ח.


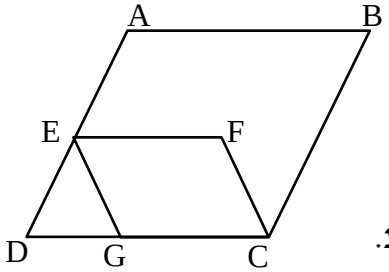
14) במקבילית ABCD הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AB ו-CD בהתאמה.
נתון: $\sphericalangle DAF = \sphericalangle BCE$.
הוכח כי המרובע AECF הוא מקבילית.



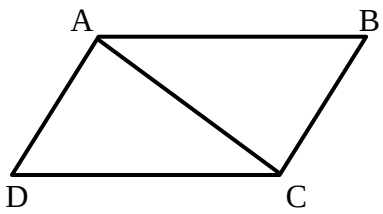
15) במקבילית ABCD הנקודות E ו-G נמצאות על הצלעות AD ו-DC בהתאמה כך שהמשולש DEG הוא שווה צלעות. הנקודה F נמצאת בתוך המקבילית כך שהקטע EF מקביל לצלע AB.

א. הוכח: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle EGC$.

ב. נתון: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle GCF$. הוכח כי EFCG מקבילית.



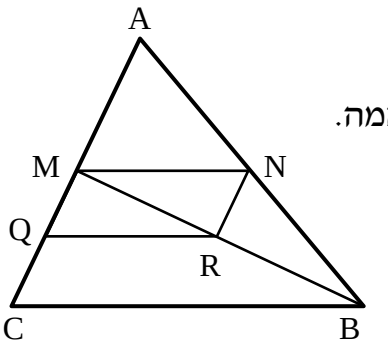
16) במרובע ABCD נתון כי הצלעות AB ו-DC שוות.
כמו כן: $BC \perp AC$, $AD \perp AC$.
הוכח כי המרובע ABCD הוא מקבילית.



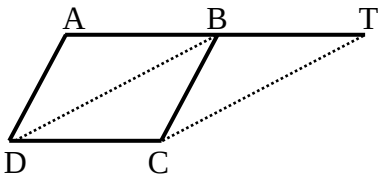
17) נתון משולש ABC ובו הקטע MN הוא קטע אמצעים.
הנקודות Q ו-R הן אמצעי הקטעים MC ו-BM בהתאמה.

א. הוכח כי המרובע MNRQ הוא מקבילית.

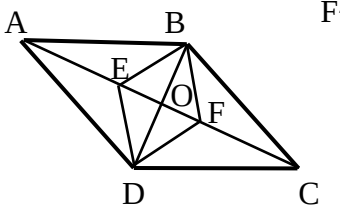
ב. ידוע כי הקטע AN שווה לקטע QR.
איזה סוג משולש הוא AMB? נמק.



18) את הצלע AB במקבילית ABCD האריכו כאורכה עד לנקודה T.
הוכח: BTCD מקבילית.
הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.



19) הנקודה O היא מפגש אלכסוני המקבילית ABCD. E ו-F הן נקודות על האלכסון AC.
נתון: $AE = FC$.
הוכח כי EBFD הוא מקבילית.



תשובות סופיות:

5) א. $125°, 55°$ ב. $100°, 80°$ ג. $120°, 60°$.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) 5 ס"מ.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) 20 ס"מ = AC, 34 ס"מ = BD.

12) שאלת הוכחה.

13) מקבילות: א', ב', ד', ה', ו', ח' אינן מקבילות: ג', ז'.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

המלבן:

סיכום כללי:

הגדרה: מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות.

(מסקנה: מלבן הוא סוג של מקבילית).

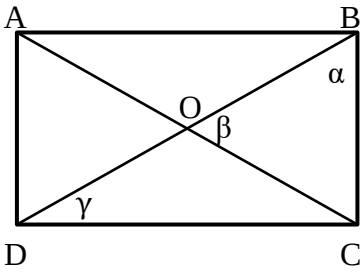
תכונות המלבן (בנוסף לתכונות המקבילית):

- ארבע זוויות המלבן שוות והן זוויות ישרות.
- האלכסונים במלבן שווים זה לזה
- היקף מלבן סכום הצלעות, שטח מלבן צלע גובה לצלע.

כדי להוכיח כי מרובע הוא מלבן נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מרובע שבו שלוש זוויות ישרות הוא מלבן.
- מקבילית שבה זווית ישרה היא מלבן.
- מקבילית שבה האלכסונים שווים היא מלבן.

שאלות:

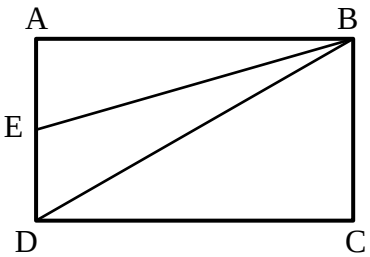


20) המרובע ABCD הוא מלבן.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
חשב את הזוויות α , β ו- γ במקרים הבאים:

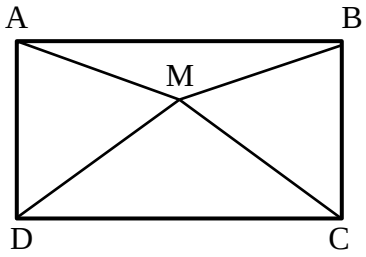
א. β קטנה ב- $15°$ מ- α.

ב. $\alpha = 2\gamma$.

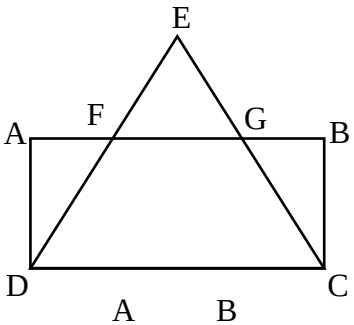
ג. $\gamma = 28°$.



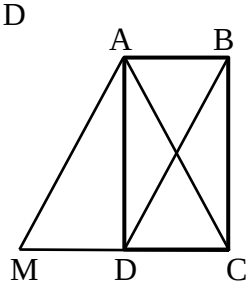
21) במלבן ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD.
נתון: $\sphericalangle AEB = 70°$, $BD = 2BC$.
חשב את גודלה של הזווית EBD.



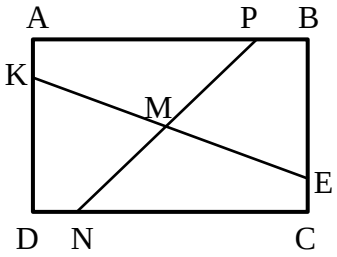
22) נתון מלבן ABCD שבו $DM = MC$.
הוכח: $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA$.



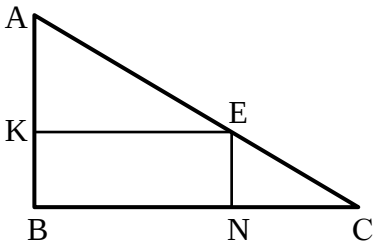
23) המרובע ABCD הוא מלבן.
המשכי הקטעים DF ו-CG נפגשים בנקודה E.
נתון: $EF = EG$.
הוכח: $FD = GC$.



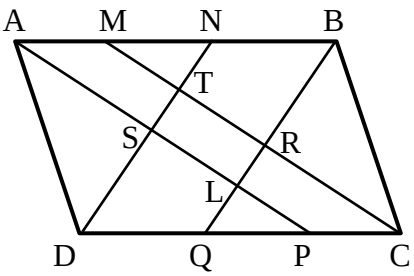
24) המרובע ABCD הוא מלבן.
המרובע ABDM הוא מקבילית.
הוכח כי המשולש ACM הוא שווה שוקיים.



25) מרובע ABCD הוא מלבן.
נתון: $AK = CE$, $AP = CN$.
הוכח: $KM = EM$, $PM = NM$.

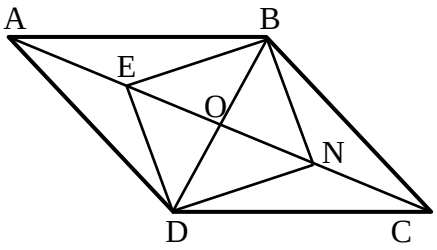


26) ΔABC הוא משולש ישר זווית $\left(\sphericalangle B = 90°\right)$.
המרובע KENB חסום במשולש זה.
נתון כי: $\sphericalangle NEC = \sphericalangle A$, $\sphericalangle AEK = \sphericalangle C$.
הוכח כי המרובע KENB הוא מלבן.

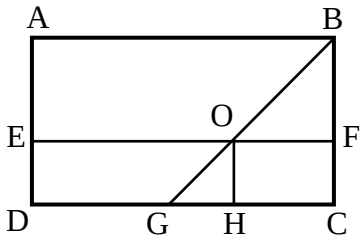


27) נתונה מקבילית ABCD
ובה AP, BQ, CM ו-DN
הם חוצי הזוויות $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ ו- $\sphericalangle D$
בהתאמה.
הוכח: TRLS מלבן.

28) מרובע ABCD הוא מקבילית.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD
אשר נחתכים בנקודה O.
נתון: $2BD = AC$.
E – אמצע AO. N – אמצע CO.
הוכח כי המרובע BNDE הוא מלבן.



29) במלבן ABCD נתון:
$\sphericalangle ABO = \sphericalangle BOF$, $OH \perp DC$.
הוכח: EOHD הוא מלבן.



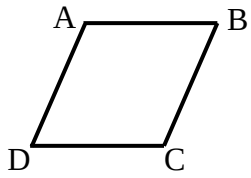
תשובות סופיות:

20) א. $\alpha = 55° , \beta = 70° , \gamma = 35°$ ב. $\alpha = \beta = 60° , \gamma = 30°$
ג. $\alpha = 62° , \beta = 56°$

21) $10°$.
22) שאלת הוכחה.
23) שאלת הוכחה.
24) שאלת הוכחה.
25) שאלת הוכחה.
26) שאלת הוכחה.
27) שאלת הוכחה.
28) שאלת הוכחה.
29) שאלת הוכחה.

המעוין:

סיכום כללי:



הגדרה: מעוין הוא מרובע שכל צלעותיו שוות.

(מסקנה: מעוין הוא סוג של מקבילית).

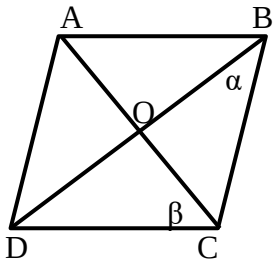
תכונות המעוין (בנוסף לתכונות המקבילית):

- במעוין כל הצלעות שוות.
- במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
- במעוין האלכסונים הם חוצי זוויות.
- היקף מעוין = צלע· 4, שטח מעוין = צלע· גובה לצלע = 2/(אלכסון· אלכסון).

כדי להוכיח כי מרובע הוא מעוין נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מרובע שבו כל הצלעות שוות הוא מעוין.
- מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.
- מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.
- מקבילית שבה אלכסון חוצה זווית היא מעוין (מספיק אחד).

שאלות:



30) המרובע ABCD הוא מעוין.

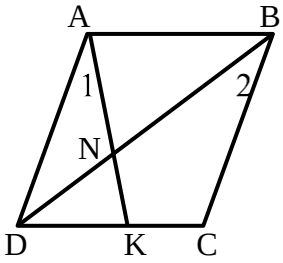
חשב בכל אחד מהמקרים הבאים את α ו- β.

א. $\sphericalangle A = 138°$.

ב. $\beta = 3.5\alpha$.

ג. $\beta = \alpha + 20°$.

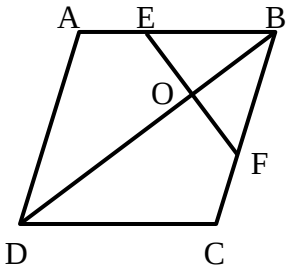
ד. $\sphericalangle B = \beta$.



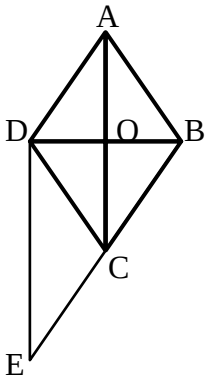
31) המרובע ABCD הוא מעוין.
מעבירים את האלכסון BD ואת הקטע AK
אשר נחתכים בנקודה N.
ידוע כי: $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle B_2$.

א. הוכח כי המשולש ADN הוא שווה שוקיים.

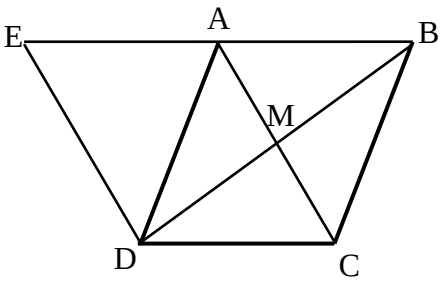
ב. הוכח כי: $\sphericalangle AND = \sphericalangle C$.



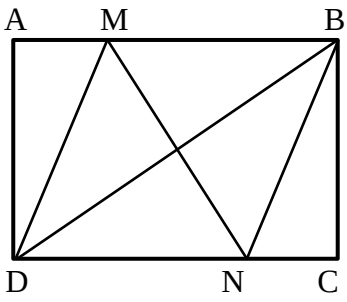
32) מעוין ABCD הנקודות E ו-F
נמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה.
נתון: $EF \perp BD$, $\sphericalangle DCB = 120°$.
הוכח כי משולש EBF הוא שווה צלעות.



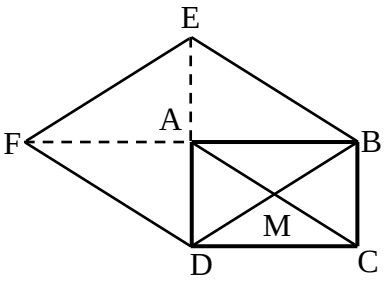
33) נתון מעוין ABCD.
הנקודה E נמצאת על המשך הצלע BC.
נתון: $\sphericalangle CDE = \sphericalangle BCA$.
הוכח כי המשולש BDE הוא ישר זווית.



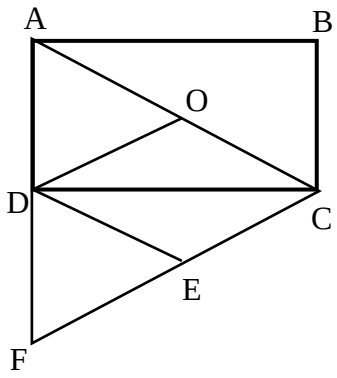
34) נתון מעוין ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M.
האריכו את הצלע AB עד לנקודה E
כך שמתקיים: $DE \perp BD$.
הוכח: $AD = AE$.



35) במלבן ABCD מעבירים את האלכסון BD.
הנקודות M ו-N נמצאות על הצלעות AB
ו-DC בהתאמה.
נתון: $AM = CN$ ו- $DM = DN$.
הוכח כי הקטע MN חוצה את
הזוויות BMD ו-BND.



36) נתון מלבן ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M.
האריכו את הצלע AB כאורכה עד
לנקודה F ואת הצלע AD כאורכה עד
לנקודה E כמתואר בשרטוט.
הוכח: המרובע EBDF הוא מעוין.



37) ABCD הוא מלבן שאלכסוניו נחתכים בנקודה O.
הנקודה F נמצאת על המשך הצלע AD
כך שמתקיים: $AD = DF$.
נתון: $FE = CE$.
הוכח כי DOCE הוא מעוין.

תשובות סופיות:

30) א. $\alpha = 21^\circ , \beta = 69^\circ$ ב. $\alpha = 20^\circ , \beta = 70^\circ$
ג. $\alpha = 35^\circ , \beta = 55^\circ$ ד. $\alpha = 30^\circ , \beta = 60^\circ$.

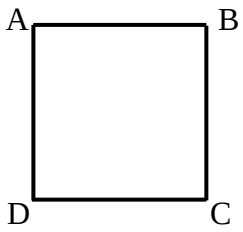
31) שאלת הוכחה.
32) שאלת הוכחה.
33) שאלת הוכחה.
34) שאלת הוכחה.
35) שאלת הוכחה.
36) שאלת הוכחה.
37) שאלת הוכחה.

הריבוע:

סיכום כללי:

הגדרה: ריבוע הוא מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות.

(מסקנה: ריבוע הוא סוג של מקבילית, סוג של מלבן וסוג של מעוין).
מכאן, שבנוסף לתכונות שבהגדרת הריבוע מתקיים
כי אלכסוני הריבוע חוצים זה את זה, שווים זה לזה,
מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע.
היקף ריבוע = צלע · 4, שטח ריבוע = (צלע)^2 = (אלכסון)^2/2

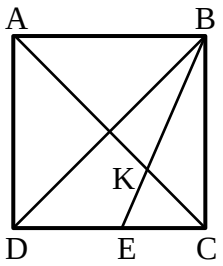


כדי להוכיח כי מרובע הוא ריבוע נשתמש באחת הדרכים הבאות:

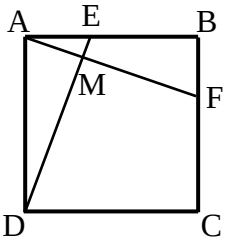
- מלבן שבו האלכסונים מאונכים הוא ריבוע.
- מלבן שבו אלכסון חוצה זווית הוא ריבוע.
- מלבן שבו שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.
- מעוין שבו האלכסונים שווים הוא ריבוע.
- מעוין שבו זווית ישרה הוא ריבוע.

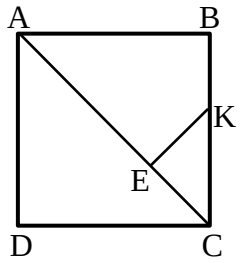
שאלות:

38) המרובע ABCD הוא ריבוע.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
BE חוצה זווית DBC וחותך את AC בנקודה K.
הוכח: $CE = CK$.

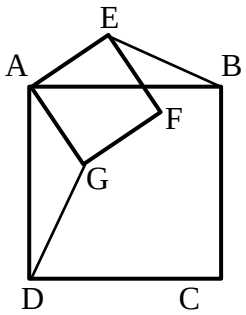


39) בריבוע ABCD מעבירים את הקטעים AF ו-DE.
נתון כי $AE = BF$.
הוכח: $DE \perp AF$.

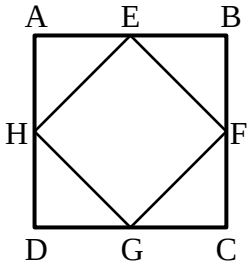




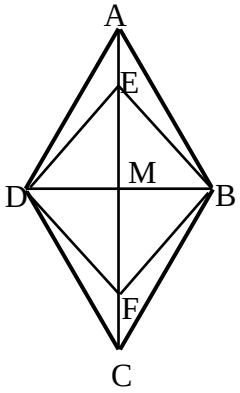
40) המרובע ABCD הוא ריבוע.
מעבירים את האלכסון AC.
מהנקודה E שעל האלכסון מעבירים
את הקטע KE אשר מאונך לאלכסון.
נתון: $AE = AB$.
הוכח כי: $CE = KE = BK$.



41) המרובעים ABCD ו-AEFG הם ריבועים.
הוכח: $BE = DG$.



42) הנקודות E, F, G, H הן אמצעי צלעות הריבוע ABCD.
הוכח כי EFGH הוא ריבוע.



43) נתון מעוין ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M.
נתון: $AE = FC$, $MB = \frac{1}{2}AB$, $\sphericalangle EBA = 15°$.
הוכח: המרובע EBFD הוא ריבוע.

תשובות סופיות:

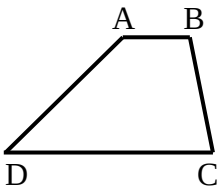
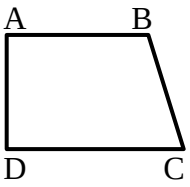
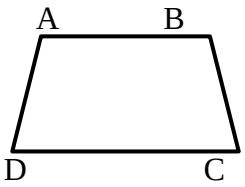
38) שאלת הוכחה.
39) שאלת הוכחה.
40) שאלת הוכחה.
41) שאלת הוכחה.
42) שאלת הוכחה.
43) שאלת הוכחה.

הטרפז:

סיכום כללי:

הגדרה: טרפז הוא מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות.

היקף טרפז = סכום הצלעות, שטח טרפז = 1/2(גובה · סכום הבסיסים).

סוג הטרפז	טרפז כללי	טרפז ישר זווית	טרפז שווה שוקיים
איור מתאים			

משפטים הנוגעים לטרפז שווה שוקיים:

- בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
- (משפט הפוך) טרפז שבו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.
- בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
- (משפט הפוך) טרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

קטע אמצעים בטרפז:

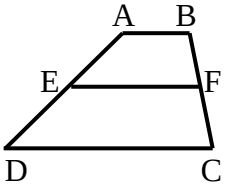
הגדרה: קטע אמצעים בטרפז הוא קטע המחבר את אמצעי השוקיים בטרפז.

- קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.

(משפט הפוך) קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז

- ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה

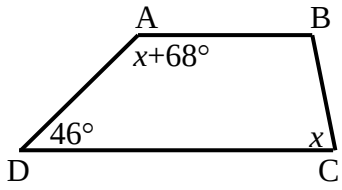
(כלומר הוא קטע אמצעים בטרפז).



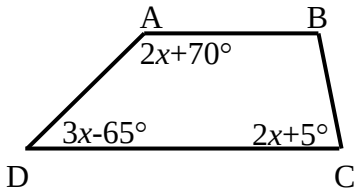
שאלות:

44) בסרטוטים שלפניך נתונים טרפזים כלליים $(AB\|CD)$.
מצא את x ואת זוויות הטרפז בכל מקרה.

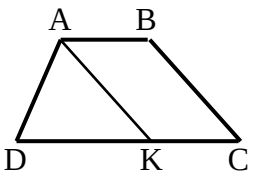
א.



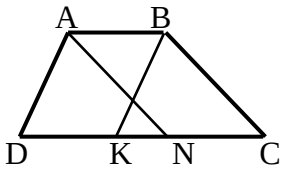
ב.



45) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB\|CD)$.
מעבירים את הקטע AK.
נתון: $AK=DK$, $AK\|BC$,
6 ס"מ = AB, 14 ס"מ = DC.
חשב את אורך השוק BC.



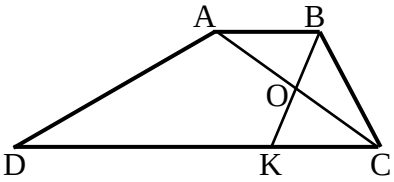
46) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB\|CD)$.
נתון כי: $AN\|BC$, $AD\|BK$.
הוכח כי: $DK=CN$.



47) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB\|CD)$.
מעבירים את האלכסון AC ואת
הקטע BK אשר חוצים זה את זה בנקודה O.
ידוע כי: $\sphericalangle D=30°$, $\sphericalangle C=60°$.

א. חשב את אורך DC, הבסיס הגדול,
אם ידוע כי: 7 ס"מ = AB, 9 ס"מ = BC.

ב. הוכח כי אם $AB=BC$ אז: $DC=3AB$.

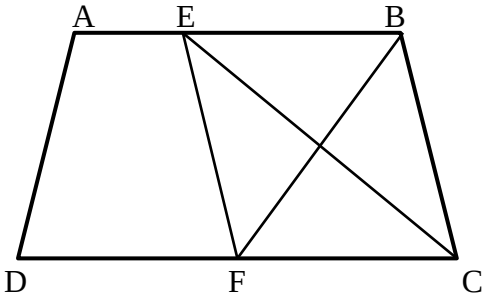


48) נתון טרפז ABCD, $(AB\|CD)$ ובו
הקטעים CE ו-BF חוצים את זוויות
הקדקודים C ו- B בהתאמה. הוכח:

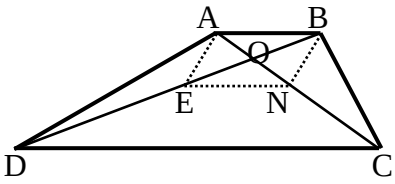
א. $BF\perp CE$.

ב. המשולש EBC הוא שווה שוקיים.

ג. המרובע EBCF הוא מעוין.



49) מרובע ABCD הוא טרפז $(AB\|CD)$.

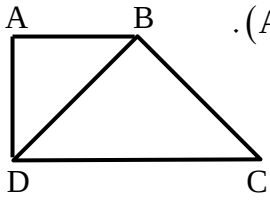


O - היא נקודת פגישת האלכסונים.

נתון: $AO = NO$, $BO = EO$.

הוכח כי המרובע ENCD הוא טרפז.

50) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB\|CD\ ,\ \sphericalangle D = 90°)$.

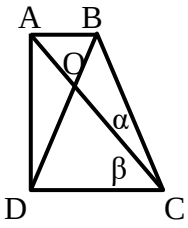


האלכסון BD חוצה את זווית D

ונתון בנוסף כי: $BD = BC$ וכי: 15 ס"מ = AD.

חשב את אורכי בסיסי הטרפז.

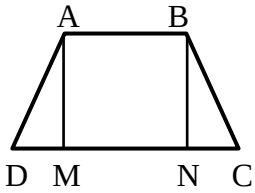
51) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB\|CD\ ,\ AD \perp DC)$.



נתון כי: $BD = BC$, $\beta = 2\alpha$ ו- $\sphericalangle DOC = 80°$.

חשב את זוויות הטרפז.

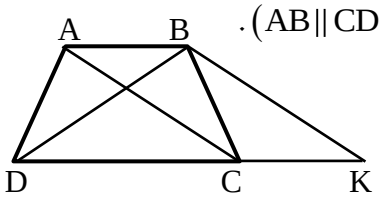
52) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB\|CD\ ,\ AD = BC)$.



נתון כי: $BN \perp DC$, $AM \perp DC$.

הוכח כי: $DM = CN$.

53) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB\|CD\ ,\ AD = BC)$.

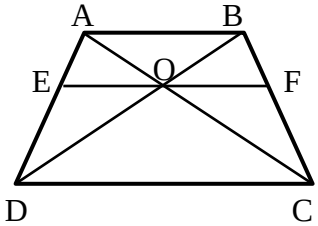


דרך הנקודה B מעבירים מקביל ל-AC הפוגש

את המשך הבסיס DC בנקודה K.

הוכח כי משולש BDK הוא שווה שוקיים.

54) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB\|CD\ ,\ AD = BC)$.



O היא פגישת האלכסונים.

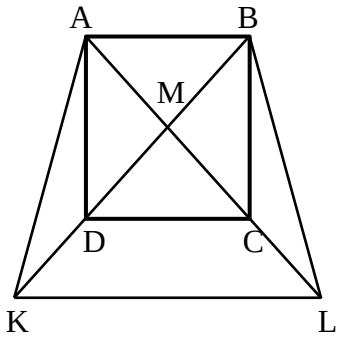
נתון כי: $EF\|DC$ כאשר EF עובר דרך O.

הוכח:

א. $\sphericalangle BOF = \sphericalangle COF$.

ב. $EO = FO$.

55) נתון ריבוע ABCD.



הנקודה M היא מפגש האלכסונים AC ו-BD.
ממשיכים את האלכסונים ויוצרים את הטרפז השווה שוקיים ABLK.
ידוע גם כי DC הוא קטע אמצעים משולש KML.

א. קבע אלו מהטענות הבאות ניתן להוכיח:

i. המשולש KML הוא ישר זווית ושווה שוקיים.

ii. הקטעים BK ו-BL מאונכים זה לזה.

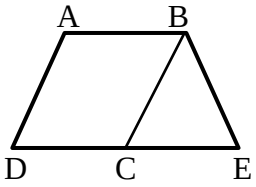
iii. המרובע DCLK הוא טרפז שווה שוקיים.

iv. הקטעים DK ו-AD שווים זה לזה.

ב. הוכח כי: $3DK = AL$.

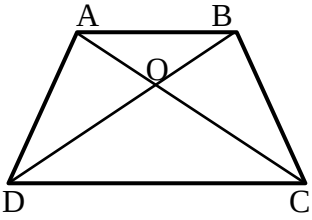
ג. נתון כי $8\sqrt{2}$ ס"מ $= AD$.
חשב את היקף הטרפז ABLK.

56) המרובע ABCD הוא מקבילית.



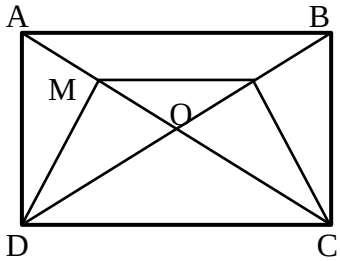
הקטע DE הוא קו ישר ונתון כי: $\sphericalangle A + \sphericalangle E = 180°$.
הוכח כי המרובע ABED הוא טרפז שווה שוקיים.

57) במרובע ABCD הנקודה O היא פגישת האלכסונים.



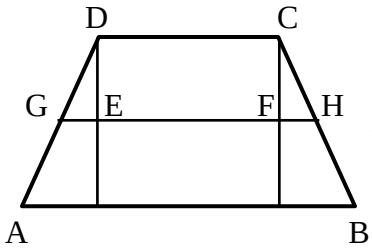
נתון כי: $AO = BO$, $CO = DO$.
הוכח כי מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

58) נתון מלבן ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה O.



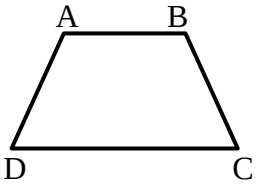
נתון: $MN \parallel DC$.
הוכח: DMNC טרפז שווה שוקיים.

59) בטרפז ABCD $(AB \parallel CD)$ הורדו מקצות הבסיס הקטן אנכים לבסיס הגדול.



קטע האמצעים GH חותך גבהים אלה בנקודות E ו-F.
נתון: GE = 3 ס"מ, EF = 12 ס"מ, FH = 2 ס"מ.
חשב את בסיסי הטרפז.

60) סכום כל אורכי הצלעות של טרפז שווה שוקיים הוא 54 ס"מ.
אורך קטע האמצעים הוא 13 ס"מ.
מצא את אורך שוק הטרפז.

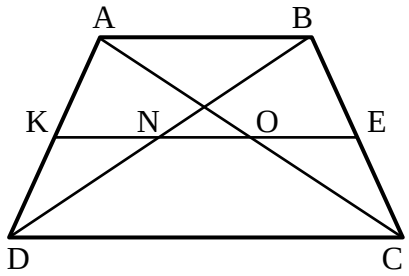


61) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB\|CD)$.
KE הוא קטע אמצעים בטרפז, החותך את אלכסוני הטרפז בנקודות N ו-O.

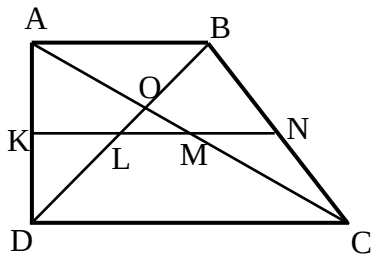
א. הוכח כי: $KN = EO$.

ב. בטרפז הנ"ל נתון:
$AB =$ 14 ס"מ, $DC =$ 26 ס"מ.
חשב את אורכי הקטעים KN, NO ו-EO.

ג. בטרפז הנ"ל נתון: $KE =$ 13 ס"מ,
$NO =$ 3 ס"מ. חשב את בסיסי הטרפז.



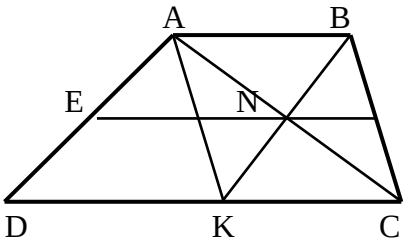
62) KN הוא קטע אמצעים בטרפז ישר זווית ABCD שאלכסוניו $(AB\|CD\ ,\ AD\perp AB)$ נפגשים בנקודה O.
נתון: $AD =$ 12 ס"מ, $DC = 2AB$, $\sphericalangle ADB = 45°$.
חשב את אורך הקטע LM
והוכח כי: $KL = LM = MN$.



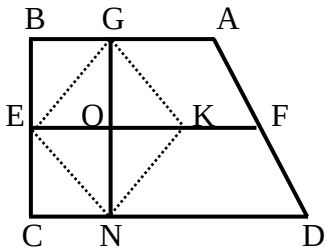
63) מרובע ABCD הוא טרפז $(AB\|CD)$.
EF הוא קטע אמצעים. AC ו-BK נפגשים בנקודה N הנמצאת על EF.

א. הוכח כי מרובע ABCK הוא מקבילית.

ב. נתון: $EF =$ 13 ס"מ, $EN =$ 9 ס"מ.
חשב את בסיסי הטרפז AB ו-DC
ואת הקטע DK.



64) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB\|CD\ ,\ \sphericalangle B = 90°)$.
EF קטע אמצעים בטרפז.
G ו-N הן נקודות על AB ו-CD בהתאמה המקיימות: $GN\perp DC$.
בנוסף נתון: $KO = EO$, $\sphericalangle D < 90°$.
הוכח כי מרובע GENK הוא מעוין.



תשובות סופיות:

44) א. $x=66°;\ 46°,134°,66°,114°$ ב. $x=35°\ ;\ 40°,140°,75°,105°$

45) 8 ס"מ.

46) שאלת הוכחה.

47) א. 25 ס"מ. ב. שאלת הוכחה.

48) שאלת הוכחה.

49) שאלת הוכחה.

50) א. 15 ס"מ, 30 ס"מ. ב. שאלת הוכחה.

51) $120°\ ,\ 60°\ ,\ 90°\ ,\ 90°$

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) שאלת הוכחה.

55) א. ניתן להוכיח את טענות : i, iii. ב. שאלת הוכחה.

ג. 69.71 ס"מ $\approx 16\sqrt{5}+24\sqrt{2}=P_{ABLK}$.

56) שאלת הוכחה.

57) שאלת הוכחה.

58) שאלת הוכחה.

59) 22 ס"מ ו-12 ס"מ.

60) 14 ס"מ.

61) א. שאלת הוכחה. ב. 7 ס"מ $=EO=KN$, 6 ס"מ $=NO$

ג. 10 ס"מ $=AB$, 16 ס"מ $=DC$.

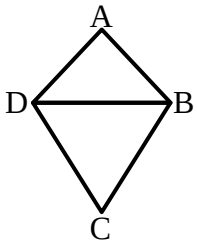
62) 6 ס"מ.

63) 8 ס"מ $=AB$, 18 ס"מ $=DC$, 10 ס"מ $=DK$.

64) שאלת הוכחה.

הדלתון:

סיכום כללי:

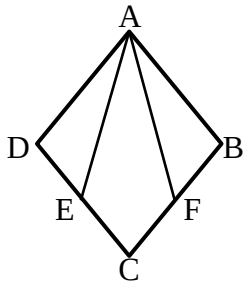


הגדרה:
דלתון הוא מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות.
(מסקנה: דלתון הוא מרובע שניתן לפרק לשני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף).

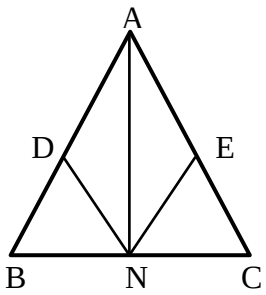
תכונות האלכסונים בדלתון:

- האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.
- האלכסון הראשי אינו בהכרח גדול מהאלכסון המשני.
- היקף דלתון = סכום הצלעות, שטח דלתון = 1/2(אלכסון · אלכסון).

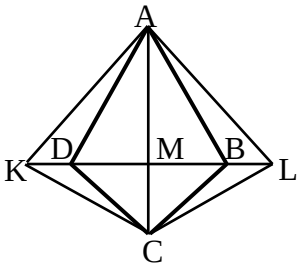
שאלות:



65) נתון מעוין ABCD. הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות DC ו-BC בהתאמה כך שהמרובע AFCE הוא דלתון.
הוכח: $\sphericalangle DAE = \sphericalangle FAB$.



66) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$
מקצים נקודות D ו-E על השוקיים.
נתון כי: $AD = AE$.
הנקודה N היא אמצע BC.
הוכח כי ADNE הוא דלתון.



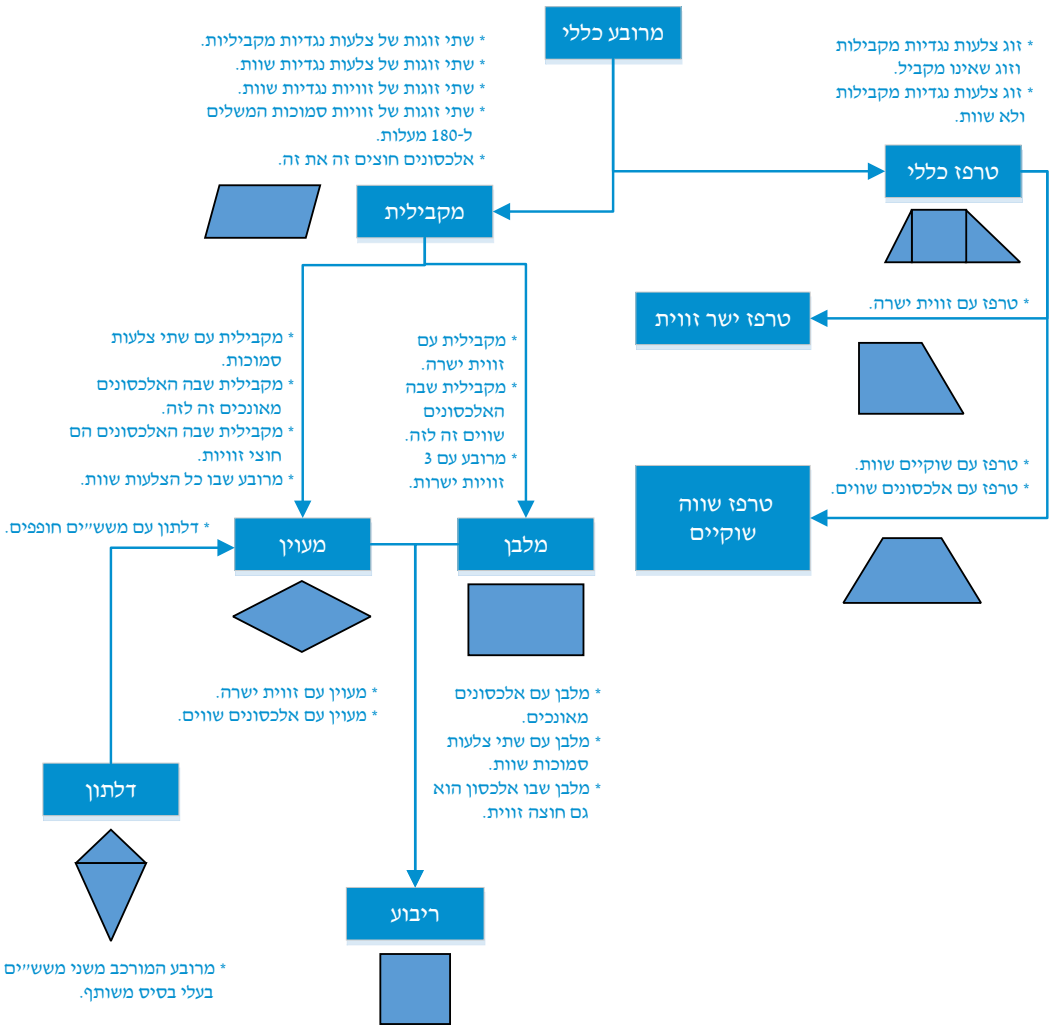
67) בדלתון ABCD האריכו את האלכסון המשני משני צדיו כמתואר בשרטוט כך שמתקיים: $KD = BL$.
הוכח: המרובע ALCK הוא דלתון.

תשובות סופיות:

65) שאלת הוכחה.
66) שאלת הוכחה.
67) שאלת הוכחה.

סיכום משפחת המרובעים:

להלן דיאגרמה מסכמת של כל משפחת המרובעים ותכונותיהם:



מתמטיקה כללית

פרק 12 - גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים

תוכן העניינים

1. שטחים והיקפים של משולשים 199
2. שטחים והיקפים של מרובעים 201
3. שאלות עם מקבילית 202
4. שאלות עם מלבן 205
5. שאלות עם מעוין 206
6. שאלות עם ריבוע 208
7. שאלות עם טרפז 210

שטחים והיקפים של משולשים:

סיכום כללי:

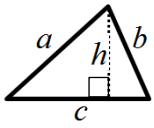
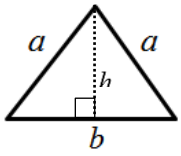
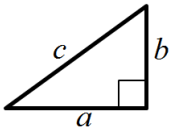
שטח – הגדרה:

גודל של תחום מישורי בהשוואה ליחידת מידה קבועה.
שטח נמדד ביחידות מידה של אורך בריבוע כגון:
מטר ריבועי (m^2), ס"מ ריבועי (סמ"ר cm^2).

היקף – הגדרה:

היקף מצולע הוא סכום כל צלעותיו.

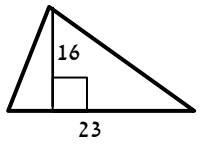
משולשים:

סוג	משולש כללי	משולש שווה שוקיים	משולש ישר זווית
איור			
שטח	$S=\frac{c\cdot h}{2}$	$S=\frac{b\cdot h}{2}$	$S=\frac{a\cdot b}{2}$
היקף	$P=a+b+c$	$P=2a+b$	$P=a+b+c$

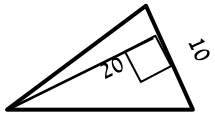
שאלות:

1) מצא את שטחם של המשולשים הבאים (כל המידות נתונות בס"מ):

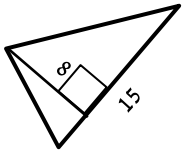
א.



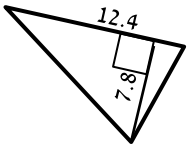
ב.



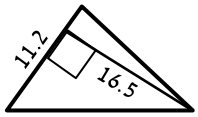
ג.



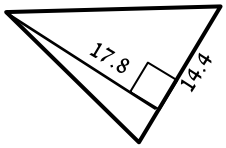
ד.



ה.

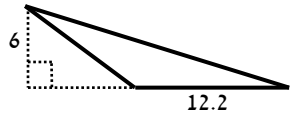


ו.

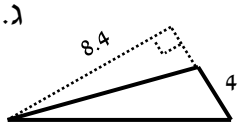


2) מצא את שטחם של המשולשים קהי-הזווית הבאים (כל המידות בס"מ):

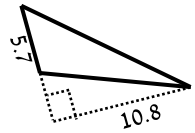
א.



ב.



ג.

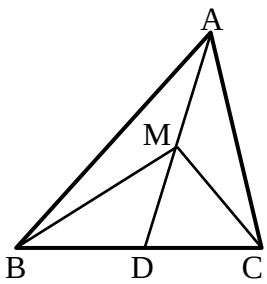


3) הוכח כי אם במשולש ABC, הקטע AD המחבר את הקדקוד A עם הצלע BC יוצר שני משולשים השווים בשטחם אז הוא תיכון ל-BC.

4) במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC.
M היא אמצע AD. הוכח כי:

א. הקטעים AD, MC ו-BM מחלקים את המשולש ABC ל-4 משולשים שווי שטח.

ב. $S_{MBC}=\frac{1}{2}S_{ABC}$.



תשובות סופיות:

1) א. 184 סמ"ר ב. 100 סמ"ר ג. 60 סמ"ר ד. 48.36 סמ"ר
ה. 92.4 סמ"ר ו. 128.16 סמ"ר.

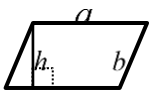
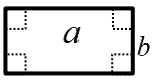
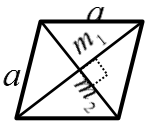
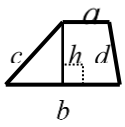
2) א. 36.6 סמ"ר ב. 16.8 סמ"ר ג. 30.78 סמ"ר.

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה.

שטחים והיקפים של מרובעים:

סיכום כללי:

סוג	מקבילית	מלבן	מעוין	ריבוע	טרפז
איור					
שטח	$S=a\cdot h$	$S=a\cdot b$	$S=a\cdot h$ $S=\frac{m_1\cdot m_2}{2}$	$S=a^2$	$S=\frac{(a+b)h}{2}$
היקף	$P=2(a+b)$	$P=2(a+b)$	$P=4a$	$P=4a$	$P=a+b+c+d$

הערות כלליות:

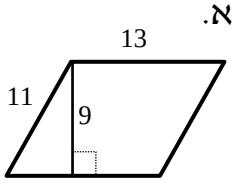
- שטח מקבילית ניתן לחישוב ע"י מכפלת כל צלע בגובה המתאים לה.
  כך ניתן לקבל את הנוסחה: $S=a\cdot h_a=b\cdot h_b$ כאשר h_a ו- h_b הם הגבהים לצלעות a ו- b בהתאמה.
- ניתן לחשב שטח מעוין ע"י מחצית ממכפלת אלכסונים או ע"י מכפלת צלע בגובה שלה (שכן היא סוג של מקבילית).
- עבור טרפז ישר זווית, שבו $h=c$ נקבל: $S=\frac{(a+b)c}{2}$.
- ניתן לחשב שטח של טרפז ע"י הורדת גבהים, חלוקתו למלבן ושני משולשים, חישוב שטחם בנפרד ואיחודם.

שאלות עם מקבילית:

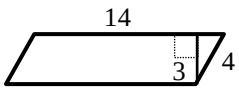
שאלות:

5) חשב את השטחים וההיקפים של המקבילויות הבאות (כל המידות בס"מ):

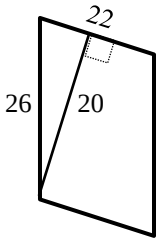
א.



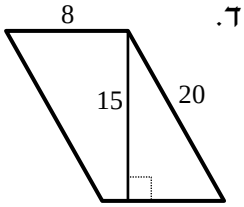
ב.



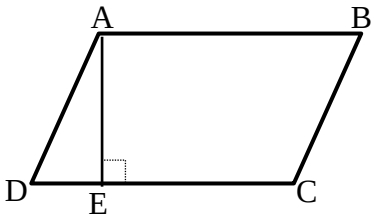
ג.



ד.



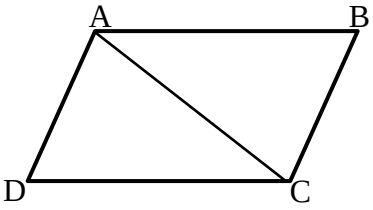
6) נתונה מקבילית ABCD.
מעבירים גובה AE לצלע CD שאורכו הוא 6 ס"מ.
ידוע כי שטח המקבילית הוא 60 סמ"ר.



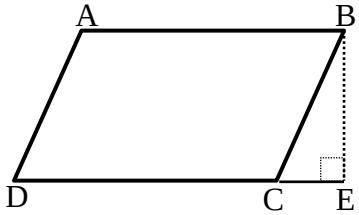
א. מצא את אורך הצלע AB.

ב. ידוע כי היקף המקבילית הוא 36 ס"מ.
מצא את אורך הצלע BC.

7) נתונה מקבילית ABCD.
מעבירים את האלכסון AC שאורכו 25 ס"מ.
ידוע כי היקף המשולש ACD הוא 66 ס"מ.
חשב את היקף המקבילית.



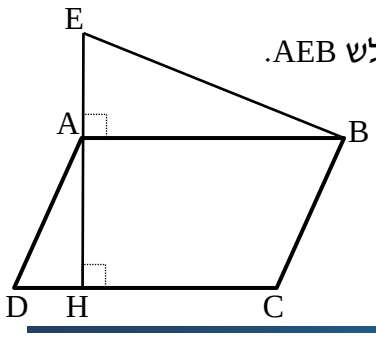
8) נתונה מקבילית ABCD.
מורידים גובה מהקדקוד B לצלע CD כך שנוצר המשולש BCE.
שטח המשולש BCE הוא 24 סמ"ר
ושטח המקבילית ABCD הוא 112 סמ"ר.
נתון: CE = 6 ס"מ.



א. מצא את אורך הגובה BE.

ב. מצא את אורך הצלע AB של המקבילית.

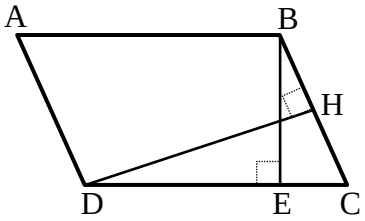
9) נתונה מקבילית ABCD.
מעלים אנך מהקדקוד A עד לנקודה E ויוצרים משולש AEB.
מורידים גובה AH לצלע CD שאורכו 12 ס"מ.
נתון: AE = 8 ס"מ, AD = 13 ס"מ.
שטח כל הצורה AEBCD הוא 256 סמ"ר.



א. מצא את אורך הצלע AB.

ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.

10) במקבילית ABCD מעבירים את הגבהים BE ו-DH לצלעות CD ו-BC בהתאמה.



נתון: BE = 12 ס"מ, BC = 14.4 ס"מ, DH = 15 ס"מ.

א. חשב את שטח המקבילית ABCD.

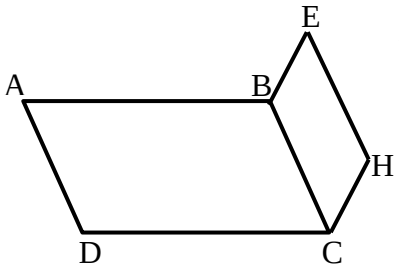
ב. חשב את אורך הצלע AB.

ג. חשב את היקף המקבילית.

11) נתונה המקבילית ABCD.

על הצלע BC בונים מקבילית נוספת BCHE שהיקפה הוא 44 ס"מ.

ידוע כי היקף הצורה ABEHCD הוא 94 ס"מ.



נתון: BC = 15 ס"מ.

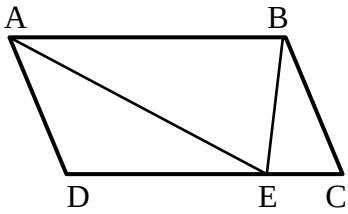
א. חשב את אורך הצלע AB.

ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.

12) המרובע ABCD הוא מקבילית.

הנקודה E נמצאת על DC.

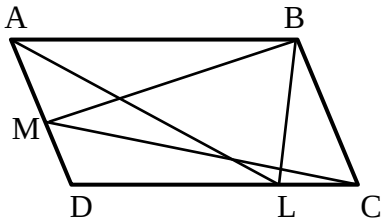
הוכח כי: $S_{AEB}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.



13) המרובע ABCD הוא מקבילית.

הנקודות M ו-L נמצאות על הצלעות AD ו-DC בהתאמה.

הוכח כי: $S_{BMC}=S_{ALB}$.



תשובות סופיות:

5) א. $P=$ 48 ס"מ , $S=$ 117 סמ"ר
ב. $P=$ 36 ס"מ , $S=$ 42 סמ"ר
ג. $P=$ 96 ס"מ , $S=$ 440 סמ"ר
ד. $P=$ 56 ס"מ , $S=$ 120 סמ"ר.

6) א. AB = 10 ס"מ
ב. BC = 8 ס"מ.

7) $P=$ 82 ס"מ.

8) א. BE = 8 ס"מ
ב. AB = 14 ס"מ.

9) א. AB = 16 ס"מ
ב. $P=$ 58 ס"מ.

10) א. $S=$ 216 סמ"ר
ב. AB = 18 ס"מ
ג. $P=$ 64.8 ס"מ.

11) א. AB = 25 ס"מ
ב. $P=$ 80 ס"מ.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

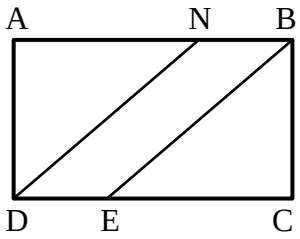
שאלות עם מלבן:

שאלות:

14) במלבן ABCD אורכי הצלעות הם: 12 ס"מ = AB, 8 ס"מ = BC.
מצאו את ההיקף של המלבן.

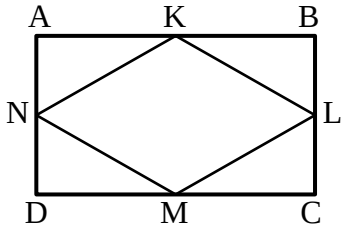
15) במלבן ABCD אורך הצלע AB הוא 10 ס"מ. היקף המלבן הוא 32 ס"מ.
מצאו את שטח המלבן.

16) במלבן ABCD נתון: 11 ס"מ = DC, 9 ס"מ = AD.
מצאו את האורך של האלכסון AC.



17) המרובע ABCD הוא מלבן.
הישרים DN ו-BE מקבילים.
נתון: 32 ס"מ = AB, 30 ס"מ = DN ו-8 ס"מ = BN.
הוכח כי מרובע NBED הוא מקבילית וחשב את שטחה.

18) הנקודות K, L, M ו-N הן אמצעי הצלעות AB , BC , CD
ו-AD בהתאמה במלבן ABCD.
נתון כי היקף המלבן הוא 120 ס"מ וכי שטחו
הוא 836 סמ"ר.
חשב את שטחו של המרובע KLMN.



תשובות סופיות:

14) 40 ס"מ.

15) 60 סמ"ר.

16) $\sqrt{202} \approx$ 14.21 ס"מ.

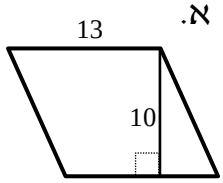
17) 144 סמ"ר.

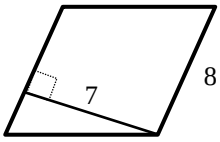
18) 418 סמ"ר.

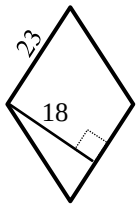
שאלות עם מעוין:

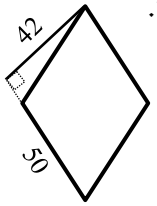
שאלות:

19) חשב את השטחים וההיקפים של המעוינים הבאים (כל המידות בס"מ):

א.


ב.


ג.


ד.


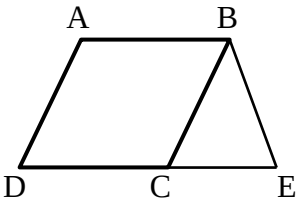
20) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O.
נתון: 3 ס"מ = AO, 4 ס"מ = BO. מצא את אורך צלע המעוין.

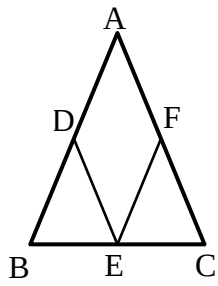
21) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O.
נתון: 12 ס"מ = AB, 8 ס"מ = BO. מצא את AO.

22) במעוין ABCD האלכסון AC שווה באורכו לצלע המעוין.
נתון: 20 ס"מ = AB.
א. חשב את אורך האלכסון BD.
ב. חשב את שטח המעוין.

23) נתון מעוין ABCD. אורך האלכסון הקצר הוא 7 ס"מ ושטח המעוין הוא 35 סמ"ר. חשב את היקף המעוין.

24) נתון מעוין ABCD בעל אורך צלע של 8 ס"מ.
מעבירים את הקטע BE השווה באורכו לצלע המעוין
כך שנוצר המשולש BCE. ידוע כי: 6 ס"מ = CE.
א. איזה סוג משולש הוא המשולש BCE? נמק.
ב. חשב את היקף הצורה ABECD.



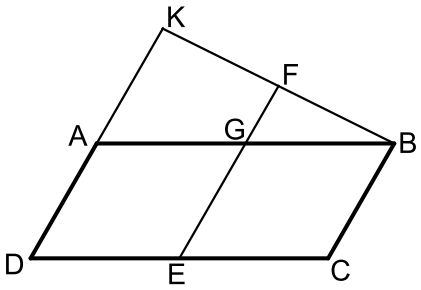


25) נתון משולש שווה שוקיים ABC, (AB =AC).
מסמנים את אמצעי צלעות המשולש ב-D, E ו-F
ומעבירים את הקטעים DE ו-EF כך שהמרובע ADEF הוא מעוין.
נתון: 12 ס"מ = BC, וכי היקף המשולש ABC הוא 48 ס"מ.

א. מצא את אורך צלע המעוין ADEF.

ב. חשב את היקף המעוין ADEF.

26) המרובע ABCD הוא מקבילית שבה אורך הצלע AB גדולה פי 2 מהצלע AD.
ממשיכים את הצלע AD עד לנקודה K ומחברים אותה לקדקוד B. מעבירים
את הקטע FE כך ש-F היא אמצע הקטע BK. EF חותך את הצלע AB בנקודה G
ומקביל לצלע AD.



א. הוכח כי המרובע AGED הוא מעוין.

ב. שטח המעוין AGED הוא 20 סמ"ר.
חשב את שטח המרובע DCBK אם ידוע
כי A היא אמצע הקטע DK.

תשובות סופיות:

19) א. $P=$ 52 ס"מ , $S=$ 130 סמ"ר
ב. $P=$ 32 ס"מ , $S=$ 56 סמ"ר.
ג. $P=$ 92 ס"מ , $S=$ 414 סמ"ר
ד. $P=$ 200 ס"מ , $S=$ 2100 סמ"ר.

20) 5 ס"מ.

21) $\sqrt{80}\approx$ 8.94 ס"מ.

22) א. $BD=20\sqrt{3}$ ס"מ
ב. 346.41 סמ"ר.

23) 24.413 ס"מ.

24) א. משולש שווה שוקיים, מכיוון ש-BE=BC.
ב. $P=$ 38 ס"מ.

25) א. 9 ס"מ.
ב. $P=$ 36 ס"מ.

26) ב. 60 סמ"ר.

שאלות עם ריבוע:

שאלות:

27) נתון ריבוע ABCD בעל אורך צלע של 6 ס"מ.

א. חשב את שטח הריבוע.

ב. חשב את היקף הריבוע.

ג. חשב את אורך האלכסון בריבוע.

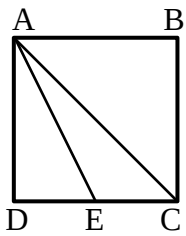
28) שטחו של ריבוע ABCD הוא 49 סמ"ר.

א. מהו אורך צלע הריבוע?

ב. מהו אורך האלכסון בריבוע?

ג. מהו היקף הריבוע?

29) בריבוע ABCD מעבירים את הקטע AE כך ש-E היא אמצע הצלע DC ואת האלכסון AC.
שטח הריבוע הוא 40 סמ"ר.



א. מצא את אורך צלע הריבוע.

ב. מצא את אורך אלכסון הריבוע.

ג. מצא את אורך הקטע AE.

30) חשב את צלע הריבוע השווה בשטחו לשטח משולש שצלעו 25 ס"מ והגובה לצלע זו הוא 18 ס"מ.

31) נתונים מלבן וריבוע השווים בשטחם.
אורכי צלעות המלבן הם 25 ס"מ ו-9 ס"מ.
חשב את היקף הריבוע.

32) נתונים מלבן וריבוע השווים בהיקפם.
שטח הריבוע הוא 36 ס"מ ואורך המלבן גדול ב-8 ס"מ מרוחבו.
חשב את שטח המלבן.

תשובות סופיות:

27) א. 36 סמ"ר ב. 24 ס"מ ג. 8.48 ס"מ.

28) א. 7 ס"מ ב. 9.89 ס"מ ג. 28 ס"מ.

29) א. 6.32 ס"מ ב. 8.94 ס"מ ג. 7.07 ס"מ.

30) 15 ס"מ.

31) 60 ס"מ.

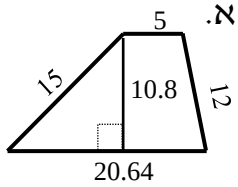
32) 20 סמ"ר.

שאלות עם טרפז:

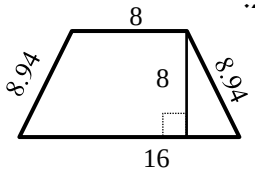
שאלות:

33) חשב את השטחים וההיקפים של הטרפזים הבאים (כל המידות בס"מ):

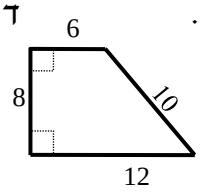
א.



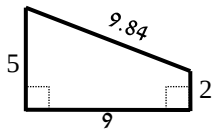
ב.



ג.



ד.



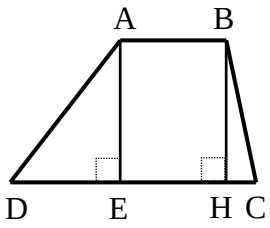
34) נתון טרפז $ABCD$, $(AB\|CD)$.

מורידים את הגבהים AE ו-BH שאורכם 8 ס"מ.

ידוע כי: $DE = 6$ ס"מ, $HC = 2$ ס"מ.

שטח הטרפז הוא 88 סמ"ר.

מצא את אורך בסיס הטרפז AB.



35) נתון טרפז $ABCD$, $(AB\|CD)$.

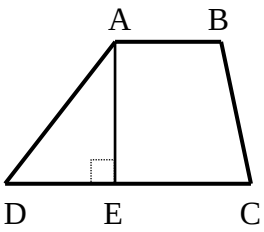
מורידים גובה AE מהקדקוד A.

היקף הטרפז הוא 68 ס"מ ונתון כי:

$AD = 18$ ס"מ, $BC = 16$ ס"מ, $AB = 12$ ס"מ.

א. מצא את אורך הבסיס DC.

ב. מצא את הגובה AE אם ידוע כי שטח הטרפז הוא 255 סמ"ר.



36) נתון טרפז $ABCD$, $(AB\|CD)$.

מהקדקוד B מורידים גובה חיצוני לטרפז BE

כאשר E נמצאת על המשך הבסיס DC.

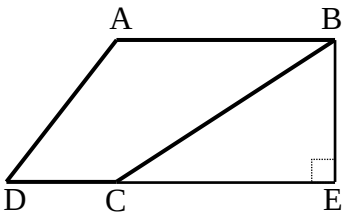
ידוע כי: $AB = 20$ ס"מ, $DC = 8$ ס"מ

וכי שטח הטרפז הוא 196 סמ"ר.

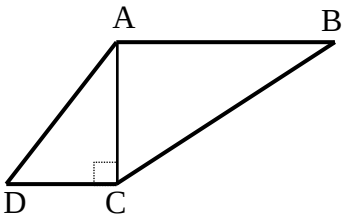
א. מצא את הגובה BE.

ב. נתון כי: $\sphericalangle D = 60°$, $\sphericalangle BCD = 130°$.

חשב את זווית $\sphericalangle A$ ואת זוויות המשולש BCE.



37) נתון טרפז $ABCD$, $(AB\|CD)$.



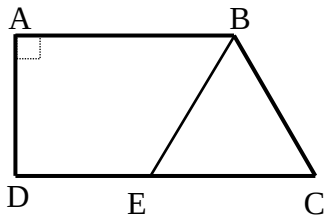
האלכסון AC הוא גובה בטרפז ואורכו 12 ס"מ.
ידוע כי: $AB = AD = 13$ ס"מ, $BC = 17.7$ ס"מ.
היקף הטרפז הוא 48.7 ס"מ ו- $\sphericalangle B = 42.71°$.

א. מצא את אורך הבסיס DC.

ב. חשב את שטח הטרפז.

ג. חשב את זווית C.

38) הטרפז $ABCD$, $(AB\|CD)$ הוא ישר זווית $(\sphericalangle A = 90°)$.

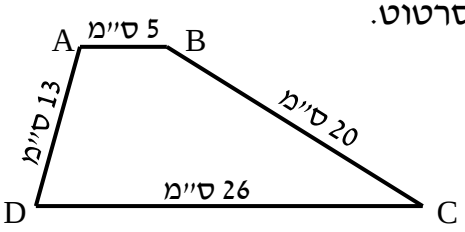


מהנקודה E שעל הבסיס DC מעבירים את הקטע BE
כך שהמשולש BCE הוא שווה צלעות עם $BC = 14$ ס"מ.
היקף הטרפז $ABCD$ הוא 67 ס"מ ו- AD הוא 10 ס"מ.

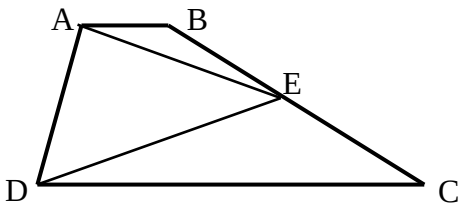
א. מהו היקף הטרפז $ABED$?

ב. חשב את שטח הטרפז $ABED$.

39) נתון טרפז $ABCD$ שאורכי צלעותיו נתונים בסרטוט.
חשב את שטח הטרפז (פתור כתרגיל חישוב).



40) המרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB\|CD)$.

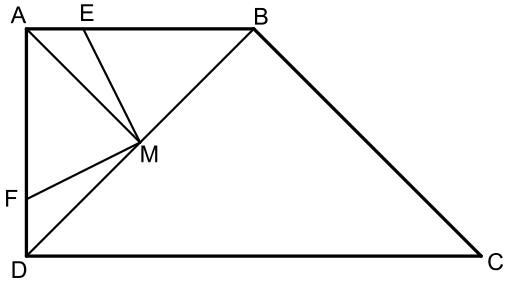


הנקודה E היא אמצע השוק BC.

הוכח כי: $S_{ADE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

41) המרובע $ABCD$ הוא טרפז ישר זווית $(\sphericalangle A = 90°)$.

הנקודה M נמצאת על אמצע האלכסון BD של הטרפז וממנה מעבירים
את הקטעים ME ו-MF השווים זה לזה ומחברים אותה עם הקדקוד A.
נתון כי: $ME \perp MF$ וכי: $\sphericalangle DFM > 90°$.



א. הוכח: $\Delta AMF \cong \Delta BME$.

ב. נתון כי: $BC = \sqrt{32}$, $AE = FD = 1$.
כמו כן: $AM \| BC$.

i. מצא את אורך הקטע BE.

ii. חשב את שטח הטרפז $ABCD$.

תשובות סופיות:

33) א. $P=$ 52.64 ס"מ , $S=$ 138.456 סמ"ר.
ב. $P=$ 41.88 ס"מ , $S=$ 96 סמ"ר.
ג. $P=$ 36 ס"מ , $S=$ 72 סמ"ר.
ד. $P=$ 25.48 ס"מ , $S=$ 31.5 סמ"ר.

34) $AB=$ 7 ס"מ.

35) א. $DC=$ 22 ס"מ.
ב. $AE=$ 15 ס"מ.

36) א. $BE=$ 14 ס"מ.
ב. $\sphericalangle A=120°$, $\sphericalangle CBE=40°$, $\sphericalangle BCE=50°$, $\sphericalangle E=90°$.

37) א. $DC=$ 5 ס"מ.
ב. $S=$ 108 סמ"ר.
ג. $\sphericalangle C=137.29°$.

38) א. $P=$ 53 ס"מ.
ב. $S=$ 145 סמ"ר.

39) 186 סמ"ר.

40) שאלת הוכחה.

41) ב. i. 3 ס"מ.
ב. ii. 24 סמ"ר.

מתמטיקה כללית

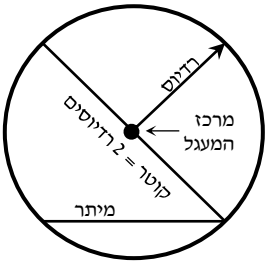
פרק 13 - גיאומטריה אוקלידית - המעגל

תוכן העניינים

1. הגדרות 213
2. קשתות ומיתרים במעגל 214
3. אנך אמצעי למיתר 217
4. זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל 219
5. זווית היקפית הנשענת על קוטר 223
6. משיקים למעגל 225
7. משיק ומיתר 228
8. שני מעגלים 230
9. מעגל חוסם ומעגל חסום 232
10. שטחים והיקפים במעגל 235

הגדרות:

- מעגל – המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה קבועה קבוע.
- הנקודה הקבועה נקראת מרכז המעגל.
- רדיוס – קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.
- מיתר – קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל.
- קוטר – מיתר העובר במרכז המעגל.



- היקף מעגל $= 2\pi R$.
- שטח מעגל $= \pi R^2$.
- קשת – חלק מהיקף המעגל.
- גזרה – חלק משטח המעגל.
- זווית מרכזית – זווית שקדקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים.
- זווית היקפית – זווית שקדקודה על היקף המעגל ושוקיה מיתרים.

קשתות ומיתרים במעגל:

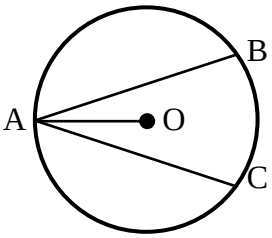
סיכום כללי:

משפטים העוסקים במיתרים במעגל:

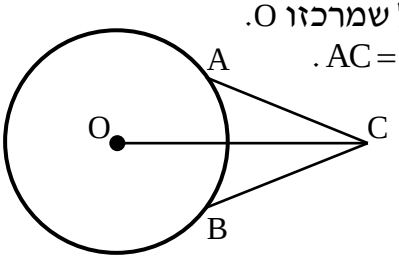
1. מיתרים שווים נשענים על קשתות שוות ולהפך.
2. על מיתרים שווים נשענות זוויות מרכזיות שוות ולהפך.
3. מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.
(משפט הפוך) מיתרים הנמצאים במרחק שווה ממרכז המעגל שווים.

שאלות:

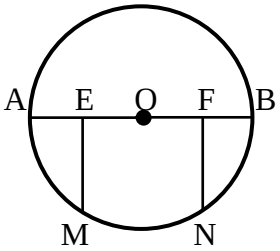
1) AB ו-AC הם שני מיתרים שווים במעגל שמרכזו O.
הוכח כי AO חוצה את זווית BAC.



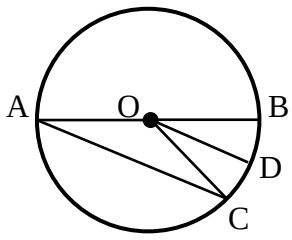
2) A ו-B הן שתי נקודות הנמצאות על היקף המעגל שמרכזו O.
נקודה C הנמצאת מחוץ למעגל מקיימת כי: $AC = BC$.
הוכח כי OC חוצה את זווית C.



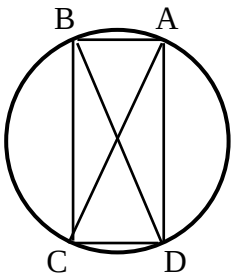
3) הקטע AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
נתון כי: $EO = FO$, $EM \perp AB$, $FN \perp AB$.
הוכח כי $MN = EF$.



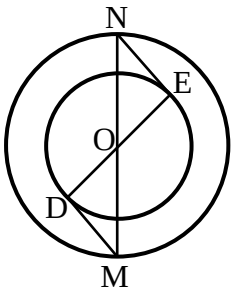
4) AB הוא קוטר במעגל שלפניך.
AC הוא מיתר ו-O מרכז מעגל.
הרדיוס OD חוצה את זווית BOC.
הוכח כי DO מקביל ל-AC.



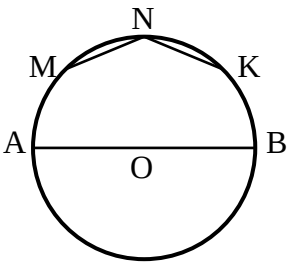
5) במעגל שלפניך AC ו-BD הם קטרים.
הוכח כי המרובע ABCD הוא מלבן.



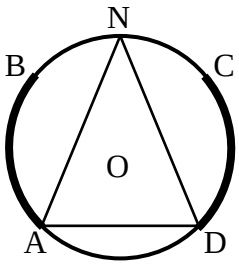
6) בשרטוט שלפניך שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
הקטע MN הוא קוטר במעגל הגדול והקטע DE
הוא קוטר במעגל הקטן.
מעבירים את הקטעים MD ו-NE.
הוכח כי MD שווה ל-NE.



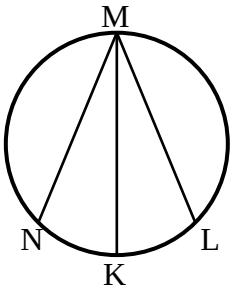
7) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
את הקשת העליונה של AB מחלקים ל-4
קשתות שוות, כלומר: $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NK} = \overset{\frown}{KB}$.
חשב את זווית KNM.



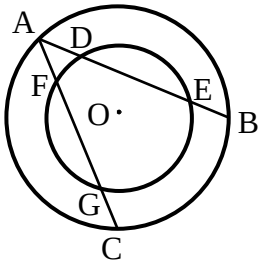
8) במעגל שלפניך נתון כי הקשתות המסומנות שוות
זו"א: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. הנקודה N היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{BC}$.
הוכח כי המשולש AND הוא שווה שוקיים.



9) המיתרים MN ו-ML שווים זה לזה.
המיתר MK חוצה את זווית NML.
הוכח כי $\Delta KNM \cong \Delta KLM$.
הוכח כי MK הוא קוטר במעגל.



10) נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
מעבירים את המיתרים AB ו-AC במעגל הגדול.
ידוע כי שני המיתרים שווים זה לזה.
מסמנים את נקודות החיתוך של המיתרים עם המעגל
הקטן ב-D ו-E עבור המיתר AB, ו-F, G עבור המיתר AC.
הוכח: $DE = FG$.



תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) $135°$.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.

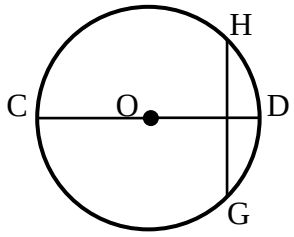
אנך אמצעי למיתר:

סיכום כללי:

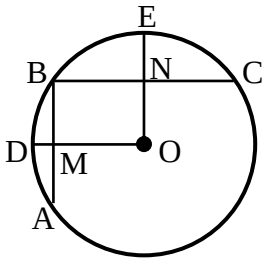
משפט אנך אמצעי למיתר:

1. אנך למיתר ממרכז המעגל חוצה את המיתר.
(משפט הפוך ל-4 (1)) רדיוס החוצה מיתר מאונך לו.
(משפט הפוך ל-4 (2)) קטע היוצא מאמצע מיתר ומאונך לו, עובר במרכז המעגל.

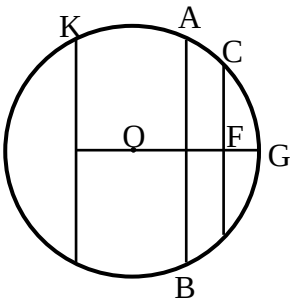
שאלות:



11) במעגל שמרכזו O המיתר GH מאונך לקוטר CD.
הוכח כי $GC = HC$.
נתון כי: $\overset{\frown}{HDG} = 80°$.
בת כמה מעלות הקשת $\overset{\frown}{CG}$?

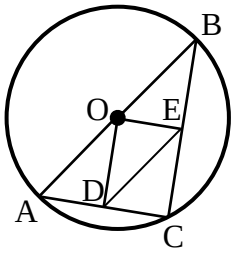


12) AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.
מעבירים את הרדיוסים OD ו-OE אשר חותכים את המיתרים AB ו-BC בנקודות M ו-N בהתאמה.
ידוע כי מרובע ONBM הוא מלבן. נתונות המידות הבאות: R = 29 ס"מ , MD = 8 ס"מ , NE = 9 ס"מ.
חשב את אורך כל אחד מהמיתרים AB ו-BC.



13) CD, AB ו-KL הם מיתרים במעגל שמרכזו O, והם חותכים את הקטע MG, העובר במרכז המעגל, בנקודות E ,F ו-M בהתאמה.
נתון $CF = DF$, $KL \parallel CD$.
הוכח: $KM = LM$.
נתון בנוסף כי: $AB \perp MG$, $ML = BE$.
הוכח: $MO = EO$.

14) ABC הוא משולש החסום במעגל O. המיתר AB הוא קוטר במעגל. הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AC ו-BC בהתאמה. מעבירים את הקטעים OD ו-OE וידוע כי: $OD \perp AC$, $OE \perp BC$.
הוכח כי DE שווה באורכו לרדיוס המעגל.



תשובות סופיות:

11) א. שאלת הוכחה. ב. $140°$.
12) 40 ס"מ = AB, 42 ס"מ = BC.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.

זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל:

סיכום כללי:

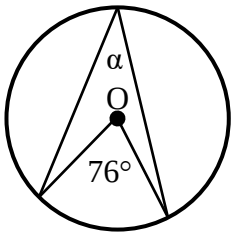
משפטים העוסקים בזוויות במעגל:

1. שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת/קשתות שוות, שוות ביניהן.
   (משפט הפוך ל-5) זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות.
2. זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

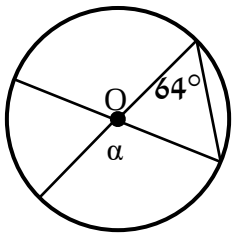
שאלות:

15) נתונים המעגלים הבאים שמרכזם הוא O.
חשב את הזווית α בכל אחד מהמקרים.

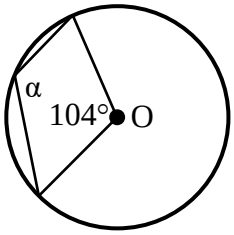
א.



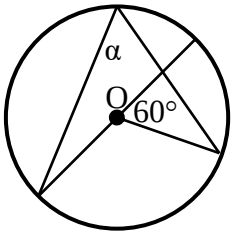
ב.



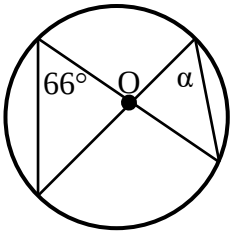
ג.



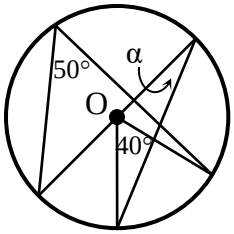
ד.



ה.

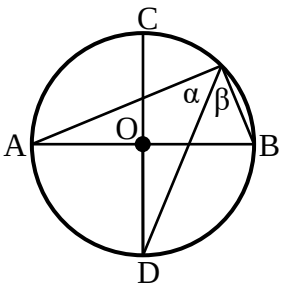


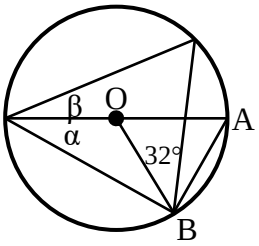
ו.

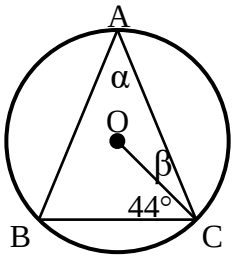


16) במעגלים הבאים שמרכזם O מופיעים הנתונים לידם.
חשב את הזוויות α ו- β בכל אחד מהמקרים:

א. $AB = AC$ ב. ΔAOB - שווה צלעות. ג. AB, CD קטרים מאונכים זה לזה.





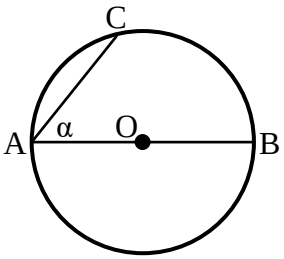


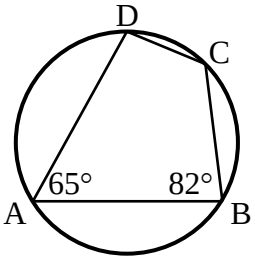
17) חשב את המבוקש בכל מקרה:

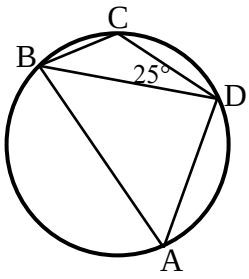
א. AB קוטר, $\overset{\frown}{AC} = 84°$ חשב את α.

ב. $\overset{\frown}{DC} = 52°$. חשב: $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{DC}, \overset{\frown}{AD}$.

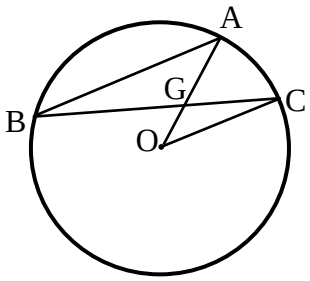
ג. $\overset{\frown}{DC} = 60°$. חשב $\sphericalangle BAD$.



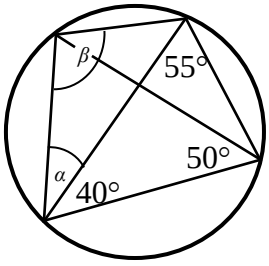




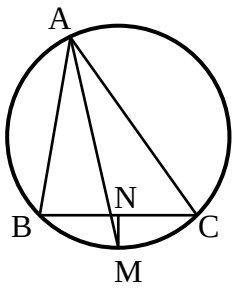
18) AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.
נתון: $\sphericalangle AGC = 60°$, $AB \parallel CO$.
חשב את גודלה של הזווית $\sphericalangle AOC$.



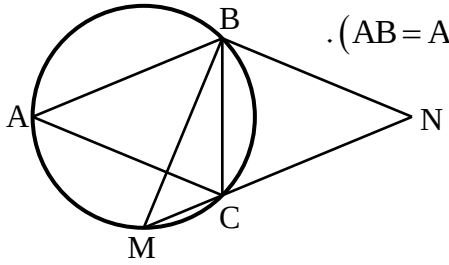
19) חשב את גודל הזוויות α ו- β במעגל הנתון.



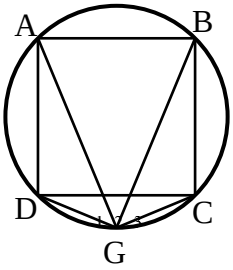
20) המשולש ABC חסום במעגל.
המיתר AM חוצה את זווית A.
מעבירים אנך מהנקודה M לצלע BC
החותך אותה בנקודה N.
הוכח: $BN = CN$.



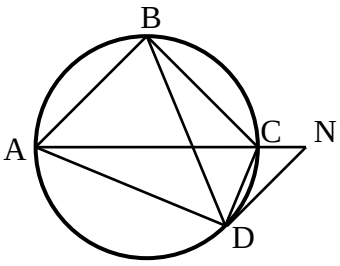
21) בסרטוט שלפניך נתון כי המשולשים
ABC ו-BMN הם שווי שוקיים $(AB = AC\ ,\ BM = BN)$.
זווית הראש במשולש BMN היא $94°$.
חשב את זווית ACB.



22) במעגל שלפניך חסום ריבוע ABCD.
הנקודה G נמצאת על היקף המעגל.
ממנה מעבירים מיתרים לכל קדקוד
כך שנוצרות הזוויות $\sphericalangle G_3$, $\sphericalangle G_2$, $\sphericalangle G_1$.
הוכח כי $\sphericalangle G_1 = \sphericalangle G_2 = \sphericalangle G_3$ ומצא אותן.



23) המרובע ABCD חסום במעגל.
ממשיכים את האלכסון AC עד לנקודה N
ומחברים אותה עם הקדקוד D
כך שמתקיים: $AB \parallel DN$.
הוכח כי זוויות המשולשים ΔADN
ו-ΔBDC שוות.



תשובות סופיות:

15) א. $38°$ ב. $128°$ ג. $128°$ ד. $60°$ ה. $66°$ ו. $30°$.

16) א. $\alpha = 46° \text{ , } \beta = 23°$ ב. $\alpha = 30° \text{ , } \beta = 28°$ ג. $\alpha = \beta = 45°$.

17) א. $\alpha = 48°$ ב. $\overset{\frown}{AD} = 112° , \overset{\frown}{BC} = 78° , \overset{\frown}{AB} = 118°$ ג. $55°$.

18) $40°$.

19) $\alpha = 35° \text{ , } \beta = 95°$.

20) שאלת הוכחה.

21) $68.5°$.

22) $\sphericalangle G_1 = \sphericalangle G_2 = \sphericalangle G_3 = 45°$

23) שאלת הוכחה.

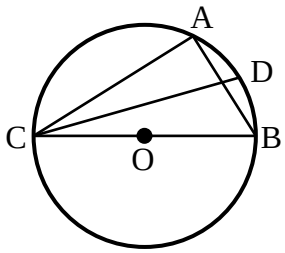
זווית היקפית הנשענת על קוטר:

סיכום כללי:

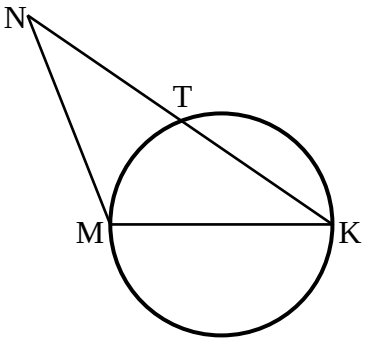
משפט:

1. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.
(משפט הפוך) מיתר עליו נשענת זווית היקפית ישרה הוא קוטר.

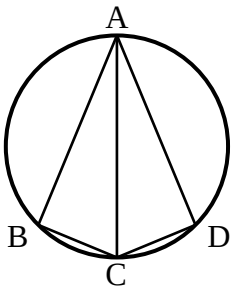
שאלות:



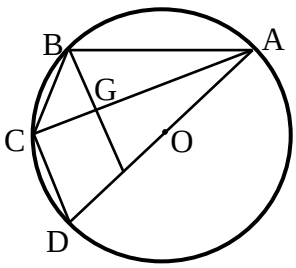
24) המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש-BC הוא קוטר. מעבירים את המיתר CD המקיים: $\sphericalangle DCB = 20°$.
מצא את זווית CAD.



25) MK הוא קוטר במעגל שלפניך.
הקטע KN חותך את המעגל בנקודה T.
מתקיים: $KT = NT$.
הוכח כי: $MK = NM$.

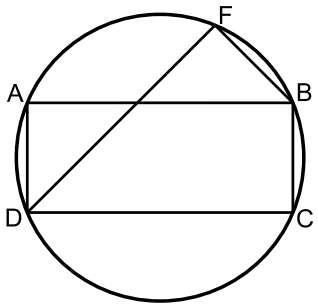


26) מרובע ABCD חסום במעגל כאשר האלכסון AC הוא קוטר וחוצה את זווית BCD.
הוכח כי ABCD הוא דלתון.



27) AB, AC, AD, BC ו-CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O (המיתר AD עובר ב-O).
הקטע BE חותך את המיתר AC בנקודה G.
נתון: $BG = GE$, $BE \parallel CD$.
הוכח: $BC = CD$.

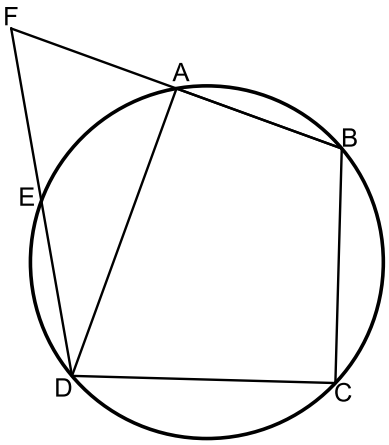
28) המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל.
מהקדקוד D מעבירים את המיתר DF
החותך את הצלע AB בנקודה E.
ידוע כי: $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CF}$.
הצלע AD של המלבן תסומן ב- a.



א. הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים.

ב. נתון גם כי: $BC = BF$.
הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.

29) המרובע ABCD חסום במעגל.
המשכי המיתרים AB ו-ED נפגשים בנקודה F.
הקטע FD חותך את היקף המעגל בנקודה E
כך שמתקיים: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AE}$.
נתון כי הזווית BCD היא ישרה.

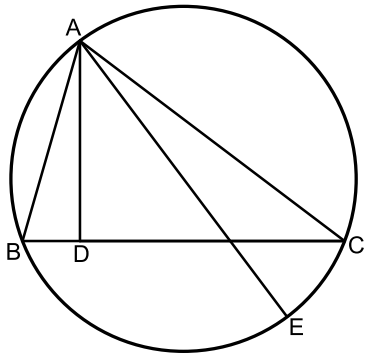


א. הוכח כי הקטע DF שווה לקוטר המעגל.

ב. נתון כי: $DF = BF$ וכי רדיוס המעגל הוא 12 ס"מ.
הוכח כי המרובע AEDB הוא טרפז.

ג. חשב את היקף הטרפז AEDB.

30) משולש ABC חסום במעגל.
AD גובה לצלע BC ו-AE קוטר במעגל.



א. הוכח: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$.

נתון גם כי: $CE = \sqrt{21}, AD = 6, CD = 8$.

ב. חשב את רדיוס המעגל.

תשובות סופיות:

24) $110°$.
25) שאלת הוכחה.
26) שאלת הוכחה.
27) שאלת הוכחה.
28) א. שאלת הוכחה. ב. $R = 1.3a$.
29) א. שאלת הוכחה. ב. 5.5.
30) א. $\alpha = 135°$ ב. $\alpha = 45°$ ג. $\alpha = 40°$.

משיקים למעגל:

סיכום כללי:

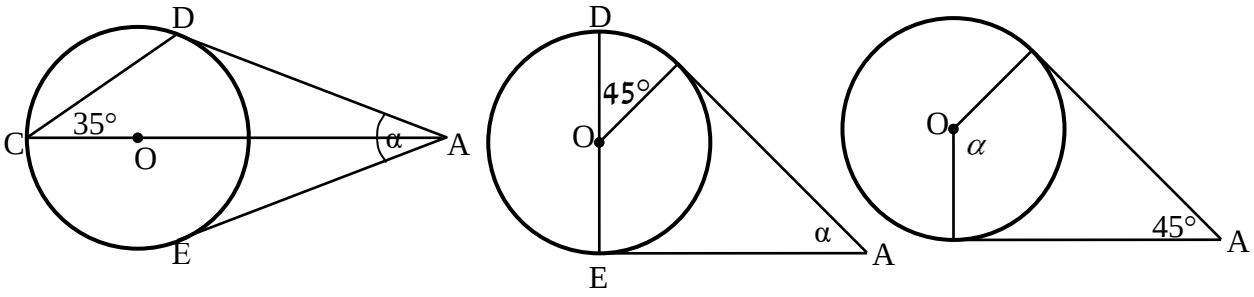
משפטים העוסקים במשיק למעגל ושני משיקים למעגל:

1. משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
(משפט הפוך ל-8) קטע המאונך לרדיוס בקצהו משיק למעגל.
2. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
3. קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שממנה יוצאים שני משיקים חוצה את הזווית בין המשיקים.

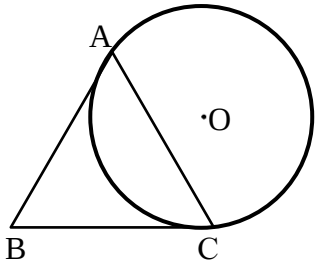
שאלות:

31) באיורים שלפניך נתונים שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה A שמחוץ למעגל.
מרכזי המעגלים מסומן ב-O. מצא את α בכל מקרה.

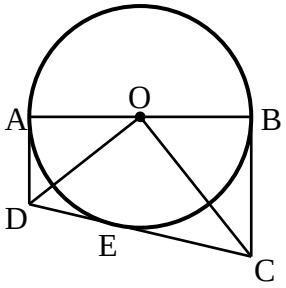
א. ב. ג.

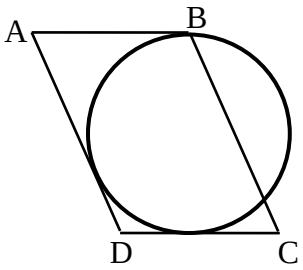


32) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$.
המעגל O משיק לצלעות AB ו-BC בנקודות A ו-C.
הוכח כי ABC הוא שווה צלעות.

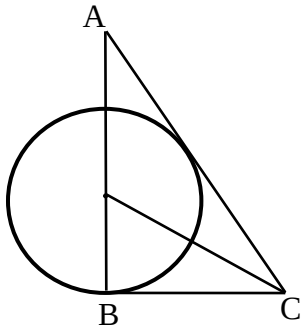


33) במעגל O מעבירים קוטר AB ושלושה משיקים
AD, CD ו-BC. E היא נקודת ההשקה של CD עם המעגל.
הוכח כי: $\angle COD = 90°$.

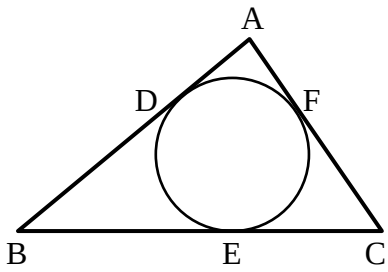




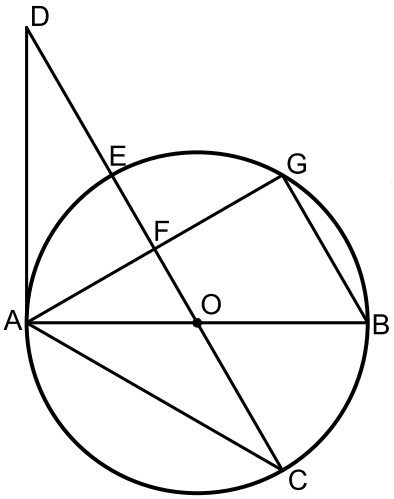
34) הצלעות AB, AD ו-DC של המקבילית ABCD משיקות למעגל בנקודות B , L ו-K בהתאמה (ראה שרטוט).
נתון: BC = 6 ס"מ, CK = 14 ס"מ.
חשב את היקף המקבילית.



35) הצלעות AC ו-BC של המשולש ABC משיקות למעגל שמרכזו O , בנקודות K ו-B בהתאמה.
הצלע AB עוברת בנקודה O.
נתון: $AK = CK$, AB = 15 ס"מ.
א. חשב את גודלה של זווית A.
ב. חשב את אורכו של רדיוס המעגל.



36) משולש ABC חוסם מעגל אשר משיק לצלעותיו בנקודות D, E ו-F כמתואר באיור.
נתון כי: AC = 18 ס"מ, BD = 14 ס"מ.
מצא את היקף המשולש ABC.



37) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
מהנקודה A מעבירים את המיתרים AC ו-AG ואת המשיק AD כך שהמשולש ACD שווה שוקיים.
הישר CD חותך את היקף המעגל בנקודה E,
את המיתר AG בנקודה F ועובר דרך מרכז המעגל O
המיתר BG מקביל לישר החותך CD.
א. חשב את זוויות המשולש ACD.
ב. הוכח כי: $AF = FG$.
ג. רדיוס המעגל יסומן ב- R .
הוכח כי: $DC = 3R$.

תשובות סופיות:

31) א. $\alpha=135°$ ב. $\alpha=45°$ ג. $\alpha=40°$.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) 48 ס"מ.

35) א. $30°$ ב. 5 ס"מ.

36) 64 ס"מ.

37) א. $120°$, $30°$, $30°$. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

משיק ומיתר:

סיכום כללי:

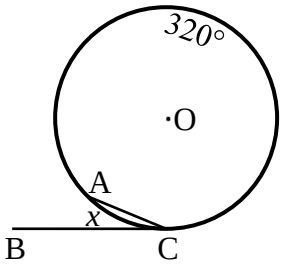
משפט:

1. הזווית הכלואה בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני.

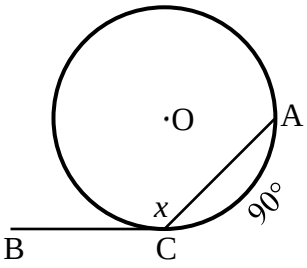
שאלות:

38) באיורים שלפניך נתון מעגל שמרכזו O, מיתר AC ומשיק BC בנקודה C.
מצא את x.

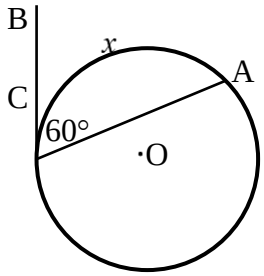
א.



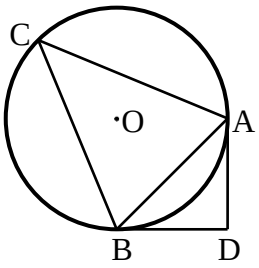
ב.



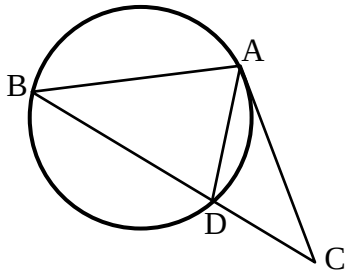
ג.

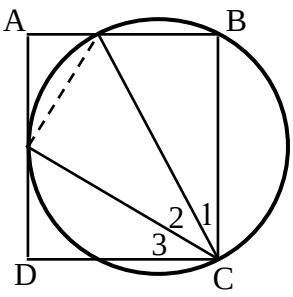


39) ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AC = BC)$
החסום במעגל שמרכזו O.
מהקדקודים A ו-B מעבירים משיקים אשר נחתכים בנקודה D.
ידוע כי זווית הבסיס במשולש ABC היא $68°$.
חשב את זווית ADB.



40) AC הוא משיק למעגל בנקודה A.
BC חותך את המעגל בנקודה D.
נתון כי $AD = CD$, הוכח: $AB = AC$.





41) הקדקודים B ו-C של המלבן ABCD מונחים על מעגל. צלע AD משיקה למעגל בנקודה G והצלע AB חותכת את המעגל בנקודה H.
הוכח: $\sphericalangle C_2 = \sphericalangle C_3$.
(הדרכה: סמן $\sphericalangle AGH = \alpha$).

תשובות סופיות:

38) א. $x = 20°$ ב. $x = 135°$ ג. $x = 120°$.
39) $92°$
40) שאלת הוכחה.
41) שאלת הוכחה.

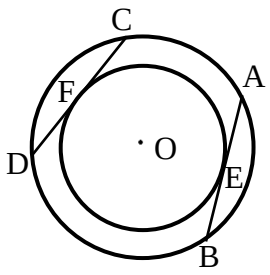
שני מעגלים:

סיכום כללי:

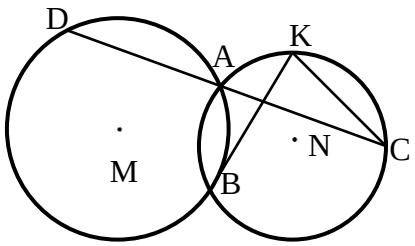
משפטים העוסקים בשני מעגלים:

1. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.
2. קטע המרכזים (או המשכו) של שני מעגלים משיקים עובר בנקודת ההשקה.

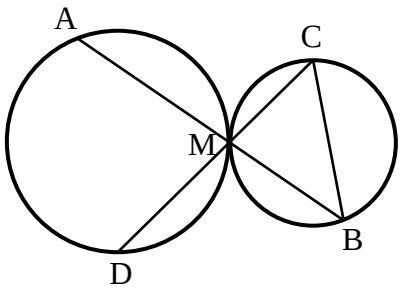
שאלות:



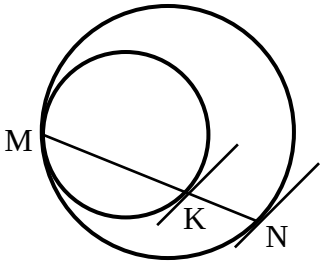
42) נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
דרך שתי נקודות E ו-F שעל היקף המעגל הפנימי מעבירים משיקים אשר חותכים את המעגל החיצוני בנקודות A, B, C ו-D. הוכח כי המיתרים AB ו-CD הנוצרים באופן זה שווים.



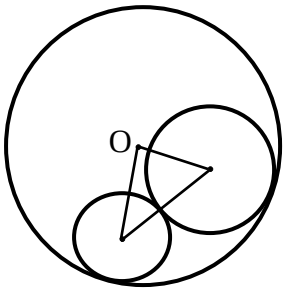
43) שני מעגלים M ו-N נחתכים בנקודות A ו-B.
הישר CD עובר דרך הנקודה A.
מעבירים משיק למעגל M בנקודה B
החותך את המעגל N בנקודה K.
הוכח כי: $CK \parallel BD$.



44) שני מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ בנקודה M.
דרך הנקודה M מעבירים שני ישרים חותכים.
האחד חותך את המעגל השמאלי בנקודה A ואת הימני בנקודה B והאחר חותך את המעגל השמאלי בנקודה D ואת הימני בנקודה C.
הוכח כי $AD \parallel BC$.

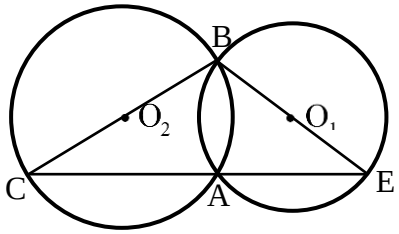


45) שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה M.
מעבירים מיתר MN במעגל החיצוני אשר חותך את המעגל הפנימי בנקודה K.
הוכח כי המשיקים לשני המעגלים בנקודות N ו-K מקבילים זה לזה.



46) המעגלים שמרכזיהם M ו-G משיקים מבחוץ זה לזה ומשיקים מבפנים למעגל שמרכזו O.
נתון כי רדיוס המעגל שמרכזו O הוא 8 ס"מ.
חשב את היקף המשולש OMG.

47) שני מעגלים שמרכיזהם O_1 ו- O_2 נחתכים בנקודות A ו-B.
מעבירים את הקטרים BC ו-BE.



א. הוכח כי הנקודות C, E ו-A נמצאות על ישר אחד.
ב. הוכח כי O_1O_2 הוא קטע אמצעים במשולש BCE.

תשובות סופיות:

42) שאלת הוכחה.
43) שאלת הוכחה.
44) שאלת הוכחה.
45) שאלת הוכחה.
46) 16 ס"מ.
47) שאלת הוכחה.

מעגל חוסם ומעגל חסום:

סיכום כללי:

משפטים העוסקים במעגל חוסם ומעגל חסום:

1. מרכז מעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים במשולש.
2. מרכז מעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי הזווית במשולש.
3. במרובע החסום במעגל, סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא $180°$.
(משפט הפוך) אם במרובע סכום זוג זויות נגדיות הוא $180°$,
המרובע בר חסימה במעגל.
4. במרובע החוסם מעגל סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.
(משפט הפוך) אם במרובע סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג
השני אז ניתן לחסום בתוכו מעגל.
5. כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל וניתן לחסום בתוכו מעגל.

שאלות:

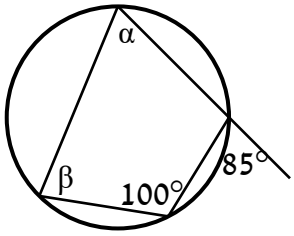
48) AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC.

א. הוכח: אם מרכז המעגל החסום במשולש ABC נמצא על AD אז המשולש ABC הוא שווה שוקיים.

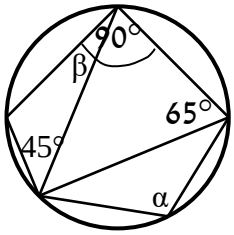
ב. בהמשך לסעיף א', האם מרכז המעגל החוסם את משולש ABC נמצא על AD?

49) מצא את הנעלמים בכל אחד מהסרטוטים שלפניך:

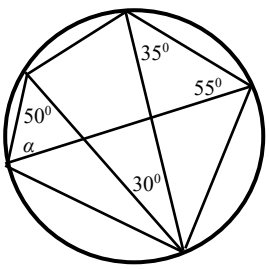
א.



ב.

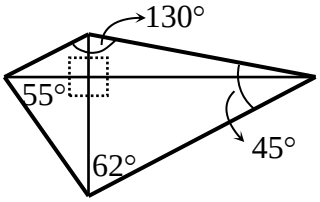


50) חשב את גודלה של הזווית α בסרטוט הבא:

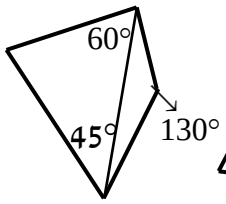


51) קבע אלו מהמרובעים הבאים ניתן לחסום במעגל:

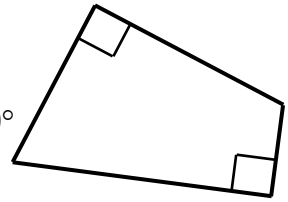
א.



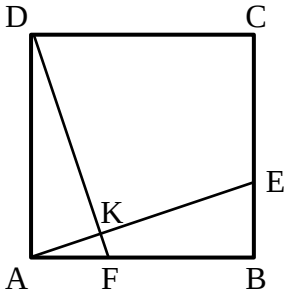
ב.



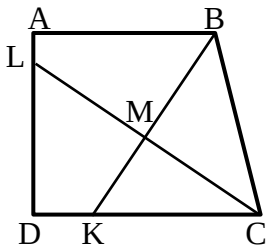
ג.



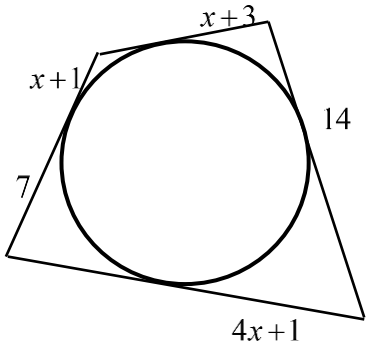
52) בריבוע ABCD נתון כי $AF = BE$.
הנקודה K היא חיתוך של הקטעים AE ו-DF.
הוכח כי את המרובע DKEC ניתן לחסום במעגל.



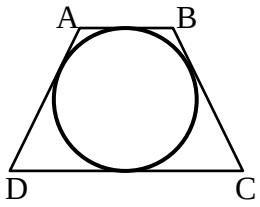
53) בטרפז ישר זווית ABCD שבו השוק AD מאונכת לבסיסים AB ו-DC הנקודות K ו-L נמצאות על הצלעות DC ו-AD בהתאמה, כך שהקטעים BK ו-CL הם חוצי הזוויות B ו-C בהתאמה.
חוצי הזוויות נפגשים בנקודה M.
הוכח: את המרובע DKML ניתן לחסום במעגל.
הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.



54) חשב את גודלו של x בשרטוט הבא:



55) בטרפז שווה שוקיים $(AB \| CD)$ ABCD
שהיקפו 60 ס"מ וזוויות הבסיס החדות שלו הן $60°$ חסום מעגל.
מצא את אורכי צלעות הטרפז.



תשובות סופיות:

48) שאלת הוכחה.

49) א. $\alpha=80°\ ,\ \beta=85°$ ב. $\alpha=110°\ ,\ \beta=20°$.

50) $\alpha=70°$.

51) ניתן לחסום את מרובע א' בלבד.

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) $x=2$

55) 15 ס"מ, 15 ס"מ, 7.5 ס"מ, 22.5 ס"מ.

שטחים והיקפים במעגל:

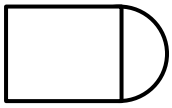
שאלות:

56) ענה על השאלות הבאות:

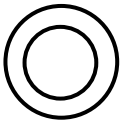
א. היקפו של עיגול הוא 44 ס"מ. חשב את שטחו.



ב. הצורה שבאיור היא $\frac{3}{4}$ עיגול.
היקף הצורה שווה ל-45 ס"מ.
חשב את אורך הרדיוס של העיגול.

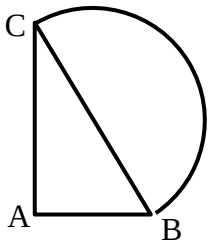


ג. שטח צורה המורכבת מריבוע וחצי עיגול הוא 30 סמ"ר.
חשב את רדיוס חצי העיגול.



ד. שטח טבעת הוא 55π סמ"ר.
הרדיוס הפנימי הוא 3 ס"מ.
חשב את הרדיוס החיצוני של הטבעת.

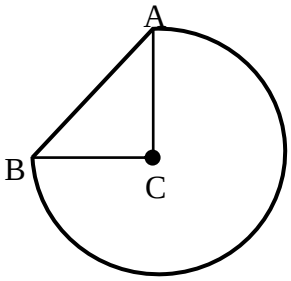
57) נתון משולש ישר זווית ABC, $(\sphericalangle A = 90°)$.
על היתר BC בונים חצי עיגול.
נתון: AB = 10 ס"מ , AC = 24 ס"מ , BC = 26 ס"מ.



א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.

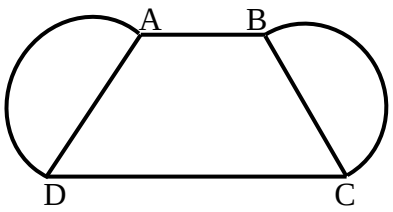
58) באיור שלפניך שלושה רבעי עיגול החסומים ע"י הקטע AB ומשולש ישר זווית ABC (C מרכז העיגול).
ידוע כי רדיוס העיגול הוא 14 ס"מ
וכי אורך הקטע AB הוא 19.8 ס"מ.



א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.

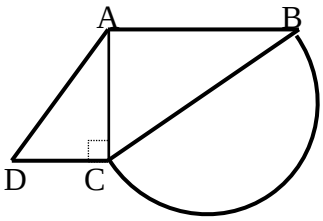
59) באיור שלפניך נתון טרפז שווה שוקיים ABCD, $(AB \| CD \, , \, AD = BC)$.
על שוקי הטרפז בונים חצאי עיגולים.
נתון: AB = 10 ס"מ, CD = 16 ס"מ , BC = 12 ס"מ.
אורך גובה הטרפז הוא 11.6 ס"מ.



א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.

60) נתון טרפז $ABCD$, $(AB\|CD)$. מעבירים את האלכסון AC אשר מאונך לבסיסים AB ו-DC של הטרפז. על השוק BC בונים חצי עיגול.



נתון: $AB = 24$ ס"מ, $AC = 18$ ס"מ.
שטח הטרפז הוא 283.5 סמ"ר.

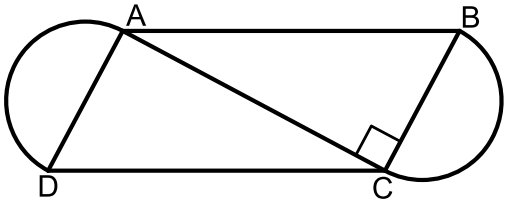
א. מצא את הבסיס DC.

ב. חשב את רדיוס העיגול.

ג. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ד. חשב את שטח הצורה המורכבת.

61) המרובע $ABCD$ הוא מקבילית.
על הצלעות BC ו-AD בונים שני חצאי עיגול זהים בעלי רדיוס R.
מעבירים את האלכסון AC.
ידוע כי האלכסון AC מאונך לצלע BC.



נתון: $AC = 4R-1$, $AB = 4R+1$.

א. מצא את רדיוס העיגולים, R.

ב. חשב את היקף המקבילית $ABCD$.

ג. חשב את השטח של הצורה המורכבת מהמקבילית ושני חצאי העיגולים.

62) נתון מעגל שאורך רדיוסו הוא 16 ס"מ.
חשב את אורך הקשת ואת שטח הגזרה המתאימות לזווית מרכזית בכל אחד מהמקרים הבאים:

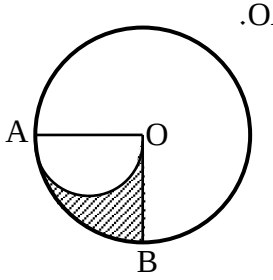
א. $60°$

ב. $45°$

ג. $270°$

ד. $17°$

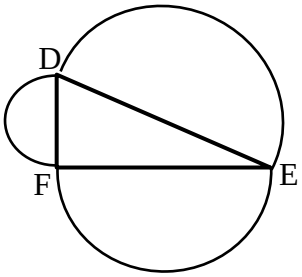
63) על הרדיוס OA של מעגל O בונים חצי מעגל אשר קוטרו הוא OA.
ידוע כי $\sphericalangle BOA = 90°$.



א. חשב את השטח המקווקו OBA
אם ידוע כי $OA =$ 10 ס"מ.

ב. הוכח באופן כללי כי שטח הגזרה OBA שווה לשטח חצי מעגל אשר קוטרו הוא OA.

64) על הצלעות של משולש ישר זווית ΔDEF $(\sphericalangle F = 90°)$ בונים חצאי מעגלים.
הוכח כי שטח חצי המעגל הבנוי על היתר שווה לסכום שטחי חצאי המעגלים הבנויים על הניצבים.



תשובות סופיות:

56) א. $S=\frac{484}{\pi}$ סמ"ר. ב. $R=6.706$ ס"מ. ג. $R=2.32$ ס"מ. ד. $R=8$ ס"מ.

57) א. $P=74.84$ ס"מ. ב. $S=385.46$ סמ"ר.

58) א. $P=85.77$ ס"מ. ב. $S=559.814$ סמ"ר.

59) א. $P=63.7$ ס"מ. ב. $S=263.89$ סמ"ר.

60) א. $DC=7.5$ ס"מ. ב. $R=15$ ס"מ. ג. $P=98.12$ ס"מ. ד. $S=636.929$ סמ"ר.

61) א. $R=4$ ס"מ. ב. $P_{ABCD}=50$ ס"מ. ג. $S=120+16\pi\approx170.26$ סמ"ר.

62) א. $l=5\frac{1}{3}\pi$ ס"מ, $S=42\frac{2}{3}\pi$ סמ"ר. ב. $l=4\pi$ ס"מ, $S=32\pi$ סמ"ר.
ג. $l=24\pi$ ס"מ, $S=192\pi$ סמ"ר. ד. $l=1.51\pi$ ס"מ, $S=12.08\pi$ סמ"ר.

63) א. 12.5π סמ"ר. ב. שאלת הוכחה.

64) שאלת הוכחה.

מתמטיקה כללית

פרק 14 - גיאומטריה אוקלידית - פרופורציה ודמיון

תוכן העניינים

1. משפט תאלס 238
2. הרחבות של משפט תאלס 241
3. משפט חוצה הזווית 245
4. דמיון משולשים 249
5. יחסים בין גדלים שונים ושטחים במשולשים דומים 256
6. פרופורציה במשולש ישר זווית 260
7. פרופורציות במעגל 261

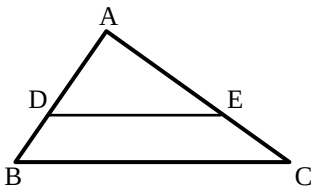
משפט תאלס:

סיכום כללי:

- שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.
- משפט הפוך: אם שני ישרים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים הישרים מקבילים.

- משפט תאלס + ההפוך:

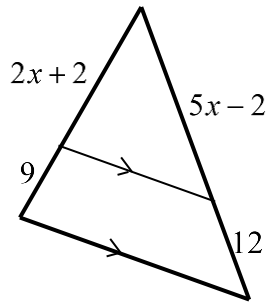
$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$



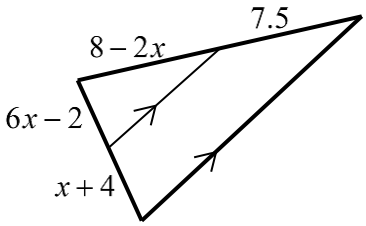
שאלות:

1) מצא את ערכו של x בשרטוטים הבאים:

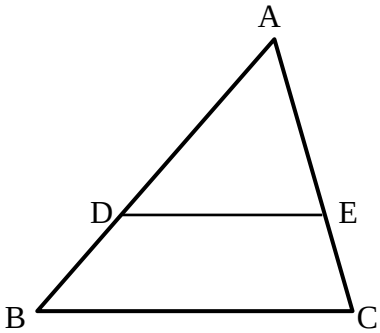
א.



ב.

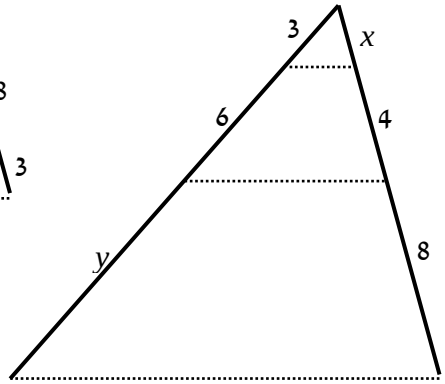


2) בסרטוט שלפניך נתון $DE \parallel BC$.
AC = 30 ס"מ , AE = 20 ס"מ , BD = 12 ס"מ.
מצא את אורך הקטע AD.

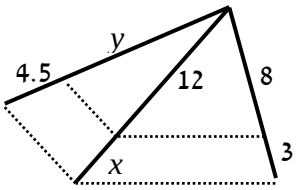


3) חשב את x ואת y בסרטוטים שלפניך (הקטעים המקווקוים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:

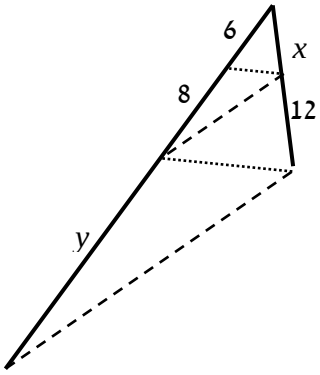
א.



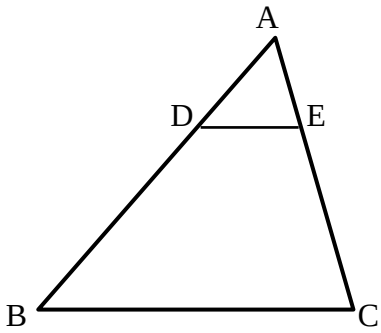
ב.



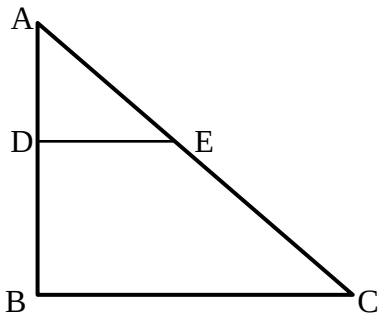
ג.



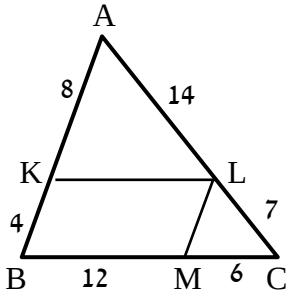
4) בסרטוט שלפניך נתון:
$DE \parallel BC$, $\frac{AD}{BD}=\frac{2}{7}$, $AC =$ 36 ס"מ.
מצא את אורכי הקטעים AE ו-CE.



5) במשולש שלפניך נתון $DE \parallel BC$.
כמו כן: $\sphericalangle ADE = 90°$
וכן: $AE = BD =$ 10 ס"מ , $DE =$ 8 ס"מ.
מצא את אורכי הקטעים AD , CE ו-BC.



6) מרובע KLMB חסום במשולש ABC.
הנתונים המספריים רשומים בסרטוט.
כל המידות הן בס"מ.
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.



תשובות סופיות:

1) א. $x=2$ ב. $x=1$.

2) 24 ס"מ.

3) א. $x=2\ ,\ y=12$ ב. $x=4.5\ ,\ y=12$ ג. $x=9\ ,\ y=18\frac{2}{3}$.

4) $AE=$ 8 ס"מ , $CE=$ 28 ס"מ.

5) $AD=$ 6 ס"מ , $BC=21\frac{1}{3}$ ס"מ , $CE=16\frac{2}{3}$ ס"מ

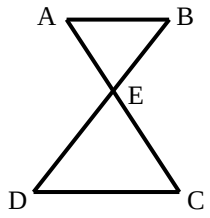
6) שאלת הוכחה.

הרחבות של משפט תאלס:

סיכום כללי:

- משפט תאלס המורחב + ההפוך:
$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

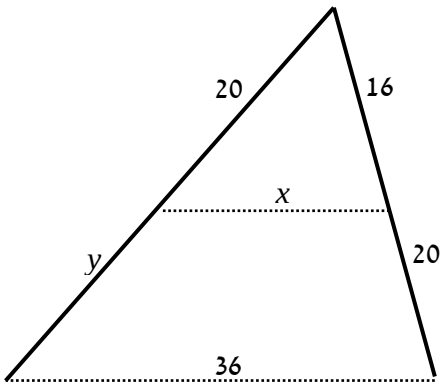
- משפט תאלס "שעון חול" + ההפוך:
$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \frac{BE}{DE}=\frac{AE}{CE}=\frac{AB}{CD}$$



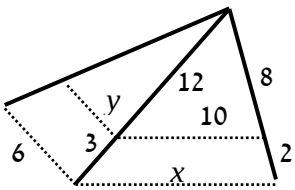
שאלות:

7) חשב את x ואת y בסרטוטים שלפניך (הקטעים המקווקוים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:

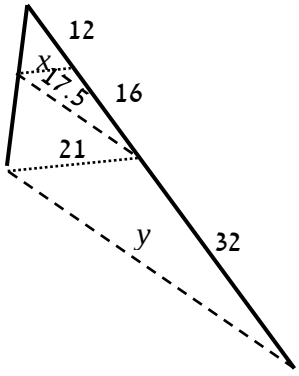
א.



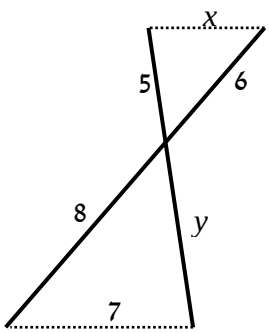
ב.

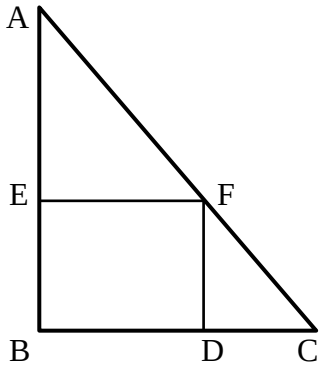


ג.

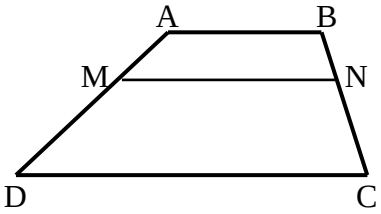


ד.

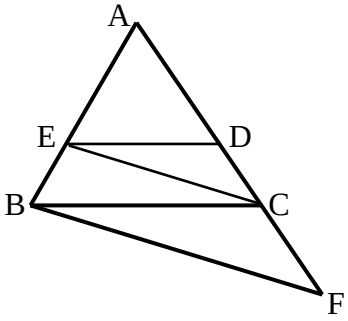




8) המרובע EFBD הוא מלבן החסום במשולש ישר זווית ABC . נתון כי: 20 ס"מ = AB ,
15 ס"מ = BC , 18 ס"מ = AF.
מצא את אורכי צלעות המלבן.



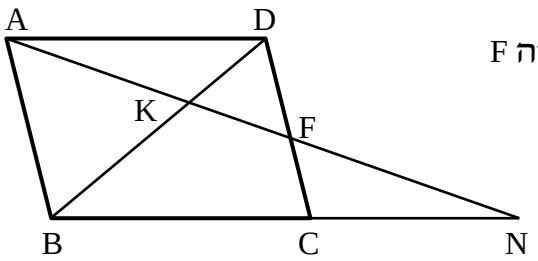
9) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \| CD)$.
מעבירים קטע MN אשר מקביל לבסיסים.
הוכח: $\frac{AM}{DM} = \frac{BN}{CN}$.



10) באיור שלפניך נתון: $DE \| BC \; , \; CE \| BF$.
הוכח את הטענות הבאות:

א. $\frac{AD}{CD} = \frac{AC}{CF}$.

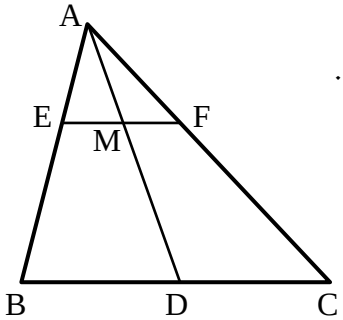
ב. $AC^2 = AD \cdot AF$.



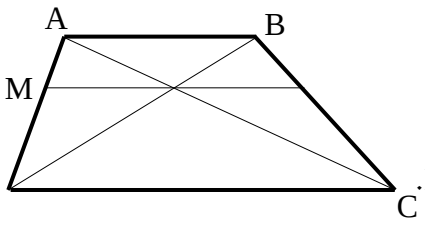
11) במקבילית ABCD מעבירים ישר דרך הנקודה A החותך את הצלע CD בנקודה F ונפגש עם המשך BC בנקודה N.
הוכח את הטענות הבאות:

א. $\frac{NK}{AK} = \frac{AK}{KF}$.

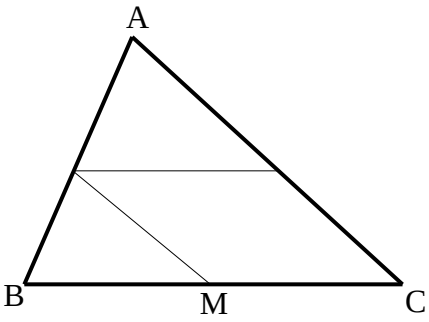
ב. $\frac{BC}{CN} = \frac{DF}{CF}$.



12) במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC.
הקטע EF מקביל ל-BC וחותך את התיכון בנקודה M.
הוכח כי: $EM = FM$.



13) בטרפז ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה Q.
בנקודה Q העבירו קטע המקביל לבסיסי הטרפז וחותך את שוקי הטרפז בנקודות M ו-N כמתואר בשרטוט.
נתון: $DC = 18$ ס"מ , $DQ = 9$ ס"מ, $BQ = 3$ ס"מ.
חשב את גודל הקטע MQ.

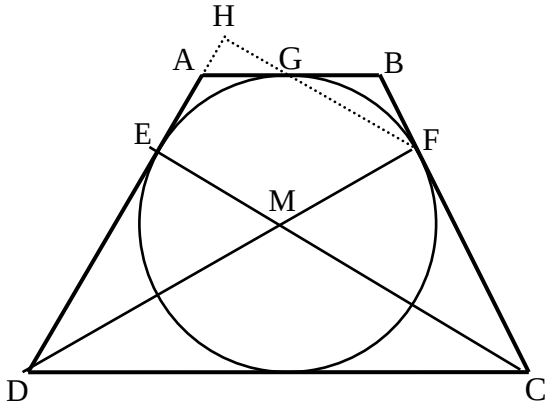


14) בשרטוט נתון: $\frac{AK}{CK}=\frac{CM}{BM}=\frac{AL}{BL}$.

א. הוכח: המרובע KLMC הוא מקבילית.

ב. נתון: $AL=1.5BL$, $BC = 10$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע LK.

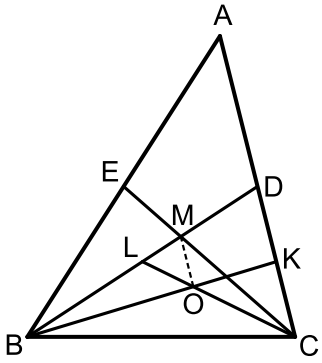
15) הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים.
חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו בנקודות E , F ו-G כמתואר באיור.
הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז ונחתכים בנקודה M.



א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.

ב. חשב את זוויות הטרפז.

ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.
חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$.



16) במשולש ABC מעבירים את התיכונים BD ו-CE אשר נפגשים בנקודה M.
במשולש BDC מעבירים את התיכונים CL ו-BK הנפגשים בנקודה O.

א. הוכח כי: $3LM = BL$.

ב. הוכח כי: $AC \parallel MO$.

ג. נתון: $S_{BLC} = 27$.
חשב את שטח המשולש MOL.

תשובות סופיות:

7) א. $x=16\ ,\ y=25$ ב. $x=12.5\ ,\ y=4.8$

ג. $x=9\ ,\ y=37.5$ ד. $x=5.25\ ,\ y=6\frac{2}{3}$.

8) 10.8 ס"מ ו-5.6 ס"מ.

9) שאלת הוכחה.

10) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

11) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) 4.5 ס"מ.

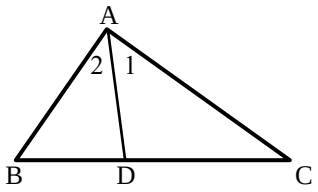
14) א. שאלת הוכחה. ב. 6 ס"מ.

15) א. שאלת הוכחה. ב. $60°,120°$ ג. $\frac{2}{3}$.

16) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 3.

משפט חוצה הזווית:

סיכום כללי:



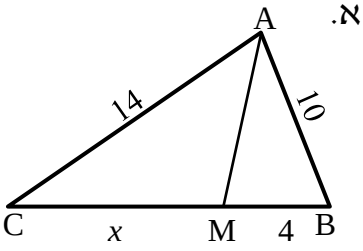
- חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית ביחס הזהה ליחס בין הצלעות שביניהן הוא כלוא ולהיפך.

  אם: $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ אז: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$ ולהיפך.

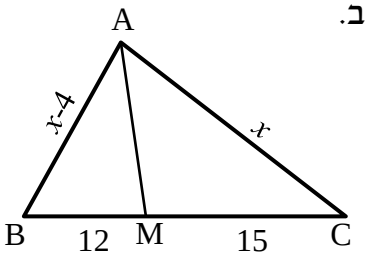
שאלות:

17) מצא את גודלו של x בסרטוטים הבאים אם נתון כי AM חוצה זווית A בכל המשולשים, כל הגדלים הם בס"מ:

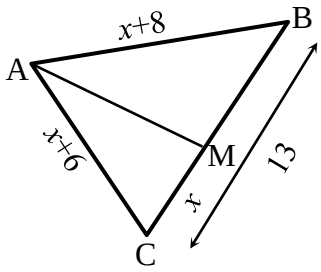
א.



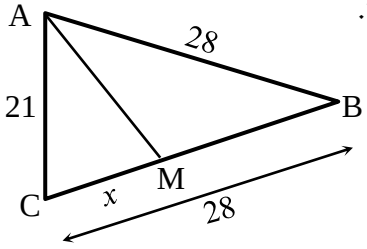
ב.



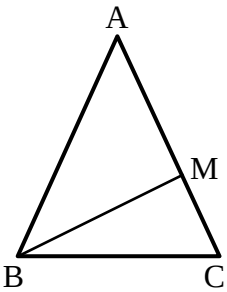
ג.

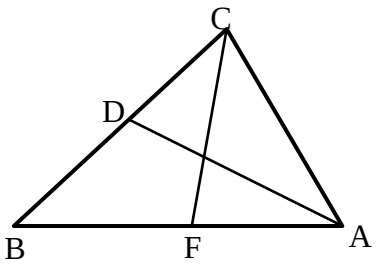


ד.



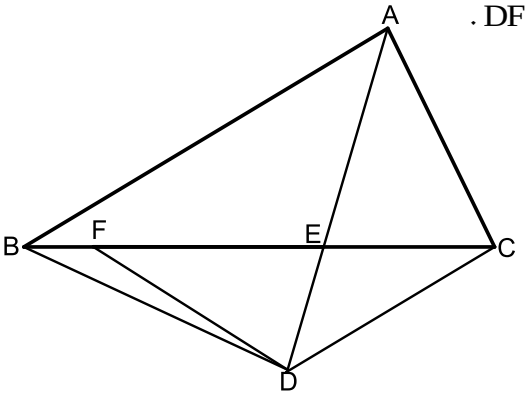
18) נתון משולש שווה שוקיים ABC, $(AB = AC)$.
ידוע כי היקפו הוא 28 ס"מ.
הקטע BM הוא חוצה זווית B.
נתון כי הקטע AM גדול פי 3 מהקטע MC.
חשב את אורך הקטע MC.





19) הקטעים AD ו-CF הם חוצי הזוויות A ו-C בהתאמה במשולש ABC.
נתון: $AB = 18$ ס"מ , $AC = 12$ ס"מ , $CD = 6$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע AF.

20) נתון משולש ABC. הקטע AE חוצה את זווית A של המשולש.
ממשיכים את AE עד לנקודה D כך שנוצר המשולש BDC.
F היא נקודה על הצלע BC המקיימת: $DF = FE = DC$.
הצלע AB מקבילה לצלע DC.

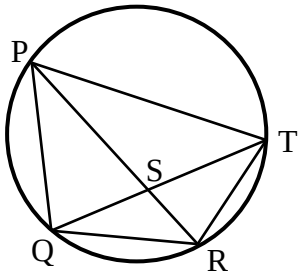


א. הוכח כי: $AC = EF$.

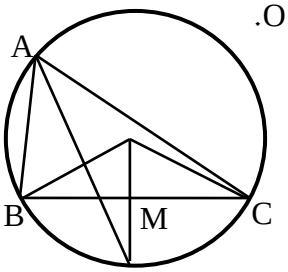
ב. הוכח: $\frac{AB}{BE} = \frac{FE}{CE}$.

ג. הָמְשֵׁך את הקטע DF עד לנקודה H שעל הצלע AB.
ידוע כי המרובע ACDH הוא בר חסימה.
חשב את זוויות המשולש DEF.

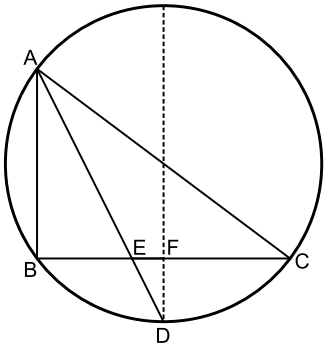
21) המרובע PQRT חסום במעגל.
נתון כי: $QR = RT$.
ידוע כי: $PQ = 20$ ס"מ , $PT = 28$ ס"מ , $QT = 24$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע QS.



22) הנקודות A, B, C ו-D מונחות על היקפו של מעגל שמרכזו O.
הרדיוס DO חוצה את הזווית BOC.
נתון: $AB = 8$ ס"מ , $AC = 12$ ס"מ , $BC = 10$ ס"מ.
חשב את אורכו של הקטע MN.



23) במעגל שרדיוסו הוא 10 ס"מ המיתרים AB ו-BC מאונכים זה לזה.
הנקודה D היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{BC}$. הקטע AD חותך את המיתר BC בנקודה E.
אורך המיתר AB הוא 12 ס"מ.

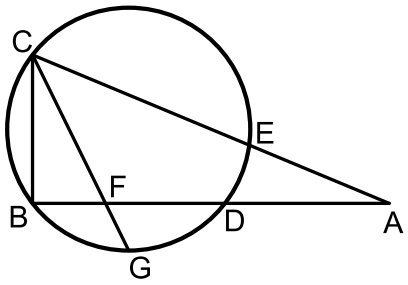


א. חשב את אורך הקטע BE.
מהנקודה D מעבירים מיתר החותך את המיתר BC בנקודה F ומקביל למיתר AB.

ב. הוכח כי מיתר זה עובר דרך מרכז המעגל.

ג. חשב את אורך הקטע FE.

24) הישרים AB ו-AC חותכים את המעגל בנקודות D ו-E בהתאמה כך שהמיתרים BD ו-BC מאונכים זה לזה.

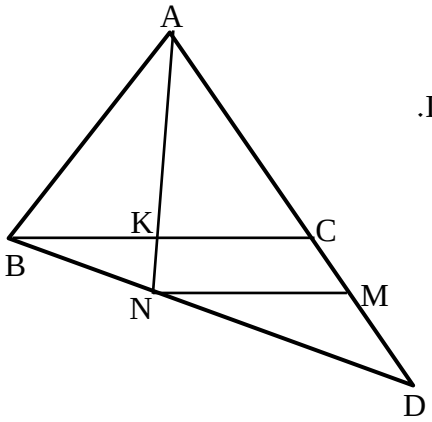


המיתר CG חוצה את הקשת הקטנה $\overset{\frown}{BGD}$.
וחותך את המיתר BD בנקודה F.
נתון: $\frac{AC}{AB}=\frac{13}{12}$. נסמן: $AB=t$.

א. הבע באמצעות t את אורך המיתר BC.

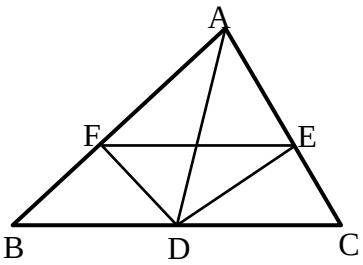
ב. נתון כי רדיוס המעגל הוא 5 ס"מ
וכי: $\frac{BF}{DF}=\frac{3}{5}$.
חשב את אורך הקטע AB.

25) נתון משולש ABC.
ממשיכים את הצלע AC מהכיוון של C עד לנקודה D.
מחברים את הנקודה D עם הקדקוד B.
מעבירים את הקטע AK אשר חוצה את זווית A במשולש ABC.
המשך AK חותך את BD בנקודה N.
מעבירים את הקטע MN. נתון: $MN \parallel BC$.

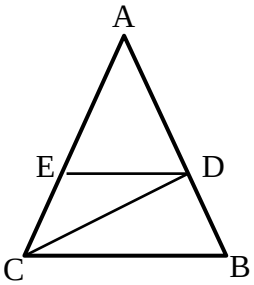


הוכח: $\frac{AB}{AD}=\frac{CM}{DM}$.

26) נתון משולש ABC. מעבירים את התיכון AD לצלע BC.
נתון כי DE הוא חוצה זווית $\sphericalangle ADC$
וכי DF הוא חוצה זווית $\sphericalangle ADB$.
הוכח: $EF \parallel BC$.



27) נתון משולש ABC. מעבירים את הקטעים CD ו-DE.
נתון כי: $DE \parallel BC$ ו- $AC=2BC$.
הקטע AC גדול פי 3 מהקטע DE.
הוכח כי: $\sphericalangle ACD=\sphericalangle BCD$.



תשובות סופיות:

17) א. $x=5.6$ ב. $x=20$ ג. $x=6$ ד. $x=12$.

18) 3 ס"מ.

19) 8 ס"מ.

20) שאלת הוכחה. ג. $36°$, $72°$, $72°$.

21) 10 ס"מ.

22) 1 ס"מ.

23) א. $BE=6$ ב. שאלת הוכחה. ג. $EF=2$.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) שאלת הוכחה.

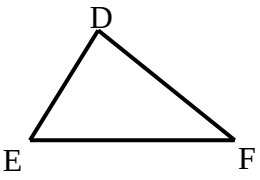
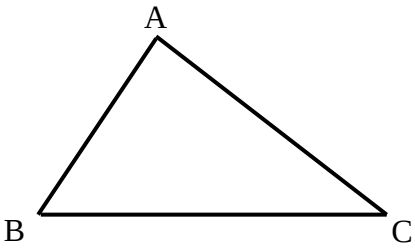
27) 15 ס"מ.

דמיון משולשים:

סיכום כללי:

הגדרה:

משולשים דומים הם משולשים ששווים זה לזה בכל זוויותיהם ושצלעותיהם שומרות בהתאמה על אותו יחס.

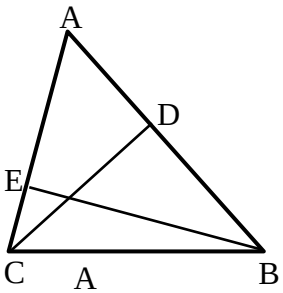
יחס הדמיון ושוויונות	משולש ראשון	משולש שני
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ $\Updownarrow$ $\sphericalangle A = \sphericalangle D \ , \ \sphericalangle B = \sphericalangle E \ , \ \sphericalangle C = \sphericalangle F$ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$		

משפטי הדמיון:

- משפט דמיון זווית-זווית (ז.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ): אם בין שני משולשים שתי צלעות שומרות על אותו יחס והזוויות שבניהן שווה אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ): אם בין שני משולשים שלוש הצלעות שומרות על אותו יחס אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז): אם בין שני משולשים שתי לצעות שומרות על אותו יחס והזווית שמול הצלע הגדולה מבניהם שווה אז המשולשים דומים.

שאלות:

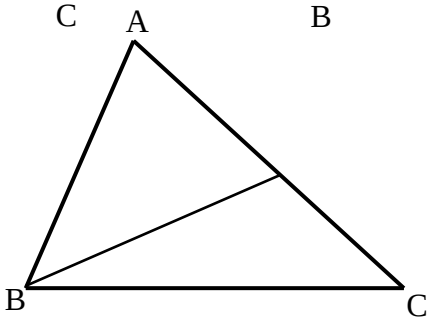
משפט דמיון ז.ז:



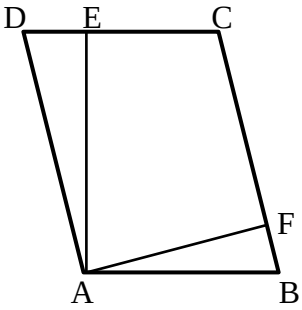
28) CD ו-BE הם גבהים במשולש ABC.

א. הוכח כי: $\Delta ABE \sim \Delta ACD$.

ב. נתון כי: 18 ס"מ = AB, 12 ס"מ = BE,
10 ס"מ = CD. חשב את אורך הצלע AC.



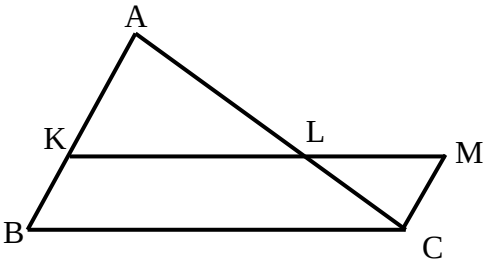
29) במשולש ABC העבירו את הקטע BK
כך ש-$\sphericalangle AKB = \sphericalangle ABC$.
הוכח: $\Delta AKB \sim \Delta ABC$.



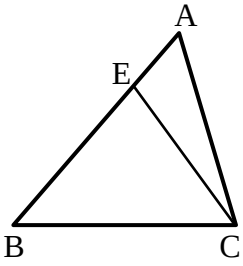
30) המרובע ABCD הוא מקבילית.
מעבירים גבהים AE ו-AF לצלעות DC ו-BC בהתאמה.

א. הוכח כי: $\Delta ADE \sim \Delta AFB$.

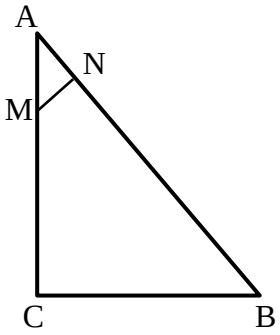
ב. הוכח כי: $DC \cdot AE = BC \cdot AF$
והסבר את המשמעות הגיאומטרית של התוצאה.



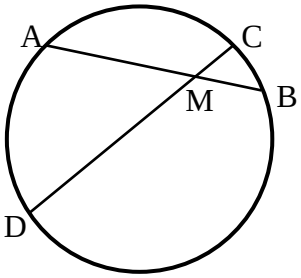
31) נתונה מקבילית BKMC.
המשיכו את הצלע BK עד לנקודה A.
הקטע AC חותך את הצלע KM בנקודה L.
הוכח: $LC \cdot BC = LM \cdot AC$.



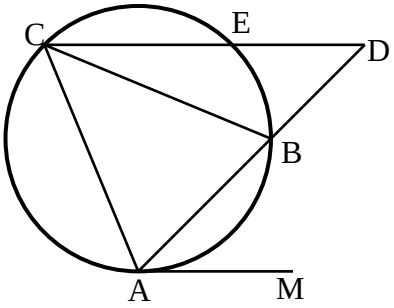
32) מעבירים את הקטע CE במשולש ABC.
ידוע כי: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ECB$ וכן: 8 ס"מ = BE,
10 ס"מ = BC. חשב את AB.



33) המשולש ABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle C = 90°)$.
מנקודה M שעל הניצב AC העלו אנך NM ליתר AB.
נתון כי: AB = 20 ס"מ, AN = 4 ס"מ, BC = 12 ס"מ.
מצא את אורך הקטע AM.

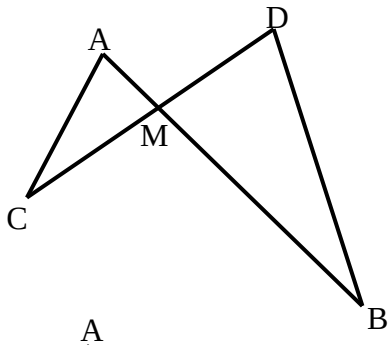


34) המיתרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.
א. הוכח כי: $\Delta ADM \sim \Delta CBM$.
ב. נתון כי: AM = 5 ס"מ, DM = 8 ס"מ,
CM = 2 ס"מ.
חשב את אורכו של BM.

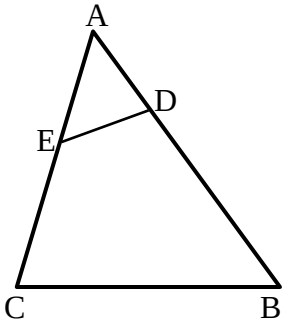


35) המשולש ABC חסום במעגל.
מהנקודה A מעבירים משיק AM.
ממשיכים את AB עד לנקודה D שמחוץ למעגל.
מחברים את הנקודה D עם הקדקוד C.
הישר CD חותך את המעגל
בנקודה E כך ש- $CE \parallel AM$.
הוכח כי AC הוא הממוצע הגיאומטרי
בין AB לבין AD.
כלומר: $AC^2 = AB \cdot AD$.

משפט דמיון צ.ז.צ:

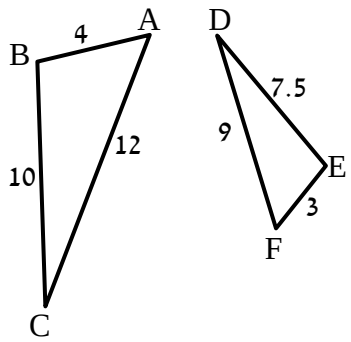


36) הישרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.
אורכי הקטעים הם: AM = 3 ס"מ,
BM = 10 ס"מ, CM = 6 ס"מ, DM = 5 ס"מ.
א. הוכח כי: $\Delta AMC \sim \Delta DMB$.
ב. האם $AC \parallel BD$? נמק.
ג. מצא את אורכו של AC
אם נתון כי BD שווה ל-14 ס"מ.



37) לפניך משולש ABC.
מעבירים את הקטע DE אשר יוצר את הגדלים הבאים:
AD = 4 ס"מ, BD = 11 ס"מ, AE = 5 ס"מ, CE = 7 ס"מ.
א. הוכח כי: $\Delta ADE \sim \Delta ACB$.
ב. הוכח כי את המרובע BCED אפשר לחסום במעגל.

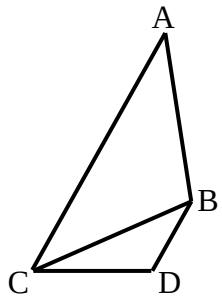
משפט דמיון צ.צ.צ:



38) בסרטוט שלפניך רשומים שני משולשים.
אורכי צלעותיהם נתונים בתרשים (בס"מ).

א. הוכח כי המשולשים דומים ורשום את הדמיון עפ"י הקדקודים.

ב. רשום את הזוויות השוות בשני המשולשים.

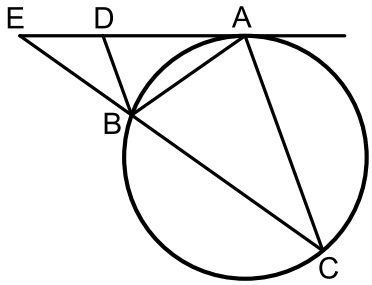


39) נתונים המשולשים ABC ו-BDC.
ידוע כי: $AC = 16$ ס"מ, $AB = 10$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ, $DC = 5$ ס"מ, $BD = 4$ ס"מ.

א. הוכח כי שני המשולשים דומים ורשום אותם לפי סדר התאמת קדקודיהם.

ב. הוכח כי: $AC \parallel BD$.

שונות – דמיון משולשים:

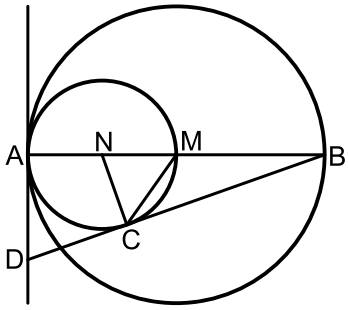


40) מעבירים משיק AE למעגל הנתון באיור.
מנקודת ההשקה מעבירים את המיתרים AB ו-AC כך שנוצר המשולש ABC. ידוע כי: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$.
המשך המיתר BC נפגש עם המשיק בנקודה E.
המיתר AB חוצה את זווית CBD.

א. הוכח כי הקטע BD מקביל למיתר AC.

ב. הוכח: $\Delta ABD \sim \Delta CBA$ וכתוב את יחס הדמיון.

ג. הוכח: $\frac{DE}{BE} = \frac{BD}{AB}$.



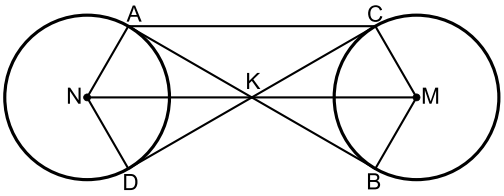
41) המעגלים שמרכזם בנקודות M ו-N משיקים זה לזה מבפנים בנקודה A כך שהיקף המעגל הפנימי עובר בנקודה M.
דרך הנקודה A מעבירים משיק.
AB הוא קוטר במעגלים ו-C היא נקודה הנמצאת על היקף המעגל הפנימי כך שהישר החותך BD משיק למעגל הפנימי בנקודה זו.

א. הוכח: $\Delta ABD \sim \Delta CBN$ וחשב את יחס הדמיון.

ב. נתון כי: $AD = \sqrt{8}$.
חשב את רדיוס המעגל הגדול.

ג. הוכח: $BC = 2CD$.

42) נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס זהה M ו-N.
מעבירים שני משיקים למעגלים AB ו-CD הנחתכים בנקודה K.
מעבירים את הרדיוסים AN ו-DN במעגל השמאלי ו-BM ו-CM במעגל הימני.

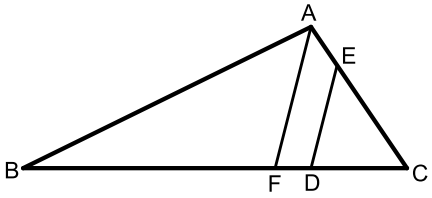


א. הוכח: $KN = KM$.

ב. הוכח כי המרובע ACMN הוא טרפז שווה שוקיים.

ג. רדיוס המעגלים הוא R וידוע כי המשולש BKC הוא שווה צלעות.
הבע באמצעות R את היקף הטרפז ACMN.

43) על הצלעות של המשולש ABC הקצו את הנקודות D ו-E כך שהמרובע AEDB הוא בר חסימה.
הנקודה D מחלקת את הצלע BC כך שהקטע BD גדול פי 3 מהקטע DC.

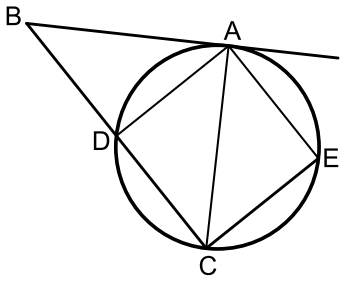


א. הוכח: $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.

ב. נתון גם כי: $AC \cdot CE = 36$.
חשב את אורך הקטע DC.

ג. מעבירים מהקודקוד A את הקטע AF המקביל לקטע DE.
נתון כי: $AC = 9$.
חשב את היחס: $\frac{DF}{BC}$.

44) הקטע AB משיק למעגל בנקודה A.
מהנקודה B מעבירים ישר חותך למעגל החותך אותו בנקודות C ו-D. E היא נקודה על המעגל כך ש- $\sphericalangle AEC = 90°$.
נתון כי המיתר AC חוצה את זווית BCE.



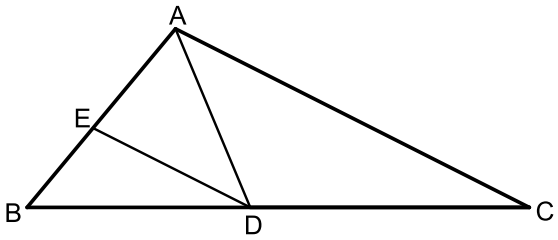
א. הוכח: $\Delta ABC \sim \Delta EAC$.

ב. נסמן ב- R את רדיוס המעגל.
הוכח: $R = \frac{\sqrt{BC \cdot CE}}{2}$.

ג. איזה מרובע יהיה המרובע ADCE אם יתקיים: $2CE = BC$. נמק.

45) במשולש ABC הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות BC ו-AB בהתאמה.

נתון כי: $DE \parallel AC$, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BED$.



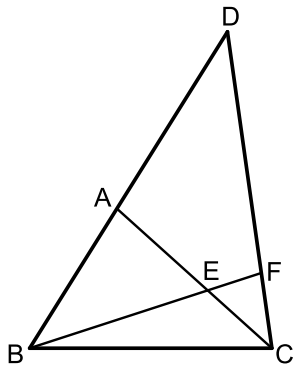
א. הוכח: $AD \cdot BD = AB \cdot DE$.

ב. ידוע כי הנקודה D מחלקת את הצלע BC באופן הבא: $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$

וכי: $AD \cdot BD = 16$. חשב את המכפלה: $AB \cdot AC$.

46) מהקודקוד C של המשולש BCD מעבירים את הקטע AC כך שהמשולש ACD הוא שווה שוקיים $(AC = AD)$.

הנקודה F נמצאת על הצלע CD כך שמתקיים $3 \cdot \sphericalangle ACD = \sphericalangle BEC$, $\sphericalangle D = \sphericalangle CBF$.



א. הוכח כי הקטע BF חוצה את זווית $\sphericalangle B$.

ב. הוכח כי: $\Delta AEB \sim \Delta FEC$.

ג. הוכח כי: $\frac{BE}{BC} = \frac{AE}{FC}$.

תשובות סופיות:

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

30) שאלת הוכחה.

31) שאלת הוכחה.

32) 12.5 ס"מ.

33) 5 ס"מ.

34) א. שאלת הוכחה. ב. 3.2 ס"מ.

35) א. שאלת הוכחה.

36) א. שאלת הוכחה ב. לא. ג. 8.4 ס"מ.

37) א. שאלת הוכחה ב. שאלת הוכחה

38) א. $\Delta ABC \sim \Delta FED$ ב. $\sphericalangle C = \sphericalangle D$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, $\sphericalangle A = \sphericalangle F$.

39) א. $\Delta ABC \sim \Delta CDB$ ב. שאלת הוכחה.

40) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

41) א. שאלת הוכחה. ב. 4 ס"מ. ג. שאלת הוכחה.

42) א. שאלת הוכחה ב. שאלת הוכחה. ג. $9R$.

43) א. שאלת הוכחה ב. 3 ס"מ. ג. $\frac{DF}{BC}=\frac{5}{16}$.

44) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. ריבוע.

45) א. שאלת הוכחה. ב. $AB\cdot AC=36$.

46) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

יחסים בין גדלים שונים ושטחים במשולשים דומים:

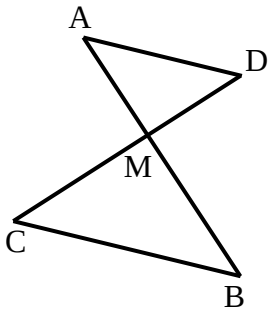
שאלות:

47) הוכח את חלקי המשפט הבאים:

א. גבהים במשולשים דומים לצלעות המתאימות בכל משולש, מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.

ב. תיכונים במשולשים דומים לצלעות המתאימות בכל משולש, מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.

ג. היקפים של משולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.



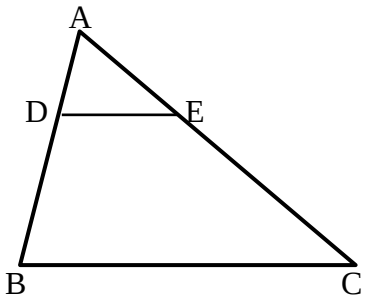
48) הקטעים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.

נתון כי: $AD \parallel BC$ וכן נתונים הגדלים הבאים:

$AD = 4$ ס"מ , $BC = 6$ ס"מ , $S_{ADM} = 36$ סמ"ר.

א. הוכח כי: $\Delta AMD \sim \Delta BMC$.

ב. חשב את שטח המשולש MBC.

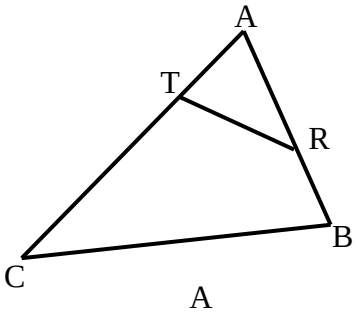


49) במשולש ABC הקטע DE מקביל לצלע BC.

נתון: $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$ וכי: $S_{ADE} = 20$ סמ"ר.

א. חשב את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המרובע DECB.

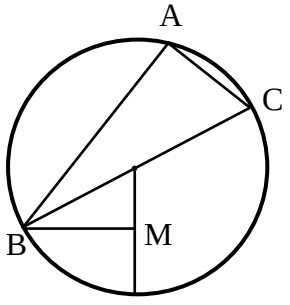


50) בסרטוט שלפניך נתון משולש ABC ובו קטע RT כך שמתקיימים האורכים הבאים:

$BR = 4$ ס"מ , $AT = 4$ ס"מ , $AR = 6$ ס"מ,

$CT = 11$ ס"מ , $S_{ABC} = 100$ סמ"ר.

מצא את שטח המרובע RTCB.



51) המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.

הצלע BC היא קוטר המעגל.

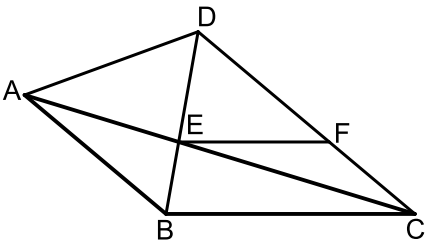
הקטע BM מאונך לרדיוס DO.

נתון: $AC = 2OM$.

א. הוכח: $\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{BD}$.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\Delta BOM}}{S_{\Delta BAC}}$.

52) נתון משולש ABC. על הצלע AB של המשולש ABC בונים משולש שווה צלעות ABD.
הצלע AC חותכת את הצלע BD בנקודה E
אשר ממנה מעבירים ישר EF המקביל לצלע BC.
נתון כי: $\sphericalangle DBC = 80°$, $\sphericalangle DCB = 40°$.



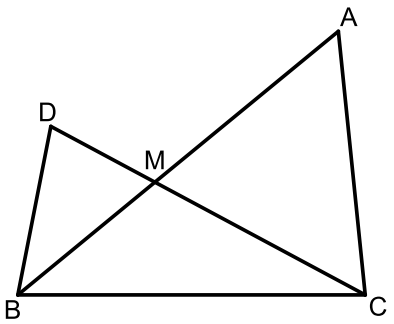
א. הוכח כי המשולשים ABE ו-CDE דומים.

ב. הוכח: $FC \cdot CE = AE \cdot DF$.

ג. נתון כי: $BC = 1.5 \cdot EF$.
הוכח: $\frac{AE}{CE} = \frac{1}{2}$.

ד. חשב את יחס השטחים: $\frac{S_{ABE}}{S_{CDE}}$.

53) נתון משולש ABC. על הצלע BC של המשולש ABC בונים משולש נוסף BDC.
הצלעות DC ו-AB נחתכות בנקודה M.
הצלע AB חוצה את זווית B וידוע כי: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle B2$.

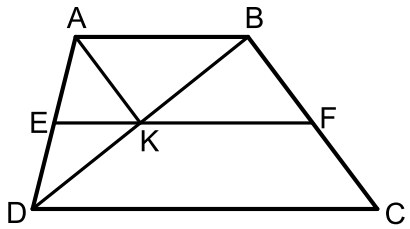


א. הוכח: $\Delta ACM \sim \Delta DBM$.

ב. הוכח: $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{CM}$.

ג. נתון כי: $\frac{AM}{CM} = \frac{8}{5}$ וכי אורך הצלע BD הוא 6 ס"מ.
סכום הצלעות AC ו-BC הוא 19.5 ס"מ.
חשב את היחס: $\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}}$.

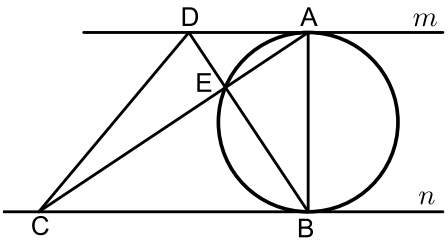
54) המרובע ABCD הוא טרפז, $(AB \| CD)$.
מעבירים את קטע האמצעים EF החותך את אלכסון הטרפז BD בנקודה K.
ידוע כי הקטע AK מקביל לשוק BC של הטרפז.



א. הוכח כי המרובע ABFK הוא מקבילית.

ב. נסמן: $S_{BKF} = S$.
הבע באמצעות S את שטח הטרפז ABCD.

55) בין המשיקים המקבילים m ו-n מעבירים מעגל כך ש-AB הוא הקוטר היוצא משתי נקודות ההשקה שלהם.
הנקודות D ו-C נמצאות על המשכי המשיקים כך שהמרובע ABCD הוא טרפז.
אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה E שנמצאת על היקף המעגל.
ידוע כי: $S_{ABC}=3\cdot S_{DAB}$.
שטח המשולש ADE יסומן ב- S.
בטא באמצעות S את שטח הטרפז ABCD.



56) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
מהנקודה C שעל היקף המעגל מעבירים את הרדיוס CO ואת המיתר CD החותך את הקוטר בנקודה E.
מהנקודה D מעבירים את המיתרים BD ו-AD.
ידוע כי המיתר CD מקיים: $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{BE}$.
נתון: $AD=DE$.

א. הוכח כי הרדיוס CO מאונך לקוטר AB.

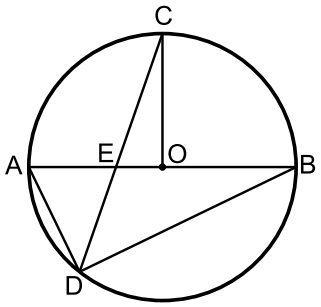
ב. הוכח: $\Delta COE\sim\Delta BDA$.

ג. נתון כי: $BD=9\sqrt{2+\sqrt{2}}\approx$ 16.63 ס"מ.

i. חשב את אורכו של רדיוס המעגל.

ii. חשב את היחס: $\frac{S_{COE}}{S_{BDA}}$

(שים לב, הינך יכול להשאיר $\sqrt{2}$ בתשובתך הסופית).



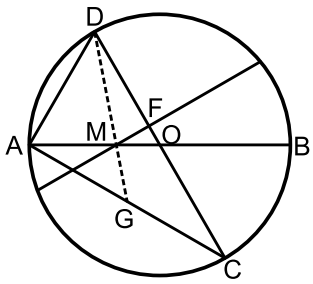
57) AB ו-CD הם קטרים במעגל שמרכזו O.
מעבירים מיתר החותך את AB בנקודה M כך שמתקיים: $2AM=BM$ ואת CD בנקודה F כך שמתקיים: $FM\perp CD$.
ידוע כי זווית BMF היא $30°$.
מעבירים את המיתרים AC ו-AD כך שנוצר המשולש ACD.

א. הוכח: $\sphericalangle CAB=\sphericalangle BMF$.

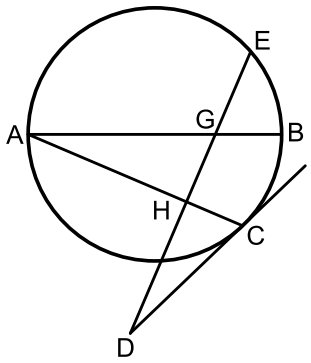
ב. i. הוכח כי המשולשים ADC ו-FOM דומים.

ii. פי כמה קטן הקטע FO מרדיוס המעגל?

ג. מעבירים מהקודקוד D של המשולש ACD קטע העובר דרך הנקודה M וחותך את המיתר AC בנקודה G.
חשב פי כמה גדול שטח המשולש DGC משטח המשולש MOF.



58) AB הוא קוטר במעגל.
מהנקודה A מעבירים מיתר AC.
הנקודה D נמצאת מחוץ למעגל וממנה מעבירים
משיק CD וישר חותך DE.
ידוע כי הישר DE חותך את הקוטר AB
בנקודה G ומאונך למיתר AC בנקודה H.



א. הוכח: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BGE$.

ב. נתון כי: $\frac{S_{AHG}}{S_{GHCB}} = \frac{4}{5}$. חשב את היחס: $\frac{AH}{AC}$.

תשובות סופיות:

47) שאלת הוכחה.

48) א. שאלת הוכחה. ב. 81 סמ"ר.

49) א. 125 ס"מ. ב. 105 סמ"ר.

50) 84 סמ"ר.

51) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{S_{\Delta BOM}}{S_{\Delta BAC}} = \frac{1}{4}$.

52) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה. ד. $\frac{S_{ABE}}{S_{CDE}} = \frac{1}{4}$.

53) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}} = 0.8$.

54) א. שאלת הוכחה. ב. $6S$.

55) $16S$.

56) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. i. $R = 9$ ii. $\frac{S_{COE}}{S_{BDA}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$.

57) א. שאלת הוכחה. ב. i. שאלת הוכחה. ב. ii. קטן פי 6.
ג. שטח המשולש DGC גדול פי 18 משטח המשולש MOF.

58) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{AH}{AC} = \frac{2}{3}$

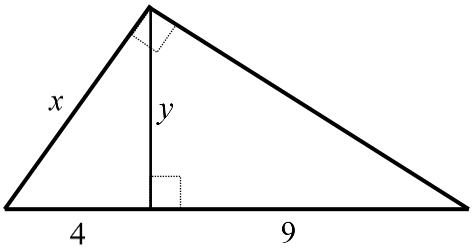
פרופורציה במשולש ישר זווית:

סיכום כללי:

- במשולש ישר זווית, הגובה ליתר בריבוע שווה למכפלת היטלי הניצבים על היתר.
- במשולש ישר זווית, ניצב בריבוע שווה למכפלת היתר והיטל הניצב על היתר.
- (משפט הפוך ל-1) אם במשולש גובה לצלע אחת בריבוע שווה למכפלת היטלי הצלעות האחרות על צלע זאת, המשולש ישר זווית.

שאלות:

59) מצא את ערכם של x ו- y בשרטוט הבא:



60) במשולש ישר זווית שאורכי ניצביו m ו-n נתון כי אורך הגובה ליתר הוא h.
הראה שמתקיים: $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}$ (אין צורך ברישום מסודר של הוכחה).

61) הוכח את המשפט: אם במשולש גובה לצלע אחת בריבוע שווה למכפלת היטלי הצלעות האחרות על צלע זאת, המשולש ישר זווית.

תשובות סופיות:

59) $y=6\ ,\ x=\sqrt{52}$
60) שאלת הוכחה.
61) שאלת הוכחה.

פרופורציות במעגל:

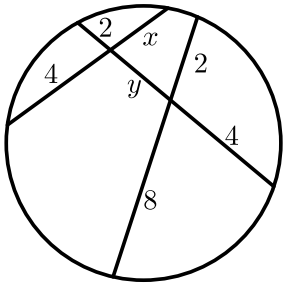
סיכום כללי:

- אם שני מיתרים נחתכים במעגל, אז מכפלת קטעי המיתר האחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני.
- אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.
- אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

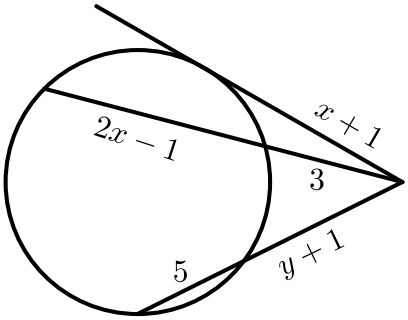
שאלות:

62) חשב את גודלם של x ו- y בשרטוטים הבאים:

א.



ב.



63) הוכח את המשפט: אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל, מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

64) הוכח את המשפט: אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל, מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

תשובות סופיות:

62) א. $x=3\,,\,y=2$ ב. $x=5\,,\,y=3$.

63) שאלת הוכחה.

64) שאלת הוכחה.

מתמטיקה כללית

פרק 15 - גיאומטריה אוקלידית - שאלות חזרה

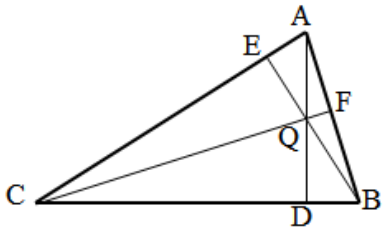
תוכן העניינים

1. שאלות מסכמות ללא פרופורציה 262
2. שאלות מסכמות הכוללות פרופורציה ודמיון 267

שאלות מסכמות ללא פרופורציה:

שאלות:

1) במשולש ABC מעבירים את
שלושת הגבהים: AD , BE , CF.
הגבהים נפגשים בנקודה Q.



א. הוכח: $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ACF$.

ב. הוכח כי מרובע QDCE הוא מרובע בר-חסימה.

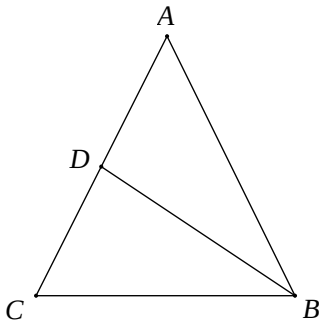
ג. הוכח: $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ADF$.

2) במשולש ABC, E אמצע AB, F על BC ו-EF מקביל ל-AC.
הנקודה G על AC ו-EG מקביל ל-BC.
בלי להשתמש במשפטים על קו אמצעים במשולש הוכח:

א. המשולש AEG והמשולש EBF חופפים.

ב. על פי הסעיף הקודם, הוכח כי קטע במשולש החוצה צלע של המשולש ומקביל לצלע השלישית במשולש הוא קטע אמצעים.

3) במשולש שווה שוקיים ABC, (AB=AC),
BD הוא תיכון לשוק AC, $\sphericalangle CBD = 30°$.



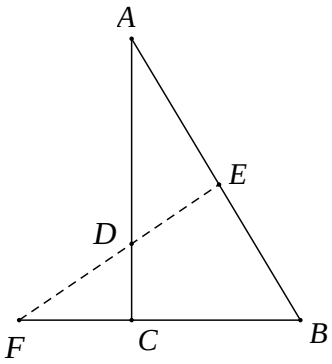
א. הוכח כי משולש ABC הוא משולש שווה צלעות.
(הדרכה: הורד אנכים AF ו-DE לבסיס BC
והוכח כי: $DE = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}BD$).

ב. אם נתון כי אורך התיכון BD הוא a ס"מ,
הבע את אורך צלע המשולש ואת שטחו.

4) במשולש ABC $(\sphericalangle C = 90°)$ הנקודה E מונחת על היתר AB. מהנקודה E מעבירים אנך ליתר, החותך את המשך הניצב BC בנקודה F ואת הניצב AC בנקודה D.

נתון כי: AD = 10 ס"מ,
BE = 12 ס"מ , AE = 8 ס"מ.

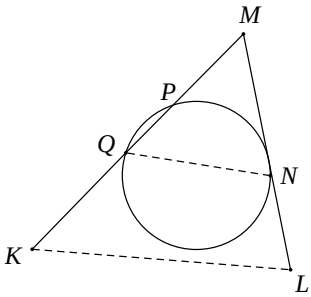
הוכח כי: $\Delta ADE \cong \Delta DFC$.



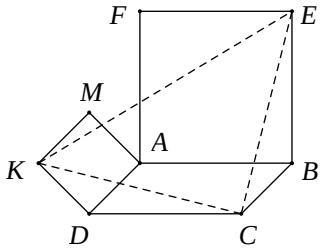
5) מנקודה M הנמצאת מחוץ למעגל מעבירים חותך MPQ ומשיק MN.
מנקודה K הנמצאת בהמשך MPQ מעבירים ישר מקביל למיתר QN, החותך את המשך המשיק MN בנקודה L.

א. הוכח כי: $\sphericalangle QNL = \sphericalangle NPQ$.

ב. הוכח כי המרובע KPNL הוא בר-חסימה.



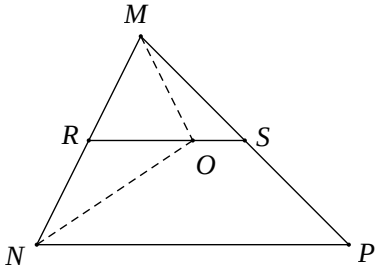
6) נתונה מקבילית ABCD.
על הצלע AB בונים ריבוע ABEF
ועל הצלע AD ריבוע ADKM.
הוכח כי המשולש KCE הוא משולש שווה שוקיים וישר-זווית.



7) ענה על השאלות הבאות:

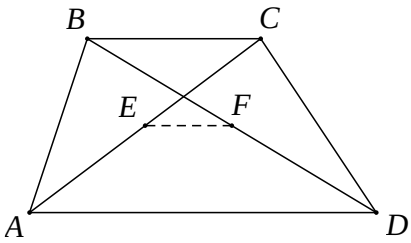
א. הוכח: אם במשולש התיכון לצלע שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אזי המשולש הוא משולש ישר זווית.

ב. בציור הנתון: RS הוא קטע אמצעים במשולש MNP. NO הוא חוצה זווית $\sphericalangle MNP$.
הוכח כי: $\sphericalangle MON = 90°$.



8) הוכח כי במשולש ישר זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
נסח והוכח את המשפט ההפוך למשפט הנ"ל.

9) בטרפז $ABCD$ $(AD \| BC)$.

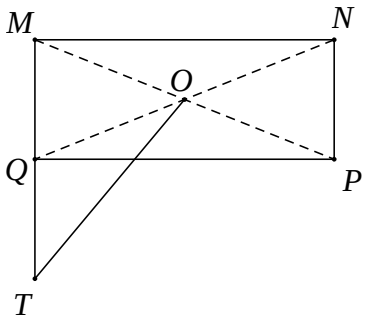


נתון כי: נקודה E נמצאת באמצע
אלכסון AC ונקודה F נמצאת באמצע אלכסון BD.

א. הסבר מדוע קטע האמצעים של
הטרפז ABCD עובר דרך הנקודות E ו-F.

ב. נתון כי: $AD = 4 \cdot EF$.
הוכח כי: $AD = 2 \cdot BC$.

10) נתון מלבן MNPQ שבו $QN = 2NP$.

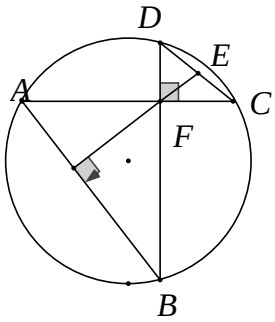


אלכסוני המלבן נפגשים בנקודה O.
האריכו את הקטע MQ כאורכו ($QT = MQ$).

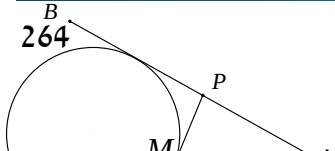
א. הוכח כי: $MO \perp OT$.

ב. הוכח כי: $PQ = OT$.

11) במעגל שבציור נתון כי המיתר AC
מאונך למיתר BD.
שני המיתרים נחתכים בנקודה F.
דרך הנקודה F מורידים אנך למיתר AB.
המשכו של האנך חותך את המיתר DC בנקודה E.
הוכח כי: $DE = CE$.



12) ענה על שתי השאלות הבאות:



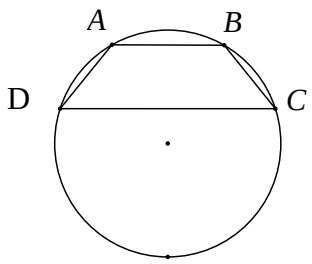
א. הוכח את המשפט: שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה אחת חיצונית, שווים באורכם.

ב. AB ו-AC הם שני משיקים למעגל.

נתון: $AC=a$. נקודה M נמצאת על $\overset{\frown}{BC}$. QP משיק למעגל בנקודה M.

הוכח כי היקף המשולש APQ לא תלוי במקומה של הנקודה M על הקשת $\overset{\frown}{BC}$ והוא גודל קבוע השווה ל-$2a$.

13) טרפז ABCD $(AB\|CD)$ חסום במעגל כך שמרכז המעגל O נמצא מחוץ לטרפז.



נתון כי: AB = 9 ס"מ, CD = 21 ס"מ,
גובה הטרפז הוא 8 ס"מ. רדיוס המעגל הוא R.

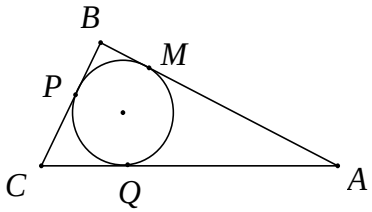
א. הבע באמצעות R את המרחק ממרכז המעגל O:

i. לבסיס הקטן של הטרפז AB.

ii. לבסיס הגדול של הטרפז CD.

ב. חשב את גודלו של רדיוס המעגל R.

14) במשולש ישר זווית ABC, $(\overset{\frown}{ABC}=90°)$.



חוסמים מעגל כך שנקודות ההשקה הן P , M ו- Q.

כמו כן, נתון כי: $AQ=2a$ ו- $QC=a$.

הבע את היקף המשולש ABC באמצעות a.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) א. שאלת הוכחה. ב. אורך צלע המשולש: $\frac{2}{3}\sqrt{3}a$, שטח המשולש: $\frac{1}{3}\sqrt{3}a^2$.

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

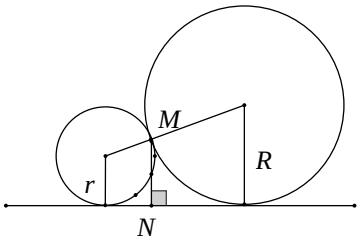
13) א. i. $\sqrt{R^2-4.5^2}$ ii. $\sqrt{R^2-10.5^2}$ ב. $R=$ 10.625 ס"מ.

14) $a\left(3+\sqrt{17}\right)$.

שאלות מסכמות הכוללות פרופורציה ודמיון:

שאלות:

1) שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה M.
רדיוס המעגל הגדול הוא R ורדיוס המעגל הקטן הוא r.
מעבירים משיק משותף לשני המעגלים.
MN הוא המרחק שבין נקודת ההשקה של שני המעגלים לבין המשיק המשותף שלהם.
הוכח כי: $MN=\frac{2R\cdot r}{R+r}$.



2) ענה על השאלות הבאות:

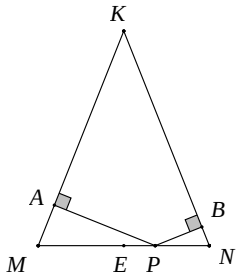
א. הוכח כי במשולש ישר זווית בעל זווית חדה בת $30°$, הניצב שמול הזווית שווה למחצית היתר.

ב. בטרפז שווה שוקיים ABCD האלכסונים ניצבים לשוקיים.
הוכח כי אם הזווית החדה בטרפז שווה ל-$60°$, אזי נקודת מפגש האלכסונים מחלקת כל אלכסון ביחס של $1:2$.

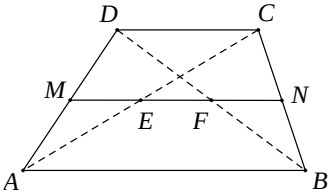
3) ΔKMN הוא משולש שווה שוקיים (KM = KN).
מנקודה כלשהי P הנמצאת על הבסיס KN מורידים אנך לשוק KM ואנך לשוק KN החותכים אותן בנקודות A ו-B בהתאמה.

א. הוכח כי KAPB הוא מרובע בר חסימה.

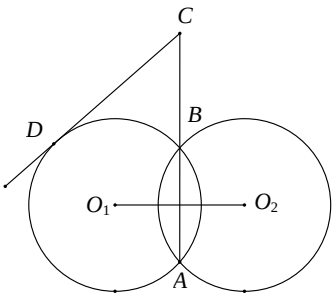
ב. הסבר מדוע הנקודה E הנמצאת באמצע הבסיס MN, נמצאת על היקף המעגל החוסם את המרובע KAPB.



4) נסח והוכח את משפט קטע אמצעים בטרפז.
MN הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD $(AB\|CD)$.
נסמן: $AB=a$, $CD=b$.
הוכח כי: $EF=\frac{1}{2}(a-b)$.



5) שני מעגלים שווים, O_1 ו-O_2, שמחוגיהם שווים ל-10 ס"מ, נחתכים בנקודות A ו-B.
מהנקודה C שעל המשך המיתר המשותף AB של שני המעגלים יוצא המשיק CD לאחד מהמעגלים.
נתון כי: $CD = 9\sqrt{5}$ ס"מ
ו-16 ס"מ $= O_1O_2$. חשב את אורך הקטע CB.
(היעזר בעובדה ש-AB חוצה את הקטע O_1O_2 ומאונך לו).



6) ענה על השאלות הבאות:

א. הוכח את המשפט: שני מיתרים הנחתכים בתוך מעגל מחלקים זה את זה, כך שמכפלת קטעי האחד שווה למכפלת קטעי האחר.

ב. במעגל שרדיוסו R, הקוטר AB מאונך למיתר CD.
הקוטר והמיתר נחתכים בנקודה E. נתון כי $\frac{AE}{BE} = \frac{1}{4}$.
הבע את שטח המשולש ADC באמצעות R.

7) ענה על השאלות הבאות:

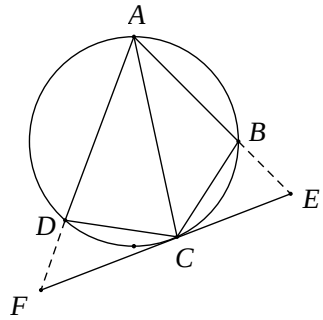
א. הוכח כי: במרובע חסום במעגל, סכום הזוויות הנגדיות שווה ל-$180°$.

ב. מרובע ABCD חסום במעגל.
AC חוצה את הזווית $\sphericalangle DAB$.
בנקודה C מעבירים משיק למעגל.
המשכי הצלעות AB ו- AD חותכים את המשיק בנקודות E ו-F בהתאמה.

i. הוכח כי: $\sphericalangle CDF = \sphericalangle ABC$.

ii. הוכח כי: $\Delta CDF \sim \Delta ABC$.

ג. נתון 9 ס"מ $= AB$, 4 ס"מ $= DF$. חשב את אורך הקטע BC.

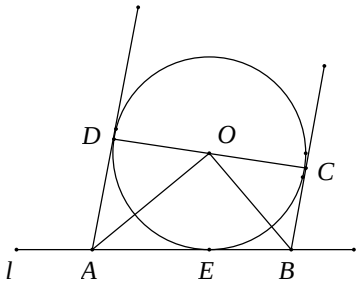


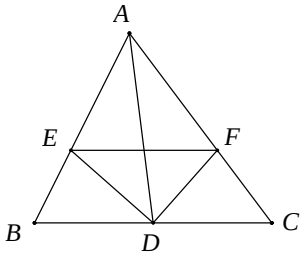
8) מעגל O משיק לישר l בנקודה E.
CD הוא קוטר במעגל.
בנקודה C מעבירים משיק למעגל החותך את הישר l בנקודה B.
בנקודה D מעבירים משיר למעגל החותך את הישר l בנקודה A.

א. הוכח כי: $\sphericalangle AOB = 90°$.

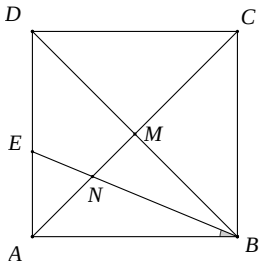
ב. הוכח כי: $\Delta AOE \sim \Delta OBE$.

ג. נתון כי: R = 6 ס"מ , AB = 13 ס"מ , $BE < AE$.
חשב את אורכי הקטעים BE ו-AE.





9) במשולש ABC נתון כי AD הוא התיכון לצלע BC.
DE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle ADB$, DF הוא חוצה הזווית $\sphericalangle ADC$ (ראה ציור).
הוכח כי: $EF \parallel BC$.

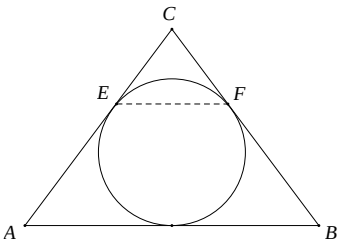


10) בריבוע ABCD נתון כי: אלכסוניו נפגשים בנקודה M.
BE חוצה את הזווית $\sphericalangle DBA$ וחותך את האלכסון AC בנקודה N (ראה ציור).

א. מצא את היחס $\frac{DE}{AE}$ ואת היחס $\frac{MN}{AN}$.

ב. הוכח כי המשולש ENA הוא משולש שווה שוקיים והוכח כי $DE=2\cdot MN$.

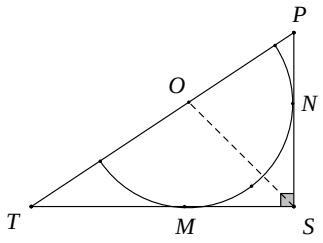
.



11) במשולש שווה שוקיים ABC נתון כי:
$AC = BC =$ 24 ס"מ, $AB=$ 20 ס"מ.
במשולש זה חסום מעגל, המשיק לשתי השוקיים בנקודות E ו-F.

א. הוכח כי EF מקביל לבסיס.

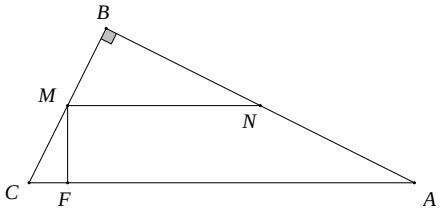
ב. חשב את אורך הקטע EF.



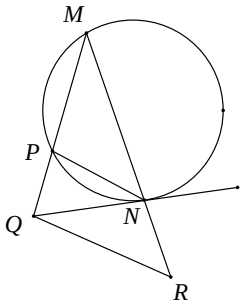
12) במשולש ישר זווית ΔPST , $\left(\sphericalangle PST = 90°\right)$
חסום חצי מעגל שמרכזו O נמצא על יתר PT .

א. הוכח כי OS חוצה את הזווית $\sphericalangle PST$.

ב. נתון כי: PS = 18 ס"מ ו-TS = 24 ס"מ.
חשב את אורכי הקטעים OP ו-OT.



13) במשולש ABC , בו $\sphericalangle B = 90°$. נתון כי:
FC = 6 ס"מ , BC = 12 ס"מ , AB = 16 ס"מ.
הקטע FM מאונך ליתר AC, והקטע MN מקביל ליתר AC.
חשב את אורך הקטע MN.

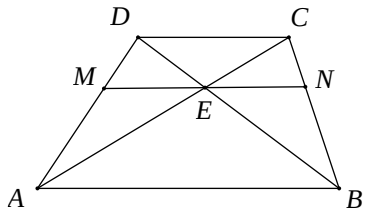


14) משולש MPN חסום במעגל.
ישר NQ משיק למעגל זה בנקודה N.
נתון כי: $NP \parallel RQ$ (ראה ציור).

א. הוכח כי $\Delta QRN \sim \Delta MRQ$.

ב. נתון כי: MN = 5 ס"מ ו- RN = 4 ס"מ .
חשב את RQ .

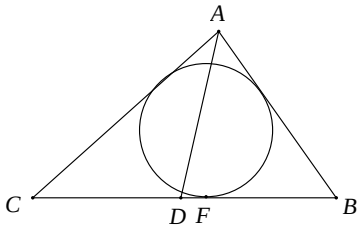
15) בטרפז $ABCD$, $(AB\|CD)$.
נתון כי: DC= 9 ס"מ , AB= 18 ס"מ.
דרך נקודת מפגש האלכסונים E, מעבירים ישר MN המקביל לבסיסי הטרפז.
מצא את אורכו של MN.



16) ענה על השאלות הבאות:

א. הוכח: חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית חלוקה פנימית לפי היחס של שתי הצלעות הכולאות את הזווית.

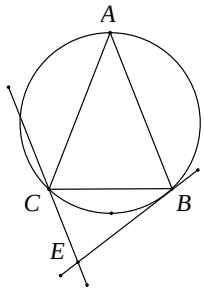
ב. המעגל החסום במשולש ABC משיק בנקודה F לצלע CB.
נתון כי: BF = 4 ס"מ, CF= 7 ס"מ.
AD חוצה הזווית $\sphericalangle CAB$ ומחלק את הקטע CB לשני קטעים המתייחסים זה לזה כמו 2:3.
חשב את אורכי הצלעות AC ו-AB.



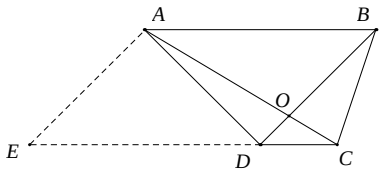
17) משולש שווה שוקיים ABC , $(AB=AC)$ חסום במעגל.
דרך קדקוד B עובר משיק למעגל. דרך קדקוד C עובר ישר המקביל ל-AB וחותך את המשיק בנקודה E (ראה ציור).

א. הוכח: $\Delta ABC \sim \Delta CBE$.

ב. נתון כי: AC = 27 ס"מ ו-CE = 12 ס"מ.
חשב את אורך הקטע BC.



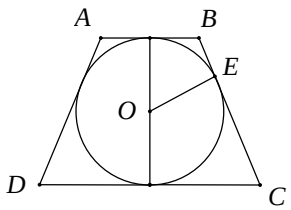
18) בטרפז $ABCD$, $(AB\|CD)$ נתון כי: $AB=3CD$.
אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה O.
דרך נקודה A מעבירים מקביל ל-BD, החותך את המשך הצלע CD בנקודה E (ראה ציור).
נסמן את שטח המשולש DOC באמצעות S.
הבע את שטח הטרפז $ABCE$ באמצעות S.



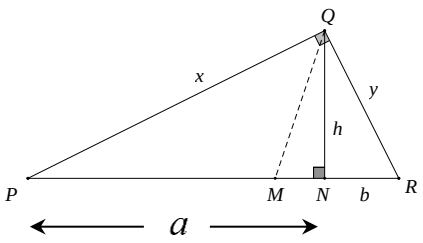
19) $ABCD$ הוא טרפז שווה שוקיים $(AB\|CD\ ,\ AD=BC)$.
O הוא מרכז המעגל החסום בטרפז
ו-E היא נקודת ההשקה של השוק BC עם המעגל O (ראה ציור).

א. הוכח כי $OE^2 = BE\cdot EC$.

ב. הוכח כי הגובה בטרפז שווה שוקיים החוסם מעגל הוא הממוצע ההנדסי של שני הבסיסים של הטרפז.



20) במשולש ישר-זווית ΔPQR , $(\sphericalangle PQR=90°)$.



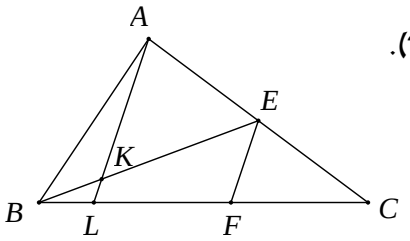
נתון: h הוא הגובה ליתר, x ו- y הם הניצבים, a ו- b הם היטלי הניצבים x ו- y בהתאמה (ראה ציור).

א. הוכח כי הגובה ליתר הוא ממוצע גאומטרי של היטלי הניצבים על היתר: $h=\sqrt{ab}$.

ב. הוכח כי כל ניצב הוא ממוצע גיאומטרי של היתר והיטל הניצב על היתר: $x=\sqrt{a(a+b)}$, $y=\sqrt{b(a+b)}$.

ג. מקדקוד Q מעבירים חוצה זווית החותך את היתר PR בנקודה M.
הוכח כי: $PM:MR=\sqrt{a}:\sqrt{b}$.

21) במשולש ABC התיכון BE והקטע AL נחתכים בנקודה K. הקטע EF מקביל ל-AL (ראה ציור).



נתון כי: $LC=5\cdot BL$.

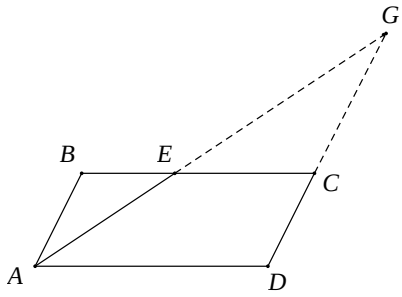
א. הוכח כי: $LF=2.5\cdot BL$.

ב. הוכח כי: $\frac{BK}{BE}=\frac{2}{7}$.

22) ענה על השאלות הבאות:

א. הוכח את המשפט: היחס בין השטחים של שני משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון.

במקבילית ABCD נקודה E נמצאת על הצלע BC, כך ש- $BE:CE=2:3$.
המשך הקטע AE חותך את המשך הצלע DC בנקודה G.



ב. נתון: 18 סמ"ר $=S_{\Delta CEG}$.

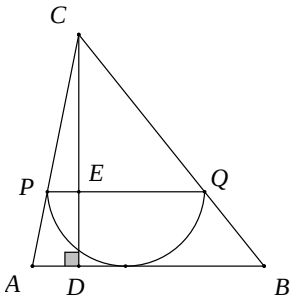
i. חשב את שטח המשולש ΔABE.

ii. חשב את שטח המשולש ΔABC.

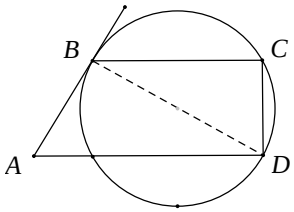
23) ענה על השאלות הבאות:

א. הוכח כי: במשולשים דומים היחס בין הגבהים המתאימים שווה ליחס הדמיון של המשולשים.

ב. במשולש ABC חסום חצי מעגל שרדיוסו 6 ס"מ.
קוטר המעגל PQ מקביל לצלע AB.
CD הוא גובה במשולש ΔABC וחותך את הקוטר PQ בנקודה E (ראה ציור).
נתון כי: 20 ס"מ= AB. חשב את אורך הקטע CE.



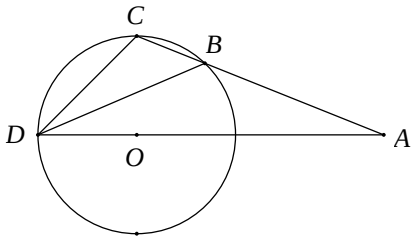
24) ABCD הוא טרפז $(AD \parallel BC)$.
הצלעות BC ו-AD הן מיתרים במעגל.
הצלע AB משיקה למעגל בנקודה B (ראה ציור).



א. הוכח כי: $\Delta ABD \sim \Delta DCB$.

ב. נתון כי: BC = 5 ס"מ , AD = 12.8 ס"מ.
חשב את אורך האלכסון BD.

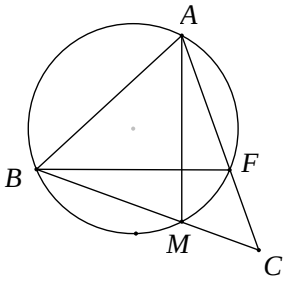
25) מנקודה A הנמצאת מחוץ למעגל שרדיוסו R ,
מעבירים חותך ABC וחותך AOD,
שעובר דרך מרכז המעגל O ,
כך ש- $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BDA = \sphericalangle CDB = \alpha$.
נתון גם: $AB = m$, $BC = n$.
הוכח כי: $DC^2 = n^2 + m \cdot n$.



26) ענה על השאלות הבאות:

א. הוכח כי חותכים למעגל היוצאים מנקודה
אחת מחוץ למעגל יוצרים קטעים
פרופורציוניים כך שמכפלת כל החותך
בחלקו מחוץ למעגל היא גודל קבוע.

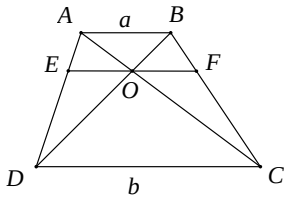
ב. נתון משולש ABC. מעגל העובר דרך
הקדקודים A ו-B, חותך הצלעות AC ו-BC
בנקודות F ו-M בהתאמה.



i. הוכח כי $\Delta ACM \sim \Delta BCF$.

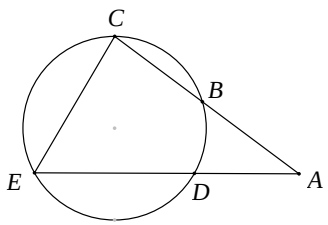
ii. נתון כי: BC = 48 ס"מ , AC= 40 ס"מ , AF = 16 ס"מ.
מצא את אורך המיתר BM.

27) בטרפז ABCD אורך הבסיס AB הוא a
ואורך הבסיסCD הוא b.
אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה O.
דרך הנקודה O מעבירים מקביל לבסיסים
החותך את AD בנקודה E ואת BC בנקודה F.



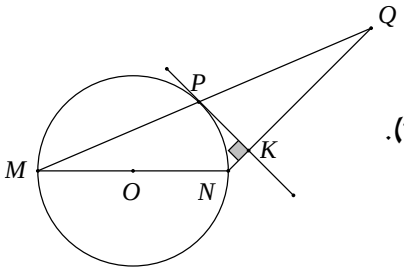
הוכח כי מתקיים: $EO = FO = \frac{ab}{a+b}$.

28) מנקודה A מעבירים שני חותכים למעגל,
חותך ABC וחותך ADE, כך שהנקודה B
נמצאת באמצע הקשת $\overset{\frown}{CD}$, ו- $\sphericalangle CED = 2\sphericalangle CAD$
(ראה ציור).

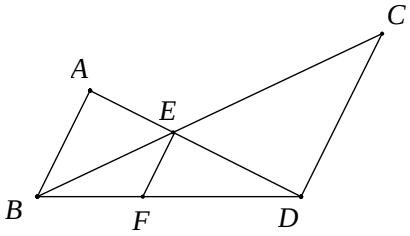


א. הוכח: $\Delta ECB \sim \Delta ACE$.

ב. נתון כי: BC = 4 ס"מ, AC = 9 ס"מ.
חשב את אורך הקטע CE.

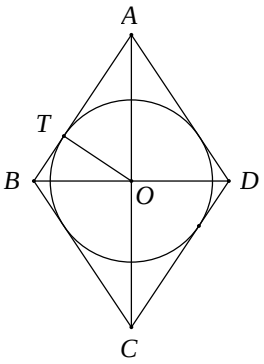


29) MN הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
PK משיק למעגל בנקודה P ומאונך ל-NQ.
הנקודה Q נמצאת על המשך המיתר MP (ראה ציור).
א. הוכח כי: $MP\cdot KN=PK\cdot PN$.
ב. הוכח כי: $MP=PQ$.

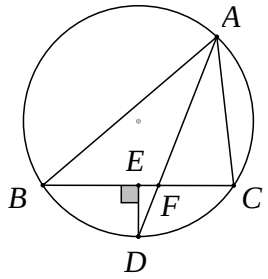


30) בציור נתון כי: $AB\parallel EF\parallel CD$.
הוכח כי: $\frac{1}{EF}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{DC}$.

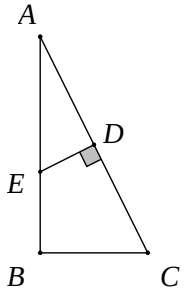
31) ענה על השאלות הבאות:
א. הוכח כי: הגובה ליתר במשולש ישר-זווית מחלק את המשולש לשני משולשים, שכל אחד מהם דומה למשולש כולו.
ב. מעוין ABCD חוסם מעגל שמרכזו ב-O .
נתון כי אורך הרדיוס המעגל OT הוא 24 ס"מ ואורך צלע המעוין הוא 50 ס"מ.
מצא את אורך האלכסון BD , $(BD<AC)$.



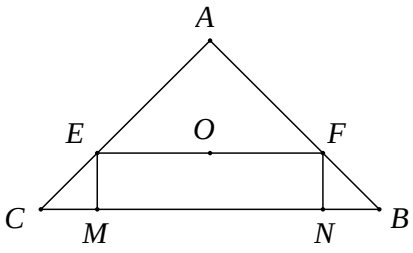
32) משולש ABC חסום במעגל.
חוצה זווית $\sphericalangle BAC$ חותך את המעגל בנקודה D ואת הצלע BC בנקודה F (ראה ציור).
מנקודה D הורד אנך על הצלע CB החותך אותה בנקודה E.
נתון כי: $AB:AC=5:3$.
הוכח כי: $BC=8\cdot EF$.



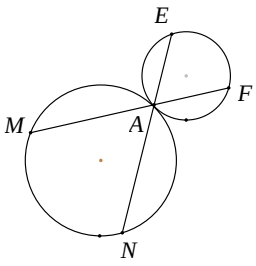
33) הנקודה D היא אמצע היתר AC במשולש ישר זווית ABC , $(\sphericalangle B=90°)$.
בנקודה D מעלים אנך לצלע AC החותך את הניצב AB בנקודה E (ראה ציור).
נתון כי: 8 ס"מ = AC , $AB=m$.
הבע את CE ו-BE באמצעות m .



34) במשולש ABC נתון כי: 15 ס"מ $=AB=AC$,
18 ס"מ = CB . דרך מרכז המעגל O החסום במשולש עובר הקטע EF המקביל לבסיס BC. FN ו-EM הם אנכים לבסיס BC.
חשב את שטח המלבן EFNM.



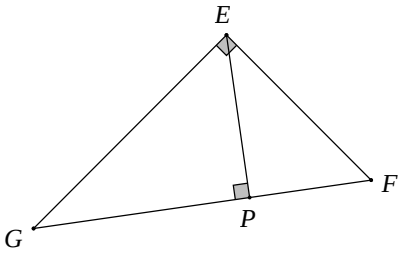
35) ענה על השאלות הבאות:



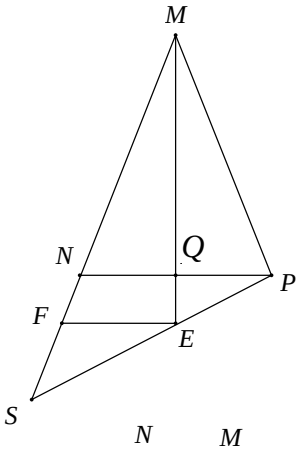
א. הוכח כי הזווית הכלואה בין משיק ומיתר בעלי נקודה משותפת, שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה.

ב. שני מעגלים משיקים מבחוץ בנקודה A.
דרך נקודה זו עוברים שני ישרים, החותכים את המעגלים בנקודות F ,E ,M ו-N.
הוכח כי: $\Delta AMN \sim \Delta AFE$.

36) במשולש ישר-זווית EFG $\left(\sphericalangle GEF = 90°\right)$,
EP הוא הגובה ליתר GF.
נתון כי: EF = 24 ס"מ , GE = 32 ס"מ.
חשב את אורכי הקטעים: GF , PF , GP , EP.



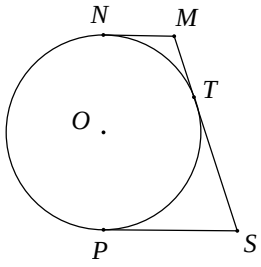
37) MQ הוא התיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים ΔMNP $\left(MN = MP\right)$. S היא נקודה על המשך הצלע MN.
המשך התיכון MQ חותך את הקטע PS בנקודה E.
הקטע EF מקביל ל- NP (ראה ציור).



א. הוכח כי: $MP:MS = NF:FS$.

ב. נתון כי: MP = 20 ס"מ , NF = 4 ס"מ.
חשב את אורך הקטע FS.

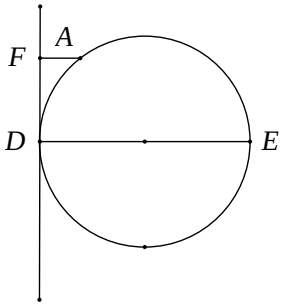
38) NP הוא קוטר במעגל O. MN, MT ו-SP הם משיקים למעגל O בנקודות N, T ו-P בהתאמה.



א. הוכח כי: $\sphericalangle MOS = 90°$.

ב. הוכח כי רדיוס המעגל שווה ל- $\sqrt{MN \cdot SP}$.

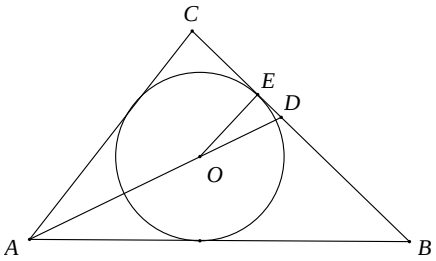
39) DE הוא קוטר במעגל. בנקודה D מעבירים משיק למעגל. מנקודה A, שעל המעגל, מעבירים ישר מקביל לקוטר DE.
הישר חותך את המשיק למעגל בנקודה F (ראה ציור).



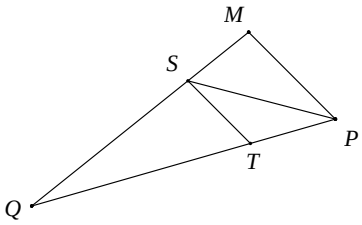
א. הוכח כי: $AD^2 = AF \cdot DE$.

ב. נתון: AF = 4 ס"מ, DE = 9 ס"מ.
חשב את שטח הטרפז AFDE.

40) מעגל שמרכזו בנקודה O חסום במשולש ישר-זווית $(\sphericalangle C=90°)$ ומשיק לצלע BC בנקודה E. מעבירים את חוצה הזווית AD.
נתון כי: 30 ס"מ = AB , 18 ס"מ = AC.
חשב את אורך הקטע DE.



41) במשולש MPQ , PS חוצה את הזווית $\sphericalangle MPQ$, $ST \parallel MP$.
נתון כי: 27 ס"מ = MP , 45 ס"מ = PQ.
חשב את אורך הקטע TP.



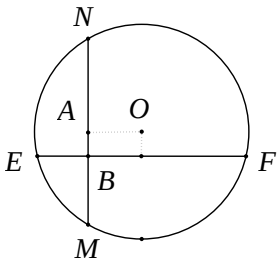
42) ענה על השאלות הבאות:

א. הוכח כי המחוג המאונך למיתר המעגל חוצה אותו.

ב. בציור שלפניך המיתרים EF ו- MN מאונכים זה לזה.
נתון כי: 3 ס"מ = BE , 8 ס"מ = BF , 4 ס"מ = BM.

i. חשב את אורך הקטע BN.

ii. מצא את המרחק המיתר EF ממרכז המעגל O.



תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) 15 ס"מ = BD.
6) ב. $S_{\Delta ACD}=\frac{8}{25}R^2$
7) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 6 ס"מ.
8) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 4 ס"מ = BE , 9 ס"מ = AE.
9) שאלת הוכחה.
10) א. $\frac{DE}{AE}=\sqrt{2}$, $\frac{MN}{AN}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
11) א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 ס"מ = EF.
12) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{90}{7}$ ס"מ = PO, $\frac{120}{7}$ ס"מ = TO
13) $3\frac{1}{3}$ ס"מ = MN.
14) ב. 6 ס"מ = RQ.
15) 12 ס"מ = MN.
16) ב. 6 ס"מ = AB, 9 ס"מ = AC.
17) ב. 18 ס"מ = BC.
18) $S_{ABCE}=28S$.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) שאלת הוכחה.
22) ב. i. 8 סמ"ר ii. 20 סמ"ר.
23) ב. 9 ס"מ = CE.
24) ב. 8 ס"מ = BD.
25) שאלת הוכחה.
26) ב. ii. 28 ס"מ = BM.
27) שאלת הוכחה.
28) ב. 6 ס"מ = CE.
29) שאלת הוכחה.
30) שאלת הוכחה.
31) ב. 60 ס"מ = BD.
32) שאלת הוכחה.
33) $CE=\frac{32}{m}$, $BE=\frac{m^2-32}{m}$
34) 50.625 סמ"ר = S_{EFNM} .
35) שאלת הוכחה.
36) 40 ס"מ = GF, 14.4 ס"מ = PF, 25.6 ס"מ = GP, 19.2 ס"מ = PE.
37) ב. 6 ס"מ = FS.
38) שאלת הוכחה.
39) ב. 29.07 סמ"ר = S_{AFDE} .
40) 3 ס"מ = DE.
41) 16.875 ס"מ = TP.
42) ב. i. 6 ס"מ ii. 1 ס"מ.

מתמטיקה כללית

פרק 16 - גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית 277
2. משוואת הישר 281
3. מצבים הדדיים בין ישרים 286
4. מציאת משוואות ישר 288
5. שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר 289
6. נושאים מתקדמים עם משוואת הישר ..... (ללא ספר)
7. חלוקת קטע ביחס נתון 295
8. מרחק נקודה מישר 296
9. מיקום נקודה ביחס לישר 298
10. מרחק בין ישרים מקבילים 300

מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ יחושב לפי: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.
- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$.

שאלות:

שאלות העוסקות באמצע קטע:

1) מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

א. $A(1,4)$, $B(5,-8)$

ב. $A(-3,0)$, $B(3,-2)$

ג. $A(4,5)$, $B(-4,-5)$

ד. $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, $B\left(7\frac{1}{2},-2\right)$

ה. $A(6,-1)$, $B(-3,-1)$

ו. $A(4,7)$, $B(4,-12)$

2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

א. $A(4,-2)$, $M(2,1)$

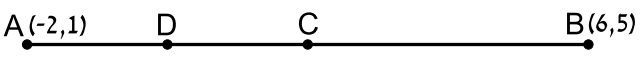
ב. $A(-6,-8)$, $M(0,0)$

ג. $A(13,-11)$, $M(4,-7)$

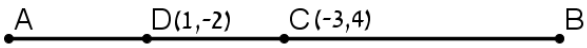
ד. $A\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$, $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם $C(6,1)$, $B(2,-4)$.
מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.

4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $B(6,5)$, $A(-2,1)$. מצא את שיעורי הנקודה D.



5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $D(1,-2)$, $C(-3,4)$. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



6) הנקודות $B(-10,4)$, $A(2,-7)$ ו-$C(6,11)$ הן שלושה קדקודים של מקבילית ABCD.
מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי, D.

שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:

7) מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

א. $A(4,7)$, $B(-3,7)$

ב. $A(6,2)$, $B(1,2)$

ג. $A(-3,10)$, $B(0,6)$

ד. $A(6,-9)$, $B(1,3)$

ה. $A(4,7)$, $B(13,-1)$

ו. $A(6,6)$, $B(-9,-9)$

8) חשב את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם: $C(0,14)$, $B(4,9)$, $A(3,-2)$.

9) נתונות נקודות $B(6,y)$, $A(14,4)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך.
מצא את y.

10) נתונות נקודות $B(15,-2)$, $A(x,-12)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך.
מצא את x.

11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה-y שלה גדול פי 3 משיעור ה-x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

12) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$ יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם $(0,4)$ ושיעורי ה-y של הקדקודים B ו-C הוא 2-. מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC}=\sqrt{50}$
וידוע כי: $B(-4,1)$, $A(-3,-2)$. מצא את היקף המלבן.

שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:

14) מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

א. $A(5,2)\ ,\ B(4,1)$

ב. $A(3,-2)\ ,\ B(-3,1)$

ג. $A(7,8)\ ,\ B(6,15)$

ד. $A(0,5)\ ,\ B(7,0)$

ה. $A(6,9)\ ,\ B(6,-7)$

ו. $A(4,-1)\ ,\ B(18,-1)$

15) מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו הם: $A(6,5)\ ,\ B(2,13)\ ,\ C(4,-7)$ מונחים עליהם.

תשובות סופיות:

1) א. $(3,-2)$ ב. $(0,-1)$ ג. $(0,0)$
ד. $\left(4,-\frac{5}{8}\right)$ ה. $(1.5,-1)$ ו. $(4,-2.5)$.

2) א. $B(0,4)$ ב. $B(6,8)$ ג. $B(-5,-3)$ ד. $B\left(1,\frac{2}{3}\right)$.

3) $D(4,-1.5)$.

4) $D(0,2)$.

5) $B(-11,16)$, $A(5,-8)$.

6) $D(18,0)$.

7) א. $d_{AB}=7$ ב. $d_{AB}=5$ ג. $d_{AB}=5$ ד. $d_{AB}=13$
ה. $d_{AB}=\sqrt{145}$ ו. $d_{AB}=15\sqrt{2}$.

8) 33.862 יחידות אורך $\approx P_{ABC}$.

9) $y=10$ או $y=-2$.

10) $x=-9$ או $x=39$.

11) $B(-1,-3)$.

12) $B(3,-2)$, $C(-3,-2)$.

13) 18.97 יחידות אורך $\approx P_{ABCD}=6\sqrt{10}$.

14) א. $m_{AB}=1$ ב. $m_{AB}=-\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB}=-7$ ד. $m_{AB}=-\frac{5}{7}$
ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB}=0$.

15) $m_{AC}=6$, $m_{BC}=-10$, $m_{AB}=-2$.

משוואת הישר:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1\cdot m_2=-1$.
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x: $m=\tan\alpha$.

משוואת הישר:

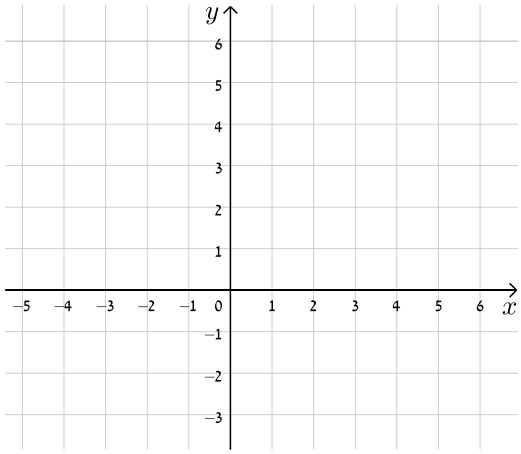
- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y=mx+n$.
- כאשר: m הוא שיפוע הישר ו-n הוא ערך ה-y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-y.

  נוסחה למציאת משוואת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

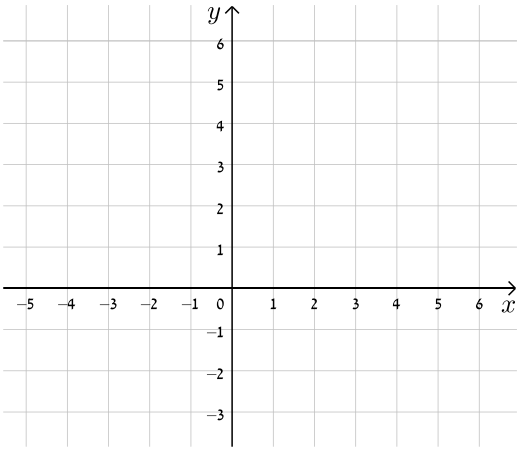
שאלות:

16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

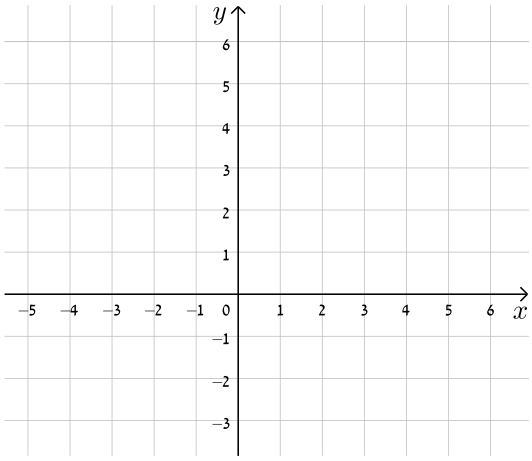
א. $y=x+4$



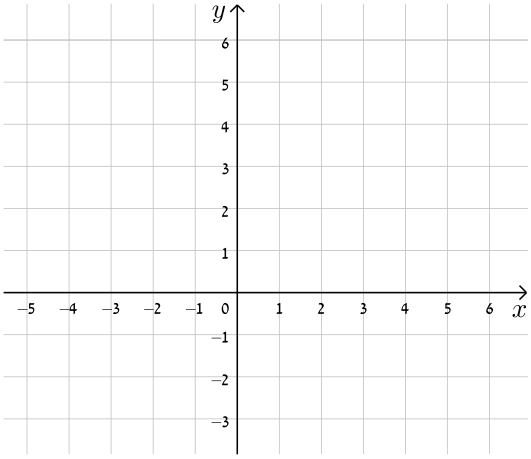
ב. $y=-x+5$



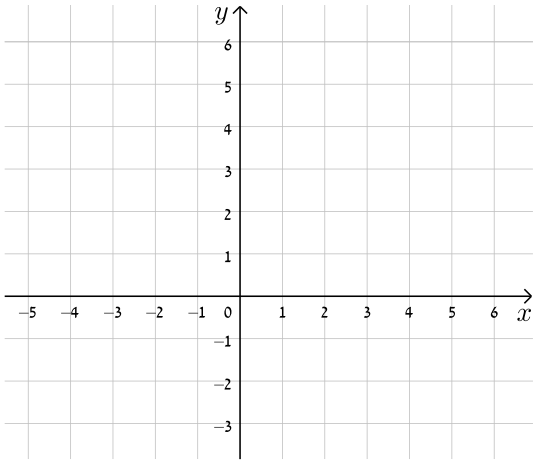
ג. $y=2x-3$



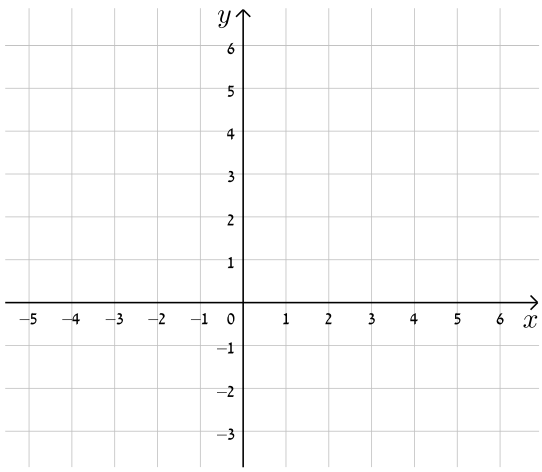
ד. $y=-3x+5$



ה. $y=3x-1$

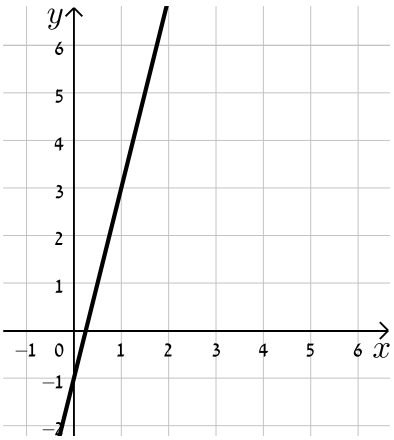


ו. $y=8-4x$

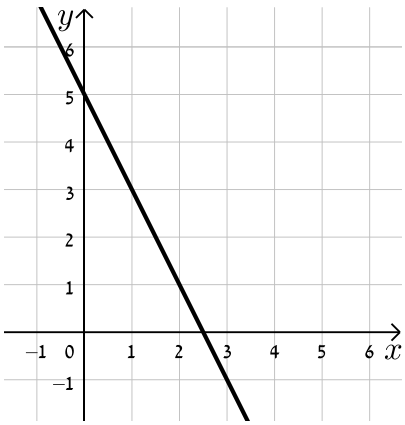


17) כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

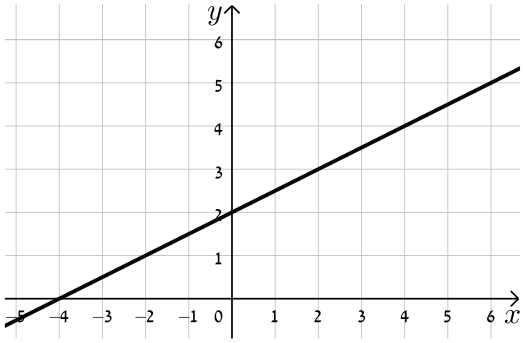
א.



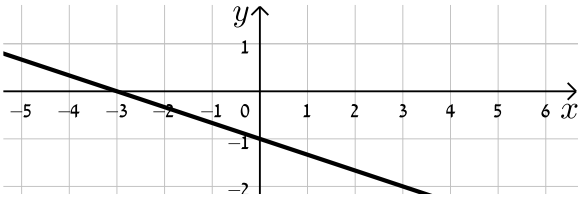
ב.



ג.



ד.



18) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:

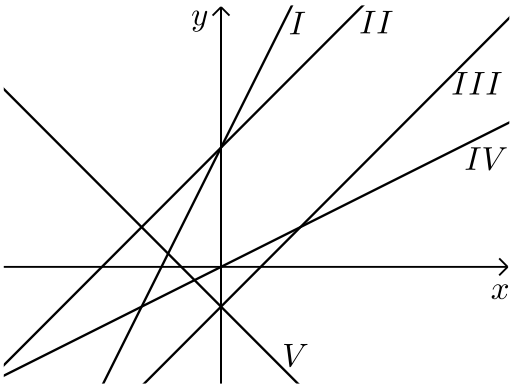
א. $y=x+3$

ב. $y=-x-1$

ג. $y=2x+3$

ד. $y=x-1$

ה. $y=\frac{1}{2}x$



19) נתונה משוואה הישר הבאה: $y=2x+3$. קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות עליו: $D(6,15)$, $C(0,4)$, $B(3,3)$, $A(-1,1)$.

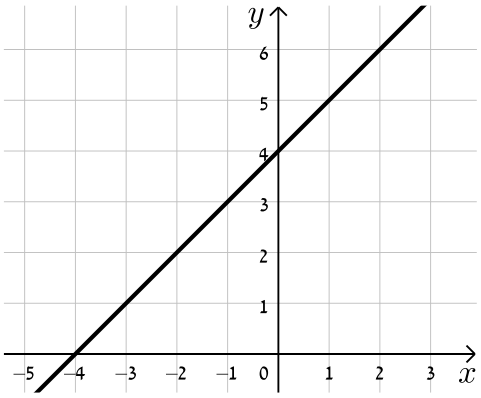
20) נתונה משוואת הישר הבאה: $y=mx-2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4,2)$ נמצאת על הישר. מצא את m וקבע האם גם הנקודה $B(7,-2)$ נמצאת עליו.

21) הנקודות $B(4,1)$, $A(5,-3)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא: $y=mx+n$.
מצא את m ואת n.

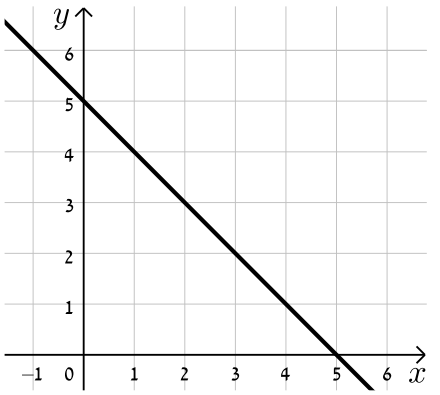
תשובות סופיות:

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

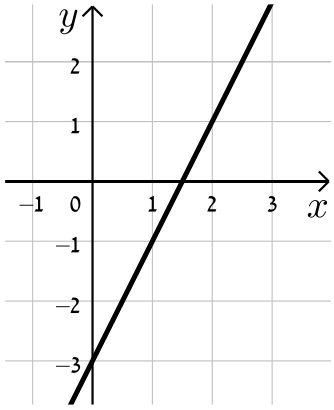
א.



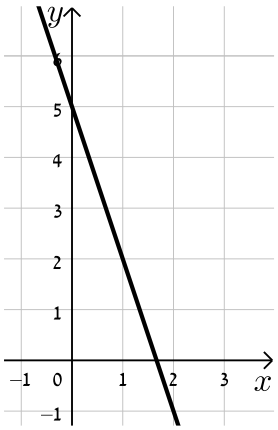
ב.



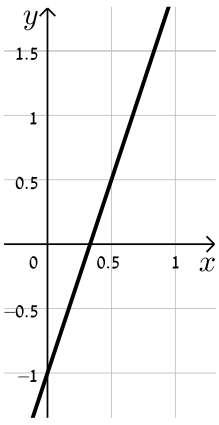
ג.



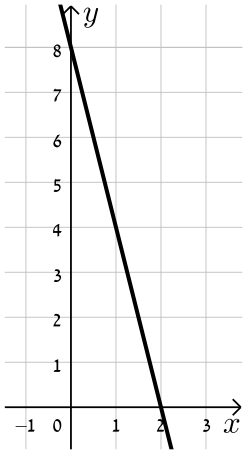
ד.



ה.



ו.



17) א. $y=4x-1$ ב. $y=-2x+5$ ג. $y=\frac{1}{2}x+2$ ד. $y=-\frac{1}{3}x-1$.

18) א.II. ב.V. ג.I. ד.III. ה.IV.

19) נמצאות: A, D. לא נמצאות: B, C.

20) $m=\frac{9}{8}$, B לא נמצאת.

21) $n=17$, $m=-4$.

מצבים הדדיים בין ישרים:

סיכום כללי:

מצב הדדי בין שני ישרים:

- ישרים מקבילים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 \neq n_2$.
- ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.
- ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$.

שאלות:

22) מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$

23) קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}$

24) קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

א. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}$

25) משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y=6x-2$.

א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?

ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

26) במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $C(-5,5)$, $B(3,7)$, $A(5,-1)$.
הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

תשובות סופיות:

22) א. $(-1,1)$ ב. $(-6,-18)$ ג. $(10,16)$.

23) א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.

24) מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.

25) א. $m_{BC}=m_{AD}=-\frac{1}{6}$, $m_{AB}=m_{CD}=6$.

ב. הכל הפוך: $m_{BC}=m_{AD}=6$, $m_{AB}=m_{CD}=-\frac{1}{6}$.

26) שאלת הוכחה.

מציאת משוואות ישר:

שאלות:

27) מצא את משוואות הישרים הבאים:

א. ישר העובר דרך הנקודה $A(1,3)$ ושיפועו $m=2$.

ב. ישר העובר דרך הנקודה $A(0,-4)$ ושיפועו $m=\frac{1}{3}$.

ג. ישר העובר דרך הנקודה $A(5,9)$ ושיפועו $m=0$.

ד. ישר העובר דרך הנקודות $A(5,-12)$ ו-$B(6,-6)$.

ה. ישר העובר דרך הנקודה $A(-6,4)$ ומקביל לישר: $y=2x-3$.

ו. ישר העובר דרך הנקודה $A(3,-5)$ ומקביל לציר ה-y.

ז. ישר העובר דרך הנקודה $A(-7,-3)$ ומאונך לישר: $y=x+3$.

ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים: $y=11x-4$ ו-$y=3x-12$ ומקביל לישר: $y=7x+5$.

תשובות סופיות:

27) א. $y=2x+1$ ב. $y=\frac{1}{3}x-4$ ג. $y=9$ ד. $y=6x-42$

ה. $y=2x+16$ ו. $x=3$ ז. $y=-x-10$ ח. $y=7x-8$.

שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר:

שאלות:

28) במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.
ידוע כי: $D(-2,2)$, $B(2,4)$, $A(3,-2)$.

א. כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.

ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.

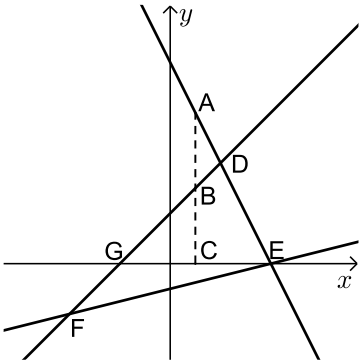
ג. כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

29) נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים $A(-9,1)$ ו-$B(5,-7)$.
משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x+3y+6=0$.

א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.

ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.

30) שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים בשרטוט: $x-4y-4=0$, $x-y+2=0$ ו- $2x+y-8=0$.
הקטע AC מקביל לציר ה- y.



א. חשב את שטח המשולש DEF.

ב. נתון: $d_{BC}=3$.
חשב את אורך הקטע AB.

31) BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד $A(-6,1)$.
משוואת התיכון BD היא $x-y=1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x+5y=67$.
מצא את שיעורי הקדקוד C.

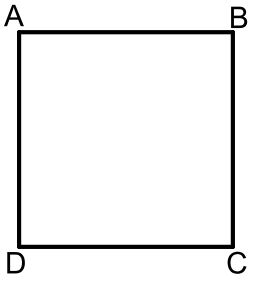
32) נתון טרפז ABCD $(AB\|CD)$ ובו משוואת השוק BC היא: $x=2$.
משוואת הבסיס CD היא $2x+3y=7$ וידוע כי $A(-4,1)$.

א. מצא את משוואת הבסיס AB.

ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.

ג. מעבירים את האלכסון AC.
הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.

33) במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3 ושיעורי הנקודה A הם: $(1,4)$.



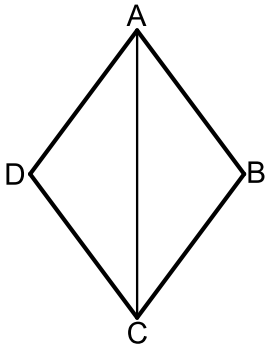
א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?
הראה חישוב מתאים.

ב. נתון גם: $D(4,13)$, $m_{CD}=-\frac{1}{3}$ ו- $\sqrt{90}$ ס"מ $=BC$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ג. נתון גם: $B(-8,7)$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

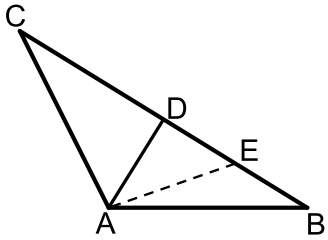
34) המרובע ABCD הוא מעוין.
ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: $(0,6)$.
כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא: $y=-1.5x+6$ ואחת ממשואות הצלעות היא: $5y+x=4$.



א. מצא את משוואת האלכסון השני.

ב. מצא את שאר קדקודי המעוין

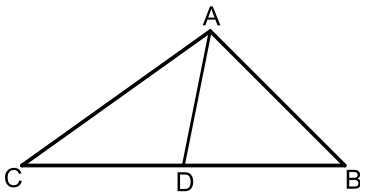
35) המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$.
ב-ΔABC מעבירים את הגובה AD לבסיס BC ומסמנים נקודה E כך שמתקיים: $DE=BE$.
קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון כי: $E(8.5,2.5)$, $D(5,7)$.



א. מצא את שיעורי שאר קודקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.

36) נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD.
הצלע BC מונחת על הישר: $y=4$ וידוע כי שיעור ה-x של הנקודה C הוא: $x_C=-1$.
כמו כן נתון: $A(7,8)$, $m_{AB}=-2$.



א. מצא את משוואת הצלע AB.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?

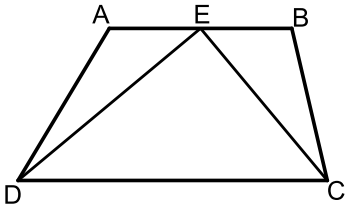
ii. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.

ii. איזה משולש הוא המשולש ABC?

37) המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה-x.



שיעורי הנקודה B הם $(3,2)$ והצלע AD מונחת על הישר: $x=-5$. אורך הקטע DE הוא $\sqrt{80}$.

כך ש-D ברביע השלישי וכן: $\sphericalangle DEC=90°$.

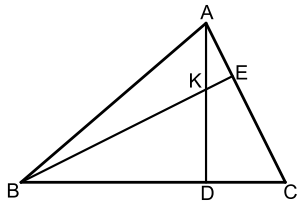
א. מצא את שיעורי הנקודות A , D ו-E.

ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.

ג. מצא את שיעורי הנקודה C.

ד. חשב את שטח המשולש DEC.

38) AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC.



ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: $(1,3)$.

שיעורי הנקודות D ו-E הם: $E(3,5)$, $D(-2,4)$.

א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.

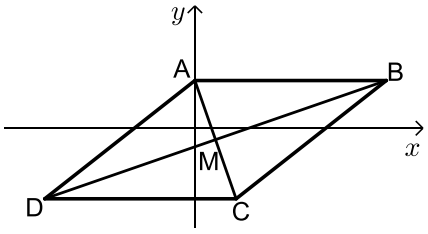
ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.

ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.

ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.

39) נתון מעוין ABCD. ידוע כי הצלע CD מונחת על $y=-7$.

אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים בנקודה: $M(-0.5,-3)$. שיפוע האלכסון AC הוא 4-.

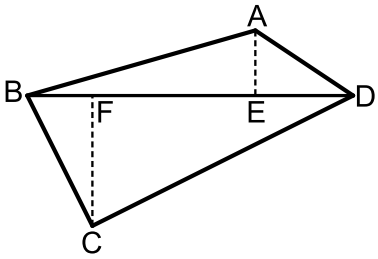


א. מצא את משוואת האלכסון AC.

ב. מצא את שיעורי הנקודה C.

ג. חשב את שטח המשולש BMC.

40) נתון מרובע ABCD שקודקודיו הם: $A(3,13)$, $B(-2,4)$, $C(9,3)$, $D(8,14)$.



מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.

א. מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.

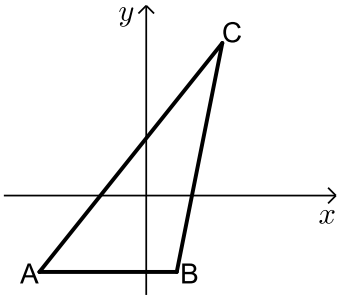
ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

41) על הישר $y=-5$ מסמנים את

הנקודות: $A(-7,-5)$, $B(2,-5)$.

הנקודה C נמצאת על הישר: $y=x-5$.

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה C ב-t.



א. הבע באמצעות t את שיעור ה-y של הנקודה C.

ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.

הבע באמצעות t את המרחקים של C מ-A ומ-B.

ג. מצא את t ואת אורך הצלע BC.

ד. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB.

ידוע כי D נמצאת ברביע השלישי.

מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח

המשולש DAC יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.

42) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB=BC)$

ובו נתון: $A(-4,12)$, $B(x,6)$ ו-$C(4,8)$.

א. מצא את x.

ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת הצלע AC.

ii. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-y ב-D.

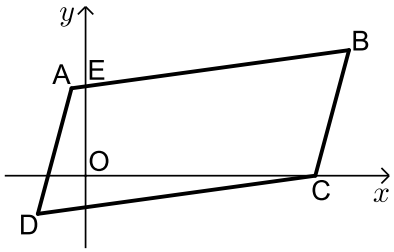
מצא את שיעורי הנקודה D.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא נקודה E ברביע הראשון $(x_E<5)$ כך שהמשולש DCE יהיה גם

שווה שוקיים וישר זווית $(\sphericalangle C=90°)$.

ii. חשב את יחס השטחים בין המשולשים: $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$.



43) באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.

ידועים קודקודי המקבילית הבאים: $A(-1,y)$

ו-$B(x,4)$. (x ו- y נעלמים).

שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא: $d_{CD}=\sqrt{104}$.

א. מצא את x ו- y אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה-x בחלקו החיובי

וכי: $d_{BC}=\sqrt{17}$. מצא את שיעורי הקדקוד C (מצא שתי אפשרויות).

ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- y ב-E.

שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש. מצא את האפשרות הנכונה עבור הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

תשובות סופיות:

28 א. $y=-\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}$ ב. $C(-6,0)$ ג. $y=-\frac{2}{9}x-\frac{4}{3}$.

29 א. $l_{BD}: y=3x-22$. ב. $l_{BC}: y=-\frac{1}{8}x-6\frac{3}{8}$.

30 א. $S_{EDF}=$ 18 יח"ש. ב. AB = 3 יחידות אורך.

31 $C(14,5)$.

32 א. $y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ ב. $C(2,1)$, $B(2,-3)$ ג. $S_{ABC}=$ 12 יחידות שטח.

33 א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.
ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.
ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות. ד. $S=$ 90 יח"ש.

34 א. $y=\frac{2}{3}x+1\frac{2}{3}$ ב. $(-1,1)$, $(4,0)$, $(5,5)$.

35 א. $C(-2,16)$, $B(12,-2)$ ב. $y=-8x$.

36 א. $y=-2x+22$ ב. i. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווי שטח הוא תיכון.
ii. ב. $D(4,4)$, $B(9,4)$.
ג. ii. $BC=10$, $AD=5$. ג. ii. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

37 א. $E(-1,0)$, $A(-5,-2)$, $D(-5,-8)$. ב. $CD: y=\frac{1}{2}x-5\frac{1}{2}$, $CE: y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
ג. $C(5,-3)$. ד. $S_{DEC}=$ 30 יח"ש.

38 א. $AC: y=-x+8$, $AD: y=-\frac{1}{3}x+3\frac{1}{3}$. ב. $A(7,1)$.
ג. $BC: y=3x+10$, $BE: y=x+2$. ד. $B(-4,-2)$.

39 א. $y=-4x-5$ ב. $C(0.5,-7)$ ג. $S_{DMC}=S_{BMC}=$ 34 סמ"ר.

40 א. $y=x+6$, $d_{BD}=\sqrt{200}$ ב. $E(5,11)$, $F(3,9)$.
ג. $d_{AE}=\sqrt{8}$, $d_{CF}=\sqrt{72}$ ד. $S_{ABCD}=80$.

41 א. $C(t,t-5)$. ב. i. $BC=\sqrt{2t^2-4t+4}$, $AC=\sqrt{2t^2+14t+49}$
ii. $t=8$, BC = 10 ס"מ. ג. $D(-20,-5)$.

42 א. $x=-2$ ג. i. $y=-0.5x+10$ ii. $D(0,10)$ ד. i. $E(2,4)$
ii. $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2}$.

43 א. $x=9$, $y=2$ ב. $C(10,0)$, $C(8,0)$ ג. $C(8,0)$.

חלוקת קטע ביחס נתון:

סיכום כללי:

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}, y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$ (בהצלבה).

שאלות:

1) הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון: $B(-12,16)$, $A(2,-5)$.
מצא את ערכי הנקודה P, אם נתון כי: $\frac{AP}{PB}=\frac{2}{5}$.

2) קודקודי משולש ABC הם: $C(4,-12)$, $B(6,0)$, $A(-1,3)$.
מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

3) מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC
שקודקודיו הם: $C(x_3,y_3)$, $B(x_2,y_2)$, $A(x_1,y_1)$.

4) קודקודי המשולש ABC הם: $C(-1,4)$, $B(7,-3)$, $A(5,1)$.
מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקודקוד A.

תשובות סופיות:

1) $P(-2,1)$

2) $M(3,-3)$

3) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

4) 1.697 יחידות אורך.

מרחק נקודה מישר:

סיכום כללי:

הצגה כללית של ישר ומרחקים:

- הצגה כללית של ישר (צורה סתומה): $Ax+By+C=0$.
- מרחק הנקודה $A(x_1,y_1)$ מהישר $Ax+By+C=0$ הוא: $d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$.

  כאשר $B>0$:
  - אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
  - אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

שאלות:

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את מרחק הנקודה $(-2,4)$ מהישר $4x+3y+11=0$.

ב. מצא את מרחק הנקודה $(4,3)$ מהישר $y=3x-1$.

ג. מצא את מרחק הנקודה $(3,-11)$ מהישר $x-5=0$.

6) מצא את המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון:

א. $3x-4y+6=0$, $A(-5,-1)$ ב. $12x+5y-17=0$, $A(-3,8)$

ב. $2y+7=0$, $A(11,-2)$ ד. $3x-14=0$, $A\left(6,-\frac{1}{2}\right)$

7) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $x+y-7=0$ שמרחקן מהישר $2x-y+5=0$ הוא: $\sqrt{20}$.

8) מצא את שטחה של מקבילית ששיעורי קודקודיה הם: $D(11,2)$, $C(-1,7)$, $B(-5,4)$, $A(7,-1)$.

9) מצא את שטחו של המשולש ΔABC שבו שיעורי קדקוד A הם $A(5,-3)$ ושניים מתיכוני המשולש מונחים על הישרים $x-4=0$ ו- $2x-y-1=0$.

10) מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם: $A(2,2)$, $B(-1,1)$, $C(-5,-2)$.

11) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקן מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$.

12) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקן מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$.

תשובות סופיות:

5) א. 3 ב. $\frac{8}{\sqrt{10}}$ ג. 2.

6) א. 1 ב. 1 ג. $1\frac{1}{2}$ ד. $1\frac{1}{3}$.

7) $\left(-2\frac{2}{3},9\frac{2}{3}\right)$, $(4,3)$

8) $S_{ABCD}=56$ יח"ש

9) $S_{ABC}=18$ יח"ש

10) $S_{ABC}=2.5$ יח"ש

11) $(64,99)$, $(4,9)$

12) $(-157,216)$, $(-1,8)$

מיקום נקודה ביחס לישר:

שאלות:

13) מצא את שיעורי הנקודה על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקה מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$ והיא נמצאת מתחתיו.

14) מצא את שיעורי הנקודה על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקה מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$ והיא נמצאת מעליו.

15) נתון משולש ABC שבו נתונים הקודקודים: $A(1,1)$, $B(13,6)$.
הקדקוד C נמצא על הישר $2x-y-19=0$ ונמצא מתחת לצלע AB.
מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.

16) נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:
$I: x+2y+1=0$, $II: x-2y-11=0$, $III: 2x-y+6=0$
מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ושמרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.

17) מצא את שיעורי מרכז המעגל, החסום במשולש, שצלעותיו מונחות על הישרים: $III: 3x+4y-11=0$, $II: 3x-4y-51=0$, $I: 4x-3y+2=0$.

18) מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה $G(7,-3)$ נמצאת מתחתיו ובמרחק $2\sqrt{10}$ ממנו.

19) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-2,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,9)$ הוא $\sqrt{5}$.

20) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(9,10)$ ומרחקו מהנקודה $B(8,-3)$ הוא $5\sqrt{5}$.

21) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(3,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(-9,2)$ הוא 4.

22) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(1,2)$ ומרחקו מהנקודה $B(-3,10)$ הוא 4.

23) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(10,8)$ ומרחקו מהנקודה $B(7,-1)$ הוא 3.

24) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-6,1)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,7)$ הוא 10.

תשובות סופיות:

13) $(64,99)$

14) $(-1,8)$

15) $C(11,3)$

16) $(-1,-4)$

17) $(2,-5)$

18) $y=3x-4$

19) $y=2x+10$, $y=\frac{2}{11}x+6\frac{4}{11}$

20) $y=\frac{1}{2}x+5\frac{1}{2}$, $y=-\frac{22}{31}x+16\frac{12}{31}$

21) $y=6$, $y=\frac{3}{4}x+3\frac{3}{4}$

22) $x=1$ או $y=-\frac{3}{4}x+2\frac{3}{4}$

23) $x=10$ או $y=1\frac{1}{3}x-5\frac{1}{3}$

24) $y=-\frac{4}{3}x-7$

מרחק בין ישרים מקבילים:

סיכום כללי:

- מרחק בין שני ישרים מקבילים: $Ax+By+C_1=0$ ו- $Ax+By+C_2=0$ כאשר: $B>0$
  הוא: $d=\left|\frac{C_1-C_2}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ ומתקיים בהעדר הערך המוחלט:
  - אם: $C_1>C_2$, $(d>0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מתחת ל- $Ax+By+C_2=0$.
  - אם: $C_1<C_2$ $(d<0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מעל ל- $Ax+By+C_2=0$.

שאלות:

25) מצא משוואת ישר, המקביל לישר $3x-4y+8=0$ ונמצא במרחק 4 ממנו.

26) מצא את המרחק בין הישרים המקבילים: $5x+12y+25=0, 5x+12y-14=0$.

27) נתונים הישרים: $y=6x+5, 12x-2y-15=0$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

28) נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן $AB: 3x+y=0$ ו- $CD: 3x+y-6=0$. הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע AB ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

29) צלע של ריבוע מונחת על הישר $3x-2y+5=0$.
אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $B(1,-1)$.
מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

30) נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי.
מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות $P(4,1)$ ו- $Q(7,2)$
וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא $3\sqrt{10}$.

31) במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר $x-y+3=0$ והצלע BP מונחת על הישר $x+2y+3=0$. אורך הגובה לצלע BP הוא $3\sqrt{5}$ ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

תשובות סופיות:

25) $3x-4y+28=0$, $3x-4y-12=0$ **26)** 3

27) $\frac{25}{\sqrt{148}}$ **28)** $S=$ יח"ש 14.4 , $(2.1,-3.3)$

29) $y=-\frac{2}{3}x+3$, $y=-\frac{2}{3}x-3\frac{2}{3}$, $3x-2y-15=0$

30) $y=3x$ **31)** $P\left(2,-2\frac{1}{2}\right)$

מתמטיקה כללית

פרק 17 - גיאומטריה אנליטית - המעגל

תוכן העניינים

1. הכרות עם משוואת המעגל 302
2. מעגל המשיק לצירים 306
3. משיק למעגל 308
4. שאלות יסודיות שונות 309
5. נושאים מתקדמים במעגל ..... (ללא ספר)
6. כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע 316
7. משוואות המשיקים למעגל 317
8. מיתר המחבר שתי נקודות השקה 319
9. שאלות מסכמות שונות 320

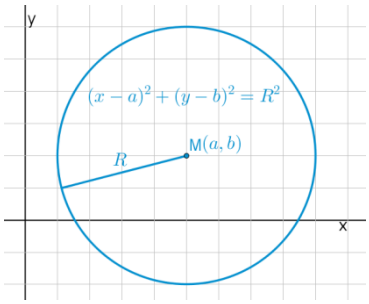
הכרות עם משוואת המעגל:

סיכום כללי:

הגדרה:

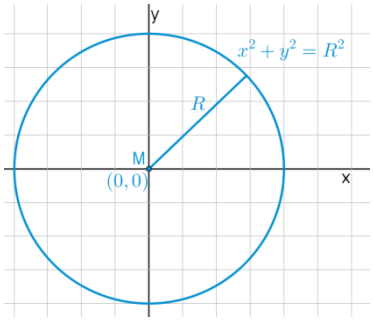
המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.

משוואת מעגל:



משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $M(a,b)$
ורדיוסו R היא: $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$.

משוואת מעגל קנוני:



משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים $M(0,0)$)
ורדיוסו R היא: $x^2+y^2=R^2$.

שאלות:

1) מצא את מרכז ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $(x-3)^2+(y+5)^2=49$.

ב. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=10$.

ג. $(x-m)^2+(y+n)^2=m^2+n^2$.

2) כתוב את משוואות המעגלים שמרכזם M ורדיוסם R:

א. $M(4,-2)\ ,\ R=3$

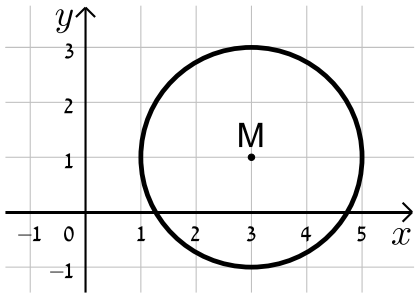
ב. $M(-3,5)\ ,\ R=10$

ג. $M(5,5)\ ,\ R=\sqrt{40}$

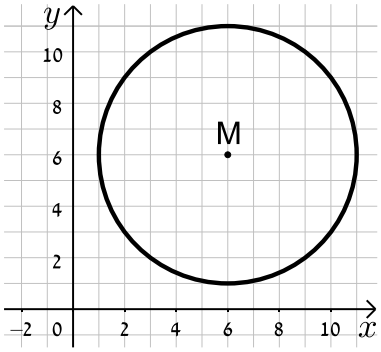
ד. $M(10,-12)\ ,\ R=\sqrt{30}$

3) כתוב את משוואות המעגלים הבאים בכל מקרה:

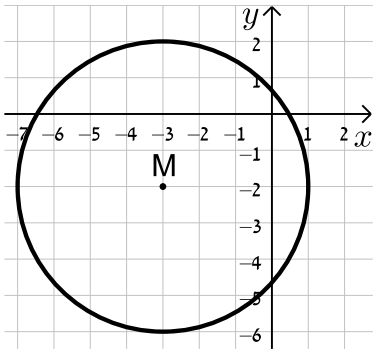
א.



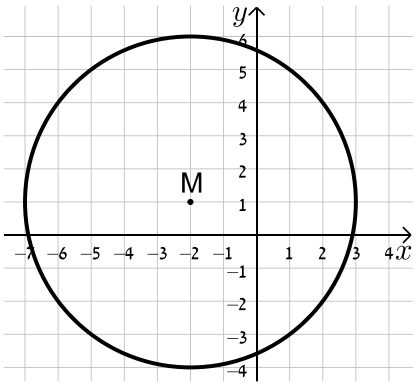
ב.



ג.



ד.



4) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(-4,5)$ ומרכזו בנקודה $O(2,-1)$.

5) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(-5,6)$ והוא חותך את ציר ה-x בנקודה שבה $x=9$.

6) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(0,-7)$ והוא חותך את ציר ה-y בנקודה שבה $y=3$.

7) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(11,2)$, רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר $y=2x-1$.

8) מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות $A(-2,3)$ ו-$B(4,-3)$ הן קצות הקוטר שלו.

9) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר $x=4$, רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה-x מיתר שאורכו 12.

10) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו $M(4,-3)$ אם ידוע כי הישר $y=-3x+7$ חותך אותו בשתי נקודות A ו-B כך שאורכו של המיתר AB הוא 4 יחידות אורך.

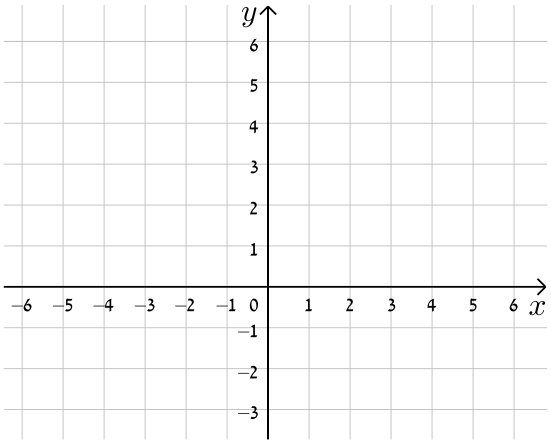
11) מצא את משוואתו של מעגל החוסם משולש שקודקודיו הם $C(-30,28)$, $B(-10,40)$, $A(22,-24)$.

12) נתונים שני מעגלים בעלי אותו המרכז $M(3,-1)$, האחד הוא בעל רדיוס R והשני בעל רדיוס של $2R$.

א. כתוב את המשוואות של שני המעגלים (בטא באמצעות R).

ב. מה תהיינה המשוואות עבור $R=2$?

ג. צייר את שני המעגלים במערכת הצירים שלפניך.



13) שני מעגלים שמרכזיהם $M_1(6,2)$ ו-$M_2(-3,-4)$ חותכים זה את זה בנקודה $(-2,3)$. מצא את משוואות המעגלים.

14) נתונה משוואת המעגל הבאה: $x^2+y^2-10x-10y+a=0$ כאשר a פרמטר.

א. מצא ביטוי של רדיוס המעגל באמצעות a.

ב. איזה מהערכים הבאים יכול להיות הגיוני עבור a ?
נמק ומצא את תחום ההגדרה של a.

i. $a=5$.

ii. $a=55$.

תשובות סופיות:

1) א. $M(3,-5)\ ,\ R=7$ ב. $M(-0.5,0)\ ,\ R=\sqrt{10}$

ג. $M(m,-n)\ ,\ R=\sqrt{m^2+n^2}$.

2) א. $(x-4)^2+(y+2)^2=9$ ב. $(x+3)^2+(y-5)^2=100$

ג. $(x-5)^2+(y-5)^2=40$ ד. $(x-10)^2+(y+12)^2=30$.

3) א. $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ ב. $(x-6)^2+(y-6)^2=25$

ג. $(x+3)^2+(y+2)^2=16$ ד. $(x+2)^2+(y-1)^2=25$.

4) $(x-2)^2+(y+1)^2=72$, $M(3,-3)$.

5) $(x+5)^2+(y-6)^2=232$.

6) $x^2+(y+7)^2=100$.

7) $(x+1)^2+(y+3)^2=169$ או $(x-7.8)^2+(y+14.6)^2=169$.

8) $(x-1)^2+y^2=18$.

9) $(x-4)^2+(y-8)^2=100$ או $(x-4)^2+(y+8)^2=100$

10) $(x-4)^2+(y+3)^2=4\frac{2}{5}$.

11) $(x+2)^2+(y-4)^2=1360$.

12) א. $(x-3)^2+(y+1)^2=4R^2$, $(x-3)^2+(y+1)^2=R^2$

ב. $(x-3)^2+(y+1)^2=16$, $(x-3)^2+(y+1)^2=4$.

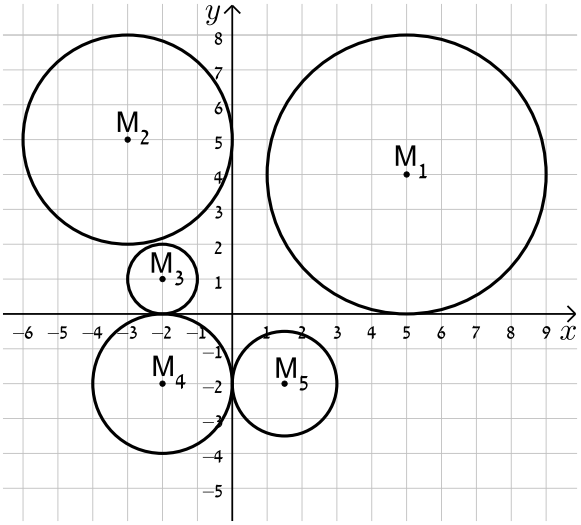
13) $(x-6)^2+(y-2)^2=65$, $(x+3)^2+(y+4)^2=50$

14) א. $R=\sqrt{50-a}$ ב. $a=5$, ת.ה: $a<50$.

מעגל המשיק לצירים:

שאלות:

15) כתוב את משוואות המעגלים הבאים:



16) מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

17) מצא את משוואת המעגל שמשיק לציר ה-x ומרכזו בנקודה $M(16,8)$.

18) מצא את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על הישר $2x+3y+6=0$ והוא משיק לשני הצירים.

19) מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לציר ה-y ולישר $y=6$ ומרכזו על הישר $y=3x-2$ ברביע הראשון.

תשובות סופיות:

15 $M_1:(x-5)^2+(y-4)^2=16$, $M_2:(x+3)^2+(y-5)^2=9$, $M_3:(x+2)^2+(y-1)^2=1$, $M_4:(x+2)^2+(y+2)^2=4$, $M_5:(x-1.5)^2+(y+2)^2=2\frac{1}{4}$.

16 $(x\pm4)^2+(y\pm4)^2=16$.

17 $(x-16)^2+(y-8)^2=64$.

18 $(x-6)^2+(y+6)^2=36$, $\left(x+1\frac{1}{5}\right)^2+\left(y+1\frac{1}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$.

19 $(x-2)^2+(y-4)^2=4$.

משיק למעגל:

סיכום כללי:

משוואת המשיק למעגל $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעליו היא: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$.

שאלות:

20) מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ בנקודות על המעגל שבהן $y=5$.

21) נתונה משוואת המעגל: $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ ומשוואת הישר $y=2x+m$ כאשר m פרמטר. מצא עבור אלו ערכים של m הישר ישיק למעגל ולאלו ערכים הישר יחתוך את המעגל.

תשובות סופיות:

20) $4x-3y+35=0$ ו- $4x+3y=27$.

21) משיק: $m=11,-9$, חותך: $-9<m<11$.

שאלות יסודיות שונות:

שאלות:

22) נתון מעגל שמשוואתו $(x-3)^2+(y+4)^2=25$.

א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

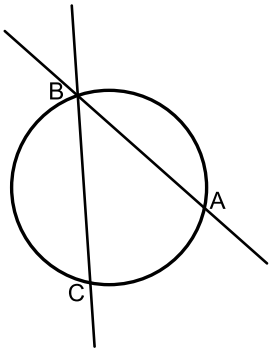
ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה-x.
מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

23) נתון ישר שמשוואתו $y=2x-10$. הישר חותך את ציר ה-x בנקודה A ואת ציר ה-y בנקודה B. בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו.
המשיק חותך את ציר ה-y בנקודה C.
מצא את אורך הקטע BC.

24) נתון המעגל שמשוואתו $x^2+y^2=81$. מסמנים ב-A את נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה-x. הנקודה A היא מרכזו של מעגל נוסף בעל רדיוס של 12. מסמנים את נקודות החיתוך של שני המעגלים ב-B ו-C.
מצא את שטח המשולש שנוצר בין הנקודות B, C ו- O (O ראשית הצירים).

25) נתון ישר שמשוואתו $y=x$. הישר חותך מעגל קנוני שמשוואתו $x^2+y^2=32$ בשתי נקודות, A ו-B, כאשר A ברביע הראשון. בנקודה A עובר מעגל נוסף, המשיק למעגל הקנוני ובעל אותו רדיוס.
מצא את משוואת המעגל הנוסף ואת משוואת המשיק המשותף לשני המעגלים העובר בנקודה A.

26) הישרים: $9y+11x=94$ ו- $y=-3x+14$ נחתכים בנקודה B.
דרך נקודה זו עובר מעגל שמרכזו הוא: $M(-9,1)$.
ידוע כי מעגל זה חותך את הישרים (חוץ מהנקודה B) בשתי נקודות A ו-C (ראה איור).

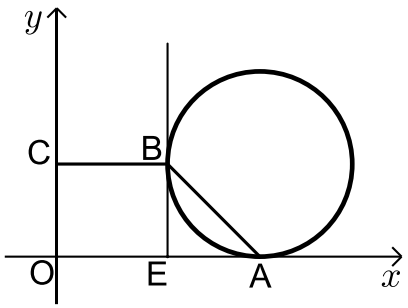


א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את משוואת המעגל.

ג. מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של הישר שמשוואתו: $y=-3x+14$ עם המעגל.

27) נתון מעגל המשיק לציר ה-x בנקודה A.
מהנקודה E שעל ציר ה-x מעלים אנך המשיק למעגל בנקודה B (ראה איור).
הקטע BC מקביל לציר ה-x ו-O היא נקודת ראשית הצירים. יוצרים טרפז ישר זווית ABCO ששטחו הוא 170 סמ"ר.



ידוע כי: $C(0,10)$ ו- 10 ס"מ $= AE$.

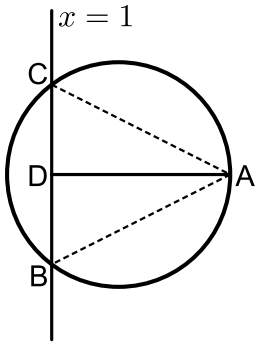
א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את שיעורי הנקודה B.

ii. מצא את שיעורי הנקודה A.

ב. כתוב את משוואת המעגל.

28) הנקודה $A(17,4)$ נמצאת על המעגל שמשוואתו: $(x-7)^2+(y-4)^2=R^2$.
הישר $x=1$ חותך את המעגל בשתי נקודות B ו-C כך ש-B נמצאת ברביע הרביעי. מעבירים את הקטע AD המאונך לישר BC וידוע כי הנקודה D היא אמצע BC.



א. מצא את רדיוס המעגל.

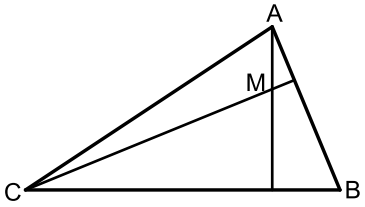
ב. מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את מרחק הנקודה A מהישר $x=1$:

ii. חשב את שטח המשולש ABC.

29) נתון משולש ABC. משוואות הצלעות AB ו-BC במשולש ABC הן בהתאמה: $2y-x=56$ ו- $8y+x=104$.
מעבירים גבהים לצלעות AB ו-BC אשר נחתכים בנקודה $M(0,-2)$ שבתוך המשולש.

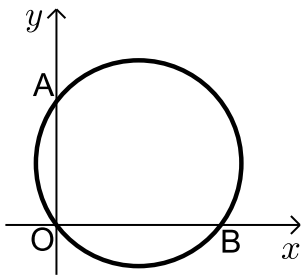


א. מצא את משוואות הגבהים.

ב. מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו הוא הקטע BM.

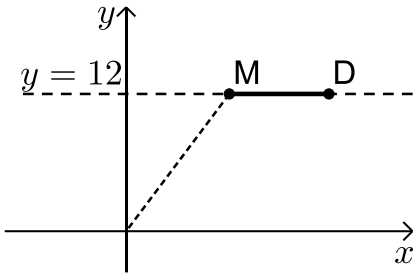
30) באיור שלפניך מתואר המעגל: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.
המעגל חותך את הצירים בנקודות A , B ו-O.



א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
ב. מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע הראשון כך שהמרובע ABCO יהיה מלבן.
ג. חשב את היקף המלבן.

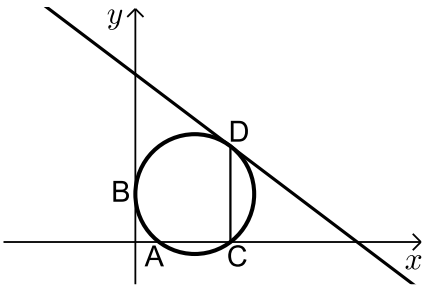
31) המעגל: $(x+a)^2+(y-1)^2=a+4$, $a>0$ חותך את ציר ה-x בנקודה שבה: $x=1$.
א. מצא את a.
ב. מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.
ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.
ד. חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.

32) הנקודות M ו-D נמצאות על הישר $y=12$ ידוע כי שיעור ה-x של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של הנקודה M מראשית הצירים גדול ב- 6 מהמרחק בין הנקודות D ו-M (ראה איור).
בונים מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו הוא האורך DM.



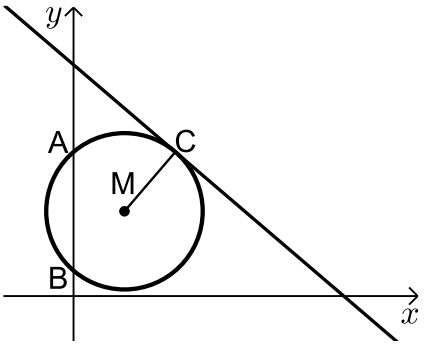
א. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.
ii. מצא את שיעור ה-x של הנקודה D.
ב. כתוב את משוואת המעגל.
ג. האם המעגל הזה חותך את הצירים? הראה חישוב מתאים לטענתך.

33) מעגל שמרכזו בנקודה $M(15,12)$ משיק לציר ה-y בנקודה B וחותך את ציר ה-x בשתי נקודות A ו-C כמתואר באיור.



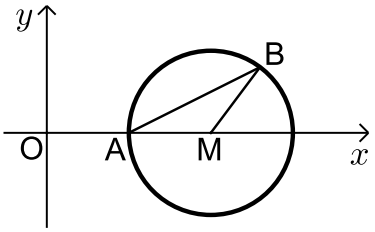
א. כתוב את משוואת המעגל.
מהנקודה C מעלים אנך לציר ה-x שחותך את המעגל בנקודה נוספת D.
דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.
ב. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.

34) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M.
המעגל חותך את ציר ה- y בנקודות A ו-B.
מעבירים משיק למעגל: $6x+7y=191$
דרך הנקודה: $C(12,17)$.



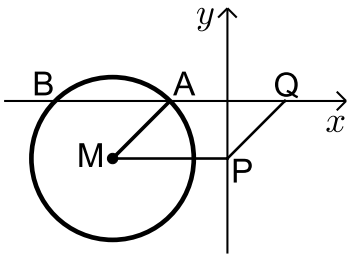
א. כתוב את משוואת הרדיוס MC.
ב. ידוע כי הנקודה M נמצאת על הישר $y=10$.
i. מצא את שיעורי הנקודה M.
ii. מצא את אורך רדיוס המעגל.
iii. כתוב את משוואת המעגל.
ג. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- y.
ד. חשב את שטח המשולש AMB.

35) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M הנמצאת על ציר ה- x. המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה A.
מסמנים את ראשית הצירים ב-O.
ידוע כי A היא אמצע הקטע MO ושיעוריה הם: $A(5,0)$.



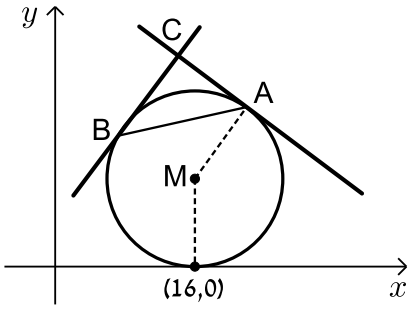
א. מצא את משוואת המעגל.
ב. כתוב את משוואת הישר שעובר דרך הנקודה A ושיפועו הוא 0.5.
ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של הישר שמצאת עם המעגל.
ד. סמן את הנקודה שמצאת בסעיף הקודם ב-B וחשב את שטח המשולש AMB.

36) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו היא: $(x+4)^2+(y+2)^2=8$.



מסמנים את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- x ב-A ו-B (ראה איור).
א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
מעבירים אנך לציר ה- y מנקודת מרכז המעגל M ומסמנים את חיתוכם ב- P.
ב. מצא נקודה Q כך שהמרובע AMPQ יהיה מקבילית. נמק.
ג. כתוב את משוואת הישר PQ.
ד. הוכח כי הישר שמצאת בסעיף הקודם משיק למעגל בנקודה $(-2,-4)$.

37) נתון מעגל שרדיוסו R $(R<16)$ ומשיק לציר ה-x בנקודה שבה: $x=16$.



א. הבע באמצעות R את משוואת המעגל וציין האם הוא חותך את ציר ה-y או לא. נמק.

מהנקודה $A(22,18)$ שעל המעגל מעבירים משיק.

ב. מצא את R וכתוב את משוואת המעגל.

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.

ד. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה B שבה $x_B < x_M$

אם ידוע כי הוא המאונך למשיק הקודם.

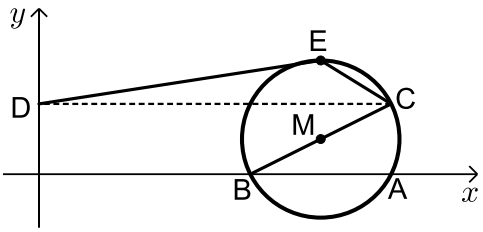
ה. המשיקים נחתכים בנקודה C.

i. מצא את שיעורי הנקודה C.

ii. מצא את שטח המשולש ABC.

38) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו: $(x+a)^2+(y-1)^2=5$, a פרמטר.

ידוע כי המעגל חותך את ציר ה-x בנקודה $A(10,0)$.



א. מצא את a אם ידוע כי $a>-10$.

ב. מצא את הנקודה B - נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה-x.

ג. כתוב את משוואת הקוטר העובר דרך הנקודה B ומרכז המעגל M.

ד. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הקוטר עם המעגל.

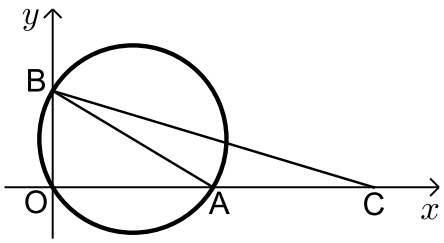
ה. מעבירים אנך מנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם לציר ה-y בנקודה D.

הנקודה E היא הנקודה בעלת שיעור ה-y הגדול ביותר על המעגל.

מחברים את הנקודות E ו-D כך שנוצר המחומש DECBO. חשב את שטחו.

39) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו: $(x-5)^2+(y-3)^2=R^2$, R רדיוס המעגל.

ידוע כי המעגל עובר בראשית הצירים.



א. מצא את רדיוס המעגל וכתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את הנקודות A ו- B - החיתוך של המעגל עם הצירים (ראה איור).

ג. מסמנים נקודה C על ציר ה-x כך ש-A היא אמצע הקטע CO.

i. מצא את שיעורי הנקודה C.

ii. חשב את שטח המשולש ABC.

תשובות סופיות:

22) א. $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,-8)$ ב. 27 יח"ש.

23) 12.5 יחידות אורך.

24) $\sqrt{80}$ יח"ש $= S_{\Delta BOC}$.

25) $(x-8)^2+(y-8)^2=32$, $y=-x+8$.

26) א. $(2,8)$ ב. $(x+9)^2+(y-1)^2=170$ ג. $(4,2)$.

27) א. i. $B(12,10)$ ii. $A(22,0)$ ב. $(x-22)^2+(y-10)^2=100$.

28) א. $R=10$ ב. $B(1,-4)$, $C(1,12)$ ג. i. $d=16$

ii. $S=128$

29) א. $y=8x-2$, $y=-2x-2$ ב. $(-24,16)$ ג. $x^2+(y+2)^2=900$.

30) א. $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(8,0)$ ב. $C(8,6)$ ג. $P=$ 28 יח"א.

31) א. $a=1$ ב. $(0,-1)$, $(-2,3)$ ג. $y=-2x-1$

ד. $S=\frac{1}{4}$.

32) א. i. $d=15$ ii. $x=18$. ב. $(x-9)^2+(y-12)^2=81$.

ג. המעגל אינו חותך את ציר ה-x כאשר מציבים ב-y אפס מתקבלת משוואה ריבועית ללא פתרון. המעגל חותך את ציר ה-x בנקודה אחת- $(12,0)$.

33) א. $(x-15)^2+(y-12)^2=225$ ב. $C(24,0)$, $D(24,24)$. ג. $y=-\frac{3}{4}x+42$.

34) א. $y=\frac{7}{6}x+3$ ב. i. $M(6,10)$ ii. $\sqrt{85}$

iii. $(x-6)^2+(y-10)^2=85$ ג. $A(0,17)$, $B(0,3)$ ד. 42 יח"ש.

35) א. $(x-10)^2+y^2=25$ ב. $y=0.5x-2.5$ ג. $B(13,4)$

ד. 10 יח"ש $= S_{AMB}$.

36) א. $A(-2,0)$, $B(-6,0)$ ב. $Q(2,0)$ ג. $y=x-2$.

37) א. $(x-16)^2+(y-R)^2=R^2$, המעגל אינו חותך את ציר ה- y .

ב. $R=10$, $(x-16)^2+(y-10)^2=100$ ג. $y=-\frac{3}{4}x+34\frac{1}{2}$

ד. $y=\frac{4}{3}x+5\frac{1}{3}$ ה. i. $C(14,24)$ ii. 50 יח"ש.

38) א. $a=-8$ ב. $B(6,0)$ ג. $y=0.5x-3$

ד. $(10,2)$. ה. $11+5\sqrt{5}$ יח"ש $=S_{DECBO}$.

39) א. $R=\sqrt{34}$ יחידות אורך , $(x-5)^2+(y-3)^2=34$. ב. $A(10,0)$, $B(0,6)$

ג. i. $C(20,0)$. ii. 30 יח"ש $=S_{ABC}$.

כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע:

שאלות:

1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $x^2+10x+y^2+6y-2=0$

ב. $x^2-2x+y^2+20y+1=0$

ג. $x^2-8x+y^2-14y=0$

ד. $x^2+y^2+2y=0$

ה. $x^2+x+y^2-3\frac{3}{4}=0$

ו. $x^2-2mx+y^2+6my+m^2=0$

2) משוואתו של מעגל היא $x^2+y^2-6mx-2(m+2)y+4m+4=0$.
מצא את ערכו של m אם ידוע שמרכז המעגל נמצא על הישר $y=2x+7$.

3) משוואתו של מעגל היא $x^2+y^2-8x+12y-48=0$.
מצא את אורכו של המיתר שחותך הישר $y=2x-4$ מהמעגל בלי למצוא את נקודות הקצה של המיתר.

תשובות סופיות:

1) א. $M(-5,-3)\ ,\ R=6$

ב. $M(1,-10)\ ,\ R=10$

ג. $M(4,7)\ ,\ R=\sqrt{65}$

ד. $M(0,-1)\ ,\ R=1$

ה. $M\left(-\frac{1}{2},0\right)\ ,\ R=2$

ו. $M(m,-3m)\ ,\ R=3m$.

2) $m=-1$.

3) $2\sqrt{80}$.

משוואות המשיקים למעגל:

שאלות:

4) מצא משוואת מעגל העובר בנקודה $(1,8)$ המשיק לשני הצירים.

5) מצא את אורך המשיק למעגל שמשוואתו $x^2+y^2-4x+14y+37=0$ היוצא מהנקודה $A(10,-3)$.

6) מצא את משוואת המשיק ואת משוואת הנורמל למעגל שמשוואתו $x^2+y^2-4x+6y+3=0$ בנקודה $A(5,-4)$.

7) מצא את נקודת החיתוך של המשיקים למעגל שמשוואתו $x^2+(y-1)^2=5$ בנקודות שבהן $x=-1$.

8) נתון מעגל שמרכזו בנקודה $(-2,6)$ והוא עובר בראשית הצירים. המעגל חותך את הצירים בשתי נקודות נוספות, A ו-B.

א. הוכח כי המשיקים למעגל בנקודות A ו-B מקבילים זה לזה.

ב. הוכח את סעיף א' בלי למצוא את משוואות המשיקים או את שיפועיהם.

9) נתון המעגל $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ והישר $y=2x+m$.

לאלו ערכים של הפרמטר m הישר משיק למעגל ולאלו ערכים של m הישר חותך את המעגל?

תשובות סופיות:

4) $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ או $(x-13)^2+(y-13)^2=169$.

5) 8.

6) משיק: $y=3x-19$, נורמל: $x+3y+7=0$.

7) $(-5,1)$.

8) שאלת הוכחה.

9) משיק: $m=-9,11$, חותך: $-9<m<11$.

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

סיכום כללי:

משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים למעגל $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$ היוצאים מהנקודה $A(x_1,y_1)$ שמחוץ למעגל היא: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$.

שאלות:

10) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2+y^2+2x-19=0$, המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-3,8)$

ב. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2+(y-1)^2=5$, המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-5,1)$.

11) נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+16x+48=0$ ונקודה P, שנמצאת על החלק החיובי של ציר ה- y. הישר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים למעגל מנקודה P חותך את ציר ה- y בנקודה Q. נתון: $PQ=14$.
מצא את שיעורי הנקודה Q.

תשובות סופיות:

10) א. $x-4y+11=0$ ב. $x=-1$.

11) $Q(0,-8)$ או $Q(0,-6)$.

שאלות מסכמות שונות:

שאלות:

12) נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+16x-12y+64=0$. המעגל משיק מבחוץ למעגל קנוני. מצא את משוואת המעגל הקנוני, את נקודת ההשקה בין המעגלים ואת משוואת המשיק המשותף העובר בנקודה זו.

13) המעגלים $x^2+y^2+22x-6y=m$ ו- $x^2+y^2=26$ נחתכים בזווית ישרה.
מצא את ערכו של m.

14) בטרפז שווה שוקיים ABCD נתון כי הבסיס הגדול, DC, מונח על הישר: $3x-y-9=0$ והשוק AD מונחת על הישר $x+y-3=0$.
שיעורי הקודקוד B הם $(3,-8)$.
מצא את משוואת המעגל החוסם את הטרפז ABCD.

15) מצא את משוואתו של מעגל החוסם ריבוע, שאחד מקדקודיו נמצא בראשית הצירים ומשוואת אחד מאלכסוניו היא $3x-y+10=0$.

תשובות סופיות:

12) $4x-3y+20=0$, $A(-3.2,2.4)$, $x^2+y^2=16$.

13) $m=-26$.

14) $(x-1)^2+(y+4)^2=20$.

15) $(x+3)^2+(y-1)^2=10$.

מתמטיקה כללית

פרק 18 - גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה

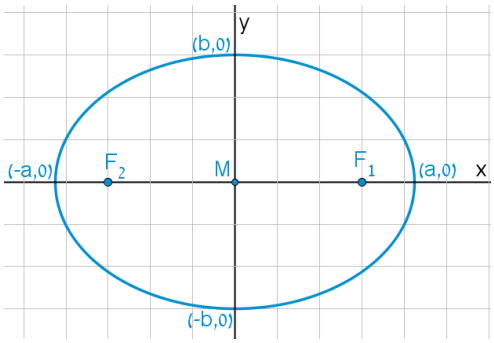
תוכן העניינים

1. האליפסה 321
2. הפרבולה 325

האליפסה:

סיכום כללי:

הגדרה:



המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.

מושגים באליפסה:

- הציר הגדול: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- x.
- הציר הקטן: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- y.
- מרכז האליפסה: מפגש צירי האליפסה (ראה איור).
  באליפסה קנונית מרכז האליפסה נמצא בראשית הצירים.
- מוקדי האליפסה: שתי נקודות קבועות שבעבורך סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה הוא גודל קבוע השווה ל- $2a$. המוקדים יסומנו ב- F_1 ו- F_2 ושיעוריהם הם: $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$.
- רדיוסי ווקטור: המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים.
  אורך הרדיוס מנקודה (x,y) שעל האליפסה למוקד הימני הוא: $r_1 = a - \frac{cx}{a}$.
  אורך הרדיוס מנקודה (x,y) שעל האליפסה למוקד השמאלי הוא: $r_2 = a + \frac{cx}{a}$.
- מיתר: קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.
- קוטר: מיתר העובר דרך מרכז האליפסה.

משוואות וקשרים:

- משוואת אליפסה קנונית היא: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ או: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
- הקשר בין הפרמטרים של האליפסה הוא: $a^2 - b^2 = c^2$.
- מכפלת שיפועי מיתר באליפסה והקוטר החוצה אותו היא קבועה ושווה ל- $-\frac{b^2}{a^2}$.

שאלות:

1) מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה $x^2+4y^2=36$.

2) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא $2\sqrt{3}$.

3) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה $8\sqrt{2}$.

4) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה $\left(-3\sqrt{3},2\right)$.

5) מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו $x^2+y^2=16$ ומוקד אחד שלה הוא בנקודה $\left(\sqrt{10},0\right)$.

6) מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- y בנקודה $\left(0,-2\sqrt{5}\right)$ והמרחק בין המוקד הימני לקדקוד הימני בה הוא 2.

7) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות $\left(-2,\sqrt{6}\right)$ ו- $\left(\sqrt{14},1\right)$.

8) מצא על האליפסה $3x^2+4y^2=144$ את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.

9) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה $(-3,1)$ ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.

10) מצא על האליפסה $x^2+3y^2=12$ את הנקודות שמהן רואים את הקטע שבין שני המוקדים בזווית ישרה.

11) מצא את משוואתו של קוטר באליפסה $x^2+4y^2=50$ ששיפועו חיובי ואורכו $\sqrt{56}$.

12) נתונים האליפסה $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ והישר $y=2x+k$. מצא לאלו ערכים של הפרמטר k הישר משיק לאליפסה ולאלו ערכים של הפרמטר k הישר חותך את האליפסה.

13) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $3x^2+5y^2=120$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

14) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

15) באליפסה $5x^2+9y^2=90$ חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.

16) באליפסה $x^2+5y^2=16$ חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קדקודיו האחרים.

17) באליפסה חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה וקדקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y.
מצא את משוואת האליפסה אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה $\left(4\sqrt{2},0\right)$.

18) מצא באליפסה $2x^2+3y^2=12$ משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא $\left(1.5,1\right)$.

19) ישר שמשוואתו $x-y-3=0$ חותך מאליפסה מיתר שאמצעו בנקודה $\left(2,-1\right)$.
מצא את משוואת האליפסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(2\sqrt{2},-2\right)$.

20) נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-25}=1$, $(0<a\neq 5)$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. לאיזה ערך של a המשוואה מייצגת מעגל?

ii. לאלו ערכים של a המשוואה מייצגת אליפסה?

ב. הוכח כי בעבור $a=4$ אין אף נקודה על האליפסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

תשובות סופיות:

1) $2a=12$, $2b=6$

2) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{3}=1$

3) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$

4) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1$

6) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

7) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

8) $\left(4,\sqrt{24}\right)$, $\left(4,-\sqrt{24}\right)$, $\left(-4,\sqrt{24}\right)$, $\left(-4,-\sqrt{24}\right)$

9) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

10) $\left(\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{6},-\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{6},-\sqrt{2}\right)$

11) $y=\sqrt{6}x$

12) משיק: $k=\pm 12$, חותך: $-12<k<12$.

13) $S=$ 60 יח"ש

14) $S=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

15) $S=$ יח"ש $26\frac{2}{3}$

16) $\left(1,\sqrt{3}\right)$, $\left(1,-\sqrt{3}\right)$

17) $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{16}=1$

18) $y=-x+2.5$

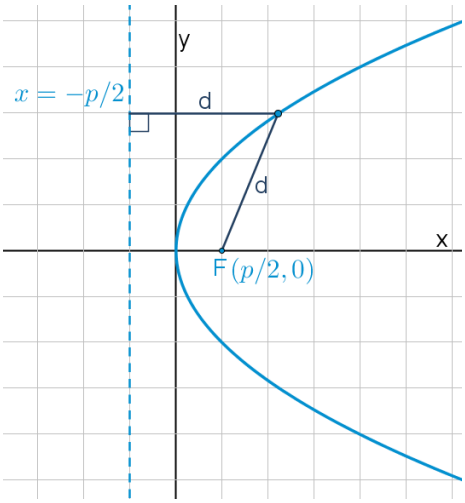
19) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

20) א. i. $a=\sqrt{12.5}$ ii. $a\neq\sqrt{12.5}$

הפרבולה:

סיכום כללי:

הגדרה:



המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה.
הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.

מושגים בפרבולה:

- מוקד: נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה ממנה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.
- מדריך: ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.
- קדקוד הפרבולה: ראשית הצירים.
- רדיוס: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה: $r = x + \frac{p}{2}$.
- מיתר: קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה.
- קוטר (לא בחומר): ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (ציר ה- x אצלנו).

משוואת הפרבולה:

משוואת הפרבולה הקנונית היא: $y^2 = 2px$ כאשר p הוא פרמטר הפרבולה.

משיק לפרבולה:

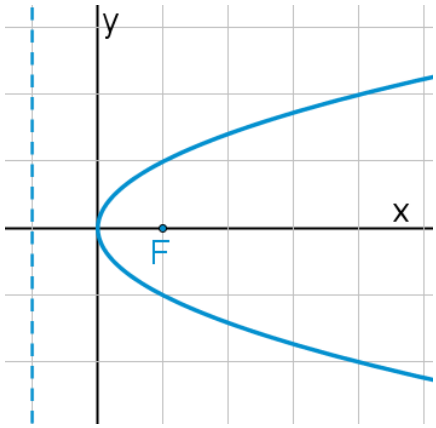
- משוואת המשיק לפרבולה $y^2=2px$ בנקודה $A(x_0,y_0)$ שעליה היא: $yy_0=p(x+x_0)$.
- שיפוע המשיק לפרבולה $y^2=2px$ בנקודה $A(x_0,y_0)$ שעליה הוא: $m=\frac{p}{y_0}$.

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

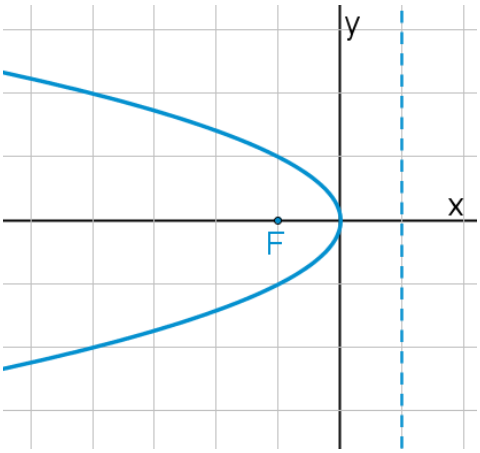
משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה $y^2=2px$ היוצאים מהנקודה $A(x_0,y_0)$ שמחוץ לפרבולה היא: $yy_0=p(x+x_0)$.

תיאורים גרפיים:

פרבולה שמשוואתה $y^2=2px$:



פרבולה שמשוואתה $y^2=-2px$:



שאלות:

1) נתונה הפרבולה $y^2=18x$. מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.

2) מצא את משוואתה של פרבולה שהישר $x=-3$ הוא המדריך שלה.

3) מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך שלה הוא 5.

4) מצא את משוואתה של פרבולה שעוברת בנקודה $(9,-6)$.

5) מצא את משוואתה של פרבולה שמוקדה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה $x^2+2y^2=18$.

6) מצא נקודות על הפרבולה $y^2=6x$ שמרחקן מהמוקד הוא 4.

7) מצא נקודות על הפרבולה $y^2=8x$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

8) מצא נקודות על הפרבולה $y^2=2px$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

9) מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2=10x$.

10) הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2=2px$.

11) נתונה הפרבולה $y^2=2px$. הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו מונח על ציר ה-x, וקודקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגש תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.

12) את נקודה A שעל הפרבולה $y^2=20x$ חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה אנך למדריך. היקף הטרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה-x שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח הטרפז.

13) קצות מיתר בפרבולה $y^2=4x$ הם A ו-B. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה-x של נקודה A הוא 4.

14) מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2=16x$, שעובר בראשית הצירים ומרחקו מהמוקד הוא $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

15) מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2=2x$, שאמצעו בנקודה $\left(1\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

16) נתונה הפרבולה $y^2=4x$ והישר $y=2x+k$, לאיזה ערך של k הישר משיק לפרבולה?

17) נתונה הפרבולה $y^2=6x$.

א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות שבהן $x=1.5$.

ב. הוכח שנקודת החיתוך של הנורמלים בנקודות אלה נמצאת על ציר ה-x.

18) הנקודות A ו-B נמצאות על הפרבולה $y^2=12x$. נתון כי $y_A=4$.
מצא את שיעורי נקודה B אם ידוע שהמשיקים לפרבולה בנקודות הנתונות יוצרים זווית ישרה.

19) נקודה A נמצאת על הפרבולה $y^2=28x$ בربיע הרביעי.
אורך הנורמל לפרבולה מנקודה A עד לציר ה-x הוא $7\sqrt{5}$.
מצא את משוואת הנורמל.

20) מרחק המוקד של הפרבולה $y^2=8x$ ממשיק לה ששיפועו חיובי הוא $\sqrt{8}$.
מצא את משוואת המשיק.

21) נתונה הפרבולה $y^2=2px$. הבע באמצעות p את שיעורי הנקודה שעל הפרבולה ברביע הראשון, שמרחק המשיק בה ממוקד הפרבולה הוא p.

22) נתונות שתי פרבולות: I. $y^2=6x$, II. $y^2=12x$
ישר שעובר בראשית הצירים חותך את הפרבולות בנקודות A ו-B.
הראה כי המשיקים בנקודות A ו-B מקבילים.

23) נתונה הפרבולה $y^2=14x$ והנקודה $(-1,-3)$, ממנה יוצאים שני משיקים לפרבולה. מצא את משוואת המיתר המחבר בין נקודות ההשקה.

24) נתונה הפרבולה $y^2=18x$ ונקודה ברביע השלישי, ששיעור ה-x שלה קטן ב-1 משיעור ה-y שלה. מהנקודה יוצאים שני משיקים לפרבולה. המיתר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם הצירים משולש ששטחו 18.
מצא את משוואת המיתר.

25) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה $y^2=24x$ והוא משיק למדריך שלה.

26) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה $(8,0)$ והוא משיק לפרבולה $y^2=10x$ בשתי נקודות.

27) נתונה הפרבולה $y^2=2px$ ומעגל שמרכזו על ציר ה-x והוא משיק לפרבולה מבפנים בשתי נקודות. הישר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם המשיקים בנקודות אלה משולש שווה צלעות. הבע באמצעות p את משוואת המעגל.

28) הנקודה $A(2,3)$ נמצאת על פרבולה. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לפרבולה בנקודה A ומשיק לציר ה-y.

29) נתונה הפרבולה $y^2=2px$ שבה $p>4$. הישר $x=2$ חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B. הבע באמצעות p את שיעורי קדקוד C של משולש ΔABC שמוקד הפרבולה הוא מפגש האנכים האמצעיים בו, אם ידוע שקדקוד C נמצא על ציר ה-x.

30) אליפסה שמשוואתה $x^2+4y^2=16$ חותכת את הפרבולה $y^2=2px$ בשתי נקודות. המרובע שקדקודיו הם נקודות החיתוך, מרכז האליפסה וקדקודה הימני של האליפסה הוא מעוין. מצא את משוואת הפרבולה.

תשובות סופיות:

1) $p=9$, $\mathrm{F}\left(4\frac{1}{2},0\right)$

2) $y^2=12x$

3) $y^2=10x$

4) $y^2=4x$

5) $y^2=12x$

6) $\left(2\frac{1}{2},\sqrt{15}\right)$, $\left(2\frac{1}{2},-\sqrt{15}\right)$

7) $\left(1,\sqrt{8}\right)$, $\left(1,-\sqrt{8}\right)$

8) $\left(\frac{p}{4},\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{p}{4},-\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$

9) $S_{\mathrm{OAB}}=300\sqrt{3}$ יח"ש

10) $S_{\mathrm{ABO}}=12\sqrt{3}p^2$ יח"ש

11) $S_{\mathrm{ABC}}=3\sqrt{3}p^2$ יח"ש

12) $S_{\mathrm{ABCF}}=40\frac{5}{8}$ יח"ש

13) $\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},-1\right)$ או $\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},1\right)$

14) $y=2x$ או $y=-2x$

15) $y=2x-2$

16) $k=\frac{1}{2}$

17) א. $y=x+1\frac{1}{2}$, $y=-x-1\frac{1}{2}$

18) $\mathrm{B}\left(6\frac{3}{4},-9\right)$

19) $y=\frac{1}{2}x-7\frac{7}{8}$

20) $y=x+2$

21) $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}p,\sqrt{3}p\right)$

22) הוכחה.

23) $7x+3y-7=0$

24) $y=-9x+18$

25) $(x-6)^2+y^2=144$

26) $(x-8)^2+y^2=55$

27) $\left(x-2\frac{1}{2}p\right)^2+y^2=4p^2$

28) $\left(x-1\frac{1}{4}\right)^2+(y-4)^2=\frac{25}{16}$

29) $\mathrm{C}(p+2,0)$

30) $y^2=1\frac{1}{2}x$

מתמטיקה כללית

פרק 19 - גיאומטריה אנליטית - ההיפרבולה

תוכן העניינים

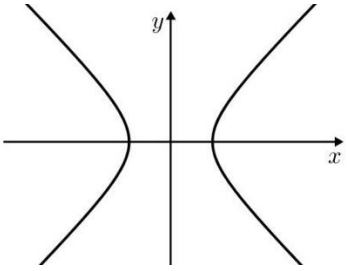
1. הגדרות יסודיות 331
2. הקשר בין הפרמטרים של היפרבולה 332
3. רדיוסים של היפרבולה 333
4. מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה 334
5. אסימפטוטות של היפרבולה 335

הגדרות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, שהפרש מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא היפרבולה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי ההיפרבולה.



- משוואת היפרבולה קנונית: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
- היפרבולה שבה $a=b$, נקראת היפרבולה שוות שוקיים.
- הקשר בין הפרמטרים: $c^2=a^2+b^2$.

שאלות:

1) מצא את אורך צירי ההיפרבולה שמשוואתה $x^2-4y^2=36$.

2) מצא את משוואתה של ההיפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 18 ואורך צירה המדומה הוא $2\sqrt{3}$.

3) מצא את משוואתה של היפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 12 והמרחק בין מוקדיה הוא 20.

תשובות סופיות:

1) אורך הציר הממשי: 12, אורך הציר המדומה: 6.

2) $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{3}=1$

3) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{80}=1$

הקשר בין הפרמטרים של היפרבולה:

שאלות:

4) מצא את משוואתה של היפרבולה שאורך צירה המדומה הוא $8\sqrt{5}$ והיא עוברת בנקודה $\left(-10,3\sqrt{5}\right)$.

5) מצא משוואת היפרבולה שוות שוקיים שהמרחק בין מוקדיה הוא $\sqrt{200}$.

תשובות סופיות:

4) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

5) $x^2-y^2=25$

רדיוסים של היפרבולה:

סיכום כללי:

רדיוסים בהיפרבולה	רדיוסים באליפסה
$r_1=\left\|\frac{cx}{a}-a\right\|$	$r_1=a-\frac{cx}{a}$
$r_2=\left\|\frac{cx}{a}+a\right\|$	$r_2=a+\frac{cx}{a}$

שאלות:

6) נתונה היפרבולה שמשוואתה: $6x^2-y^2=18$.
מצא על ההיפרבולה את הנקודות שמכפלת מרחקיהן מהמוקדים הוא 25.

7) נתונה היפרבולה שמשוואתה: $7x^2-9y^2=63$.
מצא על ההיפרבולה את הנקודות שסכום ריבועי מרחקיהן מהמוקדים הוא $74\frac{8}{9}$.

8) נתונה היפרבולה שמשוואתה $4x^2-y^2=20$. מצא נקודה על ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

9) נתונה היפרבולה שמשוואתה $5x^2-4y^2=80$.
מנקודה A שעל ההיפרבולה ברביע הראשון העבירו ישר מקביל לציר ה-x, החותך את הענף השמאלי של ההיפרבולה בנקודה B. את נקודה A חיברו עם המוקד הימני F_1 של ההיפרבולה ואת הנקודה B חיברו עם המוקד השמאלי של ההיפרבולה F_2. נתון כי היקף הטרפז F_1BAF_2 הוא 29 יחידות אורך.
מצא את שיעורי הנקודה A.

תשובות סופיות:

6) $\left(\pm2,\pm\sqrt{6}\right)$

7) $\left(\pm4,\pm2\frac{1}{3}\right)$

8) $(3,-4)$

9) $\left(5,\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)$

מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה:

סיכום כללי:

מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה, היא: $\frac{a^2}{b^2}$.

שאלות:

10) נתונה היפרבולה שמשוואתה $4x^2-3y^2=24$.

מצא את משוואתו של מיתר בהיפרבולה, שהנקודה $(3,4)$ היא אמצעו.

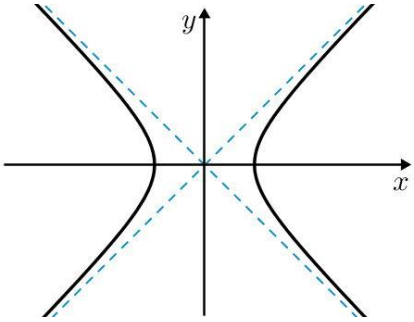
תשובות סופיות:

10) $y=x+1$

אסימפטוטות של היפרבולה:

סיכום כללי:

לכל היפרבולה יש שתי אסימפטוטות משופעות, שענפי ההיפרבולה שואפים אליהן.



- משוואות האסימפטוטות הן: $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$.

שאלות:

11) מצא את משוואת האסימפטוטות של היפרבולה שמשוואתה $4x^2-y^2=48$.

12) הישר $y=-\frac{3}{4}x$ הוא אסימפטוטה של היפרבולה, שהמרחק בין מוקדיה הוא 20.
מצא את משוואת ההיפרבולה.

13) נתונה היפרבולה שמשוואתה $9x^2-4y^2=k$ ואורך צירה המדומה הוא 6.
מצא נקודה על האסימפטוטה היורדת של ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

14) ישר שעובר בנקודה $(-6,8)$ הוא אסימפטוטה של היפרבולה שעוברת בנקודה $\left(9,-8\sqrt{2}\right)$.

א. מצא את משוואת ההיפרבולה.

ב. מצא את מרחק אחד ממוקדי ההיפרבולה מאחת האסימפטוטות שלה.

15) מוקדיה של היפרבולה שעוברת בנקודה $(4,-1)$ מתלכדים עם מוקדיה של אליפסה שמשוואתה $16x^2+25y^2=400$. מצא נקודה על הענף השמאלי של ההיפרבולה, שמרחקה מהאסיפמטוטה העולה של ההיפרבולה הוא $1\frac{1}{3}$.

תשובות סופיות:

11) $y=2x,\ y=-2x$

12) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$

13) $(2,-3)$

14) א. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ב. $d=4$

15) $\left(-3,\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$

מתמטיקה כללית

פרק 20 - גיאומטריה אנליטית - מקומות גיאומטרים והוכחות

תוכן העניינים

1. מקומות גיאומטרים 337
2. שאלות הוכחה 341

מקומות גיאומטרים:

סיכום כללי:

הגדרה:

מקום גאומטרי הוא אוסף נקודות בעלות תכונה מסוימת.

מקום גאומטרי הוא משוואה המקשרת בין x ל- y.

טכניקות מרכזיות במציאת מקומות גיאומטריים:

בשאלות של מקום גאומטרי נפוץ השימוש בדברים הבאים:

- שיפועים:
  i. שיפועי ישרים מקבילים (שווים זה לזה).
  ii. שיפועי ישרים מאונכים (מכפלתם היא 1-).
  iii. שלוש נקודות שעל אותו ישר שומרות על אותו שיפוע.
- משפט פיתגורס.
- אמצע קטע / חלוקת קטע ביחס נתון.
- משיק למעגל – המשיק מאונך לרדיוס – רמז לשימוש במשפט פיתגורס.
- קטע מרכזים:
  i. במעגלים המשיקים מבחוץ – סכום הרדיוסים.
  ii. במעגלים המשיקים מבפנים – הפרש הרדיוסים.
- משפטים מגאומטריה (תאלס, משפט חוצה הזווית, דמיון משולשים)
- אם נתונה משוואה בשאלה – ניתן להשתמש בה על ידי הצבת נקודה שעליה במשוואה.

שאלות:

1) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(-7,-6)$ שווה למרחקן מהנקודה $B(9,2)$.

2) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(3,-6)$ גדול פי 3 ממרחקן מהנקודה $B(-1,10)$.

3) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $(1,0)$ קטן פי 3 ממרחקן מהישר $x=9$.

4) מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים שעוברים בנקודה $(6,0)$ ומשיקים לישר $x=-6$.

5) נתונים שני ישרים: $\text{I. } 3x+y-6=0$, $\text{II. } 2x+6y-1=0$
מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מישר I גדול פי 4 ממרחקן מישר II.

6) מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים שמשיקים לציר ה- y מימין ומשיקים מבפנים למעגל קנוני שרדיוסו 4. מהן ההגבלות?

7) מצא את המקום הגאומטרי של אמצעי כל הקטעים, המחברים את הנקודה $(4,-10)$ עם נקודות על הישר $y=6x+2$.

8) נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+12x-16y=0$. מצא את המקום הגאומטרי של אמצעי כל המיתרים במעגל שעוברים בראשית הצירים.

9) נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2=36$. הכפילו את שיעורי ה- y של כל הנקודות על המעגל ב- $\frac{2}{3}$. מצא את המקום הגאומטרי שמתקבל באופן הזה.

10) נתונות הנקודות $A(2,0)$ ו-$B(10,0)$. מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי הכובד של כל המשולשים ABC אם ידוע שהקודקוד C מונח על הישר $y=3x-12$. מהי ההגבלה?

11) נתון המעגל $x^2+y^2+4x-10y+11=0$. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל שווה למרחקן מהנקודה $(7,2)$.

12) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ בזווית של $120°$.

13) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ בזווית של $60°$.

14) נתון מעגל שמרכזו M ומשוואתו $x^2+y^2-12x-64=0$. מנקודה A שעל המעגל העבירו אנך לציר ה-x שחותך את ציר ה-x בנקודה B והמשכו חותך את המעגל בנקודה C. בנקודה B העבירו מקביל לישר AM ובנקודה C העבירו מקביל לציר ה-x. המקביל ל-AM והמקביל לציר ה-x נפגשים בנקודה D. מצא את המקום הגאומטרי של נקודה D. מהן ההגבלות?

15) האליפסה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ חותכת את חלקו החיובי של ציר ה-x בנקודה A ואת חלקו החיובי של ציר ה-y בנקודה B. מנקודה C שעל ציר ה-x בין O ל-A (O ראשית הצירים) העלו אנך לציר ה-x שחותך את הישר AB בנקודה D.
מצא את המקום הגאומטרי של נקודת מפגש הישרים BC ו-OD.

16) נתון מעגל קנוני שרדיוסו 3. מנקודה A שעל המעגל הורידו אנך לציר ה-x שחותך את ציר ה-x בנקודה C. נסמן ב-B את אמצע הקטע AC.
מנקודה C העבירו מקביל ל-AO (O ראשית הצירים).
מצא את המקום הגאומטרי של מפגש הישרים BO והמקביל ל-AO.

17) נתונות הנקודות $A(4,0)$ ו-$B(-2,0)$. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות C כך שהקטע CO (O ראשית הצירים) הוא חוצה זווית $\sphericalangle C$ במשולש ΔABC.

18) נתון מעגל קנוני שרדיוסו R. את נקודה A שעל המעגל חיברו עם ראשית הצירים (O) ועל הקטע AO סימנו נקודה B כך שמתקיים $AB:BO=a:b$. מנקודה A העבירו אנך לציר ה-x ומנקודה B העבירו אנך לציר ה-y.

א. מצא את המקום הגאומטרי של מפגש האנכים הללו.

ב. המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א' חותך את ציר ה-y בנקודות P ו-Q. מצא את אורך הקטע PQ.

תשובות סופיות:

1) $y=-2x$

2) $\left(x+1\frac{1}{2}\right)^2+(y-12)^2=38\frac{1}{4}$

3) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$

4) $y^2=24x$

5) $x+11y+4=0\ ,\ 7x+13y-8=0$

6) $y^2=16-8x\ ,\ -4<x\ ,y<4$

7) $y=6x-16$

8) $(x+3)^2+(y-4)^2=25$

9) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

10) $y=3x-16\ ,\ x\neq 5\frac{1}{3}$

11) $y=3x-7$

12) $(x-2)^2+(y-1)^2=12$

13) $(x-a)^2+(y-b)^2=4R^2$

14) $x=6\ ,\ -10<y<10$

15) $3x+8y-12=0\ ,\ 0<y<3\ ,\ 0<x<4$

16) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$

17) $(x+4)^2+y^2=16$

18) א. $b^2x^2+(a+b)^2y^2=R^2b^2$ ב. $PQ=\frac{2bR}{a+b}$

שאלות הוכחה:

שאלות:

1) הנקודה P נמצאת על המעגל $x^2+y^2=R^2$. בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישרים $x=R$ ו- $x=-R$ בנקודות A ו-B. הוכח: $y_A \cdot y_B = R^2$.

2) הנקודה P נמצאת על המעגל $x^2+y^2=R^2$, שחותך את ציר ה- y בנקודות $A(0,R)$ ו-$B(0,-R)$. בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישר $y=R$ בנקודה T. הוכח: $OT \parallel BP$.

3) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, ש-F_1 ו-F_2 הם מוקדיה.
הוכח: $PO^2+PF_1 \cdot PF_2 = a^2+b^2$ (O ראשית הצירים).

4) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, שקודקודה הימני הוא A וקדקודה השמאלי הוא B. הישר AP חותך את הישר $x=-a$ בנקודה K והישר BP חותך את הישר $x=a$ בנקודה L. הוכח: $y_K \cdot y_L = 4b^2$.

5) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.
הוכח: היחס בין ריבוע אורך האנך, היורד מנקודה P לציר הגדול, ובין מכפלת שני קטעי הציר הגדול שמשני צידי האנך הוא גודל קבוע.

6) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, שקודקודה הימני הוא A, קדקודה השמאלי הוא B ומוקדה הימני הוא F_1. הישר AP חותך את הישר $x=\frac{a^2}{c}$ בנקודה M והישר BP חותך את הישר $x=\frac{a^2}{c}$ בנקודה N.
הוכח: $\sphericalangle MF_1N = 90°$.

7) נתונה האליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.
הוכח כי מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו היא $-\frac{b^2}{a^2}$.

8) בפרבולה $y^2=2px$ מעבירים נורמל.
הוכח כי היטלו של הנורמל על ציר ה-x הוא גודל קבוע.

9) בפרבולה $y^2=2px$ מעבירים משיקים משתי נקודות שעליה, A ו-B.
המשיקים נפגשים בנקודה C. הוכח: $y_A+y_B=2y_C$.

10) בנקודה A, שעל הפרבולה $y^2=2px$ מעבירים משיק לפרבולה שחותך את המדריך שלה בנקודה B. ממוקד הפרבולה מעלים אנך לציר ה-x שחותך את המשיק בנקודה C. הוכח: $FB=FC$ (F - מוקד הפרבולה).

11) בפרבולה $y^2=2px$ מעבירים מיתר, החותך את הפרבולה בנקודות A ו-B.
המיתר חותך את ציר ה-x בנקודה C. הוכח: $x_A\cdot x_B=(x_C)^2$.