

מתמטיקה יישומית להנדסה



תוכן העניינים

1. וקטורים	1
2. וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים	1
3. אינטגרלים קוויים ושימושיהם	22
4. שדות משמרים - אי תלות במסלול	27
5. משפט גרין	32
6. אינטגרלים משטחיים ושימושיהם	35
7. משפט הדיברגנץ (גאוס)	38
8. משפט סטוקס (גרין במרחב)	40
9. אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)	42
10. טורי פורייה	51
11. התמרת פורייה	69
12. בעיות שטורם ליוביל	89
13. משוואות לינאריות וקאוזי לינאריות מסדר ראשון	94
14. משוואת הגלים	(ללא ספר)
15. משוואת החום	(ללא ספר)
16. משוואת לפלס	(ללא ספר)
17. אינטגרל אנרגיה	(ללא ספר)

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 1 - וקטורים

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)
2. מכפלה סקלרית ומכפלה וקטורית (ללא ספר)
3. גרדיאנט ורוטור (ללא ספר)
4. גזירה ואינטגרל (ללא ספר)
5. וקטורים קוליניארים (ללא ספר)
6. תרגילים נוספים (ללא ספר)

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 2 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

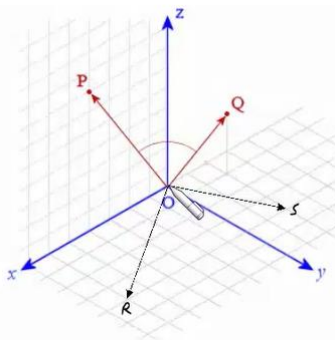
1. וקטורים 1
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת 8
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב 10
4. פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי 11
5. גרדינט, דיברגנץ ורוטור 20

וקטורים

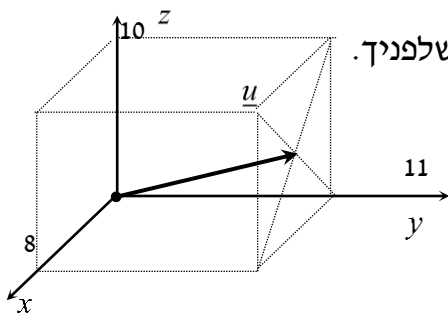
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך \underline{u} . סימונים מקובלים נוספים הם: \vec{u} , \vec{u} .
את גודל הווקטור \underline{u} נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

- (1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ שבאיור. הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצאו את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצאו מהו הווקטור \underline{u} על פי השרטוט.



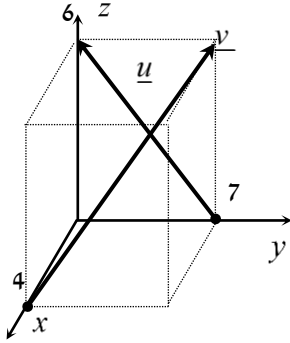
- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור \overline{EF} אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N , אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$

והווקטור $\overline{MN} = (-1,-1,9)$.



(6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצאו מהו הווקטור \underline{u} ומהו הווקטור \underline{v} .

(7) מצאו את x , y ו- z , אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$ כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$,

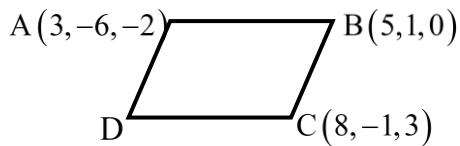
$\underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$.

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$

א. הראו כי $\overline{AB} = \overline{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overline{AD} = \overline{BC}$? נמקו.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

שיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצאו את שיעורי הקדקוד D .

* אין להיעזרו בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים $\underline{u} = (-3, 1, 4)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$ ו- $\underline{w} = (2, 6, -5)$.
 * בשאלות 13, 14, ו-16 הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו :

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשבו :

א. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12) $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13) $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14) $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15) $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16) $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$, ויש למצוא את הווקטורים :

(17) $\overline{AC} + \overline{AB}$

(18) $2\overline{AC} - 4\overline{AB}$

(19) $2\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$.

הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

(21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :
 $A(1, 2, 0)$, $B(-2, 5, 3)$, $C(-1, 8, 4)$, $D(4, 3, -1)$

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

(22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} :

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1)$, $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$

(23) מצאו את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם :

$A(-3, 2, 1)$, $B(0, 3, 2)$, $C(5, -1, 0)$

(24) נתונים הווקטורים $\underline{u} = (2, -1, 0)$, $\underline{v} = (5, 0, 3)$

מצאו וקטור \underline{w} שמכפלתו ב- \underline{u} היא 0 ומכפלתו ב- \underline{v} היא 0,

אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

(25) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3, 2, 1)$ ו- $(1, -1, 2)$,

ושמרחקו מהווקטור $(1, 1, 0)$ הוא $\sqrt{3}$.

(26) ענו על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}|$

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2$

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

(27) הוכיחו :

א. $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ב. $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ג. $(\underline{u} - \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) = |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2$

ד. $|\underline{u} + \underline{v}|^2 + |\underline{u} - \underline{v}|^2 = 2|\underline{u}|^2 + 2|\underline{v}|^2$

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. $\frac{1}{4}(|\underline{u} + \underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

(28) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה. נגדיר $a = u - 2v$, $b = 3u + v$.
 אם α היא הזווית בין a ל- b , אז $\cos \alpha$ שווה ל-?

(29) יהיו $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k . יהי $v = \alpha w_1 + \frac{3}{4} w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1 .
 מהו המרחק של v מ- w_1 ?

(30) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u - v\| = 2$.
 הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \vec{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left(\frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad (22)$$

$$S_{\triangle ABC} = 10.173 \quad \text{יח"ש.} \quad (23)$$

$$(-3, -6, 5) \quad (24)$$

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{or} \quad v = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (25)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (26)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{50}} \quad (28)$$

$$\frac{5}{4}k \quad (29)$$

(30) שאלת הוכחה.

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

$$(1) \text{ נתון: } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

חשבו: $(u \times v) \times w$.

$$(2) \text{ חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: } A = (8, 2, 3), B(4, -1, 2), C(-8, 0, 4)$$

(3) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.

$$. u \times v = 0, \quad u \cdot w = 0, \quad |u| \neq 0$$

הוכיחו כי $v \cdot w = 0$.

(4) נתונים שני וקטורים u, v במרחב.

$$. u \perp v, \quad |u| = 1, \quad |v| = 4$$

חשבו $|(u+v) \times (u-v)|$.

$$(5) \text{ נתון } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

חשבו:

$$. \text{א. } u \cdot (v \times w) \quad . \text{ב. } v \cdot (w \times u) \quad . \text{ג. } (u \times v) \cdot w$$

(6) חשבו את נפח:

$$. \text{א. המקבילון שקדקודיו } A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$$

$$. \text{ב. הפירמידה שקדקודה } A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$$

$$(7) \text{ חשבו את נפח הפירמידה שקדקודה } A(2, 2, 5), B(1, -1, -4), C(3, 3, 10), D(8, 6, 3)$$

8 נתון מקבילון הבנוי על וקטורים a, b, c . הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $a, a-b, a+b-4c$, שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9 נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב. הוכיחו כי $[(u+v) \times (v+w)](u+w) = 2w \cdot (u \times v)$.

10 נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.

$$u \cdot (v \times w) = 4$$

חשבו:

א. $u \cdot (w \times v)$ ב. $(v \times w) \cdot u$ ג. $w \cdot (u \times v)$ ד. $v \cdot (u \times w)$

11 נתונים שלושה וקטורים a, b, c במרחב.

מהי הנוסחה עבור $a \times b \times c$?

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$S = 22.5 \quad (2)$$

שאלת הוכחה. (3)

$$8 \quad (4)$$

$$\begin{matrix} \text{א. } -3 & \text{ב. } -3 & \text{ג. } -3 \end{matrix} \quad (5)$$

$$\begin{matrix} \text{א. } 6 & \text{ב. } 1 \end{matrix} \quad (6)$$

$$9 \frac{1}{3} \quad (7)$$

שאלת הוכחה. (8)

שאלת הוכחה. (9)

$$\begin{matrix} \text{א. } -4 & \text{ב. } 4 & \text{ג. } 4 & \text{ד. } 4 \end{matrix} \quad (10)$$

אין לו נוסחה. (11)

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

- (1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
 $A = (1, 2, 1)$, $B(1, 1, 1)$, $C = (2, 1, 2)$, $D(2, 2, 2)$

- (2) מצאו את מרחק הנקודה $A(3, -2, 1)$ מהישר $L: (-10, 8, -8) + t(2, -1, 2)$.

- (3) נתונים שני ישרים:

$$L_1: \frac{x-2}{2} = 3-y = \frac{z-4}{3}, \quad L_2: x+7 = y-5, z=3$$

- א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
 ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.

(2) $\sqrt{26}$

- (3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$,

$$\text{כאשר } r(t) = (\cos \pi t, -\ln t, \sqrt{t-2}) \text{ ו- } t_0 = 4.$$

ב. רשמו את המשוואות הפרמטריות $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \cos^2 t$ כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).

ג. רשמו את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה) הווקטורית $r(t) = (t, t^2, t^3)$.

(2) רשמו את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

$$\begin{cases} -x + y - z + 1 = 0 \\ 4x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. } 9x^2 + 4y^2 = 36 \quad (\text{במישור } xy)$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = y + 2 \end{cases} \quad \text{ד.} \quad \begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} z = x^2 + 4y^2 \\ z = 2x \end{cases} \quad \text{ו.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = x^2 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

(3) נתונה פונקציה וקטורית $r(t) = (21t^2, 21t^2 - 1, 10e^t)$.

בסעיפים א-ג, חשבו:

א. $\lim_{t \rightarrow 1} r(t)$

ב. $r'(t)$

ג. $\int_0^1 r(t) dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב- $t = 1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

(4) נתונה: $r(t) = (\cos 4t, \sin 4t, t^4)$

א. חשבו: $\frac{dr}{dt}$, $\left| \frac{dr}{dt} \right|$, $\frac{d|r'|}{dt}$

ב. הוכיחו שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

(5) נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$

א. גזרו את הפונקציה.

ב. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$ ב- $t = 0$.

ג. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases}$ בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצאו משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t) = (\sin t, e^{2t}, t^2)$ ב- $t = 0$.

(6) נתונה העקומה $r(t) = (t^2, t, 5)$

א. מצאו נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור

$$x - 6y + 4z - 3 = 0$$

ב. מצאו משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t) = (3 \sin t, -2 \cos t, t)$

ב- $t = 0.5\pi$

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

(7) נתון $r(t) = (3 \sin t, 3 \cos t, 4t)$

חשבו את משיק היחידה (T), נורמל היחידה (N) והבינורמל (B) של r .

(8) תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכיחו שאם $|r(t)|$ קבוע לכל t , אז $r(t) \cdot r'(t) = 0$.

כלומר, $r(t)$ ו- $r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכיחו שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

(9) נתונה פונקציה וקטורית $r(t) = (t, t^2, t^3)$

מצאו את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק,

המתאימים ל- $t = 2$.

$$(10) \text{ נתון } r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית,

$$\text{הוכיחו כי } r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

$$(11) \text{ חלקיק נע לאורך עקום מרחבי } x = t^3 + 2t, y = -3e^{-2t}, z = 2 \sin 5t$$

עבור החלקיק, בזמן $t = 0$, חשבו את:

א. המהירות.

ב. גודל המהירות.

ג. התאוצה.

ד. גודל התאוצה.

ה. הזווית בין וקטורי המהירות והתאוצה.

$$(12) \text{ נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן } \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{k}$$

כאשר $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = (v_{01}, v_{02}, v_{03})$ המהירות ההתחלתית.

מצאו את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

$$(13) \text{ חלקיק נע על העקומה } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t.$$

א. חשבו את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע t .

ב. שרטטו את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע $t = 0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.

ג. הראו שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

$$(14) \text{ מהירות } v(t) \text{ של חלקיק נתונה על ידי } v(t) = (2, -1, -10t)$$

ברגע $t = 0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0) = (0, 0, 100)$.

מצאו את משוואת התנועה של החלקיק $r = r(t)$.

$$(15) \text{ תאוצה } a(t) \text{ של חלקיק, נתונה על ידי } a(t) = (18 \cos 3t, -18 \sin 3t, 0)$$

ברגע $t = 0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0) = (2, 0, 1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי)

ובמהירות $v(0) = (0, 2, 4)$.

מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r = r(t)$.

16 וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t) = (2t^2 - 5t + 3, t - 5, t^2 - 3)$. עבור איזה ערך של t גודל המהירות של החלקיק יהיה מינימאלי ומהו גודל המהירות המינימאלי של החלקיק.

17 ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הנקודה על המסלול $r(t) = (t^2 - 5t)\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$ שבה וקטורי המהירות והתאוצה ניצבים זה לזה.

ב. וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j}$. הראו שהזווית בין $v(t)$ ו- $a(t)$ קבועה ומצאו את הזווית הזו.

18 הוכיחו: אם המהירות של חלקיק קבועה בגודלה אז וקטורי המהירות והתאוצה שלו ניצבים זה לזה.

19 חשבו את העקמומיות ורדיוס העקמומיות של העקום $r(t) = (t^2, 0, t)$.

20 וקטור המהירות של חלקיק נתון על ידי $v(t) = (2, -1, -10t)$. מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (המצב) של החלקיק ברגע $t = 1$.

21 וקטור התאוצה של חלקיק נתון על ידי $a(t) = (8 \cos 4t, 8 \sin 4t, 0)$. ברגע $t = 0$ החלקיק נמצא במהירות $v(0) = (0, 2, 4)$. מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (וקטור המצב) של החלקיק ברגע $t = \frac{\pi}{4}$.

22 העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה (a, b) ורדיוס R .
א. מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום C .
ב. הוכיחו שמעגל העקמומיות של העקום מתלכד עם העקום.
כלומר, הוכיחו שמרכזו של מעגל העקמומיות הוא (a, b) ורדיוס R .

23 נתון העקום $r(t) = (4 \cos t, 3 \sin t)$ כאשר $0 \leq t \leq 2\pi$. באילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מקסימלית ובאילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מינימלית. באילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מקסימלי ובאילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מינימלי. מצאו את מעגלי העקמומיות בנקודות לעיל. הדגימו את כל התוצאות באיור.

$$(24) \text{ נתון העקום } r(\theta) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta)$$

הוכיחו שבכל נקודה על העקום רדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

$$(25) \text{ נתונה עקומה במרחב דו-ממדי, שהיא גרף של פונקציה } y = f(x)$$

$$\text{הראו שהעקמומיות היא } \kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{(1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(26) \text{ נתון העקום } y = \frac{1}{x}$$

- א. מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום.
 ב. מצאו על העקום את הנקודה בה רדיוס העקמומיות מינימלי. מהו רדיוס זה?
 ג. מצאו את מעגל העקמומיות שמתאים לנקודה שנמצאה בסעיף ב.

(27) מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום $x^4 + y^4 = 2$ בנקודה $(1,1)$. הדגימו באיור את התוצאה שקיבלת. מהו מרכז העקמומיות ומהי משוואת מעגל העקמומיות בנקודה הנ"ל?

$$(28) \text{ נתונה הפרבולה } y^2 = 8x$$

- א. מצאו את הנקודות על הפרבולה בהן רדיוס העקמומיות שווה ל- $\frac{125}{16}$.
 ב. מצאו את מעגל העקמומיות עבור הנקודה ברביע הראשון שנמצאה בסעיף א'.

(29) העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה (a,b) ורדיוס R. מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום.

$$(30) \text{ נתון העקום } x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$$

בנקודה בה $\theta = \pi/6$:

- א. חשבו את רדיוס העקמומיות.
 ב. מצאו את משוואת מעגל העקמומיות/נישוק.
 ג. הוכיחו שרדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

(31) עקומה מישורית מיוצגת על ידי $r(t) = (x(t), y(t))$.

$$\kappa(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

הראו שהעקמומיות היא

(32) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את רדיוס העקמומיות של $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ב- $t = 0$

וב- $t = \pi/2$.

ב. הציבו $a = 3$, $b = 2$ ותנו פירוש גיאומטרי לתוצאה מסעיף א.

במיוחד מצאו את מרכז העקמומיות ושרטטו את מעגלי העקמומיות.

(33) הראו שהעקמומיות של עקומה הנתונה על ידי הצגה קוטבית $r = f(\theta)$ היא

$$k(\theta) = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - r \cdot r''|}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}$$

(34) חשבו את העקמומיות של $r = 2 \sin \theta$ עבור $\theta = \pi/6$.

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

(35) חשבו את רדיוס העקמומיות של $r = 1 + \cos \theta$ עבור $\theta = \pi/2$.

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

במיוחד מצאו את מעגל העקמומיות ואת מרכז העקמומיות.

תשובות סופיות

$$r(4) = (\cos 4\pi, -\ln 4, \sqrt{2}) \quad \text{א.א.} \quad 0 < t \leq 4 \quad \text{א.1} \quad (1)$$

$$x = t, y = t^2, z = t^3 \quad \text{ג.} \quad r(t) = (\sin t, \cos t, \cos^2 t) \quad \text{ב.} \quad (2)$$

$$x = 2t - 0.5, y = 3t - 1.5, z = t \quad \text{ב.} \quad x = 2 \cos t, y = 3 \sin t$$

$$r(t) = (2t - 0.5, 3t - 1.5, t) \quad \text{ב.} \quad r(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$$

$$x = t, y = \frac{t^2}{4} - 1, z = \frac{t^2}{4} + 1 \quad \text{ד.} \quad x = t, y = t^2, z = t^4 \quad \text{ג.}$$

$$r(t) = \left(t, \frac{t^2}{4} - 1, \frac{t^2}{4} + 1 \right) \quad \text{ד.} \quad r(t) = (t, t^2, t^4)$$

$$x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 9 \cos^2 t \quad \text{ה.}$$

$$r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 9 \cos^2 t)$$

$$(21, 20, 10e) \quad \text{א.} \quad (42t, 42t, 10e^t) \quad \text{ב.} \quad (7, 6, 10e - 10) \quad \text{ג.} \quad \text{ד.} \quad \text{ה.} \quad \text{כ.} \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = (-4 \sin 4t, 4 \cos 4t, 4t^3), \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| = 4\sqrt{1+t^6}, \quad \frac{d|r'|}{dt} = \frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}} \quad \text{א.} \quad (4)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + s(4, 1, 0) \quad \text{ב.} \quad r'(t) = (4 \cos 4t, e^t + te^t, 4t^3) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0) \quad \text{ד.} \quad (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 2, 4) \quad \text{ג.}$$

$$2y + z = 0.5\pi \quad \text{ב.} \quad (9, 3, 5) \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$T(t) = \frac{1}{5}(3 \cos t, -3 \sin t, 4), \quad N(t) = (-\sin t, -\cos t, 0), \quad B(t) = \frac{1}{5}(4 \cos t, -4 \sin t, -3) \quad (7)$$

א. שאלת הוכחה. (8)

$$24x - 12y + 2z = 16 \quad \text{מישור הנישוק}, \quad x + 4y + 12z = 114 \quad \text{מישור הניצב} \quad (9)$$

$$76x + 143y - 54z = 292 \quad \text{מישור היישור}$$

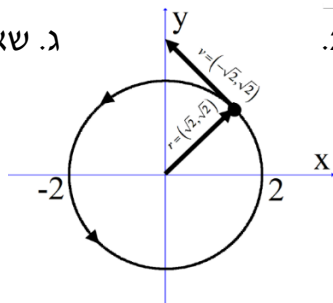
א. שאלת הוכחה. (10)

$$120.46^\circ \quad \text{ה.} \quad 12 \quad \text{ד.} \quad (0, -12, 0) \quad \text{ג.} \quad \sqrt{140} \quad \text{ב.} \quad (2, 6, 10) \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$v(t) = (v_{01}, v_{02}, v_{03} - gt), \quad |v(t)| = \sqrt{(v_{01})^2 + (v_{02})^2 + (v_{03} - gt)^2}, \quad a(t) = (0, 0, -g), \quad |a(t)| = g \quad (12)$$

$$v(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t) \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$|v(t)| = 2$$



$$r(t) = (2t, -t, -5t^2 + 100) \quad (14)$$

$$r(t) = (-2 \cos 3t + 4, 2 \sin 3t - 4t, 4t + 1) \quad (15)$$

$$v_{\min} = v(1) = \sqrt{6} \quad (16)$$

$$(17) \text{ א. } \left(-\frac{19}{16}, \frac{3}{2}, \frac{3}{16}\right) \quad \text{ב. } \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

(18) שאלת הוכחה.

$$(19) \quad \kappa = \frac{2}{(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad \rho = \frac{(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

$$(20) \quad \rho = \frac{21\sqrt{21}}{2}$$

$$(21) \quad \kappa = \frac{2}{13}, \quad \rho = 6.5$$

(22) א. $\rho = R, \kappa = 1/R$. מכאן, רדיוס העקמומיות של העקום הוא קבוע ושווה ל-

ב. שאלת הוכחה. $\rho = R$. ועקמומיות העקום קבועה ושווה ל- $\kappa = \frac{1}{R}$.

(23) העקמומיות **מקסימלית** עבור $t = 0, \pi, 2\pi$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{4}{9}$

בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מינימלי** ושווה ל- $\frac{9}{4}$. עקמומיות

מינימלית עבור $t = \pi/2, 3\pi/2$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{3}{16}$ בנקודות אלה

רדיוס העקמומיות יהיה **מקסימלי** ושווה ל- $\frac{16}{3}$.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

$$(26) \text{ א. } \rho(x) = \frac{(x^4 + 1)^{\frac{3}{2}}}{2x^2 |x|}$$

ב. רדיוס העקמומיות מינימלי בנקודה (1,1) ובמקרה זה הוא $\sqrt{2}$.

$$\text{ג. } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$$

(27) רדיוס: $\frac{\sqrt{2}}{3}$; מרכז העקמומיות: $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

משוואת המעגל בנקודה: $(x-2/3)^2 + (y-2/3)^2 = 2/9$.

$$(28) \text{ א. } y = \pm 3, x = \frac{9}{8} \quad \text{ב. } (x-59/8)^2 + (y+27/16)^2 = (125/16)^2$$

$$(29) \quad \kappa = \frac{1}{R}, \quad \rho = R$$

$$(30) \text{ א. } \rho = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \text{ב. } x^2 + (y+1)^2 = \frac{27}{16} \quad \text{ג. שאלת הוכחה.}$$

(31) שאלת הוכחה.

$$\kappa(0) = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2} \quad \kappa(\pi/2) = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}$$

(32) א.

$$\rho(0) = \frac{b^2}{a} \quad \rho(\pi/2) = \frac{a^2}{b}$$



ב.

(33) שאלת הוכחה.

(34) $\kappa = \rho = 1$

(35) ראו שרטוט:



גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

שאלות

(1) יהיו $\mathbf{F}(x, y, z)$, $\mathbf{G}(x, y, z)$ שדות וקטורים כלליים. הוכיחו:

א. $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}(\mathbf{F}) + \operatorname{div}(\mathbf{G})$

ב. $\nabla(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla(\mathbf{F}) + \nabla(\mathbf{G})$

(2) יהי $\mathbf{F}(x, y, z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi = \varphi(x, y, z)$ פונקציה. הוכיחו כי $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$.

(3) יהי $\mathbf{F}(x, y, z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi = \varphi(x, y, z)$ פונקציה. הוכיחו כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$.

או בניסוח אחר $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

ב. הוכיחו כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$.

או בניסוח אחר $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$.

(4) יהיו $\mathbf{F}(x, y, z)$, $\mathbf{G}(x, y, z)$ שדות וקטורים כלליים. הוכיחו כי $\operatorname{curl}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{curl}(\mathbf{F}) + \operatorname{curl}(\mathbf{G})$.

(5) יהי $\mathbf{F}(x, y, z)$ שדה וקטורי.

הוכיחו כי $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\nabla^2 \mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi = \varphi(x, y, z)$.

הגרדיאנט של φ המסומן $\text{grad } \varphi$ מוגדר על ידי $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$.

הגדרה (דיברגנץ וקרל של שדה וקטורי)

יהי $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ מגדירים את הדיברגנץ של \mathbf{F} המסומן $\text{div } \mathbf{F}$, כך:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \text{div } \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (f, g, h) \\ \text{div } \mathbf{F} &= f_x + g_y + h_z \end{aligned}$$

מגדירים את ה- curl של \mathbf{F} המסומן $\text{curl } \mathbf{F}$, על ידי:

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f, g, h) \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k} \end{aligned}$$

הערה: יש הרושמים $\text{rot } \mathbf{F}$ במקום $\text{curl } \mathbf{F}$.

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 3 - אינטגרלים קווים ושימושיהם

תוכן העניינים

- 22 1. אינטגרלים קווים ושימושיהם
- 26 2. נספח - הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

אינטגרלים קויים ושימושיהם

* מומלץ בחום לעיין בנספח 'הצגה פרמטרית של עקומים חשובים'.

שאלות

אינטגרל קוי מסוג I

בשאלות 1-4 חשבו את האינטגרל $\int_C f(x, y) ds$, כאשר:

$$C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi ; f(x, y) = 1 - x^2 \quad (1)$$

$$C: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq \pi ; f(x, y) = x \quad (2)$$

$$C: \text{קטע של ישר המחבר את } O(0,0) \text{ עם } A(1,2) ; f(x, y) = x + y \quad (3)$$

$$C: \text{היקפו של } \triangle OAB \text{ של } O(0,0), A(0,1), B(1,0) ; f(x, y) = x + y^2 \quad (4)$$

בשאלות 5-6 חשבו את האינטגרל $\int_C f(x, y, z) ds$, כאשר:

$$C: x = \cos t, y = \sin t, z = t \quad 0 \leq t \leq \pi ; f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5)$$

$$C: x = t, y = \frac{1}{\sqrt{2}} t^2, z = \frac{1}{3} t^3 \quad 0 \leq t \leq 3 ; f(x, y, z) = x^3 + 3z \quad (6)$$

$$C: \text{חשבו את אורך העקום } x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \quad (7)$$

$$C: \text{סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי } x = \cos t, y = \sin t, z = 2t \quad (0 \leq t \leq \pi) \text{ חשבו את מסת הסליל, אם פונקציית הצפיפות היא } \delta(x, y, z) = kz \quad (k > 0) \quad (8)$$

אינטגרל קווי מסוג II

בשאלות 9-10 חשבו:

$$C: x = \cos t, y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy \quad (9)$$

$$C: x = t, y = t^2 \quad 0 \leq t \leq 1; \int_C (2x + y) dx + (x^2 - y) dy \quad (10)$$

(11) חשבו $\int_C y dx + x^2 dy$, כאשר C המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$,
ו- C נתון ע"י המשוואה:

א. $y = 2x$

ב. $y = x^2$

(12) חשבו $\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x + y) dx + (y - x) dy$, אם העקום נתון על ידי:

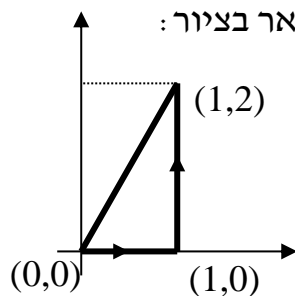
א. הפרבולה $y^2 = x$.

ב. קו ישר.

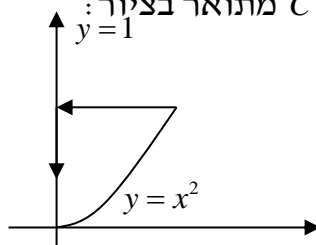
ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$ ל- $(1,2)$ ומשם ל- $(4,2)$.

ד. העקום $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$.

(13) חשבו $\int_C x^2 y dx + x dy$, כאשר המסלול C מתואר בציור:



(14) חשבו $\int_C (x - y^2) dx + dy$, כאשר המסלול C מתואר בציור:



$$(15) \text{ אם } \mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$$

חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, מ- $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$, לאורך המסלולים:

$$\text{א. } x=t, y=t^2, z=t^3$$

ב. הקוים הישרים מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,0,1)$, משם ל- $(0,1,1)$ ומשם ל- $(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו- $(1,1,1)$.

בשאלות 16-17 חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, כאשר:

$$(16) \mathbf{F}(x, y) = (x^2 y^3, -y\sqrt{x}), \quad \mathbf{r}(t) = (t^2, -t^3), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(17) \mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz), \quad \mathbf{r}(t) = (t^3, -t^2, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(18) \text{ נתון שדה הכוח } \mathbf{F}(x, y) = x^3 y \mathbf{i} + (x - y) \mathbf{j}$$

א. חשבו את העבודה שמבצע השדה על חלקיק שנע על הפרבולה $y = x^2$

מ- $(-2, 4)$ עד $(1, 1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה אילו החלקיק היה נע מ- $(1, 1)$ עד $(-2, 4)$?

$$(19) \text{ חשבו את העבודה שמבצע שדה הכוח } \mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$$

על חלקיק הנע לאורך העיקול $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq 1$)

הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f, g, h) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C f dx + g dy + h dz$$

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (A_1, A_2, A_3) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

תשובות סופיות

- (1) π
- (2) $\frac{16}{3}$
- (3) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
- (4) $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$
- (5) $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$
- (6) $\frac{567}{2}$
- (7) 6
- (8) $\sqrt{5}k\pi^2$
- (9) $\frac{1}{3}$
- (10) $\frac{4}{3}$
- (11) א. $\frac{28}{3}$ ב. $\frac{32}{3}$
- (12) א. $\frac{34}{3}$ ב. 11 ג. 14 ד. $\frac{32}{3}$
- (13) $\frac{1}{2}$
- (14) $\frac{4}{5}$
- (15) א. 2 ב. -3 ג. $\frac{6}{5}$
- (16) $-\frac{59}{105}$
- (17) $\frac{6}{5} - \sin 1 - \cos 1$
- (18) א. 3 ב. -3
- (19) 1

הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

דוגמה	הצגה פרמטרית	עקום
$y = x^2 (1 \leq x \leq 2)$ \Downarrow $x = t, y = t^2 (1 \leq t \leq 2)$	$x = t, y = f(t) (a \leq t \leq b)$	$y = f(x) (a \leq x \leq b)$
$x = y^2 (1 \leq y \leq 2)$ \Downarrow $y = t, x = t^2 (1 \leq t \leq 2)$	$y = t, x = f(t) (a \leq t \leq b)$	$x = f(y) (a \leq y \leq b)$
$x^2 + y^2 = 4$ \Downarrow $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = r \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">נגד כיוון השעון</p>	$x^2 + y^2 = r^2$ <p style="text-align: center;">מעגל</p>
$x^2 + y^2 = 4$ \Downarrow $x = 2 \cos t, y = -2 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = -r \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">עם כיוון השעון</p>	$x^2 + y^2 = r^2$ <p style="text-align: center;">מעגל</p>
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ \Downarrow $x = 3 \cos t, y = 5 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">נגד כיוון השעון</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p style="text-align: center;">אליפסה</p>
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ \Downarrow $x = 3 \cos t, y = -5 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = -b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ <p style="text-align: center;">עם כיוון השעון</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p style="text-align: center;">אליפסה</p>
ישר פרמטרי מהנק' (1, 2) לנק' (3, 4) $x = 1 + 2t$ $y = 2 + 2t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במישור מהנק' (x_0, y_0) לנק' (x_1, y_1)
ישר פרמטרי מ- $(1, 2, 3)$ ל- $(4, 7, 9)$ $x = 1 + 3t$ $y = 2 + 5t$ $z = 3 + 6t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $z = z_0 + t(z_1 - z_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במרחב מהנק' (x_0, y_0, z_0) לנק' (x_1, y_1, z_1)

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 4 - שדות משמרים - אי תלות במסלול

תוכן העניינים

1. שדות משמרים - אי תלות במסלול..... 27

שדות משמרים – אי-תלות במסלול

שאלות

בשאלות 1-6 קבעו האם \mathbf{F} הוא שדה משמר; אם כן, מצאו פונקציה ϕ , כך ש- $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

$$\mathbf{F}(x, y) = (6x + 5y, 5x + 4y) \quad (1)$$

$$\mathbf{F}(x, y) = xe^y\mathbf{i} + ye^x\mathbf{j} \quad (2)$$

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x\cos y - y\cos x, -x^2\sin y - \sin x) \quad (3)$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + e^{-y}\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k} \quad (4)$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (xy + 3z^2)\mathbf{k} \quad (5)$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z, 2yz, y^2) \quad (6)$$

$$(7) \quad \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy \quad \text{נתון האינטגרל}$$

א. הוכיחו שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את (1,2) ו-(3,4).

ב. חשבו את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

$$(8) \quad \int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3dx + (1 + 3x^2y^2)dy \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

$$(9) \quad \int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

(10) יהי $\mathbf{F}(x, y) = e^y\mathbf{i} + xe^y\mathbf{j}$. מצאו את העבודה שמבצע השדה על חלקיק הנע על

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad \text{מ- } (1,0) \text{ ל- } (-1,0).$$

11 חשבו את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)} (2xz^3 + 6y)dx + (6x - 2yz)dy + (3x^2z^2 - y^2)dz$ תנו מובן פיסיקאלי לתוצאה.

12 נתון שדה וקטורי $\mathbf{F} = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{j}$, ונתונים 3 מסלולים:

$$L_1: x^2 + y^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

$$L_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{בכיוון השלילי (עם כיוון השעון).}$$

$$L_3: (x-10)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

חשבו:

$$\oint_{L_3} \mathbf{F} dr \quad \text{ג.} \quad \oint_{L_2} \mathbf{F} dr \quad \text{ב.} \quad \oint_{L_1} \mathbf{F} dr \quad \text{א.}$$

13 ענו על הסעיפים הבאים:

א. שרטטו את השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ ברביע הראשון.

ב. בתחום $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$, נסמן $f = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $g = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

1. הוכיחו כי $f_y = g_x$ בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכיחו שהשדה הנתון (מסעיף א) אינו שדה משמר בתחום D (מסעיף ב).

ד. הוכיחו שהשדה הנתון משמר בחצי המישור הימני

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, ומצאו את פונקציית הפוטנציאל, במקרה זה.

ה. עתה נתון השדה בתחום $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$,

חשבו את $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, כאשר C עקומה סגורה חלקה סביב הנקודה $(0, 0)$.

$$(14) \text{ נתון השדה הווקטורי } \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\text{בתחום } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$$

א. שרטטו את השדה הווקטורי ברביע הראשון.

$$\text{ב. נסמן } f = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad g = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

1. הוכיחו כי $f_y = g_x$ בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכיחו שהשדה הנתון הוא שדה משמר.

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\hat{x} + g(x, y, z)\hat{y} + h(x, y, z)\hat{z}$$

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

תשובות סופיות

$$\phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2 \quad (1)$$

(2) השדה אינו משמר.

$$\phi(x, y) = x^2 \cos y - y \sin x \quad (3)$$

$$\phi(x, y, z) = xz^2 - e^{-y} \quad (4)$$

$$\phi(x, y, z) = xyz + z^3 \quad (5)$$

(6) השדה אינו משמר.

(7) א. שאלת הוכחה. ב. 236

(8) -58

(9) 5

(10) -2

(11) = 15 עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- $(1, -1, 1)$ ל- $(2, 1, -1)$, לאורך C .

(12) א. 2π ב. -2π ג. 0

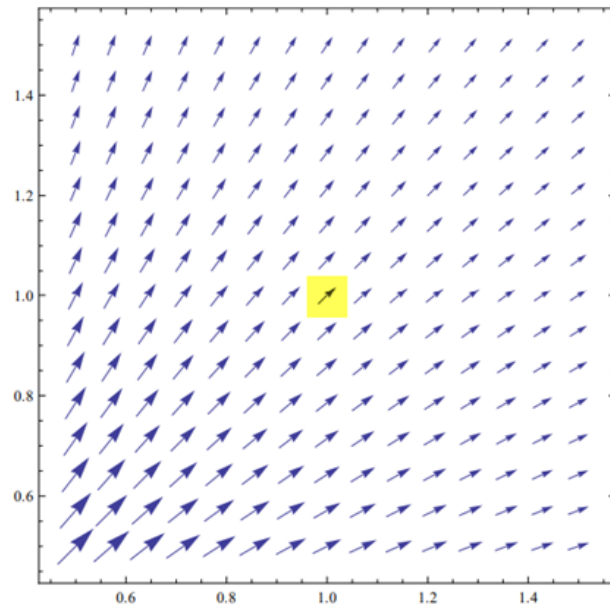
(13) א. ראו בעמוד הבא. ב. i. שאלת הוכחה. ii. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.

ג. שאלת הוכחה. ד. שאלת הוכחה; $\phi = \arctan \frac{y}{x} + k$; ה. 2π

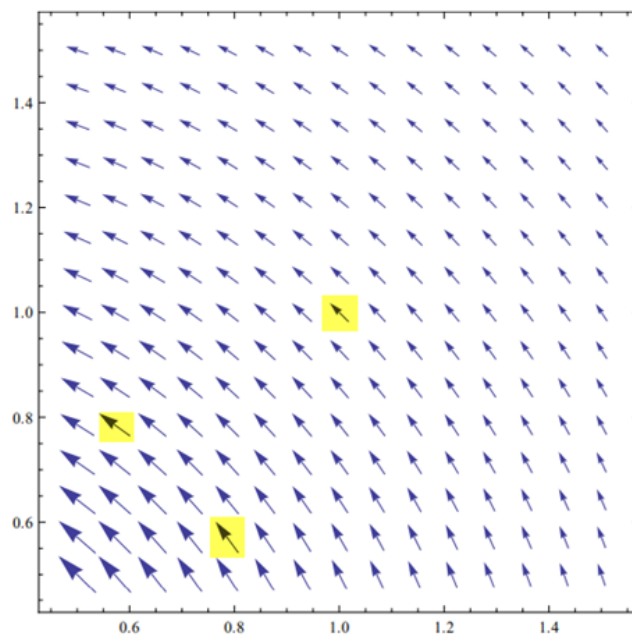
(14) א. ראו בעמוד הבא. ב. 1. שאלת הוכחה. 2. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר. ג. שאלת הוכחה.

שרטוטים

שאלה 13 סעיף א:



שאלה 14 סעיף א:



מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 5 - משפט גרין

תוכן העניינים

1. משפט גרין..... 32

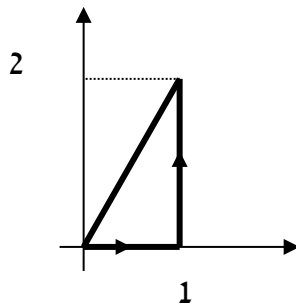
משפט גרין

שאלות

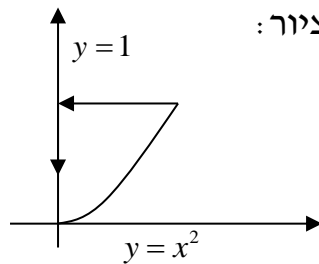
בשאלות 1-3 אשרו את משפט גרין.

כלומר, חשבו את האינטגרל $\oint_C f dx + g dy$ ואת האינטגרל $\iint_R (g_x - f_y) dA$,

והראו שהם שווים זה לזה.



(1) $\oint_C x^2 y dx + x dy$; המסלול C מתואר בציור:



(2) $\oint_C (x - y^2) dx + dy$; המסלול C מתואר בציור:

(3) $\oint_C (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$; הוא ריבוע שקדודיו:

בכיוון החיובי. $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$

(4) חשבו את העבודה שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x, y) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון, ומשלים הקפה אחת.

(5) חשבו את האינטגרל $\int_C \left(e^y - \tan \frac{x}{2} \right) dx + (x e^y + y \cos y^2) dy$, כאשר C הוא

האיחוד של העקומים $y = 8 - x^2$, $y = x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

$$(6) \quad \int_C -2e^{2x-y} \cos y dx + (e^{2x-y} (\sin y + \cos y) + 2xy) dy$$

כאשר C הוא חצי האליפסה $\{x^2 + 4y^2 = 4, y \geq 0\}$ מהנקודה $(2,0)$ לנקודה $(-2,0)$.

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט C ,

$$\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

$$ב. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(8) \quad \oint_C (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) dx + (3x^2y + 3x - \sin y) dy$$

כאשר C מסילה פשוטה סגורה נגד כיוון השעון. מהו הערך המקסימלי של האינטגרל? עבור איזו מסילה C הוא מתקבל?

(9) הוכיחו שלא קיימת עקומה פשוטה, סגורה וגזירה למקוטעין C ,

$$\oint_C -y^3 dx + x^3 dy = 0$$

$$(10) \quad \oint_C \frac{4x-y}{4 \cdot (x^2+y^2)} dx + \frac{x-4y}{4 \cdot (x^2+y^2)} dy$$

$$א. \quad C \text{ הוא המעגל } (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$ב. \quad C \text{ הוא המעגל } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 144$$

ג. C היא מסילה כלשהי סביב הראשית.

תשובות סופיות

- (1) הערך המשותף הוא 0.5.
- (2) הערך המשותף הוא 0.8.
- (3) הערך המשותף הוא 8.
- (4) 1.5π
- (5) $0.5 \sin 64$
- (6) $\frac{8}{3} + e^4 - \frac{1}{e^4}$
- (7) א. הוכחה. ב. πab
- (8) הערך המקסימלי הוא $\frac{6\pi}{4}$, עבור המסילה $C: x^2 + y^2 = 1$.
- (9) הוכחה.
- (10) א. 0. ב. $\frac{\pi}{2}$. ג. $\frac{\pi}{2}$.

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 6 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של משטח	(ללא ספר)
2. אינטגרלים משטחיים מסוג 1	35
3. אינטגרלים משטחיים מסוג 2	37

אינטגרלים משטחיים מסוג I

שאלות

בשאלות 5-1 חשבו את האינטגרל המשטחי:

$$(1) \iint_S x^2 y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = 1 + 2x + 3y$$

$$\text{מעל המלבן } R = [0, 3] \times [0, 2]$$

$$(2) \iint_S x dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המשטח } y = x^2 + 4z, \text{ } 0 \leq x \leq 2, \text{ } 0 \leq z \leq 2$$

$$(3) \iint_S y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = y + 3, \text{ שכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1$$

$$(4) \iint_S (x^2 z + y^2 z) dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא חצי הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4, \text{ } z \geq 0$$

$$(5) \iint_S x y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא חלק החרוט } \mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 3u \mathbf{k}$$

$$\text{המקיים } 1 \leq u \leq 2, \text{ } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(6) \text{ חשבו את שטח הפנים של כדור בעל רדיוס } R$$

$$(7) \text{ היריעה הדקה } S \text{ היא חלק הפרבולואיד } z = x^2 + y^2, \text{ שמתחת למישור } z = 1,$$

$$\text{וצפיפותה } \delta(x, y, z) = \delta_0, \text{ קבועה.}$$

חשבו את מסת היריעה.

תשובות סופיות

$$171\sqrt{14} \quad (1)$$

$$\frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{6} \quad (2)$$

$$\pi\sqrt{2}/4 \quad (3)$$

$$16\pi \quad (4)$$

$$93/\sqrt{10} \quad (5)$$

$$4\pi R^2 \quad (6)$$

$$\frac{\pi\delta_0}{6}(5\sqrt{5}-1) \quad (7)$$

אינטגרל משטחי מסוג II

שאלות

בשאלות הבאות חשבו את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ (n הוא נורמל חיצוני של S).

בניסוח אחר: חשבו את השטף של שדה הזרימה \mathbf{F} דרך S.

(1) $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה הנקבעת על ידי המישורים: $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(2) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(3) $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה הנקבעת על ידי המישורים $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$.

(4) $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$, שבו $z \geq 0$.

(5) $\mathbf{F} = 0\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + (-3y - 1)\mathbf{k}$, S הוא חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy.

תשובות סופיות

(1) $\frac{11}{6}$

(2) $\frac{8\pi}{3}$

(3) 27

(4) 12π

(5) -16π

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 7 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

תוכן העניינים

1. משפט הדיברגנץ 38

משפט הדיברגנץ (גאוס)

שאלות

בשאלות 1-3 אשרו את משפט הדיברגנץ.

כלומר, חשבו את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, ואת האינטגרל $\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV$,

והראו שהם שווים זה לזה (\mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S).
(ראו הערת סימון בעמוד הבא)

(1) $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j} - xz^2 \mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G ,
הנקבעת ע"י המישורים: $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(2) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G , $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(3) $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G ,
הנקבעת ע"י המישורים: $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$.

(4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2 + y^2 = 9$, בין המישורים $z=0$ ו- $z=2$.
חשבו את השטף של השדה הווקטורי $\mathbf{F} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$ דרך S .
כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר \mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S .

(5) חשבו את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר \mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S .

$\mathbf{F} = (z^2 - x)\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי:
 $x=0, x=3, z=4 - y^2, z=0$.

(6) חשבו את $\iint_S xz^2 dydz + (x^2 y - z^3) dzdx + (2xy + y^2 z) dxdy$,
כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $z=0$.

(7) יהי S משטח פתוח $x^2 + z^2 = 16$, $0 \leq y \leq 4$ (גליל ללא הבסיסים).
חשבו את השטף דרך S של השדה הווקטורי $\mathbf{F} = z^2 \mathbf{i} + 5y\mathbf{j} + x^5 \mathbf{k}$.
כלומר, חשבו את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר \mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S .

(8) חשבו את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר \mathbf{n} הוא נורמל חיכוני של S .

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz^2 \right) \mathbf{i} + 2x \arctan y \mathbf{j} - \frac{2xz(1+y) + 1 + y^2}{1+y^2} \mathbf{k}$$

S הוא חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$, שבו $z \geq 0$ (המשטח פתוח).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$,

$$\text{מתקיים: } \iiint_G \text{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\iiint_G \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV = \iint_S f dydz + g dzdx + h dx dy$$

תשובות סופיות

(1) הערך המשותף הוא $\frac{11}{6}$.

(2) הערך המשותף הוא $\frac{8}{3}\pi$.

(3) הערך המשותף הוא 27.

(4) 279π

(5) 16

(6) $\frac{2\pi a^5}{5}$

(7) 0

(8) -4π

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 8 - משפט סטוקס (גרין במרחב)

תוכן העניינים

1. משפט סטוקס..... 40

משפט סטוקס

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו שמשפט סטוקס אכן מתקיים.

כלומר, חשבו את האינטגרל $\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} ds$, ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$,

והראו שהם שווים זה לזה (ראו הערת סימון בעמוד הבא).

(1) $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$, שבו $z \geq 0$.

(2) $\mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + (-3xy)\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$; S הוא שפת חצי כדור שמרכזו

בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

(3) $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$; S הוא משטח התחום בשמינית הראשונה,

החסום על ידי המישורים $y = 2$, $2x + z = 6$, ושאינו כלול

א. במישור xy .

ב. במישור $y = 2$.

ג. במישור $2x + z = 6$.

(4) חשבו את האינטגרל $\oint_C x^2 dx + 4xy^3 dy + y^2 x dz$, כאשר C עקומה בצורת מלבן

מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,3,3)$, משם ל- $(1,3,3)$ ומשם ל- $(1,0,0)$.

(5) חשבו את האינטגרל $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, כאשר $\mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$;

ו- C היא שפת המשולש, שקדקודיו הם $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$,

וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה, מהכיוון החיובי של ציר ה- z).

(6) חשבו את $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$, כאשר $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$; ו- S הוא החלק של

הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$, ומעל למישור xy .

(7) חשבו את $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$, כאשר $\mathbf{F} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$;

ו- S הוא משטח החרוט $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, מעל למישור- xy .

הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{מתקיים:}$$

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{Rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C f dx + g dy + h dz = \iint_S ((h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS$$

תשובות סופיות

(1) הערך המשותף הוא 12π .

(2) הערך המשותף הוא -16π .

(3) הערך המשותף הוא: א. -6 ב. -9 ג. -18

(4) -90

(5) -1

(6) 0

(7) 12π

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 9 - אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

תוכן העניינים

1. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) 42
2. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) 44
3. אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר 45
4. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) 47
5. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) 49

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

$$(1) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^4 - x}{\ln x} dx$$

$$(2) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x} dx \quad (m, n > 0)$$

$$(3) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$(4) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) dx$$

$$(5) \quad \text{הוכיחו כי } \int_0^\pi \ln(1 + \alpha \cos x) dx = \pi \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2} \right) \quad \text{עבור } |\alpha| < 1$$

$$(6) \quad \text{חשבו } \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx \quad \text{עבור } \alpha \neq \pm 1$$

$$(7) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(8) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 x^p (\ln x)^m dx \quad (p > 0, m \in \mathbb{N})$$

$$(9) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^\pi \frac{1}{(2 - \cos x)^2} dx$$

תשובות סופיות

$$\ln 2.5 \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{8} \ln 2 \quad (3)$$

$$2\pi \quad (4)$$

שאלת הוכחה. (5)

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \begin{cases} 0 & |\alpha| < 1 \\ 2\pi \ln |\alpha| & |\alpha| > 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\pi + 2}{8} \quad (7)$$

$$\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{(m+1)}} \quad (8)$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{27}} \quad (9)$$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

$$(1) \text{ חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \text{ עבור } b > a > 0.$$

$$(2) \text{ חשבו את האינטגרל } \int_0^\pi \ln \frac{b - \cos x}{a - \cos x} dx \text{ עבור } b, a > 1.$$

$$(3) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{2\pi} [(b - \sin x)^2 - (a - \sin x)^2] dx = 2\pi(b^2 - a^2) \text{ לכל } a \text{ ו-} b.$$

הערה: פתרו בשתי דרכים, גם על ידי אינטגרציה תחת סימן האינטגרל וגם על ידי חישוב ישיר.

$$(4) \text{ בהינתן הנוסחה } \int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \sin x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \text{ עבור } \alpha > 1,$$

$$\text{ הוכיחו כי } \int_0^{2\pi} \ln \left(\frac{5 + 3 \sin x}{5 + 4 \sin x} \right) dx = 2\pi \ln \left(\frac{9}{8} \right)$$

תשובות סופיות

$$(1) \ln \left(\frac{b+1}{a+1} \right)$$

$$(2) \pi \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right)$$

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה

אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר

הערה חשובה

נושא זה הוא הרקע התיאורטי הנדרש להצדקת הגזירה והאינטגרציה תחת סימן האינטגרל עבור אינטגרלים לא אמיתיים, נושאים שיילמדו בהמשך. בחלק מהמוסדות מסתפקים רק בצד הטכני החישובי ולא נכנסים לנושא זה כלל. בררו עם מתרגלות וואו מרצה הקורס האם נושא זה נדרש או לא. במידה ולא, דלגו היישר לנושאים הבאים. בהצלחה!

שאלות

(1) נתון האינטגרל $\phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos(kx) dx$, כאשר k ממשי.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $0 < a \leq \alpha$.

(2) נתון האינטגרל $\phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + \alpha)^n} dx$, כאשר n טבעי.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $\alpha \geq 1$.

(3) הוכיחו שהאינטגרל $\phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ מתכנס במידה שווה עבור $\alpha \geq 0$.

(4) נתון האינטגרל $\phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha^2(1+x^2)}{2}}}{1+x^2} dx$.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α .

(5) נתון האינטגרל $\phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx$ עבור $\alpha \geq k > 0$.

א. חשבו את האינטגרל והוכיחו שהאינטגרל תלוי בפרמטר.

ב. הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α המקיים $\alpha \geq k > 0$.

$$(6) \quad \text{נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל n טבעי ולכל α המקיים $\alpha \geq k > 0$.

$$(7) \quad \text{נתון כי } \phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2} dx, \text{ כאשר } \alpha \geq k > 0$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה.

$$(8) \quad \text{נתון האינטגרל } \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)/2} dx$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל $\alpha \geq k > 0$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה – לפתרונות מלאים כנסו לאתר GooL.co.il

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

(1) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$

(2) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) 2}$$

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

(4) חשבו את האינטגרל:

א. $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$, כאשר $n \in \mathbb{N}$

ב. $\int_0^{\infty} x^{10} e^{-x^2} dx$

ג. $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$ ($\alpha > 0$)

ב. בעזרת סעיף א' חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(אין צורך לנמק מתמטית את החישוב)

תשובות סופיות

(1) $n!$

(2) שאלת הוכחה.

(3) א. $\sqrt{2\pi}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(4) א. אם n אי-זוגי אז 0, ואם n זוגי אז $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot \sqrt{2\pi}$

ב. $\frac{945}{64} \sqrt{\pi}$ ג. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(5) א. $-\arctan \alpha + \frac{\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{2}$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

(1) חשבו את $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ עבור $b > a \geq k > 0$.

(2) חשבו את $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$ עבור $b > a \geq k > 0$.

(3) חשבו את $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$.

(4) הוכיחו כי עבור $b > a > 0$ ו- $r \in \mathbb{R}$ מתקיים $\int_0^{\infty} \cos rx \frac{a^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + r^2}{a^2 + r^2}$.

(5) הוכיחו:

א. $(\alpha, r > 0) \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin rx}{x} dx = \arctan \frac{r}{\alpha}$

ב. $(\alpha, r > 0) \int_0^{\infty} \left[e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos rx}{x^2} \right] dx = \arctan \frac{r}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2} \right)$

ג. $(\alpha > 0) \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \arctan \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right)$

(6) הוכיחו:

א. $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

ב. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$

(8) חשבו את $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

תשובות סופיות

(1) $\ln \frac{b}{a}$

(2) $\frac{\pi}{2}(b-a)$

(3) π

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{\pi}{4}$

(8) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 10 - טורי פורייה

תוכן העניינים

1. הקדמה	(ללא ספר)
2. טור פורייה ממשי	51
3. טור פורייה מרוכב	52
4. משפט פרסבל	53
5. רימן לבג	56
6. משפט דיריכלה	57
7. המשכה זוגית ואי זוגית	59
8. גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה	60
9. טור פורייה בקטע כללי	63
10. משפט הקונבולוציה	65
11. תרגילים מסכמים	67

טור פורייה ממשי:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

(2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$.

(3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \sin(|x|)$.

(4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

תשובות סופיות:

$$\sum_{n=1}^{20} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx) \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x) \quad (2)$$

$$\sin(|x|) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-(2k)^2} \cos(2kx) \quad (3)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n)}{n} \cos(nx) \quad (4)$$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

(2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ -2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin(x) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

תשובות סופיות:

$$x \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \left\{ -\pi \frac{(-1)^n}{in} + \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right\} e^{inx} \quad (2)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} - 3(-1)^n \frac{\pi}{in} \right] e^{inx} \quad (3)$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{3}{\pi i (2k-1)} e^{i(2k-1)x} \quad (4)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{4i} e^{ix} - \frac{1}{4i} e^{-ix} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1-(2k)^2} e^{i[2k]x} \quad (5)$$

משפט פרסבל:

שאלות:

(1) באמצעות טור הפורייה $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx)$, חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(2) נתון כי טור הפורייה הממשי של $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$ בקטע $[-\pi, \pi]$

הינו $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(3) נתונות הפונקציות $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ x + \pi & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ ו- $g(x) = x - \pi$.

מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

(4) מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$ ובאמצעותו

חשבו את הסכום $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

(5) נתונות הפונקציות $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ e^{x^2} & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ ו- $g(x) = \begin{cases} 0 & 1 < x \leq \pi \\ \frac{1}{x^2+1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- $f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}$, $g \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \cdot \overline{g_n} = \frac{1}{8}$.

(6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π :

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad -\pi \leq x < \pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi < x < 3\pi$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$.

(7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi, \pi]$ על ידי הנוסחה: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}} e^{inx}$

חשבו $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx$.

(8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $p \neq 0$

כדי להוכיח את הזהות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

(9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} h^2 & h \leq x \leq \pi \\ 0 & -\pi \leq x \leq h \end{cases}$ בקטע $[-\pi, \pi]$

כאשר $0 \neq h \in [-\pi, \pi]$ ובשוויון פרסבל כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n \cos(2n)}{n^2}$

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{32}$

ג. הסיקו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

תשובות סופיות:

$$\frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

$$\frac{\pi^2}{4} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

(6) א. ראו סרטון.

ג. ≈ 0.769

$$8\pi \quad (7)$$

(8) הוכחה.

$$\frac{\pi^2 - 4}{4} \quad (9)$$

$$(10) \text{ א. } \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx} \text{ ב. הוכחה.}$$

ג. ראו סרטון.

רימן לבג:

שאלות:

$$(1) \text{ חשבו } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x} \cos(\sqrt{|x|}) \sin(nx) dx$$

$$(2) \text{ חשבו } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2 + 1} e^{i \cdot n^2 t} dt$$

$$(3) \text{ הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{se^{s^2}}{\sqrt{s^2 + 2017}} e^{inx} dx \right) = 0$$

תשובות סופיות:

0 (1)

0 (2)

הוכחה. (3)

משפט דיריכלה:

שאלות:

(1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$ לטור פורייה

$$. x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx)$$

$$. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

היעזרו בפיתוח זה כדי להוכיח

$$. x = \frac{\pi}{2}$$

רמז: הציבו

$$. f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2x}{\pi} & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

(2) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π :

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi, 3\pi]$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ג. הוכיחו כי

(3) במרחב הפונקציות $L^2_{PC}[-\pi, \pi]$ נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$.

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $f(x)$.

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

ב. חשבו את הטור

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

ג. חשבו את הטור

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ד. חשבו את הטור

(4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \cos(ax)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר a

אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

$$. \frac{1}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\pi a + \pi n} + \frac{1}{\pi a - \pi n} \right]$$

א.

$$. \cot(\pi \alpha) = \frac{1}{\pi \alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi \alpha + \pi n} + \frac{1}{\pi \alpha - \pi n}$$

ב.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. ראו סרטון.

ג. הוכחה. ב. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$

(3) א. $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ ב. $\frac{\pi^4}{90}$ ג. $\frac{\pi^2}{-12}$ ד. $\frac{\pi^2}{6}$

(4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0, \pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0 < x < \pi$

$$.x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos([2k-1]x)$$

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = 1$ בקטע $[0, \pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ והוכיחו כי:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin([2k-1]x) \quad 0 < x < \pi \text{ מתקיים}$$

$$\text{ב.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} = -\frac{\pi}{4}$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

שאלות:

(1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$ המקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$ ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח $f'(x) \in L^2_{pc}[-\pi, \pi]$).

נסמן $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ אזי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ מתכנס בהחלט.

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = x(\pi - x)$ בקטע $[0, \pi]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?

שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

ד. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x) = \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ בקטע $[0, \pi]$.

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. רמז: הציבו $x=0$.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{x^2}$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

נסמן $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| e^{inx}$ פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ מתכנס?

ב. האם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n|$ מתכנס?

ג. האם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$ מתכנס?

(4) נתבונן בטור הפורייה $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(x+i)}$

כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

(5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}$ בקטע $(0, 2\pi)$.

ב. נסמון $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ באופן מפורש (ללא טור) בקטע $(0, 2\pi)$.

(6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi, \pi]$, גזירה ברציפות למקוטעין k

פעמים כך שמתקיים $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ לכל $j = 0, 1, \dots, k-1$. נסמון $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k c_n) = 0$.

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי $f(x) \in L^2_{PC}[-\pi, \pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$

ו- $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$. הראו כי מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$.

ב. תהי $f(x) \in L^2_{PC}[0, \pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0) = f(\pi) = 0$.

הראו כי מתקיים $\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx$.

(8) נגדיר $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} e^{in^2x}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

(9) נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \sin(n^{2.5}x)$

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

(10) נסמון $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{1.4}} + \frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$

א. האם f רציפה?

ב. האם f גזירה ברציפות?

(11) נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

(12) נסמן $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3.1} + i \cdot n^{2.2}} \cdot e^{inx}$. הוכיחו כי f גזירה ברציפות פעמיים.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$(2) \text{ א. } [0, \pi] \quad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin([2k-1]x)$$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

$$\text{ה. } [0, \pi] \quad \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \sim \frac{\pi^3}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi(2k-1)^4} \cos([2k-1]x)$$

$$(3) \text{ א. } \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \cdot n c_n \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < \infty$$

$$\text{ב. } \sum_{-\infty}^{\infty} n |c_n| < \infty$$

$$\text{ג. } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$$

(4) ראו סרטון.

$$(5) \text{ א. הוכחה. ב. } -\frac{\pi}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{\pi^2}{6} x$$

(6) הוכחה.

(7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

$$(10) \text{ א. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2.8}} < \infty$$

ב. נניח בשלילה כי f גזירה ברציפות.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0, 2\pi]$.

(2) תהי הפונקציה $f(x) = \min\{1, |x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2, 2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0, 2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}$.

(4) פתחו את $f(x) = |x|$ לטור פורייה בקטע $[-1, 1]$.

(5) פתחו את $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0, 2]$.

(6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x) = f(x+2)$ ובנוסף $-1 \leq x < 1$ $f(x) = 2 - |x|$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$.

ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1, 1]$?

(7) מצאו טור קוסינוסים $f(x) = x$ בקטע $[0, 3]$.

(8) פתחו את $f(x) = \cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0, \pi]$.

תשובות סופיות:

$$x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (1)$$

$$b_n = 0, \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{3-e}{4(e-1)} \quad \text{ג.} \quad \text{ב. ראו סרטון.} \quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1+4n^2\pi^2} e^{inx} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(\pi[2k-1]x) \quad (4)$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8 \cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi[2k-1]x}{2}\right) \quad (5)$$

$$\frac{\pi^2}{8} \quad \text{ג.} \quad \frac{\pi^4}{96} \quad \text{ב.} \quad f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos([2k-1]\pi x) \quad \text{א.} \quad (6)$$

ד. אם f רציפה בקטע $[a, b]$, $f(a) = f(b)$, ו- f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במישל- f בקטע $[a, b]$.

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right) \quad (7)$$

$$\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2} \sin([2k-1]x) \quad (8)$$

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

- (1) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π אז $(f * g)_{(x)}$ מחזוריות- 2π .
- (2) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין, מחזוריות- 2π ופונקציות זוגיות אז $(f * g)_{(x)}$ זוגית.
- (3) נתונה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית- 2π כך שלכל $x \in [-\pi, \pi]$ מתקיים $f(x) = \sqrt{2\pi} \cdot \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(x)$.
 חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$.
 הערה: $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
- (4) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x \in [-\pi, \pi]$ מתקיים $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos(x)$.
 חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.
- (5) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x \in [-\pi, \pi]$ מתקיים $f(x) = x$, $g(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.
 חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) $\pi - x$ (4) לכל x , $-\pi \leq x \leq \pi$ $(f * g)_{(x)} = -2 \cos(x)$

$$(f * g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} (x^2 - (x-1)^2) & -\pi + 1 \leq x \leq \pi \\ \frac{1}{4\pi} [x^2 - (x + (2\pi - 1))^2] & -\pi \leq x \leq -\pi + 1 \end{cases} \quad (5)$$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1 טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה $f(t) = e^{iat}$ בתחום $-\pi \leq t \leq \pi$ כאשר α הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים
$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} - \frac{1}{\alpha}$$

ג. הראו שמתקיים
$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{[\alpha - n]^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$$

ד. הראו שמתקיים
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^2 - \alpha^2)} = \frac{\pi}{4\alpha^2} \left(\frac{1}{\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)} - 1 \right)$$

2 נגדיר $f(x) = |x|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi, \pi])$ ונסמן ב- $f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של f .

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום $(-\infty, \infty)$?

$$\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots$$

ג. חשבו את הטור
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^2$$

3 תהי $f \in L^2_{PC}([-\pi, \pi])$.

נסמן ב- c_n את מקדמי פורייה (המרוכבים) של f .

נסמן $d_n = \operatorname{Re}\{c_n\}$ ובנוסף נתון כי:

• f ממשית.

• f מתאפסת על הקטע $[-\pi, 0]$.

• מתקיים השיוויון
$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} d_n e^{inx} = x^2 e^{|x|} \cos(x)$$

מצאו את f .

(4) תהי f פונקציה זוגית בעלת מחזור 2π המקיימת $f(x) = \cos(2x)$

בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ו- $f(x) = -1$ בתחום $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

מצאו את טור פורייה הממשי של f וחשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$

האם טור פורייה של f מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

(5) נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית 2π .

נסמן $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}$ ויהי $h > 0$ פרמטר כלשהו.

מצאו את מקדמי פורייה של $h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(t+x) dt$ כתלות ב- f_n .

תשובות סופיות:

(1) א. $e^{i\alpha t} \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \sin(\pi\alpha)}{[\alpha - n]\pi} \cdot e^{in t}$. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

(2) א. $f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos([2k+1]x)$

ב. כאשר k מספר שלם, $\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\pi}{4} & \pi k < x < \pi(k+1) \\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1) < x < \pi k \\ 0 & x = \pi k \end{array} \right.$. ג. $\frac{\pi^2}{8}$

(3) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 e^{|x|} \cos(x) & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$

(4) התכנסות במידה שווה בקטע $[-\pi, \pi]$ אם f רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$

ו- $f' \in E[-\pi, \pi]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[-\pi, \pi]$.

(5) f_0

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 11 - התמרת פורייה

תוכן העניינים

69	1. מבוא כללי
71	2. נוסחת כיווץ והזזה
73	3. נוסחת הנגזרת
74	4. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה
76	5. נוסחת המומנט
78	6. נוסחת ההתמרה ההפוכה
(ללא ספר)	7. נוסחת התמרה כפולה
79	8. משפט פלנשראל
80	9. משפט הקונבולוציה
84	10. תרגילים מסכמים

מבוא כללי:

שאלות:

$$\cdot \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של} \quad (1)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (2)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (3)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 2 & 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (4)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ e^{bx} & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של} \quad (5)$$

$$\cdot f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right]$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של} \quad (6)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (7)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (8)$$

$$\cdot f(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega} \quad \text{הינה} \quad f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{הוכיחו התמרת פורייה של} \quad (9)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של} \quad (10)$$

$$\cdot a > 0 \quad f(x) = \begin{cases} x & |x| < a \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של} \quad (11)$$

$$\cdot f(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega| & |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{האם קיימת} \quad f \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \quad \text{כך ש-} \quad (12)$$

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\pi\omega^2} \quad (2)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi(1+i\omega)} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{2\sin(2\omega) - \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega) + i[\cos(\omega) - 1]}{\omega} \quad (6)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-i\omega} - 2e^{-i2\omega}}{i\omega} \quad (7)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(1-i)\omega} - 1}{1-i\omega} \quad (8)$$

(9) הוכחה.

$$f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin([1-\omega])}{1-\omega} - \frac{\sin([1+\omega])}{1+\omega} \right\} \quad (10)$$

$$f(\omega) = -\frac{1}{\pi} i \frac{\sin(\omega a) - \omega a \cos(\omega a)}{\omega^2} \quad (11)$$

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \quad (12) \text{ לא. אינה רציפה בנקודות}$$

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-r,r] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ כאשר $r > 0$.

(2) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

כי

(3) נתונה פונקציה $g(x) \in G(\mathbb{R})$ בעלת התמרת פורייה $g(\omega)$.

מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב- $g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

(4) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-ax^2}$ כאשר $a > 0$.

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{רמז:}$$

(5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \cos(4\pi\omega) \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.

$$F\{\chi_{[-1,1]}(x)\} = \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{רמז:}$$

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi \omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{16}} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{g(x+1) + g(x-1)}{2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} 1 & 4\pi - 2 \leq x \leq 4\pi + 2 \text{ or } -4\pi - 2 \leq x \leq -4\pi + 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

(1) נניח כי $f(x) \in G$ גזירה, מקיימת $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $f'(x) \in G$ ו- $f(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^{30}}$. מצאו התמרת פורייה של $f'(x)\cos(2x)$.

(2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $F \left\{ \frac{x}{(x^2+a^2)^2} \right\}_\omega = \left(-\frac{1}{2} \right) (i\omega) \frac{1}{2|a|} e^{-|a\omega|}$

(3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \omega^2 e^{-|\omega|}$. רמז: $F \left\{ \frac{1}{1+x^2} \right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

תשובות סופיות:

$$\frac{i \cdot \frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}} + i \cdot \frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

$$f(x) = (-2) \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \quad (3)$$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

$$(1) \text{ הוכיחו כי התמרת פורייה של } F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)} = \frac{1}{\pi i} \frac{2c \cdot \omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$$

$$(2) \text{ מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא } f(\omega) = \frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1} - \frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$$

$$(3) \text{ הוכיחו כי התמרת פורייה של } g(x) = \begin{cases} \sin(ax)e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \text{ כאשר } a, b > 0 \text{ קבועים,}$$

$$\text{הינה } g(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{bi - (\omega - a)} - \frac{1}{bi - (\omega + a)} \right]$$

$$(4) \text{ מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \cos(2x) \text{ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה}$$

$$\text{כי } F\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

$$(5) \text{ מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \sin^2(3x) \text{ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה}$$

$$\text{ובעובדה כי } F\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

$$(6) \text{ נניח כי } f(x) \in G(R) \text{ ונגדיר } g(x) = f(3x-2) \cdot \cos(x) \text{ . בטאו את } g(\omega) \text{ על ידי } f(\omega)$$

$$(7) \text{ מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא } f(\omega) = e^{3i\omega} \cdot e^{-|\omega-2|} \text{ . רמז: } F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}$$

$$(8) \text{ תהי } H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

א. $H(x)e^{-ax}$ כאשר $a > 0$

ב. $H(x)e^{-ax} \cos(bx)$ כאשר $a, b > 0$

ג. $H(x)e^{-ax} \sin(bx)$ כאשר $a, b > 0$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$f(x) = 2\pi i \cdot \chi_{[-1,1]}(x) \cdot \sin(x) \quad (2)$$

(3) הוכחה.

$$F\{e^{-|x|} \cos(2x)\} = \frac{1}{2\pi(1+[\omega+2]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-2]^2)} \quad (4)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} - \left[\frac{1}{2\pi(1+[\omega+6]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-6]^2)} \right] \quad (5)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{6} \left[e^{-\frac{2}{3}(\omega+1)} f\left(\frac{\omega+1}{3}\right) + e^{-\frac{2}{3}(\omega-1)} f\left(\frac{\omega-1}{3}\right) \right] \quad (6)$$

$$F\left\{e^{2i[x+3]} \frac{2}{1+[x+3]^2}\right\} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ב.}$$

$$\frac{1}{4\pi i} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ג.}$$

נוסחת המומנט:

שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = \begin{cases} x & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ על ידי שימוש

$$.F\{x \cdot f(x)\} = i \frac{d}{d\omega} f(\omega)$$

(2) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{כי}$$

(3) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x \cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} \quad \text{כי}$$

(4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x) = e^{-x^2}$

(5) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = 8x^3 e^{-\frac{4(x+1)^2+5}{3}}$

(6) תהי $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

(7) נתון כי התמרת פורייה של $f \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega) = \frac{1}{1+|\omega|}$

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)| dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

$$i \cdot \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\pi \omega^2} \quad (1)$$

$$F\{x^2 e^{-x^2}\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right) e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (2)$$

$$F\{x \cdot e^{-|x|}\} = -\frac{i}{\pi} \frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (4)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{3}{\pi}} (27i\omega^3 + 216\omega^2 - 792i\omega - 1088) e^{i\omega - \frac{3\omega^2}{16} - \frac{5}{3}} \quad (5)$$

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

(1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

(2) חשבו $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin(\omega) \cos(\omega x)}{\pi\omega} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

(1) ראו סרטון.

$$\begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1, x = -1 \end{cases} \quad (2)$$

משפט פלנשראלי:

שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a > 0$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} \frac{\sin(bx)}{x} dx$ עבור $a, b > 0$.

(2) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}$.

(3) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

(4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

א. $f(\omega) = \frac{\sin(\omega a)}{\pi \omega}$. ב. $\pi \cdot \min\{a, b\}$.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

(1) חשבו את הקונבולוציה $(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]})_{(x)}$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים.

(2) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים $x > 0$ ו- $x \leq 0$.

(3) מצאו פונקציה $f \in G$ כך ש- $f(\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2$

(4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$

המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t) \in E$ מתקיים השוויון.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f''(t)) g(x-t) dt = 2f(x)$$

(5) נגדיר $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.

תזכורת: $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}$

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$.

(8) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[1,2]}(x)$.

(9) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,2]}(x)$.

(10) חשבו את הקונבולוציה $(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x))_{(x)}$.

(11) חשבו את הקונבולוציה $(e^{-x^2} * e^{-x^2})_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = e^{-\frac{3(x+1)^2}{2}}$.

(13) נניח כי $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית

$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy \equiv 0$ הוכיחו כי $f(x) \equiv 0$.

תשובות סופיות:

$$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x \in [-2,0] \\ 2-x & x \in [0,2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x \in [-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x \in [0,2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$g(x) = e^{-|x|} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{x^2+9} \quad (5)$$

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \frac{2}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 2 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 3 < x < 4 \\ x-2 & 2 < x < 3 \\ 0 & x < 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 2 < x < 4 \\ x & 0 < x < 2 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\left(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 3 \\ 3-x & 2 < x < 3 \\ x-1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ב.}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \quad (12)$$

(13) הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} \cos(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ג. חשבו את האינטגרל

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x) \sin(x)}{(1-x^2)} dx$$

ד. חשבו את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \sin^2(\pi x) dx$$

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x) = x \cdot e^{-|x|}$

ב. מצאו את כל הפונקציות $h(y)$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} h'(y) e^{-|x-y|} dy = x \cdot e^{-|x|}$

(3) יהי $A > 0$ קבוע. נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq A \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ידוע כי ישנה פונקציה $g(x) \in G$ המקיימת $g(\omega) = f(\omega) f(-\omega)$. מצאו במפורש את $g(x)$.

(4) נניח כי $f(x) \in C^2(-\infty, \infty)$ כך ש- $f'(x), x \cdot f'(x), f''(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$

ומתקיים $f''(x) + x \cdot f'(x) + f(x) = 0$ לכל x ממשי.

א. הוכיחו כי $f(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$

ב. חשבו את $f(\omega)$ אם נתון כי $f(0) = 1$.

ג. מצאו את $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & |x| \leq 1 \\ 4 & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{תהי (5)}$$

א. חשבו את $f(\omega)$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{[2 \sin(2t) - \sin(t)]^2}{t^2} dt$

ג. חשבו את האינטגרל $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{2 \sin(2t) - \sin(t)}{\pi t} \cos(t) dt$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{\pi^2} & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

ב. חשבו את האינטגרלים: $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \right)^2 dx$

ו- $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \cos(x) dx$

(7) נגדיר $\phi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. הוכיחו כי המערכת $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת

אורתונורמלית ב- $L^2_{PC}(-\infty, \infty)$.

(8) תהי $f \in G$ פונקציה כך ש- $f' \in G$ פונקציה רציפה. מצאו פונקציה $g \in G$

המקיימת את המשוואה $g(t) = \int_{-\infty}^t e^{u-t} g(u) du + f'(t)$.

(9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}$

(10) פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + b^2} dt = \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}$

$$\cdot f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(\omega - t) \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(t) e^{i\omega x} dt d\omega \quad (11)$$

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור $f(x)$.

$$\cdot \chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{תזכורת:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(a^2 + x^2)(x^2 + b^2)} dx \quad (12)$$

כאשר $a, b > 0$.

$$\cdot f(x) = e^{-(x^2 + 2x + 5)} \quad (13)$$

$$\cdot \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (14)$$

הוכיחו כי $a, b > 0$ לכל קבועים.

$$\cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x) \cos(x)}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{8e} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \quad (15)$$

$$\cdot \int_0^{\infty} \sin^3(x) x e^{-x} dx = \frac{9}{25} \quad (16)$$

תשובות סופיות:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\omega \sin(\omega\pi)}{1-\omega^2} \quad \text{ב.} \quad f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(\omega\pi) \cdot \frac{2}{1-\omega^2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\frac{\pi^2}{2} \quad \text{ד.} \quad \frac{\pi}{2} \sin(1) \quad \text{ג.}$$

$$-h(y) = e^{-|y|}, \quad h(y) = -e^{-|y|} \quad \text{ב.} \quad -\frac{2i\omega}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(A+x)^3}{3} - \frac{(A+x)^2}{2} x \right) & -A < x < 0 \\ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{A^3}{3} - \frac{A^2}{2} x + \frac{x^3}{6} \right) & 0 < x < A \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ג.} \quad e^{-\frac{\omega^2}{2}} \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה.} \quad (4)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad \text{ג.} \quad \frac{5\pi}{2} \quad \text{ב.} \quad \frac{4 \cdot \sin(2\omega) - 2 \cdot \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\pi^2} \right) \quad \text{ג.} \quad \frac{1}{15} \quad \text{ב.} \quad \frac{2 \sin(\pi\omega) - \pi\omega \cos(\pi\omega)}{\pi^3 \omega^3} \quad \text{א.} \quad (6)$$

(7) הוכחה.

$$g(t) = f(t) + f'(t) \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^x (1-x) & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} e^{-x} (1+x) & x > 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{a} \frac{(a-b)x}{(x^2 + (a-b)^2)^2} \quad (10)$$

$$f(x) = 4 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2} \quad (11)$$

$$\frac{\pi}{a+b} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \frac{\omega}{b^2 + \omega^2} d\omega \quad (12)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{e^4} \cdot e^{i\omega} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (13)$$

(14) הוכחה.

15) הוכחה.

16) הוכחה.

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 12 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל 89
2. טורי קוסינוסים וסינוסים (ללא ספר)

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

(1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית

$$\cdot (p(x)y'(x))' + (\lambda r(x) - q(x))y(x) = 0$$

(משוואת הרמיט) $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$.א

(משוואת בסל) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda)y = 0$.ב

(2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y'' + e^{2x}y' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + 4y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

(3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y'' + 4y' + xy + \lambda e^x y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות 4-7:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y(0) - y'(0) = 0 \\ y(\pi) - y'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הבעיה הבאה:}$$

- א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
 ב. פתרו את הבעיה.

(9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \ell \\ y(0) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$$

$$ב. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 1 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

1. פתחו את הפונקציה $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

התחל את הטור מ- $n=1$.

2. מה סכום הטור ב- $x=0$?

האם הוא שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$?

$$ג. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 2 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

פתחו את הפונקציה $f(x) = x, 0 \leq x \leq 2$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

(10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

ב. פתחו את הפונקציה $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq \pi$

לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.

התחילו את הטור מ- $n=1$.

$$(11) \text{ נתונה הבעיה: } \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, & 0 < x < e \\ y(1) = 0 \\ y'(e) = 0 \end{cases}$$

- א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
 ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.
 ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את $f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e} \leq x \leq e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.

הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.

ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x = \sqrt{e}$, $x = 1.5$, $x = 2$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi n) = (-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi n) = 0$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (e^{-x^2} y')' + (\lambda e^{-x^2} - 0)y = 0 \quad \text{ב. } (xy')' + \left(\lambda \left(-\frac{1}{x} \right) - (-x) \right) y = 0$$

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(5) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = n \cos nx + \sin nx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ערכים עצמיים: $\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$; בנוסף, $\lambda = -1$ הוא עייע של הבעיה,

המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x) = e^x$.

$$(6) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \sin(\omega_n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(7) \quad \text{פונקציות עצמיות: } y_n(x) = \sin(\omega_n x) - \omega_n \cos(\omega_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

בנוסף, $\lambda_0 = 0$ הוא עייע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x) = x - 1$.

$$(8) \quad \text{א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = e^x \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(9) \quad \text{א. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ב. סכום הטור ב- $x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$.

$$\text{ג. כאשר } (0 < x < 2), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$$

$$(10) \quad \text{א. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2} x \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. כאשר } 0 < x < \pi, \quad e^x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} (-1)^{n+1} - 1}{1^2 + \left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$$

11 א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות : $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \ln x\right)$$

ערכים עצמיים : $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\lambda_n = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + n\right)^2$$

ג. שאלת הוכחה.

ד. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2 \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \ln x\right)$

ה. סכום הטור ב- $x = \sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x = 1.5$ הוא 1; וב- $x = 2$ הוא 0.

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 13 - משוואות לינאריות וקאוזי לינאריות מסדר ראשון

תוכן העניינים

94	1. שיטת הקווים האופייניים
95	2. שיטת לגראנג

שיטת הקווים האופייניים

שאלות

(1) פתרו את המשוואה עבור $\alpha \neq \frac{1}{2}$ קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = 0 \quad \gamma = \{y = \alpha x\} \quad u|_\gamma = x^2 + y^2$$

(2) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x - y$ $\gamma = \{y = x^2, x \geq 0\}$ $3u_x - 2u_y = 0$

(3) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x + \sin(xy)$ $\gamma = \{y = x^2, x \leq 0\}$ $u_x + 2u_y = 0$

$$u_x - u_y = -u \quad y \geq 0$$

$$u(x, 0) = x^2 - x^4$$

(4) פתרו את המשוואה

$$2u_x - 3u_y + 2u = 0$$

$$u(x, -x) = (x+1)e^{-x}$$

(5) פתרו את המשוואה

$$u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \quad y \geq e^{-x}$$

$$u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$$

(6) פתרו את המשוואה

(7) נתון כי $u(x, y)$ הוא פתרון של הבעיה

$$y^2 u_x + u_y = -u \quad 0 < x < \infty, \quad y > 0$$

$$u(0, y) = 0 \quad y > 0$$

$$u(x, 0) = 1 \quad x > 0$$

(8) פתרו את הבעיה כאשר a קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = -u \quad 0 < y < x$$

$$u(x, 0) = a \cdot \cos(x) + \sin(x) \quad x > 0$$

$$u(y, y) = 0 \quad y > 0$$

שיטת לגראנג

שאלות

(1) מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד"ח $xu_x + yuu_y = u$.

(2) מצאו פתרון כללי למשוואה $x^2u_x + y^2u_y = u^2$.

(3) מצאו פתרון כללי למשוואה $xu \cdot u_x + yu \cdot u_y = -xy$, כאשר $x, y, u > 0$.

(4) מצאו פתרון כללי למשוואה $(y^2 + u^2)u_x - xyu_y = xu$, כאשר $x, y, u > 0$.

רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, אז $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

(5) מצאו פתרון למשוואה $\begin{cases} xu_x + yu_y = 2xy & x, y > 0 \\ u(x, 1) = x & x > 0 \end{cases}$

(6) פתרו את המשוואה $\begin{cases} e^y u_x - e^x u_y = -e^{x+y} u & u > 0 \\ u(x, 0) = 1 \end{cases}$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{e^x \sqrt{y+1}} u_x + yu_y = y^2 u$,

בתחום $u, y > 0$.

ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

(8) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\cos(y)u_x + \sin(y)u_y = e^y \sin(y)u$,

בתחום שבו $0 < y < \pi$ ו- $u > 0$.

(9) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{y} u_x + \frac{1}{x} u_y = 2$.

(10) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+y)u_x + (y-x)u_y = x^2 - y^2$,

בתחום $x, y > 0$.

- 11** נתון כי $u(x, y) = \frac{e^y}{y+1} F\left(\frac{y+1}{x^2+1}\right)$ הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה
- $$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$
- א. מצאו את הפונקציות a, b, c .
- ב. מצאו פתרון פרטי המקיים $u(0, y) = y^2$.

תשובות סופיות

$$F\left(\frac{x}{u}, \ln(y) - u\right) = 0 \quad (1)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{F\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$u = \sqrt{F\left(\ln \frac{x}{y}\right) - xy} \quad (3)$$

$$F\left(\frac{y}{u}, x^2 + y^2 + u^2\right) = 0 \quad (4)$$

$$u(x, y) = x \cdot y \quad (5)$$

$$u(x, y) = e^{e^y - 1} \quad (6)$$

$$u(x, y) = e^{\frac{1}{2}y^2 - F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}x}\right)} \quad (7) \quad \text{א. ב. שאלת הוכחה.}$$

$$u(x, y) = e^{e^y - F(e^{-x} \sin y)} \quad (8)$$

$$u(x, y) = xy - F\left(\frac{x}{y}\right) \quad (9)$$

$$u(x, y) = \frac{y^2 + 2xy - x^2 - F\left(\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4} \quad (10)$$

$$u(x, y) = \frac{e^y}{y+1} \cdot \frac{\left(\frac{y+1}{x^2+1} - 1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1} - 1}} \cdot \frac{y+1}{x^2+1} \quad \text{ב.} \quad \underbrace{(x^2+1)}_a u_x + \underbrace{2x(y+1)}_b u_y = \underbrace{2xyu}_c \quad \text{א. (11)}$$

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 14 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

1. קטע אינסופי (ללא ספר)
2. קטע חצי אינסופי (ללא ספר)
3. הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית (ללא ספר)
4. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית (ללא ספר)
5. עקרון דוהמל (ללא ספר)
6. משולש הקביעה (ללא ספר)

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 15 - משוואת החום

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים בקטע סופי (ללא ספר)
2. נוסחת פוואסון בקטע אינסופי (ללא ספר)
3. עקרון דוהמל (ללא ספר)
4. עקרון המקסימום והמינימום (ללא ספר)

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 16 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

1. חזרה על אינטגרל קווי (ללא ספר)
2. משוואת לפלס בעיגול (ללא ספר)
3. משוואת לפלס בטבעת (ללא ספר)
4. משוואת לפלס בגזרה מעגלית (ללא ספר)
5. משוואת לפלס במלבן (ללא ספר)
6. עקרון הממוצע (ללא ספר)
7. עקרון המקסימום והמינימום (ללא ספר)

מתמטיקה יישומית להנדסה

פרק 17 - אינטגרל אנרגיה

תוכן העניינים

1. אינטגרל אנרגיה (ללא ספר)