

מתמטיקה השלמה



תוכן העניינים

1	מבוא לאלגברה
47	משוואות אלגבריות
(ללא ספר)	מבוא לפונקציות
(ללא ספר)	הפונקציה הקווית
(ללא ספר)	הפונקציה הריבועית
69	אי שוויונים אלגבריים
(ללא ספר)	תכנון לינארי
85	חוקי החזקות והשורשים
95	משוואות ואי-שוויונים מעריכיים
105	חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים
121	חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים
136	חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום
149	חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש
(ללא ספר)	חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת
183	חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות
199	חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות
215	חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון
(ללא ספר)	חשבון אינטגרלי - פונקציה פולינומית רציונאלית ושורש
(ללא ספר)	חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה

מתמטיקה השלמה

פרק 1 - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

1	1. מספרים מכוונים
5	2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים
7	3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים
8	4. שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים
14	5. כפל וחילוק שברים
16	6. חיבור וחסור שברים
20	7. בעיות יסודיות באחוזים
22	8. חזרה על תבניות מספר
24	9. כינוס איברים
26	10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים
28	11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר
30	12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים
33	13. פירוק הטרינום
35	14. שברים אלגברים
39	15. כפל וחילוק של שברים אלגברים
41	16. חיבור וחסור של שברים אלגברים
45	17. שברים כפולים

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2-, ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
 - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
 - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
 - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
 - כפל או חילוק של שני מספרים שונים סימן - התוצאה תהיה שלילית.

הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}, 4, 1\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}, -2$$



(2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $-3-2$

א. $3+2$

ד. $-3+2$

ג. $3-2$

ו. $7+10$

ה. $-1-4$

ח. $-7+3$

ז. $-6+5$

(3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $5-8-12+17$

א. $5+7-23+1$

ד. $-4-11+2+9$

ג. $3-14+2+6$

ו. $-7-13+5-3$

ה. $6-21+3-7$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $4 \cdot (-7)$

א. $4 \cdot 9$

ד. $(-5) \cdot (-3)$

ג. $(-6) \cdot (-5)$

ו. $(-8) \cdot 5$

ה. $(-2) \cdot 8$

ח. $2 \cdot 3 \cdot 3$

ז. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$

י. $(-2) \cdot (-3) \cdot 3$

ט. $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$

יב. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2)$

יא. $2 \cdot 3 \cdot (-3)$

יד. $1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

יג. $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה :

א. $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ב. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot (-5)$

ג. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ד. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב. $(-30) : 3$

א. $(-25) : (-5)$

ד. $(-32) : (-4)$

ג. $40 : (-10)$

ו. $4 : (-16)$

ה. $(-6) : 18$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב. $\frac{42}{-6}$

א. $\frac{-60}{12}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

ג. $\frac{32}{-4}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות :

ב. $(-2) \cdot 0$

א. $0 : 5$

ד. $6 : 0$

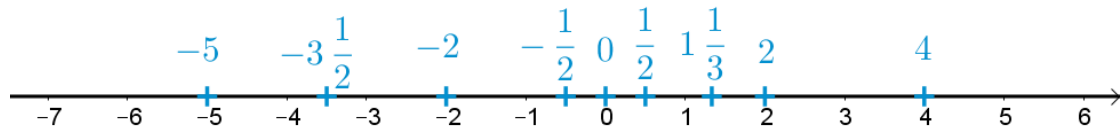
ג. $0 \cdot (-3) \cdot 4$

ו. $0 - 4$

ה. $0 + 4$

תשובות סופיות:

(1) להלן מערכת הצירים:



- (2) א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5
- ו. 17 ז. -1 ח. -4
- (3) א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18
- (4) א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16
- ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18
- יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16
- (5) א. + ב. + ג. - ד. -
- (6) א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$
- (7) א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4
- (8) א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------|---------------|
| א. 3^2 | ב. 3^3 |
| ג. $(-3)^3$ | ד. $(-2)^3$ |
| ה. 4^3 | ו. 3^4 |
| ז. $(-5)^3$ | ח. 10^4 |
| ט. $-(-3)^4$ | י. -5^4 |
| יא. -4^3 | יב. $-(-2)^6$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------------|----------------------|
| א. $\sqrt[3]{-27}$ | ב. $\sqrt[4]{625}$ |
| ג. $\sqrt[4]{-16}$ | ד. $\sqrt[5]{-32}$ |
| ה. $-\sqrt[4]{81}$ | ו. $-\sqrt[3]{1000}$ |

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|-----------|----------|-------------|---------|---------|---------|
| (1) א. 9 | ב. 27 | ג. -27 | ד. -8 | ה. 64 | ו. 81 |
| ז. -125 | ח. 10000 | ט. -81 | י. -625 | יא. -64 | יב. -64 |
| (2) א. -3 | ב. 5 | ג. לא מוגדר | ד. -2 | ה. -3 | ו. -10 |

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll}
 (-3)^2 : 9 - 2 \cdot (-4^2) & \text{(2)} & \sqrt{81} + 3 \cdot 2^3 - 40 : 8 & \text{(1)} \\
 3 + 4 \cdot [-3 + 4 \cdot (-2)] + \sqrt{10 + 6} & \text{(4)} & \sqrt{144} - 20 : 4 + 3 \cdot (-2)^2 & \text{(3)} \\
 -\sqrt{9} + 5^2 : (-4 - 1) - 24 : 12 \cdot 3 & \text{(6)} & (-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3 & \text{(5)} \\
 \sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3 & \text{(8)} & -2^5 : (-8) + 4^2 - 3 \cdot 5 & \text{(7)} \\
 (8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt[3]{243}) & \text{(10)} & [6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5 & \text{(9)} \\
 & & \frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\} & \text{(11)}
 \end{array}$$

תשובות סופיות:

-37 (4)	19 (3)	33 (2)	28 (1)
-21 (8)	5 (7)	-14 (6)	31 (5)
	20 (11)	-44 (10)	-16 (9)

שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ... שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים שלמים}}.\underbrace{YYY}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

אחוזים - הגדרה:

השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45%, והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

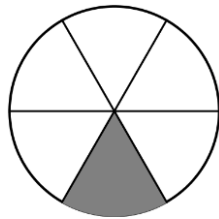
שאלות:

(1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגולא. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגולד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגולג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

(2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

ב. שבר:



א. שבר:



ד. שבר:



ג. שבר:



(3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

(4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן :

א. $\frac{25}{30}$	ב. $\frac{10}{30}$	ג. $\frac{6}{24}$	ד. $\frac{4}{20}$
ה. $\frac{35}{56}$	ו. $\frac{24}{42}$	ז. $\frac{36}{48}$	ח. $\frac{33}{121}$

(5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים :

א. $-\frac{20}{3}$	ב. $\frac{19}{4}$	ג. $\frac{12}{5}$	ד. $\frac{22}{5}$
ה. $-\frac{34}{6}$	ו. $-\frac{50}{7}$	ז. $\frac{47}{8}$	ח. $\frac{60}{9}$

(6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים :

א. $1\frac{2}{3}$	ב. $3\frac{5}{6}$	ג. $4\frac{1}{2}$	ד. $6\frac{1}{4}$
ה. $11\frac{3}{4}$	ו. $-2\frac{5}{8}$	ז. $-6\frac{2}{7}$	ח. $12\frac{7}{9}$

(7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים :

א. $\frac{4}{10}$ או $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{7}{6}$ או $\frac{7}{8}$
ג. $\frac{5}{6}$ או $\frac{2}{3}$	ד. $\frac{7}{12}$ או $\frac{5}{18}$

(8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים :

א. 0.7	ב. 0.07	ג. 0.007	ד. 0.34
ה. 0.304	ו. 0.65	ז. 1.2	ח. 1.02
ט. 1.42	י. 3.5	יא. 6.03	יב. 5.125

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{3}{100}$	ג. $\frac{3}{1000}$	ד. $\frac{23}{1000}$
ה. $\frac{1}{2}$	ו. $\frac{3}{4}$	ז. $\frac{2}{5}$	ח. $\frac{4}{25}$
ט. $\frac{7}{50}$	י. $\frac{3}{20}$	יא. $\frac{7}{8}$	יב. $\frac{9}{16}$
יג. $9\frac{1}{10}$	יד. $3\frac{1}{5}$	טו. $4\frac{7}{8}$	טז. $-4\frac{1}{16}$

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית (היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$	ב. $\frac{5}{6}$	ג. $\frac{3}{7}$	ד. $\frac{2}{11}$
------------------	------------------	------------------	-------------------

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25%	ב. 32%	ג. 64%	ד. 80%
ה. 120%	ו. 5%	ז. 300%	ח. 150%

12) המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{4}{5}$	ד. $\frac{7}{20}$
ה. $\frac{11}{40}$	ו. $\frac{70}{125}$	ז. $\frac{5}{6}$	ח. $\frac{4}{9}$

תשובות סופיות:

- (1) תשובה מודגמת בסרטון.
- (2) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$
- (3) א. $\frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80}$ ב. $\frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300}$ ג. $\frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700}$
- (4) א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$
- (5) א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$
- (6) א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$
- (7) א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$
- (8) א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$
- (9) א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75
- א. 0.4 ב. 0.16 ג. 0.14 ד. 0.15 ה. 0.875 ו. -4.0625
- א. $0.6\bar{6}$ ב. $0.8\bar{3}$ ג. 0.428 ד. $0.18\bar{8}$
- (10) א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$
- (11) א. 3 ב. $1\frac{1}{2}$

12) א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
 - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
 - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
 - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10}$ ג.	$\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$ ב.	$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$ א.
$\frac{12}{25} \cdot 5$ ו.	$6 \cdot \frac{2}{3}$ ה.	$3 \cdot \frac{4}{5}$ ד.
$3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{2}{5}$ ט.	$3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$ ח.	$1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$ ז.
$\frac{4^3}{5}$ יב.	$\frac{4}{5^3}$ יא.	$\left(\frac{4}{5}\right)^3$ י.

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$\frac{3}{25} : \frac{7}{10}$ ג.	$\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ ב.	$\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$ א.
$\frac{5}{6} : 3$ ו.	$10 : \frac{2}{3}$ ה.	$8 : \frac{2}{9}$ ד.
$2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{15}$ ט.	$3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$ ח.	$\frac{2}{5} : 5$ ז.

תשובות סופיות:

א. $\frac{9}{20}$	ב. $\frac{5}{21}$	ג. $\frac{8}{45}$	ד. $2\frac{2}{5}$	ה. 4	ו. $2\frac{2}{5}$
ז. $3\frac{3}{5}$	ח. $15\frac{2}{5}$	ט. $8\frac{8}{35}$	י. $\frac{64}{125}$	יא. $\frac{4}{125}$	יב. $12\frac{4}{5}$
א. $\frac{9}{10}$	ב. $1\frac{1}{2}$	ג. $\frac{6}{35}$	ד. 36	ה. 15	ו. $\frac{5}{18}$
ז. $\frac{2}{25}$	ח. $\frac{2}{3}$	ט. 2			

חיבור וחסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b , המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחסור של שברים.

כללי החיבור והחסור של שברים:

- חיבור וחסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.

$$\text{דוגמא: } \frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = \frac{-1}{7}, \quad \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$$

- חיבור וחסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.

$$\text{דוגמא: } \frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3-10}{12} = -\frac{7}{12}, \quad \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$$

- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.

$$\text{דוגמא: } 3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$$

חסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.

$$\text{דוגמא: } 3 - \frac{1}{4} = 2\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$$

דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

- חיבור וחסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

$$\text{דוגמא: } 3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} = \frac{17}{5} + \frac{13}{6} = \frac{17 \cdot 6}{30} + \frac{13 \cdot 5}{30} = \frac{102 + 65}{30} = \frac{167}{30} = 5\frac{17}{30}$$

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

$$\text{דוגמא: } 2\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3} = (2 - 5) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = -3 + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = -3 + \frac{5}{12} = -2\frac{7}{12}$$

שאלות:

- (1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3	ב. 2 ו-4	ג. 3 ו-5	ד. 6 ו-10
ה. 4 ו-10	ו. 4 ו-6	ז. 3, 5 ו-10	ח. 2, 3 ו-8

- (2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$	ב. $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$
ג. $\frac{4}{13} + \frac{9}{13}$	ד. $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$
ה. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$	ו. $\frac{8}{9} - \frac{7}{9}$
ז. $\frac{2}{12} - \frac{5}{12}$	ח. $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}$
ט. $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$	י. $\frac{7}{15} + \frac{8}{15} - \frac{6}{15}$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6} - \frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{3}{5}$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2 + \frac{5}{6}$

ב. $2 - \frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$

ז. $2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14} : \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - \frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4} - 6 : \frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5} : \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$

תשובות סופיות:

12 .ג	20 .ה	30 .ד	15 .ג	4 .ב	6 .א (1
				24 .ח	30 .ז
$\frac{1}{9}$.ג	$\frac{1}{2}$.ה	$1\frac{3}{4}$.ד	1 .ג	$\frac{7}{9}$.ב	$\frac{4}{5}$.א (2
		$\frac{3}{5}$.י	$1\frac{5}{8}$.ט	$-\frac{4}{5}$.ח	$-\frac{1}{4}$.ז
$3\frac{5}{6}$.ג	5 .ה	$-\frac{1}{8}$.ד	$\frac{7}{12}$.ג	$\frac{7}{10}$.ב	$1\frac{5}{6}$.א (3
				$-\frac{1}{10}$.ח	$\frac{19}{21}$.ז
$-\frac{5}{8}$.ג	$7\frac{11}{12}$.ה	$1\frac{5}{12}$.ד	$3\frac{1}{12}$.ג	$1\frac{1}{6}$.ב	$2\frac{5}{6}$.א (4
				$-\frac{1}{20}$.ח	$2\frac{13}{18}$.ז
	$3\frac{5}{18}$.ה	$2\frac{5}{6}$.ד	$-13\frac{3}{4}$.ג	$1\frac{1}{10}$.ב	$2\frac{11}{24}$.א (5

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $48 = 120 \cdot \frac{40}{100}$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48.**

שאלות:

- (1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
 - א. כמה בנות בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
 - א. כמה תלמידים בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
 - א. מהו מחירו בסוף העונה?
 - ב. מה גודל ההנחה?
- (4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
 - א. מה מחירו הסופי?
 - ב. מה גודל ההתייקרות?
- (5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
 - א. מה מחירו בסוף השנה?
 - ב. מה גודל התייקרות?
- (6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
 - א. מה מחירו בסוף השנה?
 - ב. מה גודל התייקרות?

7) ענה על השאלות הבאות:

- א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.
מה אחוז הבנים בקהל?
- ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.
מה אחוז הבנות בכיתה?
- ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?
- ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ו. מחיר מוצר הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

תשובות סופיות:

- 1) א. 18 בנות. ב. 12 בנים.
- 2) א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.
- 3) א. 240 ₪. ב. 60 ₪.
- 4) א. 540 ₪. ב. 40 ₪.
- 5) א. 4.9755 ₪.
- 6) א. 400 ₪.
- 7) א. 88%. ב. 60%. ג. 50%. ד. 33.33%. ה. 33.33%. ו. 25%.

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים). ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3 \cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$ ב. x^2+3x כאשר $x=2$

ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$ ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$

ה. x^3+1 כאשר $x=-2$ ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$

ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$ ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

(2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$

ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$

3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

- | | |
|----------------------------------|---|
| א. $a^2 + 2ab + b^2$ | עבור: $a = 3, b = -5$ |
| ב. $(x-3)^2 + 3x^2b$ | עבור: $x = 5, b = -1$ |
| ג. $-x^3 - 2xy + y^4$ | עבור: $x = -2, y = -1$ |
| ד. $\frac{(a-2c)^4}{a} - a^2$ | עבור: $a = 2, c = -2$ |
| ה. $\frac{4a^2 - 3b}{c}$ | עבור: $a = -1, b = 2, c = -4$ |
| ו. $\sqrt{c-3a}$ | עבור: $c = 13, a = -1$ ועבור: $c = 82, a = \frac{1}{3}$ |
| ז. $\frac{p^3 + 2\sqrt{q+1}}{m}$ | עבור: $p = -5, q = 48, m = 3$ |

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|-----------|--------------------|--------|--------|------------------|--------|
| 11 א. (1) | 10 ב. | ג. -12 | ד. -65 | ה. -7 | ו. 5 |
| ז. -10 | ח. 45 | | | | |
| 10 א. (2) | ב. $\frac{22}{27}$ | | | | |
| 4 א. (3) | ב. -71 | ג. 5 | ד. 644 | ה. $\frac{1}{2}$ | ז. -37 |
- ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שנייה: 9

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x + 6x - 5x = (3 + 6 - 5)x = 4x$.
 איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.
 כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

כנס איברים דומים:

- | | |
|---|--|
| $9x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x^2$ (2) | $5x + 7x - 4x$ (1) |
| $x^2y - 3yx^2 + x^2y$ (4) | $-10xy + 15xy + xy - 2yx$ (3) |
| $2x^2 - 3m^2 - x^2 + 3m^2$ (6) | $8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2$ (5) |
| $mn^2 + 4m^2n + 6n^2m - 10nm^2 + mn^2$ (8) | $3xy + y - 30y + 6yx - 7y$ (7) |
| $y^2 + x^2 - 5x^2 + 5y^2 + 4x^2 - 6y^2$ (10) | $-6 + x^3 + 4 - 3x^3 + 17x^3 - 17$ (9) |
| $5xy + 2x - 3yx - x + 1$ (12) | $7x^2 - 3x - 4x + 2$ (11) |
| $x + xy + y - 6yx - 6y - 6x$ (14) | $3 - x - x^2 + 4x + 5x^2 - 12$ (13) |
| $ab^2 + 6ba^2 - 6b + 16a^2b + 3b - 6b^2a$ (16) | $mn + n - 5m + 5nm - 14n + 3m$ (15) |
| $4x^2z + 6xz^2 - 6 - xz^2 + 12 + 10zx^2$ (18) | $z^3 - 4z^2 + 7 - z^3 - 8 + 8z^2$ (17) |
| $x^3 - 3x - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$ (20) | $2 - x^3 - 3 - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2$ (19) |
| $12x^2y^3 + 13a^2 - 20x^2y^3 + 2a^2$ (22) | $2a^2b + 3x^2y + 5a^2b + 10x^2y$ (21) |
| $-2x^3y + 5x^2 - 4yx^3 - 6x^2$ (24) | $2y^2 - 4x^3y^2 - 10y^2 - x^3y^2$ (23) |
| $5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2$ (26) | $2a^2b + 2b + 3a^2 + 5b$ (25) |
| $-12x^2 + 2y^2 + 3x^2y + 14xy^2 - 5xy^2 - 6y^2 + 2xy + 11x^2 + x^2y - 9xy$ (27) | |
| $21x^3y^3 + x^2y^2 - 3xy^3 + x^3y - 15x^2y^2 - 7x^3y + 12x^3y^3 - 4xy^3 + 4xy^3 - 6x^3y$ (28) | |

תשובות סופיות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------|---|
| $4xy$ (3) | $2x^2$ (2) | $8x$ (1) |
| x^2 (6) | $4a^2 - a$ (5) | $-x^2y$ (4) |
| $15x^3 - 19$ (9) | $8mn^2 - 6nm^2$ (8) | $9xy - 36y$ (7) |
| $2xy + x + 1$ (12) | $7x^2 - 7x + 2$ (11) | 0 (10) |
| $-13n - 2m + 6mn$ (15) | $-5x - 5y - 5xy$ (14) | $4x^2 + 3x - 9$ (13) |
| $14x^2z + 5xz^2 + 6$ (18) | $4z^2 - 1$ (17) | $-5ab^2 + 22a^2b - 3b$ (16) |
| $7a^2b + 13x^2y$ (21) | $-3x^2 - x$ (20) | $-3x^2 + 2x - 3$ (19) |
| $-6x^3y - x^2$ (24) | $-8y^2 - 5x^3y^2$ (23) | $-8x^2y^3 + 15a^2$ (22) |
| | $25a^2b - 22ab^2$ (26) | $2a^2b + 3a^2 + 7b$ (25) |
| | | $-x^2 - 4y^2 + 4x^2y + 9xy^2 - 7xy$ (27) |
| | | $33x^3y^3 - 14x^2y^2 - 3xy^3 - 12x^3y$ (28) |

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

$$\bullet a(b+c) = ab+ac$$

$$\bullet (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x \cdot 3x$	ב. $-4x \cdot (-7x)$	ג. $-2x \cdot (-4x) \cdot (-3)$
ד. $8m^2 \cdot 4m^3$	ה. $3a^3 \cdot (-2a^2)$	ו. $-b \cdot 4b^2 \cdot \frac{b^2}{2}$
ז. $a \cdot 3b$	ח. $4a^2 \cdot 7b^2$	ט. $ab \cdot (-2a^2b)$

(2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$	ב. $2(-3x^2+5x-1)$
ג. $(7x-2)4$	ד. $(1-2x)(-2)$
ה. $a(3a-1)$	ו. $b(b^2-3b+4)$
ז. $2x(5x+3)$	ח. $5x(x^2+2x-3)$
ט. $3t^2(4t-t^2+6)$	י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$	ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$
ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$	ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

$$\text{ה. } (3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$$

$$\text{ו. } 3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7$$

4 פשט את הביטויים הבאים :

$$\text{א. } (x-1)(x+2) \quad \text{ב. } (x+3)(x-7)$$

$$\text{ג. } (3-x)(x+4) \quad \text{ד. } (3x+4)(5x+1)$$

$$\text{ה. } 3(4x+1)(2x-3) \quad \text{ו. } -2(3x-1)(5-2x)$$

5 פשט את ערכי הביטויים הבאים :

$$\text{א. } (x-1)(x+3)+2(3-x)$$

$$\text{ב. } (a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$$

$$\text{ג. } (2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6)$$

$$\text{ד. } -x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2)$$

תשובות סופיות:

$$\text{(1) א. } 6x^2 \quad \text{ב. } 28x^2 \quad \text{ג. } -24x^2 \quad \text{ד. } 32m^5 \quad \text{ה. } -6a^5 \quad \text{ו. } -2b^5$$

$$\text{ז. } 3ab \quad \text{ח. } 28a^2b^2 \quad \text{ט. } -2a^3b^2$$

$$\text{(2) א. } 6x-8 \quad \text{ב. } -6x^2+10x-2 \quad \text{ג. } 28x-8 \quad \text{ד. } -2+4x$$

$$\text{ה. } 3a^2-a \quad \text{ו. } b^3-3b^2+4b \quad \text{ז. } 10x^2+6x \quad \text{ח. } 5x^3+10x^2-15x$$

$$\text{ט. } 12t^3-3t^4+18t^2 \quad \text{י. } 10d^5-7.5d^2$$

$$\text{(3) א. } 6x-6 \quad \text{ב. } 13x-6 \quad \text{ג. } -6x+11 \quad \text{ד. } x+9 \quad \text{ה. } -3x^2+33x-28$$

$$\text{ו. } 10y^2+32y-27$$

$$\text{(4) א. } x^2+x-2 \quad \text{ב. } x^2-4x-21 \quad \text{ג. } -x^2-x+12$$

$$\text{ד. } 15x^2+23x+4 \quad \text{ה. } 24x^2-30x-9 \quad \text{ו. } 12x^2-34x+10$$

$$\text{(5) א. } x^2+3 \quad \text{ב. } 7 \quad \text{ג. } 18m^2-6m-39 \quad \text{ד. } -3x^5y^3+3x^4y^2$$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$	ב. $(x+2)^2$	ג. $(4x+5)^2$
ד. $(6x+2)^2$	ה. $(7x+y)^2$	ו. $(5x+2y)^2$
ז. $(x^2+7)^2$	ח. $(x^2+y^2)^2$	ט. $(x^3+2y^2x)^2$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$	ב. $(x-2)^2$	ג. $(5-x)^2$
ד. $(6x-1)^2$	ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$	ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$
ז. $(3m-2n)^2$	ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$	ט. $(x^2y^2-7)^2$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$	ב. $(3+x)(x-3)$
ג. $(3x-1)(3x+1)$	ד. $(5-7x)(7x+5)$
ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$	ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$
ז. $(x^2+y)(x^2-y)$	ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$	ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$
ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$	ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$
ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$	
ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$	

תשובות סופיות:

א. $x^2+10x+25$	ב. x^2+4x+4	ג. $16x^2+40x+25$	(1)
ד. $36x^2+24x+4$	ה. $49x^2+14xy+y^2$	ו. $25x^2+20xy+4y^2$	
ז. $x^4+14x+49$	ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$	ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$	
א. $x^2-12x+36$	ב. x^2-4x+4	ג. $25-10x+x^2$	(2)
ד. $36x^2-12x+1$	ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$	ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$	
ז. $9m^2-12mn+4n^2$	ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$	ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$	
א. x^2-25	ב. x^2-9	ג. $9x^2-1$	(3)
ה. $\frac{1}{4}x^2-36$	ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$	ז. x^4-y^2	
א. x^2+2	ב. $5x^2-24x+13$	ג. $-4x^2-x$	(4)
ד. $18x^2-6xy$	ה. $-6x^2-39x-16$	ו. $-10x^2+17x+321$	

פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:

○ הוצאת מספר משותף: $2x - 8 = 2(x - 4)$

○ הוצאת אות משותפת: $x^2 - 12x = x(x - 12)$

○ הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2 - 21x = 3x(x - 7)$

- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:

○ נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

○ נוסחה להפרש ריבועים: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

שאלות:

- (1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x - 12$ ב. $6y - 4$

ג. $20 - 8a$ ד. $4a^3 + 8b$

ה. $75m^2 + 25m + 15$ ו. $40a^2 - 8b^2 + 64c^2$

- (2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $y^2 + 5y$ ב. $3x - 11x^3$

ג. $6y^2 + 5y^3 + 4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7 - \frac{1}{4}a^5 + a^3$

3 פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

א. $2x^2 - 8x$	ב. $3t^2 + 12t$
ג. $5n^3 - 20n^2 + 50n$	ד. $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$
ה. $4x^2y^2 + 16x^2y - 20xy^2$	ו. $27mn - 3n^2m + 9n^3m$

4 פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $x^2 + 10x + 25$	ב. $x^2 + 12x + 36$
ג. $y^2 - 18y + 81$	ד. $y^2 - 22y + 121$
ה. $4x^2 + 4x + 1$	ו. $16y^2 - 8y + 1$
ז. $9x^2 - 24x + 16$	ח. $25x^2 + 70x + 49$

5 פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $r^2 - 25$	ב. $x^2 - 81$
ג. $25y^2 - 49$	ד. $121x^2 - 1$
ה. $x^2y^2 - 4$	ו. $9y^4 - 169x^4$

6 פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר :

א. $y - y^3$	ב. $x^3 - 10x^2 + 25x$
ג. $m^4 - 1$	ד. $196x^4 - 140x^3 + 25x^2$

תשובות סופיות:

- א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$ (1)
- ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$
- א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$ (2)
- ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$
- א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$ (3)
- ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$
- א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$ (4)
- ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$
- א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$ (5)
- ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$
- א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$ (6)
- ד. $x^2(14x-5)^2$

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: $ax^2 + bx + c$ כאשר a, b, c הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו- m_2 , שמקיימים: $m_1 \cdot m_2 = ac$ ו- $m_1 + m_2 = b$.
 לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2 + bx + c = ax^2 + m_1x + m_2x + c$.
 השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2 + m_1x} + \underbrace{m_2x + c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו- m_2 באופן

הבא: $m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום

כמכפלה: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)(x - m_2)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$ אז

נכתוב: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

(1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. $x^2 + 5x + 4$	ב. $x^2 - 8x + 15$	ג. $x^2 - 33x + 62$
ד. $2x^2 + 7x - 15$	ה. $3x^2 - 11x + 6$	ו. $6x^2 + 5x + 1$
ז. $2x^2 + x - 6$	ח. $x^2 - 18x + 81$	ט. $x^2 + 2x + 8$

(2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

א. $6x^2 + 5x + 1$	ב. $x^2 + 5x + 4$
ג. $4x^2 + 20x + 25$	ד. $3x^2 - x + 20$

תשובות סופיות:

1) א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$

ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$

ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.

2) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

שברים אלגברים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

$$\text{דוגמא לשברים אלגבריים: } \frac{x+1}{x+2}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{4}{x-x^3}$$

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את

$$\text{הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: } \frac{3x+5}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

$$\text{דוגמא: השבר } \frac{1}{x+4} \text{ לא מוגדר כאשר } x = -4 \text{ מכיוון שמתקבל: } \frac{1}{0}$$

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x \neq -4$ ומשמעו היא ש- x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט -4, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

$$\bullet \text{ צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: } \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: } \frac{3x-15}{x^2-10x+25} = \frac{3(x-5)}{(x-5)^2} = \frac{3 \cdot 1}{x-5} = \frac{3}{x-5}$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י פירוק טרינום: } \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

$\frac{5}{x-6}$.ב.	$\frac{x+4}{x+3}$.א.
$\frac{x^2+1}{x^2-4x}$.ד.	$\frac{x+7}{2x-8}$.ג.
$\frac{x^2}{x^2-4}$.ו.	$\frac{3}{x^2+2x+1}$.ה.
$\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$.ח.	$\frac{6}{y^4-y^2}$.ז.

(2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

$\frac{a-x}{a}$.ב.	$\frac{ax}{a}$.א.
$\frac{x+1}{y+1}$.ד.	$\frac{a-ax}{a}$.ג.
$\frac{6x}{6y}$.ו.	$\frac{x}{x+y}$.ה.
$\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$.ח.	$\frac{x^2y}{xy^2}$.ז.
$\frac{3x^2}{x^2+3}$.י.	$\frac{4x^2y}{xy}$.ט.

(3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

$\frac{m^2+4m}{4m+16}$.ב.	$\frac{3x+12}{x+4}$.א.
$\frac{x^2-5x}{15-3x}$.ד.	$\frac{2a-12}{a^2-6a}$.ג.
$\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$.ו.	$\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$.ה.
$\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$.ח.	$\frac{3y}{y^3-3y^2}$.ז.

4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

$\frac{8n - n^2}{n^2 - 16n + 64} \quad \text{ב.}$	$\frac{x^2 + 10x + 25}{2x + 10} \quad \text{א.}$
$\frac{4m^2 + 20m + 25}{4m^2 + 10m} \quad \text{ד.}$	$\frac{z^3 - 4z^2}{2z^2 - 16z + 32} \quad \text{ג.}$
$\frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2}{3ab + 6b^2} \quad \text{ו.}$	$\frac{18y^2 - 24y + 8}{2y - 3y^2} \quad \text{ה.}$

5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

$\frac{m^2 - 12m + 32}{m - 4} \quad \text{ב.}$	$\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10} \quad \text{א.}$
$\frac{3z^2 + 26z + 16}{3z + 2} \quad \text{ד.}$	$\frac{4y - 10}{2y^2 + y - 15} \quad \text{ג.}$
$\frac{9n^2 - 12n}{4 + 5n - 6n^2} \quad \text{ו.}$	$\frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 9x^2} \quad \text{ה.}$
$\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + x - 56} \quad \text{ח.}$	$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6} \quad \text{ז.}$
$\frac{m^3n - m^2n^2 - m^2 + mn}{2m^2n^3 + mn^2 - 3n} \quad \text{י.}$	$\frac{3a^2b - 10ab^2 + 3b^3}{-3a^3b + 11a^2b^2 - 6ab^3} \quad \text{ט.}$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x \neq -3 \quad \text{ב. } x \neq 6 \quad \text{ג. } x \neq 4 \quad \text{ד. } x \neq 0, x \neq 4$$

$$\text{ה. } x \neq -1 \quad \text{ו. } x \neq -2, x \neq 2 \quad \text{ז. } y \neq 0, y \neq -1, y \neq 1$$

$$\text{ח. } x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$$

$$(2) \quad \text{א. } x \quad \text{ב. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ג. } 1-x$$

$$\text{ד. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ה. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ו. } \frac{x}{y} \quad \text{ז. } \frac{x}{y}$$

$$\text{ח. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ט. } 4x \quad \text{י. לא ניתן לצמצם}$$

$$(3) \quad \text{א. } x \neq -4, 3 \quad \text{ב. } \frac{m}{4}, m \neq -4 \quad \text{ג. } \frac{2}{a}, a \neq 0, 6$$

$$\text{ד. } -\frac{x}{3}, x \neq 5 \quad \text{ה. } -3, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{ו. } \frac{2x^2}{3}, x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{y(y-3)}, y \neq 0, 3 \quad \text{ח. } \frac{3z^2 - 12z + 4}{z+5}, z \neq 0, -5$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{x+5}{2}, x \neq -5 \quad \text{ב. } \frac{n}{8-n}, n \neq 8 \quad \text{ג. } \frac{z^2}{2(z-4)}, z \neq 4$$

$$\text{ד. } \frac{2m+5}{2m}, m \neq 0, -\frac{5}{2} \quad \text{ה. } \frac{2(2-3y)}{y}, y \neq 0, \frac{2}{3} \quad \text{ו. } \frac{a(a+2b)}{3b}, b \neq 0, a \neq -2b$$

$$(5) \quad \text{א. } \frac{1}{x-5}, x \neq 5, -2 \quad \text{ב. } m-8, m \neq 4 \quad \text{ג. } \frac{2}{y+3}, x \neq -3, \frac{5}{2}$$

$$\text{ד. } z+8, z \neq -\frac{2}{3} \quad \text{ה. } \frac{x-4}{x^2}, x \neq 0, -9 \quad \text{ו. } \frac{-3n}{2n+1}, n \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$$

$$\text{ז. } \frac{x+2}{x+3}, x \neq -2, -3 \quad \text{ח. } \frac{x-7}{x+8}, x \neq 7, -8$$

$$\text{ט. } \frac{3a-b}{a(2b-3a)}, a \neq 0, b \neq 0, a \neq 3b, 2b \neq 3a \quad \text{י. } \frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}, mn \neq 1, -\frac{3}{2}, n \neq 0$$

כפל וחילוק של שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.
חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

$$\bullet \text{ דוגמא לכפל שברים: } \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3x+3} = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3(x+1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{3x}$$

$$\bullet \text{ דוגמא לחילוק שברים: } \frac{4x}{y} : \frac{12}{y^2+y} = \frac{4x}{y} \cdot \frac{y^2+y}{12} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_3} = \frac{x(y+1)}{3}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8} \quad \text{ב. } \frac{x}{3} \cdot \frac{9}{x^2}$$

$$\text{ג. } 7y \cdot \frac{5}{y^2} \quad \text{ד. } 6x^2 \cdot \frac{3}{40x}$$

$$\text{ה. } (x^2+3x) \cdot \frac{2}{3x+9} \quad \text{ו. } (a^2-25) \cdot \frac{20}{5a+25}$$

$$\text{ז. } \frac{w^2-9}{w} \cdot \frac{w^2}{2w+6} \quad \text{ח. } \frac{y+4}{y^2+16} \cdot \frac{y^2-16}{2y+8}$$

$$\text{ט. } \frac{z^2+30z+225}{6z+90} \cdot \frac{12}{2z-10} \quad \text{י. } \frac{5n^2}{n^2-121} \cdot \frac{2n^2+44n+242}{n+2} \cdot \frac{n^2+4n+4}{n}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8} : \frac{x}{6}$	ב. $\frac{y}{25} : \frac{5}{y}$
ג. $a^2 : \frac{1}{6a}$	ד. $\frac{5}{6a} : a^2$
ה. $(d^2 - 3d) : \frac{5d - 15}{5d}$	ו. $\frac{t}{t+4} : \frac{3t}{t+4}$
ז. $\frac{y^2 + 8y + 16}{8y^2} : \frac{y^2 - 16}{7y^2}$	ח. $\frac{a^2 - 64}{a^2 - 36} : \frac{a+8}{a+6}$

תשובות סופיות:

א. $\frac{x^2}{24}$	ב. $\frac{3}{x}$	ג. $\frac{35}{y}$	ד. $\frac{9x}{20}$	ה. $\frac{2x}{3}$	(1)
ו. $4(a-5)$	ז. $\frac{w(w-3)}{2}$	ח. $\frac{y^2 - 16}{2y^2 + 32}$	ט. $\frac{z+15}{z-5}$	י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$	
א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{y^2}{125}$	ג. $6a^3$	ד. $\frac{5}{6a^3}$	ה. d^2	ו. $\frac{1}{3}$
ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$	ח. $\frac{a-8}{a-6}$				

חיבור וחיסור של שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים. נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים. כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף. לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת. דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{1+(x+1)}{x} = \frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2 + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = \frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-3x} = \frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6} + \frac{a-5}{6}$

ג. $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3+4x}{x+1}$

ב. $\frac{5}{x} + \frac{4x+3}{x}$

ד. $\frac{7z}{2z-3} - \frac{4z}{2z-3} - \frac{z+3}{2z-3}$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab} - \frac{5}{bc}$

ג. $\frac{c}{ab} - \frac{ad}{bc} + \frac{2b}{cd}$

ב. $\frac{1}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xz}$

ד. $-\frac{5}{x} + \frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)} - \frac{2}{z(z-2)}$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $1 - \frac{2}{x}$

ג. $2 + \frac{2}{x+1}$

ב. $1 + \frac{3}{y^2}$

ד. $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

ה. $\frac{a+1}{a^2} - \frac{3-a}{4a} - 3$

ו. $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x}$

ג. $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$

ב. $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y}$

ד. $\frac{1}{z+3} + \frac{2}{3z} - \frac{3}{z}$

5 פשט את הביטויים הבאים:

$$\frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{(x+4)^2} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{24}{a^2-9} + \frac{4}{a+3} \quad \text{א.}$$

$$\frac{3z}{z^2+4z+3} - \frac{z+0.5}{z^2+2z+1} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{y}{(y-2)^2} + \frac{3y}{4-y^2} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{2a+3}{2a^2+15a+7} + \frac{a+3}{a^2+14a+49} \quad \text{ו.}$$

$$\frac{x-1}{x^2+3x-40} + \frac{2}{-x^2+8x-15} \quad \text{ה.}$$

$$\frac{1}{a-b} + \frac{2}{a+2b} - \frac{3b}{a^2+ab-2b^2} \quad \text{ח.}$$

$$\frac{x}{x-3} + \frac{9-x}{x^2-8x+15} \quad \text{ז.}$$

6 פשט את הביטויים הבאים:

$$\left(\frac{2}{x}+1\right) \cdot \frac{x^2}{7x+14} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{8} + \frac{9}{x+1} \cdot \frac{x+1}{18} \quad \text{א.}$$

$$\left(3x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) : \frac{6x^3+2x-4}{x^2} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{7}{y^2} : \frac{6}{y^3} - \frac{y-4}{63} \cdot \frac{3y-4}{y^2-8y+16} \quad \text{ג.}$$

$$\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3} - \frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right) : \frac{18x+3}{6x^2-13x+6} \quad \text{ה.}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{2a-5}{6} & \text{ב.} & \frac{4x+8}{x} & \text{ג.} & \frac{5x+1}{x+1} & \text{ד.} & 1 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{c-5a}{abc} & \text{ב.} & \frac{z+5x+4y}{xyz} & \text{ג.} & \frac{c^2d - a^2d^2 + 2ab^2}{abcd} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ד.} & \frac{-5y^2 + x + 1}{xy^2} & \text{ה.} & \frac{3y+4}{(y+1)^2} & \text{ו.} & \frac{1}{(z-2)(z-3)} \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{x-2}{x} & \text{ב.} & \frac{y^2+3}{y^2} & \text{ג.} & \frac{2x+4}{x+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ד.} & \frac{9x-2}{3x} & \text{ה.} & \frac{-11a^2 + a + 4}{4a^2} & \text{ו.} & \frac{4x^2y + 12z^2 + 9y^2 - 3y^3 - 126xy^2z}{36xy^2z} \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{4x+1}{x(x+1)} & \text{ב.} & \frac{y-6}{y(y+2)} & \text{ג.} & \frac{a^2 + 4a + 6}{a(a+2)} \end{array}$$

$$\text{ד.} \quad \frac{4z+21}{3z(z+3)}$$

$$(5) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{4}{a-3} & \text{ב.} & \frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2} & \text{ג.} & \frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ד.} & \frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)} & \text{ה.} & \frac{x^2 - 6x - 13}{(x+8)(x-5)(x-3)} & \text{ו.} & \frac{4(a^2 + 6a + 6)}{(a+7)^2(2a+1)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ז.} & \frac{x-3}{x-5} \\ \text{ח.} & \frac{3}{a+2b} \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{x+1}{2} & \text{ב.} & \frac{x}{7} & \text{ג.} & \frac{147y^2 - 594y + 8}{126(y-4)} & \text{ד.} & \frac{1}{2} & \text{ה.} & \frac{1}{3(10x+1)} \end{array}$$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

$\frac{y+1}{2y+2} \quad (2)$	$\frac{4x}{12} \quad (1)$
$\frac{5}{t^2-81}$	$\frac{x}{5}$
$\frac{9t^2}{6t+54} \quad (4)$	$\frac{t}{30t^2} \quad (3)$
$\frac{4x}{x+1} \quad (6)$	$\frac{3y^3-y^2}{25} \quad (5)$
$\frac{x^2+2x+1}{t^2-t-20}$	$\frac{y^2}{3-y}$
$\frac{16t+8}{25-t^2} \quad (8)$	$\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c} \quad (7)$
$\frac{2t+1}{x^2+2x+1}$	$\frac{15c+15}{1-4+\frac{x}{x+1}} \quad (9)$
	$\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}$

תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{3} \quad (1)$$

$$2.5 \quad (2)$$

$$\frac{1}{6t^3} \quad (3)$$

$$\frac{t-9}{54t^2} \quad (4)$$

$$\frac{(3y-1)(3-y)}{25} \quad (5)$$

$$\frac{x(x+1)}{2} \quad (6)$$

$$\frac{c}{c-4} \quad (7)$$

$$\frac{t+4}{-8(t+5)} \quad (8)$$

$$\frac{5}{x} \quad (9)$$

מתמטיקה השלמה

פרק 2 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

47	1. משוואות ממעלה ראשונה
49	2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה
52	3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון
53	4. משוואה ממעלה שנייה
55	5. משוואות דו-ריבועיות
57	6. משוואות עם פרמטרים
59	7. משוואות עם שורשים
61	8. משוואות עם ערך מוחלט
62	9. מערכת משוואות ממעלה שנייה
64	10. משוואות מתקדמות מסכמות
67	11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax = b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x = \frac{b}{a}$ כאשר $a \neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

ב. $7 - 2x = 7$

א. $6x + 2 = 8$

ד. $2x + 6 = 8 + x$

ג. $2x + x = 24$

ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$

ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$

ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$

ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$

א. $3(x - 1) - 4 = 2$

ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$

ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$

ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$

ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$

3 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4 & \text{ב. } \frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1 \\
 \text{ג. } \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15} & \text{ד. } \frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1 \\
 \text{ה. } \frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2 & \text{ו. } 5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1
 \end{array}$$

4 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0 & \text{ב. } \frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{x} = \frac{1}{x+2} & \text{ד. } \frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2} \\
 \text{ה. } \frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x} & \text{ו. } \frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}
 \end{array}$$

5 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} & \text{ב. } \frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12
 \end{array}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$
- ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$
- (2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$
- (3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$
- (4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$
- (5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6, x \neq 3$

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1, b_1, c_1 ו- a_2, b_2, c_2 הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x + 3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

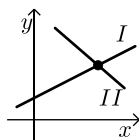
פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

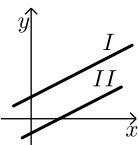
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



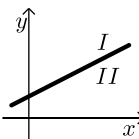
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה :
 נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
 נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
 - פתרון ע"י השוואת מקדמים :
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
 2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
 3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{lll} \left\{ \begin{array}{l} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{array} \right. \text{ג.} & \left\{ \begin{array}{l} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{array} \right. \text{ב.} & \left\{ \begin{array}{l} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{array} \right. \text{א.} \\ \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{array} \right. \text{ו.} & \left\{ \begin{array}{l} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{array} \right. \text{ה.} & \left\{ \begin{array}{l} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{array} \right. \text{ד.} \end{array}$$

2) פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{array} \right. \text{ב.} & \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{array} \right. \text{א.} \\ \left\{ \begin{array}{l} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{array} \right. \text{ד.} & \left\{ \begin{array}{l} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{array} \right. \text{ג.} \end{array}$$

3) פתור את המשוואות הבאות :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{array} \right. \text{ב.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{array} \right. \text{א.}$$

4 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} & \text{ב.} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y & \text{א.} \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) & \text{ג.} \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

5 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 & \text{ג.} \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 & \text{ב.} \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 & \text{א.} \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$$

6 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} xy = 20 & \text{ב.} \\ y(3x-4) = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 & \text{א.} \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 & \text{ג.} \\ 6x + xy = -20 \end{cases}$$

תשובות סופיות :

1 א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3)

2 א. $(4, \frac{1}{3})$ ב. $(-\frac{4}{5}, 9)$ ג. (4,1.6) ד. (-2,7)

3 א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4 א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2)

5 א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1)

6 א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4)

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax = b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 0$ מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x = \frac{b}{a}$.

כאשר $a = 0$ מתקבלת המשוואה $0 \cdot x = b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b = 0$ את המשוואה היא $0x = 0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b \neq 0$ את המשוואה היא $0x = b \neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$x + 4 = 6 + x \quad (1) \qquad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2 \quad (2)$$

$$6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (3) \qquad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3 \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

- א. איזה מספר יש להציב ב- \square על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
- ב. איזה מספר יש להציב ב- \square על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
- ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- \square על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
- ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- \square על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5) א. -8 ב. -1 ג. $-7x - 1$
 ד. $-7x + k$ כאשר k הוא מספר כלשהו השונה מ-1.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), נקראת משוואה ריבועית. פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
 אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
 דוגמא: $x^2 + 5x - 4 = 0$.
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
 אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
 דוגמא: $x^2 + 4x + 4 = 0$.
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
 אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
 דוגמא: $x^2 + x + 4 = 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x^2 + 10x - 16 = 0$

ד. $2x^2 - 6x + 5 = 0$

א. $x^2 + 3x - 10 = 0$

ג. $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

ד. $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

א. $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ג. $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & x^2 - 36 = 0 \\ \text{ב.} & 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג.} & 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 \\ \text{ד.} & (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & -7x^2 - 14x = 0 \\ \text{ב.} & 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג.} & 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 \\ \text{ד.} & (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} \\ \text{ב.} & \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג.} & \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 \\ \text{ד.} & \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} \text{(1)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -5 \quad \text{ב. } x_1 = 2, x_2 = 8 \\ & \text{ג. } x = \frac{2}{5} \quad \text{ד. אין פתרון.} \\ \text{(2)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1 \quad \text{ב. } x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4} \\ & \text{ג. } x_1 = 1, x_2 = -10 \quad \text{ד. } x_1 = 0.6, x_2 = -2 \\ \text{(3)} & \text{א. } x = \pm 6 \quad \text{ב. } x = \pm \frac{3}{4} \\ & \text{ג. } x = \pm 3 \quad \text{ד. } x = \pm 1 \\ \text{(4)} & \text{א. } x_1 = 0, x_2 = -2 \quad \text{ב. } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5} \\ & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6} \quad \text{ד. } x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8} \\ \text{(5)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1.2 \quad \text{ב. } x = 5, x \neq -3 \\ & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = -5 \quad \text{ד. } x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7} \end{array}$$

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ כאשר הנעלם הוא x .
 פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$ ומציאתו.
 לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4 כגון:
 $t = x^2 - 1$: באמצעות פרמטר: $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$
 ובכך לפתור משוואה: $t^2 + 3t - 2 = 0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x .
 דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|--|---|
| $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (2) | $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$ (1) |
| $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$ (4) | $13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ (3) |
| $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$ (6) | $x^6 + x^3 = 56$ (5) |
| $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$ (8) | $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$ (7) |
| $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$ (10) | $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$ (9) |
| $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$ (12) | $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$ (11) |
| $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$ (14) | $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$ (13) |
| $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$ (16) | $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$ (15) |
| $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$ (18) | $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$ (17) |
| $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$ (20) | $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$ (19) |

תשובות סופיות:

$$x = \pm 1 \quad (1)$$

$$x = \pm 1, \pm \sqrt{2} \quad (2)$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$x = \pm 2, \pm 5 \quad (4)$$

$$x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2 \quad (5)$$

$$x = -2, \sqrt[3]{4} \quad (6)$$

$$x_1 = 4, x_2 = 49 \quad (7)$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1 \quad (8)$$

$$x = 5, -1 \quad (9)$$

$$x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2} \quad (10)$$

$$x = -1 \quad (11)$$

$$x_{1,2} = 1, 3 \quad (12)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06 \quad (13)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2 \quad (14)$$

(15) אין פתרונות.

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}} \quad (16)$$

$$x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3 \quad (17)$$

$$x = -1, 2 \quad (18)$$

$$x = 3, -1 \quad (19)$$

$$x = \pm 1, 4, 6 \quad (20)$$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטרים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר m .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m \neq 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b + 1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$\text{(1) א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$\text{(2) א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left(\frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left(m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$\text{(3) א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x} = a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$.

הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x} = a$ שבה $a < 0$ אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|--|---|
| $\sqrt{x+2} = x$ (2) | $\sqrt{2x+5} = 7$ (1) |
| $\sqrt{2x+7} + 4 = x$ (4) | $\sqrt{3x+1} + x = 13$ (3) |
| $\sqrt{10x+6} + 9 = x$ (6) | $\sqrt{x-1} + 3 = x$ (5) |
| $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$ (8) | $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$ (7) |
| $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$ (10) | $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$ (9) |
| $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$ (12) | $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$ (11) |
| $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$ (14) | $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ (13) |
| $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$ (16) | $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$ (15) |
| $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ (18) | $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$ (17) |
| | $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$ (19) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2 | $x = 22$ (1 |
| $x = 9$ (4 | $x = 8$ (3 |
| $x = 25$ (6 | $x = 5$ (5 |
| $x = 3.75$ (8 | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10 | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12 | $x = 6$ (11 |
| $x = 5$ (14 | $x = 3$ (13 |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15 |
| $x = 1$ (18 | $x = 6$ (17 |
| | $x = 2$ (19 |

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x| = a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$|3x+14|=7 \quad (1) \qquad |3x-24|=x \quad (2)$$

$$|12-x|=3x \quad (3) \qquad 2x-|8-x|=10 \quad (4)$$

$$|4x-5|=|2x+13| \quad (5) \qquad |14-3x|=2|x+5| \quad (6)$$

$$|x|+7=|2x| \quad (7) \qquad |x+2|+6=|2x-4| \quad (8)$$

$$|x+2|+|2x-6|=|4x+8| \quad (9) \qquad |10-3x|-|x+4|=|2x-6| \quad (10)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{llll} x = -\frac{7}{3}, -7 & (1) & x = 6, 12 & (2) \\ x = 9, -1\frac{1}{3} & (5) & x = 24, \frac{4}{5} & (6) \\ x = 0, -12 & (9) & x = 0 & (10) \\ x = 6 & (4) & x = 3 & (3) \\ x = 12, -1\frac{1}{3} & (8) & x = \pm 7 & (7) \end{array}$$

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

תשובות סופיות:

- (2,4),(4,2) **(1)**
- (±2,±1) **(3)**
- $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$ **(5)**
- (7,4) **(7)**
- $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$ **(9)**
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ **(11)**
- (±4,-2) **(2)**
- (5,-2),(-5,2) **(4)**
- $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2,1), (-2,-1)$ **(6)**
- (5,-3) **(8)**
- $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$ **(10)**
- (4,6) , (-6,-4) , (3,8) , (-8,-3) **(12)**
- (-1.65,6.35) , (-6.35,1.65) , (7,4) , (-4,-7) **(13)**
- (5,45) , (-5,-45) , (45,5) , (-45,-5) **(14)**

משוואות מסכמות מתקדמות:

סיכום כללי:

תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.
- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.
- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.
- משוואה עם פרמטרים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטרים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטרים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 x^2 + 5x - \sqrt{x^2 + 5x} - 30 = 0 & \text{(2)} & x + \sqrt{x+6} - 6 = 0 & \text{(1)} \\
 2x^2 + 6x - \sqrt{x^2 + 3x + 5} = 5 & \text{(4)} & 4x^2 + 16x - 4\sqrt{x^2 + 4x} - 3 = 0 & \text{(3)} \\
 x^2 - \sqrt{6x^2 - 15} = 1 & \text{(6)} & x^2 - \sqrt{16x^2 + 48} + 7 = 0 & \text{(5)} \\
 \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5} = \frac{7}{\sqrt{x-1}} & \text{(8)} & \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x & \text{(7)} \\
 \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} & \text{(9)} & & \\
 \sqrt{x + \sqrt{14x - 49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x - 49}} = \sqrt{14} & \text{(10)} & & \\
 \sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}} - \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 2 & \text{(11)} & & \\
 \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x} & \text{(12)} & &
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות עבור $a > 0$:

$$x^2 + ax - 2a\sqrt{3x^2 + 3ax - 9a^2} = 0 \quad \text{(14)} \quad x^2 + ax - 2a\sqrt{x^2 + ax - a^2} = 0 \quad \text{(13)}$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 |4 - |5 - x|| = |x + 3| & \text{(16)} & |3 - |2 - x| + |x|| = 1 & \text{(15)} \\
 \sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x+1| & \text{(18)} & \left| \frac{x + |3 - x|}{x + 2} \right| = 18 & \text{(17)} \\
 & & \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0 & \text{(19)}
 \end{array}$$

$$\frac{|x+2|}{|x|+2} = |2-x|+2 : \text{הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה:} \quad \text{(20)}$$

תשובות סופיות:

(1) $x = 3$

(2) $x_1 = 4, x_2 = -9$

(3) $x_1 = 0.5, x_2 = -4.5$

(4) $x_1 = 1, x_2 = -4$

(5) $x_{1,2} = \pm 1$

(6) $x_{1,2} = \pm 2$

(7) $x = 1$

(8) $x = 3$

(9) $x = 2$

(10) $3.5 \leq x \leq 7$

(11) $x = 4$

(12) $x = 1, x = \frac{9}{16}$

(13) $x_1 = -2a, x_2 = a$

(14) $x_1 = -2a, x_2 = 3a$

(15) $x \leq 0$

(16) $x = -1$

(17) $x = -\frac{39}{18}, -\frac{33}{18}$

(18) $x \leq \frac{5}{4}, x = -\frac{1}{4}$

(19) $x = -\sqrt{5}$

(20) שאלת הוכחה.

ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

שאלות:

פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

$$(2y+5)^3 \quad (2)$$

$$(x-3)^3 \quad (1)$$

$$8y^3 + 343 \quad (4)$$

$$8x^3 - 1 \quad (3)$$

$$x^3y^6z^9 - 1 \quad (6)$$

$$a^6 - 27 \quad (5)$$

$$64mn^4 - 8m^4n^7 \quad (8)$$

$$11 + 88x^{12} \quad (7)$$

$$\frac{x^3 + 64}{x^2 + 4x} \quad (10)$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \quad (9)$$

משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

$$125x^3 = 1 - 15x + 75x^2 \quad (12)$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \quad (11)$$

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \quad (14)$$

$$x^3 + x - 30 = 0 \quad (13)$$

משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (16)$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad (15)$$

מערכת משוואות:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad (17) \text{ פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad (18) \text{ פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

$$8y^3 + 60y^2 + 150y + 125 \quad (10)$$

$$(2y + 7)(4y^2 - 17y + 49) \quad (11)$$

$$(xy^2z^3 - 1)(x^2y^4z^6 + xy^2z^3 + 1) \quad (12)$$

$$8mn^4(2 - mn)(4 + 2mn + m^2n^2) \quad (13)$$

$$\frac{x^2 - 4x + 16}{x} \quad (14)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$x_{1,2,3} = -2, -1, 3 \quad (16)$$

$$x_{1,2,3} = -2.5, -1, 1 \quad (17)$$

$$(-5, -6), (6, 5) \quad (18)$$

$$x^3 - 9x + 27x - 27 \quad (1)$$

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \quad (2)$$

$$(a^2 - 3)(a^4 + 3a^2 + 9) \quad (3)$$

$$8(1 + 2x^4)(1 - 2x^4 + 4x^8) \quad (4)$$

$$\frac{1}{x + 2} \quad (5)$$

$$x = 4 \quad (6)$$

$$x = 3 \quad (7)$$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{2}, 1, 2 \quad (8)$$

$$(3, 6), (6, 3) \quad (9)$$

מתמטיקה השלמה

פרק 3 - מבוא לפונקציות

תוכן העניינים

1. מהי פונקציה (ללא ספר)
2. מערכת הצירים (ללא ספר)
3. אורכי קטעים ושטחים יסודיים (ללא ספר)
4. השתנות של פונקציה (ללא ספר)
5. קצב השתנות של פונקציה (ללא ספר)

מתמטיקה השלמה

פרק 4 - הפונקציה הקווית

תוכן העניינים

1. ייצוג גרפי של פונקצית הקו הישר (ללא ספר)
2. שיפוע ישר (ללא ספר)
3. הקו הישר הכללי (ללא ספר)
4. שיפוע דרך שתי נקודות (ללא ספר)
5. משוואת ישר עם שיפוע ונקודה (ללא ספר)
6. משוואת ישר המקביל לישר נתון (ללא ספר)
7. משוואת ישר דרך שתי נקודות (ללא ספר)
8. ישרים המקבילים לצירים (ללא ספר)
9. חיתוך של ישר עם הצירים (ללא ספר)
10. חיוביות ושליליות של קו ישר (ללא ספר)
11. חישובי שטחים עם הפונקציה הקווית (ללא ספר)

מתמטיקה השלמה

פרק 5 - הפונקציה הריבועית

תוכן העניינים

1. הפונקציה הריבועית היסודית $y=x^2$ (ללא ספר)
2. משפחת הפרבולות מהצורה $y=x^2+c$ (ללא ספר)
3. משפחת הפרבולות מהצורה $y=(x-p)^2$ (ללא ספר)
4. משפחת הפרבולות מהצורה $y=(x-p)^2+k$ (ללא ספר)
5. משפחת הפרבולות עם מקדם a כללי (ללא ספר)
6. משפחת הפרבולות מהצורה $y=a(x-p)^2+k$ (ללא ספר)
7. הצגה סטנדרטית של הפונקציה הריבועית (ללא ספר)
8. סרטוט של גרף הפונקציה הריבועית הכללית (ללא ספר)
9. מציאת נקודות האפס של פונקציה ריבועית עם a כללי (ללא ספר)
10. ייצוגים שונים של פונקציה ריבועית (ללא ספר)
11. חיתוך בין ישר ופרבולה (ללא ספר)
12. חיתוך בין שתי פרבולות (ללא ספר)
13. שאלות מסכמות (ללא ספר)

מתמטיקה השלמה

פרק 6 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

69	1. אי שוויונים ממעלה ראשונה
71	2. אי שוויונים ממעלה שנייה
72	3. אי שוויונים ממעלה שלישית
73	4. אי שוויונים עם מנה
75	5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו
76	6. שאלות מסכמות
78	7. אי שוויונים עם שורשים
80	8. מציאת תחום הגדרה
82	9. אי שוויונים עם ערך מוחלט

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$6x > 2(3x-1) \quad (2) \qquad 45x - 26 > 109 \quad (1)$$

$$(x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + 20 \quad (4) \qquad 2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6) \quad (3)$$

$$4(6x-8) < 8(3x-4) \quad (6) \qquad \frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3} \quad (5)$$

$$\frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7 \quad (8) \qquad \frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x > 3 \quad (1)$$

$$x \text{ כל} \quad (2)$$

$$x \text{ אף} \quad (3)$$

$$x > -2 \quad (4)$$

$$x < 5 \quad (5)$$

$$x \text{ אף} \quad (6)$$

$$x \geq 12 \quad (7)$$

$$x > -13 \quad (8)$$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|-------------------------------|--|
| $x^2 - 12x > -32$ (2) | $x^2 < 144$ (1) |
| $(x+2)(x+4) < 35$ (4) | $(x+2)(x+5) < 0$ (3) |
| $(x-3)(x-7) \geq 8x - 56$ (6) | $-x^2 + 13x + 30 < 0$ (5) |
| $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$ (8) | $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$ (7) |
| $x^2 - 10x + 25 > 0$ (10) | $-3x^2 + 12x > 0$ (9) |
| $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$ (12) | $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$ (11) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|----------------------|
| $x < 4, x > 8$ (2) | $-12 < x < 12$ (1) |
| $-9 < x < 3$ (4) | $-5 < x < -2$ (3) |
| $x \leq 7, x \geq 11$ (6) | $x < -2, x > 15$ (5) |
| $-4 \leq x \leq 0$ (8) | $-4 < x < 8$ (7) |
| $x > 5, x < 5$ (10) | $0 < x < 4$ (9) |
| x כל (12) | $x < 3, x > 5$ (11) |

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 > 0$, $x^4 + 2x^2 + 1 < 0$ וכיו'. בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם. לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| $x(x^2 + x + 1) > 0$ (2) | $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ (1) |
| $x^3 - 25x \geq 0$ (4) | $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ (3) |
| $(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0$ (6) | $(x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0$ (5) |
| $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ (8) | $(x^2 - x - 6)(x - 1) < 0$ (7) |
| $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ (10) | $(x^2 + 6)(x+3) > 0$ (9) |

תשובות סופיות:

- | | |
|----------------------------------|---|
| $x > 0$ (2) | $1 < x < 2, x > 3$ (1) |
| $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ (4) | $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ (3) |
| $x \leq 1\frac{2}{3}$ (6) | $x > 2$ (5) |
| $x \leq 0, x = 3$ (8) | $x < -2, 1 < x < 3$ (7) |
| $x < 1, 2 < x < 4$ (10) | $x > -3$ (9) |

אי-שוויונים עם מנה:

סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ או $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$

ו- $g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4} < 0$ בו: $f(x) = 2x+4$ ו- $g(x) = x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (2)	$\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (1)
$\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (4)	$\frac{1}{x^2-16} > 0$ (3)
$\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (6)	$\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (5)
$\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (8)	$\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (7)
$\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (10)	$\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (9)

תשובות סופיות:

$$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 3, x > 3 \quad (4)$$

$$x > 1 \quad (6)$$

$$2 < x < 3 \quad (8)$$

$$x < 2, x > 6 \quad (10)$$

$$-3 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$x < -4, x > 4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (5)$$

$$x > -2 \quad (7)$$

$$1 \leq x \leq 6 \quad (9)$$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת יוגם!). למשל במקום לכתוב: $a < b$ וגם $b < c$, ניתן לכתוב: $a < b < c$. מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (2)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (1)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (4)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (3)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (6)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (5)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (8)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x > -3\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 4 \quad (1)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$x > 0 \quad (3)$$

$$x \geq 10 \quad (6)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (5)$$

$$\emptyset \quad (8)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (7)$$

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (1)$$

$$\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \leq 0 \quad (3) \quad x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (5) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (4)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (7) \quad x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (6)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (9) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (11) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (13) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (12)$$

$$6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (15) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (14)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (17) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

(18) לאלו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$?

תשובות סופיות:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| $x \leq -4$ (2) | $-2 < x \leq -\frac{3}{4}$ (1) |
| $x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5$ (4) | $-4 \leq x < 2, 3 \leq x$ (3) |
| $x < -3, 0 < x < 2.5$ (6) | $-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12$ (5) |
| $2.5 \leq x < 8, x > 8$ (8) | $x < -1, 2 < x < 6, x > 6$ (7) |
| $x < -3, 0 < x < 1, x > 4$ (10) | $x > 3$ (9) |
| $x > 7$ (12) | $-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3$ (11) |
| $x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4$ (14) | $x < -2, 2 < x < 4$ (13) |
| $x \neq 1$ (16) | $x \neq 7$ (15) |
| $-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3$ (18) | $x \geq 7$ (17) |

אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a \geq 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	$0 \leq f(x) < a^2$
$a < 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)} > a$	כל x בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2x-5} \geq 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{x+3} < 7 \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2+x-6} < x-3 \quad (4)$$

$$\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x \quad (3)$$

$$\sqrt{x^2+5x+6} - \sqrt{x^2-x+1} < 1 \quad (6)$$

$$\sqrt{x^2+3x+2} - 1 < \sqrt{x^2-x+1} \quad (5)$$

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2 \quad (8)$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2} \quad (7)$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x} \quad (10)$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 5\sqrt{\frac{x}{x+9}} \geq 4 \quad (12)$$

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \quad (11)$$

תשובות סופיות:

(1) $-3 \leq x < 46$

(2) $x \geq 3$

(3) $x < -10, x > 1$

(4) \emptyset

(5) $x \leq -2, -1 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$

(6) $x \leq -3, -2 \leq x < \frac{-13 + \sqrt{73}}{16}$

(7) $\frac{12}{25} < x \leq \frac{1}{2}$

(8) $x < 2\sqrt{5} - 4$

(9) $1 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

(10) $שזה: -2.618 < x \leq 1 - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x \leq 1$

(11) $2.5 \leq x < 3$

(12) $x < -9, x > 0$

תחום הגדרה:

שאלות:

1 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{3x-4}$	ב. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$
ג. $f(x) = \sqrt{12x - x^2 - x^3}$	ד. $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$
ה. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$	ו. $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

2 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3}$	ב. $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$
ג. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$	ד. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

3 תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1 \leq x \leq 4$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

4 תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x \leq -2$, $x > 2$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

5 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, (a פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a .

תשובות סופיות:

- (1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1, x \geq 6$ ג. $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד. $-5 \leq x < -2, x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2, x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד. $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3) $a = 5$
- (4) $a = 2$
- (5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

$ x > a$	$ x < a$	מקרה
$x < -a \cap x > a$	$-a < x < a$	פתרון

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

(1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x+2| < 3$ ב. $|2x+1| > 7$
 ג. $|6-2x| < x$ ד. $|2x+1|-3x > 4$

(2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1 < |4-3x| < 7$ ב. $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x^2 + 6x - 4| < 12$ ב. $|x^2 + x - 10| > 3x - 2$
 ג. $|x^2 - 3x| < 4$ ד. $|6x^2 - 7x - 4| > 1$
 ה. $x^2 - 6|x| + 5 \leq 0$ ו. $x^2 - 6|x+1| - 1 > 0$

(4) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x-3|+|2x+2|>7$

ב. $|x+8|<11-|1-3x|$

ג. $|3-2x|-11>4-|6+x|$

ד. $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

ה. $|5+4x|-|3-x|+\left|4-\frac{1}{2}x\right|\leq 22$

ו. $|x+3|+|x^2-5x+4|<19$

(5) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\geq 3$

ב. $1\leq\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\leq 2$

ג. $\frac{|x-6|+8x}{x-12}\leq 12$

ד. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|>5$

(6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

א. $\sqrt{x^2-|x-12|}<x$

ב. $2-\sqrt{1-x}\leq|x+2|-3$

ג. $\sqrt{|2x+1|-x-1}\leq 4-|3x|$

ד. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$

תשובות סופיות:

- (1) א. $-5 < x < 1$
 ג. $2 < x < 6$
- (2) א. $-1 < x < 1$ או $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$
 ב. $-5\frac{1}{2} < x < -3$
- (3) א. $-2 < x < 2$ או $-8 < x < -4$
 ג. $-1 < x < 4$
- ה. $-5 \leq x \leq -1$ או $1 \leq x \leq 5$
- (4) א. $x < -2$ או $2 < x$
 ג. $x < -6$ או $4 < x$
- ה. $-7\frac{3}{7} \leq x \leq 4$
- (5) א. $\frac{7}{6} \leq x < 2$, $x > 2$
 ג. $x < 12$, $x \geq 46$
- (6) א. $x = -1$, $x \geq 3$, $x \neq 12$
 ג. $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$
- ב. $x < -4$ או $3 < x$
 ד. $x < -1$
- ב. $x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$, $x > \frac{5}{3}$
 ד. $x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$, $x > \frac{5}{3}$
- ג. $x < 2$ או $4 < x$
- ג. $x < -5$, $x > 7$
- ב. $-1 < x < 1$
- ד. $x < -1$ או $4 < x$
- ג. $-2 < x < 6$
- ב. $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$, $x \geq 6$
- ד. $\frac{1}{2} < x < 1$, $1 < x < 2$, $2 < x \leq 4$
- ב. $x \leq \frac{-15 + \sqrt{33}}{2}$
- ד. $-1 < x < \sqrt[3]{4}$

מתמטיקה השלמה

פרק 7 - תכנון לינארי

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

מתמטיקה השלמה

פרק 8 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

85	1. חוקי החזקות
90	2. חוקי השורשים
94	3. כתיבה מדעית של מספרים

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 a^n \cdot a^m = a^{m+n} & .3 & a^1 = a & .2 & a^0 = 1 & .1 \\
 a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m & .6 & (a^n)^m = a^{n \cdot m} & .5 & \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & .4 \\
 \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m & .9 & a^{-m} = \frac{1}{a^m} & .8 & \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & .7
 \end{array}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 a^2 a^6 & .א & t^3 t^5 t^7 & .ב & b^2 b^5 b^{12} b^3 & .ג \\
 \frac{k^8}{k^3} & .ד & \frac{n^{14}}{n^9} & .ה & \frac{c^6}{c^2} & .ו \\
 \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & .ז & \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & .ח & \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} & .ט \\
 3^2 3^3 3^4 & .י & \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & .יא & \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8} & .יב
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & .א & \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & .ב & \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4} & .ג
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243 \cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

$\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$.ב.	$\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$.א.	
$2^3 + 2^5$.ד.	$\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$.ג.	

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

$(x^3 x^{10})^2$.ג.	$(c^3)^{10}$.ב.	$(a^2)^4$.א.
$\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$.ו.	$\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$.ה.	$\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$.ד.
$\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$.ט.	$\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$.ח.	$\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$.ז.
$\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$.יב.	$\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$.יא.	$\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$.י.

(6) לפניך הביטויים הבאים: $\left((3^2)^3 \right)^4$ ו- $\left((3^6)^n \right)^2$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

$\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$.ג.	$\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$.ב.	$\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$.א.
---	---	-------------------------------

(8) פשט את הביטויים הבאים:

$125 \cdot 25 \cdot 5^5$.ג.	$64^2 2^3 8^2$.ב.	$3^2 9 \cdot 81^2$.א.
$\frac{\left((3^4)^4 \right)^5}{81^3 27^4 3^5}$.ו.	$\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$.ה.	$\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$.ד.

9 פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \\ \text{ב.} & \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \\ \text{ג.} & \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} \end{array}$$

10 פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $(ab)^n = a^n b^n$ ו- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & (a^2b)^3 & \text{ב.} & (m^4n^3)^5 & \text{ג.} & (x^{12}y^3)^3 \\ \text{ד.} & \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 & \text{ה.} & \left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7 & \text{ו.} & \left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3 \\ \text{ז.} & \left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6 & \text{ח.} & \left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2 & \text{ט.} & \left(\frac{(b^{12}c)^2c^{14}}{c(c^3b^5)^4b^3}\right)^2 \end{array}$$

11 חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 & \text{ב.} & \left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2 & \text{ג.} & \left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^2 7)^5}\right)^3 \end{array}$$

12 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^6} & \text{ב.} & \frac{1}{5^3} & \text{ג.} & \frac{1}{2^{10}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{8} & \text{ה.} & \frac{1}{81} & \text{ו.} & \frac{1}{125} \end{array}$$

13 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^{-3}} & \text{ב.} & \frac{1}{3^{-2}} & \text{ג.} & \frac{1}{5^{-3}} \end{array}$$

14) חשב את הביטויים הבאים :

ג. $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב. $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א. $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו. $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה. $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד. $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג. $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב. $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

16) פשט את הביטויים הבאים :

ג. $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א. $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

תשובות סופיות:

- (1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
- ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5
- (2) א. 18 ב. ab ג. $x^6 y^{10}$
- (3) $n=16$
- (4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40
- (5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
- ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5
- (6) $n=2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}
- (9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x} + x$
- (10) א. $a^6 b^3$ ב. $m^{20} n^{15}$ ג. $x^{36} y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21} b^3$
- ז. $x^{12} y^{18}$ ח. $t^4 r^{12}$ ט. $b^2 c^6$
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3
- (15) א. $5^{24} \cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} & .3 & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & .2 & \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} & .1 \\
 \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} & .6 & \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} & .5 & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & .4
 \end{array}$$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } 3^{\frac{1}{4}} & \text{ב. } 2^{\frac{3}{5}} & \text{ג. } 6^{\frac{5}{6}} \\
 \text{ד. } -12^{\frac{2}{7}} & \text{ה. } -(-4)^{\frac{1}{3}} & \text{ו. } -(-3)^{\frac{3}{4}} \\
 \text{ז. } 5^{-\frac{1}{4}} & \text{ח. } 27^{-\frac{1}{3}} & \text{ט. } 64^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \sqrt{49} & \text{ב. } -\sqrt{25} & \text{ג. } \sqrt[3]{8} \\
 \text{ד. } -\sqrt[3]{128} & \text{ה. } \sqrt[3]{(-2)^6} & \text{ו. } (\sqrt[5]{1024})^2 \\
 \text{ז. } (\sqrt[5]{-243})^3 & \text{ח. } \sqrt[4]{-16} & \text{ט. } \sqrt[4]{-25^2} \\
 \text{י. } \sqrt[4]{(-25)^2} & &
 \end{array}$$

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

ג. $128^{-\frac{2}{7}}$

ב. $32^{\frac{3}{5}}$

א. $8^{\frac{2}{3}}$

ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$

ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$

ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

ח. $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$

ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[3]{128}}$

21) פשט את הביטויים הבאים :

ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$

ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$

ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים :

ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ב. $5\sqrt{3}$

א. $3\sqrt{2}$

ה. $x\sqrt{x}$

ד. $2\sqrt[3]{3}$

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש :

ג. $2\sqrt[5]{3}$

ב. $4\sqrt[3]{2}$

א. $2\sqrt{5}$

ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$

ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$

ט. $-5\sqrt{-2}$

ח. $-5\sqrt[4]{2}$

ז. $-5\sqrt[3]{2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$
- ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$
- ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[3]{160}$
- ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[9]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $\sqrt{18} - \sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7} + \sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד. $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

- (17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ
- ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16
- ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5
- (19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$
- ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$
- (20) $\sqrt{2}$
- (21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2
- ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$
- (22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$
- (23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$
- ו. $\sqrt[4]{40 \cdot \frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5} \cdot 2$
- (24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$
- (25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$
- ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$
- (26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$
- ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000	ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000	ד. 23,400,000
ה. 0.0003	ו. 0.00000042
ז. 0.000000042	ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$	ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$	ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$	ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$	ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

28) א. $1.5 \cdot 10^7$	ב. $1.5 \cdot 10^6$	ג. $1.5 \cdot 10^{11}$	ד. $2.34 \cdot 10^7$	ה. $3 \cdot 10^{-4}$
ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$	ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$	ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$		
29) א. $9 \cdot 10^{12}$	ב. $4 \cdot 10^{12}$	ג. $1.25 \cdot 10^{11}$	ד. $1.25 \cdot 10^{14}$	ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$
ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$	ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$	ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$		

מתמטיקה השלמה

פרק 9 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

95	1. משוואות מעריכיות יסודיות.....
97	2. משוואות עם חיבור וחסור איברים.....
99	3. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס.....
100	4. משוואות מסכמות שונות.....
101	5. משוואות עם קבוע אוילר.....
102	6. מערכת משוואות מעריכיות.....
103	7. אי שוויונים מעריכיים.....
104	8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך.....

משוואות מעריכיות יסודיות:

סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

$$\text{א. } 2^x = 16 \quad \text{ב. } 5^x \cdot 25^{x+2} = 125$$

$$\text{ג. } 10^{x-2} = 10000^{x+1} \quad \text{ד. } 9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$$

$$\text{ה. } (2^x \cdot 32)^3 = 8 \quad \text{ו. } (5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$$

$$\text{ז. } \frac{7^x}{343^3} = 1 \quad \text{ח. } (25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

$$\text{א. } 27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8 \quad \text{ב. } \left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$$

$$\text{ג. } 25 \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

$$\text{א. } \sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3} \quad \text{ב. } \sqrt{3^{x+7}} = 81$$

$$\text{ג. } (9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9} \quad \text{ד. } \sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$$

$$\text{ה. } 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8(\sqrt{8})^{-\sqrt{x}} \quad \text{ו. } 5^x \cdot \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$$

4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$	ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$
ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$	ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$
ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$	ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$
ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = (2\sqrt{5})^{4-x}$	

תשובות סופיות:

א. $x = 4$	ב. $x = -\frac{1}{3}$	ג. $x = -2$	ד. $x = 2, 8$	ה. $x = -4$
א. $x = 1, -\frac{1}{5}$	ב. $x = 9$	ה. $x = 1$		
א. $x = -1$	ב. $x = -2$	ג. $x = 3, -2$		
א. $x = -\frac{1}{2}$	ב. $x = 1$	ג. $x = -\frac{8}{19}$	ד. $x = 2, -\frac{2}{3}$	ה. $x = 4, 9$
א. $x = 0$	ב. $x = 4$	ג. $x = 2$	ד. $x = 2$	ה. $x = 5$
א. $x = 1.5$	ב. $x = \frac{2}{3}$			

משוואות עם חיבור וחסור איברים:

סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- t , למשל במשוואה: $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$ נסמן: $2^x = t$.
 נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.
 לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- x המתאימים.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

$$\text{ב. } 8^x + 3 \cdot 8^x = 256$$

$$\text{א. } 2^x + 6 \cdot 2^x = 56$$

$$\text{ד. } 2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$$

$$\text{ג. } 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

$$\text{ב. } 5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$$

$$\text{א. } 81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$$

$$\text{ד. } \sqrt{10000^{x+1}} - \sqrt[4]{10^{8x+1}} = \sqrt[4]{1000} \cdot (\sqrt[4]{10^7} - 1)$$

$$\text{ג. } (2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 15$$

$$\text{ו. } 5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$$

$$\text{ה. } 6^{-x} - 5 \cdot 36^{-\left(\frac{x+1}{2}\right)} = 186$$

$$\text{ח. } 4^{x+2} - 6 \cdot 4^x = 7 \cdot 12^{x+1} + 6 \cdot 12^x$$

$$\text{ז. } 2 \cdot 10^{x+1} + 10^{x+2} = 3 \cdot 5^{x+1}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

$$\text{ב. } 16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$$

$$\text{א. } 9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$$

$$\text{ד. } 4^{-x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$$

$$\text{ג. } 6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$$

$$\text{ו. } \left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} + 1 = 0$$

$$\text{ה. } \left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

$$\text{ב. } \frac{7^x}{7^x - 4} + \frac{8}{7^x + 5} = 3$$

$$\text{א. } \frac{20}{9^x + 1} = 3 - \frac{8}{9^x - 1}$$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$	ב. $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$
ג. $36^x - 6^{x+1} \cdot 3^x + 8 \cdot 9^x = 0$	ד. $4 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$
ה. $25 \cdot 5^{2x} + 16 \cdot 15^x = 9^{x+1}$	ו. $9^x + 4^x - 6^x = \frac{7}{6^{1-x}}$
ז. $\frac{8^{2x} - 8}{7} = 4^x - 2$	ח. $2^{3x} - 2^{2x+2} - 2^x + 4 = 0$

תשובות סופיות:

א. $x=3$	ב. $x=2$	ג. $x=4$	ד. $x=1$	(1)
א. $x=\frac{1}{2}$	ב. $x=0$	ג. $x=\frac{1}{3}$	ד. $x=\frac{1}{4}$	(2)
ה. $x=-3$	ו. $x=-2$	ז. $x=-3$	ח. $x=-2$	(3)
א. $x=2,3$	ב. $x=1,-2$	ג. $x=0$	ד. $x=0$	(3)
ה. $x=0,1$	ו. $x=-6,-9$	ז. $x=0$	ח. $x=1$	(4)
א. $x=1, -\frac{1}{2}$	ב. $x=1$	ג. $x=1,2$	ד. $x=1,0$	(5)
א. $x=\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	ב. $x=1,3$	ג. $x=1,2$	ד. $x=1,0$	(5)
ה. $x=-2$	ו. $x=1,-1$	ז. $x=0, \frac{1}{2}$	ח. $x=0,2$	(5)

משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי. יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- x עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(\sqrt{3-x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{3-x})^x \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3-x}} \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}} = |x-3|^{-1} \quad (3)$$

תשובות סופיות:

$$x = \frac{1}{4}, 1, 2 \quad (1)$$

$$\text{אין פתרון.} \quad (2)$$

$$x = 0, 1, 2, 4 \quad (3)$$

משוואות מסכמות שונות:

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$.5(2^x - 2) + 2 = 4^x - 2^x \quad (1)$$

$$\cdot \frac{6}{4^{x-1} - 1} + \frac{2^{x+1}}{2^x + 2} = \frac{2^x + 4}{2^x - 2} \quad (2)$$

$$\cdot \frac{4^x}{4^x - 10} - \frac{4}{2^{2x-1} - 3} = \frac{32}{16^x - 4^{x+2} + 60} \quad (3)$$

$$\cdot 3^{2x^2+2} - 3^{x^2+3} + 9 = 3^{x^2+1} \quad (4)$$

$$\cdot \sqrt{x}{10} = 4 \cdot \sqrt[2x]{10} + 60 \quad (5)$$

$$\cdot \sqrt[x-1]{8 \cdot 2^{x+1}} = (\sqrt{x}{2})^2 \cdot \sqrt[x-1]{\sqrt{x}{32}} \quad (6)$$

$$\cdot 10 \cdot 4^{x+2} - 16 \cdot 10^x - 90 \cdot 6^x + 36 \cdot 15^x = 0 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$\cdot x = 1, 2 \quad (1)$$

$$\cdot x = 3 \quad (2)$$

$$\cdot x = 1.5 \quad (3)$$

$$\cdot x = 1, -1 \quad (4)$$

$$\cdot x = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\cdot x = -3 \quad (6)$$

$$\cdot x = 1, -2 \quad (7)$$

משוואות עם קבוע אוילר:

סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

$$\text{א. } e^{3x} = e^{2x-1} \quad \text{ב. } e^{5x-1} = e \cdot e^{6x+1}$$

$$\text{ג. } e^{x-5} = (e^{1-x})^3 \quad \text{ד. } e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

$$\text{א. } e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad \text{ב. } \sqrt[3]{e^{x+1}} \cdot e^2 = e^x \sqrt{e}$$

$$\text{ג. } e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{ד. } e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

$$\text{א. } xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x \quad \text{ב. } e^{3x} = x \cdot e^{3x}$$

$$\text{ג. } xe^{x^2} = \frac{x}{\sqrt{e^x}} \quad \text{ד. } \sqrt[3]{e^{3x-1}} \cdot x = xe^x$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = -3 \quad \text{ג. } x = 2 \quad \text{ד. } x = 1, \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = \frac{11}{4} \quad \text{ג. } x = 0 \quad \text{ד. } x = 1, -1$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0, \frac{1}{4} \quad \text{ב. } x = 1 \quad \text{ג. } x = 0, -\frac{1}{2} \quad \text{ד. } x = 0$$

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

(1,3) (4)	(1,2) (3)	(0,2) , (2,4) (2)	(2,9) (1)
(1,2) , (-1,0) (7)	(-1,-2) (6)	(3,2) (5)	

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: עבור $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} \quad (2)$$

$$3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} \quad (4)$$

$$e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} \quad (3)$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 \quad (6)$$

$$25^x + 5 < 6 \cdot 5^x \quad (5)$$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (\ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad (8)$$

$$e^x > 3 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$x < \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$x \leq \frac{1}{8} \quad (4)$$

$$0 \leq x < 1 \quad (3)$$

$$x = 0 \quad (6)$$

$$0 < x < 1 \quad (5)$$

$$x < 0 \text{ או } x > \ln 4 \quad (8)$$

$$x > \ln 3 \quad (7)$$

אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x) > 0$.

דרך הפתרון: אם $f(x) > 1$ אז $g(x) > h(x)$.

אם $0 < f(x) < 1$ אז $g(x) < h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1} \quad (2) \qquad x^{2x-1} > x^{x+2} \quad (1)$$

$$x^{2x^2+2} < x^{5x} \quad (4) \qquad x^{2x-6} < 1 \quad (3)$$

$$(x+1)^{|x|} < x^2 + 2x + 1 \quad (6) \qquad (x^2 - 6x + 13)^{x^2 - 2x} \geq (x^2 - 6x + 13)^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$.0 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$.3 < x < 6 \quad (2)$$

$$.1 < x < 3 \quad (3)$$

$$.0 < x < 0.5, 1 < x < 2 \quad (4)$$

$$.x \leq -1, x \geq 3 \quad (5)$$

$$.0 < x < 2 \quad (6)$$

מתמטיקה השלמה

פרק 10 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

105	1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות
108	2. חוקי הלוגריתמים
112	3. חישובים עם חזקה לוגריתמית
113	4. מעבר בין בסיסים
115	5. הלוגריתם הטבעי
117	6. משוואות עם בסיסים שונים
118	7. מערכת משוואות לוגריתמיות
119	8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות
120	9. אי-שוויונים לוגריתמים

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a, b > 0, a \neq 1$.

הסבר:

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b .
 ערך חזקה זו הוא x . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים
 ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0, a \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\log_4(4-x) = \frac{1}{2} \quad \text{ב.} \qquad \log_6(4x-2) = 1 \quad \text{א.}$$

$$\log_3 \frac{x+3}{3-3x} = -2 \quad \text{ד.} \qquad \log_8(x^4 - 73) = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\log_{\sqrt{x+1}}(2x^2 - 5) = 2 \quad \text{ו.} \qquad \log_x(2x^2 + x - 12) = 2 \quad \text{ה.}$$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

$$3\log_{27}(\log_2(x+3)) = 1 \quad \text{ב.} \qquad \log_4(\log_3 x) = 1 \quad \text{א.}$$

$$\log_6\left(3 + \log_2\left(6 + \log_4(x^2 + 15)\right)\right) = 1 \quad \text{ד.} \qquad \log_{\frac{1}{16}}\left(\log_3(5x^2 + 1)\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{ג.}$$

5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_3(3 \cdot 2^x - 303) = 4 \quad \text{ב.} \qquad \log_2(3^x + 37) = 6 \quad \text{א.}$$

$$3\log_2\left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x} - 11 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 3\right) = 12 + 2x \quad \text{ד.} \qquad \log_5(126 \cdot 5^x - 25) = 2x + 1 \quad \text{ג.}$$

6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$2(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 10 \quad \text{ב.} \qquad (\log_2 x)^4 = 10000 \quad \text{א.}$$

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x + 2} = 2 \quad \text{ד.} \qquad \frac{3 \cdot \log_{14} x + 1}{(\log_{14} x)^2} = 4 \quad \text{ג.}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
- ו. -1.5 ז. 4
- (2) א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 65,536$ ג. $x = 27$ ד. $x = 4$
- ה. $x = 5$ ו. $x = 4$
- (3) א. $x = 2$ ב. $x = 2$ ג. $x = \pm 3$ ד. $x = -2$ ה. $x = 3$ ו. $x = 2$
- (4) א. $x = 81$ ב. $x = 5$ ג. $x = \pm 4$ ד. $x = \pm 1$
- (5) א. $x = 3$ ב. $x = 7$ ג. $x = -1, 2$ ד. $x = -6$
- (6) א. $x = 1024, \frac{1}{1024}$ ב. $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$
- ג. $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x = \frac{1}{3}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a > 0 \neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:
- מכפלה לסכום: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
 - מנה להפרש: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
 - מקדם למעריך: $\log_a b^n = n \log_a b$ (כאשר $b > 0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- | | |
|--|---|
| א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$ | ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$ |
| ג. $\log_2 200 - \log_2 100$ | ד. $\log_3 60 - \log_3 540$ |
| ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$ | ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$ |
| ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$ | ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$ |
| ט. $\frac{1}{2} \left(\log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$ | י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$ |

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- | | |
|---|--|
| א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$ | ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$ |
| ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 225 - 2}$ | ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$ |

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$ ב. $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

ג. $\log_2 (x+30) - \log_2 x = 4$ ד. $\log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2$

ה. $2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1$

ו. $2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$

ב. $2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3)$

ב. $\log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8$

ב. $\log_2 \left(\frac{x}{4}\right) \cdot \log_2 (1024x) = -11$

ג. $\log_2 x^2 \log_2 \left(\frac{x}{16}\right) = -\log_2 (64x)$

ד. $(\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1$

ה. $\log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left(\frac{81}{x}\right) + 2$

ו. $\frac{\log_2 \left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9}$

שאלות הבעה:

(7) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$

ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

(8) נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

(9) נתון: $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$.

הבע באמצעות a את $\log_{18} 27$ ואת $\log_{18} 16$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

(10) $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$

(11) $2 \log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$

(12) $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

(13) $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$

תשובות סופיות:

- (1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2 ו. -0.5
 ג. 6 ו. 1
- (2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5
- (3) א. $x=8$ ב. $x=3, \frac{1}{27}$ ג. $x=2$ ד. $x=4$ ה. $x=3$ ו. $x=4$
- (4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$
- (5) א. $x=1$ ב. $x=-2$
- (6) א. $x=16, \frac{1}{256}$ ב. $x=2, \frac{1}{512}$ ג. $x=4, 2\sqrt{2}$ ד. $x=4, \frac{1}{4}$ ה. $x=\frac{1}{9}, \sqrt[9]{3}$ ו. $x=8, \sqrt[7]{2^{15}}$
- (7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$
- (8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (9) $4(2a-1), 3(1-a)$
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) הוכחה.

חישובים עם חזקה לוגריתמית:

סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x} = x$ כאשר $a > 0 \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית: $3 \cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = \log_4 7$ ב. $x = \log_4 \sqrt{3}$

ג. $x = 2 \log_4 0.1$ ד. $x = \sqrt{\log_2 5}$

(3) נתונה התבנית: $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = -1$ ב. $x = \log_3 5$

ג. $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{56}} 81}$ ב. $\sqrt[3]{2^{3 - \log_{\sqrt{8}} 5}}$

תשובות סופיות:

(1) א. 8 ב. 25

(2) א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15

(3) א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2 - 2\sqrt{6}$

(4) א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{2}{\sqrt[2]{25}}$

מעבר בין בסיסים:

סיכום כללי:

מעבר מבסיס a לבסיס m (כאשר: $a > 0 \neq 1$ ו- $m > 0 \neq 1$, וכן: $b > 0$)

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$$

יתבצע באופן הבא:

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $\log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000$

א. $\log_4 7 \cdot \log_7 4$

ד. $\log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625$

ג. $\log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9$

(2) הוכח את השוויונים הבאים:

א. $\log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1$

ב. $\log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1$

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $\log_3 x \cdot \log_{27} x = 3$

א. $\log_2 x + \log_{32} x = 6$

ד. $\log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1$

ג. $\log_2 4x \cdot \log_8 \frac{x}{16} = -\frac{5}{3}$

שאלות הבעה:

(4) נתון: $\log_4 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

ג. $\log_{216} 96$

ב. $\log_{32} 36$

א. $\log_2 3$

(5) נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

ג. $\log_5 22.5$

ב. $\log_2 \sqrt{30}$

א. $\log_3 50$

6 נתון $\log_3 7 = a$, $\log 9 = 2b$. הבע באמצעות a ו- b את:

א. $\log 21$.

ב. $\log_3 \left(\frac{10}{7} \right)$.

ג. $\log_7 10$.

ד. $\log_{30} 63$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7 $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

8 $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

תשובות סופיות:

1 א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12

2 א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

3 א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$

4 א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$

5 א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$

6 א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$

7 הוכחה.

8 הוכחה.

הלוגריתם הטבעי:

סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי. למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן. מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \rightarrow e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- b מספרים כלשהם.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x \\ \text{ב. } 3 \ln^2 x + \ln x = 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3 \ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2 \ln 3}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 2 \quad \text{ב. } -4 \quad \text{ג. } -1.5$$

$$(2) \quad \text{א. } x = e^2 \quad \text{ב. } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0 \quad \text{ב. } x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e} \quad \text{ג. } x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$$

$$(4) \quad \text{א. } x = e^3, \frac{1}{e^2} \quad \text{ב. } x = \sqrt{e}, e$$

$$(5) \quad \text{א. } 3 \quad \text{ב. } 9$$

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$. במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$. את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$

ג. $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$ ד. $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x} = 3$ ב. $4 + 3e^x = 9$

ג. $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$ ד. $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{10}{5^x}$ ב. $\log_2(4e^{2x} + 6) - 1 = \log_2(7e^x)$

תשובות סופיות:

(1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

ג. $x = \log_7 3 = 0.564$, $x = \log_7 5 = 0.827$ ד. אין פתרון.

(2) א. $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$ ב. $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$ ג. $x = 0$, $x = -\ln 3 = -1.09$

ד. $x = \ln 16 = 2.7725$

(3) א. $x = 1$, $x = \log_5 2 = 0.43$ ב. $x_1 = \ln \frac{1}{2} = -0.693$, $x = \ln 3 = 1.098$

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

תשובות סופיות:

$$(8, -5) \quad (3) \qquad (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) \qquad (8, 3) \quad (1)$$

$$\left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) \qquad (25, 8) \quad (5) \qquad (16, 7) \quad (4)$$

$$(4, 7) \quad (9) \qquad (3, 9), (9, 3) \quad (8) \qquad (25, 4), (625, 2) \quad (7)$$

מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2(4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3(9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4(5 - 9^y) \\ \log_2(2^x + 3) = \log_4(29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2(y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$(36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) \quad (3) \quad (3, 3) \quad (2) \quad (1, 1) \quad (1)$$

$$(1, 0) \quad (6) \quad (1, 1), (2, 3) \quad (5) \quad \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \quad (4)$$

אי-שוויונים לוגריתמים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\log_6(x^2 - 5x) < 1$ (2)	$\log_2 x < \log_2(5x - 20)$ (1)
$\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x)$ (4)	$\log_3 x > \log_9(15 - 2x)$ (3)
$\ln x < 3$ (6)	$\ln x \geq \ln(x^2 - 12)$ (5)
$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8)	$\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7)

תשובות סופיות:

$-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2)	$x > 5$ (1)
$-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4)	$3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3)
$0 < x < e^3$ (6)	$2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5)
$x \neq 1$ וגם $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8)	$\frac{1}{e} < x < e^7$ (7)

מתמטיקה השלמה

פרק 11 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

תוכן העניינים

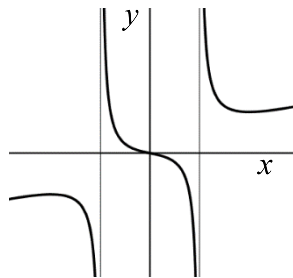
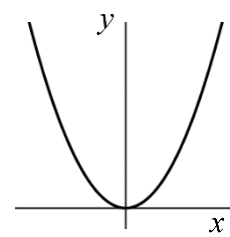
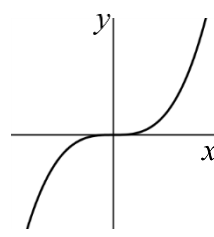
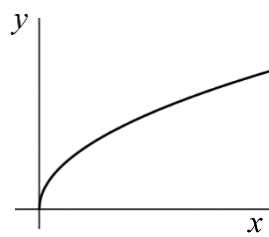
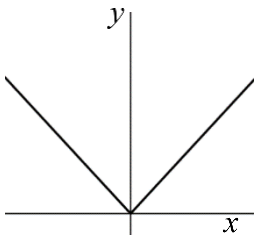
121	1. הקדמה כללית
122	2. גזירת פונקציות
128	3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
129	4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה
132	5. שאלות עם פרמטרים
134	6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית

הקדמה כללית:

סיכום כללי:

פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x) = x^2$: הפונקציה $f(x) = x^3$: הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$: הפונקציה $f(x) = |x|$:



פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$:

שיפוע של פונקציה:

- השיפוע m של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1, y_1)$, כלומר: $m = f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1, y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

גזירת פונקציות:

סיכום כללי:

כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$ | ב. $f(x) = x^7$ | ג. $f(x) = x^2$ |
| ד. $f(x) = x$ | ה. $f(x) = x^{-3}$ | ו. $f(x) = x^{-1}$ |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$ | ב. $f(x) = 3x^7$ | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x$ | ו. $f(x) = 3x^{-2}$ |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$ | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = 12 \quad \text{א.} \quad f(x) = \frac{7}{8} \quad \text{ב.}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{א.} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = 7x^2 + 23x - 6 \quad \text{ג.} \quad f(x) = 6x^2 + 8x + 4 \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 \quad \text{ה.} \quad f(x) = \frac{x^4}{8} + 67 \quad \text{ו.}$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{א.} \quad f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ב.} \quad f(x) = 3(x - x^2)^2 \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \quad \text{ה.}$$

(6) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{א.} \quad f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ה.} \quad f(x) = \frac{2}{3-x} \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{6}{x+5} \quad \text{ז.}$$

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{א.} \quad f(x) = (5x+1)^3(x-3) \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = x^3(6-x)^4 \quad \text{ג.} \quad f(x) = 3x^2 \cdot x \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = x^2 \cdot x^3 \quad \text{ה.} \quad f(x) = x(3x+7) \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = 3x^3(3x-1) \quad \text{ז.} \quad f(x) = (x-2)(2x^2+3) \quad \text{ח.}$$

$$f(x) = (3x-2)(x^2+10x) \quad \text{ט.} \quad f(x) = (3x^4-4x)(2x^2+5x+2) \quad \text{י.}$$

$$f(x) = x(x-2)(3x-4) \quad \text{יא.}$$

8) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = 2x^3(3x+5)^2$.ב.	$f(x) = (x^2 - 4)^2$.א.
$f(x) = (x^2 + 1)^3(2x-1)^2$.ד.	$f(x) = (x^3 + 2)^2(x-1)^3$.ג.

9) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$.ג.	$f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x - 12}$.ב.	$f(x) = \frac{3x - 1}{1 + 2x}$.א.
$f(x) = \frac{3}{x^3}$.ו.	$f(x) = \frac{1}{x}$.ה.	$f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$.ד.
$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{2(1-x)}$.ט.	$f(x) = \frac{(x^2 + 3)^2}{x^2 - 2}$.ח.	$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$.ז.
		$f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 4}$.י.

10) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$.ג.	$f(x) = 4\sqrt{x+1}$.ב.	$f(x) = \sqrt{x}$.א.
$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$.ו.	$f(x) = x^2\sqrt{x+3}$.ה.	$f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$.ד.

11) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = \sqrt{2x}$.ב.	$f(x) = \sqrt{x+1}$.א.
$f(x) = \sqrt{10-3x}$.ד.	$f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$.ג.
$f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$.ו.	$f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x}$.ה.
$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$.ח.	$f(x) = x^2\sqrt{1-2x}$.ז.
$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}$.י.	$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$.ט.
$f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x}}$.יב.	$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$.יא.
$f(x) = \frac{x^2 + 7}{\sqrt{x^2 - 5}}$.יד.	$f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$.יג.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \quad \text{ט.ז.}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \quad \text{ט.ו.}$$

(12) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x-2a}{x-4a} \quad \text{ג.} \quad f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = ax^4 - bx \quad \text{א.}$$

$$f(x) = a\sqrt{bx^2 + c} \quad \text{ד.}$$

(13) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{ה.}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$
- ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
- (2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8
- ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$
- (3) א. 0 ב. 0
- (4) א. $3x^2 + 4x - 3$ ב. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$ ג. $14x + 23$ ד. $12x + 8$ ה. $x - 3x^2$ ו. $0.5x^3$
- (5) א. $15(5x - 2)^2$ ב. $15x^2(x^3 + 6)^4$ ג. $6(x - x^2)(1 - 2x)$
- ד. $-\frac{3}{4}(5 - x)^2$ ה. $\frac{8(x + 1)^3}{3}$
- (6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}$
- ו. $\frac{2}{(3 - x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x + 5)^2}$
- (7) א. $10x - 14$ ב. $(5x + 1)^2(20x - 44)$ ג. $x^2(6 - x)^3(18 - 7x)$
- ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x + 7$ ז. $36x^3 - 9x^2$ ח. $6x^2 - 8x + 3$
- ט. $9x^2 + 56x - 20$ י. $36x^5 + 75x^4 + 24x^3 - 24x^2 - 40x - 8$ יא. $9x^2 - 20x + 8$
- (8) א. $4x(x^2 - 4)$ ב. $30x^2(x + 1)(3x + 5)$ ג. $3(x - 1)^2(x^3 + 2)(3x^3 - 2x^2 + 2)$
- ד. $2(2x - 1)(x^2 + 1)^2(8x^2 - 3x + 2)$
- (9) א. $\frac{5}{(1 + 2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2 - 24x - 5}{(5x - 12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2 + 3)^2}$ ד. $\frac{(x - 4)(x + 2)}{(x - 1)^2}$
- ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$
- ח. $\frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 7)}{(x^2 - 2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x + 2)^2}$

$$(10) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ד. } \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ה. } \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$$

$$\text{ו. } \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \text{ב. } \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{ג. } \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} \quad \text{ד. } -\frac{3}{2\sqrt{10-3x}} \quad \text{ה. } \frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$$

$$\text{ו. } 6x - \frac{4}{\sqrt{x}} \quad \text{ז. } \frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}} \quad \text{ח. } -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad \text{ט. } \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}} \quad \text{י. } \frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$$

$$\text{יא. } 3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} \quad \text{יב. } -\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}} \quad \text{יג. } \frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{יד. } \frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}} \quad \text{טו. } -\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \quad \text{טז. } -\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$$

$$(12) \quad \text{א. } 4ax^3 - b \quad \text{ב. } \frac{2ax}{3} - \frac{1}{b} \quad \text{ג. } \frac{-2a}{(x-4a)^2} \quad \text{ד. } \frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$$

$$(13) \quad \text{א. } f'(x) = \frac{2x^2-8}{4x^2}, f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$\text{ב. } f'(x) = \frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}, f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3}$$

$$\text{ג. } f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$$

$$\text{ד. } f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

$$\text{ה. } f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

$$\text{ו. } f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, f''(x) = \frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$$

מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(14) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 7x$ בנקודה $(2, 2)$.

(15) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$ בנקודה בה $x = -2$.

(16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 1$.

תשובות סופיות:

$$m = 17 \quad (14)$$

$$m = 4 \quad (15)$$

$$m = 2 \quad (16)$$

מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x = -1$.

18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y = 2$.

19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.

21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$ בנקודה שבה $x = 1$.

22) נתון כי הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = 3\sqrt{x}$. מצא את נקודת ההשקה.

23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 1$.

24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 4$.

25) נתונה הפונקציה הבאה $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו -2.

(27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

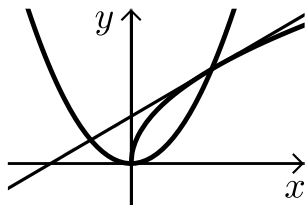
(28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית של 135° .

(29) מצא את משוואות המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y = x^2$, $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y = 2x$.

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

(31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$.



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

$$y = 24x + 22 \quad (17)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \quad (18)$$

$$y = 6x - 24, y = -6x - 12 \quad (19)$$

$$y = 2x - 3 \quad (20)$$

$$y = -12x + 9 \quad (21)$$

$$(1, 3) \quad (22)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} \quad (23)$$

$$y = 22x - 56 \quad (24)$$

$$\left(\frac{1}{3}, 0\right) \text{ ב. } y = 3x - 1 \text{ א. } (25)$$

$$y = -2x + 8 \quad (26)$$

$$y = \frac{11}{16}x - \frac{15}{8} \quad (27)$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3} \quad (28)$$

$$y = 2x - 1, y = -2x - 1 \quad (29)$$

$$.S = 4\frac{1}{12} \text{ ג.}$$

$$y = -1.5x + 3.5 \text{ ב. } (1, 2) \text{ א. } (30)$$

$$.(-0.5, 0.25) \text{ ג.}$$

$$y = 0.5x + 0.5 \text{ ב. } (0, 0), (1, 1) \text{ א. } (31)$$

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

(32) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = ax^2 - 4x$ בנקודה שבה $x = 3$ הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(33) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, $(a > 0)$.

המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1. מצא את ערך הפרמטר a .

(34) נתונה הפונקציה: $y = x^3 + a\sqrt{x}$ (a פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 5. מצא את ערך הפרמטר a .

(35) נתונה הפונקציה: $y = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$ (A פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 2. מצא את ערך הפרמטר A .

(36) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$.

מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(37) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y = 2$ הוא -4.

מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(38) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- c .

(39) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$.

מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(40) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה (1, 6) הוא -6.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

(41) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$ לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$?
לכל ערך כזה של k מצא את נקודת ההשקה.

(42) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו.

מצא את k ואת נקודת ההשקה.

תשובות סופיות:

$a = 2, y = 8x - 18$ (32)

$a = 2$ (33)

$a = 4$ (34)

$A = 1$ (35)

$(-1, 5), y = 4x + 9$ (36)

$a = 2, y = -4x - 2$ (37)

$a = -\frac{1}{8}, c = 4$ (38)

$b = 4, (4, 12)$ (39)

$b = 2, a = 6, y = -6x + 12$ (40)

$k = \frac{158}{27} : \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$ או $k = 6 : (1, 1)$ (41)

$(1, 1), k = 1.5$ (42)

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

שאלות:

43) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ בנקודה שבה $x = t$.
- ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1, 1)$.

44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 5x - x^2$ העוברים דרך הנקודה $(3, 7)$.

45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = x^2 + 5x - 6$ העוברים דרך הנקודה $(0, -10)$.

46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 12x - x^3$ העוברים דרך הנקודה $(2, 24)$.

47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3, 0)$.

48) מצא משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$ העוברים דרך הנקודה $(2, 3)$.

תשובות סופיות:

ב. $t = 0, -2$.

(43) $y = 2tx - t^2 + 1$ א.

(44) $y = x + 4$, $y = -3x + 16$

(45) $y = 9x - 10$, $y = x - 10$

(46) $y = 12x$, $y = -15x + 54$

(47) $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

(48) $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$

(49) $y = -x + 5$

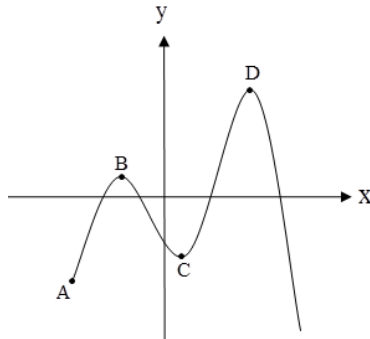
מתמטיקה השלמה

פרק 12 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים

136	1. נקודות קיצון של פונקציות
139	2. חקירת פונקציה פולינומית
143	3. פונקציה זוגית ואי-זוגית

נקודות קיצון של פונקציות:



סיכום כללי:

נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B, C, D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית. נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- x של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- y .
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

שאלות:

1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

2) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

- (3) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.
- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$.
- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (5) לפונקציה $f(x) = ax - x^3 - 5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$. מצא את ערכו של הפרמטר a .
- (6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון. מצא את הקבוע a .
- (7) לפונקציה $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה: $(2, 3)$. מצא את ערכי הפרמטרים A, B .
- (8) לפונקציה $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$ יש נקודת קיצון ב- $x = -1$ ו- $x = 4$. מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- y של שתי נקודות הקיצון.
- (9) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון. מצא את הפרמטרים a, b .
- (10) לפונקציה $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2, 3)$. מצא את ערכי הפרמטרים a, b .

תשובות סופיות:

(1) $\max(5, 25)$

(2) א. $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$ ב. עולה: $x > 2$, $x < -2$ יורדת: $-2 < x < 2$.

(3) א. $\max(0, 9)$, $\min(\sqrt{5}, -16)$, $\min(-\sqrt{5}, -16)$

ב. עולה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$ יורדת: $0 < x < \sqrt{5}$, $x < -\sqrt{5}$.

(4) א. $\min(3, 5)$ ב. עולה: $x > 3$ יורדת: $x < 3$.

(5) $a = 3$

(6) $a = -\frac{2}{3}$

(7) $A = -1$, $B = 3$

(8) $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{3}{2}$, $\left(-1, 2\frac{1}{6}\right)$, $\left(4, -18\frac{2}{3}\right)$

(9) $b = 6$, $a = -4$

(10) $a = 2$, $b = -16$

חקירת פונקציה פולינומית:

שאלות:

(11) נתונה הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(12) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(14) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

15 נתונה הפונקציה $f(x) = x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

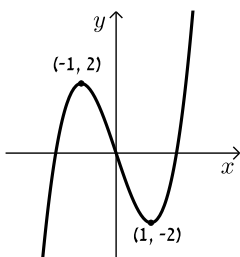
16 נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$.

- לאילו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?
- הצב בפונקציה $a = 6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y , סרטוט.

17 נתונה הפונקציה: $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$ (פרמטר d).

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 2$.

- מצא את d .
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

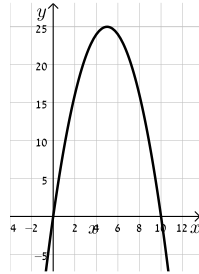


18 לפניך גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$:

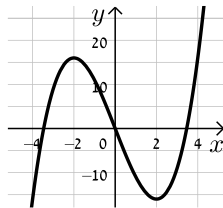
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?
- האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

תשובות סופיות:

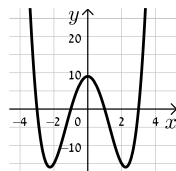
- (11)** א. כל x ב. $\max(5,25)$ ג. עלייה: $x < 5$, ירידה: $x > 5$ ד. $(0,0)$, $(10,0)$.
ה. להלן גרף:



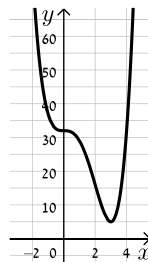
- (12)** א. כל x ב. $\min(2,-16)$, $\max(-2,16)$ ג. עלייה: $x > 2$, $x < -2$; ירידה: $-2 < x < 2$ ד. $(0,0)$, $(\sqrt{12},0)$, $(-\sqrt{12},0)$.
ה. להלן גרף:



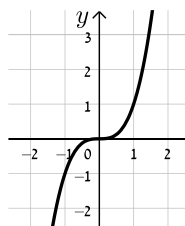
- (13)** א. כל x ב. $\max(0,9)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\min(-\sqrt{5},-16)$ ג. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$; ירידה: $x < -\sqrt{5}$, $0 < x < \sqrt{5}$ ד. $(0,9)$, $(\pm 1,0)$, $(\pm 3,0)$.
ה. להלן גרף:



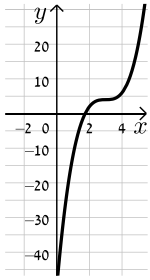
- (14)** א. כל x ב. $\min(3,5)$ ג. תחומי עלייה: $x > 3$, תחומי ירידה: $x < 3$ ד. $(0,32)$.
ה. להלן גרף:



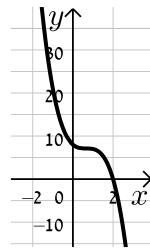
- (15)** א. כל x ב. אין. ג. עולה לכל x ד. $(0,0)$.
ה. להלן גרף:



16) א. $-6 < a < 6$ ב. תחום הגדרה: כל x , נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל x , תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים: $(0, -50)$, להלן גרף:



17) א. $d = 8$ ב. לא ג. יורדת בתחום $x \neq \frac{2}{3}$



ד. $(0, 8)$ ה. להלן גרף:

18) א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. $k > 2, k < -2$

ה. $k = \pm 2$ ו. $-2 < k < 2$ ז. לא

פונקציה זוגית ואי-זוגית:

סיכום כללי:

הגדרות:

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x) = f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x) = -f(x)$.

שאלות:

(1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x) = 3x - 5$

ב. $f(x) = 3x^2$

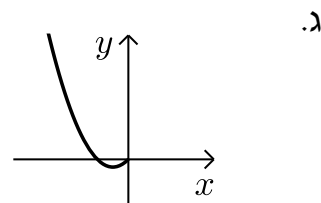
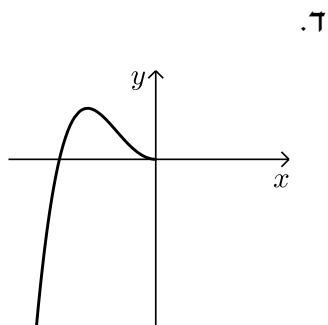
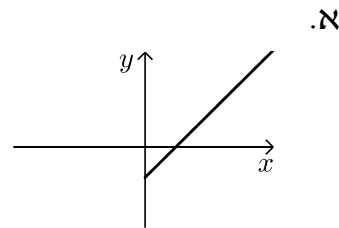
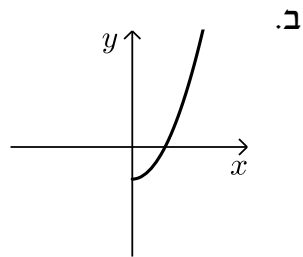
ג. $f(x) = 2x^3$

ד. $f(x) = x^3 - 2x^2$

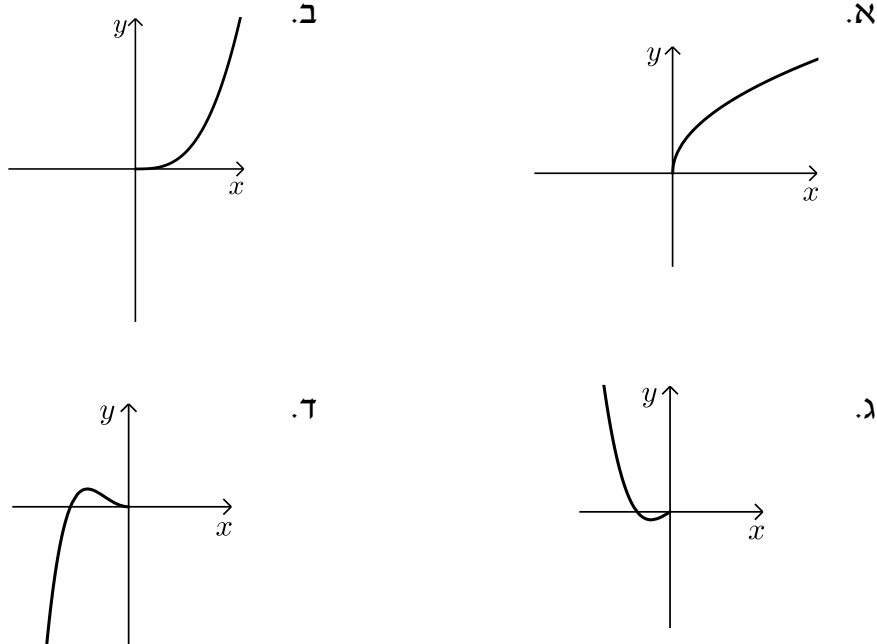
ה. $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$

ו. $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 1$

(2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה זוגית:



3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^4 - 4x^2$ בתחום: $[0:3]$.

א. חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:

- i. תחום הגדרה.
- ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
- iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
- v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

ג. התבסס על ממצאריך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^6 - 3x^2 + 3$.

- א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- y , מציאת נקודות קיצון וסיווגן,
כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.
- ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה ששרטטת
בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.
- ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל x בתחום הגדרתה.

6) לפניך הפונקציה: $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$, פרמטר a .

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
- ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים ושרטט את גרף הפונקציה
בתחום: $[-2:2]$.

7) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 3x^3 - 9x$.

- א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.
- ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים ושרטט את הפונקציה
בתחום: $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$
לגרף ששרטטת בסעיף הקודם).

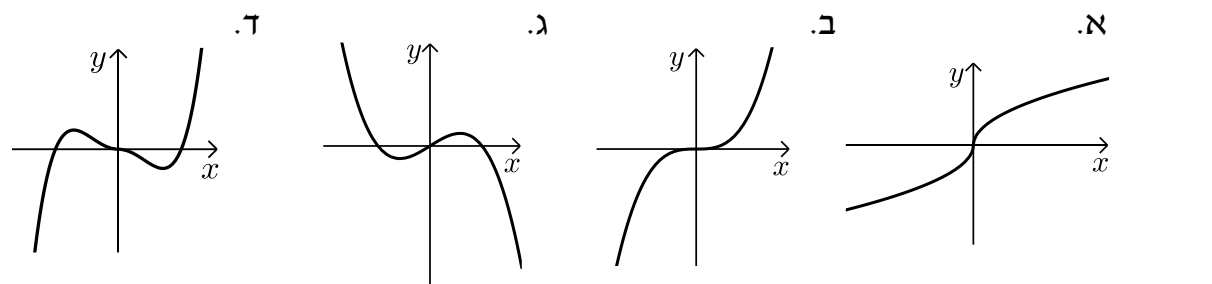
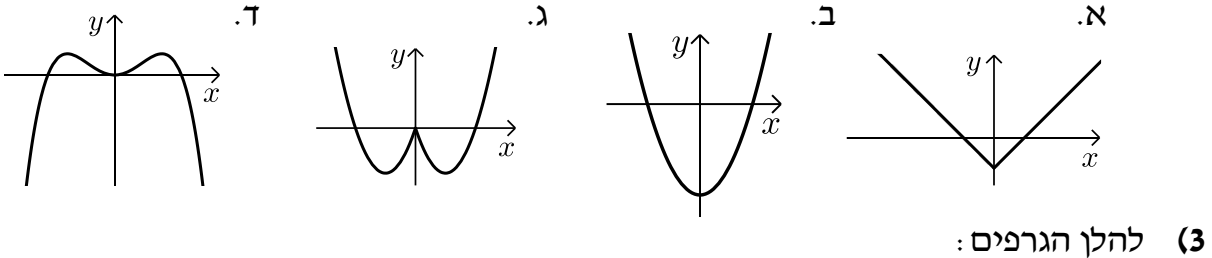
- 8) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + b$, פרמטר b . ידוע כי הישר $y = 2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות: $f'(x) = 0$.
- מצא את b וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
 - חקור את הפונקציה בתחום: $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים:
 - תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו. נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.
 - הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^7 - x}{3}$

- חקור את הפונקציה בתחום: $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
 - תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן (בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו? נמק ע"י חישוב מתאים.
- הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

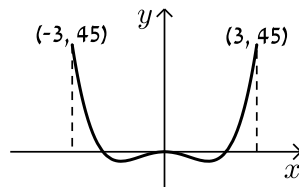
תשובות סופיות:

- (1) זוגית: ב', ה'.
 (2) להלן הגרפים: אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

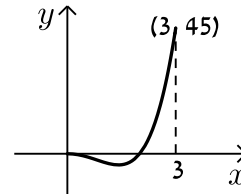


- (4) א. i. $0 \leq x \leq 3$ ii. $(0,0), (2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min(\sqrt{2}, -4)$
 iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$. ב. סעיף הוכחה.

סרטוט עבור סעיף ג:

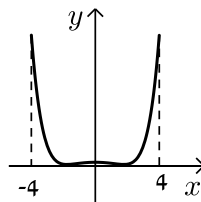


סרטוט עבור חלק v:

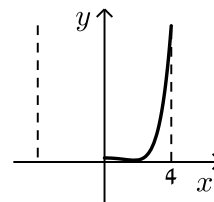


- (5) א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 4$, חיתוך עם ציר ה- y : $(0,3)$, נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה, עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$. ב. זוגית. ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

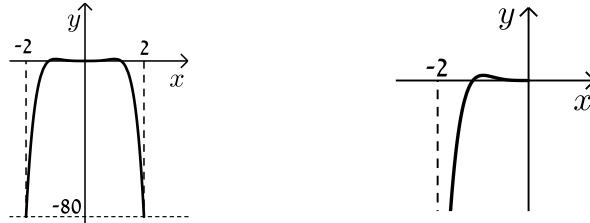
סרטוט עבור סעיף ג:



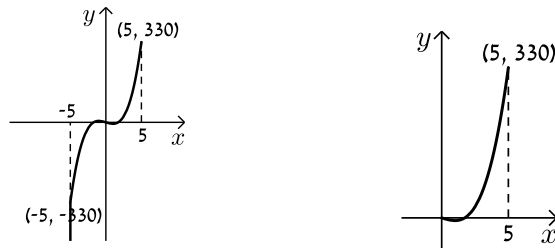
סרטוט עבור סעיף א:



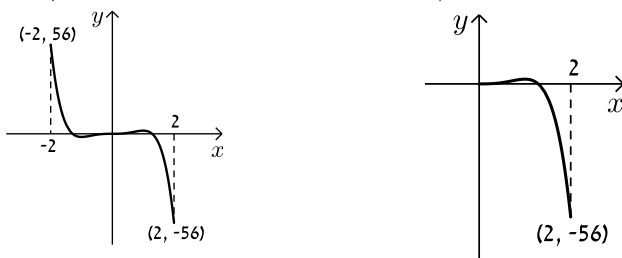
6. א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2 \leq x \leq 0$, חיתוך עם הצירים:
 נקודות קיצון: $(0,0)$, $(-1.225,0)$, $\min(-2,-80)$, $\max(-1,1)$, $\min(0,0)$ קצה,
 עולה: $-2 < x < -1$, יורדת: $-1 < x < 0$. ג. זוגית.
סרטוט עבור סעיף א: **סרטוט עבור סעיף ד:**



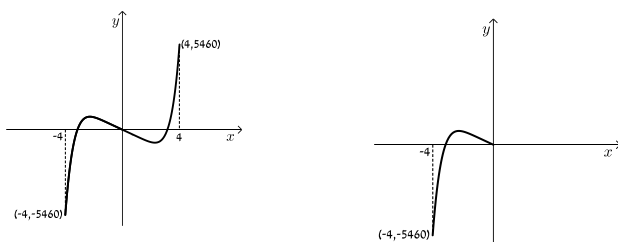
7. א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 5$, חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$
 נקודות קיצון: $\max(5,330)$ קצה, $\min(1,-6)$, $\max(0,0)$ קצה,
 עולה: $1 < x < 5$, יורדת: $0 < x < 1$. ב. אי-זוגית.
סרטוט עבור סעיף א: **סרטוט עבור סעיף ג:**



8. א. $b=0$ ב. i $0 \leq x \leq 2$ ii $(0,0)$, $(1.29,0)$ iii $\min(2,-56)$ קצה,
 iv. עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $1 < x < 2$. ג. אי-זוגית.
סרטוט עבור סעיף ד: **סרטוט עבור חלק v:**



9. א. i $-4 \leq x \leq 0$ ii $(-1,0)$, $(0,0)$ iii $\min(0,0)$ קצה, $\max(-0.723,0.207)$,
 iv. עולה: $-4 < x < -0.723$, יורדת: $-0.723 < x < 0$. ג. אי-זוגית.
סרטוט עבור סעיף ד: **סרטוט עבור חלק v:**



מתמטיקה השלמה

פרק 13 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש

תוכן העניינים

149	1. מציאת תחום הגדרה
151	2. מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה
152	3. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים
157	4. חקירת פונקצית מנה
166	5. חקירת פונקצית שורש
174	6. תחומי קעירות ונקודות פיתול
180	7. חקירת פונקציה עם פרמטר

מציאת תחום הגדרה:

סיכום כללי:

- כל פולינום מוגדר לכל x .
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$	ב. $f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1$
ג. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$	ד. $f(x) = \frac{2x}{x-3}$
ה. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$	ו. $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$
ז. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$	ח. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8}$
ט. $f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$	י. $f(x) = \frac{4x + 1}{x^2 + 1}$
יא. $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$	יב. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$	ב. $f(x) = 2\sqrt{x-3}$
ג. $f(x) = \sqrt{x-4}$	ד. $f(x) = 3x\sqrt{1-2x}$
ה. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$	ו. $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$
ז. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$	ח. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x-1}$
ט. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x + 9}}$	י. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3 - 9x}}$
יא. $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x+6}}$	יב. $f(x) = \frac{x+1}{x - \sqrt{2-x}}$
יג. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1- x }}$	יד. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2} - 3}$

תשובות סופיות:

- (1) א. כל x ב. כל x ג. כל x ד. $x \neq 3$ ה. $x \neq \pm 2$ ו. $x \neq \pm 1$
 ז. $x \neq -1, 2$ ח. $x \neq 4, -2$ ט. כל x י. כל x יא. $x \neq \pm 1, 0$ יב. $x \neq \pm 2, 0$
- (2) א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 3$ ג. $x \geq 4$ ד. $x \leq \frac{1}{2}$ ה. $x \leq -5, x \geq 2$
- ו. $x \leq -2, x \geq 1$ ז. $x > -4$ ח. $x \leq -3, -2 \leq x < 1, x > 1$ ט. $x \leq -1.5, x \geq 1$
 י. $-3 < x < 0, x > 3$ יא. $-6 \leq x < -2, x > -2$ יב. $x < 1, 1 < x \leq 2$
 יג. $-1 < x < 1$ יד. $x \geq 7$

מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

שאלות:

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 10x + 9}$.

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

תשובות סופיות:

(3) א. $\min\left(-3, -\frac{3}{8}\right), \max\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$.

ב. עולה: $-3 < x < 3$, יורדת: $x < -3, 3 < x \neq 9$, $x \neq 1$.

מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

סיכום כללי:

אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר: $x = k$ הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים: $g(k) = 0$ וגם: $f(k) \neq 0$. בצורה מתמטית: אם: $\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

או: $\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ או שניהם אז הישר: $x = k$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

הסבר כללי:

בעבור ערכי x שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית. כאשר ערך x מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה (על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם. אם אחרי הצמצום אותו ערך של x עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית, אך אם ערך x זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה: $y = n$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים: $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{f(x)}{g(x)} = n$ או: $\lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{f(x)}{g(x)} = n$ או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם $m > n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m = n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = \frac{a}{b}$.
- אם $m < n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$.

חוקי גבולות לאינסוף:

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר x שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף). עבור ערכי x שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום: $x = \infty$ או $x = -\infty$ בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת x לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

- הגבול: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ניתן לפיצול לשני מקרים:

- אם: $x \rightarrow 0^+$ (מתקרב ל-0 מהכיוון החיובי) אז: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

- אם: $x \rightarrow 0^-$ (מתקרב ל-0 מהכיוון השלילי) אז: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

- הגבול מהצורה $\infty \cdot \infty$ (מכפלת שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty \cdot \infty = \infty$

- הגבול מהצורה $\infty + \infty$ (סכום שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty + \infty = \infty$

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה: $\frac{\infty}{\infty}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x).

- הגבול מהצורה: $\frac{0}{0}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת x).

- הגבול מהצורה: $\infty - \infty$ (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x). במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

שאלות:

(4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

(5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-9}$

(6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$

(7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-15}$

(8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$

(9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+b}{x-b}$

(10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
 ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{2x^2-4x}$
 ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

(13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$

14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$

16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$

17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$

18) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה

נפגשות בנקודה $(-1, 2)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

19) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16, 2)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות:

(4) $x = 2, y = 3$

(5) $x = \pm 3, y = 5$

(6) $y = \frac{2}{3}$

(7) $x = -3, x = 5, y = 0$

(8) אין.

(9) $x = b, y = a$

(10) נקודת אי-הגדרה: $(2, 4)$, $x = 1, y = 1$

(11) נקודת אי-הגדרה: $(0, 0)$, $x = 2, y = \frac{1}{2}$

(12) $x = 2, y = 0$

(13) $x = 4$

(14) $x = 1, y = -1$

(15) $x = 1, y = 2$

(16) $y = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = 3, y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = -3$

(17) $x = 4, x = -4, y = 5, y = -5$

(18) $b = -3, a = 2$

(19) $b = 1, a = 2$

חקירת פונקצית מנה:

שאלות:

(20) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 10x + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \frac{1}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(22) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(23) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 5x + 4}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(24) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(25) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון.
- ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.
- ו. שרטוט סקיצה.

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{ax + 4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x = -8$.

- מצא את a וכתוב את הפונקציה.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(29) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3x^2}{2x^2 - 8}$.

- מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה: $y = \frac{a^2x - 4}{2x^2 - 1}$, $(a$ קבוע).

- ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$ הוא: $m = 4$.
- מצא את כל הערכים האפשריים עבור a .
 - מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

31 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 1.5x - \frac{5x+1}{x+5}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון וסוגן.
- ג. תחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה.

32 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, $(a \neq 1)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y .
- ד. ענה על הסעיפים הבאים:
 - i. מצא עבור אילו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.
 - ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$. מצא את הערך של a אם נתון כי הפונקציה עולה לכל x .

33 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2+ax+6}{x-2}$, $(a$ פרמטר).

- ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .
- א. מצא את הערך של a .
 - ב. הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א' ומצא:
 - i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
 - iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 - iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
 - ג. עבור אלו ערכי x הפונקציה שלילית?
 - ד. נתון הישר: $y = k$. עבור אלו ערכי k אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

34 נתונה הפונקציה: $y = \frac{x+3}{x-2} + A$, (A פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה (3A, A).

- מצא את ערך הפרמטר A.
 - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל x .
 - מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - נתון הישר: $y = k$.
- האם קיים ערך של k עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

35 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 - 20x + 28}{x^2 + 2a}$.

- ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה (3, 0.5).
- מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.
 - מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 - כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של k הישר: $y = k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

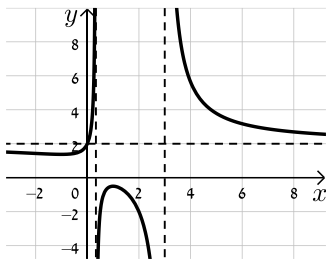
36 ענה על הסעיפים הבאים:

- הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-k}$ יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- y .
- הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x אם ידוע כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון הוא 3.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר $y = -1$. נמק את תשובתך.

תשובות סופיות:

20 א. $x \neq 3, x \neq \frac{1}{3}$ ב. $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

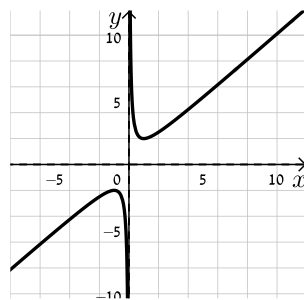
ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$ וגם $x \neq \frac{1}{3}$, תחומי ירידה: $1 < x \neq 3$ או $x < -1$.



ד. $(0, 2)$ ה. $x = 3, x = \frac{1}{3}, y = 2$ ו. להלן סקיצה:

21 א. $x \neq 0$ ב. $\min(1, 2), \max(-1, -2)$

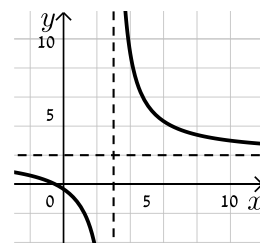
ג. עולה: $x > 1$ או $x < -1$, יורדת: $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ ד. אין



ה. להלן סקיצה:

22 א. $x \neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

ד. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{3}\right)$ ה. $y = 2, x = 3$

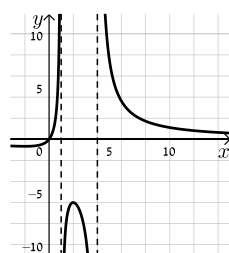


ו. להלן סקיצה:

23 א. $x \neq 1, x \neq 4$ ב. $\min\left(-2, -\frac{2}{3}\right), \max(2, -6)$

ג. תחומי עלייה: $-2 < x < 2$, $x \neq 1$, תחומי ירידה: $x < -2$ או $x > 2$, $x \neq 4$

ד. $(0, 0)$ (אסימפטוטות: $y = 0, x = 1, x = 4$).

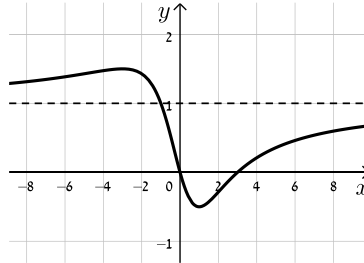


ה. להלן סקיצה:

24) א. כל x ב. $\min\left(1, -\frac{1}{2}\right), \max\left(-3, 1\frac{1}{2}\right)$

ד. $(0,0), (3,0)$ (אסימפטוטה: $y=1$).

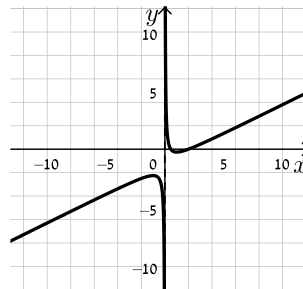
ג. עולה: $x > 1$ או $x < -3$, יורדת: $-3 < x < 1$
ה. להלן סקיצה:



25) א. $x \neq 0$ ב. $\min(1, -0.25), \max(-1, -2.25)$

ג. עולה: $x > 1, x < -1$, יורדת: $-1 < x < 1, x \neq 0$ ד. $(0.5, 0), (2, 0)$ ה. $x=0$

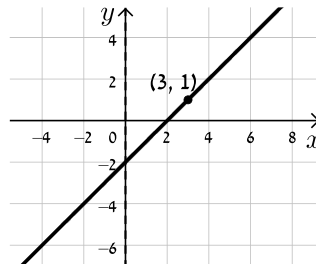
ו. להלן סקיצה:



26) א. $x \neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0, -2), (2, 0)$ ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $(3, 1)$.

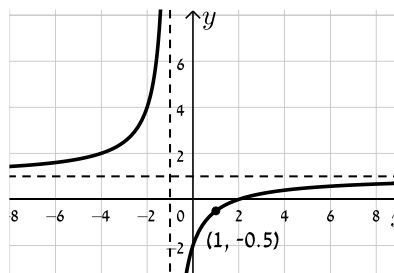
ו. להלן סקיצה:



27) א. $x \neq \pm 1$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

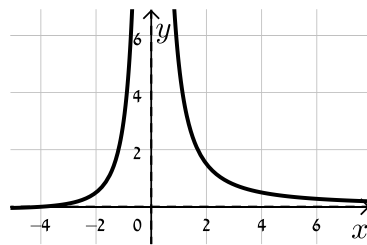
ד. $(0, -2), (2, 0)$ ה. $y=1, x=-1$, יש נקודת אי הגדרה: $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

ו. להלן סקיצה:



28 א. $f(x) = \frac{x+4}{x^2}$, $a=1$ ב. עולה: $-8 < x < 0$ יורדת: $x < -8$, $x > 0$

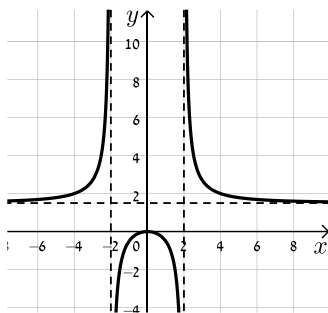
ג. $(-4, 0)$ ד. $x=0, y=0$



ה. להלן סקיצה:

29 א. $x \neq \pm 2$ ב. $\max(0, 0)$ ג. יורדת: $x > 0$, $x \neq 2$ עולה: $x < 0$, $x \neq -2$

ד. $(0, 0)$ ה. $x = \pm 2, y = 1.5$ ו. להלן סקיצה:



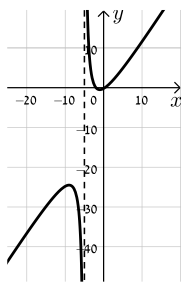
30 א. $a = \pm 2$ ב. $(1, 0), (0, 4)$

ג. המשיק: $y = -4x + 4$ אשר עובר בנקודה $(1, 0)$. נקודת החיתוך: $(1, 0)$.

31 א. $x \neq -5$ ב. $\min(-1, -0.5), \max(-9, -24.5)$

ג. עולה: $x < -9$, $x > -1$ יורדת: $-9 < x < -1$, $x \neq -5$

ד. $(-2, 0), (\frac{1}{3}, 0), (0, -0.2)$ ה. $x = -5$ ו. להלן סקיצה:



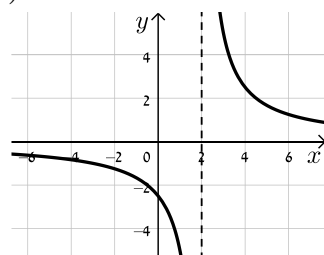
32 א. $x \neq 1$ ב. $x=1, y=1$ ג. $(a, 0), (0, a)$ ד. i. $a > 1$ ii. $a = 2$

33 א. $a = -3$ ב. i. $x \neq 2$ ii. $(0, -3)$ iii. $\max(0, -3), \min(4, 5)$

ג. $x < 2$ ד. iv. $x = 2$ ה. $-3 < k < 5$

34 א. $A = -1$ ב. $x \neq 2$ ד. $(0, -2.5)$

ו. לא



ה. להלן סקיצה:

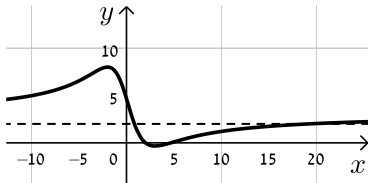
35 א. $f(x) = \frac{3x^2 - 20x + 28}{x^2 + 6}$, $a = 3$. כל x .

ב. $\min\left(3, -\frac{1}{3}\right)$, $\max(-2, 8)$

ד. $(2, 0)$, $\left(0, 4\frac{2}{3}\right)$, $\left(4\frac{2}{3}, 0\right)$

ו. $k = 8$, $-\frac{1}{3}$, 3

ג. עולה: $x < -2$, $x > 3$, יורדת: $-2 < x < 3$



ה. להלן סקיצה:

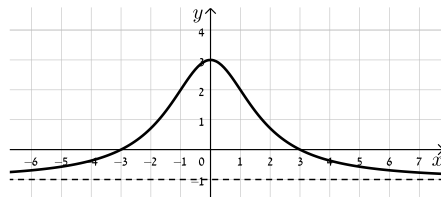
ה. באף נקודה.

ד. $y = -1$

ג. $(3, 0)$, $(-3, 0)$

ב. $k = -3$

ו. להלן סקיצה:



חקירת פונקציות שורש:

שאלות:

37 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

38 נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

39 נתונה הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{6-x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

40 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

41 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

42 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- x ? נמק והראה חישוב מתאים.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .
- ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

44 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$.

- מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- x ? מצא אותן.
- כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

45 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

46 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, פרמטר a .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y . ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y-x=0$.
- מצא את ערך הפרמטר a .
 - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
 - כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

47 נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{x}$ (k פרמטר חיובי).

- ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x=0.8$.
- מצא את k .
 - האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה? אם כן מצא אותה.
 - מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=0.52$.

48 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$, פרמטר חיובי.

- א. ענה על הסעיפים הבאים:
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות k).
 - מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?
- ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של k בתחום הגדרתה.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x . (בטא באמצעות k).
- ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A. ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה- x והאסימפטוטה הנ"ל הוא: $S = 4$ יח"ש. מצא את ערך הפרמטר k .

49 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

- א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.
- ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
- לפונקציות תחום הגדרה זהה.
 - שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.
 - שתי הפונקציות חותכות את ציר ה- x באותה נקודה.
 - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- y . אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:
- היות והפונקציה $g(x)$ מוגדרת להיות: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ אזי ניתן למצוא את שיעור ה- y של כל נקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה- y של הנקודה בעלת אותו שיעור x על הגרף של $g(x)$ ונעלה אותה בריבוע.
- ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

50) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$, $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר: $y = x$.

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.

מגדירים פונקציה נוספת והיא: $h(x) = (g(x))^2$.

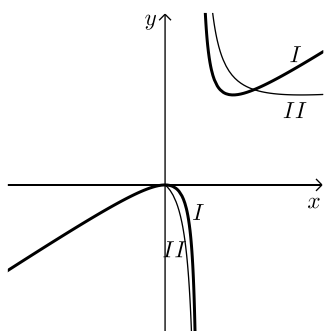
ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה: $h(x)$.

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ זהה לשל $g(x)$?

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.

קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף

מתאר מבין הפונקציות: $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. נמק את בחירותיך.



51) לפניך שלוש פונקציות: $f(x) = x^2 \sqrt{k-x^2}$, $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$, $h(x) = \frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$ ($k > 0$).

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$.

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה- x כלל.

iii. הפונקציות: $h(x)$ ו- $g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן

(כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

iv. לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A(0, \sqrt{12})$ על ציר ה- y . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך

של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x שאינה בראשית הוא: $d = 6$.

ב. מצא את k .

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף

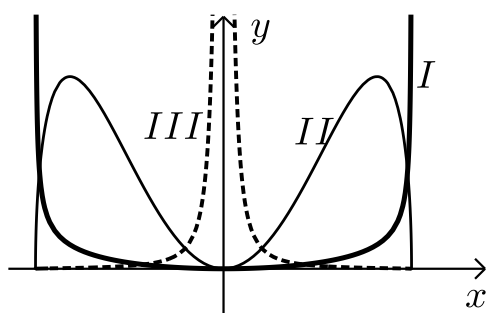
הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של

שלושת הפונקציות.

קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף

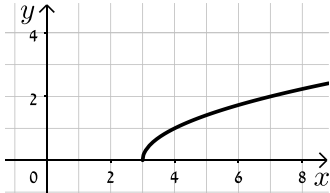
שייך לכל פונקציה.



תשובות סופיות:

(37) א. $x \geq 3$ ב. קצה $\min(3,0)$ ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה.

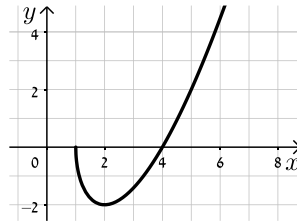
ד. $(3,0)$ ה. אין. ו. להלן סקיצה:



(38) א. $x \geq 1$ ב. קצה $\max(1,0)$, $\min(2,-2)$

ג. עולה: $x > 2$, יורדת: $1 < x < 2$ ד. $(1,0), (4,0)$ ה. אין.

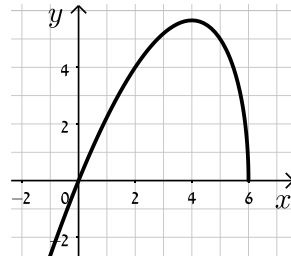
ו. להלן סקיצה:



(39) א. $x \leq 6$ ב. קצה $\min(6,0)$, $\max(4,4\sqrt{2})$

ג. עלייה: $x < 4$, ירידה: $4 < x < 6$ ד. $(6,0), (0,0)$

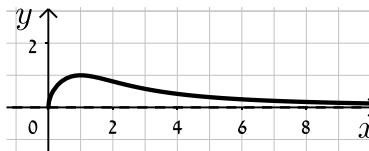
ה. להלן סקיצה:



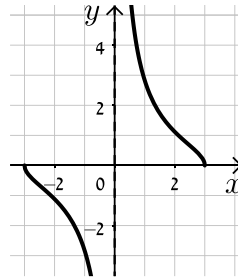
(40) א. $x \geq 0$ ב. קצה $\min(0,0)$, $\max(1,1)$

ג. עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $x > 1$ ד. $(0,0)$ ה. $y = 0$.

ו. להלן סקיצה:

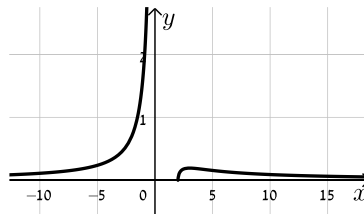


- (41)** א. $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה
 ג. עולה: אף x , יורדת: $-3 \leq x \leq 3, x \neq 0$ ד. $(-3,0), (3,0)$



ה. $x=0$. ו. להלן סקיצה:

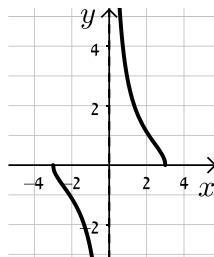
- (42)** א. $x < 0, x \geq 2$ ב. $\min(2,0), \max\left(3, \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$
 ג. $(2,0)$ ד. להלן סקיצה:



- (43)** א. $(2,0)$ ב. לא ג. $y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$ ד. $S = 4\sqrt{2}$

- (44)** א. $x \neq 1, x \geq 0$ ב. $(9,6)$ ג. $y = 6$

- (45)** א. $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה
 ג. עולה: אף x , יורדת: $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ד. $(-3,0), (3,0)$



ה. $x=0$. ו. להלן סקיצה:

- (46)** א. $a=1$ ב. $-3 < x < 3$ ג. $(-1.5, \sqrt{3})$

ד. יורדת: $-3 < x < -1.5$, עולה: $-1.5 < x < 3$

- (47)** א. $k=0.48$ ב. כן, $(0.6, 0.57)$ ג. $y = 0.74x + 0.1352$

- (48)** א. i. $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$ ii. $x = \pm\sqrt{k}$ ב. $f'(x) = \frac{k^2}{(k-x^2)^{1.5}} > 0$

- ג. $y = \sqrt{k}x$ ד. $k=4$

$$(49) \text{ א. } g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$$

ב. i. לא נכון ii. נכון

$$\text{ג. } f(x) : \left(0, \frac{1}{2}\right), g(x) : \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

iii. נכון iv. נכון

ד. אסף צודק.

$$\text{ב. } h(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

iii. נכון

(50) א. i. לא נכון ii. נכון

$$\text{ד. } I = h(x), II = f(x)$$

$$\text{ג. לא, } h(x) : x \neq 1$$

iv. נכון

iii. נכון

ii. לא נכון

(51) א. i. לא נכון

$$\text{ג. } \min(0,0), \max(\pm 4, 32\sqrt{2})$$

$$\text{ב. } k = 24$$

$$\text{ד. } I = g(x), II = f(x), III = h(x)$$

תחומי קעירות ונקודות פיתול:

סיכום כללי:

תחומי קעירות – הגדרה:

- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) < 0$.
- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) > 0$.

נקודת פיתול – הגדרות:

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת: $f''(x) = 0$ כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

שאלות:

(52) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

(53) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$.

(54) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$.

(55) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = x(x-2)^3$.

56 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a}{x^2 + b}$, a, b פרמטרים.

הנקודה $(-1, 1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה.
מצא את ערכי הפרמטרים a, b .

57 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

58 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x - \sqrt{x}}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

59) חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

- i. מציאת תחום הגדרה.
- ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
- iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
- vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.
- viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{ב.} \qquad f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{ד.} \qquad f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad \text{ו.} \qquad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad \text{ח.} \qquad f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad \text{ז.}$$

הערה: בסעיפים ו ו-ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.

תשובות סופיות:

52 (1,7), (2,16) , קעירות כלפי מעלה : $x > 2$ או $x < 1$, קעירות כלפי מטה : $1 < x < 2$.

53 (2,1) , קעירות כלפי מעלה : $x > 2$, קעירות כלפי מטה : $0 \neq x < 2$.

54 קיצון : $\min(2,4)$, פיתול : $\left(4, \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

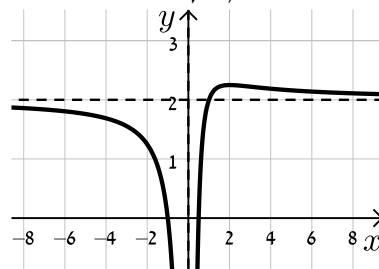
55 קיצון : $\min\left(\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)$, פיתול : (1,-1), (2,0) .

56 $a = 4, b = 3$.

57 א. $x \neq 0$. ב. $\max\left(2, 2\frac{1}{4}\right)$. ג. עולה : $0 < x < 2$; יורדת : $x > 2, x < 0$.

ד. $\left(\frac{1}{2}, 0\right), (-1, 0)$. ה. $x = 0, y = 2$. ו. $\left(3, 2\frac{2}{9}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה : $x > 3$, קעירות כלפי מטה : $0 \neq x < 3$.

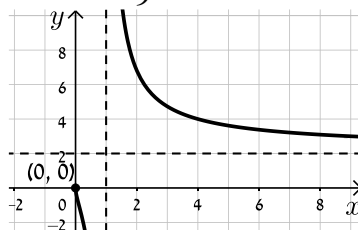


ח. להלן סקיצה :

58 א. $1 \neq x > 0$. ב. אין . ג. יורדת בכל תחום הגדרתה .

ד. אין . ה. $x = 1, y = 2$ נקודת אי הגדרה : (0,0) . ו. $\left(\frac{1}{9}, -1\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה : $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{9}$, קעירות כלפי מטה : $\frac{1}{9} < x < 1$.



ח. להלן סקיצה :

59 א. i. $x \neq 0$. ii. (1,0) . iii. $x = 0, y = 0$. iv. $\max(2, 0.25)$.

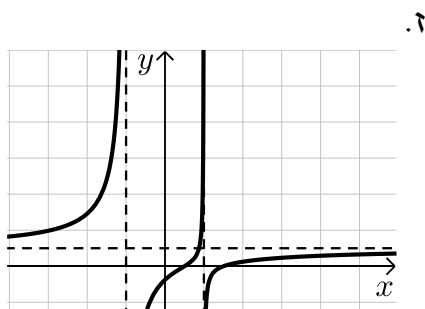
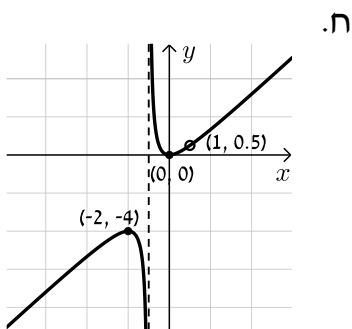
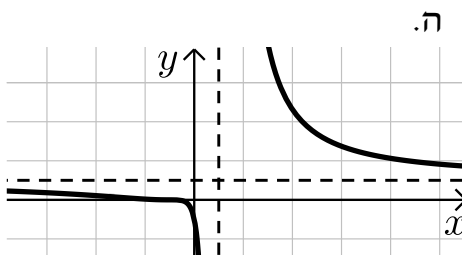
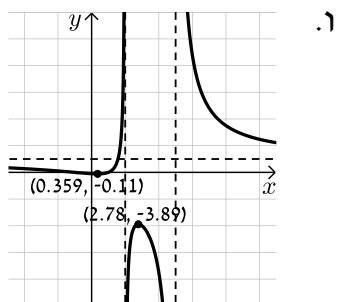
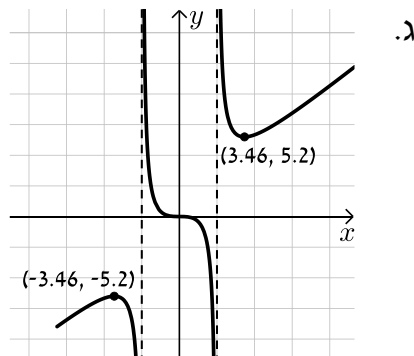
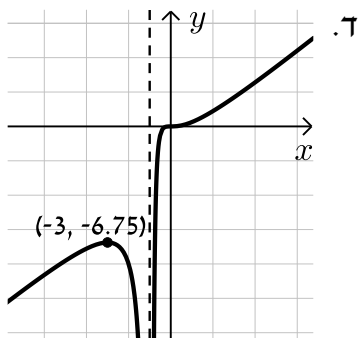
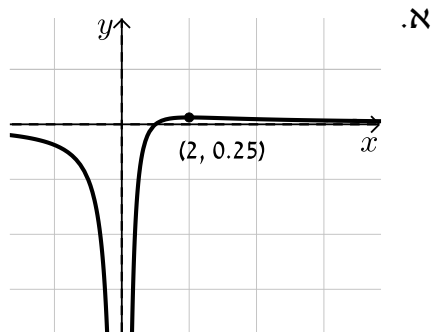
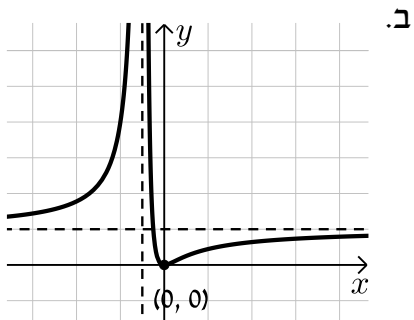
v. עולה : $0 < x < 2$, יורדת : $x < 0, x > 2$. vi. $\left(3, \frac{2}{9}\right)$.

vii. קעורה כלפי מעלה : $x > 3$, קעורה כלפי מטה : $0 < x < 3, x < 0$.

ב. i. $x \neq -1$. ii. (0,0) . iii. $x = -1, y = 2$. iv. $\min(0,0)$.

- v. עולה: $x < -1$, $x > 0$, יורדת: $-1 < x < 0$.vi $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $-1 < x < \frac{1}{2}$, קעורה כלפי מטה: $x < -1$, $x < \frac{1}{2}$
- ג. i. $x \neq \pm 2$.ii $(0,0)$.iii $x = \pm 2$
- iv. $\min(\sqrt{12}, 5.2)$, $\max(-\sqrt{12}, -5.2)$
- v. עולה: $x > \sqrt{12}$, $x < -\sqrt{12}$, יורדת: $2 < x < \sqrt{12}$, $-2 < x < 2$, $-\sqrt{12} < x < -2$.vi $(0,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $x > 2$, $-2 < x < 0$, קעורה כלפי מטה: $0 < x < 2$, $x < -2$
- ד. i. $x \neq -1$.ii $(0,0)$.iii $x = -1$.iv $\max(-3, -6.75)$
- v. עולה: $x > -1$, $x < -3$, יורדת: $-3 < x < -1$.vi $(0,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $x > 0$, קעורה כלפי מטה: $-1 < x < 0$, $x < -1$
- ה. i. $x \neq 1$.ii $(-1,0), (0,-1)$.iii $x = 1, y = 1$.iv אין
- v. יורדת בכל ת.ה. .vi $\left(-3, \frac{1}{8}\right), (-1,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $-3 < x < -1$, $x > 1$, קעורה כלפי מטה: $-1 < x < 1$, $x < -3$
- ו. i. $x \neq 2, 5$.ii $(0, -0.1), (-1, 0), (1, 0)$.iii $x = 2, x = 5, y = 1$
- iv. $\min(0.359, -0.11)$, $\max(2.78, -3.89)$
- v. עולה: $2 < x < 2.78$, $0.359 < x < 2$, יורדת: $x > 5$, $2.78 < x < 5$, $x < 0.359$
- ז. i. $x \neq \pm 2$.ii $(3,0), (1,0), (0,-0.75)$.iii $x = \pm 2, y = 1$
- iv. אין .v יורדת בכל ת.ה.
- ח. i. $x \neq \pm 1$.ii $(0,0)$.iii $x = -1$.iv $\min(0,0)$, $\max(-2,-4)$
- v. עולה: $x > 0$, $x < -2$, $x \neq 1$, יורדת: $-1 < x < 0$, $-2 < x < -1$
- vi. אין .vii קעורה כלפי מעלה: $x > -1$, $x \neq 1$, קעורה כלפי מטה: $x < -1$

סקיצות:



חקירת פונקציה עם פרמטר:

סיכום כללי:

סיווג נקודות קיצון באמצעות y'' :

אם הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת קיצון אז :

- אם $f''(x_1) > 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מינימום.
- אם $f''(x_1) < 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מקסימום.

שאלות:

(1) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 12x$.

(2) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^2 - 6x - 16$.

(3) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3b^2x$, $b > 0$, פרמטר. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2}$ ($a > 0$). חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1-x^2}{(x-b)^2}$, $(b > 1)$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x\sqrt{b^2 - x^2}$, $(b > 0)$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - m}{ax - 4}$, a, m פרמטרים קבועים כאשר: $a > 0$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .

- א. מצא את הערך של הפרמטר m .
- ב. הצב את הערך של m שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות a את:
 - i. תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 - iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות a בסעיף הקודם.
- ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- y נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר a .
- ה. נתון הישר: $y = k$. מצא עבור אילו ערכים של k אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

תשובות סופיות:

(1) $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$

(2) $\min(3, -25)$

(3) $\min(b, -2b^3)$, $\max(-b, 2b^3)$

(4) א. כל x ב. $\max\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $\min\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$

ג. עולה: $-a < x < a$ יורדת: $x < -a$, $x > a$

ד. $(0, 0)$ ה. אסימפטוטה אופקית: $y = 0$

(5) א. $x \neq b$ ב. $\max\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2 - 1}\right)$ ג. עולה: $x > b$, $x < \frac{1}{b}$ יורדת: $\frac{1}{b} < x < b$

ד. $\left(0, \frac{1}{b^2}\right)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ ה. $x = b$, $y = -1$

(6) א. $-b \leq x \leq b$ ב. $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}, -2b^2\right)$, $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}}, 2b^2\right)$, $\min(-b, 0)$ קצה,

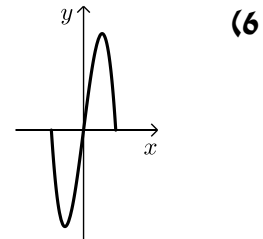
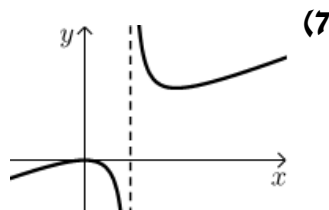
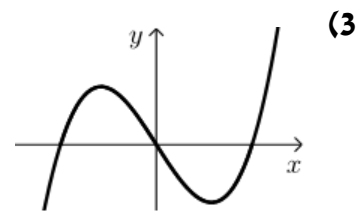
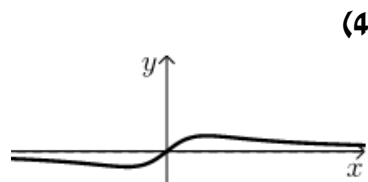
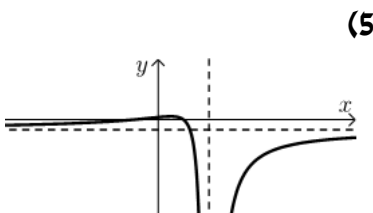
$\min(b, 0)$ קצה. ג. עולה: $-\frac{b}{\sqrt{2}} < x < \frac{b}{\sqrt{2}}$, יורדת: $\frac{b}{\sqrt{2}} < x < b$, $-b < x < -\frac{b}{\sqrt{2}}$

ד. $(b, 0)$, $(-b, 0)$, $(0, 0)$

(7) א. $m = 0$ ב. $x \neq \frac{4}{a}$ ב. ii. $\max(0, 0)$, $\min\left(\frac{8}{a}, \frac{16}{a^2}\right)$

ב. iii. $x = \frac{4}{a}$ ד. $a = 2$ ה. $0 < k < 4$

סקיצות לשאלות:



מתמטיקה השלמה

פרק 14 - חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

מתמטיקה השלמה

פרק 15 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות

תוכן העניינים

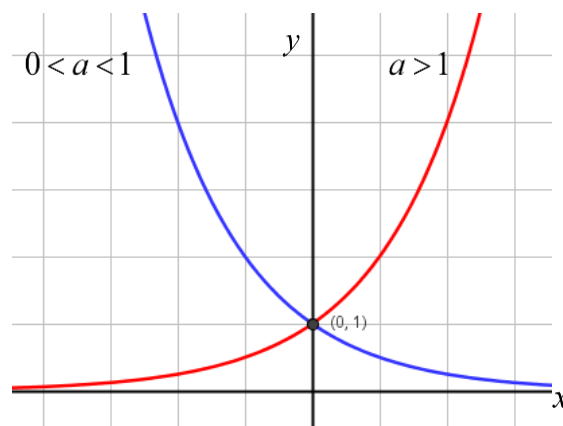
- 183 1. הנגזרת של פונקציה מעריכית
- 187 2. שימושי הנגזרת
- 188 3. חקירה של פונקציה מעריכית

הנגזרת של פונקציה מעריכית:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

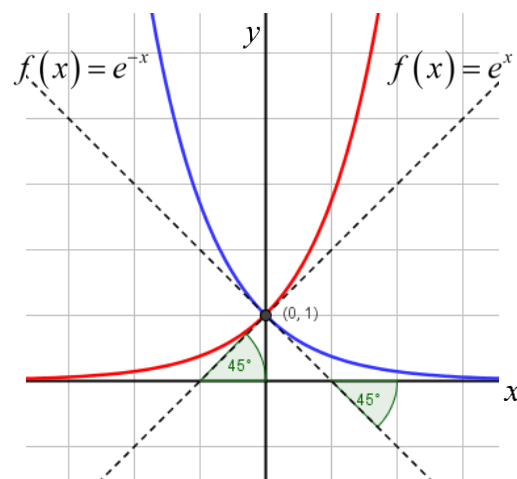
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה: $f(x) = a^x$
 עבור: $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:



תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל x .
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- y בנקודה: $(0, 1)$.
4. עבור: $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x) = e^x$ ו- $f(x) = e^{-x}$ נקבל:



תכונות נוספות:

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^{-x}$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא -1.

נגזרות של פונקציות מעריכיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

תזכורת - כללי הגזירה:

מספר כלל	הפונקציה	תיאור	הנגזרת
1.	$y = a \cdot f(x)$	מכפלה בקבוע	$y' = a \cdot f'(x)$
2.	$y = f(x) + g(x)$	סכום פונקציות	$y' = f'(x) + g'(x)$
3.	$y = f(x) \cdot g(x)$	מכפלת פונקציות	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4.	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	מנת פונקציות	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
5.	$y = f(g(x))$	פונקציה מורכבת	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1 & \text{ב. } f(x) = e^{x^2-3x} + ex \\ \text{ג. } f(x) = 2^{3x} & \text{ד. } f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x} \end{array}$$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = x \cdot e^x \quad \text{ב. } f(x) = x^2 \cdot e^{4x} \quad \text{ג. } f(x) = (x+1) \cdot 2^x$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

$$\text{א. } f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3 \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = e^{2x} & \text{ב. } f(x) = e^x + 1 \\ \text{ג. } f(x) = e^{\frac{1}{x}} & \text{ד. } f(x) = (x^2 + 1)e^x \\ \text{ה. } f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 1) & \text{ו. } f(x) = e^{3x-2} \\ \text{ז. } f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x} & \text{ח. } f(x) = x^3 e^{2x} \\ \text{ט. } f(x) = e^{-2x}(x+4) & \text{י. } f(x) = e^{2x+1}(1-x) \\ \text{יא. } f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} & \text{יב. } f(x) = \frac{x^3}{e^{3x}} \\ \text{יג. } f(x) = \frac{2+x^2}{e^{x^2}} & \text{יד. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \\ \text{טו. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{-x}} & \text{טז. } f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{x+1}} \end{array}$$

תשובות סופיות:

(1) א. $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$ ג. $3\ln 2 \cdot 2^{3x}$ ד. $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$

(2) א. $(1+x)e^x$ ב. $2xe^{4x}(1+2x)$ ג. $2^x(1+x\ln 2 + \ln 2)$

(3) א. $\frac{x(2-x)}{e^x}$ ב. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

(4) א. $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$ ב. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$ ג. $\frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$

(5) א. $2e^{2x}$ ב. e^x ג. $-\frac{e^{1/x}}{x^2}$ ד. $(x+1)^2 e^x$

ה. $e^{-x}(-x^2-2x+3)$ ו. $3e^{3x-2}$

ז. $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ ח. $x^2 e^{2x}(3+2x)$ ט. $-e^{-2x}(2x+7)$

י. $e^{2x+1}(1-2x)$

יא. $\frac{e^{-1/x}}{x^2}$ יב. $\frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}}$ יג. $\frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$

יד. $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$ טו. $\frac{(x+1)^2}{e^{-x}}$ טז. $\frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2}$

שימושי הנגזרת:

שאלות:

- (6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה $A(1, e)$.
- (7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ בנקודה שבה $x = 0$.
- (8) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.
- (9) נתונה הפונקציה: $y = e^{2x} + 3ex$.
 לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה: $x = 2$.
 מצא את משוואת המשיק.
- (10) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$ בנקודה $(1, 15)$ הוא $21 \ln 3$.
 מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות:

- (6) $y = ex$
- (7) $y = 3x + 1$
- (8) $y = (-e^2 + e)x + e^2$, $y = (e-1)x + e$
- (9) $y = 2e^4x + 3ex - 3e^4$
- (10) $b = -1$, $a = 2$

חקירה של פונקציה מעריכית:

שאלות:

(11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } f(x) = \frac{2x-1}{e^x} & \text{ב. } f(x) = \frac{3}{e^x-1} & \text{ג. } f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \\
 \text{ד. } f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2} & \text{ה. } f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x} & \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2} \\
 \text{ז. } f(x) = \sqrt{e^{2x}-4e^x+3} & &
 \end{array}$$

(12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2e^x$.

(13) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$.

(14) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2+bx+9}{e^x}$.

הפונקציה משיקה לציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.5$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה: $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3, -19)$. מצא את ערכי הפרמטרים p ו- q .

(16) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + e^x$.

(17) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$.

(18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x - 1}$.

(19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 5e^x + 6}$

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^x}$

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x-1}{e^{3x} - e}$

(25) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = (x-3)e^x$

(26) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + a}{be^x}$. לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $(1, \frac{2}{e})$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.

(28) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים :

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x \quad \text{ב.} \qquad f(x) = (x-1)e^x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = e^{x^2-x} \quad \text{ד.} \qquad f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{x+1}} \quad \text{ו.} \qquad f(x) = \frac{2}{e^{x^2} + 1} \quad \text{ה.}$$

(29) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-3)e^x$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(31) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4x}{e^{0.5x^2}}$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(32) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(33) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \cdot 3^x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(34) נתונה הפונקציה $f(x) = 2e^{\frac{x}{x^2+1}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- לאילו ערכי m יש למשוואה $f(x) = m$ בדיוק פתרון אחד?

(35) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
- כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(36) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2 + 1}$$

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(37) \text{ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: } f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+k}} \text{ בנקודה שבה } x=1 \text{ הוא } -\frac{12}{e^{10}}$$

- מצא את ערך הפרמטר k וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא: $0 < \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}} \leq e^2$.

$$(38) \text{ נתונה הפונקציה הבאה: } f(x) = e^{2x} + ae^x + b \text{ . גוזרים את הפונקציה פעמיים}$$

$$\text{וידוע כי כאשר } x = \ln \frac{2}{3} \text{ הנגזרות מקיימות: } f'(x) + f''(x) = 8$$

- מצא את a .
- משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 16x + 7 - 16 \ln 2$.
- מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
- מצא את b .
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

$$(39) \text{ נתונות הפונקציות הבאות: } f(x) = 6x - e^x \text{ ו- } g(x) = ae^x - e^{2x} + b$$

ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור x וכי שתיהן נפגשות על ציר ה- y .

- מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

40 לגרף הפונקציה: $f(x) = ax^2 \cdot e^{-bx^2}$ יש נקודת קיצון: $\left(2, \frac{4}{e}\right)$, $a, b \neq 0$.

- מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים ישר: $y = k$. באיזה תחום ערכים צריך להימצא k כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

41 לפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{e^{ax-1}}$ יש קיצון בנקודה שבה: $x = 1$.

- מצא את ערך הפרמטר a .
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

42 הישר $x = \sqrt{6}$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + m}$.

- מצא את ערך הפרמטר m וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43 נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$.

- מצא את הנקודות המקיימות: $f'(x) = 0$ וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- בכמה נקודות חותך הישר $y = -0.01$ את גרף הפונקציה?

44 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים

$$. f'(x) + f''(x) = 12 \text{ הנגזרות מקיימות: } x = \ln \frac{2}{3}$$

א. מצא את a .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 22x + 28 - 22 \ln 2$.

ב. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

ג. מצא את b .

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? אם כן מצא את הנקודות.

45 נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cdot a^x$, $(a > 0)$.

$$. x = -\frac{1}{\ln 2} \text{ לפונקציה יש נקודת קיצון שבה:}$$

א. מצא את a .

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה $x = 2$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

$$. g(x) = x^2 \cdot 2^x - kx \cdot 2^x \text{ עם גרף הפונקציה:}$$

ג. מצא את k .

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

46 נתונה הפונקציה: $f(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{1-x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה

עם ציר ה- y .

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

תשובות סופיות:

$$(11) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } x \neq 0 \quad \text{ג. } x \neq \ln 5 \quad \text{ד. } x \neq \ln 2, x \neq 0 \quad \text{ה. כל } x$$

$$\text{ו. } 0 \leq x \neq \frac{2}{5} \quad \text{ז. } x \leq 0, x \geq \ln 3$$

$$(12) \quad \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$$

$$(13) \quad \min(3, e^3)$$

$$(14) \quad \min(1.5, 0), \max(3.5, 0.483), b = -12, a = 4$$

$$(15) \quad p = -27, q = 35$$

$$(16) \quad y = 0$$

$$(17) \quad y = 0$$

$$(18) \quad x = 0, y = -5, y = 1$$

$$(19) \quad x = \ln 5, y = -\frac{1}{5}$$

$$(20) \quad y = -1, y = 1$$

$$(21) \quad \text{נקודת אי הגדרה: } (\ln 2, -1), x = \ln 3, y = -\frac{1}{3}, y = 0$$

$$(22) \quad x = 0, y = 0$$

$$(23) \quad y = 0$$

$$(24) \quad x = \frac{1}{3}, y = 0$$

$$(25) \quad y = 0$$

$$(26) \quad \text{נקודת אי הגדרה: } (0,0), x = 0$$

$$(27) \quad \left(3, \frac{10}{e^3}\right), a = 1, b = 1$$

$$(28) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } (1,0), (0,-1) \quad \text{ג. } \min(0,-1) \quad \text{ד. עולה: } x > 0 \quad \text{יורדת: } x < 0$$

$$\text{ב. כל } x \quad \text{ג. } (0,1) \quad \text{ד. פיתול } \left(-1, \frac{2}{e}\right) \quad \text{ה. עולה: } x < -1, x > -1$$

$$\text{ג. כל } x \quad \text{ד. } (0,0) \quad \text{ה. } \max\left(2, \frac{4}{e}\right), \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$$

$$\text{ו. עולה: } x < -2, 0 < x < 2 \quad \text{ז. יורדת: } x > 2, -2 < x < 0$$

$$\text{ד. כל } x \quad \text{ה. } (0,1) \quad \text{ו. } \min(0.5, e^{-0.25}) \quad \text{ז. עולה: } x > 0.5 \quad \text{יורדת: } x < 0.5$$

- ה.1. כל x .2. $(0,1)$.3. $\max(0,1)$.4. עולה: $x < 0$ יורדת: $x > 0$
- ו.1. כל x .2. $(0, 2e^{-1})$.3. $\min(0, 2e^{-1})$.4. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$
- (29) א. כל x .ב. $\min(2, -e^2)$.ג. תחומי עלייה: $x > 2$ תחומי ירידה: $x < 2$
- ד. $(3,0)$, $(0,-3)$
- (30) א. כל x .ב. $\max(0,3)$, $\min(\ln 3, 1.59)$.ג. תחומי עלייה: $x > \ln 3$ או $x < 0$ תחומי ירידה: $0 < x < \ln 3$.ד. $(0,3)$
- (31) א. כל x .ב. $\min\left(-1, -\frac{4}{e^{0.5}}\right)$, $\max\left(1, \frac{4}{e^{0.5}}\right)$.ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$ תחומי ירידה: $x > 1$ או $x < -1$.ד. $(0,0)$
- (32) א. כל x .ב. $\max\left(3, \frac{27}{e^3}\right)$.ג. עולה: $x < 3$, יורדת: $x > 3$
- ד. $(0,0)$
- (33) א. כל x .ב. $\min(-0.91, -0.67)$.ג. עולה: $x > -0.91$ יורדת: $x < -0.91$
- ד. $(0,0)$
- (34) א. כל x .ב. $\max(1, 2\sqrt{e})$, $\min\left(-1, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$.ג. עולה: $-1 < x < 1$ יורדת:
- ד. $(0,2)$.ה. $y = 2$.ו. $m = 2$, $m = 2\sqrt{e}$, $m = \frac{2}{\sqrt{e}}$
- (35) א. $x \neq 0$.ב. $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$.ג. עולה: $x > \frac{1}{2}$, יורדת: $0 \neq x < \frac{1}{2}$
- ד. אין
- (36) א. כל x .ב. $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$, $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$.ג. עולה: $x > \frac{1}{2}$, $x < \frac{1}{6}$ יורדת:
- ד. $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$.ד. $(0,1)$
- (37) א. $k = 1$, $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$.ב. $(-1, e^2)$
- ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום $0 < f(x) \leq e^2$
- (38) א. $a = 4$.ב. $x = \ln 2$.ג. $b = -5$.ד. $(0,0)$
- (39) א. $a = 12$, $b = -12$.ב. עולות: $x < \ln 6$ יורדות: $x > \ln 6$

א. $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2}$, $a=1$, $b=0.25$ (40) ב. $\max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$, $\min(0,0)$

ג. $(0,0)$ ה. $0 < k < \frac{4}{e}$

א. $a = \frac{1}{3}$ (41) ב. כן: $\left(11, \frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$ ג. עולה: $1 < x < 11$ יורדת: $x < 1, x > 11$

ד. $(-1,0)$, $(7,0)$, $(0,-7e)$

א. $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 6}$, $m = -6$ (42) ב. $\max\left(-2, -\frac{1}{2e^4}\right)$, $\min\left(3, \frac{e^6}{3}\right)$ ג. $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$

א. $x = 0, -1.5$. נקודת הקיצון היא: $\min\left(-1.5, -3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$ (43) ב. $y = 0$

ד. 2 נקודות.

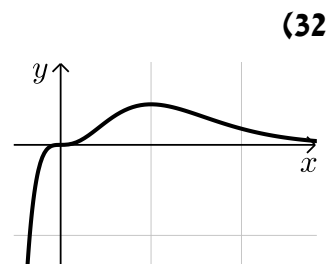
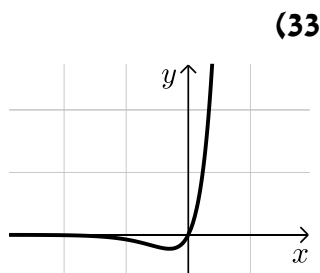
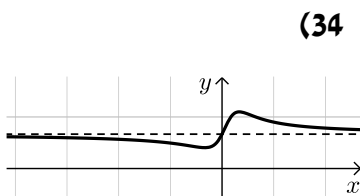
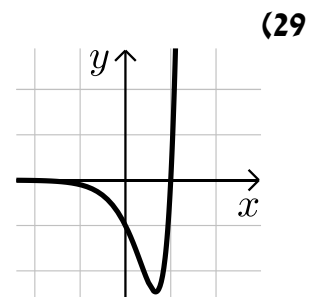
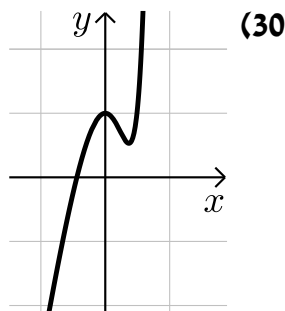
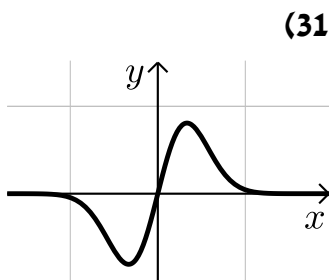
א. $a = 7$ (44) ב. $x = \ln 2$ ג. $b = 10$ ד. לא.

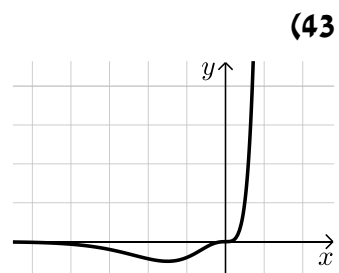
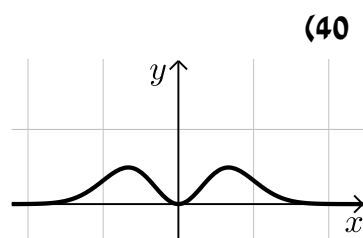
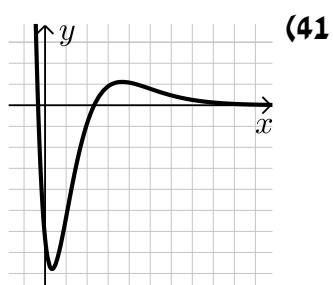
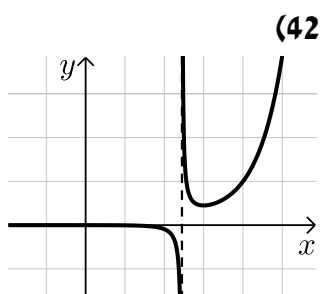
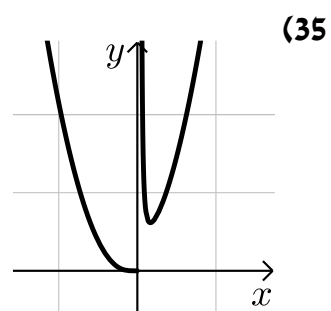
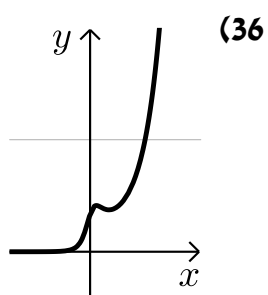
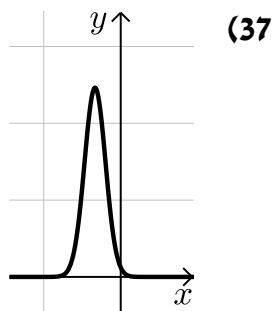
א. $a = 2$ (45) ב. עולה: $x > -\frac{1}{\ln 2}$ יורדת: $x < -\frac{1}{\ln 2}$ ג. $k = 1$

ד. $(0,0)$

א. $y = -x \ln 81 + 7$ (46) ג. $\min\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{243}\right)$

סקיצות לשאלות החקירה:





מתמטיקה השלמה

פרק 16 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

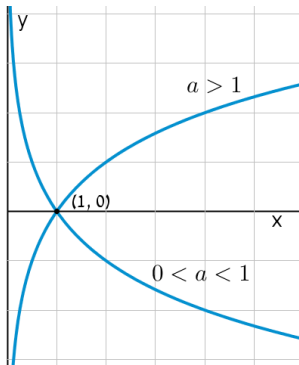
תוכן העניינים

- 199 1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית
- 204 2. שימושי הנגזרת
- 205 3. חקירה של פונקציה לוגריתמית

הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

סיכום כללי:

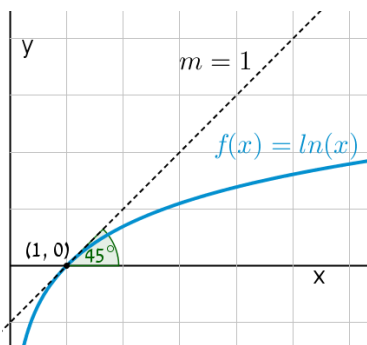
הגדרות כלליות:



להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה: $f(x) = \log_a x$ עבור $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:

תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה $x > 0$.
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- x בנקודה $(1, 0)$.
- עבור $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות $f(x) = \ln x = \log_e x$ נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x הוא 1:

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y = \log(f(x))$ הוא: $f(x) > 0$.

נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א. $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$ ב. $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה. $f(x) = \ln(\cos x)$ ו. $f(x) = \log_2 x + 5 \log_3(2x-1)$

2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x) = x \ln x$ ב. $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$ ג. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$ ה. $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x) = \ln^3 x$ ב. $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג. $f(x) = x^2 \ln^2 x$ ד. $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| א. $f(x) = \ln(x+2)$ | ב. $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3$ |
| ג. $f(x) = x^2 \ln x$ | ד. $f(x) = x^3 \ln x$ |
| ה. $f(x) = \ln e^{2x}$ | ו. $f(x) = e^x \ln x$ |
| ז. $f(x) = e^{-x^2} \ln x$ | ח. $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$ |
| ט. $f(x) = \ln(x^2)$ | י. $f(x) = \ln(x^4)$ |
| יא. $f(x) = (\ln x)^4$ | יב. $f(x) = x \ln x - \ln x^2$ |
| יג. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ | יד. $f(x) = \ln \sqrt{x}$ |
| טו. $f(x) = \sqrt{\ln x}$ | טז. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ |

5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

- | | |
|--|--|
| א. $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$ | ב. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ |
| ג. $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$ | ד. $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$ |
| ה. $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$ | ו. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ |
| ז. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$ | ח. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$ |
| ט. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ | י. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+5x}{1-5x}}$ |
| יא. $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$ | יב. $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$ |
| יג. $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$ | יד. $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$ |
| טו. $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$ | |

$$\frac{3\ln^2 x - \ln^3 x}{x^2} \quad \text{י.ב.}$$

$$\frac{\ln x - 4}{\ln^5 x} \quad \text{ט.ו.}$$

$$\frac{1 - 3\ln \sqrt[3]{x}}{3x^2} \quad \text{י.א.}$$

$$\frac{2(\ln^4 x - 1)}{x \ln^3 x} \quad \text{י.ד.}$$

$$\frac{5}{1 - 25x^2} \quad \text{י.}$$

$$\frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)} \quad \text{י.ג.}$$

שימושי הנגזרת:

שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $A(e, 1)$.

(7) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(8) הגרפים של הפונקציות $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1 - x$ נחתכים בנקודה A ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק ל- $f(x)$.
מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

(9) לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$.
מצא את משוואת המשיק.

(10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \ln(x^2 + 1)$ בנקודה שבה $x = 1$.

תשובות סופיות:

(6) $y = \frac{1}{e}x$

(7) $a = 2, b = -2$

(8) $y = \frac{1}{e}x$

(9) $y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$

(10) $y = \ln 2 \cdot x + x - 1$

חקירה של פונקציה לוגריתמית:

שאלות:

11 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \ln x$	ב. $f(x) = \ln(x^2)$
ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$	ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$
ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$	ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$
ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$	

12 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = 2 \ln x - x^2$.

13 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 \ln x$.

14 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$.

15 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$.

16 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$. הנקודה $(e^2, \frac{1}{e^2})$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

17 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$. הנקודה $(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8})$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

18 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(x-3)$.

19 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$.

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{2\ln x - 1}{\ln x + 1}$.

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$.

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$.

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = x \ln x + 2$.

(25) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

(26) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

- i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$y = x \ln x$ ב.	$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3 \ln x$ א.
$y = \sqrt{x} \ln x$ ד.	$y = x \ln x - x$ ג.
$y = \ln(x^2 + 1)$ ו.	$y = x^2 \ln x$ ה.

(27) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \ln^2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא לאלו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

(29) נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

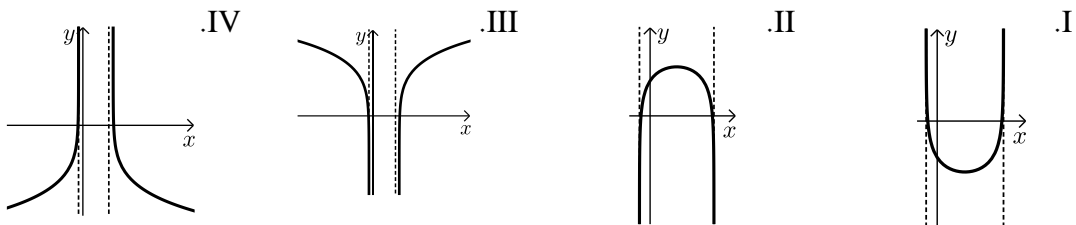
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \ln x$.
- מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$. ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור x , $(x_A = x_B)$.
- מצא את שיעור ה- x של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

31 נתונה שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.
 נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור x זהה.
 - לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
 - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- ב. בחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- x שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- y של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

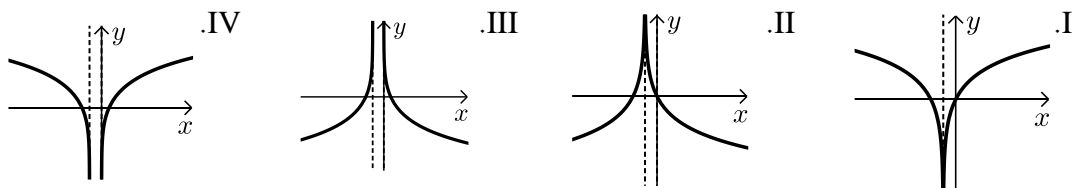
32 נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- y ?
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



33 נתונה הפונקציה: $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- y ?
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

34 לפניך הפונקציה הבאה : $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

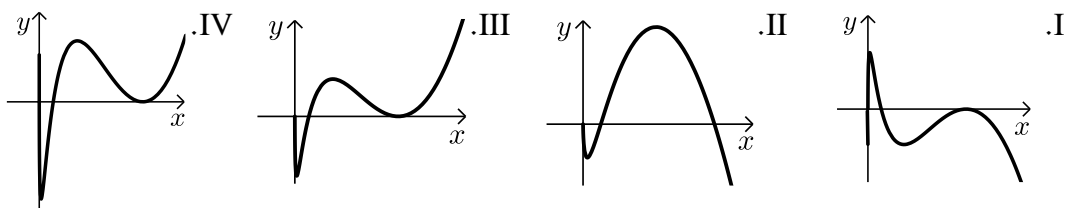
35 נתונה הפונקציה הבאה : $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

36 נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$.

- הראה כי נגזרת הפונקציה היא : $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$.
- מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ענה על השאלות הבאות :
 - מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 - מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.



37 נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה $g(x) = \ln x$.

38) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה : $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$

נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה : $x = e$.

39) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$, פרמטר חיובי, $a \neq 1$

א. הבע באמצעות a את :

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת $y' = 0$.

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום : $x > e - 2$. מצא את a .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x > -1$.

ד. נתון הישר : $y = k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של k עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

40) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \ln x + \frac{1}{x}$

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר y ?

אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

(11) א. $x > 0$ ב. $x \neq 0$ ג. $x > 10$ או $x < -2$ ד. $x > \ln 4$
 ה. $0 < x \neq e$ ו. $x > 0$ וגם $x \neq e^3, e^{-1}$ ז. $x \geq e$

(12) $\max(1, -1)$

(13) $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$

(14) $\max\left(e, \frac{1}{e}\right)$ קצה, $\min(\sqrt{e}, 0)$

(15) $\min(4, -1)$

(16) $a = 1, b = -1$

(17) $a = 1, b = -1$

(18) $x = 3$

(19) נקודת אי הגדרה $(0, 0)$, $y = 0, x = e$

(20) נקודת אי הגדרה $(0, 2)$, $y = 2, x = \frac{1}{e}$

(21) נקודת אי הגדרה $(e^2, \frac{1}{4})$, $(0, 0)$; $y = 0, x = \frac{1}{e^2}$

(22) $x = 0, y = 0$

(23) נקודת אי הגדרה $(0, 0)$

(24) נקודת אי הגדרה $(0, 2)$

(25) $\left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$

(26) א. i. $x > 0$ iii. $\max(1, -3.5), \min(3, \ln 27 - 7.5)$

iv. עולה: $0 < x < 1, x > 3$ יורדת: $1 < x < 3$ ב. i. $x > 0$ ii. $(1, 0)$

iii. $\min(e^{-1}, -e^{-1})$ iv. עולה: $x > e^{-1}$ יורדת: $0 < x < e^{-1}$

ג. i. $x > 0$ ii. $(e, 0)$ iii. $\min(1, -1)$ iv. עולה: $x > 1$ יורדת: $0 < x < 1$

ד. i. $x > 0$ ii. $(1, 0)$ iii. $\min\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right)$ iv. עולה: $x > e^{-2}$ יורדת: $0 < x < e^{-2}$

ה. i. $x > 0$ ii. $(1, 0)$ iii. $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$ iv. עולה: $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ יורדת: $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל x ii. $(0, 0)$ iii. $\min(0, 0)$ iv. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$

(27) א. $x > 0$ ב. $\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right), \min(1, 0)$

ג. עלייה: $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{e^2}$, ירידה: $\frac{1}{e^2} < x < 1$ ד. $(1, 0)$.

(28) א. $0 < x \neq e$ ב. $\min(e^2, e^2)$ ג. עלייה: $x > e^2$, ירידה: $0 < x < e^2$

ו. $k > e^2$ ד. אין.

(29) א. $x > 0$ ב. $\min(4, -1)$ ג. עלייה: $x > 4$, ירידה: $0 < x < 4$

ד. $(1, 0), (16, 0)$.

(30) א. $x \geq 1$ ב. מתקבל: $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$ ג. $(1, 0), (e, 1)$

ד. $x = \sqrt[4]{e}$.

(31) א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $x > 0, x \neq 1$ ותחום ההגדרה של $g(x)$ הוא: $x > 0$.

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x = e$ אך עבור $f(x)$ מדובר במינימום ועבור $g(x)$ מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור $f(x)$: עולה: $x > e$ יורדת: $0 < x < e, x \neq 1$.

ועבור $g(x)$: עולה: $0 < x < e$ יורדת: $x > e$. iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- y שלה הוא: $y = \frac{x}{\ln x}$ ו- $y = \frac{\ln x}{x}$.

נכפול: $y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$.

(32) א. $x < -1, x > 7$ ב. $x = -1, 7$ ג. עולה: $x > 7$ יורדת: $x < -1$.

ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום. באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

(33) א. $x \neq -1$ ב. $x = -1$ ג. עולה: $x > -1$ יורדת: $x < -1$.

ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. $x \neq -1, -2 < x < 0$.

34 א. $0 < x < e$. (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם: $1 - \ln x > 0$ וגם $x > 0$).

ב. $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0$. ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.

ג. $(1, 0)$.

35 א. $x < -\frac{1}{2}, x > 1$. ב. $x = -\frac{1}{2}, 1$. ג. $(-2, 0)$.

ד. מתקבל: $y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$.

36 ב. $x > 1, e^{-4} < x < e^{-1}$.

ג. i. 2 נקודות והן: $(e^{-2}, 0)$, $(1, 0)$. הנקודה שבה: $x = 0$ לא קיימת עקב ת.ה.

ii. $x \neq 1, x > e^{-2}$. ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.

שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

37 א. $x > 0$. ב. $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$, $(1, 0)$, $(e^{\sqrt{3}}, 0)$. ג. $\min(e, -2)$, $\max(e^{-1}, 2)$.

ה. $(1, 0)$, $(e^2, 2)$, $(e^{-2}, -2)$.

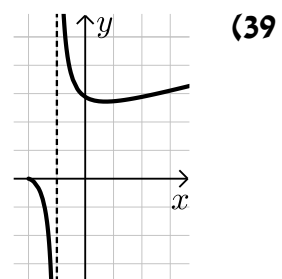
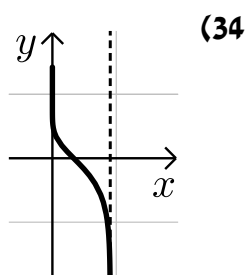
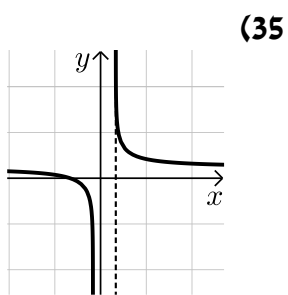
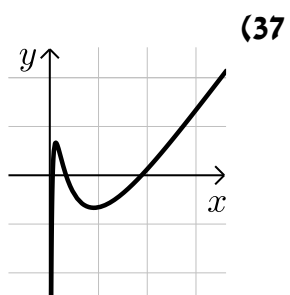
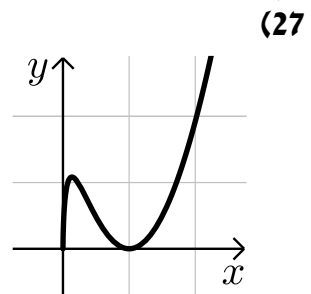
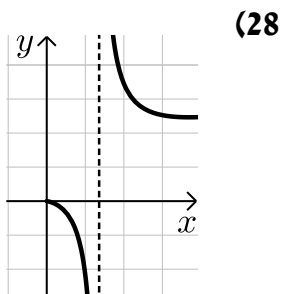
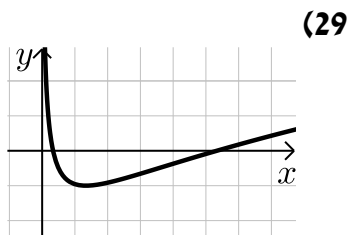
38 א. $x = e$. ב. מתקבל: $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$. ג. $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$.

39 א. i. $x > -a, x \neq 1 - a$. ii. $(e - a, e)$. iii. $(0, \frac{a}{\ln a})$.

iv. $x = 1 - a$. ב. $a = 2$. ד. $k < e$.

40 א. i. $x > 0$. ii. $x = 0$. ב. $\min(1, 1)$. ג. עולה: $x > 1$, יורדת: $0 < x < 1$.

סקיצות לשאלות:



מתמטיקה השלמה

פרק 17 - חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון

תוכן העניינים

215	1. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים
217	2. בעיות קיצון בהנדסת המישור
221	3. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים
225	4. בעיות קיצון בהנדסת המרחב
227	5. בעיות קיצון עם תשובה נתונה
228	6. בעיות קיצון שונות בהנדסת המישור
232	7. בעיות קיצון שונות בהנדסת המרחב
234	8. בעיות קיצון שונות בפונקציות וגרפים

בעיות קיצון יסודיות עם מספרים:

סיכום כללי:

שלבי עבודה:

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x .
- נוודא שערך ה- x מהסעיף הקודם הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

שאלות:

- (1) מבין כל זוגות המספרים שסכומם 14 מצא את הזוג שמכפלתו מקסימלית.
- (2) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצא מהם המספרים אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- (3) מצא את המספר החיובי שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- (4) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
 - א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
 - ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
 - ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- (5) x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x + 6y = 60$.
 - א. הבע את y באמצעות x .
 - ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
 - ג. מהי המכפלה הנ"ל?

תשובות סופיות:

(1) $.7, 7$

(2) $.8, 8, 8$

(3) $.1$

(4) $12, 12, 12$ א.

ב. $16, 12, 8$ ג. מקרה א'.

(5) א. $y = 10 - \frac{x}{6}$ ב. $x = 30, y = 5$ ג. $M = 22500$.

בעיות קיצון בהנדסת המישור:

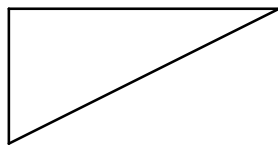
שאלות:

6) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם a , מצא את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

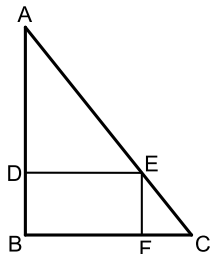
ב. הוכח: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.



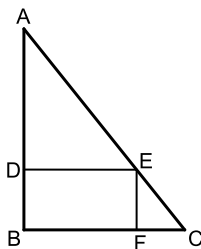
8) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ.
א. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי שטח המשולש יהיה מקסימלי?

ב. מהו השטח המקסימלי?

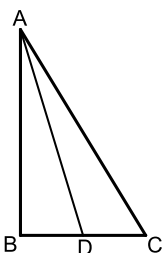
ג. מה יהיה אורך היתר במשולש במקרה זה?



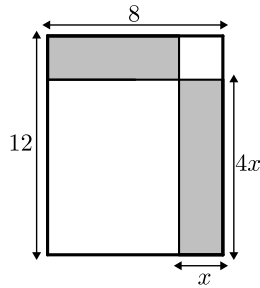
9) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע $EDBF$ הוא מלבן. נתון: $AB = 20$ ס"מ, $BC = 16$ ס"מ. מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



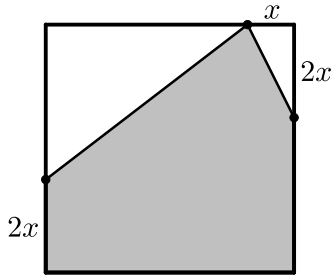
10) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע $EDBF$ הוא מלבן. נתון: $AB = a$, $BC = b$. מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



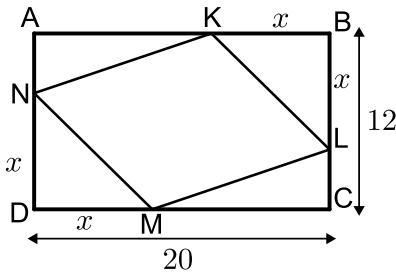
11) במשולש ישר הזווית ABC ($\sphericalangle B = 90^\circ$), הוא תיכון לניצב BC ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ. מצא מה צריכים להיות אורכי הניצבים עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



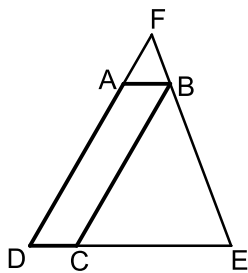
12 נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ כמתואר באיור. מקצים קטעים באורכים של x ו- $4x$ על צלעות המלבן כך שנוצרים המלבנים המסומנים. מצא את x עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.



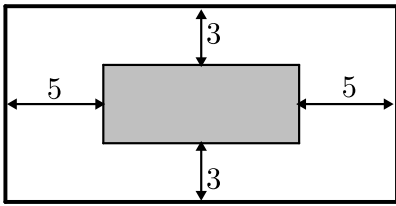
13 נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ. מקצים קטע שאורכו x על הצלע העליונה ושני קטעים שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות כמתואר באיור כך שנוצר המחומש המסומן. מצא מה צריך להיות ערכו של x עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.



14 הנקודות K, L, M, N מקצות קטעים שווים במלבן $ABCD$ כך ש: $BK = BL = DM = DN = x$. צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.
א. הבע באמצעות x את סכום שטחי המשולשים: $\triangle AKN + \triangle KBL + \triangle CLM + \triangle DNM$
ב. מצא מה צריך להיות x כדי ששטח המרובע $LKNM$ יהיה מקסימלי.
ג. מה הוא השטח של המרובע $LKNM$ במקרה זה?



15 המרובע $ABCD$ הוא מקבילית. מהקדקוד B מעבירים את הצלע EF הנפגשת עם המשכי הצלעות AD ו- DC . ידוע כי מידות המקבילית הן: $AB = 2$ ס"מ, $AD = 8$ ס"מ. מסמנים את אורך הצלע DE ב- x .
א. הבע באמצעות x את אורך הצלע DF .
ב. מצא את x עבורו סכום הצלעות DE ו- DF הוא מינימלי.
ג. מה הוא הסכום המינימלי?



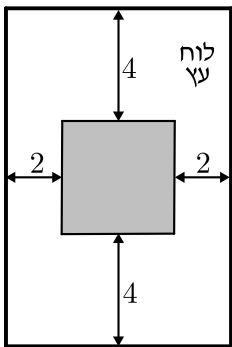
16) חיים הוא אחד מעובדי חברת "דפוס יהלום בע"מ". תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי כך שישארו רווחים של 3 ס"מ מקצוות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).

יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי ששאל אותו את השאלה הבאה: "יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.

מה הן המידות של גלויה אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?"

א. עזור לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראה דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

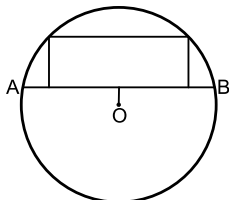


17) אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה: יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ ובקצוות העליון והתחתון - 4 ס"מ (ראה איור).

כדי לבחור את מידות לוח העץ, אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).

א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

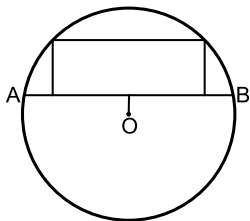


18) במעגל שמרכזו O ורדיוסו $10\sqrt{5}$ ס"מ העבירו

מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

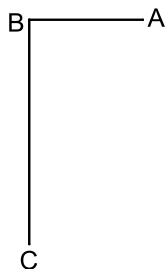


19) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB

שמרחקו ממרכז המעגל הוא a.

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



20) שני הולכי רגל יוצאים בו זמנית לדרכם, האחד

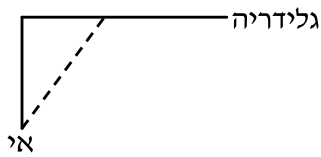
מעיר A מערבה לעיר B והשני מעיר B דרומה לעיר C.

המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.

מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש

כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי?

מצא גם את המרחק המינימלי.



- (21)** אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק"מ מהחוף. על החוף, במרחק של 3 ק"מ מהנקודה הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה. האדם שוחה במהירות של 8 קמ"ש ורץ על החוף במהירות של 10 קמ"ש. לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?



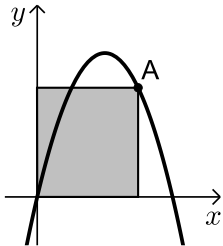
- (22)** אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

תשובות סופיות:

- (6) 8 ס"מ.
 (7) א. $a/3$. ב. הוכחה.
 (8) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ. ב. 18 סמ"ר.
 (9) 80 סמ"ר $S =$.
 (10) $\frac{ab}{4}$ יחידות שטח.
 (11) 4 ס"מ, 16 ס"מ.
 (12) $x = 2.75$.
 (13) $x = 6$.
 (14) א. $2x^2 - 32x + 240$. ב. $x = 8$.
 (15) א. $DF = \frac{8x}{x-2}$. ב. $x = 6, L = \frac{x^2 + 6x}{x-2}$.
 (16) א. 6 ס"מ על 10 ס"מ. ב. 12 ס"מ על 20 ס"מ.
 (17) א. 11 ס"מ על 22 ס"מ. ב. $S = 98$.
 (18) 92 ס"מ.
 (19) $2\sqrt{5R} - 2a$ יחידות אורך.
 (20) 4 שעות, המרחק: $\sqrt{80}$ ק"מ.
 (21) $2\frac{1}{3}$ ק"מ.
 (22) 4·6
- ג. $6\sqrt{2} \approx 8.48$ ס"מ.
 ג. 128 סמ"ר $S =$.
 ג. $L = 18$.

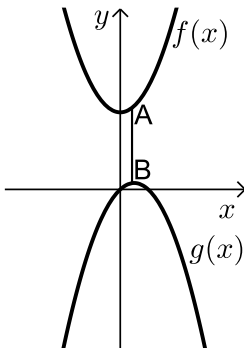
בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:

שאלות:



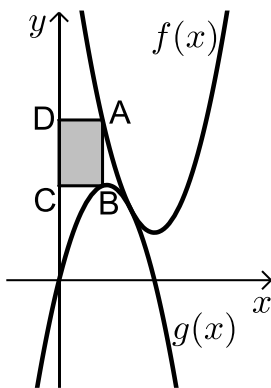
(23) נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$.

מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



(24) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 12$ ו- $g(x) = 2x - x^2 - 1$.

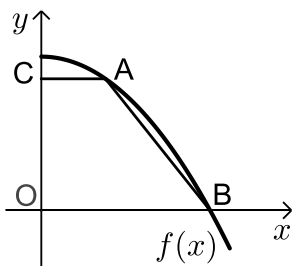
כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



(25) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

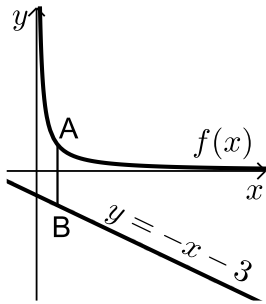
הפונקציות: $f(x) = x^2 - 8x + 18$ ו- $g(x) = -x^2 + 4x - 1$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y כך שנוצר מלבן (המסומן). נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
 א. הבע באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
 ב. מצא את ערכו של t עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
 ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



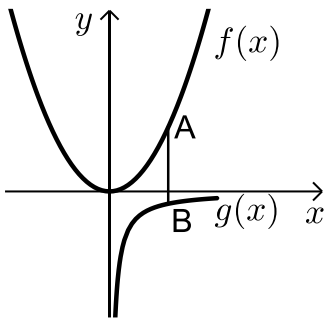
(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = 36 - x^2$.

על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר ה- x שחותך את ציר ה- y בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ו-O ראשית הצירים.
 א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
 ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?



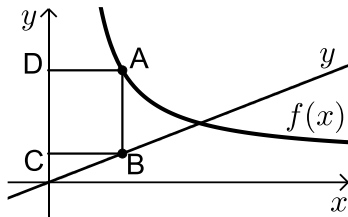
(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4}{x}$ ונתון הישר: $y = -x - 3$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הישר כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



(28) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ו- $g(x) = -\frac{1}{x}$.

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ונקודה B על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצא את שיעורי הנקודות A ו-B עבור אורך הקטע AB מינימלי.



(29) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציה: $f(x) = \frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y = \frac{9x}{25}$.

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- y כך שנוצר המלבן ABCD. נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

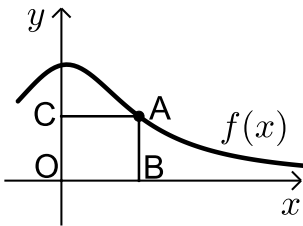
א. הבע באמצעות t את היקף המלבן ABCD.

ב. מצא את t עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

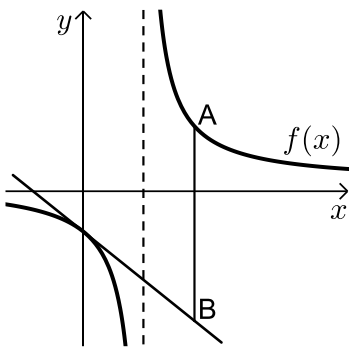
(30) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x-1}$ והישר $y = 2x$.

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן. מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.



31 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$ בתחום: $x \geq 0$.

- מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABCO כמתואר באיור.
- א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.
- ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.



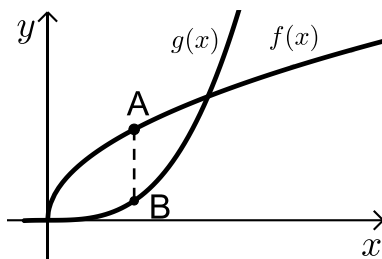
32 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$.

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- א. מצא את משוואת המשיק.
- מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

- ב. מצא את שיעורי הנקודה A עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.
- ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

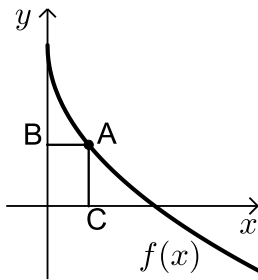
33 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

- מצא שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.



34 נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$.

- את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
- מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



- (35)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 6 - 3\sqrt{x}$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C כמתואר באיור. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A ב-t. א. הבע באמצעות t את סכום הקטעים AC+AB. ב. מצא את ערכו של t עבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.

- (36)** נתונות הפונקציות: $f(x) = 1 - x^2$ ו- $g(x) = bx^2$ ($b > 0$). הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B. מצא את ערכו של b שבעבורו הקטע AO מינימלי (O - ראשית הצירים).

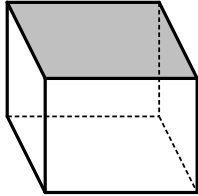
תשובות סופיות:

- (23)** A(4,8)
- (24)** A(0.5,12.25)
- (25)** א. $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$ ב. $t = 1$ ג. $S = 8$
- (26)** א. A(2,32) ב. $S = 128$
- (27)** A(2,2)
- (28)** A(1, 1/2), B(1,-1)
- (29)** א. $P = \frac{1.28t^2 + 0.72t + 16}{t-1}$ ב. $t = 4 \frac{3}{4}$ ג. $P = 12.88$ ס"מ
- (30)** 1.2
- (31)** א. A(2,2) ב. A(0,4)
- (32)** א. $y = -3x - 5$ ב. A(4,7) ג. AB = 24
- (33)** $(\sqrt{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}})$
- (34)** A(1,2)
- (35)** א. $l = t + 6 - 3\sqrt{t}$ ב. $t = 2.25$
- (36)** b=1

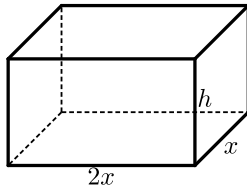
בעיות קיצון בהנדסת המרחב:

שאלות:

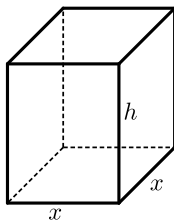
- (37) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר. מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.



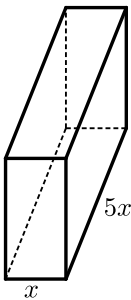
- (38) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח פניה (ללא המכסה) הוא 75 סמ"ר. מצא את אורך צלע הבסיס של התיבה שנפחה הוא מקסימלי.



- (39) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה כמתואר באיור. ידוע כי גובה התיבה h וצלע המלבן הקטנה x מקיימים: $x + h = 9$. מצא מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה כדי שנפחה יהיה מקסימלי.



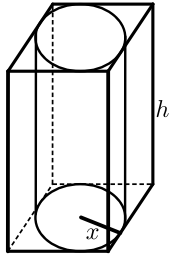
- (40) נתונה תיבה שגובהה הוא h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו היא x . נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים: $4x + h = 63$.
 א. הבע את h באמצעות x .
 ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות x .
 ג. מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח הפנים יהיה מקסימלי?



- (41) ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק. יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5 מרוחבו כמתואר באיור הסמוך. כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת ולכן הוא רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח שעליו להשתמש בכדי להשיג את מבוקשו. מצאו את כמות הפח המינימלית.

- (42) לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה דרושים שני חומרים להם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון. מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

43) מכל הגלילים הישרים שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k מצא את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.



44) באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- x וגובהו ב- h . ידוע כי הסכום של x ו- h הוא 12 ס"מ.

א. הבע באמצעות x את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.
ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע באמצעות x את נפח הגליל.

ii. הבע באמצעות x את נפח התיבה.

ג. מצא את x עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

45) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא k ושטח המעטפת שלה הוא S . הוכח: $S < 2k^2$.

תשובות סופיות:

37) 4·4·4 ס"מ.

38) 5 ס"מ.

39) בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.

40) א. $h = 63 - 4x$ ב. $p = -14x^2 + 252x$ ג. $x = 9$.

41) 3 ס"מ, 15 ס"מ ו-5 ס"מ.

42) 8·6·3 ס"מ.

43) $V = \frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח.

44) א. $2x$ ב. i. $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$ ii. $V = 48x^2 - 4x^3$

ג. $x = 8$

45) הוכחה.

בעיות קיצון עם תשובה נתונה:

שאלות:

בעיות קיצון בהנדסת המרחב:

(1) נתונים שני מספרים חיוביים p ו- q שסכומם a .
 הראה שכאשר מתקיים $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$ ערך הביטוי $p^n q^m$ (n ו- m טבעיים) מקסימלי.

(2) הוכח שמכל החרוטים הישרים שנפחם πk סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו $\sqrt[3]{6k}$ ס"מ.
 (שטח מעטפת של חרוט הוא πRl , כאשר l הוא הקו היוצר של החרוט).

בעיית קיצון עם תנועה:

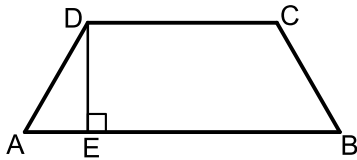
(3) מהירותו של רכב היא v קמ"ש ועליו לנסוע דרך של S ק"מ.
 לרכב יש הוצאות נסיעה של $\frac{v}{400}$ ש"ח לכל ק"מ נסיעה ו- $\frac{v^2}{200} + 48$ ש"ח לכל שעת נסיעה.
 הראה שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

תשובות סופיות:

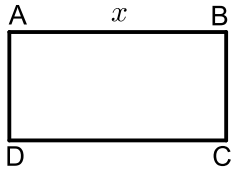
- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) הוכחה.

בעיות קיצון שונות בהנדסת המישור:

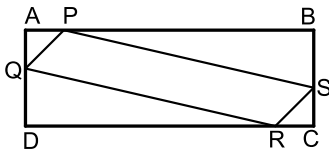
שאלות:



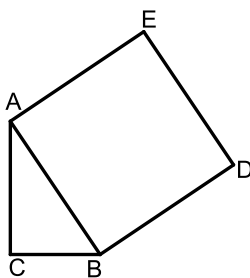
- (1) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ($AB \parallel CD$) אורך השוק הוא 4 ס"מ ואורך הבסיס הקטן הוא 6 ס"מ. DE הוא הגובה מקדקוד D (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הקטע AE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?



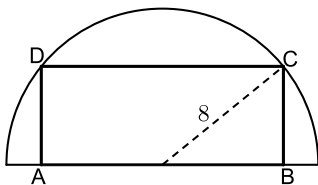
- (2) נתון מלבן ABCD .
נסמן ב- x את אחת מצלעות המלבן (ראה ציור). אם היקף המלבן הוא 60 ס"מ:
א. בטא באמצעות x את שטח המלבן.
ב. אם היקף המלבן הוא p מצא מה צריכות להיות אורכי צלעות המלבן כדי ששטחו יהיה מקסימלי. (הבע את אורכי הצלעות באמצעות p).



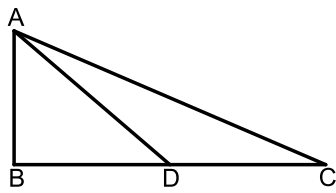
- (3) נתון מלבן ABCD כך ש- $AD = BC = 5$ ס"מ, $AB = CD = 10$ ס"מ. על צלעות המלבן מקצים קטעים: $AP = AQ = CS = CR = x$ (ראה ציור). מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח המקבילית PQRS יהיה מקסימלי?



- (4) במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) סכום אורכי הניצבים הוא 8 ס"מ. על היתר AB בונים ריבוע ABDE. מה צריכים להיות אורכי הניצבים כדי ששטח המחומש AEDBC יהיה מינימלי?



- (5) בחצי עיגול שרדיוסו 8 ס"מ חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB של המלבן מונחת על הקוטר, והקדקודים C ו-D מונחים על הקשת (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הצלע AB כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



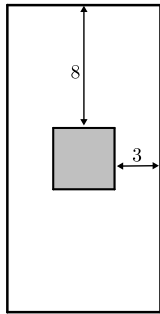
6) במשולש ישר-זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$),

סכום אורכי הניצבים הוא 30 ס"מ.

AD הוא תיכון לניצב BC.

חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים,

על מנת שריבוע אורך התיכון יהיה מינימלי.



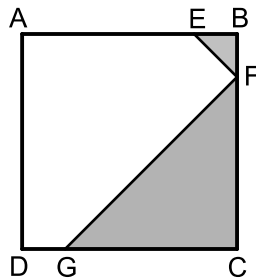
7) בחוברת פרסום, שטח כל עמוד הוא 600 סמ"ר.

רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו הוא 8 ס"מ,

ורוחב השוליים בצדדים הוא 3 ס"מ.

מצא מה צריך להיות האורך והרוחב של כל עמוד כדי שהשטח

המיועד לדפוס יהיה מקסימלי (השטח המסומן בציור).



8) בריבוע ABCD הנקודות E, F, G נמצאות על

הצלעות AB, BC, DC בהתאמה, כך

ש- $BE = BF$, $CF = CG$ (ראה ציור).

נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ.

א. סמן ב- x את BF ואת BE, והבע באמצעות x

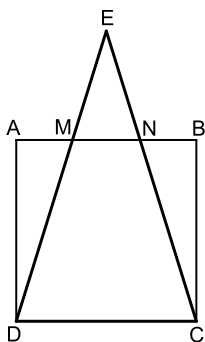
את הסכום של שטחי המשולשים EBF ו-FCG

(השטח המסומן בציור)

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את x שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא מינימלי.

ii. חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים.



9) נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ.

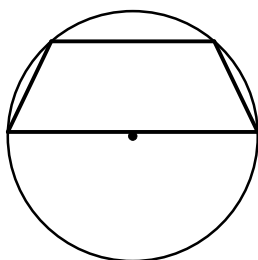
E היא נקודה כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC הוא

שווה שוקיים ($ED = EC$).

שוקי המשולש חותכות את הצלע AB בנקודות M ו-N (ראה ציור).

מצא מה צריך להיות אורך הקטע AM כדי שהסכום של

שטחי המשולשים AMD, EMN, BNC יהיה מינימלי.



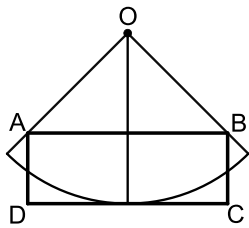
10) נתון מעגל שרדיוסו R . במעגל זה חסום טרפז שוו"ש,

כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר במעגל (ראה ציור).

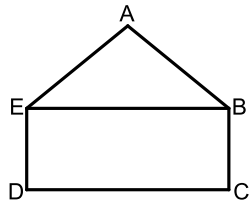
מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה,

הבע באמצעות R את אורך הבסיס הקטן בטרפז

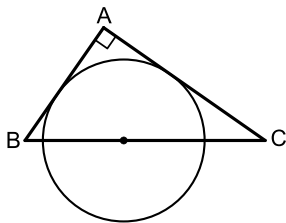
ששטחו מקסימלי.



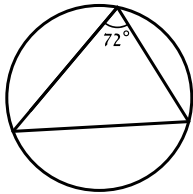
- 11** נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו O ורדיוסו 10 ס"מ. בונים מלבן $ABCD$, כך שרבע המעגל משיק לצלע DC בנקודת האמצע שלה, והקדקודים A ו- B נמצאים על הרדיוסים התוחמים את הגזרה (ראה ציור). מבין כל האלכסונים של המלבנים $ABCD$ שנוצרים באופן זה, מצא את אורך האלכסון הקצר ביותר.



- 12** $ABCDE$ הוא מחומש המורכב ממשולש ABE וממלבן $EBCD$ (ראה ציור). נתון: $BC = 2$ ס"מ, $AB = AE = 4$ ס"מ. מצא את השטח של המחומש ששטחו מקסימלי.



- 13** מתבוננים בכל המשולשים ישרי הזווית ABC החוסמים חצי מעגל שרדיוסו R כמתואר בציור. מהן זוויות המשולש שסכום הניצבים שלו הוא מינימלי?



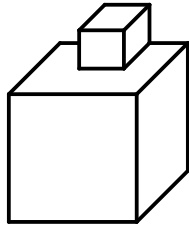
- 14** במעגל שרדיוסו R חסומים משולשים כך שהגודל של הזווית בכל אחד מהמשולשים הוא $\frac{2\pi}{5}$. מצא את הזוויות במשולש בעל ההיקף המקסימלי.

תשובות סופיות:

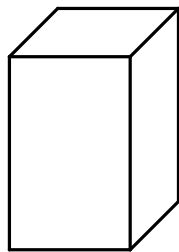
- (1) $AE = 1.7$ ס"מ
- (2) $x(30-x)$ א. ב. כל צלע שווה ל- $0.25p$.
- (3) $x = 3.75$ ס"מ
- (4) $AC = BC = 4$
- (5) $AB = 2\sqrt{32}$
- (6) $AB = 6$ ס"מ, $BC = 24$ ס"מ
- (7) אורך: 40 ס"מ, רוחב: 15 ס"מ.
- (8) א. $S = x^2 - 6x + 18$ ב. $x = 3$ ב. ii. 9 סמ"ר.
- (9) $AM = \frac{5}{\sqrt{2}}$
- (10) $R =$ בסיס קטן
- (11) $4\sqrt{5}$ ס"מ
- (12) $12\sqrt{3}$ סמ"ר
- (13) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$
- (14) $\frac{3}{10}\pi, \frac{3}{10}\pi, \frac{2}{5}\pi$

בעיות קיצון שונות בהנדסת המרחב:

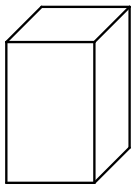
שאלות:



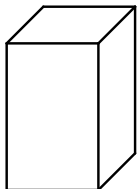
15 גובהו של "מגדל" הבנוי משתי קוביות (לאו דווקא שוות) הוא 8 ס"מ.
מה צריך להיות אורך המקצוע של הקובייה התחתונה כדי שנפח המגדל (סכום נפחי הקוביות) יהיה מינימלי?



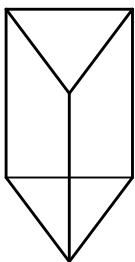
16 בונים תיבה שגובהה y ס"מ, ובסיסה ריבוע, שאורך צלעו x ס"מ (ראה ציור), כך שההיקף של כל אחת מהדפנות הצדדיות שווה ל-12 ס"מ.
מה צריך להיות אורך צלע הבסיס כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?



17 יש לבנות תיבה פתוחה מלמעלה, שבסיסה ריבוע ושטח פניה הוא 75 סמ"ר (במקרה זה שטח הפנים מורכב מבסיס אחד ומארבע פאות צדדיות). מכל התיבות שאפשר לבנות, מצא את ממדי התיבה (צלע הבסיס וגובה) שנפחה מקסימלי.

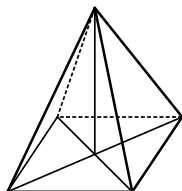


18 יש להכין מחוט תיל "שלד" (מסגרת) של תיבה, שבסיסה ריבוע ונפחה 1000 סמ"ק.
מהו האורך המינימלי של החוט הנחוץ ליצירת התיבה?

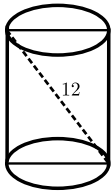


19 מחוט שאורכו a ס"מ יש לבנות מנסרה משולשת ישרה, שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. מצא איזה חלק מאורך החוט יש להקצות לצלע הבסיס x ואיזה חלק לגובה y כדי שיתקיים (בטא ע"י a):
א. שטח המעטפת של המנסרה יהיה מקסימלי.
ב. נפח המנסרה יהיה מקסימלי.

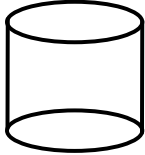
20 מכל הפירמידות המרובעות, המשוכללות והישרות, שאורך המקצוע הצדדי שלהן הוא a , מצא את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.



21 מכל הפירמידות הישרות, שבסיסן ריבוע ושטח הפנים שלהן הוא 200 סמ"ר, חשב את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.

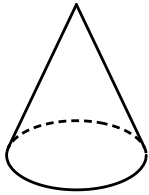


(22) אלכסון החתך הצירי של גליל ישר הוא 12 ס"מ (ראה ציור). מצא מה צריכים להיות גובה הגליל ורדיוס בסיסו כדי שנפחו יהיה מקסימלי.



(23) נתון מיכל גלילי פתוח מלמעלה שקיבולו 64 מ"ק. המיכל עשוי כולו מפח. הראה כי שטח הפח הוא מינימלי כאשר רדיוס הבסיס

$$\text{הוא } \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ מטר.}$$



(24) מבין כל החרוטים שאורך הקו היוצר שלהם הוא 10 ס"מ (ראה ציור), מהו נפח החרוט שנפחו מקסימלי?

תשובות סופיות:

(15) 4 ס"מ.

(16) 4 ס"מ.

(17) צלע הבסיס: 5 ס"מ, גובה: 2.5 ס"מ.

(18) 120 ס"מ.

(19) א. $x = \frac{1}{12}a$, $y = \frac{1}{6}a$. ב. $x = y = \frac{1}{9}a$.

(20) $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$.

(21) $\frac{500}{3}$ סמ"ק.

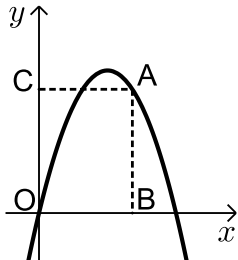
(22) גובה: $\sqrt{48}$ ס"מ. רדיוס: $\sqrt{24}$ ס"מ.

(23) הוכחה.

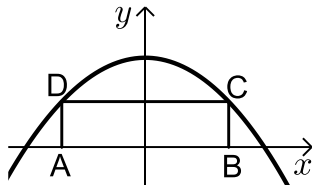
(24) 403.1 סמ"ק.

בעיות קיצון שונות בפונקציות וגרפים:

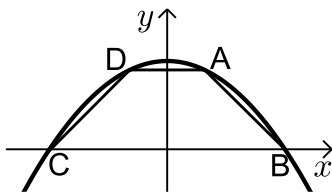
שאלות:



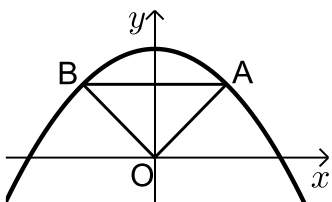
- (25)** מנקודה A, הנמצאת על גרף הפונקציה $y = -x^2 + 5x$, מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן ABCO (ראה ציור).
 א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?
 ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי?



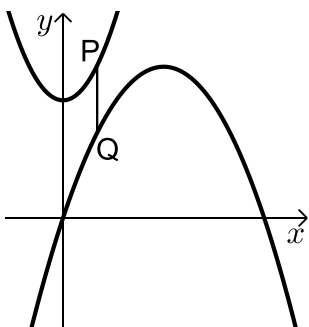
- (26)** בפרבולה $y = 9 - x^2$ חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB מונחת על ציר ה-x (ראה ציור).
 מה צריך להיות אורך הצלע CD כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



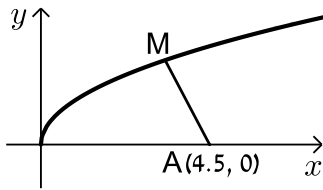
- (27)** טרפז ABCD חסום בין גרף הפרבולה $y = 9 - x^2$ לבין ציר ה-x (ראה ציור).
 א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABCD יהיה מקסימלי?
 ב. חשב את השטח המקסימלי של טרפז ABCD.



- (28)** נתונה הפרבולה $y = -x^2 + 12$. ישר המקביל לציר ה-x חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B (ראה ציור).
 מחברים את הנקודות A ו-B עם ראשית הצירים, O.
 א. מה צריך להיות אורך הקטע AB כדי ששטח המשולש AOB יהיה מקסימלי?
 ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB?

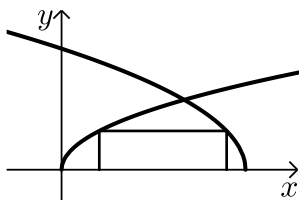


- (29)** נתונים הגרפים של שתי פרבולות: $y = \frac{1}{2}x^2 + 7$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 1$.
 קו מקביל לציר ה-y חותך את שתי הפרבולות בנקודות P ו-Q (ראה ציור). מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה, מצא את האורך המינימלי של הקטע PQ.

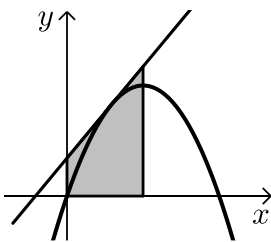


- 30** נתון גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$.
על ציר ה- x נתונה הנקודה $A(4.5, 0)$ (ראה ציור).
מצא על גרף הפונקציה נקודה M , כך שריבוע המרחק AM יהיה מינימלי.

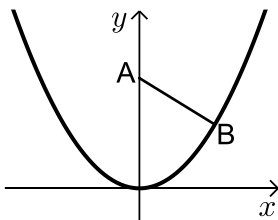
- 31** מצא על הישר $y = 3x - 4$ את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $(0, 1)$.



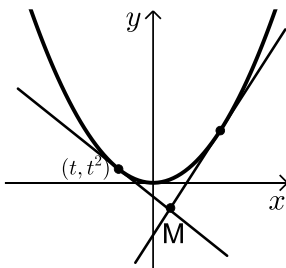
- 32** בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt{3x}$, $g(x) = \sqrt{36-6x}$.
מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות ובין ציר ה- x , כמתואר בציור.
מצא את השטח הגדול ביותר האפשרי למלבן שחסום באופן זה.



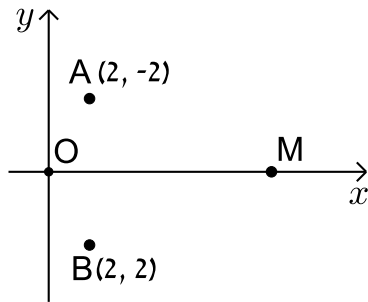
- 33** דרך איזו נקודה על הפרבולה $y = -x^2 + 2x$ צריך להעביר משיק, כדי ששטח הטרפז, הנוצר על ידי המשיק והישרים: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ (השטח המסומן שבציור) יהיה מינימלי?



- 34** נקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $y = x^2$ ברביע הראשון. A היא הנקודה $(0, a)$ כאשר ידוע כי $a > 0.5$ (ראה ציור).
א. בטא באמצעות a את שיעורי הנקודה B , שעבורה המרחק AB הוא מינימלי.
ב. מצא עבור איזה ערך של a המרחק המינימלי הוא 2.



- 35** נתונה הפרבולה $y = x^2$, ונתון משיק לפרבולה שמשוואתו היא $y = 6x - 9$. בנקודה (t, t^2) שעל הפרבולה מעבירים משיק נוסף לפרבולה.
המשיקים נחתכים בנקודה M (ראה ציור).
א. הבע את משוואת המשיק הנוסף באמצעות t .
ב. מצא את t שעבורו אורך הקטע, המחבר את הנקודה M עם קדקוד הפרבולה יהיה מינימלי.



(36) במערכת צירים נתונות הנקודות $A(2, 2)$ ו- $B(2, -2)$. ראשית הצירים היא בנקודה O . M היא נקודה על ציר ה- x בתחום $x > 0$. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה M , כדי שהסכום: $OM + MA + MB$ יהיה מינימלי?

תשובות סופיות:

ב. $A(0, 0)$ או $A(5, 0)$.

ב. 32.

ב. $S_{\Delta AOB} = 16$.

ב. 4.25.

ב. $t = -\frac{3}{37}$.

א. $A(3, 6)$ (25)

א. $CD = 2\sqrt{3}$ (26)

א. $A(1, 8)$ (27)

א. $AB = 4$ (28)

א. $PQ = 4$ (29)

א. $M(4, 2)$ (30)

א. $(1.5, 0.5)$ (31)

א. 8 (32)

א. $(0.5, 0.75)$ (33)

א. $B\left(\sqrt{\frac{2a-1}{2}}, \frac{2a-1}{2}\right)$ (34)

א. $y = 2xt - t^2$ (35)

א. $M(0.845, 0)$ (36)

מתמטיקה השלמה

פרק 18 - חשבון אינטגרלי - פונקציה פולינומית רציונאלית ושורש

תוכן העניינים

1. חישובי אינטגרלים (ללא ספר)
2. מציאת פונקציה קדומה (ללא ספר)
3. האינטגרל המסוים (ללא ספר)
4. האינטגרל המסוים וחישובי שטחים (ללא ספר)
5. שאלות עם פרמטר (ללא ספר)
6. שאלות בחישובי שטחים – פונקציה רציונאלית (ללא ספר)
7. שאלות בחישובי שטחים – פונקצית שורש (ללא ספר)
8. חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים (ללא ספר)

מתמטיקה השלמה

פרק 19 - חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה

תוכן העניינים

1. פונקציה מעריכית (ללא ספר)
2. פונקציה לוגריתמית (ללא ספר)
3. פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי (ללא ספר)