מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

תוכן העניינים

תוכן העניינים

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 1 - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2- ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שוני סימן - התוצאה תהיה שלילית.

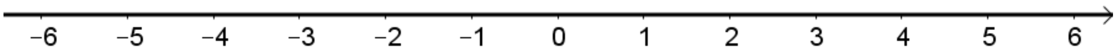
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ -5\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -2$$



2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3+2$
ב. $-3-2$
ג. $3-2$
ד. $-3+2$
ה. $-1-4$
ו. $7+10$
ז. $-6+5$
ח. $-7+3$

3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $5+7-23+1$
ב. $5-8-12+17$
ג. $3-14+2+6$
ד. $-4-11+2+9$
ה. $6-21+3-7$
ו. $-7-13+5-3$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $4\cdot 9$
ב. $4\cdot(-7)$
ג. $(-6)\cdot(-5)$
ד. $(-5)\cdot(-3)$
ה. $(-2)\cdot 8$
ו. $(-8)\cdot 5$
ז. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)$
ח. $2\cdot 3\cdot 3$
ט. $(-2)\cdot 3\cdot(-3)$
י. $(-2)\cdot(-3)\cdot 3$
יא. $2\cdot 3\cdot(-3)$
יב. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)$
יג. $(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$
יד. $1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה:

א. $(-2)\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot(-6)\cdot(-5)$

ב. $(-1)\cdot 2\cdot 4\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot 6\cdot(-5)$

ג. $(-1)\cdot 2\cdot 4\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot(-6)\cdot(-5)$

ד. $(-1)\cdot 2\cdot 4\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot 6\cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-25):(-5)$

ב. $(-30):3$

ג. $40:(-10)$

ד. $(-32):(-4)$

ה. $(-6):18$

ו. $4:(-16)$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{-60}{12}$

ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות:

א. $0:5$

ב. $(-2)\cdot 0$

ג. $0\cdot(-3)\cdot 4$

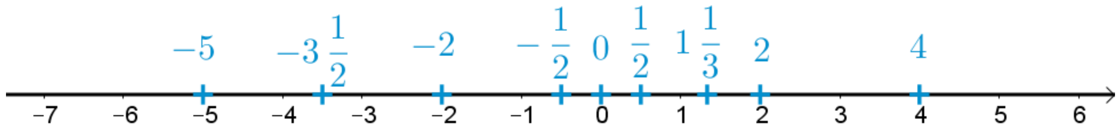
ד. $6:0$

ה. $0+4$

ו. $0-4$

תשובות סופיות:

1) להלן מערכת הצירים:



2) א. 5   ב. -5   ג. 1   ד. -1   ה. -5
ו. 17   ז. -1   ח. -4.

3) א. -10   ב. 2   ג. -3   ד. -4   ה. -19   ו. -18.

4) א. 36   ב. -28   ג. 30   ד. 15   ה. -16
ו. -40   ז. -18   ח. 18   ט. 18   י. 18
יא. -18   יב. 36   יג. -16   יד. 16.

5) א. +   ב. +   ג. -   ד. -.

6) א. 5   ב. -10   ג. -4   ד. 8   ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$.

7) א. -5   ב. -7   ג. -8   ד. 4.

8) א. 0   ב. 0   ג. 0   ד. לא מוגדר   ה. 4   ו. -4.

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה.
סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. 3^2
ב. 3^3
ג. $(-3)^3$
ד. $(-2)^3$
ה. 4^3
ו. 3^4
ז. $(-5)^3$
ח. 10^4
ט. $-(-3)^4$
י. -5^4
יא. -4^3
יב. $-(-2)^6$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt[3]{-27}$
ב. $\sqrt[4]{625}$
ג. $\sqrt[4]{-16}$
ד. $\sqrt[5]{-32}$
ה. $-\sqrt[4]{81}$
ו. $-\sqrt[3]{1000}$

תשובות סופיות:

1) א. 9 ב. 27 ג. -27 ד. -8 ה. 64 ו. 81
ז. -125 ח. 10000 ט. -81 י. -625 יא. -64 יב. -64

2) א. -3 ב. 5 ג. לא מוגדר ד. -2 ה. -3 ו. -10

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

1) $\sqrt{81}+3\cdot 2^3-40:8$

2) $(-3)^2:9-2\cdot(-4^2)$

3) $\sqrt{144}-20:4+3\cdot(-2)^2$

4) $3+4\cdot[-3+4\cdot(-2)]+\sqrt{10+6}$

5) $(-3)^4:(-9)-5\cdot(-2)^3$

6) $-\sqrt{9}+5^2:(-4-1)-24:12\cdot 3$

7) $-2^5:(-8)+4^2-3\cdot 5$

8) $\sqrt[3]{-27}+4\cdot 3^2-2\cdot 3^3$

9) $\left[6\cdot(-1)^4-10\cdot(-1)^3\right]\cdot(-1)^5$

10) $\left(8-\sqrt[3]{64}\right)\cdot\left(2\cdot(-4)-\sqrt[5]{243}\right)$

11) $\dfrac{3^2\cdot(8-2\cdot 3)^3}{(5^2\cdot 3-72)\cdot(-4)}+2\cdot\{15-20:(4+3\cdot 2)\}$

תשובות סופיות:

1) 28	2) 33	3) 19	4) -37
5) 31	6) -14	7) 5	8) -21
9) -16	10) -44	11) 20	

שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ...
שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שלמים}}.\underbrace{YYY}_{\text{שברים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

אחוזים - הגדרה:

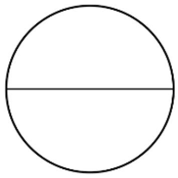
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45% , והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

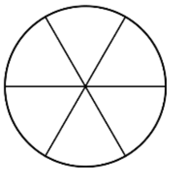
שאלות:

1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

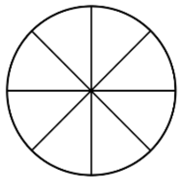
א. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגול



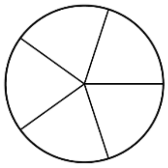
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגול



ג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

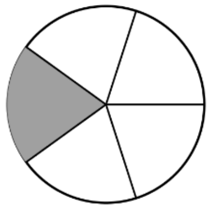


ד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגול

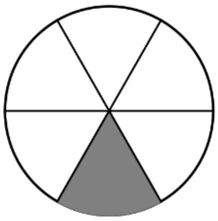


2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

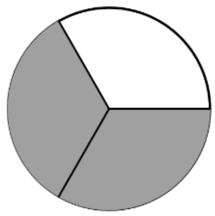
א. שבר:



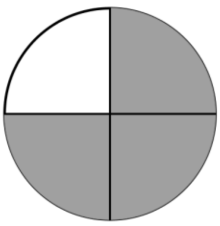
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן:

א. $\frac{25}{30}$ ב. $\frac{10}{30}$ ג. $\frac{6}{24}$ ד. $\frac{4}{20}$

ה. $\frac{35}{56}$ ו. $\frac{24}{42}$ ז. $\frac{36}{48}$ ח. $\frac{33}{121}$

5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים:

א. $-\frac{20}{3}$ ב. $\frac{19}{4}$ ג. $\frac{12}{5}$ ד. $\frac{22}{5}$

ה. $-\frac{34}{6}$ ו. $-\frac{50}{7}$ ז. $\frac{47}{8}$ ח. $\frac{60}{9}$

6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים:

א. $1\frac{2}{3}$ ב. $3\frac{5}{6}$ ג. $4\frac{1}{2}$ ד. $6\frac{1}{4}$

ה. $11\frac{3}{4}$ ו. $-2\frac{5}{8}$ ז. $-6\frac{2}{7}$ ח. $12\frac{7}{9}$

7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $\frac{3}{10}$ או $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{8}$ או $\frac{7}{6}$

ג. $\frac{2}{3}$ או $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{5}{18}$ או $\frac{7}{12}$

8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים:

א. 0.7 ב. 0.07 ג. 0.007 ד. 0.34

ה. 0.304 ו. 0.65 ז. 1.2 ח. 1.02

ט. 1.42 י. 3.5 יא. 6.03 יב. 5.125

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$ ב. $\frac{3}{100}$ ג. $\frac{3}{1000}$ ד. $\frac{23}{1000}$

ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{3}{4}$ ז. $\frac{2}{5}$ ח. $\frac{4}{25}$

ט. $\frac{7}{50}$ י. $\frac{3}{20}$ יא. $\frac{7}{8}$ יב. $\frac{9}{16}$

יג. $9\frac{1}{10}$ יד. $3\frac{1}{5}$ טו. $4\frac{7}{8}$ טז. $-4\frac{1}{16}$

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית
(היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$ ב. $\frac{5}{6}$ ג. $\frac{3}{7}$ ד. $\frac{2}{11}$

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25% ב. 32% ג. 64% ד. 80%

ה. 120% ו. 5% ז. 300% ח. 150%

12) המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{4}{5}$ ד. $\frac{7}{20}$

ה. $\frac{11}{40}$ ו. $\frac{70}{125}$ ז. $\frac{5}{6}$ ח. $\frac{4}{9}$

תשובות סופיות:

1) תשובה מודגמת בסרטון.

2) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$

3) א. $\frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80}$ ב. $\frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300}$ ג. $\frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700}$

4) א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$
ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$

5) א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$
ז. $5\frac{7}{8}$ ח. $6\frac{2}{3}$

6) א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$
ז. $-\frac{44}{7}$ ח. $\frac{115}{9}$

7) א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$

8) א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$
ז. $1\frac{1}{5}$ ח. $1\frac{1}{50}$ ט. $1\frac{21}{50}$ י. $3\frac{1}{2}$ יא. $6\frac{3}{100}$ יב. $5\frac{1}{8}$

9) א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75
ז. 0.4 ח. 0.16 ט. 0.14 י. 0.15 יא. 0.875
יב. 0.5625 יג. 9.1 יד. 3.2 טו. 4.875 טז. -4.0625

10) א. $0.\overline{6}$ ב. $0.8\overline{3}$ ג. 0.428 ד. $0.\overline{18}$

11) א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$
ז. 3 ח. $1\frac{1}{2}$

12) א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%
ז. 83.333% ח. 44.444%

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$ ב. $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$ ג. $\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{10}$

ד. $3\cdot\frac{4}{5}$ ה. $6\cdot\frac{2}{3}$ ו. $\frac{12}{25}\cdot5$

ז. $1\frac{3}{5}\cdot2\frac{1}{4}$ ח. $3\frac{1}{2}\cdot4\frac{2}{5}$ ט. $3\frac{3}{7}\cdot2\frac{2}{5}$

י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ יא. $\frac{4}{5^3}$ יב. $\frac{4^3}{5}$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5}:\frac{4}{9}$ ב. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ ג. $\frac{3}{25}:\frac{7}{10}$

ד. $8:\frac{2}{9}$ ה. $10:\frac{2}{3}$ ו. $\frac{5}{6}:3$

ז. $\frac{2}{5}:5$ ח. $3\frac{3}{4}:5\frac{5}{8}$ ט. $2\frac{2}{5}:1\frac{3}{15}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. 4 ו. $2\frac{2}{5}$

ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$

2) א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. 36 ה. 15 ו. $\frac{5}{18}$

ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. 2

חיבור וחיסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b, המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ״ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.
דוגמא: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$, $\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2-3}{7}=\frac{-1}{7}$.
- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע״י פעולת מכנה משותף.
דוגמא: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$, $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{3-10}{12}=-\frac{7}{12}$.
- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.
דוגמא: $3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$.
חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע״י הוצאת שלמים מהשבר.
דוגמא: $3-\frac{1}{4}=2\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$.

דרך נוספת היא ע״י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

דוגמא: $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{6}=\frac{17}{5}+\frac{13}{6}=\frac{17\cdot 6}{30}+\frac{13\cdot 5}{30}=\frac{102+65}{30}=\frac{167}{30}=5\frac{17}{30}$.

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

דוגמא: $2\frac{3}{4}-5\frac{1}{3}=(2-5)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=-3+\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=-3+\frac{5}{12}=-2\frac{7}{12}$.

שאלות:

1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3
ב. 2 ו-4
ג. 3 ו-5
ד. 6 ו-10
ה. 4 ו-10
ו. 4 ו-6
ז. 3, 5 ו-10
ח. 2, 3 ו-8

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$
ב. $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$
ג. $\frac{4}{13}+\frac{9}{13}$
ד. $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$
ה. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$
ו. $\frac{8}{9}-\frac{7}{9}$
ז. $\frac{2}{12}-\frac{5}{12}$
ח. $\frac{2}{5}-\frac{6}{5}$
ט. $\frac{2}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}$
י. $\frac{7}{15}+\frac{8}{15}-\frac{6}{15}$

3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6}-\frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6}-\frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+\frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{3}{5}$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2+\frac{5}{6}$

ב. $2-\frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3}+4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8}-6\frac{1}{2}$

ז. $2+\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+\frac{8}{20}$

5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14}:\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot2\frac{1}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11}\cdot2\frac{3}{4}-6:\frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5}:\frac{9}{10}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot3\frac{1}{4}$

תשובות סופיות:

1) א. 6 ב. 4 ג. 15 ד. 30 ה. 20 ו. 12
ז. 30 ח. 24

2) א. $\frac{4}{5}$ ב. $\frac{7}{9}$ ג. 1 ד. $1\frac{3}{4}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{1}{9}$
ז. $-\frac{1}{4}$ ח. $-\frac{4}{5}$ ט. $1\frac{5}{8}$ י. $\frac{3}{5}$

3) א. $1\frac{5}{6}$ ב. $\frac{7}{10}$ ג. $\frac{7}{12}$ ד. $-\frac{1}{8}$ ה. 5 ו. $3\frac{5}{6}$
ז. $\frac{19}{21}$ ח. $-\frac{1}{10}$

4) א. $2\frac{5}{6}$ ב. $1\frac{1}{6}$ ג. $3\frac{1}{12}$ ד. $1\frac{5}{12}$ ה. $7\frac{11}{12}$ ו. $-\frac{5}{8}$
ז. $2\frac{13}{18}$ ח. $-\frac{1}{20}$

5) א. $2\frac{11}{24}$ ב. $1\frac{1}{10}$ ג. $-13\frac{3}{4}$ ד. $2\frac{5}{6}$ ה. $3\frac{5}{18}$

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $48 = 120 \cdot \frac{40}{100}$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48**.

שאלות:

1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
א. כמה בנות בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
א. כמה תלמידים בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
א. מהו מחירו בסוף העונה?
ב. מה גודל ההנחה?

4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
א. מה מחירו הסופי?
ב. מה גודל ההתייקרות?

5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

7) ענה על השאלות הבאות:
א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.
מה אחוז הבנים בקהל?
ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.
מה אחוז הבנות בכיתה?
ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?
ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

תשובות סופיות:

1) א. 18 בנות. ב. 12 בנים.
2) א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.
3) א. 240 ₪ ב. 60 ₪
4) א. 540 ₪ ב. 40 ₪
5) 4.9755 ₪
6) 400 ₪
7) א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).
ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3\cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$

ב. x^2+3x כאשר $x=2$

ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$

ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$

ה. x^3+1 כאשר $x=-2$

ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$

ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$

ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$.

ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$.

3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

א. $a^2+2ab+b^2$ עבור: $a=3\ ,\ b=-5$.

ב. $(x-3)^2+3x^2b$ עבור: $x=5\ ,\ b=-1$.

ג. $-x^3-2xy+y^4$ עבור: $x=-2\ ,\ y=-1$.

ד. $\dfrac{(a-2c)^4}{a}-a^2$ עבור: $a=2\ ,\ c=-2$.

ה. $\dfrac{4a^2-3b}{c}$ עבור: $a=-1\ ,\ b=2\ ,\ c=-4$.

ו. $\sqrt{c-3a}$ עבור: $c=13\ ,\ a=-1$ ועבור: $a=\dfrac{1}{3}\ ,\ c=82$.

ז. $\dfrac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ עבור: $p=-5\ ,\ q=48\ ,\ m=3$.

תשובות סופיות:

1) א. 11 ב. 10 ג. -12 ד. -65 ה. -7 ו. 5
ז. -10 ח. 45

2) א. $\dfrac{10}{27}$ ב. $5\dfrac{22}{27}$

3) א. 4 ב. -71 ג. 5 ד. 644 ה. $\dfrac{1}{2}$
ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שניה: 9 ז. -37

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x+6x-5x=(3+6-5)x=4x$.

איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.

כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

כנס איברים דומים:

1) $5x+7x-4x$
2) $9x^2-2x^2-3x^2-2x^2$
3) $-10xy+15xy+xy-2yx$
4) $x^2y-3yx^2+x^2y$
5) $8a^2+10a-5a^2-11a+a^2$
6) $2x^2-3m^2-x^2+3m^2$
7) $3xy+y-30y+6yx-7y$
8) $mn^2+4m^2n+6n^2m-10nm^2+mn^2$
9) $-6+x^3+4-3x^3+17x^3-17$
10) $y^2+x^2-5x^2+5y^2+4x^2-6y^2$
11) $7x^2-3x-4x+2$
12) $5xy+2x-3yx-x+1$
13) $3-x-x^2+4x+5x^2-12$
14) $x+xy+y-6yx-6y-6x$
15) $mn+n-5m+5nm-14n+3m$
16) $ab^2+6ba^2-6b+16a^2b+3b-6b^2a$
17) $z^3-4z^2+7-z^3-8+8z^2$
18) $4x^2z+6xz^2-6-xz^2+12+10zx^2$
19) $2-x^3-3-4x^2+2x+x^3+x^2-2$
20) $x^3-3x-4x^2+2x+x^3+x^2-2x^3$
21) $2a^2b+3x^2y+5a^2b+10x^2y$
22) $12x^2y^3+13a^2-20x^2y^3+2a^2$
23) $2y^2-4x^3y^2-10y^2-x^3y^2$
24) $-2x^3y+5x^2-4yx^3-6x^2$
25) $2a^2b+2b+3a^2+5b$
26) $5a^2b-8ab^2+20a^2b-14ab^2$
27) $-12x^2+2y^2+3x^2y+14xy^2-5xy^2-6y^2+2xy+11x^2+x^2y-9xy$
28) $21x^3y^3+x^2y^2-3xy^3+x^3y-15x^2y^2-7x^3y+12x^3y^3-4xy^3+4xy^3-6x^3y$

תשובות סופיות:

1) $8x$
2) $2x^2$
3) $4xy$
4) $-x^2y$
5) $4a^2-a$
6) x^2
7) $9xy-36y$
8) $8mn^2-6nm^2$
9) $15x^3-19$
10) 0
11) $7x^2-7x+2$
12) $2xy+x+1$
13) $4x^2+3x-9$
14) $-5x-5y-5xy$
15) $-13n-2m+6mn$
16) $-5ab^2+22a^2b-3b$
17) $4z^2-1$
18) $14x^2z+5xz^2+6$
19) $-3x^2+2x-3$
20) $-3x^2-x$
21) $7a^2b+13x^2y$
22) $-8x^2y^3+15a^2$
23) $-8y^2-5x^3y^2$
24) $-6x^3y-x^2$
25) $2a^2b+3a^2+7b$
26) $25a^2b-22ab^2$
27) $-x^2-4y^2+4x^2y+9xy^2-7xy$
28) $33x^3y^3-14x^2y^2-3xy^3-12x^3y$

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

- $a(b+c)=ab+ac$.
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x\cdot 3x$
ב. $-4x\cdot(-7x)$
ג. $-2x\cdot(-4x)\cdot(-3)$
ד. $8m^2\cdot 4m^3$
ה. $3a^3\cdot(-2a^2)$
ו. $-b\cdot 4b^2\cdot\frac{b^2}{2}$
ז. $a\cdot 3b$
ח. $4a^2\cdot 7b^2$
ט. $ab\cdot(-2a^2b)$

2) פשט את הביטויים הבאים ע״י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$
ב. $2(-3x^2+5x-1)$
ג. $(7x-2)4$
ד. $(1-2x)(-2)$
ה. $a(3a-1)$
ו. $b(b^2-3b+4)$
ז. $2x(5x+3)$
ח. $5x(x^2+2x-3)$
ט. $3t^2(4t-t^2+6)$
י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$
ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$
ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$
ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

ה. $\left(3-2x^2+4\right)2+3\left(x-x^2\right)-6(7-5x)+4x^2$

ו. $3y^2-\left(y+1-2y^2\right)+6(5y-6)-(-y-4)3+5\left(y^2+1\right)-7$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+2)$

ב. $(x+3)(x-7)$

ג. $(3-x)(x+4)$

ד. $(3x+4)(5x+1)$

ה. $3(4x+1)(2x-3)$

ו. $-2(3x-1)(5-2x)$

5) פשט את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+3)+2(3-x)$

ב. $(a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$

ג. $(2m-3)(4m+3)+5\left(2m^2-6\right)$

ד. $-x^2y^2\left(x^3y+x^2\right)+2xy\left(2x^3y-x^4y^2\right)$

תשובות סופיות:

1) א. $6x^2$ ב. $28x^2$ ג. $-24x^2$ ד. $32m^5$ ה. $-6a^5$ ו. $-2b^5$
ז. $3ab$ ח. $28a^2b^2$ ט. $-2a^3b^2$

2) א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$
ה. $3a^2-a$ ו. b^3-3b^2+4b ז. $10x^2+6x$ ח. $5x^3+10x^2-15x$
ט. $12t^3-3t^4+18t^2$ י. $10d^5-7.5d^2$

3) א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$
ו. $10y^2+32y-27$

4) א. x^2+x-2 ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$
ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$

5) א. x^2+3 ב. 7 ג. $18m^2-6m-39$ ד. $-3x^5y^3+3x^4y^2$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$
ב. $(x+2)^2$
ג. $(4x+5)^2$
ד. $(6x+2)^2$
ה. $(7x+y)^2$
ו. $(5x+2y)^2$
ז. $(x^2+7)^2$
ח. $(x^2+y^2)^2$
ט. $(x^3+2y^2x)^2$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$
ב. $(x-2)^2$
ג. $(5-x)^2$
ד. $(6x-1)^2$
ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$
ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$
ז. $(3m-2n)^2$
ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$
ט. $(x^2y^2-7)^2$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$
ב. $(3+x)(x-3)$
ג. $(3x-1)(3x+1)$
ד. $(5-7x)(7x+5)$
ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$
ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$
ז. $(x^2+y)(x^2-y)$
ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$

ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$

ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$

ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$

ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$

ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

תשובות סופיות:

1) א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$

ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$

ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$

2) א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$

ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$

ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$

3) א. x^2-25 ב. x^2-9 ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$

ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. x^4-y^2 ח. $9a^4b^6-16$

4) א. x^2+2 ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$

ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:
  - הוצאת מספר משותף: $2x-8=2(x-4)$.
  - הוצאת אות משותפת: $x^2-12x=x(x-12)$.
  - הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2-21x=3x(x-7)$.
- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:
  - נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
  - נוסחה להפרש ריבועים: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x-12$
ב. $6y-4$
ג. $20-8a$
ד. $4a^3+8b$
ה. $75m^2+25m+15$
ו. $40a^2-8b^2+64c^2$

2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. y^2+5y
ב. $3x-11x^3$
ג. $6y^2+5y^3+4y$
ד. $\frac{1}{2}a^7-\frac{1}{4}a^5+a^3$

3) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $2x^2-8x$
ב. $3t^2+12t$
ג. $5n^3-20n^2+50n$
ד. $8y^2+6y^3-2y^4$
ה. $4x^2y^2+16x^2y-20xy^2$
ו. $27mn-3n^2m+9n^3m$

4) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $x^2+10x+25$
ב. $x^2+12x+36$
ג. $y^2-18y+81$
ד. $y^2-22y+121$
ה. $4x^2+4x+1$
ו. $16y^2-8y+1$
ז. $9x^2-24x+16$
ח. $25x^2+70x+49$

5) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. r^2-25
ב. x^2-81
ג. $25y^2-49$
ד. $121x^2-1$
ה. x^2y^2-4
ו. $9y^4-169x^4$

6) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר:

א. $y-y^3$
ב. x^3-10x^2+25x
ג. m^4-1
ד. $196x^4-140x^3+25x^2$

תשובות סופיות:

1) א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$
ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$

2) א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$
ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$

3) א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$
ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$

4) א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$
ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$

5) א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$
ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$

6) א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$
ד. $x^2(14x-5)^2$.

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: ax^2+bx+c כאשר a, b ו- c הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו- m_2, שמקיימים: $m_1\cdot m_2=ac$ ו- $m_1+m_2=b$.

לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2+bx+c=ax^2+m_1x+m_2x+c$.

השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2+m_1x}+\underbrace{m_2x+c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו- m_2 באופן הבא: $m_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $m_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום כמכפלה: $ax^2+bx+c=a(x-m_1)(x-m_2)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1=m_2=\dfrac{-b}{2a}$ אז נכתוב: $ax^2+bx+c=a(x-m_1)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. x^2+5x+4 ב. $x^2-8x+15$ ג. $x^2-33x+62$

ד. $2x^2+7x-15$ ה. $3x^2-11x+6$ ו. $6x^2+5x+1$

ז. $2x^2+x-6$ ח. $x^2-18x+81$ ט. x^2+2x+8

2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

א. $6x^2+5x+1$ ב. x^2+5x+4

ג. $4x^2+20x+25$ ד. $3x^2-x+20$

תשובות סופיות:

1) א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$

ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$

ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.

2) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

שברים אלגברים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

דוגמא לשברים אלגבריים: $\frac{4}{x-x^3}$, $\frac{3x}{x^2+1}$, $\frac{x+1}{x+2}$.

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: $\frac{3x+5}{4}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

דוגמא: השבר $\frac{1}{x+4}$ לא מוגדר כאשר $x=-4$ מכיוון שמתקבל: $\frac{1}{0}$.

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x\neq-4$ ומשמעו היא ש- x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט 4-, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

- צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: $\frac{2x+8}{x+4}=\frac{2\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=\frac{2\cdot1}{1}=2$.
- צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: $\frac{3x-15}{x^2-10x+25}=\frac{3\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}}}=\frac{3\cdot1}{x-5}=\frac{3}{x-5}$.
- צמצום ע"י פירוק טרינום: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$.

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$

ב. $\frac{5}{x-6}$

ג. $\frac{x+7}{2x-8}$

ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$

ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$

ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$

ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$

ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$

ב. $\frac{a-x}{a}$

ג. $\frac{a-ax}{a}$

ד. $\frac{x+1}{y+1}$

ה. $\frac{x}{x+y}$

ו. $\frac{6x}{6y}$

ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$

ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

ט. $\frac{4x^2y}{xy}$

י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$

ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$

ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$

ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$

ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$

ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$

ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$

ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2+10x+25}{2x+10}$

ב. $\frac{8n-n^2}{n^2-16n+64}$

ג. $\frac{z^3-4z^2}{2z^2-16z+32}$

ד. $\frac{4m^2+20m+25}{4m^2+10m}$

ה. $\frac{18y^2-24y+8}{2y-3y^2}$

ו. $\frac{a^3+4a^2b+4ab^2}{3ab+6b^2}$

5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$

ב. $\frac{m^2-12m+32}{m-4}$

ג. $\frac{4y-10}{2y^2+y-15}$

ד. $\frac{3z^2+26z+16}{3z+2}$

ה. $\frac{x^2+5x-36}{x^3+9x^2}$

ו. $\frac{9n^2-12n}{4+5n-6n^2}$

ז. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

ח. $\frac{x^2-14x+49}{x^2+x-56}$

ט. $\frac{3a^2b-10ab^2+3b^3}{-3a^3b+11a^2b^2-6ab^3}$

י. $\frac{m^3n-m^2n^2-m^2+mn}{2m^2n^3+mn^2-3n}$

תשובות סופיות:

1) א. $x\neq -3$ ב. $x\neq 6$ ג. $x\neq 4$ ד. $x\neq 0\,,\,x\neq 4$
ה. $x\neq -1$ ו. $x\neq -2\,,\,x\neq 2$ ז. $y\neq 0\,,\,y\neq -1\,,\,y\neq 1$
ח. $x\neq 0\,,\,x\neq 1\,,\,x\neq 4$

2) א. x ב. לא ניתן לצמצם ג. $1-x$
ד. לא ניתן לצמצם ה. לא ניתן לצמצם ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$
ח. לא ניתן לצמצם ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם

3) א. $3\,,\,x\neq -4$ ב. $\frac{m}{4}\,,\,m\neq -4$ ג. $\frac{2}{a}\,,\,a\neq 0,6$
ד. $-\frac{x}{3}\,,\,x\neq 5$ ה. $-3\,,\,y\neq \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ ו. $\frac{2x^2}{3}\,,\,x\neq \frac{1}{2}$
ז. $\frac{3}{y(y-3)}\,,\,y\neq 0,3$ ח. $\frac{3z^2-12z+4}{z+5}\,,\,z\neq 0,-5$

4) א. $\frac{x+5}{2}\,,\,x\neq -5$ ב. $\frac{n}{8-n}\,,\,n\neq 8$ ג. $\frac{z^2}{2(z-4)}\,,\,z\neq 4$
ד. $\frac{2m+5}{2m}\,,\,m\neq 0,-\frac{5}{2}$ ה. $\frac{2(2-3y)}{y}\,,\,y\neq 0,\frac{2}{3}$ ו. $\frac{a(a+2b)}{3b}\,,\,b\neq 0,\ a\neq -2b$

5) א. $\frac{1}{x-5}\,,\,x\neq 5,-2$ ב. $m-8\,,\,m\neq 4$ ג. $\frac{2}{y+3}\,,\,x\neq -3,\frac{5}{2}$
ד. $z+8\,,\,z\neq -\frac{2}{3}$ ה. $\frac{x-4}{x^2}\,,\,x\neq 0,-9$ ו. $\frac{-3n}{2n+1}\,,\,n\neq -\frac{1}{2},\frac{4}{3}$
ז. $\frac{x+2}{x+3}\,,\,x\neq -2,-3$ ח. $\frac{x-7}{x+8}\,,\,x\neq 7,-8$
ט. $\frac{3a-b}{a(2b-3a)}\,,\,a\neq 0\,,\,b\neq 0,\ a\neq 3b\,,\,2b\neq 3a$ י. $\frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}\,,\,mn\neq 1,-\frac{3}{2},n\neq 0$

כפל וחילוק של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.

חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3x+3}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3(x+1)}=\frac{\cancel{x}\,\cancel{(x+1)}}{3x^{\cancel{2}}\,\cancel{(x+1)}}=\frac{1}{3x}$.
- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y}:\frac{12}{y^2+y}=\frac{4x}{y}\cdot\frac{y^2+y}{12}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}\,x}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}\,(y+1)}{\underset{3}{\cancel{12}}}=\frac{x(y+1)}{3}$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{8}$

ב. $\frac{x}{3}\cdot\frac{9}{x^2}$

ג. $7y\cdot\frac{5}{y^2}$

ד. $6x^2\cdot\frac{3}{40x}$

ה. $\left(x^2+3x\right)\cdot\frac{2}{3x+9}$

ו. $\left(a^2-25\right)\cdot\frac{20}{5a+25}$

ז. $\frac{w^2-9}{w}\cdot\frac{w^2}{2w+6}$

ח. $\frac{y+4}{y^2+16}\cdot\frac{y^2-16}{2y+8}$

ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90}\cdot\frac{12}{2z-10}$

י. $\frac{5n^2}{n^2-121}\cdot\frac{2n^2+44n+242}{n+2}\cdot\frac{n^2+4n+4}{n}$

2) פשט את הביטויים הבאים :

א. $\frac{x}{8}:\frac{x}{6}$

ב. $\frac{y}{25}:\frac{5}{y}$

ג. $a^2:\frac{1}{6a}$

ד. $\frac{5}{6a}:a^2$

ה. $\left(d^2-3d\right):\frac{5d-15}{5d}$

ו. $\frac{t}{t+4}:\frac{3t}{t+4}$

ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2}:\frac{y^2-16}{7y^2}$

ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36}:\frac{a+8}{a+6}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$ ה. $\frac{2x}{3}$

ו. $4(a-5)$ ז. $\frac{w(w-3)}{2}$ ח. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$ ט. $\frac{z+15}{z-5}$ י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$

2) א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{y^2}{125}$ ג. $6a^3$ ד. $\frac{5}{6a^3}$ ה. d^2 ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$ ח. $\frac{a-8}{a-6}$

חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים.

נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים.

כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף.
לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת.

דוגמה לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x}=\frac{1+(x+1)}{x}=\frac{x+2}{x}$$

דוגמה לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)+3}{x+2}=\frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמה לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x(x+1)}=\frac{x+x+1}{x(x+1)}=\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמה לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-3x}=\frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמה לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{3}{(x-3)^2}-\frac{2}{(x-3)(x+3)}=\frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}=\frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6}+\frac{a-5}{6}$

ב. $\frac{5}{x}+\frac{4x+3}{x}$

ג. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3+4x}{x+1}$

ד. $\frac{7z}{2z-3}-\frac{4z}{2z-3}-\frac{z+3}{2z-3}$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab}-\frac{5}{bc}$

ב. $\frac{1}{xy}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xz}$

ג. $\frac{c}{ab}-\frac{ad}{bc}+\frac{2b}{cd}$

ד. $-\frac{5}{x}+\frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)}-\frac{2}{z(z-2)}$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $1-\frac{2}{x}$

ב. $1+\frac{3}{y^2}$

ג. $2+\frac{2}{x+1}$

ד. $3-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}$

ה. $\frac{a+1}{a^2}-\frac{3-a}{4a}-3$

ו. $\frac{x}{9yz}+\frac{z}{3y^2x}+\frac{3-y}{12xz}-3\frac{1}{2}$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x}$

ב. $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y}$

ג. $\frac{a+1}{a+2}+\frac{3}{a}$

ד. $\frac{1}{z+3}+\frac{2}{3z}-\frac{3}{z}$

5) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{24}{a^2-9}+\frac{4}{a+3}$

ב. $\frac{3}{x^2-16}+\frac{2}{(x+4)^2}$

ג. $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{3y}{4-y^2}$

ד. $\frac{3z}{z^2+4z+3}-\frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$

ה. $\frac{x-1}{x^2+3x-40}+\frac{2}{-x^2+8x-15}$

ו. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7}+\frac{a+3}{a^2+14a+49}$

ז. $\frac{x}{x-3}+\frac{9-x}{x^2-8x+15}$

ח. $\frac{1}{a-b}+\frac{2}{a+2b}-\frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

6) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{4}{x}\cdot\frac{x^2}{8}+\frac{9}{x+1}\cdot\frac{x+1}{18}$

ב. $\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot\frac{x^2}{7x+14}$

ג. $\frac{7}{y^2}:\frac{6}{y^3}-\frac{y-4}{63}\cdot\frac{3y-4}{y^2-8y+16}$

ד. $\left(3x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right):\frac{6x^3+2x-4}{x^2}$

ה. $\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3}-\frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right):\frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1

2) א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d-a^2d^2+2ab^2}{abcd}$

ד. $\frac{-5y^2+x+1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$

3) א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$

ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2+a+4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z}$

4) א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$

ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$

5) א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$

ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$

ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$

6) א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

1) $\frac{\frac{4x}{12}}{x}$

2) $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5}$

3) $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2}$

4) $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54}$

5) $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{\frac{y^2}{3-y}}$

6) $\frac{\frac{4x}{x+1}}{\frac{8}{x^2+2x+1}}$

7) $\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{\frac{40}{15c+15}}$

8) $\frac{\frac{t^2-t-20}{16t+8}}{\frac{25-t^2}{2t+1}}$

9) $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}}$

תשובות סופיות:

1) $\frac{x^2}{3}$

2) 2.5

3) $\frac{1}{6t^3}$

4) $\frac{t-9}{54t^2}$

5) $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$

6) $\frac{x(x+1)}{2}$

7) $\frac{c}{c-4}$

8) $\frac{t+4}{-8(t+5)}$

9) $\frac{5}{x}$

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 2 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $6x+2=8$

ב. $7-2x=7$

ג. $2x+x=24$

ד. $2x+6=8+x$

ה. $-7x+5+2x=4x-13$

ו. $6x-3+5-7x=x-5x-7$

ז. $2-5x+7=-3x+8$

ח. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$

ב. $7x-4(3-4x)=-x$

ג. $6(4-x)-(6-x)=3x$

ד. $5x-(3x-7)4=21$

ה. $x(x-5)=x^2-7x+8$

ו. $(7-x)(1-x)-(x-3)^2=0$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1$

ג. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ד. $\frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1$

ה. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

ו. $5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0$

ב. $\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0$

ג. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ד. $\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2}$

ה. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ו. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12$

תשובות סופיות:

1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$
ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$.

2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$.

3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$.

4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$.

5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6$, $x\neq 3$.

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר $a_1\ ,b_1\ ,c_1$ ו-$a_2\ ,b_2\ ,c_2$ הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=3x-1 \\ \dfrac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

פתרון של מערכת משוואות:

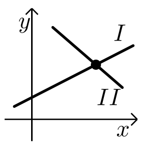
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

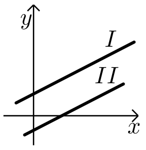
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

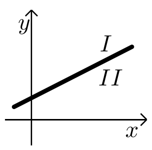
- הישרים נחתכים:
במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:
במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:
במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
  נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
  נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3x+y=11 \\ y=5 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y=x-3 \\ y=2x+4 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} -3x+2y=-16 \\ x=5y+14 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} 5x-2y=-2 \\ x+4y=4 \end{cases}$ ה. $\begin{cases} -5x+7y=-26 \\ x+3y=-8 \end{cases}$ ו. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x+7y=11 \end{cases}$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+3y=5 \\ x-3y=3 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 5x+2y=14 \\ 5x+3y=23 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5y=2x \\ 4x=5y+8 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} 4x=3y-29 \\ 5y=9-13x \end{cases}$

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 2(x-y)+4y=1+x \\ 2-7y+x=3(x-y) \end{cases}$.

4) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases}$.

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases}$

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) א. $(2,5)$ ב. $(-7,-10)$ ג. $(4,-2)$ ד. $(0,1)$ ה. $(1,-3)$ ו. $(-2,3)$.

2) א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$.

3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4) א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$ ג. $(7,2)$.

5) א. $(1,1)$ ב. $(-3,1)$ ג. $(1,1)$.

6) א. $(-1,-3)$ ב. $(2,10)$ ג. $(-2,4)$.

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$
מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0\cdot x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+4=6+x$
2) $3x+6-x=4+2x+2$
3) $6(x-2)=2x+5+4x$
4) $5x-3+x=4x+2x-3$
5) נתונה המשוואה: $3-2(x+2)=5x+\square$.
   א. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
   ב. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
   ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
   ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

1) אף פתרון.
2) אינסוף פתרונות.
3) אין פתרון.
4) אינסוף פתרונות.
5) א. 8-. ב. 1-. ג. $-7x-1$
   ד. $-7x+k$ כאשר k הוא מספר כלשהו השונה מ- 1-.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.

פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.

2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.

3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$
ב. $-x^2+10x-16=0$
ג. $25x^2-20x+4=0$
ד. $2x^2-6x+5=0$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $4x^2-5x+7=4-x^2+13$
ב. $-x(x-5)=(1-3x)(1-x)+4$
ג. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$
ד. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

א. $x^2-36=0$
ב. $32x^2-18=0$
ג. $4x-x(x+2)=3(x-1)-x-6$
ד. $(2x-1)^2+(2x+1)^2=10$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

א. $-7x^2-14x=0$
ב. $5x^2-x=0$
ג. $6x(x-2)-1=4x-3(x+1)+2$
ד. $(5x-2)^2=(x-2)(x+3)+10$

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$
ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$
ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$
ד. $\frac{x}{2x^2-72}+\frac{2}{x^2+12x+36}=\frac{8x-15}{24-4x}+2$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x_1=2\ ,\ x_2=8$ ג. $x=\frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.

2) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1$ ב. $x_1=1\ ,\ x_2=1\frac{1}{4}$ ג. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$
ד. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$.

3) א. $x=\pm6$ ב. $x=\pm\frac{3}{4}$ ג. $x=\pm3$ ד. $x=\pm1$

4) א. $x_1=0\ ,\ x_2=-2$ ב. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=2\frac{1}{6}$
ד. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{7}{8}$.

5) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq-3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$
ד. $x_1=-7.6\ ,\ x_2=-4\frac{2}{7}$.

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא x.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t\to at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $(x^2-1)^2+3(x^2-1)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5x^4+3x^2-8=0$

2) $x^4-3x^2+2=0$

3) $13x^2(3x^2-1)-2=3(x^2-1)(x^2+1)$

4) $x^2(x^2+1)=10(3x^2-10)$

5) $x^6+x^3=56$

6) $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

7) $x-9\sqrt{x}+14=0$

8) $x^8-4x^4-50=31x^4-84$

9) $125x^6-1=124(x^6+x^3+1)$

10) $(2x^2-x)^2-4(2x^2-x)+3=0$

11) $(x^2+2x)^2+7x^2+14x=-6$

12) $\frac{21}{x^2-4x+10}=6+x^2-4x$

13) $\frac{12}{x^2+2x-8}=1+\frac{7.5}{x^2+2x-3}$

14) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

15) $\frac{3}{3x^2-15}+\frac{1}{x^2+5}=\frac{10}{x^4-25}$

16) $\frac{x^2-1}{4x^2-28}+2=\frac{9}{x^4-8x^2+7}+\frac{x^2}{2x^2-2}$

17) $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^2+35=12\left(2x+\frac{3}{x}\right)$

18) $\frac{3x^4}{(x+2)^2}+\frac{3x^2}{x+2}=6$

19) $(2x-x^2+3)(2x-x^2-2)=0$

20) $(x^2-5x+6)(x^2-5x-8)=-24$

תשובות סופיות:

1) $x=\pm 1$
2) $x=\pm 1,\pm\sqrt{2}$
3) $x=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3}$
4) $x=\pm 2,\pm 5$
5) $x_1=\sqrt[3]{7}\ ,\ x_2=-2$
6) $x=-2,\sqrt[3]{4}$
7) $x_1=4\ ,\ x_2=49$
8) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{34}\ ,\ x_{3,4}=\pm 1$
9) $x=5,-1$
10) $x_1=1.5\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=1\ ,\ x_4=-\frac{1}{2}$
11) $x=-1$
12) $x_{1,2}=1,3$
13) $x_1=0\ ,\ x_2=-2\ ,\ x_3=3.06\ ,\ x_4=-5.06$
14) $x_1=0\ ,\ x_2=-2$
15) אין פתרונות.
16) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$
17) $x=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},3$
18) $x=-1,2$
19) $x=3,-1$
20) $x=\pm 1,4,6$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים.
את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות.
פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x=\frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצאות הפרמטר m.

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m\neq 0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{1}{3}(a-3x)=\frac{1}{a}(ax-3)$

ג. $(x-2a)(x-2b)=x^2-2(a^2+b^2)$

ד. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

ה. $\frac{x}{a^2-a}-\frac{1}{2a}=\frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a}-\frac{2}{a^3-2a^2+a}$

2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+my=1 \\ x+y=m \end{cases}$

ב. $\begin{cases} ax+y=2 \\ x+ay=4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{x}{m}+y=m \\ x-m^2y=1 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} (m-1)x-(2m+3)y=5 \\ (m+2)x-(2m-1)y=10m \end{cases}$

ה. $\begin{cases} (2a+b)x-(2a-b)y=8ab \\ (2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2 \end{cases}$

3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2-2x+4a=a^2+3$

ג. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

ד. $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}=0$

ה. $(m^2+1)x^2-m^2x-1=0$

ו. $\frac{a}{x}+\frac{1}{b}=\frac{x}{a}+b$

ז. $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=\frac{b-6}{2-b}$, $b\neq 2$ ב. $x=\frac{a^2+9}{6a}$, $a\neq 0$ ג. $x=a+b$ ד. $x=-m$ ה. $x=a+1$

2) א. $m\neq 1$, $(m+1,-1)$ ב. $a\neq \pm 1$, $\left(\frac{2a-4}{a^2-1},\frac{4a-2}{a^2-1}\right)$

ג. $m\neq 0-1$, $\left(m^2-m+1,\frac{m-1}{m}\right)$ ד. $m\neq 1,-2$, $(2m+1,m-2)$

ה. $b\neq \pm 2a$, $(2a+b,2a-b)$

3) א. $x=m+1,\text{m}-1$ ב. $x=a-1,3-a$ ג. $x=m-5,-2m$

ד. $a\neq 0$, $x\neq \pm a$, $x=\pm a\sqrt{3}$ ה. $x=1,-\frac{1}{m^2+1}$

ו. $a,b\neq 0$, $x=\frac{a}{b},-ab$ ז. $x=\frac{a+b}{a-b},\frac{a-b}{a+b}$, $a\neq \pm b$.

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x}=a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x=a^2 \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt{x}\right)^2=\left(a\right)^2$.

הערות:

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$ שבה $a<0$ אין פתרון.
3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$
2) $\sqrt{x+2}=x$
3) $\sqrt{3x+1}+x=13$
4) $\sqrt{2x+7}+4=x$
5) $\sqrt{x-1}+3=x$
6) $\sqrt{10x+6}+9=x$
7) $\sqrt{x+6}-2=2x$
8) $\sqrt{24-x}+3=2x$
9) $\sqrt{x+16}+4=2x$
10) $2x=16-3\sqrt{x-1}$
11) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$
12) $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$
13) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-5}=\sqrt{11-x^2}$
14) $\sqrt{2x-1}+3=\sqrt{7x+1}$
15) $\sqrt{9x-8}-3\sqrt{x+4}=-2$
16) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$
17) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$
18) $\sqrt{2x-2}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x-2}$
19) $3\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}$

תשובות סופיות:

1) $x=22$
2) $x=2$
3) $x=8$
4) $x=9$
5) $x=5$
6) $x=25$
7) $x=0.25$
8) $x=3.75$
9) $x=4.25$
10) $x=5$
11) $x=6$
12) $x=4,-3$
13) $x=3$
14) $x=5$
15) $x=12$
16) $x=2,2\frac{8}{9}$
17) $x=6$
18) $x=1$
19) $x=2$

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x|=a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $|3x+14|=7$

2) $|3x-24|=x$

3) $|12-x|=3x$

4) $2x-|8-x|=10$

5) $|4x-5|=|2x+13|$

6) $|14-3x|=2|x+5|$

7) $|x|+7=|2x|$

8) $|x+2|+6=|2x-4|$

9) $|x+2|+|2x-6|=|4x+8|$

10) $|10-3x|-|x+4|=|2x-6|$

תשובות סופיות:

1) $x=-\frac{7}{3},\ -7$

2) $x=6,12$

3) $x=3$

4) $x=6$

5) $x=9,-1\frac{1}{3}$

6) $x=24,\frac{4}{5}$

7) $x=\pm 7$

8) $x=12,-1\frac{1}{3}$

9) $x=0,-12$

10) $x=0$

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ x^2+3y=10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-2y^2=17 \\ xy=-10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 \\ x+6y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2-2xy+8y^2=8 \\ 3xy-2y^2=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-y^2=33 \\ x+y=11 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 16x^2-y^2=391 \\ 4x-y=23 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4xy+x=-15 \\ \dfrac{3}{y}-2x=16 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{x}=-19 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=21 \\ \dfrac{8}{x}-\dfrac{1}{y}=13 \end{cases}$

12) $\begin{cases} xy=24 \\ (y-x)^2-7(y-x)+10=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2y-xy^2=84 \\ x^2-2xy+y^2+5x-5y=24 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{10}{3} \\ x^2+y^2=9xy+25 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(2,4),(4,2)$

2) $(\pm4,-2)$

3) $(\pm2,\pm1)$

4) $(5,-2),(-5,2)$

5) $\left(-2,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{11},\frac{1}{11}\right)$

6) $\left(3,\frac{1}{2}\right),\left(-3,-\frac{1}{2}\right),(2,1),(-2,-1)$

7) $(7,4)$

8) $(5,-3)$

9) $\left(-5,\frac{1}{2}\right)$, $\left(-24,-\frac{3}{32}\right)$

10) $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

11) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

12) $(4,6)$, $(-6,-4)$, $(3,8)$, $(-8,-3)$

13) $(-1.65,6.35)$, $(-6.35,1.65)$, $(7,4)$, $(-4,-7)$

14) $(5,45)$, $(-5,-45)$, $(45,5)$, $(-45,-5)$

משוואות מסכמות מתקדמות:

סיכום כללי:

תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו').
  העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה.
  סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה.
  לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.

- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע.
  במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים.
  חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.

- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום.
  יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.

- משוואה עם פרמטר/ים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטר/ים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטר/ים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+\sqrt{x+6}-6=0$

2) $x^2+5x-\sqrt{x^2+5x}-30=0$

3) $4x^2+16x-4\sqrt{x^2+4x}-3=0$

4) $2x^2+6x-\sqrt{x^2+3x+5}=5$

5) $x^2-\sqrt{16x^2+48}+7=0$

6) $x^2-\sqrt{6x^2-15}=1$

7) $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

8) $\dfrac{\sqrt{x^2+4x-12}}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+5}=\dfrac{7}{\sqrt{x-1}}$

9) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$

10) $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$

11) $\sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}}-\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}=2$

12) $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x}$

פתור את המשוואות הבאות עבור $a>0$:

13) $x^2+ax-2a\sqrt{x^2+ax-a^2}=0$

14) $x^2+ax-2a\sqrt{3x^2+3ax-9a^2}=0$

פתור את המשוואות הבאות:

15) $\left|3-|2-x|+|x|\right|=1$

16) $\left|4-|5-x|\right|=|x+3|$

17) $\left|\dfrac{x+|3-x|}{x+2}\right|=18$

18) $\sqrt{25+|16x^2-25|}=4+4|x+1|$

19) $\dfrac{x^3-5x}{\sqrt{2x^2-4x-1}-|x|+2}=0$

20) הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה: $\dfrac{|x+2|}{|x|+2}=|2-x|+2$.

תשובות סופיות:

1) $x=3$

2) $x_1=4\ ,\ x_2=-9$

3) $x_1=0.5\ ,\ x_2=-4.5$

4) $x_1=1\ ,\ x_2=-4$

5) $x_{1,2}=\pm1$

6) $x_{1,2}=\pm2$

7) $x=1$.

8) $x=3$.

9) $x=2$.

10) $3.5\le x\le 7$.

11) $x=4$.

12) $x=1\ ,\ x=\frac{9}{16}$.

13) $x_1=-2a\ ,\ x_2=a$

14) $x_1=-2a\ ,\ x_2=3a$

15) $x\le 0$.

16) $x=-1$.

17) $x=-\frac{39}{18},-\frac{33}{18}$.

18) $x\le\frac{5}{4}\ ,\ x=-\frac{1}{4}$.

19) $x=-\sqrt{5}$.

20) שאלת הוכחה.

ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

שאלות:

פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

1) $(x-3)^3$
2) $(2y+5)^3$
3) $8x^3-1$
4) $8y^3+343$
5) a^6-27
6) $x^3y^6z^9-1$
7) $11+88x^{12}$
8) $64mn^4-8m^4n^7$
9) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^3+6x^2+12x+8}$
10) $\dfrac{x^3+64}{x^2+4x}$

משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

11) $x^3-12x^2+48x-64=0$
12) $125x^3=1-15x+75x^2$
13) $x^3+x-30=0$
14) $x^3-7x-6=0$

משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

15) $2x^3-7x^2+7x-2=0$
16) $2x^3+5x^2-2x-5=0$

מערכת משוואות:

(17 פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x^3+y^3=243 \\ x+y=9 \end{cases}$.

(18 פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x^3-y^3=91 \\ x^2y-xy^2=30 \end{cases}$.

תשובות סופיות:

(1 $x^3-9x+27x-27$

(2 $(2x-1)(4x^2+2x+1)$

(3 $(a^2-3)(a^4+3a^2+9)$

(4 $8(1+2x^4)(1-2x^4+4x^8)$

(5 $\frac{1}{x+2}$

(6 $x=4$

(7 $x=3$

(8 $x_{1,2,3}=\frac{1}{2}\,,\,1\,,\,2$

(9 $(3,6)\,,\,(6,3)$

(10 $8y^3+60y^2+150y+125$

(11 $(2y+7)(4y^2-17y+49)$

(12 $(xy^2z^3-1)(x^2y^4z^6+xy^2z^3+1)$

(13 $8mn^4(2-mn)(4+2mn+m^2n^2)$

(14 $\frac{x^2-4x+16}{x}$

(15 $x=\frac{1}{-}$

(16 $x_{1,2,3}=-2\,,\,-1\,,\,3$

(17 $x_{1,2,3}=-2.5\,,\,-1\,,\,1$

(18 $(-5,-6)\,,\,(6,5)$

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצור בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $45x-26>109$

2) $6x>2(3x-1)$

3) $2(x-5)\ge\frac{1}{2}(4x+6)$

4) $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

5) $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

6) $4(6x-8)<8(3x-4)$

7) $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\ge 12-x$

8) $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

תשובות סופיות:

1) $x>3$
2) כל x
3) אף x
4) $x>-2$
5) $x<5$
6) אף x
7) $x\geq 12$
8) $x>-13$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2+bx+c \gtrless 0$ כאשר $a\neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x^2<144$

2) $x^2-12x>-32$

3) $(x+2)(x+5)<0$

4) $(x+2)(x+4)<35$

5) $-x^2+13x+30<0$

6) $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

7) $(x-5)^2+x(x+2)<89$

8) $(5x+6)^2\leq 4(x-3)^2$

9) $-3x^2+12x>0$

10) $x^2-10x+25>0$

11) $(x-3)^2>(x-1)(x+6)-x^2-3x$

12) $2x^2+2x+24\geq 0$

תשובות סופיות:

1) $-12<x<12$

2) $x<4\ ,\ x>8$

3) $-5<x<-2$

4) $-9<x<3$

5) $x<-2\ ,\ x>15$

6) $x\leq 7\ ,\ x\geq 11$

7) $-4<x<8$

8) $-4\leq x\leq 0$

9) $0<x<4$

10) $x>5\ ,\ x<5$

11) $x<3\ ,\ x>5$

12) כל x

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3-4x^2+4x+1>0$, $x^4+2x^2+1<0$ וכו'.

בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.

לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

2) $x(x^2+x+1)>0$

3) $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

4) $x^3-25x\ge 0$

5) $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

6) $(x^2+8x+20)(3x-5)\le 0$

7) $(x^2-x-6)(x-1)<0$

8) $x^3-6x^2+9x\le 0$

9) $(x^2+6)(x+3)>0$

10) $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

תשובות סופיות:

1) $1<x<2\ ,\ x>3$

2) $x>0$

3) $-2\le x\le -1\ ,\ x\ge \frac{1}{2}$

4) $-5\le x\le 0\ ,\ x\ge 5$

5) $x>2$

6) $x\le 1\frac{2}{3}$

7) $x<-2\ ,\ 1<x<3$

8) $x\le 0\ ,\ x=3$

9) $x>-3$

10) $x<1\ ,\ 2<x<4$

אי-שוויונים עם מנה:

סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (או $\frac{f(x)}{g(x)}<0$) נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$ ו-$g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4}<0$ בו: $f(x)=2x+4$ ו-$g(x)=x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

2) $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

3) $\frac{1}{x^2-16}>0$

4) $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

5) $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

6) $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

7) $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

8) $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

9) $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

10) $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

תשובות סופיות:

1) $-3<x<1\ ,\ x>3$

2) $x<-\frac{2}{3}\ ,\ x\geq -\frac{1}{2}$

3) $x<-4\ ,\ x>4$

4) $2<x<3\ ,\ x>3$

5) $\frac{1}{2}\leq x<5$

6) $x>1$

7) $x>-2$

8) $2<x<3$

9) $1\leq x\leq 6$

10) $x<2\ ,\ x>6$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שיווינים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a<b$ וגם $b<c$, ניתן לכתוב: $a<b<c$.

מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שיווינים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $3<x+1<5$

2) $0<\frac{1}{x+4}<2$

3) $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

4) $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

5) $6x-38\le x-3\le 5x+7$

6) $6<\frac{2x+10}{3}\le\frac{7x-20}{5}$

7) $-1\le\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

8) $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

תשובות סופיות:

1) $2<x<4$

2) $x>-3\frac{1}{2}$

3) $x>0$

4) $x<2\frac{2}{5}\ ,\ x>2\frac{2}{3}$

5) $-2.5\le x\le 7$

6) $x\ge 10$

7) $1\le x<13$

8) ϕ

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x \le -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \le 5 \ \cup \ 0 < x < 8\}$

2) $x(x+5)-3x+15 \le 2x-1-x(4-x)$

3) $\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \le 0$

4) $\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$

5) $\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \ge 0$

6) $x(x+3)(2x-5) < 0$

7) $\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$

8) $\frac{5-2x}{(x-8)^2} \le 0$

9) $\frac{x-3}{x^2+2} > 0$

10) $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$

11) $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$

12) $\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$

13) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$

14) $\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \ge \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2}$

15) $6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x+10$

16) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \ \cup \ \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$

17) $1 < \frac{x-1}{x-4} \le 2$

18) לאלו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה: $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$?

תשובות סופיות:

1) $-2 < x \le -\frac{3}{4}$

2) $x \le -4$

3) $-4 \le x < 2 \,,\, 3 \le x$

4) $x < -7 \,,\, -\frac{1}{3} < x < 2 \,,\, x > 5$

5) $-1 < x \le 1.5 \,,\, 4 < x \le 12$

6) $x < -3 \,,\, 0 < x < 2.5$

7) $x < -1 \,,\, 2 < x < 6 \,,\, x > 6$

8) $2.5 \le x < 8 \,,\, x > 8$

9) $x > 3$

10) $x < -3 \,,\, 0 < x < 1 \,,\, x > 4$

11) $-1 < x < 0 \,,\, 1 < x < 3 \,,\, x > 3$

12) $x > 7$

13) $x < -2 \,,\, 2 < x < 4$

14) $x \le 0 \,,\, 1 \le x < 2 \,,\, x > 4$

15) אף x

16) $x \ne 1$

17) $x \ge 7$

18) $-3 < x < -\frac{3}{5} \,,\, x > 3$

אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a \ge 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	$0 \le f(x) < a^2$
$a < 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)} > a$	כל x בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $\sqrt{x+3} < 7$

2) $\sqrt{2x-5} \ge 1$

3) $\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x$

4) $\sqrt{x^2+x-6} < x-3$

5) $\sqrt{x^2+3x+2} - 1 < \sqrt{x^2-x+1}$

6) $\sqrt{x^2+5x+6} - \sqrt{x^2-x+1} < 1$

7) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2}$

8) $\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$

9) $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

10) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}$

11) $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$

12) $\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 5\sqrt{\frac{x}{x+9}} \ge 4$

תשובות סופיות:

1) $-3 \le x < 46$.

2) $x \ge 3$.

3) $x < -10$, $x > 1$.

4) $\varnothing$.

5) $x \le -2$, $-1 \le x < \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$.

6) $x \le -3$, $-2 \le x < \frac{-13+\sqrt{73}}{16}$.

7) $\frac{12}{25} < x \le \frac{1}{2}$.

8) $x < 2\sqrt{5}-4$.

9) $1 < x \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.

10) $-\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \le 1$ שזה: $-2.618 < x \le 1$.

11) $2.5 \le x < 3$.

12) $x < -9$, $x > 0$.

תחום הגדרה:

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-4}$

ב. $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

ג. $f(x)=\sqrt{12x-x^2-x^3}$

ד. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2-4}}$

ה. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-x}$

ו. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

ב. $f(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג. $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ד. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1\le x\le 4$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}$ הוא $x>2$, $x\le -2$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, (a פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{x+5}}$.
ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים.
מצא את תחום הערכים האפשריי של הפרמטר a.

תשובות סופיות:

1) א. $x \ge 1\frac{1}{3}$ ב. $x \le -1 , x \ge 6$ ג. $x \le -4 , 0 \le x \le 3$
ד. $-5 \le x < -2 , x > 2$ ה. $-2 \le x < 2 , x > 2$ ו. $x \le -\frac{1}{3} , 1 \le x < \frac{3}{2} , x > \frac{3}{2}$

2) א. $x \ge 7$ ב. $-6 \le x \ne -2$ ג. $x \le -1\frac{1}{2} \ , \ x \ge 1$
ד. $x \le -3 \ , \ -2 \le x \ne 1$.

3) $a = 5$.

4) $a = 2$.

5) א. $x \ge a^2 - 6$ ב. $0 < a \le 1$.

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

מקרה	$\|x\|<a$	$\|x\|>a$
פתרון	$-a<x<a$	$x<-a \bigcap x>a$

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x+2|<3$

ב. $|2x+1|>7$

ג. $|6-2x|<x$

ד. $|2x+1|-3x>4$

2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1<|4-3x|<7$

ב. $|2x+3|<8<|5-x|$

3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x^2+6x-4|<12$

ב. $|x^2+x-10|>3x-2$

ג. $|x^2-3x|<4$

ד. $|6x^2-7x-4|>1$

ה. $x^2-6|x|+5\le 0$

ו. $x^2-6|x+1|-1>0$

4) פתור את אי-השוויונים הבאים :

א. $|x-3|+|2x+2|>7$

ב. $|x+8|<11-|1-3x|$

ג. $|3-2x|-11>4-|6+x|$

ד. $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

ה. $|5+4x|-|3-x|+\left|4-\frac{1}{2}x\right|\le 22$

ו. $|x+3|+|x^2-5x+4|<19$

5) פתור את אי-השוויונים הבאים :

א. $\left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\ge 3$

ב. $1\le\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\le 2$

ג. $\frac{|x-6|+8x}{x-12}\le 12$

ד. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|>5$

6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים) :

א. $\sqrt{x^2-|x-12|}<x$

ב. $2-\sqrt{1-x}\le|x+2|-3$

ג. $\sqrt{|2x+1|-x-1}\le 4-|3x|$

ד. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$

תשובות סופיות:

1) א. $-5<x<1$ ב. $x<-4$ או $3<x$
ג. $2<x<6$ ד. $x<-1$.

2) א. $1\frac{2}{3}<x<3\frac{2}{3}$ או $-1<x<1$ ב. $-5\frac{1}{2}<x<-3$

3) א. $-2<x<2$ או $-8<x<-4$ ב. $4<x$ או $x<2$
ג. $-1<x<4$ ד. $x>\frac{5}{3}$, $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$, $x<-\frac{1}{2}$
ה. $1\le x\le 5$ או $-5\le x\le -1$ ו. $x>7$, $x<-5$

4) א. $2<x$ או $x<-2$ ב. $-1<x<1$
ג. $4<x$ או $x<-6$ ד. $4<x$ או $x<-1$
ה. $-7\frac{3}{7}\le x\le 4$ ו. $-2<x<6$.

5) א. $x>2$, $\frac{7}{6}\le x<2$ ב. $x\ge 6$, $0\le x\le\frac{2}{3}$
ג. $x\ge 46$, $x<12$ ד. $2<x\le 4$, $1<x<2$, $\frac{1}{2}<x<1$

6) א. $x\neq 12$, $x\ge 3$, $x=-1$ ב. $x\le\frac{-15+\sqrt{33}}{2}$
ג. $-1\le x\le -\frac{2}{3}$, $0\le x\le 1$ ד. $-1<x<\sqrt[3]{4}$

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 4 - חקירת משוואה ממעלה ראשונה

תוכן העניינים

פתרון משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטר:

סיכום כללי:

שלבי עבודה:

- נפתור את המשוואה.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למשוואה על ידי הצבתו במשוואה המקורית.

שאלות:

1) פתרו את המשוואה: $kx+6k=2x+3k^2$.

2) פתרו את המשוואה: $a^2(x-1)=3ax+4(x-a)$.

3) פתרו את מערכת המשוואות: $\begin{cases} 2kx+5y=2k^2 \\ 2x-y=-10 \end{cases}$.

4) פתרו את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} bx-(1-2b)y=1 \\ (2b+1)x+3(by-1)=0 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $x=3k \quad (k\neq 2)$.

2) $x=\dfrac{a}{a+1}$.

3) $(k-5,2k)$.

4) $\pm 1 \,,\; b\neq 0 \quad , \quad \left(\dfrac{2-b}{b(b+1)},\dfrac{1}{b+1}\right)$

חקירה של משוואה ממעלה ראשונה:

שאלות:

1) נתונה המשוואה הבאה: $m^2(2x-1)=9(x-1)-x(6+5m)$.

מצאו לאילו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ומצאו אותו).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

2) נתונה המשוואה: $k^2(5-2x)=3(15-2kx)$.

א. מצאו לאלו ערכי k למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אף פתרון.

iii. אינסוף פתרונות.

ב. מצאו לאלו ערכי k פתרון המשוואה:

i. חיובי.

ii. מקיים את אי-השוויון: $2x-3>x$.

3) נתונה המשוואה: $\frac{mx}{m-2}=\frac{2m}{m-5}-\frac{6x}{m^2-7m+10}$.

מצאו לאלו ערכי m למשוואה:

א. פתרון יחיד.

ב. אף פתרון.

ג. אינסוף פתרונות.

4) לפניכם המשוואה: $m\cdot\frac{x-1}{x}-\frac{m+6}{m}=\frac{-3}{x}$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. האם עבור ערכי ה- m הנותנים אינסוף פתרונות, כל x יהיה פתרון של המשוואה?

ד. עבור אלו ערכי m יהיה פתרון המשוואה גדול מ-2?

5) נתונה המשוואה: $x\left(m^2-9\right)=2\left(m\left(3x+1\right)+1-x\right)$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. חקרו את המשוואה ומצא עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. עבור איזה ערך של m פתרון המשוואה יהיה: $x=2$?

6) נתונה המשוואה: $\frac{5}{k-4}-\frac{kx}{3k+15}=\frac{k^2+29}{k^2+k-20}$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. האם קיים ערך של k עבורו יש למשוואה אינסוף פתרונות?

ג. עבור איזה ערך של k פתרון המשוואה הוא: -4?

7) לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{m^2x}{m-5}+\frac{2mx-m^2+1}{m-5}=1$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

8) לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{\left(m^2+1\right)x-4}{x-2}=m+1$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

9) לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{5m-2}{mx-1}=-3$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

10) לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{x+1}{x-m+1}=\frac{x}{x+m+2}$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{1}{2}$, $m\neq -3$, $\frac{m-3}{2m-1}$ ב. $m=-3$ ג. $m=\frac{1}{2}$

2) א. 1. $k\neq 0,3$ 2. $k=0$ 3. $k=3$.

ב. 1. $k>0$ או $k<-3$ וגם $k\neq 3$ 2. $0<k<15$ וגם $k\neq 3$.

3) א. $m\neq 2\,,3\,,5$ ב. $m=2\,,3\,,5$ ג. אף m.

4) א. $m\neq 3$, $x=\frac{1}{m+2}$ ב. פתרון יחיד: $m\neq 0,-2,3$, אף פתרון: $m=0,-2$, אינסוף פתרונות: $m=3$. ג. לא, רק: $x\neq 0$.

ד. $-2<m<-1.5$.

5) א. $m\neq 7,-1$, $x=\frac{1}{m-7}$ ב. פתרון יחיד: $m\neq 7,-1$, אף פתרון: $m=7$, אינסוף פתרונות: $m=-1$.

6) א. $x=\frac{3}{k}-3$, $k\neq 0,4,-5$ ב. אף k ג. $k=-3$.

7) א. $m\neq 0\,,\ -2\,,\ 5$ ב. אף m ג. $m=0\,,\ -2\,,\ 5$

8) א. $m\neq 0\,,\ \pm 1$ ב. $m=1$ ג. $m=0\,,\ -1$

9) א. $m\neq 0\,,\ \frac{2}{5}$ ב. אף m ג. $m=\frac{2}{5}\,,\ 0$

10) א. $m\neq 0\,,\ -1\,,\ -2\,,\ -\frac{1}{2}$ ב. אף m ג. $m=0\,,\ -1\,,\ -2\,,\ -\frac{1}{2}$

חקירה של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

שלבי עבודה:

- נפתור את מערכת המשוואות.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למערכת על ידי הצבתו.

המשמעות הגרפית של חקירת מערכת משוואות ממעלה ראשונה:

בהינתן מערכת שתי משוואות מהצורה: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ נאמר כי:

אם: $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ אז הישרים נחתכים (כלומר למערכת פתרון יחיד).

אם: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ אז הישרים מקבילים (כלומר למערכת אף פתרון).

אם: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ אז הישרים מתלכדים (כלומר למערכת אינסוף פתרונות).

שאלות:

1) נתונה מערכת המשוואות: $\begin{cases} x+3ay=a \\ ax+3y=4a-3 \end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי a למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אף פתרון.

iii. אינסוף פתרונות.

ב. מצאו לאלו ערכי a נקודת החיתוך בין הישרים (המיוצגים על ידי המשוואות) נמצאת ברביע השלישי.

2) נתונות מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}(m+4)x+5y=m+8\\ x+my=m+2\end{cases}$.

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. מצאו עבור אלו ערכי m יש למערכת:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. פתרון המערכת מייצג נקודה במערכת צירים.
הוכיחו כי נקודה זו נמצאת על הישר: $y(m-1)=2(m-1)x+4-m$.

ד. עבור אלו ערכי m פתרון המערכת:

i. יהיה ברביע השני.

ii. יהיה מתחת לציר ה- x.

iii. יהיה מימין לציר ה- y.

3) לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-2x+3y=\left(k-\dfrac{x}{2}\right)^2+4\\ x-10=k(1-y)\end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי k יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

4) לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}k(x-1)=1-2y\\ \dfrac{2x+3}{k}=3-y\end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי k יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

5) לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} k^2(1-x)=k+9x+12y \\ x=1-\dfrac{2(y+1)}{k} \end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי k יש למערכת המשוואות:
i. פתרון יחיד.
ii. אינסוף פתרונות.
iii. אף פתרון.
ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

6) נתונה מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} (2-k)x-y=k \\ 3x+ky=-1 \end{cases}$.

א. מצאו את הערך של k עבורו $(2,7)$ הוא פתרון של מערכת המשוואות.
ב. האם יש למשוואה פתרונות נוספים עבור הערך של k שמצאת בסעיף הקודם?
ג. האם קיים ערך של k עבורו למערכת המשוואות לא יהיו פתרונות כלל? אם כן מצאו אותו.

7) לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} ax+b^2y=a^2 \\ 3x+by=9b \end{cases}$.

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.
ב. הראו שכאשר $a=3b$ יש למערכת אינסוף פתרונות.
ג. עבור אלו ערכי a ו-b הפתרון היחיד של המערכת יהיה $(4,3)$?

8) לפניך מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} amx+y=m^2 \\ bx+my=-9m \end{cases}$.

א. מצאו ערכי הפרמטרים a ו-b אם ידוע כי כאשר $m=4$ פתרון המשוואה הוא $(4,0)$.
ב. הוכיחו את הטענות הבאות:
i. לכל ערך של m יש למערכת פתרון ממשי.
ii. פתרון המערכת תמיד יהיה $(m,0)$.
ג. העזרו בסעיף הקודם וקבע איזו משוואה מבין שלושת המשוואות הבאות לא תכיל את הפתרון היחיד הנ"ל:
i. $7y+2m=2x$.
ii. $my=2x-m$.
iii. $m(y-mx)=2x-m(m^2+2)$.

9) לפניך הישרים הבאים: $\begin{cases} x+(k-9)y=8 \\ x-\dfrac{14y}{k}=1 \end{cases}$.

א. עבור אלו ערכי k הישרים הללו מקבילים?

ב. הביעו באמצעות k את נקודת החיתוך של הישרים.

ג. עבור איזה ערך של k נקודת החיתוך של הישרים תהיה על הישר: $y=x-8$?

10) לפניכם שני הישרים: $\begin{cases} (k^2+6)x+ay=15 \\ kx+ay=3 \end{cases}$, a,k פרמטרים, $a\neq 0$.

א. הוכיחו כי לכל ערך של k הישרים הללו נחתכים.

ב. מצאו את a אם ידוע כי כאשר $k=6$ נקודת החיתוך היא $\left(1,\frac{1}{3}\right)$.

ג. עבור איזה ערך של k נקודת החיתוך תהיה $(2,1)$?

ד. הראו כי נקודת החיתוך של הישרים נמצאת על גרף הפונקציה: $\frac{4y}{x}=k^2-5k+6$.

תשובות סופיות:

1) א. i. $a \neq \pm 1$ ii. $a=-1$ iii. $a=1$ ב. $-1<a<0$

2) א. $\left(\frac{m-2}{m-1}, \frac{m}{m-1}\right)$, $m \neq 1,-5$

ב. פתרון יחיד: $m \neq 1,-5$, אינסוף פתרונות: $m=-5$, אף פתרון: $m=1$.

ג. הוכחה.

ד. i. $1<m<2$ ii. $0<m<1$ iii. $m>2$, $m<1$, $m \neq -5$.

3) א. i. $k \neq 3,-1$ ii. $k=3$ iii. $k=-1$ ב. $\left(\frac{k^2+3k+10}{k+1}, \frac{8}{k+1}\right)$.

4) א. i. $k \neq 0,\pm 2$ ii. $k=2$ iii. $k=0,-2$ ב. $\left(\frac{k-3}{k+2}, \frac{3k+1}{k+2}\right)$.

5) א. i. $k \neq 0,3$ ii. $k=3$ iii. $k=0$ ב. $\left(\frac{k-4}{k-3}, \frac{6-k}{2k-6}\right)$.

6) א. $k=-1$ ב. כן. ג. $k=3$.

7) א. $\left(a+3b, -\frac{3a}{b}\right)$ ג. $b=2$, $a=-2$.

8) א. $b=-9$, $a=1$ ג. ii

9) א. $k=2,7$ ב. $\left(\frac{k^2-9k+112}{k^2-9k+14}, \frac{7k}{k^2-9k+14}\right)$ ג. $k=8$

10) א. הוכחה. ב. $a=1$ ג. $k=1$.

חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם שורשים:

שאלות:

1) לפניכם המשוואה: $(m-1)x=\sqrt{m-1}$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

2) לפניכם המשוואה: $\frac{mx}{\sqrt{3x-2}}=\sqrt{3x-2}+\frac{x-m}{\sqrt{3x-2}}$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

תשובות סופיות:

1) א. פתרון יחיד: $m>1$ והוא: $x=\frac{1}{\sqrt{m-1}}$ ב. $m=1$ ג. $m<1$.

2) א. פתרון יחיד: $\frac{6}{5}<m<4$ והוא: $x=\frac{m+2}{4-m}$. ב. אינסוף: $\varnothing$. ג. אף פתרון: $m\geq 4$, $m\leq\frac{6}{5}$.

חקירה של משוואות ממעלה ראשונה עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרת ערך מוחלט: $|x|=\begin{cases} x & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

- משוואה מהצורה: $|A|=|B|$ תפוצל לשתי משוואות: $A=B$ או: $A=-B$.
  יש לחקור כל מקרה בנפרד ולאחד פתרונות.
- עבור משוואות המכילות ביטויים עם ערכים מוחלטים יש להפריד עבור כל מקרה לפי הגדרת הערך המוחלט. לבסוף יש לאחד פתרונות.
- למשוואה מהצורה: $|x|=k$ (כאשר x הוא המשתנה ו- k הוא פרמטר) יתכנו:
  - שני פתרונות אם $k>0$.
  - פתרון אחד (והוא $x=0$) אם $k=0$.
  - אף פתרון אם $k<0$.

שאלות:

1) חקור את המשוואה הבאה: $|x-2m|=|x+1|$.

2) חקור את המשוואה הבאה: $|mx-3x|=|x-m|$.

3) חקור את המשוואה הבאה: $\frac{mx^2}{|x|-1}-m|x|=2m+1$.

4) נתונה מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} y+|x-2|=3 \\ |x+y|=m \end{cases}$.

מצא עבור אלו ערכי m יש למערכת:

א. פתרון אחד בלבד.

ב. שני פתרונות שונים.

ג. אינסוף פתרונות.

תשובות סופיות:

1) פתרון יחיד: $m \neq -\frac{1}{2}$. אף פתרון: $\varnothing$. אינסוף: $m = -\frac{1}{2}$.

2) פתרון יחיד: $m = 0$ והוא $x = 0$. אף פתרון: $\varnothing$.
שני פתרונות: $m \neq 0$ והם: $x_{1,2} = -\frac{2m}{3}, \frac{12m}{5}$.

3) עבור: $m = -\frac{1}{2}$ יש פתרון יחיד: $x = 0$.
עבור: $m > 0$, $-\frac{1}{2} < m < 0$, $m < -1$ יש שני פתרונות.
עבור: $m = 0$, $-1 < m < -0.5$ אין פתרון כלל.

4) א. $m = 0, m > 5$ ב. $0 < m < 5$ ג. $m = 5$.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 5 - חקירת משוואה ממעלה שנייה

תוכן העניינים

פתרון משוואות ממעלה שנייה עם פרמטר:

סיכום כללי:

משוואות מהצורה: $ax^2+bx+c=0$ המכילות פרמטר כלשהו, m, המגולם בתוך הביטויים של המקדמים a , b ו-c נקראות משוואות עם פרמטר.

פתרון של משוואה עם פרמטר יתבצע באופן רגיל, אך יכול להכיל את הפרמטר.

שאלות:

1) פתור את המשוואה: $x^2+mx-12m^2=0$.

2) פתור את המשוואה: $2x^2+5m^2=(11m+1)x-5m$.

תשובות סופיות:

1) $x_1=3m\ ,\ x_2=-4m$.

2) $x_1=5m\ ,\ x_2=\frac{m+1}{2}$.

חקירה של משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

המשוואה הריבועית:

תהא המשוואה הריבועית: $ax^2+bx+c=0$ כאשר $a\neq 0$.
נגדיר: $\Delta=b^2-4ac$ ונאמר כי:

- למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים אם: $\Delta>0$.
- למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד אם: $\Delta=0$.
- למשוואה לא יהיו שני פתרונות ממשיים כלל אם: $\Delta<0$.

אם $a=0$ תתקבל משוואה ליניארית מהצורה: $bx+c=0$.

- למשוואה זו יהיה פתרון ממשי אחד אם $b\neq 0$.
- למשוואה לא יהיו פתרונות כלל אם: $b=0$ ו-$c\neq 0$.

אם $b=0$ וגם $c=0$ למשוואה יהיו אינסוף פתרונות ממשיים.

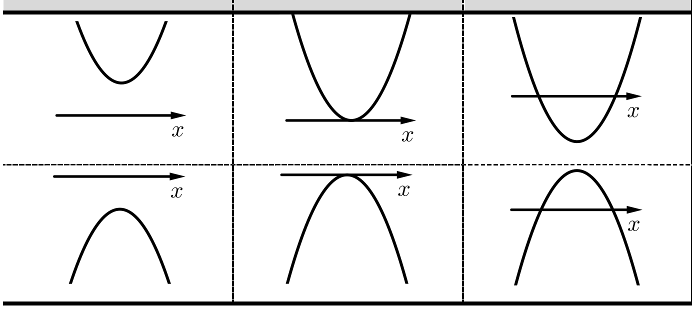
הפונקציה הריבועית:

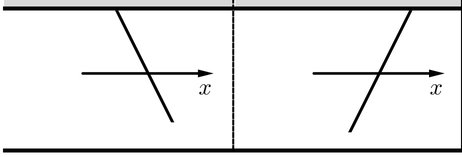
תהא הפונקציה הריבועית: $y=ax^2+bx+c$ כאשר $a\neq 0$.
נגדיר: $\Delta=b^2-4ac$ ונאמר כי לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה-x באופן הבא:

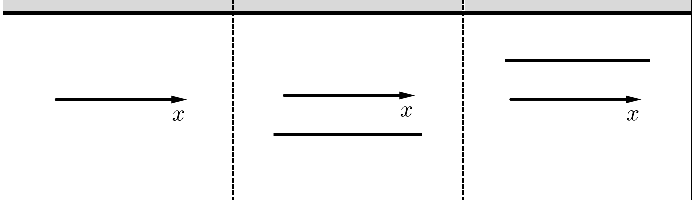
- אם $a>0$ תתקבל פרבולה ישרה (מחייכת):
  - עבור $\Delta>0$ הפרבולה תחתוך את ציר ה-x בשתי נקודות שונות.
  - עבור $\Delta=0$ הפרבולה תשיק לציר ה-x (חיתוך בנקודה אחת).
  - עבור $\Delta<0$ הפרבולה תהיה מרחפת (ללא חיתוך עם ציר ה-x כלל).
- אם $a>0$ תתקבל פרבולה הפוכה (עצובה):
  - עבור $\Delta>0$ הפרבולה תחתוך את ציר ה-x בשתי נקודות שונות.
  - עבור $\Delta=0$ הפרבולה תשיק לציר ה-x (חיתוך בנקודה אחת).
  - עבור $\Delta<0$ הפרבולה תהיה מרחפת (ללא חיתוך עם ציר ה-x כלל).

- אם $a=0$ תתקבל פונקציה ליניארית: $y=bx+c$ ולה:
  - עבור $b>0$ יתקבל ישר עולה החותך את ציר ה- x ב- $\left(-\frac{c}{b},0\right)$.
  - עבור $b<0$ יתקבל ישר יורד עולה החותך את ציר ה- x ב- $\left(-\frac{c}{b},0\right)$.
- אם $b=0$ יתקבל ישר $y=c$ וכעת:
  - אם $c>0$ הישר כולו מעל לציר ה- x ומקביל לו.
  - אם $c<0$ הישר כולו מתחת לציר ה- x ומקביל לו.
  - אם $c=0$ הישר מתלכד עם ציר ה- x.

ניתן לסכם את כל המקרים באופן הבא:

פירוט מילולי	**תנאים**	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
תיאור גרפי של $y=ax^2+bx+c$ עבור $a\neq 0$	$a>0$			
	$a<0$			

		$b>0$	$b<0$
תיאור גרפי של $y=bx+c$ כאשר $a=0$ ו- $b\neq 0$	$a=0$ $b\neq 0$		

		$c>0$	$c<0$	$c=0$
תיאור גרפי של $y=c$ כאשר $a=0$ ו- $b=0$	$a=0$ $b=0$			

שאלות:

1) נתונה המשוואה: $(3-m)x^2+4mx-2m=0$, $(m\neq 3)$.

מצא לאלו ערכי m למשוואה:

א. שני פתרונות ממשיים שונים.

ב. פתרון ממשי אחד.

ג. אין פתרונות ממשיים כלל.

2) נתונה הפונקציה: $y=2mx^2+mx-1$.

מצא לאלו ערכי m הפונקציה אינה חותכת את ציר ה-x.

3) נתונה הפונקציה: $y=(m^2-9)x^2+(m+3)x+4$, $(m\neq \pm 3)$.

מצא לאלו ערכי m הפונקציה נמצאת מעל ציר ה-x לכל ערך של x.

4) נתון אי השוויון: $mx^2>(m+4)(x-1)-x^2$.

מצא לאלו ערכי m אי השוויון מתקיים לכל ערך של x.

5) נתונה המשוואה הבאה: $-m(x-1)^2+2(m+16)=x(6-x(2m-3))+1$.

א. מצא עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

i. שני פתרונות ממשיים שונים.

ii. פתרון ממשי אחד.

iii. אף פתרון ממשי.

ב. מצא את הפתרון היחיד עבור ערכי ה-m המתאימים במידה והוא קיים.

6) נתונה המשוואה הבאה: $m^2x(9x+1)+1=0$.

א. מצא עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

i. שני פתרונות ממשיים שונים.

ii. פתרון ממשי אחד.

iii. אף פתרון ממשי.

ב. מצא את הפתרון היחיד עבור ערכי ה-m המתאימים במידה והוא קיים.

7) נתונה המשוואה: $mx^2-(9m+4)x+20m+16=0$.

א. הראה שעבור כל ערך של m יש למשוואה לפחות פתרון ממשי אחד.

ב. פתור את משוואה והראה כי אחד השורשים הוא מספר קבוע שאינו תלוי ב- m.

8) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=(m^2-m-2)x^2+2(m-2)x+4$.

ענה על השאלות הבאות:

א. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בשתי נקודות שונות?

ב. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודת אחת בלבד?

ג. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה לא חותך את ציר ה- x כלל?

ד. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה חיובי לכל ערך של x?

ה. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה שלילי לכל ערך של x?

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=kx^2-5kx+6k+1$.

א. עבור אלו ערכי k גרף הפונקציה יהיה כולו מעל לציר ה- x?

ב. עבור איזה ערך של k יתקבל גרף פרבולה הנוגעת בציר ה- x?

10) עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה: $f(x)=(k^2-5k-6)x^2+(2-3k)x+2$ הוא אי-שלילי לכל ערך של x?

11) נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2+4x+2m+2$ ו- $g(x)=(1-m)x^2-3mx-1.5$.

א. מצא עבור אלו ערכי m נחתכים הגרפים של הפונקציות:

i. בשתי נקודות שונות.

ii. בנקודה אחת בלבד.

iii. באף נקודה.

ב. מצא לאלו ערכי m יהיה גרף הפונקציה $f(x)$ כולו מתחת לגרף הפונקציה $g(x)$.

12) נתונה הפונקציה: $f(x)=2kx^2+6kx+8k+2$.

א. עבור איזה ערך של k גרף הפונקציה יהיה ישר העובר ברביעים הראשון והשני בלבד?

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=kx^2-6x-10$.

ב. האם קיימים ערכי k עבורם גרף הפונקציה $f(x)$ הוא מעל גרף הפונקציה $g(x)$ לכל x? הראה חישוב מתאים.

ג. הוכח כי קיים ערך של k עבורו גרפים של שתי הפונקציות משיקים זה לזה ומצא אותו.

13) נתונה הפונקציה הריבועית: $f(x)=2x^2-(5m+7)x+3m^2+8m+5$.

א. הראה כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x לפחות פעם אחת לכל ערך של m .

ב. מצא את שורשי הפונקציה.

ג. עבור אלו ערכי m סכום השורשים גדול מ-3.5.

ד. מהם שורשי הפונקציה כאשר: $m=0$?

14) נתונה המשוואה הבאה: $(k+1)x^2+(k^2-4k-5)x-54=0$.

א. ענה על שני החלקים הבאים:

i. עבור אלו ערכי k יהיו פתרונות המשוואה שני מספרים נגדיים?

ii. מהם פתרונות המשוואה עבור ערכי ה- k שמצאת?

ב. הראה כי לא קיים ערך של k עבורו פתרונות המשוואה: $(k-4)x^2+(6k-k^2-8)x+5k-10=0$ הם מספרים נגדיים.

15) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=mx^2+(m-2)x+m^2+3m-10$.

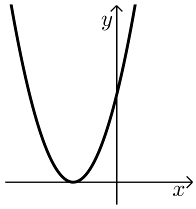
א. מצא עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ב. מצא את נקודות החיתוך שבין הגרפים המתקבלים עבור כל ערכי ה- m שמצאת בסעיף א'.

16) מצא עבור אלו ערכי m למשוואה: $(4-m)x^2+(m+2)x+m^2-12m-28=0$ יהיו שני פתרונות ממשיים שונים שאחד מהם הוא אפס.

17) נתונה משפחת הפרבולות הבאה: $f(x)=2x^2+(m+1)x+m^2+2m-2.5$.

א. מצא ערך של m עבורו גרף הפרבולה השייכת למשפחת הפונקציות הנ"ל היא מהצורה:

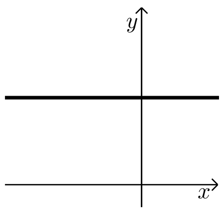


ב. עבור ערך ה-m שמצאת בסעיף הקודם מצא את התחום של k עבורו יהיה לגרף הפרבולה ולישר $y=kx-4$ שתי נקודות חיתוך.

18) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=(m^2-5m+4)x^2+(2m-2)x+1$.

א. עבור אלו ערכים של m הפונקציה תחתוך את ציר ה-x בשתי נקודות שונות?

ב. מצא ערך של m עבורו גרף הפונקציה השייך למשפחת הפונקציות הנ"ל יהיה מהצורה שבצד, וכתוב את משוואת הישר המתקבלת במקרה זה.



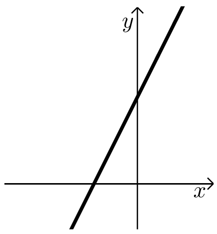
ג. הגרף שאת משוואתו מצאת בסעיף הקודם חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות שונות. הראה כי אחת מהן אינה תלויה ב-m .

ד. עבור אלו ערכי m נקודת החיתוך שתלויה ב-m תהיה מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם?

19) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{4x(mx+2)+4-m}{4}$, m פרמטר חיובי.

א. הראה כי לכל הגרפים המייצגים את משפחת הפונקציות הנ"ל יש נקודת חיתוך עם ציר ה-x שאינה תלויה ב-m ומצא את נקודה זו.

ב. עבור איזה ערך של m גרף הפונקציה יהיה מיוצג ע"י ישר מהצורה:



ג. הראה כי קיים תחום של x אשר לא תלוי ב-m ובו גרף הפונקציה נמצא תמיד מתחת לישר שמצאת בסעיף הקודם ומצא את תחום זה.

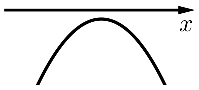
20) נתונה הפונקציה: $f(x)=3m^2x^2+4mx+2$.

א. הוכח כי הפונקציה נמצאת תמיד מעל לציר ה-x עבור כל ערך של m .

ב. מגדירים פונקציה חדשה באופן הבא: $y=\dfrac{mx^2+2x(m+2)+m}{3m^2x^2+4mx+2}$.

מצא עבור אלו ערכי m הפונקציה y היא שלילית.

21) נתונה הפונקציה: $f(x)=mx^2+(2m+1)x-\frac{1}{4}$.



א. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה השייך למשפחת הפונקציות הנ"ל יהיה מהצורה:

ב. מגדירים פונקציה חדשה באופן הבא: $y=\frac{(m^2-9)x^2+(m+3)x-1}{mx^2+(2m+1)x-\frac{1}{4}}$.

הראה כי הפונקציה y חיובית בתחום שמצאת בסעיף הקודם.

ג. דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה y עם ציר ה- y מעבירים ישר המקביל לציר ה- x.

i. כתוב את משוואת ישר זה.

ii. מצא עבור אלו ערכים של m גרף הפונקציה חותך את הישר בנקודה שבה: $x=-9$.

תשובות סופיות:

1) א. $m>0$ או $m<-3$ וגם $m\neq 3$ ב. $m=0\ ,\ -3$ ג. $-3<m<0$.

2) $-8<m\le 0$.

3) $m>3\frac{2}{5}$ או $m<-3$.

4) $m>0$.

5) א. i. $m>3$ ii. אף m iii. $m<3$.
ב. לא קיים מקרה בו יש למשוואה פתרון יחיד.

6) א. i. $m>6\ ,\ m<-6$ ii. $m=\pm 6$ iii. $-6<m<6\ ,\ m\neq 0$
ב. בשני המקרים יתקבל: $x=-\frac{1}{18}$.

7) א. מתקבל: $\Delta=(m+4)^2$ שתמיד אי-שלילי ובמקרה הלא-ריבועי מתקבלת משוואה עם פתרון אחד. ב. $\frac{5m+4}{m}\ ,\ m_{1,2}=4$.

8) א. $-2<m<2\ ,\ m\neq -1$ ב. $m=-1,-2$ ג. $m\ge 2\ ,\ m<-2$
ד. $-2<m<-1\ ,\ m=2$. ה. אף m.

9) א. $0\le k<4$ ב. $k=4$.

10) $-26\le k\le -2$.

11) א. i. $m\neq 0\ ,\ m>-2\ ,\ m<-8$ ii. $m=0,-2,-8$ iii. $-8<m<-2$.
ב. $-8<m<-2$.

12) א. $k=0$ ב. לא. אין פתרון לאי-שוויון: $f(x)>g(x)$.
ג. עבור אי-השוויון של סעיף ב' מתקבל: $\Delta=4(k+3)^2$ ולכן כאשר $k=-3$ הגרפים נוגעים זה בזה בנקודה אחת.

13) א. הוכחה. ב. $x_{1,2}=m+1\ ,\ 1.5m+2.5$
ג. $m>0$ ד. $x_{1,2}=1\ ,\ 2.5$.

14) א. i. $k=5$ ii. $x=\pm 3$ ב. הוכחה.

15) א. $m=2,-5$ ב. $(0,0)\ ,\ (-1,2)$.

16) $m=14$.

17) א. $m=1$. כאשר: $m=-3$ נקבל גרף: $y=2x^2-2x+0.5$ המשיק לציר x מימין לראשית ולכן נפסל. ב. $k>8\ ,\ k<-4$.

18) א. $m\neq 4\ ,\ m>1$ ב. $m=1\ ,\ f(x)=1$ ג. הנקודה היא: $(0,1)$
ד. $m<4\ ,\ m\neq 1$.

19) א. הנקודה היא: $(-0.5,0)$ ב. $m=0$ ג. $-0.5<x<0.5$.

20) א. מתקבל: $\Delta = -8m^2$ ולכן לגרף הפרבולה אין חיתוכים כלל ומכיוון ש-A אי-שלילי הרי שמדובר בפרבולה מרחפת חיובית. במקרה הישר מתקבל ישר המקביל לציר ה-x שגם כן כולו חיובי.
ב. מאחר והמכנה תמיד חיובי (ממקודם) יש לדרוש תנאים שיקיימו מונה שלילי ($a<0$, $\Delta<0$) - עבור המונה) נקבל: $m<-1$.

21) א. $-1<m<-\frac{1}{4}$ ב. הוכחה. ג. i. $y=4$
ii. $-1\frac{7}{9}$, $m=5$.

חקירות עם קדקוד פרבולה:

סיכום כללי:

תהא הפונקציה הריבועית: $y=ax^2+bx+c$ כאשר $a\neq 0$. נגדיר: $\Delta=b^2-4ac$.

התיאור הגרפי של הפונקציה הריבועית הוא פרבולה.

עבור $a\neq 0$ נקבל כי קדקוד הפרבולה הוא: $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

- שאלות העוסקות בקדקוד חיובי/שלילי נדרוש: $-\frac{\Delta}{4a}>0$ או $-\frac{\Delta}{4a}<0$ בהתאמה.
- שאלות העוסקות בקדקוד הנמצא מימין/משמאל לציר ה- y נדרוש $-\frac{b}{2a}>0$ או $-\frac{b}{2a}<0$ בהתאמה.
- שאלות העוסקות בקדקוד שנמצא מעל/מתחת לישר $y=n$ או מימין/משמאל לישר $x=k$ נדרוש $-\frac{\Delta}{4a} \gtrless n$ ו- $-\frac{b}{2a} \gtrless k$ בהתאמה.
- שאלות העוסקות בקדקוד שבאחד הרביעים נדרוש $-\frac{b}{2a} \gtrless 0$ ו- $-\frac{\Delta}{4a} \gtrless 0$ לפי הרביע המבוקש.

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=(m+3)x^2+(3m+14)x+2m+7$.

א. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה הוא פרבולה החותכת את ציר ה- x בשתי נקודות?

ב. הבע באמצעות m את שיעורי קדקוד הפרבולה של גרף הפונקציה הנתונה.

ג. עבור אלו ערכי m קדקוד הפרבולה יהיה וודאי מתחת לישר: $y=-4$?

ד. עבור אלו ערכי m מתקיימים התנאים של סעיף א' ו-ג' יחד?

2) נתונה הפרבולה הבאה: $f(x)=x^2-3(m-2)x+2m^2-8m+7$.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. גרף הפרבולה חותך את ציר ה-x בשתי נקודות עבור כל ערך של m .

ii. קדקודי כל הפרבולות המיוצגות ע"י תבנית הפונקציה הנתונה נמצאים מתחת לציר ה-x .

ב. עבור איזה ערך של m גרף הפרבולה יחתוך את ציר ה-x בשתי נקודות הנמצאות באותו מרחק מראשית הצירים?

ג. עבור ערך ה-m שמצאת בסעיף הקודם מצא את נקודות החיתוך על ציר ה-x .

ד. הראה כי קדקוד הפרבולה המתקבלת בעת הצבת ערך ה-m הנ"ל נמצא על ציר ה-y .

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=(m^2-2m-3)x^2+8x+0.5$.

א. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה הוא פרבולה?

ב. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה הוא פרבולה החותכת את ציר ה-x בשתי נקודות?

ג. הבע באמצעות m את שיעורי קדקוד הפרבולה.

ד. הוכח כי קדקודי כל הפרבולות נמצאים על הישר: $2y=8x+1$ עבור כל ערך של m עבורו מתקבלת פרבולה.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=(k^2-2k+15)x^2+kx+12$.

א. הוכח כי עבור כל ערך של k גרף הפונקציה לא נוגע בציר ה-x כלל.

ב. הוכח כי קדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י התבנית הנ"ל תמיד מעל לציר ה-x .

ג. עבור איזה ערך של k קדקוד הפרבולה יהיה על ציר ה-y ?

ד. מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה במקרה זה.

5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=(k^2-9)x^2+(k+3)x-1$.

א. עבור אלו ערכי k גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה-x ?

ב. הבע באמצעות k את שיעורי קדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י התבנית של $f(x)$.

ג. מצא עבור אלו ערכי k קדקוד הפרבולה יהיה ברביע הראשון.

ד. האם קיים ערך של k עבורו קדקוד הפרבולה נמצא על ציר ה-y ? נמק את תשובתך.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=(m^2-4)x^2+5mx+6$.

א. הראה כי הפונקציה חותכת את ציר ה-x לפחות פעם אחת עבור כל ערך של m.

ב. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה הוא פרבולת מינימום?

ג. הראה כי קדקוד הפרבולה המתקבל עבור ערכי ה-m שמצאת בסעיף הקודם נמצא תמיד מתחת לציר ה-x.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=(m^2-8m+12)x^2+(m-2)x+2$.

א. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה יהיה כולו מעל לציר ה-x?

ב. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה הוא פרבולה מרחפת חיובית שקדקודה משמאל לישר: $x=-\frac{1}{2}$.

ג. האם ייתכן כי גרף הפונקציה יכול להיות פרבולת מקסימום שקדקודה הוא משמאל לישר: $x=-\frac{1}{2}$? נמק והראה חישוב מתאים.

8) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=(m^2-4)x^2+2x+1$, $g(x)=(m+2)x^2+(5-m)x+3$.

א. ענה על השאלות הבאות:

i. מצא ערך של m עבורו הגרפים משיקים זה לזה.

ii. מצא ערך של m עבורו הגרפים חותכים זה את זה בנקודה אחת בלבד.

iii. הסבר מדוע בכל מקרה התקבל ערך m שונה.

ב. עבור אלו ערכי m הגרפים של הפונקציות הם פרבולות מינימום המקיימות שקדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י הפונקציה $f(x)$ נמצא מימין לקדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י $g(x)$?

9) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=(m^2-9)x^2+7x+5$, $g(x)=(m-3)x^2+(4m-3)x+1$.

א. עבור אלו ערכי m הגרפים נחתכים בשתי נקודות שונות?

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. עבור איזה ערך של m הגרפים הם פרבולות נוגעות זו בזו?

ii. עבור איזה ערך של m הגרפים חותכים זה את זה בנקודה אחת בלבד.

iii. הסבר את ההבדל בין הערכים של m שהתקבלו בחלק i ובחלק ii.

ג. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ד. עבור אלו ערכי m הסכום של שיעורי ה-x של נקודות קדקודי הפרבולות של שתי הפונקציות יהיה קטן מ-1?

תשובות סופיות:

1) א. $m<-28$, $m>-4$, $m\neq -3$ ב. $\left(\frac{-3m-14}{2m+6},\frac{-m^2-32m-112}{4m+12}\right)$

ג. $m>-3$ ד. $m>-3$.

2) א. i. מתקבל: $\Delta=m^2-4m+8$ שחיובי תמיד.

ii שיעור ה- y של הקדקוד הוא: $-\frac{\Delta}{4}$ אשר שלילי תמיד. ב. $m=2$

ג. $(\pm 1,0)$ ד. הקדקוד: $(0,-1)$.

3) א. $m\neq 3,-1$ ב. $m\neq 3,-1$, $-5<m<7$ ג. $\left(\frac{-4}{m^2-2m-3},\frac{m^2-2m-35}{2(m^2-2m-3)}\right)$

ד. יש להציב את הקדקוד בישר ולקבל שוויון אמת.

4) א. המקדם a תמיד חיובי ומתקבל: $\Delta=-47k^2+96k-720$ שתמיד שלילי.

מכאן שמדובר בפרבולה מרחפת עבור כל k. ג. $k=0$ ד. $(0,12)$

5) א. $-3\le k<1.8$ ב. $\left(\frac{1}{2(3-k)},\frac{9-5k}{4(k-3)}\right)$ ג. $1.8<k<3$.

ד. לא. מכיוון שלא קיים ערך של k עבורו שיעור ה- x של קדקוד הפרבולה יהיה אפס.

6) א. מתקבל: $\Delta=m^2+96$ המעיד כי תמיד יש לפונקציה שני חיתוכים וכאשר $m=\pm 2$

מתקבלים שני ישרים החותכים את ציר ה- x. ב. $m<-2$, $m>2$.

7) א. $m\le 2$, $m>6\frac{4}{7}$. ב. $6\frac{4}{7}<m<7$. ג. לא.

8) א. i. $m=-1\frac{4}{9}$ ii. $m=-2$ iii. במקרה i מדובר בפרבולות אשר

יכולות להשיק ובמקרה ii מדובר בשני ישרים אשר רק נחתכים. ב. $3<m<4$.

9) א. $m\neq 3,-2$, $m<3\frac{1}{16}$ ב. i. $m=3\frac{1}{16}$ ii. $m=3,-2$

iii. במקרה i מדובר במשוואה ריבועית ובנקודת השקה, ובמקרה ii מדובר במשוואה ליניארית ובנקודת חיתוך.

ג. עבור $m=-2$ מתקבלת: $\left(-\frac{2}{9},3\frac{16}{81}\right)$, עבור: $m=3$ מתקבלת: $(2,19)$.

ד. $m<-3$, $-2.72<m<1.22$, $m>3$.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 6 - נוסחאות וייטה

תוכן העניינים

הגדרת נוסחאות וייטה וחישובים יסודיים:

סיכום כללי:

הגדרה:

נתונה הפונקציה הריבועית: $y=ax^2+bx+c$, כאשר: $\Delta>0$, $a\neq0$.

אם x_1 ו-x_2 הם שורשי המשוואה: $ax^2+bx+c=0$ אז מתקיים: $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$.

לקשרים אלו קוראים בשם **נוסחאות וייטה** והם תקפים רק במשוואה ריבועית שבה $\Delta>0$.

שאלות:

1) לפניך משוואות ריבועיות. מבלי לפתור, מצא את הסכום ואת מכפלת השורשים שלהם:

א. $x^2+5x-8=0$.

ב. $3x^2-7x+4=0$.

ג. $x^2+9x-14=0$.

ד. $13x-6x^2+7=0$.

2) נתונה משוואה ריבועית: $ax^2+3x+5=0$. מצא את a אם ידוע כי למשוואה שני שורשים ממשיים שונים אשר סכומם הוא 3.

3) נתונה משוואה ריבועית: $\alpha x^2+(\beta-\alpha)x-16=0$, ($\beta$, α פרמטרים).
מצא את ערכי הפרמטרים α ו-β אם ידוע כי למשוואה שני שורשים ממשיים שונים אשר סכומם הוא 2- ומכפלתם היא 16-.

4) כתוב משוואה ריבועית אשר לה שני שורשים ממשיים שונים, x_1 ו-x_2 שמקיימים: $x_1+x_2=5$ ו-$x_1\cdot x_2=-2$.
כמה משוואות כאלה תיתכנה? נמק.

תשובות סופיות:

1) א. $x_1+x_2=-5$, $x_1x_2=-8$ ב. $x_1+x_2=2\frac{1}{3}$, $x_1x_2=1\frac{1}{3}$

ג. $x_1+x_2=-9$, $x_1x_2=-14$ ד. $x_1+x_2=\frac{6}{13}$, $x_1x_2=\frac{7}{13}$.

2) $a=-1$.

3) $\alpha=1$, $\beta=3$.

4) אם $a=1$ אז: $x^2-5x-2=0$.

יש אינסוף משוואות מהצורה: $ax^2-5ax-2a=0$.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 7 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$
4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
5. $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$
6. $a^m \cdot b^m = \left(a\cdot b\right)^m$
7. $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
8. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

א. a^2a^6
ב. $t^3t^5t^7$
ג. $b^2b^5b^{12}b^3$
ד. $\frac{k^8}{k^3}$
ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$
ו. $\frac{c^6}{c^2}$
ז. $\frac{a^3a^{19}}{a^{15}}$
ח. $\frac{x^{30}}{x^9x^{18}}$
ט. $\frac{y^3y^{15}}{y^4y^{14}}$
י. $3^23^33^4$
יא. $\frac{2^{16}2^2}{2^{10}}$
יב. $\frac{5^{20}5^35^{16}}{5^45^{22}5^8}$

2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

א. $\frac{3^42^7}{2^63^2}$
ב. $\frac{a^{10}b^{13}a^3}{b^4b^6b^2a^{12}}$
ג. $\frac{x^8y^5y^9x^2}{y^4x^4}$

3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^62^{17}3^32^4}{3^42^32^2}$.
מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243\cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים :

א. $\dfrac{2^3\cdot 2^7}{2^4\cdot 2^5}$ ב. $\dfrac{9^3\cdot 27^2}{3^9\cdot 81}$

ג. $\dfrac{10^9\cdot 25^5\cdot 8^{-1}}{40^3\cdot 125^5}$ ד. 2^3+2^5

5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק : $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$.

א. $\left(a^2\right)^4$ ב. $\left(c^3\right)^{10}$ ג. $\left(x^3x^{10}\right)^2$

ד. $\dfrac{\left(b^2\right)^3}{b^2b^3}$ ה. $\dfrac{n^7n^8}{\left(n^3\right)^4}$ ו. $\dfrac{d^{20}\left(d^4\right)^2}{d^{12}\left(d^3\right)^2}$

ז. $\dfrac{2^5\left(2^4\right)^2 2^3}{\left(2^3 2^2\right)^3}$ ח. $\dfrac{3^6\left(3^3 3^2\right)^6}{3^{28}\left(3^2\right)^3}$ ט. $\dfrac{\left(8^3\right)^8 8^{11}}{\left(8^2 8\right)^3 8^8}$

י. $\dfrac{\left(2^4\right)^5\left(3^6\right)^7 2^{20}}{3^{35}2^{40}}$ יא. $\dfrac{\left(3^2\right)^6 5^{31}3^7}{\left(5^2\right)^{10}5^{11}3^{18}}$ יב. $\dfrac{\left(3^2\right)^7 5^{10}\left(5^3\right)^2}{3^9 5^{16}}$

6) לפניך הביטויים הבאים : $\left(\left(3^2\right)^3\right)^4$ ו- $\left(\left(3^6\right)^n\right)^2$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

א. $\dfrac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$ ב. $\dfrac{5^{20}3^{14}3^8}{3^{20}5^{12}5^8}$ ג. $\dfrac{7^{12}2^2 2^6}{2^5 7^{10}7}$

8) פשט את הביטויים הבאים :

א. $3^2 9\cdot 81^2$ ב. $64^2 2^3 8^2$ ג. $125\cdot 25\cdot 5^5$

ד. $\dfrac{2^4\cdot 16^5}{8\cdot 512}$ ה. $\dfrac{\left(4^2\right)^3 16}{64\cdot 2^3}$ ו. $\dfrac{\left(\left(3^4\right)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$

9) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{\left(2a^2b\right)^3\cdot\left(ab^{-3}\right)^2}{4ab^{-2}\cdot\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^4}$

ב. $\dfrac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\dfrac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\dfrac{4^{b+3}}{4^{b+1}+4^{b+2}}$

ד. $\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{x^{n+3}+x^{n+5}}{x^{n+2}}$

10) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $(ab)^n=a^nb^n$ ו- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

א. $\left(a^2b\right)^3$

ב. $\left(m^4n^3\right)^5$

ג. $\left(x^{12}y^3\right)^3$

ד. $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^4$

ה. $\left(\dfrac{i^4}{k^3}\right)^7$

ו. $\left(\dfrac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$

ז. $\left(\dfrac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6$

ח. $\left(\dfrac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2$

ט. $\left(\dfrac{\left(b^{12}c\right)^2c^{14}}{c\left(c^3b^5\right)^4b^3}\right)^2$

11) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\left(\dfrac{3^92^62^2}{3^62^53^2}\right)^2$

ב. $\left(\dfrac{\left(5^4\right)^2 3^6}{3^55^7}\right)^2$

ג. $\left(\dfrac{7^3\cdot16\cdot128\cdot49}{\left(2^27\right)^5}\right)^3$

12) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\dfrac{1}{4^6}$

ב. $\dfrac{1}{5^3}$

ג. $\dfrac{1}{2^{10}}$

ד. $\dfrac{1}{8}$

ה. $\dfrac{1}{81}$

ו. $\dfrac{1}{125}$

13) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\dfrac{1}{4^{-3}}$

ב. $\dfrac{1}{3^{-2}}$

ג. $\dfrac{1}{5^{-3}}$

14) חשב את הביטויים הבאים:

א. $3^2\cdot3^{-5}\cdot3^7$
ב. $2^{-8}\cdot512\cdot2^2$
ג. $5^6\cdot5^{-3}\cdot5^{-2}$
ד. $2^{14}\cdot3^{-6}\cdot2^{16}\cdot3^4\cdot2^{-30}$
ה. $\dfrac{2^{-5}\cdot5^3\cdot2^{14}}{5^2\cdot5^{-10}\cdot5^8\cdot2^6}$
ו. $\dfrac{3^{-6}\cdot7^7\cdot7^{-4}}{3^{-4}\cdot3^{-3}\cdot7^3}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\dfrac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$
ב. $\dfrac{\left(4^4\right)^{-4}3^{-11}}{\left(3^{-2}4^3\right)^{-6}}$
ג. $\dfrac{2^{-3}5^4}{5^4\cdot125\cdot\left(5^22\right)^{-3}\cdot2^{-4}}$

16) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{a^{n+2}\cdot a^{2-3n}}{\left(a^3\right)^{n+1}}$
ב. $\dfrac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\dfrac{1}{k^{7m-4}}}$
ג. $\dfrac{\left(m^{n+2}\right)^3\cdot m^{-4n-2}}{\dfrac{1}{m^{6n+2}}\cdot\left(m^3\right)^{n-2}}$

תשובות סופיות:

1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5.

2) א. 18 ב. ab ג. x^6y^{10}.

3) $n=16$.

4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40.

5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5.

6) $n=2$.

7) א. 6 ב. 9 ג. 56.

8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}.

9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x}+x$.

10) א. a^6b^3 ב. $m^{20}n^{15}$ ג. $x^{36}y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21}b^3$
ז. $x^{12}y^{18}$ ח. t^4r^{12} ט. b^2c^6.

11) א. 576 ב. 225 ג. 8

12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}.

13) א. 64 ב. 9 ג. 125.

14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3.

15) א. $5^{24}\cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3\cdot 2^4$.

16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}.

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

1. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
4. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a\cdot b}$
5. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

א. $3^{\frac{1}{4}}$ ב. $2^{\frac{3}{5}}$ ג. $6^{\frac{5}{6}}$

ד. $-12^{\frac{2}{7}}$ ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$ ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$

ז. $5^{-\frac{1}{4}}$ ח. $27^{-\frac{1}{3}}$ ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$ ב. $-\sqrt{25}$ ג. $\sqrt[3]{8}$

ד. $-\sqrt[7]{128}$ ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$ ו. $\left(\sqrt[5]{1024}\right)^2$

ז. $\left(\sqrt[5]{-243}\right)^3$ ח. $\sqrt[4]{-16}$ ט. $\sqrt[4]{-25^2}$

י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $8^{\frac{2}{3}}$
ב. $32^{-\frac{3}{5}}$
ג. $128^{-\frac{2}{7}}$

ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$
ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$
ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ז. $81^{\frac{3}{4}}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}$
ח. $343^{-\frac{2}{3}}\cdot 100^{\frac{1}{2}}$
ט. $16^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$.

21) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$
ב. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$
ג. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$

ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$
ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$
ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$
ח. $\frac{\sqrt[3]{500}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2}\cdot\sqrt[3]{4}}$
ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2}\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400}\sqrt{2}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

א. $3\sqrt{2}$
ב. $5\sqrt{3}$
ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ד. $2\sqrt[3]{3}$
ה. $x\sqrt{x}$

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

א. $2\sqrt{5}$
ב. $4\sqrt[3]{2}$
ג. $2\sqrt[5]{3}$

ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$
ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$
ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ז. $-5\sqrt[3]{2}$
ח. $-5\sqrt[4]{2}$
ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$

ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$

ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$

ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{18}-\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7}+\sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}$

ד. $\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{80}$ ה. $\dfrac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\dfrac{\sqrt{8}}{2}$

ז. $\dfrac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\dfrac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{12}}$ ט. $\dfrac{10}{\sqrt[5]{160}-\sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{-2.5}\cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{2}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}$

ד. $\dfrac{27^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\dfrac{49^{\frac{2}{5}}\cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\dfrac{512^{\frac{1}{4}}\cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{-\frac{1}{8}}\cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ

ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$.

18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16

ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5.

19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$

ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$.

20) $\sqrt{2}$.

21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2

ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$.

22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$.

23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$

ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5\cdot 2}$.

24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$.

25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$

ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$.

26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$

ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$.

27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$.

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $15{,}000{,}000$
ב. $1{,}500{,}000$
ג. $150{,}000{,}000{,}000$
ד. $23{,}400{,}000$
ה. 0.0003
ו. 0.00000042
ז. 0.000000042
ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3{,}000{,}000)^2$
ב. $(2{,}000{,}000)^2$
ג. $(5{,}000)^3$
ד. $(50{,}000)^3$
ה. $(0.0002)^4$
ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$
ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

28) א. $1.5\cdot10^{7}$ ב. $1.5\cdot10^{6}$ ג. $1.5\cdot10^{11}$ ד. $2.34\cdot10^{7}$ ה. $3\cdot10^{-4}$
ו. $4.2\cdot10^{-7}$ ז. $4.2\cdot10^{-8}$ ח. $4.2\cdot10^{-10}$.

29) א. $9\cdot10^{12}$ ב. $4\cdot10^{12}$ ג. $1.25\cdot10^{11}$ ד. $1.25\cdot10^{14}$ ה. $1.6\cdot10^{-15}$
ו. $6.4\cdot10^{-14}$ ז. $1.25\cdot10^{-16}$ ח. $3.43\cdot10^{-25}$.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 8 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

משוואות מעריכיות יסודיות:

סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $2^x = 16$

ב. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג. $10^{x-2} = 10000^{x+1}$

ד. $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה. $\left(2^x \cdot 32\right)^3 = 8$

ו. $\left(5^{x^2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז. $\frac{7^x}{343^3} = 1$

ח. $\left(25 \cdot 0.2^{2x}\right)^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

2) פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א. $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$

ב. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג. $25\left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$

ב. $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג. $\left(9\sqrt{27}\right)^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$

ד. $\sqrt[x]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה. $2^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8\left(\sqrt{8}\right)^{-\sqrt{x}}$

ו. $5^x \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$

ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$

ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$

ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$

ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$

ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$

ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = \left(2\sqrt{5}\right)^{4-x}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=4$ ב. $x=-\frac{1}{3}$ ג. $x=-2$ ד. $x=2,8$ ה. $x=-4$
ו. $x=1,-\frac{1}{5}$ ז. $x=9$ ח. $x=1$.

2) א. $x=-1$ ב. $x=-2$ ג. $x=3,-2$.

3) א. $x=-\frac{1}{2}$ ב. $x=1$ ג. $x=-\frac{8}{19}$ ד. $x=2,-\frac{2}{3}$ ה. $x=4,9$ ו. $x=25$.

4) א. $x=0$ ב. $x=4$ ג. $x=2$ ד. $x=2$ ה. $x=5$
ו. $x=1.5$ ז. $x=\frac{2}{3}$.

משוואות עם חיבור וחיסור איברים:

סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחיסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב-t, למשל במשוואה: $4^x-3\cdot 2^x=4$ נסמן: $2^x=t$.

נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.

לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה-x המתאימים.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $2^x+6\cdot 2^x=56$

ב. $8^x+3\cdot 8^x=256$

ג. $5\cdot 3^x-3^{x+1}=162$

ד. $2\cdot 6^x+6^{x+2}-6^{x-1}=227$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $81^{x+1}+18\cdot 3^{4x-3}=735$

ב. $5^{3x+2}+4\cdot 125^x=29$

ג. $\left(2^{3x+1}\right)^2-64^{x-\frac{1}{3}}=15$

ד. $\sqrt{10000^{x+1}}-\sqrt[4]{10^{8x+1}}=\sqrt[4]{1000}\cdot\left(\sqrt[4]{10^7}-1\right)$

ה. $6^{-x}-5\cdot 36^{-\left(\frac{x}{2}+1\right)}=186$

ו. $5^{-x}+25^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}-5^{-x-1}=145$

ז. $2\cdot 10^{x+1}+10^{x+2}=3\cdot 5^{x+1}$

ח. $4^{x+2}-6\cdot 4^x=7\cdot 12^{x+1}+6\cdot 12^x$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור ממעלה שנייה):

א. $9^x-36\cdot 3^x+243=0$

ב. $16^{x+1}-65\cdot 4^x+4=0$

ג. $6^x-4\cdot 6^{-x}+3=0$

ד. $4^{-x}-3\cdot 4^x+2=0$

ה. $\left(\frac{4}{9}\right)^x-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1}=-\frac{2}{3}$

ו. $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2-5\cdot 2^{\frac{1}{3}x+1}+1=0$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

א. $\frac{20}{9^x+1}=3-\frac{8}{9^x-1}$

ב. $\frac{7^x}{7^x-4}+\frac{8}{7^x+5}=3$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}}-6\cdot5^{x-1.5}+1=0$

ב. $3^x-\sqrt{16\cdot3^{x+1}}=-9$

ג. $36^x-6^{x+1}\cdot3^x+8\cdot9^x=0$

ד. $4\cdot9^x-10\cdot6^x+6\cdot4^x=0$

ה. $25\cdot5^{2x}+16\cdot15^x=9^{x+1}$

ו. $9^x+4^x-6^x=\frac{7}{6^{1-x}}$

ז. $\frac{8^{2x}-8}{7}=4^x-2$

ח. $2^{3x}-2^{2x+2}-2^x+4=0$

תשובות סופיות:

1) א. $x=3$ ב. $x=2$ ג. $x=4$ ד. $x=1$.

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=0$ ג. $x=\frac{1}{3}$ ד. $x=\frac{1}{4}$

ה. $x=-3$ ו. $x=-2$ ז. $x=-3$ ח. $x=-2$

3) א. $x=2,3$ ב. $x=1,-2$ ג. $x=0$ ד. $x=0$

ה. $x=0,1$ ו. $x=-6,-9$.

4) א. $x=1,-\frac{1}{2}$ ב. $x=1$.

5) א. $x=\frac{1}{2},1\frac{1}{2}$ ב. $x=1,3$ ג. $x=1,2$ ד. $x=1,0$

ה. $x=-2$ ו. $x=1,-1$ ז. $x=0,\frac{1}{2}$ ח. $x=0,2$.

משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי.
יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

הערה:

יש לבדוק את ערכי ה-x עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\left(\sqrt{3-x}\right)^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^{x}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{3-x}}$.

2) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2+x}=1$.

3) $\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}}=|x-3|^{-1}$.

תשובות סופיות:

1) $x=\frac{1}{4}\ ,\ 1\ ,\ 2$

2) אין פתרון.

3) $x=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,4$

משוואות מסכמות שונות:

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5\left(2^x-2\right)+2=4^x-2^x$.

2) $\frac{2^x+4}{2^x-2}=\frac{2^{x+1}}{2^x+2}+\frac{6}{4^{x-1}-1}$.

3) $\frac{32}{16^x-4^{x+2}+60}=\frac{4^x}{4^x-10}-\frac{4}{2^{2x-1}-3}$.

4) $3^{2x^2+2}-3^{x^2+3}+9=3^{x^2+1}$.

5) $\sqrt[x]{10}=4\cdot\sqrt[2x]{10}+60$.

6) $\sqrt[x-1]{8\cdot 2^{x+1}}=\left(\sqrt[x]{2}\right)^2\cdot\sqrt[x-1]{\sqrt[x]{32}}$.

7) $10\cdot 4^{x+2}-16\cdot 10^x-90\cdot 6^x+36\cdot 15^x=0$.

תשובות סופיות:

1) $x=1,2$.

2) $x=3$.

3) $x=1.5$.

4) $x=1,-1$.

5) $x=\frac{1}{2}$.

6) $x=-3$.

7) $x=1,-2$.

משוואות עם קבוע אוילר:

סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828.
למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

א. $e^{3x}=e^{2x-1}$
ב. $e^{5x-1}=e\cdot e^{6x+1}$
ג. $e^{x-5}=\left(e^{1-x}\right)^3$
ד. $e^x\cdot\sqrt{e^{3x-1}}=\left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

א. $e^2\cdot e^x-e^{x+1}=e-1$
ב. $\sqrt[3]{e^{x+1}}\cdot e^2=e^x\sqrt{e}$
ג. $e^{2x}+e^x-2=0$
ד. $e^{1+x}+e^{1-x}=e^2+1$

3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

א. $xe^x=\sqrt[4]{e}\cdot x$
ב. $e^{3x}=x\cdot e^{3x}$
ג. $xe^{x^2}=\frac{x}{\sqrt{e^x}}$
ד. $\sqrt[3]{e^{3x-1}}\cdot x=xe^x$

תשובות סופיות:

1) א. $x=-1$ ב. $x=-3$ ג. $x=2$ ד. $x=1\ ,\ \frac{1}{6}$.

2) א. $x=-1$ ב. $x=\frac{11}{4}$ ג. $x=0$ ד. $x=1\ ,\ -1$.

3) א. $x=0\ ,\ \frac{1}{4}$ ב. $x=1$ ג. $x=0\ ,\ -\frac{1}{2}$ ד. $x=0$.

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

1) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} y=3^x \\ y=18-3^x \end{cases}$.

2) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x}-5^y=5^x-25 \\ y-x=2 \end{cases}$.

3) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} \dfrac{1}{3^y-4}+\dfrac{3}{3^x-2}-\dfrac{1}{3^x+2}=3 \\ 4^y=\sqrt{256^x} \end{cases}$.

4) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^x+2^y=13 \\ 2\cdot 5^x-2^y=2 \end{cases}$.

5) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 2\cdot 3^x-3\cdot 2^y=42 \\ 3^{x+1}-2^{y+1}=73 \end{cases}$.

6) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x+1}+8\cdot 10^x-2^{2y+4}=0 \\ \left(\sqrt{3}\right)^y=27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases}$.

7) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 6\cdot 4^x-7\cdot 6^{y-1}+2\cdot 3^{x+y}=6^y \\ \sqrt[4]{5^x}\cdot\sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^y}=\sqrt[4]{125}\cdot 5^x \end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $(2,9)$ **2)** $(0,2)$, $(2,4)$ **3)** $(1,2)$ **4)** $(1,3)$

5) $(3,2)$ **6)** $(-1,-2)$ **7)** $(1,2)$, $(-1,0)$

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השיוויונים הבאים:

1) $3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x}$

2) $\sqrt{2^x} \le 4^{x^2-1\frac{1}{4}}$

3) $e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x}$

4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \ge \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x}$

5) $25^x + 5 < 6 \cdot 5^x$

6) $e^{2x} - 2e^x + 1 \le 0$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

7) $e^x > 3$

8) $e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

תשובות סופיות:

1) $x < \frac{2}{3}$

2) $x \ge 1\frac{1}{4}$ או $x \le -1$

3) $0 \le x < 1$

4) $x \le \frac{1}{8}$

5) $0 < x < 1$

6) $x = 0$

7) $x > \ln 3$

8) $x > \ln 4$ או $x < 0$

אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x)>0$.

דרך הפתרון: אם: $f(x)>1$ אז: $g(x)>h(x)$.

אם: $0<f(x)<1$ אז: $g(x)<h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $x^{2x-1} > x^{x+2}$

2) $(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1}$

3) $x^{2x-6} < 1$

4) $x^{2x^2+2} < x^{5x}$

5) $(x^2-6x+13)^{x^2-2x} \ge (x^2-6x+13)^3$

6) $(x+1)^{|x|} < x^2+2x+1$

תשובות סופיות:

1) $0<x<1\ ,\ x>3$.

2) $3<x<6$.

3) $1<x<3$.

4) $0<x<0.5\ ,\ 1<x<2$.

5) $x\le -1\ ,\ x\ge 3$.

6) $0<x<2$.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 9 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a \neq 1$, $b > 0$, a.

הסבר:

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b. ערך חזקה זו הוא x. ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0$, $a \neq 1$.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_6(4x-2)=1$

ב. $\log_4(4-x)=\frac{1}{2}$

ג. $\log_8(x^4-73)=1$

ד. $\log_3\frac{x+3}{3-3x}=-2$

ה. $\log_x(2x^2+x-12)=2$

ו. $\log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

א. $\log_4(\log_3 x)=1$

ב. $3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$

ג. $\log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2}$

ד. $\log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$

5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_2(3^x+37)=6$

ב. $\log_3(3\cdot 2^x-303)=4$

ג. $\log_5(126\cdot 5^x-25)=2x+1$

ד. $3\log_2\left(3\cdot 4^{1+\frac{1}{3}x}-11\cdot 2^{\frac{x}{3}}+3\right)=12+2x$

6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

א. $(\log_2 x)^4=10000$

ב. $2(\log_3 x)^2+\log_3 x=10$

ג. $\frac{3\cdot\log_{14}x+1}{(\log_{14}x)^2}=4$

ד. $\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x}+\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x+2}=2$

תשובות סופיות:

1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
ו. 4 ז. -1.5

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=65,536$ ג. $x=27$ ד. $x=4$
ה. $x=5$ ו. $x=4$

3) א. $x=2$ ב. $x=2$ ג. $x=\pm3$ ד. $x=-2$ ה. $x=3$ ו. $x=2$

4) א. $x=81$ ב. $x=5$ ג. $x=\pm4$ ד. $x=\pm1$

5) א. $x=3$ ב. $x=7$ ג. $x=-1,\ 2$ ד. $x=-6$

6) א. $x=1024,\ \frac{1}{1024}$ ב. $x=9,\ \frac{1}{9\sqrt{3}}$
ג. $x=14,\ \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x=\frac{1}{3}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a>0\neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:

- מכפלה לסכום: $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$.
- מנה להפרש: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$.
- מקדם למעריך: $\log_a b^n=n\log_a b$ (כאשר $b>0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_3 12+\log_3 2.25$

ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40+\log_{\frac{1}{5}} 12.5+\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}$

ג. $\log_2 200-\log_2 100$

ד. $\log_3 60-\log_3 540$

ה. $\log_4 8+\log_4 12-\log_4 6$

ו. $\log_7 1.5-\log_7 147+\log_7 2$

ז. $3\log_5 2-\log_5 1.6$

ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4+2\log_{\sqrt{4}}\sqrt{10}$

ט. $\frac{1}{2}\left(\log_7\frac{7}{2}+\log_7 2\right)+\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 8$

י. $\frac{1}{4}\log 81-\log 1.5-\frac{1}{2}\log 40$

2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\dfrac{\log_5 16}{\log_5 8}$

ב. $\dfrac{\log_9 62.5+\log_9 2}{\log_9 0.2}$

ג. $\dfrac{\log_3 5-\log_3 2+\log_3 50}{\log_3 225-2}$

ד. $\dfrac{2-2\log_3 4+\log_3 8^{\frac{8}{9}}}{4-\log_3 0.01-2\log_3 18}$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x+\log_2(x-6)=4$

ב. $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$

ג. $\log_2(x+30)-\log_2 x=4$

ד. $\log_5(x+146)-\log_5(x+2)=2$

ה. $2\log_3(2x-1)-\log_3(22x+9)=-1$

ו. $2\log_5(x-2)=\log_5(4x-15)+\log_5 x$

4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5(4x-3)=\log_5 7$.

ב. $2\log_2(2x-2)-\log_2(16-x)=\log_2(x-1)+1$.

5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3(3\cdot 5^x+39)=3+\log_3(5^x-3)$.

ב. $\log_2(3-4^{x+1})-\log_2 11=x$.

6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_4 x\cdot\log_4(16x)=8$.

ב. $\log_2\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\log_2(1024x)=-11$.

ג. $\log_2 x^2\log_2\left(\frac{x}{16}\right)=-\log_2(64x)$.

ד. $(\log_4 4x)^2=\log_4 4x^2+1$.

ה. $\log_3(9x^2)\cdot\log_3(9x^3)=\log_3\left(\frac{81}{x}\right)+2$.

ו. $\frac{\log_2\left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2}+\frac{\log_2(2x)}{\log_2 x}=1\frac{7}{9}$.

שאלות הבעה:

7) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$

ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

8) נתון: $\log_2 5 = b$, $\log_2 3 = a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

9) נתון: $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$.

הבע באמצעות a את $\log_{18} 27$ ואת $\log_{18} 16$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

10) $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$.

11) $2\log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$.

12) $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

13) $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$.

תשובות סופיות:

1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2
ו. -2 ז. 1 ח. 6 ט. 1.5 י. -0.5.

2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5.

3) א. $x=8$ ב. $x=3,\frac{1}{27}$ ג. $x=2$ ד. $x=4$ ה. $x=3$ ו. $x=4$.

4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$.

5) א. $x=1$ ב. $x=-2$.

6) א. $x=16,\frac{1}{256}$ ב. $x=2,\ \frac{1}{512}$ ג. $x=4,\ 2\sqrt{2}$ ד. $x=4,\frac{1}{4}$
ה. $x=\frac{1}{9},\sqrt[6]{3}$ ו. $x=8,\ \sqrt[7]{2^{15}}$.

7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$.

8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}$.

9) $3(1-a)$, $4(2a-1)$.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

חישובים עם חזקה לוגריתמית:

סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x} = x$ כאשר $a > 0 \neq 1$.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$

2) נתונה התבנית: $3 \cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = \log_4 7$ ב. $x = \log_4 \sqrt{3}$

ג. $x = 2\log_4 0.1$ ד. $x = \sqrt{\log_2 5}$

3) נתונה התבנית: $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = -1$ ב. $x = \log_3 5$

ג. $x = \log_3 \sqrt{6}$

4) חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{36}} 81}$ ב. $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}} 5}}$

תשובות סופיות:

1) א. 8 ב. 25.

2) א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15.

3) א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2 - 2\sqrt{6}$.

4) א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{2}{\sqrt[9]{25}}$.

מעבר בין בסיסים:

סיכום כללי:

מעבר מבסיס a לבסיס m (כאשר: $a>0 \neq 1$ ו-$m>0\neq 1$, וכן: $b>0$)
יתבצע באופן הבא: $\log_a b=\frac{\log_m b}{\log_m a}$.

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_4 7\cdot\log_7 4$
ב. $\log_{0.1}3\cdot\log_9 1000$
ג. $\log_{\sqrt{3}}5\cdot\log_{\sqrt{125}}9$
ד. $\log_4 169\cdot\log_{25}64\cdot\log_{13}625$

2) הוכח את השוויונים הבאים:

א. $\log_2 25\cdot\log_5 3\cdot\log_9 2=1$.
ב. $\log_{16}9\cdot\log_5 4\cdot\log_3 5=1$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log_2 x+\log_{32}x=6$
ב. $\log_3 x\cdot\log_{27}x=3$
ג. $\log_2 4x\cdot\log_8\frac{x}{16}=-\frac{5}{3}$
ד. $\log_x 5-6\log_{125}x=1$

שאלות הבעה:

4) נתון: $\log_4 6=a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 3$
ב. $\log_{32}36$
ג. $\log_{216}96$.

5) נתון: $\log_3 5=b$, $\log_2 3=a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 50$
ב. $\log_2\sqrt{30}$
ג. $\log_5 22.5$

6) נתון $\log 9 = 2b$, $\log_3 7 = a$. הבע באמצעות a ו- b את:

א. $\log 21$.

ב. $\log_3\left(\frac{10}{7}\right)$.

ג. $\log_7 10$.

ד. $\log_{30} 63$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7) $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$.

8) $\log\sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log\sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$.

תשובות סופיות:

1) א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12.

2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

3) א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$.

4) א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$.

5) א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$.

6) א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$.

7) הוכחה.

8) הוכחה.

הלוגריתם הטבעי:

סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln\frac{1}{4} = \log_e\frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \to e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- b מספרים כלשהם.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln\frac{1}{e^4}$ ג. $\ln\frac{1}{e\sqrt{e}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\ln x = 2$ ב. $\ln x = -\frac{1}{2}$

3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

א. $\ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x$

ב. $3\ln^2 x + \ln x = 2$

ג. $\ln\left(e^2x^3\right)\cdot\ln\frac{1}{x} = \ln\left(ex^2\right)$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

א. $x^{\ln x} = e^6 x$ ב. $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e}\cdot x^{1+\ln x}$

5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $e^{\ln 3}$ ב. $e^{2\ln 3}$

תשובות סופיות:

1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5.

2) א. $x=e^2$ ב. $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

3) א. $x=0$ ב. $x=\sqrt[3]{e^2},\frac{1}{e}$ ג. $x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}},\frac{1}{e}$.

4) א. $x=e^3,\frac{1}{e^2}$ ב. $x=\sqrt{e},e$.

5) א. 3 ב. 9.

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$.
במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$.
את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע״י מחשבון או ע״י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \dfrac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$

ג. $49^x - 8\cdot 7^x + 15 = 0$ ד. $2\cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5\cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x} = 3$ ב. $4 + 3e^x = 9$

ג. $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$ ד. $e\left(e^x + 1\right) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2\left(7 - 5^x\right) = \log_2 \dfrac{10}{5^x}$ ב. $\log_2\left(4e^{2x} + 6\right) - 1 = \log_2\left(7e^x\right)$

תשובות סופיות:

1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$
ג. $x = \log_7 5 = 0.827$, $x = \log_7 3 = 0.564$ ד. אין פתרון.

2) א. $x = \frac{1}{3}\ln 3 = 0.36$ ב. $x = \ln\frac{5}{3} = 0.51$ ג. $x = -\ln 3 = -1.09$, $x = 0$
ד. $x = \ln 16 = 2.7725$.

3) א. $x = \log_5 2 = 0.43$, $x = 1$ ב. $x = \ln 3 = 1.098$, $x_1 = \ln\frac{1}{2} = -0.693$

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2 x \\ y=6-\log_2 x \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_6^2 x-\log_6(2y-2)=2 \\ \frac{1}{2}x=y-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_3(x+y)=\log_3(4x+y)-2 \\ \log_5(5x+3y)=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y))=1 \\ \log_5(x+y-11)=\log_{25}x+\frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_5 x+6\log_4 y=11 \\ 10\log_5 x-2\log_4 y=17 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_2 x^2+\log_3\frac{1}{y}=9 \\ \log_2\sqrt{x}+\log_{\sqrt[3]{3}} y=-1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_5 x+2^{\log_2 y}=6 \\ x^y=5^8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} xy=27 \\ x^{\log_3 y}=9 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2^{\log_{\frac{1}{2}}(2x-y)}=7^{\log_7\frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x+\log_3 y=\frac{1}{\log_{28}3} \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(8,3)$ 2) $(36,19),\left(\frac{1}{6},1\frac{1}{12}\right)$ 3) $(8,-5)$

4) $(16,7)$ 5) $(25,8)$ 6) $\left(16,\frac{1}{3}\right)$

7) $(25,4),(625,2)$ 8) $(3,9),(9,3)$ 9) $(4,7)$

מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2\left(4^x-2\right) \\ y=2x-1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 25^y=\left(5\sqrt{5}\right)^{x+1} \\ \log_5\sqrt{x}+\log_5\sqrt{y}=\log_5 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y+5\log_6 x=1 \\ 216\cdot x^{2-y}=6^{1-4y} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x\cdot\log_2 3=\dfrac{y}{\log_9 2} \\ \log_3\left(9^x+27\right)=2y+\log_3 12 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \left(2^x-1\right)^2-4y+3=0 \\ x=\log_2\left(y+1\right) \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=\log_4\left(5-9^y\right) \\ \log_2\left(2^x+3\right)=\log_4\left(29-\left(3^y-3\right)^2\right) \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(1,1)$

2) $(3,3)$

3) $(36,-3),\left(6,-1\frac{1}{3}\right)$

4) $\left(1,\frac{1}{2}\right),(2,1)$

5) $(1,1),(2,3)$

6) $(1,0)$

אי-שוויונים לוגריתמים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\log_2 x < \log_2 (5x-20)$

2) $\log_6 \left(x^2 - 5x\right) < 1$

3) $\log_3 x > \log_9 (15-2x)$

4) $\log_{\frac{1}{2}} (1-3x) \ge \log_{\frac{1}{2}} (7-x)$

5) $\ln x \ge \ln\left(x^2 - 12\right)$

6) $\ln x < 3$

7) $\ln^2 x - 6\ln x < 7$

8) $\dfrac{6}{\ln^2 x} \ge 2 - \dfrac{1}{\ln x}$

תשובות סופיות:

1) $x > 5$

2) $-1 < x < 0\ ,\ 5 < x < 6$

3) $3 < x < 7\frac{1}{2}$

4) $-3 \le x \le \dfrac{1}{3}$

5) $2\sqrt{3} < x \le 4$

6) $0 < x < e^3$

7) $\dfrac{1}{e} < x < e^7$

8) $\dfrac{1}{\sqrt{e^3}} \le x \le e^2$ וגם $x \ne 1$

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 10 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

הגדרת המספר המרוכב:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i=\sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z=a+bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי a וחלק מדומה b. המספרים a ו- b הם ממשיים.

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\operatorname{Re}(z)$ (מלשון: Real).

b נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\operatorname{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

שאלות:

1) רשום עם i:

א. $\sqrt{-1}=$ ב. $\sqrt{-4}=$ ג. $\sqrt{-25}=$

ד. $\sqrt{-3}=$ ה. $\sqrt{-5}=$

2) חשב:

א. $i=$ ב. $i^2=$ ג. $i^3=$

ד. $i^4=$ ה. $i^5=$ ו. $i^{17}=$

3) רשום את ערכם של a ו- b בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

4) כתוב מספר מרוכב z לפי הדרישות הבאות:

א. $\operatorname{Re}(z)=-3$, $\operatorname{Im}(z)=2$.

ב. $\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Im}(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) מספר מרוכב מסוים z מקיים: $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=4$ ו-$\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)=-1$.
מצא את z.

6) פתור את המשוואות הבאות:
א. $x^2=-1$
ב. $x^2+36=0$
ג. $x^2-2x+5=0$

7) פתור את המשוואה הבאה: $x^2+x+1=0$.

8) פתור את המשוואה הבאה: $z^2+iz+6=0$.

9) נתון: $z_2=5-2i$, $z_1=2+3i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:
א. $z_1+z_2=$
ב. $z_1-z_2=$
ג. $z_1\cdot z_2=$

10) חשב את ערכי הביטויים הבאים:
א. $(-2+6i)+(1-i)$
ב. $(4+4i)-\left(3+\frac{1}{2}i\right)$
ג. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
ד. $5-(3-2i)$
ה. $(i-3)+6i$
ו. $(i+2)-(3i-2)+(7-5i)$

11) חשב את ערכי הביטויים הבאים:
א. $(1+4i)\cdot(8-2i)$
ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
ג. $(4i-3)\cdot(4i+3)$
ד. $i\cdot(i-1)$
ה. $(2i+3)\cdot i$
ו. $(5i-1)^2$

12) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.
ידוע כי z_1+z_2 הוא ממשי וכי z_1-z_2 הוא מדומה.

א. מצא קשר בין a_1 ל- a_2 וקשר בין b_1 ו- b_2.

ב. הראה כי המכפלה $z_1\cdot z_2$ היא ממשית.

תשובות סופיות:

1) א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$.

2) א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i ו. i.

3) א. $a=2\,,\,b=5$ ב. $a=3\,,\,b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,b=-\frac{1}{2}$ ד. $a=0\,,\,b=7$ ה. $a=-4\,,\,b=0$ ו. $a=0\,,\,b=0$.

4) א. $z=-3+2i$ ב. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

5) $z=1.5+2.5i$.

6) א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i\,,\,1-2i$.

7) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,,\,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8) $z=2i\,,\,-3i$.

9) א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$.

10) א. $-1+5i$ ב. $1+3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2+2i$ ה. $-3+7i$ ו. $11-7i$

11) א. $16+30i$ ב. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ג. -25 ד. $-1-i$ ה. $-2+3i$ ו. $-24-10i$.

12) א. $a_1=a_2\,,\,b_1=-b_2$ ב. הוכחה.

המספר הצמוד:

סיכום כללי:

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב $z=a+bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$ וערכו: $\bar{z}=a-bi$.

שאלות:

13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

14) חשב:

א. $\frac{11+2i}{2-i}$ ב. $\frac{3+7i}{2-5i}$ ג. $\frac{19-9i}{2-3i}$

15) נתון מספר $z=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$ ב. $\frac{z}{z+3}$ ג. $\frac{z+i}{z-i}$

16) המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור. מצא את a.

17) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.
הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

18) פתור את המשוואה הבאה: $3z-11=iz-7i$.

19) פתור את המשוואה הבאה: $iz+5=4i$.

20) פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו- w משתנים מרוכבים): $\begin{cases} 3z+iw=5-4i \\ 5iz-2w=5+8i \end{cases}$.

21) פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו- b ממשיים:

א. $2a-3i=10+bi$

ב. $3a-8+5bi=2b-ai-3i$

22) פתור את המשוואה הבאה: $2z+7i=iz+\overline{z}-3$.

23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$

ב. $\sqrt{8+6i}$

24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$.

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$.

25) פתור את המשוואה הבאה: $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$.

26) פתור את המשוואה הבאה: $z^2-i\overline{z}+6=0$.

תשובות סופיות:

13) א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0.

14) א. $4+3i$ ב. $-1+i$ ג. $5+3i$.

15) א. $\frac{5}{29}+\frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17}-\frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i$.

16) $a=-\frac{3}{4}$.

17) שאלת הוכחה.

18) $z=4-i$.

19) $z=4+5i$.

20) $z=2-3i\ ,\ w=5+i$.

21) א. $a=5\ ,\ b=-3$ ב. $a=2\ ,\ b=-1$.

22) $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$.

23) א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$.

24) א. $z_{1,2}=i\ ,\ 1$ ב. $z_{1,2}=-2-i\ ,\ 2-5i$.

25) $z_1=-2-5i\ ,\ z_2=3i$.

26) $z_1=-3i\ ,\ z_2=2i$.

חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

שאלות:

27) נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2-2(m+2i)z+1=0$
מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

תשובות סופיות:

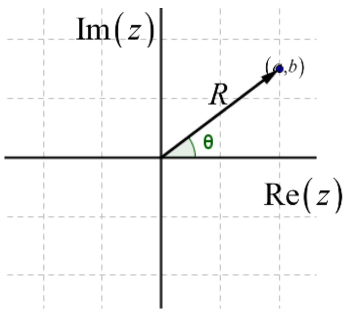
27) א. $m=-i$ ב. $m=-2i$.

מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב z ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה-x מייצג את a , גודל הערך הממשי של z , וציר ה-y מייצג את b, גודל הערך המדומה של z.

מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג: (a,b)

או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ-$(0,0)$)

והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס.

הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב

ויסומן: (R,θ). מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$z = R\cos\theta + i\cdot R\sin\theta = R(\cos\theta + i\sin\theta) = R\text{cis}\theta$.

נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $\tan\theta = \frac{b}{a}$, $R = \sqrt{a^2+b^2}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $a = R\cos\theta$, $b = R\sin\theta$.
- גודל של מספר מרוכב z יסומן: $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2+b^2}$.

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1\cdot z_2 = (R_1\text{cis}\theta_1)\cdot(R_2\text{cis}\theta_2) = R_1R_2\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1\text{cis}\theta_1}{R_2\text{cis}\theta_2} = \frac{R_1}{R_2}\text{cis}(\theta_1-\theta_2)$.

שאלות:

28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60^\circ$
ב. $6\text{cis}135^\circ$
ג. $4\text{cis}330^\circ$
ד. $4\text{cis}(-30^\circ)$
ה. $4\text{cis}690^\circ$
ו. $8\text{cis}90^\circ$
ז. $3\text{cis}270^\circ$
ח. $\text{cis}180^\circ$
ט. $\text{cis}0^\circ$

29) הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$
ב. $\sqrt{3}-i$
ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
ד. $3+4i$
ה. $6i$
ו. $-i$
ז. 4
ח. -1
ט. 1
י. 0

30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120^\circ\cdot 3\text{cis}60^\circ$
ב. $\text{cis}210^\circ\cdot 5\text{cis}(-40^\circ)$
ג. $\frac{12\text{cis}315^\circ}{3\text{cis}90^\circ}$
ד. $\frac{1}{2\text{cis}40^\circ}$
ה. $6\text{cis}30^\circ+2\text{cis}210^\circ$

31) נתון המספר המרוכב $z=R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות R ו-θ את המספרים:

א. $\bar{z}$
ב. $1/z$
ג. $-z$
ד. $-\frac{1}{z}$
ה. iz
ו. $z\cdot\bar{z}$

32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z+\bar{z}$
ב. $z\cdot\bar{z}$
ג. $\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}$

33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2-\bar{z}^2$
ב. $\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}$

34) הוכח את הטענות הבאות:

א. $z - i\,\overline{z} = \overline{\overline{z} + iz}$ ב. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס.
אחד מקודקודי המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא $30°$ חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

39) z הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה.
קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. $\overline{z}$ ב. $\frac{1}{z}$ ג. $\frac{z}{\overline{z}}$ ד. $z \cdot \overline{z}$

תשובות סופיות:

28) א. $1+\sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3}-2i$ ד. $2\sqrt{3}-2i$
ה. $2\sqrt{3}-2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1.

29) א. $\sqrt{2}\text{cis}45°$ ב. $2\text{cis}330°$ ג. $\text{cis}240°$ ד. $5\text{cis}53.13°$
ה. $6\text{cis}90°$ ו. $\text{cis}270°$ ז. $4\text{cis}0°$ ח. $\text{cis}180°$
ט. $\text{cis}0°$ י. 0.

30) א. -6 ב. $5\text{cis}170°$ ג. $4\text{cis}225°$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}(-40°)$
ה. $4\text{cis}30°$.

31) א. $R\text{cis}(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$ ג. $R\text{cis}(180°+\theta)$
ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180°+\theta)$ ה. $R\text{cis}(90°+\theta)$ ו. R^2.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) $1-i$, $-1-i$, $-1+i$, $1+i$.

36) $\sqrt{3}-i$, $-1-\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}+i$.

37) -2 , $1-\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$.

38) 2 , $-1+\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$.

39) א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל ג. על המעגל
ד. מחוץ למעגל.

נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב z בחזקת n נעזר בקשר: $(R\text{cis}\theta)^n = R^n\text{cis}(n\theta)$.

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש n-י של מספר מרוכב z השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

נבצע: $1 \le k \le n$: $z_k = \sqrt[n]{R_0}\cdot\text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right) \Leftarrow z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 \;/\sqrt[n]{\;}$.

שאלות:

40) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $(2\text{cis}30°)^3$ ב. $(2\text{cis}14°)^5$ ג. $(1+i)^4$

ד. $(\sqrt{3}-i)^3$ ה. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

41) פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2 = 36\text{cis}120°$ ב. $z^4 = (9\text{cis}80°)^2$ ג. $z^5 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

42) מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

43) נתון המספר המרוכב $z = x+iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z| = 2$.

44) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$.
מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z-3i| = 5$.

45) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z+i| + |\bar{z}+i| = |1+3i|$.

תשובות סופיות:

40) א. $8i$ ב. $32\text{cis}70°$ ג. -4 ד. $-8i$ ה. 1.

41) א. $z_0 = 6\text{cis}60°$, $z_1 = 6\text{cis}240°$.
ב. $z_0 = 3\text{cis}40°$, $z_1 = 3\text{cis}130°$, $z_2 = 3\text{cis}220°$, $z_3 = 3\text{cis}310°$.
ג. $z_0 = \text{cis}12°$, $z_1 = \text{cis}84°$, $z_2 = \text{cis}156°$, $z_3 = \text{cis}228°$, $z_4 = \text{cis}300°$.

42) סכום: 0 , מכפלה: -1 .

43) $x^2 + y^2 = 4$.

44) $x^2 + (y-3)^2 = 25$.

45) $\frac{2x^2}{3} + \frac{2y^2}{5} = 1$.

שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7 = 13 + 3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3 = 5 - 9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5 = 32 + 16i$ והאיבר השני הוא $a_2 = 2 - 4i$.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.

ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

46) $S_{10} = 100 - 15i$.

47) א. $a_1 = 2 + i$, $q = -2i$ ב. $S_5 = 20 + 25i$.

48) $2 , 2i , -2$ או $2 , 4 - 2i , 6 - 8i$.

שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

49) פתור את המשוואה: $z-\bar{z}+|z|=|2-i|^2-4i+\mathrm{Im}(z)$.

50) פתור את המשוואה: $\left|2-3^{x^2-x-1}i\right|=\sqrt{13}$.

51) פתור את המשוואה: $z^3=\bar{z}$.

52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים.
הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

54) נתון מספר מרוכב z, שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.
הוכח כי אם $z-\frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

55) הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1\mathrm{cis}\theta_1\cdot R_2\mathrm{cis}\theta_2=R_1R_2\mathrm{cis}(\theta_1+\theta_2)$.

56) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.
נתון: $|z^4-z^3|=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

57) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.
מצא את ערך הביטוי $z+iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

58) z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2-2\cos\theta\cdot z+1=0$.
הבע באמצעות θ את גודל הזווית $\sphericalangle z_1Oz_2$ ‏(O ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

49) $z_1=3-4i\ ,\ z_2=-3-4i$.

50) $x=2\ ,\ -1$.

51) $z_1=0\ ,\ z_2=i\ ,\ z_3=-i\ ,\ z_4=1\ ,\ z_5=-1$.

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) שאלת הוכחה.

55) שאלת הוכחה.

56) $\arg(z)=30^\circ$.

57) $z+iz=\sqrt{2}\ ,\ -\sqrt{2}$.

58) 2θ.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 11 - מערכות של משוואות ליניאריות - שיטות מתקדמות

תוכן העניינים

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 12 - לוגיקה

תוכן העניינים

מבוא

שאלות

1) קבעו בכל אחד מהסעיפים האם נכון או לא נכון:
א. הביטוי "בני ישראל הלכו במדבר ארבעים שנה" הוא פסוק.
ב. הביטוי "ארבעים שנה" הוא פסוק.
ג. שלילת הפסוק "האריה טרף את הצבי" היא "הצבי טרף את האריה".
ד. הפסוק "$2=1+1$ או $3=2$" הוא פסוק אמת.
ה. הפסוק "$2=1+1$ וגם $3=2$" הוא פסוק אמת.
ו. הפסוק "אם $1+1=2$ אז $2=3$" הוא פסוק אמת.
ז. הפסוק "אם $2=3$ אז $1+1=2$" הוא פסוק אמת.
ח. הפסוק "אם $2=3$ אז $1+1\neq 2$" הוא פסוק אמת.
ט. שלילת הפסוק "$a\neq 4$ וגם $b\neq 3$" היא "$a+b=7$ או $ab=12$".
י. שלילת הפסוק "$a\neq 4$ או $b\neq 3$" היא "$a+b=7$ וגם $ab=12$".
יא. שלילת הפסוק "$a\notin\{3,4\}$ או $b\notin\{3,4\}$" היא "$a+b=7$ וגם $ab=12$".

2) רשמו את טבלאות האמת של הפסוקים הבאים:
א. $(p\wedge q)\vee\neg r$
ב. $\neg(p\wedge q)\rightarrow(\neg r)$
ג. $(p\wedge\neg q)\vee r$
ד. $(p\vee q)\rightarrow(q\rightarrow r)$

3) בטאו את שלילת הפסוקים הבאים (בלי קשר לנכונותם):
א. דוד יפה או ראובן מכוער.
ב. האוכל חם וטעים.
ג. לכל x קיים y, שהוא השורש הריבועי של x.
ד. כל תרנגולת כחולה עוזבת את הלול כדי להטיל ביצים.
ה. כל פנתר שהוא ורוד משחק בסרטים מצוירים.
ו. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי או שהוא משחק בסרטים מצוירים.
ז. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי וגם הוא משחק בסרטים מצוירים.
ח. לכל נגר קיים אדם שכל רהיטיו יוצרו בידי נגר זה.
ט. אם יהיה יום יפה וגם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.
י. אם יהיה יום יפה אז אם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

טאוטולוגיה, סתירה ומושגים נוספים

שאלות

1) בדקו אילו מזוגות הפסוקים הבאים שקולים לוגית. במקרה שהתשובה חיובית, הראו זאת הן בעזרת טבלת אמת והן בעזרת עץ שקר.

א. $\neg(p \to q)$ $p \wedge (\neg q)$

ב. $(\neg p) \to q$ $p \vee (\neg q)$

ג. $p \to (\neg q)$ $\neg(p \wedge q)$

ד. $(p \vee q) \wedge (\neg q)$ $p \wedge (\neg q)$

ה. $p \leftrightarrow q$ $(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$

ו. $(s \to (p \wedge (\neg r))) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s)$ $p \vee u$

ז. הראו כי $\neg(r \wedge (p \vee q)) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$, בעזרת זהויות יסוד.

2) יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ הפסוקים:

$\alpha_1 : (A \vee B) \to (D \to C)$

$\alpha_2 : B \to \neg(C \wedge A)$

$\alpha_3 : C \leftrightarrow (A \wedge D)$

$\beta : D \vee (B \wedge C)$

בדקו אלו מהטענות הבאות נכונות והוכיחו:

א. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \Rightarrow \beta$

ב. β אינה נובעת טאוטולוגית מהפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, אך מתיישבת אתם.

ג. β אינה מתיישבת עם הפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, כלומר סותרת אתם.

3) הוכיחו כי הפסוקים הבאים הינם טאוטולוגיות, ללא שימוש בטבלת אמת:

א. $p\vee(\neg p)$

ב. $p\vee(p\rightarrow q)$

ג. $(p\rightarrow q)\vee(q\rightarrow r)$

ד. $(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$

ה. $((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow r)$

ו. $((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow((p\vee q)\rightarrow r)$

ז. $(q\vee p\vee r)\rightarrow((\neg p)\rightarrow((q\vee r)\wedge(\neg p)))$

ח. $((B\rightarrow(C\wedge(\sim A)))\wedge(((\sim B)\vee C)\rightarrow D)\wedge(E\rightarrow(\sim D)))\rightarrow(A\rightarrow\sim E)$

ט. הוכיחו בעזרת טבלת אמת ש- $(u\rightarrow v)\leftrightarrow((\neg v)\rightarrow(\neg u))$ טאוטולוגיה.

י. הוכיחו כי הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה (מותר להסתמך על סעיף ט):

$$((u\rightarrow v)\leftrightarrow((\neg v)\rightarrow(\neg u)))\rightarrow(((p\rightarrow r)\wedge((\neg q)\rightarrow p)\wedge(\neg r))\rightarrow q)$$

4) בארץ חלם מתקיימת שביתת רופאים במטרה להגדיל את תקציב הבריאות.
להלן ניתוח המצב:

* אם הרופאים לא יסיימו את השביתה אז הנהלות בתי החולים יתערבו.
* אם לא תיפגע בריאותם של החולים אז הממשלה לא תגדיל את הקציב.
* אם הנהלות בתי החולים יתערבו אז לא תפגע בריאותם של החולים או שבית המשפט יתערב.
* בית המשפט לא יתערב וגם הממשלה לא תגדיל את התקציב.

מסקנה: הרופאים יסיימו את השביתה.

נסמן: D – הרופאים יסיימו את השביתה, H – הנהלות בתי החולים יתערבו, P – בית המשפט יתערב, C – לא תפגע בריאותם של החולים, M – הממשלה תגדיל את התקציב.

א. הצרינו את הטיעון לשפת תחשיב הפסוקים בעזרת המשתנים המוצעים.

ב. בדקו, ללא שימוש בטבלת אמת, אם הטיעון תקף.

5) בארץ חלם מתקיימות בחירות.
זרובבל, כתבנו לענייני מפלגות, מנתח את המצב:
* אם אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב את דני יפרוש.
* אם שמעון יציע לדני תפקיד אז דני יפרוש.
* אם בני ייבחר לראשות מפלגת פיתה אז שמעון יציע לדני תפקיד או שאבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב.
* בני יבחר לראשות מפלגת פיתה.
לכן, כתבנו מסיק שדני יפרוש.
נסמן: A – אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב, B – בני יבחר לראשות מפלגת פיתה, C – שמעון יציע לדני תפקיד, D – דני יפרוש.
הצרינו את הטענה לשפת תחשיב הפסוקים והוכיחו כי המסקנה תקפה.

6) בפרס העתיקה מחליט היזם וייזתא לבנות תיאטרון.
אם נרצה שהתיאטרון נגיש לתושבים אז נצטרך להקימו בלב העיר.
אם נרצה שהתיאטרון יהיה רווחי, אז הוא יצטרך להיות גדול ומרווח כדי שיכיל הרבה אנשים. אבל אם התיאטרון יהיה גדול ומרווח ויבנה בלב העיר, אז הוא יעלה 10 מיליון זוזים פרסיים.
אבל לוייזתא היזם אין 10 מיליון זוזים פרסיים.
לכן, וייזתא היזם מסיק כי התיאטרון יוקם במקום לא נגיש לתושבים או שלא יהיה גדול ומרווח.

א. תרגמו את ניתוח המצב לשפת הפסוקים, תוך שימוש בסימונים הבאים:
N – נגיש לתושבים, L – בלב העיר, Y – יכיל הרבה אנשים,
G גדול ומרווח, M – מחירו יעלה על..., R – רווחי.

ב. הצרינו את ההנחות והמסקנה לשפת הפסוקים ובדקו האם המסקנה תקפה, ללא שימוש בטבלת אמת.

7) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות (כאשר p,q,r פסוקים אטומים):

א. $(p\vee q)\Rightarrow p$

ב. $(p\vee q)\Rightarrow q$

ג. $(p\to q)\Rightarrow q$

ד. $p,p\to q\Rightarrow q$

ה. $(p\to q)\wedge(p\to r)\wedge p\Rightarrow r$

ו. $r\Rightarrow(p\to q)\wedge(p\to r)\wedge p$

ז. $A\to B,C\to B,D\to(A\vee C),D\Rightarrow B$

ח. $(A\vee B\to D),D\to(C\vee P),P\to Q,(\neg C)\wedge(\neg Q)\Rightarrow\neg A$

ט. $(B\to(C\wedge(\sim A)))\ ,\ (((\sim B)\vee C)\to D)\ ,\ (E\to(\sim D))\models(A\to\sim E)$

8) נתון כי α,β,γ פסוקים לאו דווקא אטומים.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם α סתירה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $\beta \Rightarrow \neg\gamma$.

ב. אם α טאוטולוגיה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $\neg\beta \Rightarrow \gamma$.

ג. אם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$.

ד. אם $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$, אז $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$.

ה. אם $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$, אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$.

ו. אם $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$, אז $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$.

ז. אם $\alpha \Rightarrow (\beta \to \gamma)$, אז $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \gamma$.

ח. אם $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \gamma$, אז $\alpha \Rightarrow (\beta \to \gamma)$.

ט. אם $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$, אז $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$.

י. אם $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$, אז $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$.

יא. אם $\alpha \models \beta \to \gamma$, אז $\alpha, \beta \models \gamma$.

יב. אם $\alpha \models \beta \to \gamma$, אז $\alpha \vee \beta \models \gamma$.

9) עבור α, פסוק אטומי או מורכב, נגדיר את הקבוצה $F_\alpha = \{\gamma | \alpha \Rightarrow \gamma\}$.
כלומר, F_α היא קבוצת כל הפסוקים שנובעים טאוטולוגית מהפסוק α.
הוכיחו כי $\alpha \equiv \beta$ אם ורק אם $F_\alpha = F_\beta$.

10) הוכיחו כי ההנחה A גוררת טאוטולוגית את המסקנה $\neg(\neg A)$,
בעזרת כללי ההיסק הבאים:

1. $\Rightarrow p \to p$
2. $p \Rightarrow q \to p$
3. $p \to q\ ,\ p \to (\neg q) \Rightarrow \neg p$

11) הוכיחו שההנחות הבאות גוררות טאוטולוגית את המסקנה A

$B \vee D$
$C \to B$
$D \to (A \vee C)$
$\neg B$

מותר להשתמש רק בכללי ההיסק הבאים:

$P \Rightarrow Q \vee P$
$P \wedge Q \Rightarrow P$
$P \wedge Q \Rightarrow Q$
$P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$
$P, P \to Q \Rightarrow Q$
$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$
$P \Rightarrow \neg\neg P$
$P \to Q \Rightarrow \neg Q \to \neg P$

צורות נורמליות

שאלות

1) בסעיפים הבאים רשמו צורה דיסיונקטיבית-נורמלית (DNF) וצורה קוניונקטיבית-נורמלית (CNF) של הפסוקים:

א. $p \to q$

ב. $(p \vee q) \wedge \neg r$

ג. $(p \to q) \to (r \to \neg q)$

קבוצת קשרים שלמה

שאלות

1) הביעו את הקשרים הבאים:

א. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ב. קשר ה- $\vee$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ג. קשר ה- $\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ד. קשר ה- $\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ה. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ו. הקשר $\wedge$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ז. קשר ה- $\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ח. קשר ה- $\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ט. הוכיחו כי הקבוצה $\{\downarrow\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

י. נתון f קשר טרינארי המוגדר כך: $f(x,y,z)=x\to\neg(y\to z)$.
הוכיחו כי $\{f\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

יא. הביעו את הקשר $f(x,y,z)=x\to\neg(y\to z)$ באמצעות $\downarrow$ בלבד.

יב. הביעו את הקשר $\downarrow$ באמצעות $f(x,y,z)=x\to\neg(y\to z)$ בלבד.

תחשיב הפרדיקטים

שאלות

1) לכל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה ורשמו את שלילתה ללא שימוש בקשר השלילה. במקרה שהטענה נכונה נמקו זאת, ובמקרה שהטענה אינה נכונה הביאו דוגמה נגדית.

א. $\forall x \in \mathbb{N}\left(\exists y \in \mathbb{N}(x<y)\right)$

ב. $\forall x \in \mathbb{N}\left(\exists y \in \mathbb{N}(x>y)\right)$

ג. $\forall x, y \in \mathbb{R}(x>y) \rightarrow \exists z \in \mathbb{R}(x>y+z)$

ד. $\forall x \in \mathbb{R}(x>0) \rightarrow \left(\exists n \in \mathbb{N}\left(x>\frac{1}{n}\right)\right)$

ה. $\forall x \in \mathbb{R}\left(x \neq 0 \rightarrow \forall y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{R}(xz=y)\right)$

ו. $\forall x \in \mathbb{N}\left(x \geq 1 \rightarrow \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N}(xz=y)\right)$

ז. $\forall x \in \mathbb{R}\left(x>0 \rightarrow \exists y \in \mathbb{N}(xy>1)\right)$

ח. $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(xy=x \wedge x+y<5) \rightarrow y<4\frac{1}{2}$

ט. $\forall x \in \mathbb{R}\left((x>0) \rightarrow \forall y \in \mathbb{R}\left(\exists n \in \mathbb{N}(nx>y)\right)\right)$

2) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות, ורשמו את השלילה של כל טענה, כאשר הקשר $\neg$ מופיע רק לצד פרדיקטים. במקרה של הפרכה הדגימו עולם דיון מתאים עבורו הטענה לא מתקיימת, והסבירו מדוע הטענה לא מתקיימת.

א. $\forall x P(x) \rightarrow \exists x\ P(x)$

ב. $\exists x P(x) \rightarrow \forall x\ P(x)$

ג. $\left(\forall x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)\right) \rightarrow \left(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)\right)$

ד. $\left(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)\right) \rightarrow \left(\forall x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)\right)$

ה. $\left(\forall x\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right) \rightarrow \left(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)\right)$

ו. $\left(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)\right) \rightarrow \left(\forall x\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right)$

ז. $\left(\exists x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)\right) \rightarrow \left(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)\right)$

ח. $\left(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)\right) \rightarrow \left(\exists x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)\right)$

ט. $\left(\exists x\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right) \rightarrow \left(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)\right)$

י. $\left(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)\right) \rightarrow \left(\exists x\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right)$

3) בעולם הדיון $\mathbb{Z}$, נסמן

$$P(x): x^2-8x+15=0$$
$$Q(x): x \text{ is odd}$$
$$R(x): x>0$$
$$L(x): x^2+2x+2=0$$

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)]$

ב. $\forall x[Q(x)\rightarrow P(x)]$

ג. $\exists x[P(x)\rightarrow Q(x)]$

ד. $\exists x[Q(x)\rightarrow P(x)]$

ה. $\forall x[L(x)\rightarrow Q(x)]$

ו. $\exists x[L(x)\rightarrow Q(x)]$

ז. $\exists x[R(x)\rightarrow P(x)]$

ח. $\forall x(\neg Q(x)\rightarrow \neg P(x))$

ט. $\forall x[(P(x)\vee Q(x))\rightarrow R(x)]$

י. $\exists x[P(x)\rightarrow (Q(x)\wedge R(x))]$

יא. $\forall x[P(x)\rightarrow (Q(x)\wedge R(x))]$

נפנה עתה למספר שאלות בהצרנות. מותר להשתמש בסימני המשתנים x,y,z, סימני הקבוצה $A,B,C,\cdots,\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$, סוגריים, קשרים, כמתים, הפרדיקטים $(,)\subseteq,\in,=,\neq,\exists,\forall,\vee,\wedge,\rightarrow,\leftrightarrow,<,>$, וכן סימנים נוספים הנתונים בגוף השאלה.

שימו לב: <u>אסור להשתמש בקשר השלילה</u> ואין להשתמש בסימן $\notin$.

4) הצרינו כל אחת מהטענות הבאות:

א. לכל מספר ממשי אין עוקב מידי (כלומר, שאין מספר ראשון מיד אחריו).

ב. אין קבוצה שמכילה את כל הקבוצות (מותר להשתמש בסימן $\notin$).

ג. לכל מספר שאינו ראשוני יש לפחות שני מחלקים שונים.
(מותר להשתמש ב-P עבור קבוצת המספרים הראשוניים וב-$\notin$)

ד. למספר הטבעי הכי גדול אין מחלקים (ברור שאין, אבל צריך להצרין).

ה. לא כל מספר טבעי הוא ראשוני.

ו. כל קבוצה אינה שקולה לקבוצת החזקה שלה.

ז. לכל שני מספרים טבעיים שונים יש מחלק משותף.

ח. בכל קבוצה בת לפחות שלושה איברים שונים אין איבר מקסימלי.

ט. לא בכל תת קבוצה של ממשיים יש איבר מינימלי.

י. תהי פונקציה $f:X\rightarrow Y$.
נגדיר את הפונקציה $G:P(X)\rightarrow P(Y)$ כך: $G(B)=\{x\in X|f(x)\in B\}$.
הצרינו את הטענה: אם f על אז G ח.ח.ע.
השתמשו רק בסימנים הבאים:
סימני המשתנים x,y,B,C, סימני הקבוצות X,Y, סימן הפונקציה f, סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים.
שימו לב: <u>אסור להשתמש</u> בסימנים G ו-P. יש להשתמש בהגדרותיהם כדי להחליפם בסימנים אחרים.

יא. לכל מספר ממשי יש לכל היותר שני מספרים ממשיים שונים זה מזה שריבועם שווה לו.

יב. הצרינו את הטענה: לכל פונקציה $f:A\rightarrow B$ ולכל פונקציה $g:B\rightarrow A$, אם $g\circ f=Id_A$, אז f היא על.
מותר להשתמש בסימנים הבאים ורק בהם: סימני המשתנים $x_1,x_2,\cdots$, קשרים $\vee,\wedge,\leftrightarrow,\rightarrow$, והסימנים A^B,B^A,f,g $\in,(,),\forall,\exists$.
למען הסר ספק: אסור להשתמש ב-d_A וב-$\circ$.

יג. מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מאחד שמחלקיו היחידים הם הוא עצמו ו-1. הצרינו את הטענה הבאה:
לכל מספר טבעי, בתחום שבין המספר עצמו לפעמיים המספר (כולל קצוות) יש לפחות מספר ראשוני אחד.
מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים $x_1,x_2,\cdots$,

הקשרים $\vee,\wedge,\leftrightarrow,\leftrightarrow$ והסימנים $|,=,\cdots,1,2,3,\leq,\mathbb{N},\in,(,),\forall,\exists$.
הסימן | פירושו מחלק.

יד. הצרינו את הטענה הבאה: בקבוצה A יש לכל היותר שני מספרים טבעיים.
השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x,y,z, סימני הקבוצות $\mathbb{N}$, A וכן סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים.

טו. הצרינו את הטענה: לא תמיד נכון שאם $A\subseteq B$ אז $A\sim B$.
מותר להשתמש רק בסימנים הבאים: סימני הקבוצות A,B (מותר לצרף אותם לקבוצה בחזקת קבוצה), סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים.
אין להשתמש בקשר השלילה.

טז. הצרינו את הטענה הבאה: קבוצת הפונקציות החח"ע מהממשיים לטבעיים אינה ריקה.
השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x,y, סימני הקבוצות $\mathbb{R},\mathbb{N}$ (וצירופי חזקות שלהן), סימני הפונקציות f,g, סוגריים, קשרים, וכמתים: $=,\neq,\in,\{,\},(,),\leftrightarrow,\rightarrow,\vee,\wedge,\forall,\exists$.

יז. הצרינו את כלל הכפל של אי-שוויון ממשי (קטן או שווה) במספר ממשי שונה מאפס.
מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים $x_1,x_2,\cdots$,
הקשרים $\vee,\wedge,\leftrightarrow,\leftrightarrow$ והסימנים $0,\leq,\mathbb{R},\in,(,),\forall$.
דוגמה לכלל הזה היא: מאי השוויון $3.14\leq\pi$ (על ידי כפל במינוס חצי) לקבל את אי השוויון $-0.5\pi\leq-1.57$.

5) נתונה הקבוצה $\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\forall y\left[\left(y\in\{t\in\mathbb{N}|t>3\}\rightarrow(y>x)\right)\right]\right\}$.
כתבו אותה בצורה $\{x\in\mathbb{R}|.....\}$, כך שבאגף ימין לא יופיע אף משתנה חוץ מ- x.

6) תארו במדויק את הקבוצה:
$A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\exists y\in\mathbb{N}\ \left(x=y^2\right)\rightarrow(x>2)\right\}-\left\{x\in\mathbb{R}\middle||x|>1\right\}$.

תרגול בשיטות ההוכחה השונות

שאלות

1) הוכיחו:

א. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז $m+n$ אי-זוגי.

ב. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז mn זוגי.

ג. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים אי-זוגיים, אז $m+n$ זוגי.

ד. אם $n\in\mathbb{N}$ אי-זוגי, אז קיימים $m,k\in\mathbb{N}$, כך ש- $m^2-k^2=n$.
רמז: חפשו $m,k\in\mathbb{N}$ עוקבים.

ה. אם $a,b,c\in\mathbb{N}$ וגם $a\mid b$ וגם $a\mid c$, אז $a\mid b+c$.

2) הוכיחו:

א. קיימים אינסוף מספרים ראשוניים (נסו בצורה ישירה ועל דרך השלילה).

ב. קיימים $x,y\notin\mathbb{Q}$, כך ש- $x^y\in\mathbb{Q}$.

ג. יש אינסוף שלשות פיתגוריות.
כלומר, יש אינסוף פתרונות בשלמים למשוואה $x^2+y^2=z^2$.

ד. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים רצף של n מספרים טבעיים עוקבים, שאף אחד מהם אינו ראשוני.

3) הוכיחו בדרך השלילה:

א. שלא קיים טבעי הכי גדול.

ב. שלכל מספר טבעי קיים מספר טבעי גדול ממנו.

ג. $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

ד. שלא קיימים $p,t\in\mathbb{Q}$, כך ש- $p-t\notin\mathbb{Q}$.

ה. שלא קיימים $p\in\mathbb{Q},\ r\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, כך ש- $p+r\in\mathbb{Q}$.

ו. שלא קיים $q\in\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$, כך ש- $q=\min\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$.

ז. שלכל $q\in\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$ מתקיים $q\neq\min\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$.

4) הוכיחו בקונטרה-פוזיציה:

א. אם $n\in\mathbb{N}$, כך ש- n^2 זוגי, אז n זוגי.

ב. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים, כך ש- m זוגי, אז n זוגי או m זוגי.

ג. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים, כך ש- m אי-זוגי, אז n אי-זוגי וגם m אי-זוגי.

ד. אם $x,y\in\mathbb{R}$, כך ש- $x+y$ אי-רציונלי, אז לפחות אחד מהמספרים x,y הו אי-רציונלי.

ה. אם A,B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x\notin A\cap B$, אז $x\notin A$ או $x\notin B$.

ו. אם A,B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x\notin A\cup B$, אז $x\notin A$ וגם $x\notin B$.

ז. אם A,B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x\notin A$, אז $x\notin A\cap B$.

ח. אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$, אז $A\cap C=\varnothing$.

ט. אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$, אז $A(-C)\cap B=\varnothing$.

י. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$, אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו, תוך הפרדה למקרים, שאם $z\in\mathbb{Z}$, כך ש- z לא מתחלק ב- 3, אז $z^2=1\bmod(3)$.

ב. הוכיחו או הפריכו:
אם $z\in\mathbb{Z}$, כך ש- z לא מתחלק ב- 4, אז z^2 לא מתחלק ב- 4.

6) הוכיחו בדרך השלילה:

א. אם $n\in\mathbb{N}$, כך ש- $n\bmod(3)=2$, אז n הוא לא ריבוע של אף מספר טבעי.

ב. אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$, אז $A\subseteq B$.

ג. אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$, אז $B\subseteq A$.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 13 - קבוצות

תוכן העניינים

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 14 - הפונקציה הממשית

תוכן העניינים

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 15 - פונקציות ישן

תוכן העניינים

פונקציות

שאלות

1) יהיו f ו- g פונקציות מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$, כאשר $f(n)=\begin{cases}\frac{n+1}{2} & \text{odd}\\ n-1 & \text{even}\end{cases}$,

ו- $g(n)=2n-1$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע.

ב. g חח"ע.

ג. f על $\mathbb{N}$.

ד. g על $\mathbb{N}$.

ה. $f\circ g$ פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

ו. $g\circ f$ פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

2) קבעו האם הפונקציות הבאות חח"ע ועל. נמקו.

א. $f_1:(0,\infty)\to(0,2)$, $f_1(x)=\frac{2x}{x+3}$

ב. $f_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f_2(x)=x+\frac{1}{x}$

ג. $f_3:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_3(x)=x-\frac{1}{x}$

ד. $f_4:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$, $f_4(X)=X\cap\mathbb{Z}$

ה. $f_5:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{Z})$, $f_5(X)=X\cap\mathbb{Z}$

ו. $f_7:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$, $f_7(X)=X\Delta\mathbb{Z}$

ז. $f_8:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f_8(n)=\text{the sum of the digits of } n$

3) יהיו $g:A\to B, f:B\to C$ שתי פונקציות (כמובן שבתנאים אלו $f\circ g:A\to C$),
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
(במקרה של הפרכה בחרו $A=B=C=\mathbb{N}$)
א. אם f חח"ע וגם g חח"ע, אז $f\circ g$ חח"ע.
ב. אם $f\circ g$ חח"ע, אז f חח"ע.
ג. אם $f\circ g$ חח"ע, אז g חח"ע.
ד. אם f על וגם g על, אז $f\circ g$ על.
ה. אם $f\circ g$ על, אז f על.
ו. אם $f\circ g$ על, אז g על.
ז. אם $f\circ g$ חח"ע וגם g על, אז f חח"ע.
ח. אם $f\circ g$ על וגם f חח"ע, אז g על.
ט. אם f לא חח"ע וגם g לא על, אז $f\circ g$ לא חח"ע או $f\circ g$ לא על.

4) תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה $f,g,h:A\to A$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם $g\circ f=h\circ f$, אז $g=h$.
ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f על, אז $g=h$.
ג. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח"ע, אז $g=h$.
ד. אם $f\circ g=f\circ h$, אז $g=h$.
ה. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f חח"ע, אז $g=h$.
ו. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על, אז $g=h$.

5) נתונות פונקציה $f:A\to B$ וקבוצות $C,D\subseteq A$.
א. הוכיחו כי $f(C\cap D)\subseteq f(C)\cap f(D)$.
ב. הוכיחו שאם f חח"ע, אז $f(C\cap D)=f(C)\cap f(D)$.
ג. הדגימו קבוצות $C,D\subseteq\mathbb{N}$ ופונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, כך ש- f על וגם
$f(C\cap D)\subset f(C)\cap f(D)$.
ד. הוכיחו כי $f(C\cup D)=f(C)\cup f(D)$.

6) תהי A קבוצה ותהי $f:A\to A$ פונקציה.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $f\circ f=f$, אז $f=I$.
ב. אם $f\circ f=f$, אז $f=I$ או ש- f פונקציה קבועה.
ג. אם $f\circ f=f$ וגם f חח"ע, אז $f=I$.
ד. אם $f\circ f=f$ וגם f על, אז $f=I$.

7) יהיו $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$.

הפריכו (שאלה קשה מאוד):

א. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על וגם g,h חח"ע וגם, אז $g=h$.

ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח"ע וגם g,h על, אז $g=h$.

ג. אם $f\circ f\circ f=I$, אז $f\circ f=I$.

ד. אם $f\circ f\circ f=f\circ f$, אז $f\circ f=f$.

8) תהי A קבוצה ו-B תת קבוצה, החלקית **ממש** ל-A, ונתונות הפונקציות $f,g:P(A)\to P(A)$, המוגדרות באופן הבא: $\begin{matrix} g(X)=X\cap B \\ f(X)=A-X \end{matrix}$.

הוכיחו או הפריכו: $f\circ g$ על.

9) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: הפונקציה $f;\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, המוגדרת על-ידי $f((x,y))=(3x+4y,4x+5y)$, היא פונקציה הפיכה.

10) תהי $P_{even}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת קבוצות של $\mathbb{N}$ שעוצמתן זוגית,

ותהי $P_{odd}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת קבוצות של $\mathbb{N}$ שעוצמתן אי-זוגית.

לדוגמה, $\{1,3\}\in P_{even}(\mathbb{N}),\{1,3\}\notin P_{odd}(\mathbb{N})$,

ולעומת זאת $\{2,4,6\}\notin P_{even}(\mathbb{N}),\{2,4,6\}\in P_{odd}(\mathbb{N})$.

לכל קבוצה A סופית של טבעיים, נסמן ב-$\max(A)$ את המספר הגדול ביותר ב-A וב-$\max(\varnothing)=0$.

הוכיחו כי הפונקציה $f:P_{even}(\mathbb{N})\to P_{odd}(\mathbb{N})$, המוגדרת על ידי $f(A)=A\cup\max(A)$, היא חח"ע אך אינה על.

11) נגדיר פונקציה $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to P(\{0,1\}\times\{0,1\})$, באופן הבא:

$F(g)=\{(g(n),g(n+1))|n\in\mathbb{N}\}$.

הוכיחו כי F אינה על.

12) נגדיר פונקציה $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ כך: $h(x)=2x$.

הוכיחו כי $\{f\circ h|f\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\}=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

13) נגדיר את היחס R מעל $P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $ARB\Leftrightarrow\exists b\in B(\forall a\in A(a<b))$.

בנו פונקציה $f:\mathbb{N}\to P(\mathbb{N})$, שמקיימת $\forall x,y\in\mathbb{N}(x<y\leftrightarrow f(x)Rf(y))$.

14) נתונות שלוש פונקציות $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
הוכיחו כי אם $f\circ g$ חח"ע וגם $g\circ h$ חח"ע וגם $h\circ g\circ f$ על,
אז f,g,h שלושתן הפיכות.

15) בנו באופן מפורש תת קבוצה של $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ששקולה ל- $\mathbb{N}$.

16) נגדיר את $F:\mathbb{N}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{R}\,|\,f(x)=1\}$.
הוכיחו כי F אינה חח"ע.

17) נגדיר פונקציה $F:\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{N}\,|\,f(n)=0\}$.
קבעו האם F חח"ע ועל.

18) תהי $\mathbb{N}$ הטבעיים ותהי $B\subseteq\mathbb{N}$ תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה.
לדוגמה, עבור $B=\{1,2\}$ מתקיים $f(\{3,4\})=\{1,2,3,4\}, f(\{2,3\})=\{3\}$.

א. הוכיחו כי אם $X\cap B=\varnothing$, אז $f(f(X))=X$.
ב. הוכיחו כי אם $B\subseteq X$, אז $f(f(X))=X$.
ג. הוכיחו כי אם X שייכת לתמונה של הפונקציה, אז $f(f(X))=X$.
ד. האם הפונקציה חח"ע?
ה. האם הפונקציה על?
ו. מה העוצמה של התמונה של הפונקציה?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר Gool.co.il

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 16 - סדרות

תוכן העניינים

סדרה חשבונית:

סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר a_1 והפרשהּ הוא d נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה חשבונית:**

כלל נסיגה של סדרה חשבונית a_n שהפרשהּ הוא d ואיברהּ הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

- **נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:**

סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית a_n שהפרשהּ הוא d ואיברהּ הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים: $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$.

שאלות:

1) נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7...$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.

2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.

3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, ..., 49.5$.

4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24.
מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.

5) תחביב אחה״צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה״צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?

6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?

7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $91, 88, 85, 82, \ldots$.

8) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3, 3x-4, x^2-1$.

9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+3 \\ a_1=5 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

10) בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.
א. הוכח: $a_5=0$.
ב. נתון: $a_3-a_{11}=24$. מצא את a_1 ואת d.
ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n=2a_n-3$.
מצא את ערך האיבר השלילי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.

11) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3, 2, 7, 12, \ldots$.

12) נתונה הסדרה החשבונית: $-13\,,-7\,,-1\,,5,\ldots$.
כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?

13) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?

14) נתונה הסדרה החשבונית: $-71\,,-67\,,-63,\ldots$.
כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?

15) נתונה הסדרה החשבונית: $4\,,13\,,22\,,31,\ldots$.
בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.

16) נתונה הסדרה החשבונית: $4\,,9\,,14\,,19,\ldots,599$.
מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.

17) סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב- 1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.
א. בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d.
ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?

18) נתונה סדרה שבה $S_n=2n^2+4n$.
א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.
ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

19) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5 , ה-7 וה- 16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.
א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.
ב. מצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה.
ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

20) נתונים שני טורים חשבוניים: $\begin{cases} 150\,,144\,,138,... \\ 90\,,93\,,96,... \end{cases}$.

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

ב. מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

21) נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה הוא d_2. ידוע כי: $d_1 = -2d_2$.

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n.

א. מצא את הפרש הסדרה a_n - d_1.

ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50}.
מצא את a_1 ואת b_1.

22) נתונה הסדרה החשבונית: $-21\,,-17\,,-13,...$.

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

23) בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.
הוכח כי $nd = 60$.

24) בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

25) לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את x.

ii. מצא את הפרש הסדרה.

ב. ידוע כי: $a_{12}=0$. מצא את a_1.

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=308$.
מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

26) בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6.
האיבר הראשון אינו אפס.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. $a_1=-4d$.

ii. $S_9=0$.

ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.
מצא את a_1 ואת d.

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

27) בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח כי $nd=66$.

ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים הראשונים.

ג. סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

28) אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.
ההצעה הראשונה:
לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.
ההצעה השנייה:
לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.
ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.

א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.

ב. מה מחיר הרכב?

תשובות סופיות:

1) $a_{43}=-235$.
2) $d=4$, $a_1=-5$.
3) 20 איברים.
4) 48 איברים.
5) 15 קפיצות.
6) 58 מספרים.
7) 31 איברים חיוביים.
8) $x=4$, $x=1$.
9) $a_{19}=59$.
10) א. הוכחה. ב. $a_1=12$, $d=-3$ ג. $b_5=-3$.
11) $S_{14}=413$.
12) 21 איברים.
13) 16 דקות.
14) 37 איברים.
15) 3647.
16) 23920.
17) א. $n=\sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.
18) א. $a_1=6$, $a_2=10$, $a_3=14$ ב. $d=4$.
19) א. $a_1=50$, $d=-6$ ב. $a_{10}=-4$ ג. $n=6$.
20) א. $n=81$ ב. $n=16$.
21) א. $d_1=4$ ב. $a_1=-52$, $b_1=95$.
22) אי-זוגיים: $S=99$ זוגיים: $S=135$.
23) שאלת הוכחה.
24) 29 איברים.
25) א. i. $x=-50$ א. ii. $d=11$ ב. $a_1=-121$ ג. $S=2156$.
26) א. הוכחה. ב. $a_1=-8$, $d=2$ ג. $n=36$.
27) א. הוכחה. ב. $S=22a_1+693$ ג. $a_9=1$.
28) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 ש"ח.

סדרה הנדסית:

סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר a_1 ומנתהּ היא q
נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1q^{n-1}$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה הנדסית:**

כלל נסיגה של סדרה הנדסית a_n שמנתהּ היא q ואיברהּ הראשון הוא a_1
נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:**

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית a_n שמנתהּ היא q ואיברהּ
הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \dfrac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$.

שאלות:

1) נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

2) מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{64}{81}$.

3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?

7) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית: $x-6,\ x+4,\ 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.

8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n \\ a_1=3 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.

9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: $5, 10, 20, 40, \ldots$.

10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?

11) סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?

12) בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.

13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב- 120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

14) המספרים: $2x-3$, $x-9$, $x-13$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

א. מצא את x.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.

ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.

ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 5^{11}$.
מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

15) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $4\ ,\ 12\ ,\ 36\ ,....,\ a_{n+1}$. מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6}\ \ ,\ \ b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6}\ \ ,\ \ b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6}\ \ ,\ ......\ ,\ \ b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}.$$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n
ובין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ- a_8.

16) נתונה הסדרה ההנדסית: $7, 14, 28,...$.
בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

17) בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

18) נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים.
בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

19) בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

20) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.

בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.

ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

21) בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

22) באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה:

תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת,
כנגד השנייה - שתי אבנים,
כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...
המלך הסכים להצעה.

א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?

ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.

ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים, כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

תשובות סופיות:

1) $a_9=729$.

2) $n=7$.

3) $a_1=\pm\frac{1}{4}\,,\ q=\pm2$.

4) $a_1=\frac{2}{3}\,,\ q=\pm3$.

5) $a_1=\frac{1}{25}\,,\ q=5$.

6) 5 דקות.

7) $x=11\to q=3\ ,\ x=-\frac{2}{3}\to q=-\frac{1}{2}$.

8) $a_8=384$.

9) $S_9=2555$.

10) 5 דקות.

11) $n=4$, יש 12 איברים בסדרה.

12) $q=2$.

13) $n=6$.

14) א. $x=14$ ב.i. $a_n=5^{n-1}$ ב.ii. $a_6\ ,\ a_7$ ג. $S_7^*=61{,}034{,}375$.

15) א. $q=3$. ג. $b_5\ ,\ b_6$

16) אי-זוגיים: $S=595$, זוגיים: $S=1190$.

17) $q=4$.

18) $\frac{q+1}{q}$.

19) $a_1=\frac{3}{8}$.

20) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}}=\frac{1}{q+1}$ ב. $a_n=3^{n-1}$ ג. $a_5\ ,\ a_6$.

21) א. $q=2$ ב. $a_1=1$ ג. $S_{6(p)}=2730$.

22) א. $a_{25}=16{,}777{,}216$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו לו 20,000,000 אבנים.

ג. $4,16,64,...,2^{24}$, $S_n=22{,}369{,}620$.

סדרות מעורבות:

שאלות:

1) נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 3.
אם נכפול את המספר הראשון ב-3, נוסיף למספר השני 4 ונחסיר מהמספר השלישי 4 תתקבל סדרה חשבונית. מצא את המספרים.

2) נתונות שתי סדרות שמתחילות במספר 2 ובשתיהן 3 איברים.
סדרה אחת היא חשבונית והשנייה הנדסית. האיבר השלישי בשתי הסדרות זהה והאיבר השני בסדרה ההנדסית קטן ב-4 מהאיבר השני בסדרה החשבונית.
מצא את מנת הסדרה ההנדסית.

3) נתונים ארבעה מספרים בעלי התכונות הבאות:
הראשון, השני והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 2.
הראשון, השלישי והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית וסכומם $22\frac{1}{2}$. מצא את ארבעת המספרים.

4) ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה.
האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.

א. מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.

ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום 60.

ג. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.

5) נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית: $a_1\ ,a_2\ ,a_3\ ,....$
וסדרה הנדסית: $b_1\ ,b_2\ ,b_3\ ,...$. ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.

א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.

ב. נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.

ג. בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212-. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

תשובות סופיות:

1) המספרים הם: 18, 6, 2.
2) $q=-1$ או $q=3$.
3) המספרים הם: 12, 7.5, 6, 3.
4) א. 12, 10, 8 ב. 5 ג. 6.
5) א. $q=-2$ ג. $a_1=2$.

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

סיכום כללי:

- **הגדרה:**

סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q|<1$, $(q\neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

מתקבל הכלל הבא: $S=\frac{a_1}{1-q}$.

- **סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה: $S_n=\frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה באופן הבא: $S_n=\frac{a_k\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

שאלות:

1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ \dots$.

2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32.
מצא את האיבר הראשון בסדרה.

3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

***הערה: שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.**

5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n שמנתה q, $\left(q\neq 0\ ,\ |q|<1\right)$
מגדירים שלוש סדרות חדשות: b_n , c_n ו- d_n באופן הבא:

הסדרה:	b_n	c_n	d_n
הכלל:	$b_1=a_1$ $b_2=a_1+a_2$ $b_3=a_1+a_2+a_3$ $\vdots$ $b_n=a_1+a_2+a_3+..+a_n=S_{a(n)}$	$c_1=a_2^2-a_1^2$ $c_2=a_3^2-a_2^2$ $c_3=a_4^2-a_3^2$ $\vdots$ $c_n=a_{n+1}^2-a_n^2$	$d_1=S_a+a_1$ $d_2=S_a+a_2$ $d_3=S_a+a_3$ $\vdots$ $d_n=S_a+a_n$

הסכום S_a הוא סכום הסדרה a_n, והסכום: $S_{a(n)}$ הוא סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n.

א. קבע אלו מבין הסדרות b_n , c_n ו- d_n הן הנדסיות והבע את מנתן ע״י q.

ב. הבע באמצעות a_1 בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.

ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א׳ ב- $S_{(S)}$. הוכח כי לא קיים ערך של q עבורו סכום ריבועי האיברים, $S_{(S)}$, שווה לסכום הסדרה הנ״ל בריבוע.

6) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: a_n שמנתה q.
מגדירים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q} \ , b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q} \ , b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q} \ ,..., b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q} \ ,...$$

כאשר: S_n^* מייצג את סכום הסדרה a_n החל מהאיבר a_n (ועד אינסוף).

א. הוכח כי הסדרה b_n היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות a_1 ו- q.

ב. ידוע כי סכום הסדרה b_n הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה a_n גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה b_n. מצא את a_1 ו- q.

ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים: $b_2 + b_3 + ... + b_n + ... = 42$.

ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n.

ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n.

ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^*. חשב את סכום הסדרה b_n^*.

ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^{**}. חשב את סכום הסדרה b_n^{**}.

ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה b_n. מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(S)}$ (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית b_n ב- S_b. הראה כי: $S_b^2 \neq S_{(S)}$.

ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה a_n וסכום איברי הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1+a_2,\ a_2+a_3,\ a_3+a_4,\ a_4+a_5,\ \dots$.
א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.
ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.
מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

8) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
א. מצא את מנת הסדרה.
מחברים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n.
ב. הוכח כי הסדרה b_n גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.
ג. הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n.
ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n.

9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots\dots$ שמנתה היא q, $(0<q<1)$.
נגדיר את הסכומים הבאים: $V=a_3+a_7+a_{11}+\dots$, $T=a_1+a_2+a_5+a_6+a_9+a_{10}\ ,\ \dots$.
נתון כי: $T=6V$.
א. מצא את מנת הסדרה q.
ב. פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?
ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.

10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots\dots\ ,\ a_{2n}$ שמנתה היא q.
בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא: $a_1^2\ ,\ a_2^2\ ,\ a_3^2\ ,\ \dots\dots\ ,\ a_{2n}^2$.
א. הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.
בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
ב. מצא את מנת הסדרה.
ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו.
ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר a_n.

11) נתונה סדרה הנדסית אינסופית ..... , a_1 , a_2 , a_3 שמנתה היא q , $(q \neq 0\ ,\ |q|<1)$.

נגדיר את הסכומים הבאים: $V = a_2 + a_7 + a_{12} + ...\ , ..\ , T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13}$.

נתון כי: $V = 0.3T$.

א. מצא את מנת הסדרה q.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.

ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.

ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

תשובות סופיות:

1) $S=18$.

2) $a_1=24$.

3) $a_1=50$, $q=\frac{1}{5}$ או $a_1=12\frac{1}{2}$, $q=\frac{4}{5}$.

4) $S=18\frac{2}{3}$.

5) א. הסדרה b_n : $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{q-1}}{\frac{a_n\left(q^n-1\right)}{q-1}}=\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{a_n\left(q^n-1\right)}=q\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q^n-1}$

היות והיא תלויה ב- n היא אינה הנדסית.

הסדרה c_n הנדסית: $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{n+2}^2-a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^4-a_n^2q^2}{a_n^2q^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^2\left(q^2-1\right)}{a_n^2\left(q^2-1\right)}=q^2$.

הסדרה d_n : $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S+a_{n+1}}{S+a_n}=\frac{\frac{a_1}{1-q}+a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q}+a_n}=\frac{a_1+(1-q)a_{n+1}}{a_1+(1-q)a_n}=\frac{a_1\left(1+(1-q)q^n\right)}{a_1\left(1+(1-q)q^{n-1}\right)}=\frac{q^n-q^{n+1}+1}{q^{n-1}-q^n+1}$

היות והיא תלויה ב- n היא אינה הנדסית. ב. $S_{(c_n)}=\frac{c_1}{1-q_c}=\frac{a_2^2-a_1^2}{1-q^2}=\frac{a_1^2\left(q^2-1\right)}{1-q^2}=-a_1^2$.

ג. מהשוואה: $S_{(s)}=S^2$ מקבלים כי פתרון המשוואה הוא: $q=0,\pm1$.
כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה a_n היא שבר.
עבור $|q|>1$ הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של q עבורו השוויון יתקיים. מש"ל.

6) א. $b_n=\frac{a_1}{1-q}q^{n-1}$ ב. $a_1=56$, $q=\frac{1}{3}$ ג. הוכחה. ד. 31.5
ה. 94.5 ו. -63 ז. 63 ח. 7938

ט. הסכום: S^2 משמעו: $\left(b_1+b_2+...+b_n+..\right)^2$.
הסכום: $S_{(s)}$ משמעו: $b_1^2+b_2^2+...+b_n^2+..$. ברור כי הביטויים אינם שווים.

7) א. הוכחה. ב. $a_1=16$, $q=\frac{1}{3}$.

8) א. $q=0.6$ ב. $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n-1}+a_{2n}}=q^2$ ד. $a_1=200$

9) א. $q=\frac{1}{2}$ ב. 5 פי ג. $a_1=1024$

10) א. הוכחה. ב. $q=0.5$ ג. $a_5=20$.

11) א. $q=\frac{1}{3}$ ב. $a_1=-16$ ג. $S=288$.

סדרת נסיגה:

שאלות:

1) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n - 11 \\ a_1 = -6 \end{cases}$.

א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.

ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את a_{14} ו- a_{12}.

ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא k.
הבע באמצעות k את a_{32} ו- a_{30}.

ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 133.

ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

2) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = 0 \end{cases}$.

נתון כי $a_k = 72$. הבע באמצעות k את a_{k+2}.

3) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 31 \\ a_7 = t \end{cases}$

מצא את ערכו של t שבעבורו האיברים a_7, a_8, a_9 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

4) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = a_n + 6n - 2$
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_{n+1} - a_n$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את b_1.

5) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = 3a_n + 4$.
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_n + 2$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון: $b_5 = 162$. חשב את a_1.

6) סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_1=3\ ,\ a_{n+1}=3a_n+10n-5$.
מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל n טבעי: $b_n=a_n+5n$.
א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.
ב. חשב את האיבר b_5.
ג. חשב את הסכום: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{12}$.

7) סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הנוסחה: $a_1=k\ ,\ a_{n+1}=8n-a_n+3$.
א. הבע באמצעות k את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
ב. הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.
ג. חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

8) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1=2\ ,\ a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+3}$.
מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n=\dfrac{4-7a_n}{a_n}$.
א. הוכח כי הסדרה b_n היא חשבונית ומצא את הפרשה.
ב. חשב את הסכום הבא: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{22}$.

9) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1=1\ ,\ a_{n+1}=3n-a_n-7$.
א. חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.
ב. הוכח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+2}=a_n+3$.
ג. כתוב נוסחה לסכום n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
ד. חשב את הסכום הבא: $a_1+a_3+a_5+.......+a_{17}$.

10) סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=a_n+2\cdot 3^n+2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע את a_{n+2} באמצעות a_n.

ii. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.

ב. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות ע״י כלל הנסיגה הנ״ל היא: $S_n=1.5\cdot 3^n+n^2+n-1.5$.

חשב את הסכום הבא: $a_6+a_7+a_8+....+a_{11}$.

ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע״י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ״ל?

11) סדרה מוגדרת ע״י כלל הנסיגה: $a_1=6\ ,\ a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+5}$.

מגדירים סדרה חדשה b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n=\dfrac{a_n+3}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית ומצא את מנתה.

ב. כתוב נוסחה ל- b_n באמצעות n בלבד.

ג. חשב את הסכום הבא: $b_1-b_2+b_3-b_4+.....-b_{10}$.

תשובות סופיות:

1) א. $a_3 = -22$ ב. $a_{12} = 5$, $a_{14} = 33$ ג. $a_{32} = k + 51$, $a_{30} = k - 49$

ד. a_{62}, a_{63}

2) $a_{k+2} = 74 + 4k$

3) $t = -33$

4) א. $d = 6$ ב. $b_1 = 4$

5) א. $q = 3$ ב. $a_1 = 0$

6) א. $b_{n+1} = 3b_n$ ב. $b_5 = 648$ ג. $S = 1594320$

7) א. $a_1 = k$, $a_2 = 11 - k$, $a_3 = k + 8$, $a_4 = 19 - k$ ב. 8

ג. 830

8) ב. $S_{11(p)} = 267\frac{2}{3}$

9) א. $a_1 = 1$, $a_2 = -5$, $a_3 = 4$, $a_4 = -2$, $a_5 = 7$ ג. $S_{n(o)} = 1.5n^2 - 0.5n$

ד. $S_{9(o)} = 117$

10) א. i. $a_{n+2} = a_n + 8 \cdot 3^n + 4$ ii. a_4

ב. $S_{6-11} = 265458$ ג. $a_1 = 5$.

11) א. $q = 2.5$ ב. $b_n = 1.5 \cdot 2.5^{n-1}$ ג. $S_{10}^* = -4086.74$

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 17 - אינדוקציה מתמטית

תוכן העניינים

שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

סיכום כללי:

מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:

בדיקה:

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור $n=1$ (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור $n=2,3$).

הנחת האינדוקציה:

נניח כי עבור $n=k$ (k טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

הוכחת האינדוקציה:

נוכיח כי עבור $n=k+1$ טענת האינדוקציה מתקיימת.

סיכום:

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

שאלות:

1) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 8^n-3^n מתחלק ב-5 ללא שארית לכל n טבעי.

2) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 11^n-4^n מתחלק ב-7 ללא שארית לכל n טבעי.

3) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $4^{n+2}+8\cdot 7^n$ מתחלק ב-24 ללא שארית לכל n טבעי.

4) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5^{n+1}-5\cdot 3^{2n}$ מתחלק ב-20 ללא שארית לכל n טבעי.

5) a_n הוא האיבר במקום ה-n בסדרה החשבונית: $1,3,5,7,...$ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $2^{a_n}+4$ מתחלק ב-12 ללא שארית לכל n טבעי הגדול מ-1.

6) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^2+n מתחלק ב-2 ללא שארית לכל n טבעי.

7) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

8) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n-2n-1 מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.

9) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9(9^n-1)-40n$ מתחלק ב-32 ללא שארית לכל n טבעי.

10) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n+5^n-2^n(2^n+1)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

11) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n + 2^{2n}$ מתחלק ב-11 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.

12) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $a^n - b^n$ מתחלק ב- $(a+b)$ ללא שארית לכל n טבעי זוגי.

13) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^{n+2} + 1$ מותיר שארית 2 בחלוקתו ב- 3 לכל n טבעי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

סדרות:

סיכום כללי:

תזכורת:

- סדרה היא אוסף מספרים: $a_1, a_2, ..., a_n$, כאשר n הוא מיקום האיבר בסדרה ו- a_n הוא ערך האיבר העומד במקום ה- n -י בסדרה.
    - סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.
    - סכום n האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- S_n
      והוא מקיים: $S_n = a_1 + ... + a_n$.

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 + d(n-1)$ כאשר d הפרש הסדרה.
    - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$.

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 q^{n-1}$ כאשר q היא מנת הסדרה.
    - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$.

שאלות:

14) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $1+2+3+4+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$.

15) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $4+7+10+13+...+(3n+1)=\frac{n}{2}(3n+5)$.

16) נתונה סדרה שבה: $a_n=n(n+2)$.
הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$.

17) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

18) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$\frac{6}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{6}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

19) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 9+...+n\cdot 3^{n-1}=\frac{1}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right].$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

עצרת:

סיכום כללי:

תזכורת – מושג העצרת:

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

מגדירים: $0!=1$ ותמיד מתקיימים השוויונות: $n!=n\cdot (n-1)!$, $(n+1)!=n!\cdot (n+1)$.

שאלות:

20) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

21) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{4}+\frac{3\cdot 4!}{8}+\ldots+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$

22) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$p!+\frac{(p+1)!}{1!}+\frac{(p+2)!}{2!}+\ldots+\frac{(p+n-1)!}{(n-1)!}=\frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

23) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{n!}$$

24) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1\cdot 4}-\frac{11}{4\cdot 7}+\frac{17}{7\cdot 10}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(6n-1)}{(3n-2)(3n+1)}=1+\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

שאלות:

25) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+...+2n=n(2n+1)$$

26) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

27) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+...+3n\cdot 2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

שאלות:

28) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=2n(2n+1)$$

29) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

30) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+3}\right)...\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

31) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$$

32) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

שאלות:

33) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{n}{n+1}$$

34) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 2-\frac{1}{n}$$

35) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$$

36) נתונה סדרה שבה: $a_n=n^n$. נגדיר: $T_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $T_n\le n^{\frac{n}{2}(n+1)}$.

37) נתון אי-השוויון: $2^n>n^2$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

38) נתון אי-השוויון: $4^n>5n^2+1$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

39) נתון אי-השוויון: $n^3-n<5^{n-1}$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

40) נתון אי-השוויון: $3^n+4^n+5^n<6^n$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

41) נתון אי-השוויון: $n^n \ge n!$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי.

42) נתון אי-השוויון: $a^n + b^n < (a+b)^n$, $(a,b>0)$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-1.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות כוללות ומסכמות:

שאלות:

43) נתון השוויון: $4+7+10+13+...=\frac{n}{2}(3n+5)$.

א. מצא את האיבר במקום ה-n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג. חשב את הסכום: $37+40+43+...+85$.

44) נתון השוויון: $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+...=2-\frac{2n+2}{3^n}$. מצא את האיבר במקום ה-$n$.

45) נתון השוויון: $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots=\frac{n}{4n+1}$.

א. מצא את האיבר במקום ה-n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג. חשב את הסכום: $\frac{1}{25\cdot29}+\frac{1}{29\cdot33}+\frac{1}{33\cdot37}+\cdots+\frac{1}{89\cdot93}$.

46) נתון השוויון: $(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום: $26^2+27^2+28^2+...+48^2$.

47) נתון השוויון: $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $4^2+6^2+8^2+\cdots+(4n)^2$.

48) נתונים השוויונים הבאים:

א. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7}{3}(n^2+3n-1)$.

ב. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=n^2+11n-5$.

ג. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7n}{2}(n+1)$.

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל n טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

49) נתון השוויון: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=an(2n+b)$.

א. נתון כי השוויון נכון עבור $n=1$ ו- $n=2$. מצא את ערכי a ו- b.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

50) נתון אי-השוויון: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-2.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{18}>\frac{1}{2}$.

51) נתון אי-השוויון: $n^2<2^n$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-4.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $5^2\cdot 6^2\cdot 7^2\cdot 8^2\cdot ...\cdot 20^2<2^{200}$.

52) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום: $9+27+81+\cdots+3^{3n+1}$ מתחלק ב-117 ללא שארית לכל n טבעי.

53) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

ב. נתון כי $a+b$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
הוכח כי a^3+b^3 מתחלק ב-6 ללא שארית.

54) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח את הטענה: אם ל-n טבעי מסוים 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם $3^{n+2}+5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.

ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל n טבעי אי-זוגי?

ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n+5^n מתחלק ב-8 ללא שארית לכל n טבעי אי-זוגי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 18 - מבוא לקומבינטוריקה

תוכן העניינים

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

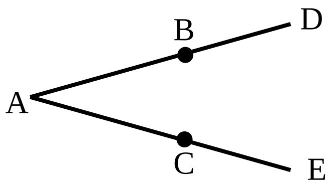
פרק 19 - מבוא לגאומטריה של המישור

תוכן העניינים

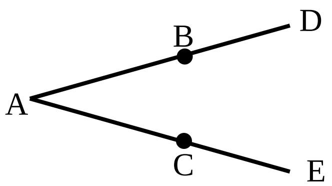
חיבור וחיסור קטעים:

שאלות:

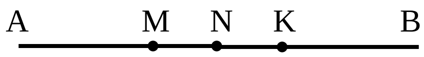
1) באיור שלפניך נתון: $AB = AC$, $BD = CE$.
הוכח: $AD=AE$.



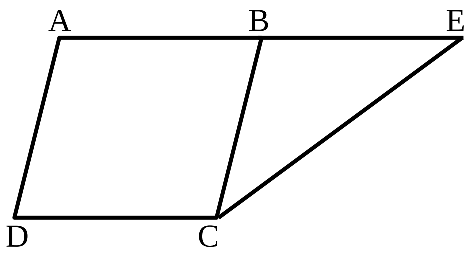
2) באיור שלפניך נתון: $AD = AE$, $AB = AC$.
הוכח: $BD = CE$.



3) הנקודות A, M, N, K, B נמצאות על ישר אחד.
נתון כי: $AM = KB$, $MN = NK$.
הוכח: $AN = BN$.



4) בסרטוט שלפניך נתון כי: $BC = AB$, $BE + BC = 2AB$.
הוכח: $AB = BE$.



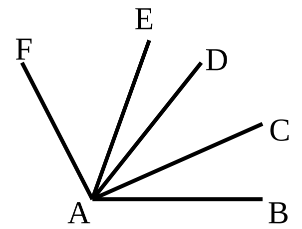
תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.

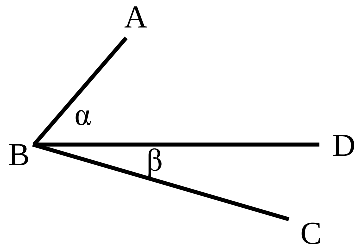
חישובי זוויות וחיבור וחיסור זוויות:

שאלות:

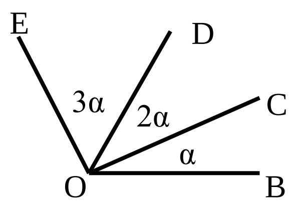
5) נתון: $\sphericalangle FAE = 2 \cdot \sphericalangle EAD$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAC$.
וכן: $\sphericalangle FAD = 60^\circ$, $\sphericalangle EAB = 80^\circ$.
חשב את הזויות הבאות:
$\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle EAC$, $\sphericalangle FAB$.



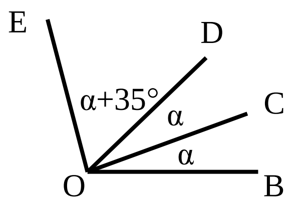
6) באיור שלפניך נתון: $\sphericalangle ABC = 69^\circ$.
נתון כי: $\alpha = 2\beta$ (זוויות סמוכות).
מצא את α ואת β.



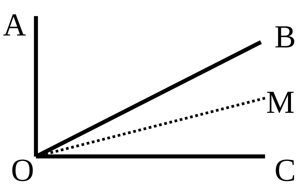
7) באיור שלפניך מספר קרניים היוצאים מהנקודה O.
הנתונים הם: $\sphericalangle EOB = 138^\circ$.
חשב את הזוויות הבאות:
$\sphericalangle COB$, $\sphericalangle DOC$, $\sphericalangle EOD$.



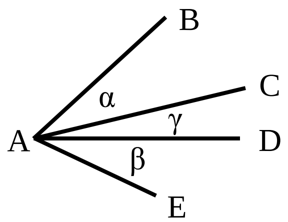
8) באיור שלפניך נתון: $\sphericalangle EOB = 110^\circ$.
שאר הנתונים מופיעים בתרשים.
חשב את הזוויות הבאות:
$\sphericalangle DOC$, $\sphericalangle EOC$.



9) נתון האיור הבא ובו: $\sphericalangle AOC = 90^\circ$.
OM חוצה את זווית BOC.
מתקיים: $\sphericalangle AOB = 3\sphericalangle MOC$.
חשב את: $\sphericalangle BOM$, $\sphericalangle AOM$.



10) בסרטוט שלפניך נתון: $\alpha = \beta$.
הוכח כי: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$.



תשובות סופיות:

5) $\sphericalangle CAB = 30°$, $\sphericalangle EAC = 50°$, $\sphericalangle FAB = 120°$.

6) $\beta = 23°$, $\alpha = 46°$.

7) $\sphericalangle DOE = 69°$, $\sphericalangle COD = 46°$, $\sphericalangle BOC = 23°$.

8) $\sphericalangle DOC = 25°$, $\sphericalangle EOC = 85°$.

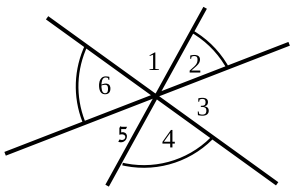
9) $\sphericalangle BOM = 18°$, $\sphericalangle AOM = 72°$.

10) שאלת הוכחה.

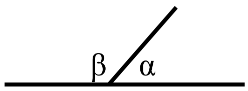
זוויות קדקודיות וזוויות צמודות:

שאלות:

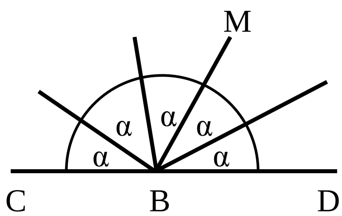
11) חשב את סכום הזוויות הבאות (נמק):
$\measuredangle 2+\measuredangle 4+\measuredangle 6$



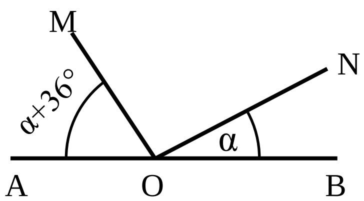
12) באיור שלפניך הזוויות α ו- β הן זוויות צמודות.
ידוע כי: $\alpha=63^\circ$.
מצא את זווית β .



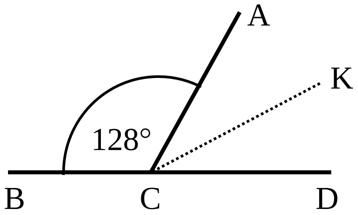
13) באיור שלפניך הזווית CBD היא שטוחה.
כל הזוויות שוות ל- α .
א. חשב את α .
ב. חשב את זווית CBM.



14) בסרטוט שלפניך ידוע:
הזווית AOB היא שטוחה.
נתון: $\alpha=27^\circ$.
הוכח כי: $MO\perp NO$.



15) הזוויות $\measuredangle ACD$ ו- $\measuredangle ACB$ הן צמודות.
ידוע כי CK חוצה זווית ACD.
כמו כן: $\measuredangle ACB=128^\circ$.
חשב את זווית BCK.



תשובות סופיות:

11) $180°$.

12) $\beta = 117°$.

13) א. $\alpha = 36°$ ב. $\sphericalangle CBM = 108°$.

14) שאלת הוכחה.

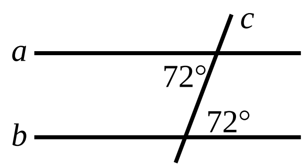
15) $\sphericalangle BCK = 154°$.

זוויות בין ישרים מקבילים:

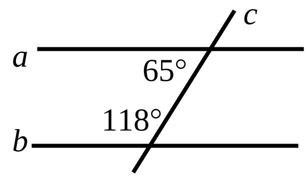
שאלות:

16) קבע בכל מקרה האם הישרים a ו-b מקבילים או שלא. נמק.

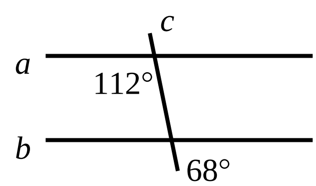
א.



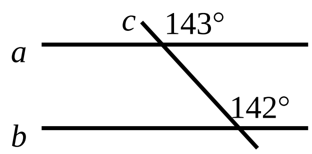
ב.



ג.

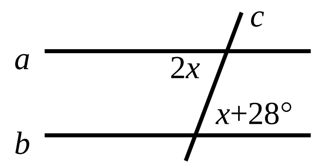


ד.

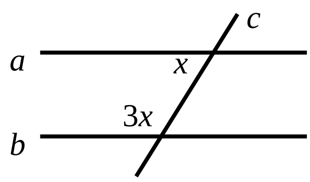


17) הישרים a ו-b מקבילים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:

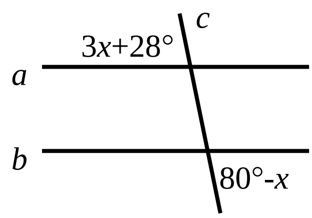
א.



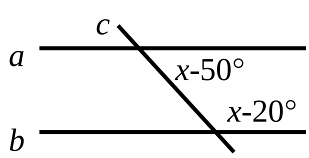
ב.



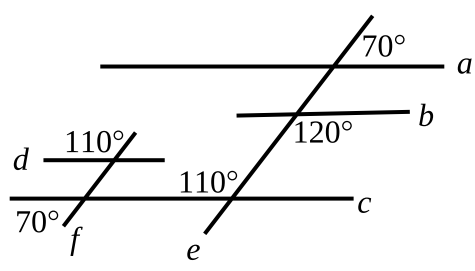
ג.



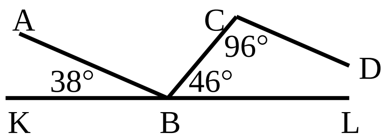
ד.



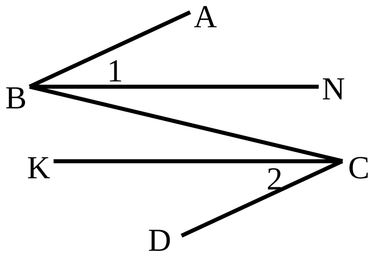
18) מצא את זוגות הישרים המקבילים בסרטוט הבא.
נמק.



19) בסרטוט שלפניך נתון כי KL הוא קו ישר.
שאר הזוויות מופיעות בתרשים.
הוכח כי: $AB \parallel CD$.



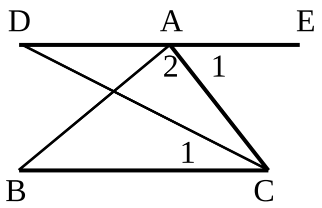
20) באיור שלפניך נתון כי:
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$, $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle C_2$.
הוכח כי: $BN \parallel CK$.



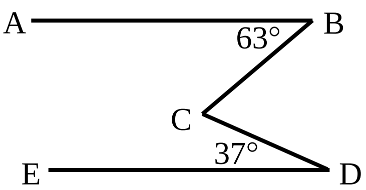
21) באיור שלפניך מופיע קטע ישר DE.
מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
מחברים את BC וידוע כי $BC \parallel DE$.
מעבירים את CD – חוצה זווית C.
נתון: $\sphericalangle A_2 = 85°$, $\sphericalangle A_1 = 68°$.

א. חשב את הזווית $\sphericalangle C_1$.

ב. חשב את הזווית $\sphericalangle B$.



22) בסרטוט שלפניך נתון:
$AB \parallel DE$, $\sphericalangle B = 63°$, $\sphericalangle D = 37°$.
חשב את גודל הזווית BCD.



תשובות סופיות:

16) א. כן   ב. לא   ג. כן   ד. לא.

17) א. 28° ב. 45° ג. 13° ד. 125°.

18) $a \parallel c \parallel d$, $e \parallel f$.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) א. 34° ב. 27°.

22) $\measuredangle BCD = 100^\circ$.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 20 - גיאומטריה אוקלידית - משולשים

תוכן העניינים

הגדרות כלליות:

סוגי משולשים:

ניתן למיין את המשולשים לפי זוויות או לפי צלעות.
לפי זוויות:

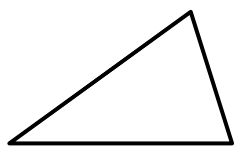
1. משולש חד זווית – משולש שכל זוויותיו חדות.
2. משולש ישר זווית – משולש בעל זווית ישרה.
3. משולש קהה זווית – משולש בעל זווית קהה.

לפי צלעות:

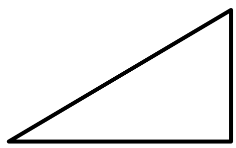
4. משולש שונה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שונות באורכן.
5. משולש שווה שוקיים – משולש שבו שתי צלעות שוות.
6. משולש שווה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שוות באורכן.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:

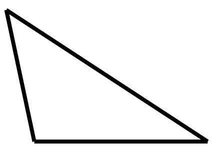
1. משולש חד זווית:



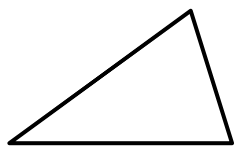
2. משולש ישר זווית:



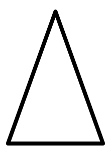
3. משולש קהה זווית:



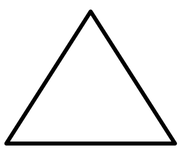
4. משולש שונה צלעות:



5. משולש שווה שוקיים:



6. משולש שווה צלעות:

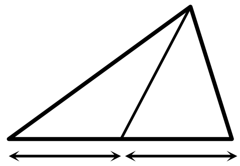


קטעים מיוחדים במשולשים:

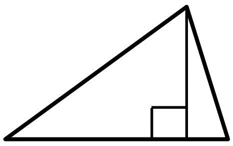
1. תיכון – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו וחוצה אותה.
2. גובה – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו ומאונך לה.
3. חוצה זווית – קטע היוצא מקדקוד וחוצה את הזווית שממנה הוא יוצא.
4. אנך אמצעי – קטע היוצא מאמצע צלע ומאונך לה.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:

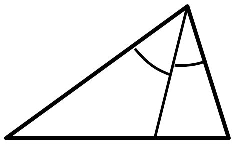
.1



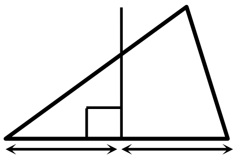
.2



.3



.4



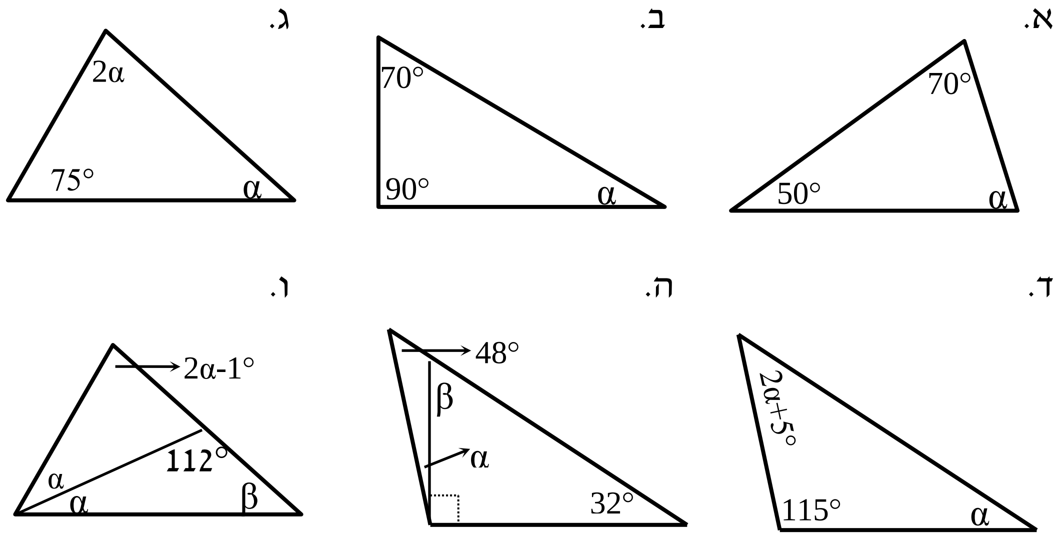
משפטים כלליים במשולשים:

- סכום הזוויות במשולש הוא 180°.
- סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
- במשולש מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה ולהפך.
  במשולש מול הזווית הקטנה נמצאת הצלע הקטנה ולהפך.
  במשולש מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות ולהפך.

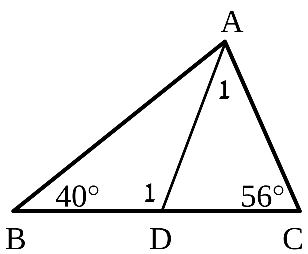
זוויות במשולשים:

שאלות:

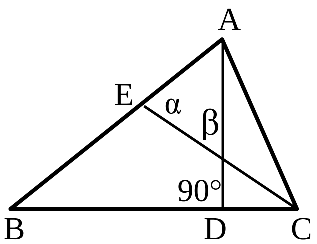
1) חשב את הזוויות בכל אחד מהמשולשים שלפניך :



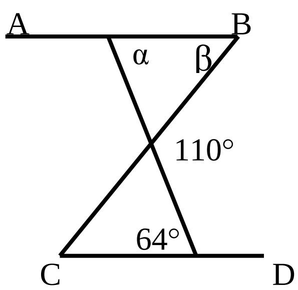
2) במשולש שלפניך נתון AD חוצה זווית A.
נתון : $\sphericalangle B = 40°$, $\sphericalangle C = 56°$.
חשב את הזוויות $\sphericalangle D_1$, $\sphericalangle A_1$.



3) נתון משולש ABC ובו AD גובה לצלע BC.
$\sphericalangle D = 90°$ הקטע CE חוצה זווית $\sphericalangle C$.
כמו כן : $\alpha = 75°$, $\beta = 63°$.
חשב את זוויות המשולש ABC .

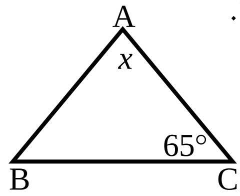


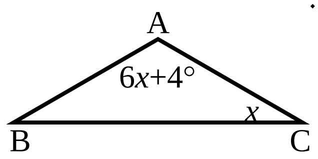
4) בסרטוט שלפניך נתון : $AB \parallel CD$.
מצא את הזוויות α ו- β .



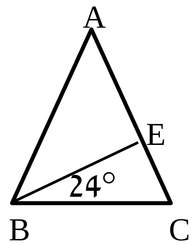
5) שלוש זוויות המשולש מתייחסות זו לזו כמו : 1 : 2 : 6.
חשב את זוויות המשולש.

6) בסרטוטים שלפניך נתונים משולשים שווי שוקיים $(AB=AC)$ שאחת מזוויותיהם נתונה. מצא את הגודל x בכל סרטוט.

א. 

ב. 

7) הגובה לשוק המשולש שווה השוקיים ABC, $(AB=AC)$ יוצר זווית בת $24°$ עם הבסיס BC. מצא את זוויות המשולש ABC.



8) חשב את זוויות המשולשים בכל אחד מהמקרים הבאים:

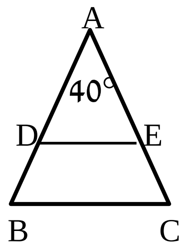
א. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה פי ארבעה מזווית הראש. מצא את זוויות המשולש.

ב. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה ב-$12°$ מזווית הראש. מצא את זוויות המשולש.

9) באיור שלפניך נתון: $AB=AC$, $AD=AE$, $\sphericalangle A=40°$.

א. חשב את הזוויות: $\sphericalangle E$, $\sphericalangle D$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle B$.

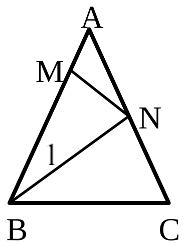
ב. הוכח: $DE \parallel BC$.



10) באיור שלפניך נתון: $AB=AC$. מעבירים את הקטעים BN ו- MN כך שמתקיים: $BM=BN=BC$.

נתון בנוסף: $\sphericalangle A=32°$.

חשב את זוויות: $\sphericalangle ANM$, $\sphericalangle B_1$.



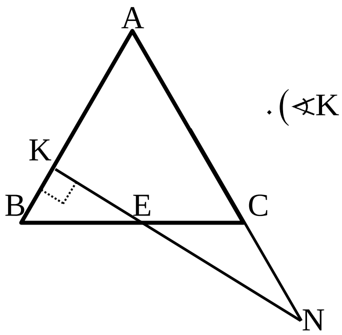
11) משולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB=AC)$.

בנקודה K כלשהי על AB מעלים אנך ל- AB $(\sphericalangle K=90°)$.

אנך זה חותך את BC בנקודה E ואת המשך AC בנקודה N.

מתקיים: $CE=CN$.

חשב את זוויות המשולש ABC.



תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 60°$ ב. $\alpha = 20°$ ג. $\alpha = 35°$ ד. $\alpha = 20°$
ה. $\alpha = 10°$, $\beta = 58°$ ו. $\beta = 30\frac{1}{3}°$, $\alpha = 37\frac{2}{3}°$.

2) $\sphericalangle A_1 = 42°$, $\sphericalangle D_1 = 98°$

3) $\sphericalangle A = 78°$, $\sphericalangle B = 48°$, $\sphericalangle C = 54°$.

4) $\alpha = 64°$, $\beta = 46°$.

5) $20°$, $40°$, $120°$.

6) א. $x = 50°$ ב. $x = 22°$.

7) $\sphericalangle A = 48°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 66°$.

8) א. $20°$, $80°$, $80°$ ב. $52°$, $64°$, $64°$

9) א. $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = 70°$. ב. שאלת הוכחה

10) א. $\sphericalangle B_1 = 42°$, $\sphericalangle ANM = 37°$.

11) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$.

משולש שווה שוקיים ושווה צלעות:

סיכום כללי:

משפטים במשולש שווה שוקיים:

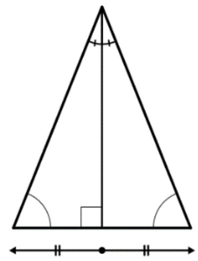
- במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
(משפט הפוך) משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים.
- במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים.
(משפט הפוך) משולש שבו חוצה זווית הוא גם גובה או חוצה זווית הוא גם תיכון או גובה הוא גם תיכון הוא משולש שווה שוקיים.

משפטים במשולש שווה צלעות:

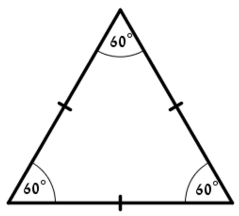
- במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות $60°$.
(משפט הפוך) משולש שבו כל הזוויות שוות הוא משולש שווה צלעות.

איורים:

משפט במשולש שווה שוקיים

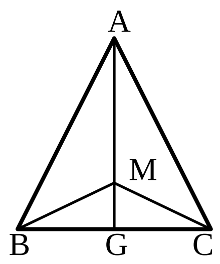


משפט במשולש שווה צלעות

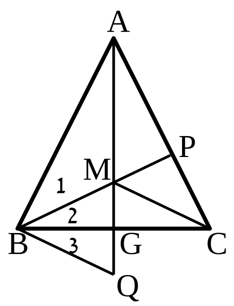


שאלות:

12) המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים (AB=AC) .
AG חוצה את זווית $\sphericalangle A$.
M היא נקודה כלשהי על AG.
הוכח כי: $BM = CM$.



13) המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים (AB=AC) .
AG ו-BP חוצים את הזוויות $\sphericalangle A$ ו- $\sphericalangle ABC$ בהתאמה.
הנקודה Q נמצאת על המשך AG .
נתון: $GM = GQ$.
הוכח: $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_3$.



תשובות סופיות:

12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.

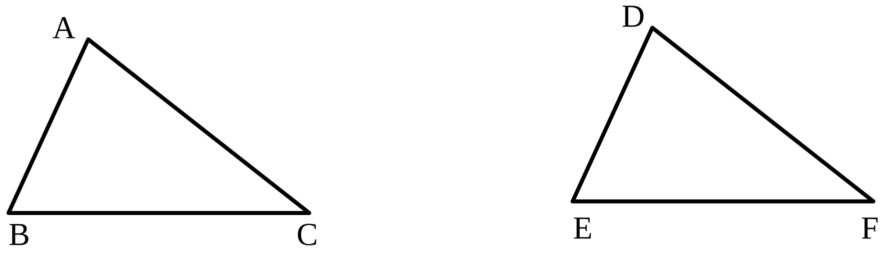
חפיפת משולשים:

סיכום כללי:

הגדרה:

משולשים חופפים הם משולשים ששווים זה לזה בכל צלעותיהם ובכל זוויותיהם בהתאמה.

סימון מתמטי: $\begin{cases} AB = DE \,,\, AC = DF \,,\, BC = EF \\ \sphericalangle A = \sphericalangle D \,,\, \sphericalangle B = \sphericalangle E \,,\, \sphericalangle C = \sphericalangle F \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$.

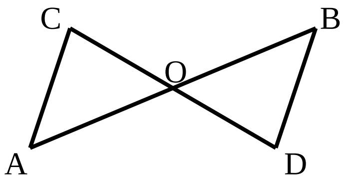


משפטי החפיפה:

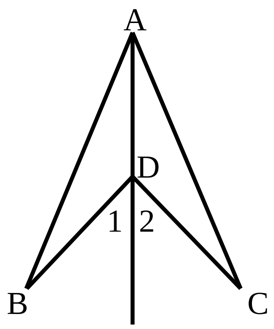
- משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ):
  אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (ז.צ.ז):
  אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות והצלע שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ):
  אם בין שני משולשים שוות שלוש צלעות בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז):
  אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

שאלות:

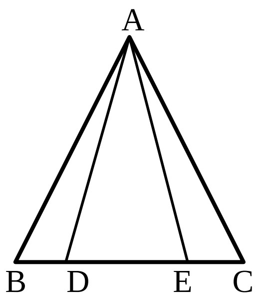
שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-זווית-צלע:



14) באיור שלפניך הקטעים AB ו- CD חוצים זה את זה בנקודה O.
הוכח: $\Delta ACO \cong \Delta BDO$.

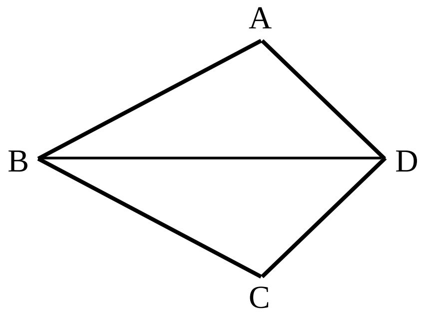


15) באיור שלפניך נתון: $BD = CD$.
כמו כן: $\sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2$.
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

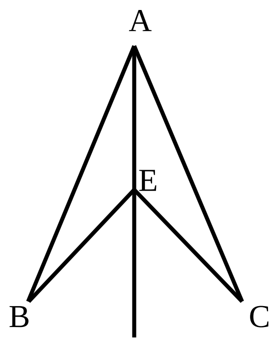


16) בסרטוט שלפניך נתון:
$AB = AC$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C$, $BE = CD$.
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.

שאלות העוסקות במשפט חפיפה זווית-צלע-זווית:



17) במרובע ABCD נתון כי BD חוצה את זוויות $\sphericalangle B$ ו- $\sphericalangle D$.
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.



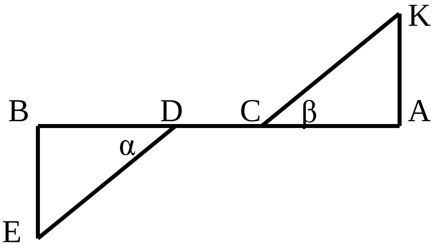
18) בסרטוט שלפניך נתון:
AE חוצה את הזוויות $\sphericalangle BAC$ ו- $\sphericalangle BEC$.
הוכח: $\Delta ABE \cong \Delta ACE$.

19) בציור שלפניך נתון:

$AC = BD$, $\alpha = \beta$

$AB \perp BE$, $AB \perp AK$.

הוכח: $\Delta AKC \cong \Delta BED$.

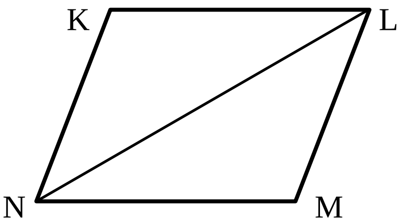


שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-צלע:

20) באיור שלפניך נתון:

$KL = MN$, $KN = LM$.

הוכח: $\Delta KLN \cong \Delta MLN$.

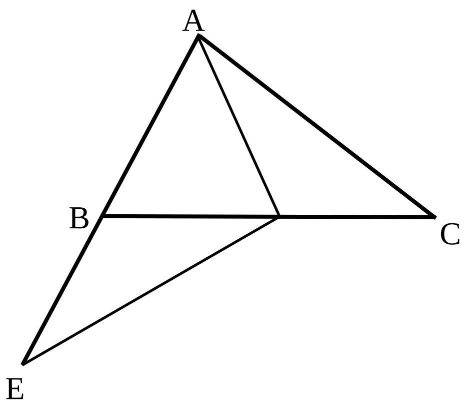


שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-זווית שמול הצלע הגדולה:

21) בציור שלפניך נתון:

$AC = DE$, $AB = BE = AD$

הוכח כי הנקודה D היא אמצע BC.

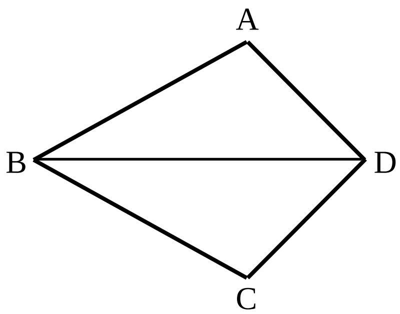


שאלות העוסקות בשלושת משפטי החפיפה יחדיו:

22) במרובע ABCD נתון:

$AB = BC$, $AD = CD$.

הוכח: $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.

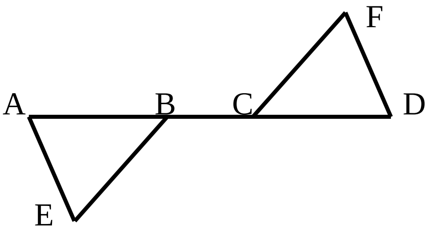


23) הקטע AD הוא קו ישר.

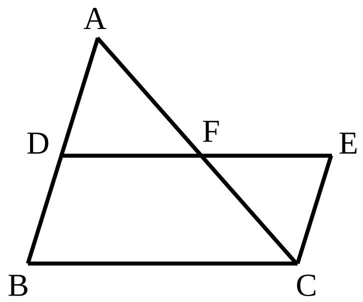
נתון: $AE = DF$, $AC = BD$.

כמו כן מתקיים: $\sphericalangle A = \sphericalangle D$.

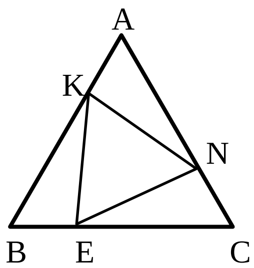
הוכח כי הקטעים BE ו- FC שווים.



24) באיור שלפניך נתון:
הנקודה F היא אמצע הקטע AC.
מתקיים: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACE$.
הקטעים BD ו- CE שווים.
הוכח את הטענות הבאות:
א. F היא אמצע הקטע DE.
ב. D היא אמצע הקטע AB.

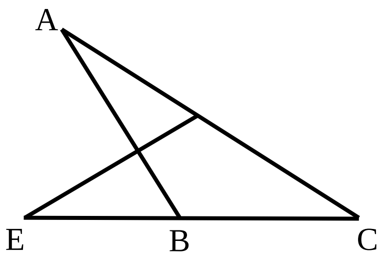


25) המשולש ABC הוא שווה צלעות.
נתון: $AK = BE = CN$.
הוכח כי ΔKEN הוא גם משולש שווה צלעות.

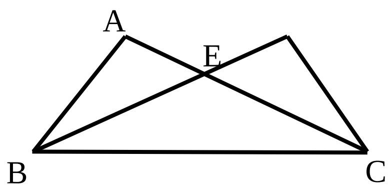


שאלות העוסקות במשולשים המכסים חלקית זה את זה:

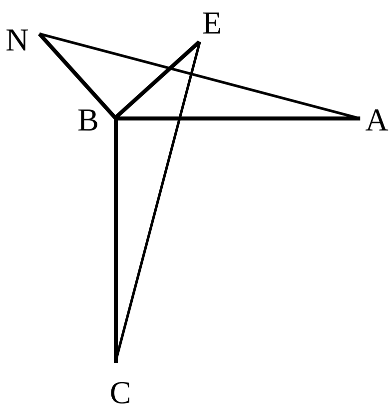
26) בציור שלפניך נתון: $AC = CE$, $DC = BC$.
הוכח:
א. $\Delta CDE \cong \Delta CBA$.
ב. $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABE$.



27) באיור שלפניך נתון:
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB$, $\sphericalangle DBC = \sphericalangle ACB$.
הוכח: $AB = CD$.

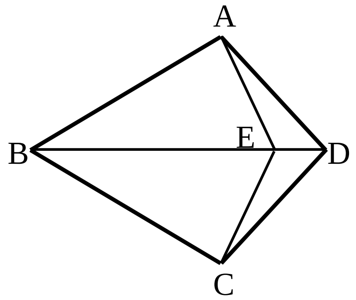


28) בציור שלפניך נתון:
$AB = BC$, $BE = BN$
$AB \perp BC$, $BE \perp BN$
הוכח: $AN = CE$.

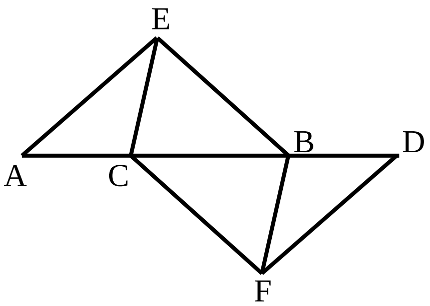


שאלות העוסקות בשתי חפיפות:

29) בסרטוט שלפניך נתון כי BD הוא קו ישר.
מתקיים: $AB = BC$, $AD = CD$.
הנקודה E נמצאת על BD.
הוכח כי: $AE = CE$.

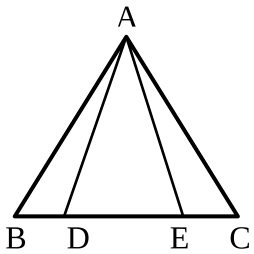


30) בציור שלפניך נתון כי AD הוא קו ישר. מתקיים:
$\measuredangle A = \measuredangle D$, $\measuredangle AEC = \measuredangle DFB$
וכן $AE = DF$. הוכח:
א. $CE = BF$.
ב. $BE = CF$.

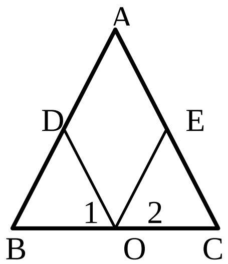


שאלות העוסקות בחפיפות עם משולש שווה שוקיים:

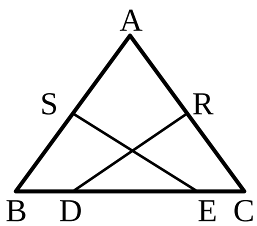
31) נתון משולש שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$.
מתקיים: $BD = CE$.
הוכח: $AD = AE$.



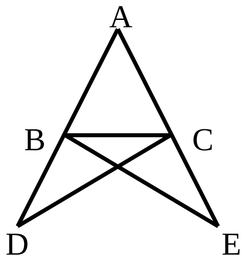
32) בסרטוט שלפניך נתון משולש
שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$.
הנקודה O היא אמצע BC.
מתקיים: $\measuredangle O_1 = \measuredangle O_2$.
הוכח: $AD = AE$.



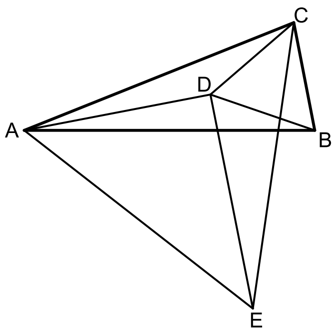
33) במשולש שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$
הנקודות S ו-R הן אמצעי השוקיים.
ידוע כי $BD = CE$.
הוכח כי: $SE = RD$.



34) נתון משולש ABC. הקטעים AD ו-AE ישרים
ונתון בנוסף כי: $BD = CE$, $DC = BE$.
הוכח: $AB = AC$.



35) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$.
על השוק AC ועל הבסיס BC בונים משולשים שווי צלעות ACE ו-BCD.
מחברים את הנקודה D עם הקדקודים A ו-E.
א. הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.
ב. ידוע גם כי: $DE \parallel BC$.
הוכח: $\sphericalangle ADE = 90^\circ$.



תשובות סופיות:

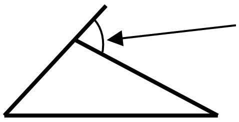
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) שאלת הוכחה.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) שאלת הוכחה.
22) שאלת הוכחה.
23) שאלת הוכחה.
24) שאלת הוכחה.
25) שאלת הוכחה.
26) שאלת הוכחה.
27) שאלת הוכחה.
28) שאלת הוכחה.
29) שאלת הוכחה.
30) שאלת הוכחה.
31) שאלת הוכחה.
32) שאלת הוכחה.
33) שאלת הוכחה.
34) שאלת הוכחה.
35) שאלת הוכחה.

זווית חיצונית במשולש:

סיכום כללי:

הגדרה:

זווית חיצונית למשולש היא זווית הכלואה בין צלע במשולש להמשך צלע הסמוכה לה.



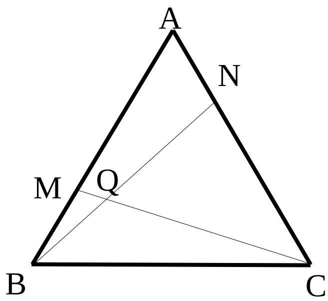
משפט:

זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

שאלות:

36) הוכח את המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

37) המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה צלעות.
נתון: $AN = BM$.
הוכח: $\sphericalangle NQC = 60^\circ$.



תשובות סופיות:

36) שאלת הוכחה.
37) שאלת הוכחה.

משולש ישר זווית:

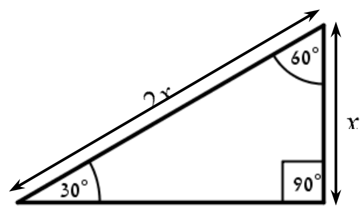
סיכום כללי:

משפטים במשולש ישר זווית:

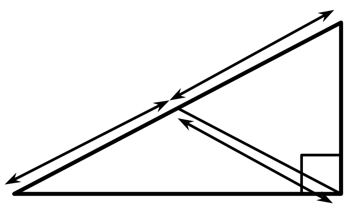
- סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא $90°$.
- במשולש שזוויותיו $90°$, $60°$, $30°$, הניצב שמול הזווית של ה-$30°$ שווה למחצית היתר.
(משפט הפוך ל-2) אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה היא בת $30°$.
- במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
(משפט הפוך ל-4) אם במשולש תיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש ישר זווית (כאשר הזווית ממנה יוצא התיכון היא הזווית הישרה).
- משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.
כלומר: $(\text{יתר})^2 = (\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2$.
- (משפט הפוך למשפט פיתגורס) אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית, אז המשולש ישר זווית.

איורים:

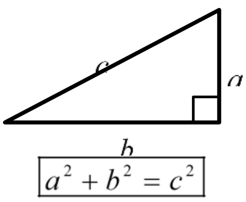
משולש $90°, 60°, 30°$



תיכון ליתר

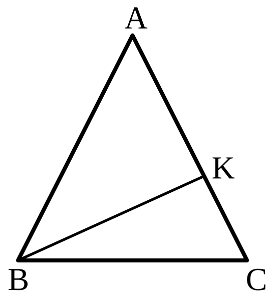


משפט פיתגורס

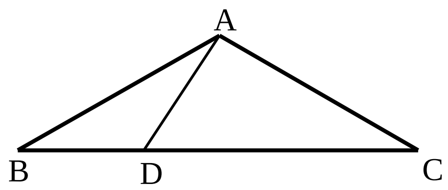


שאלות:

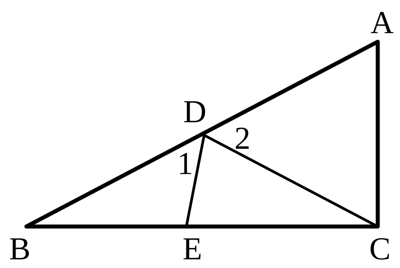
38) באיור שלפניך נתון משולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$.
זווית הבסיס: $\measuredangle C=75^\circ$
וכן: 16 ס"מ =AC. מעבירים גובה BK לשוק AC.
מצא את אורך הגובה BK.



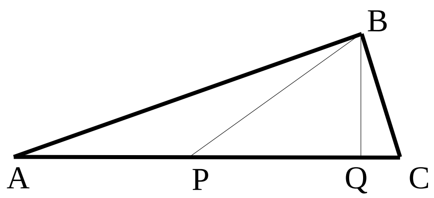
39) המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$.
נתון: $\measuredangle DAC=90^\circ$, $\measuredangle ABD=30^\circ$,
18 ס"מ = BC.
חשב את אורכו של הקטע BD.



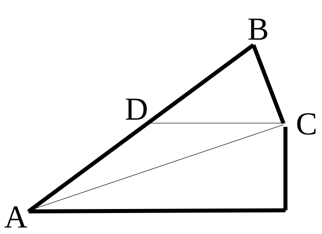
40) המשולש ΔABC הוא ישר זווית $(\measuredangle C=90^\circ)$.
מעבירים תיכון CD ליתר AB במשולש.
הנקודה E נמצאת על BC כך ש- $CD=CE$.
ידוע כי: $\measuredangle CED=80^\circ$.
מצא את הזוויות: $\measuredangle D_1$, $\measuredangle D_2$

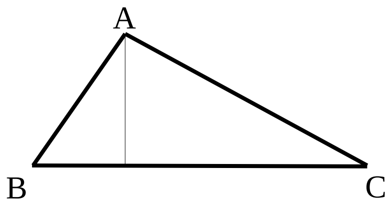


41) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\measuredangle ABC=90^\circ)$. BQ הוא הגובה ליתר AC ו-BP הוא התיכון ליתר AC.
נתון: $BQ=\frac{1}{2}BP$.
חשב את גודלה של הזווית C.



42) המשולש BCD שבציור הוא משולש שווה שוקיים $(BD=DC)$.
AC חוצה את הזווית $\measuredangle BAE$.
נתון: $DC \parallel AE$.
חשב את גודלה של הזווית $\measuredangle ACB$.





43) AD הוא גובה במשולש ABC.
נתון: AB = 15 ס"מ , AC = 20 ס"מ,
BC = 25 ס"מ.
א. מצא את אורכו של AD
ואת שטח המשולש ABC.
ב. האם המשולש ABC ישר זווית? נמק.

תשובות סופיות:

38) 8 ס"מ.
39) 6 ס"מ.
40) $\sphericalangle D_2 = 40°$, $\sphericalangle D_1 = 60°$
41) $75°$
42) $90°$
43) א. AD = 12 ס"מ , $S_{ABC} =$ 150 סמ"ר. ב. כן.

קטע אמצעים במשולש:

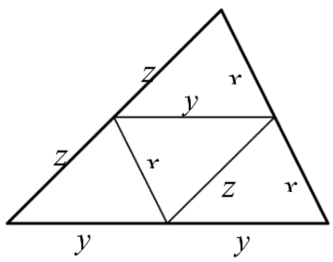
סיכום כללי:

הגדרה:

קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.

- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- (משפט הפוך 1): קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית חוצה את הצלע השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).
- (משפט הפוך 2): קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

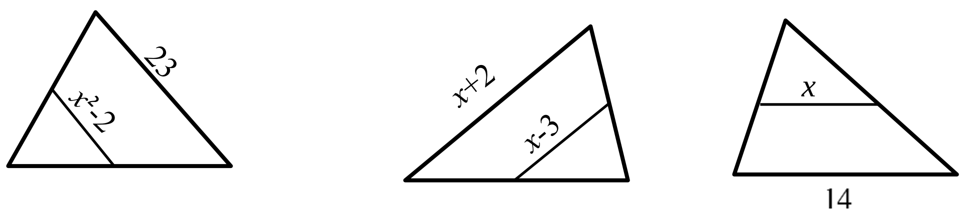
איור – קטע אמצעים במשולש:



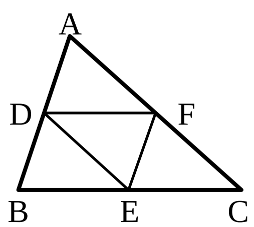
שאלות:

44) לפניך משולשים עם קטע אמצעים בתוכם.
מצא את x בכל אחד מהמקרים:

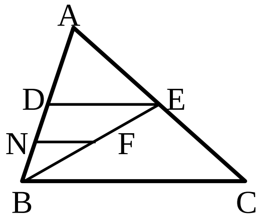
א. ב. ג.



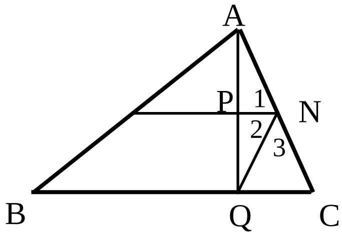
45) הנקודות D, E ו-F הם נקודות האמצע במשולש ΔABC.
נתון: DE= 9 ס"מ, EF= 12 ס"מ, DF = 10 ס"מ.
חשב את היקף המשולש ΔABC.



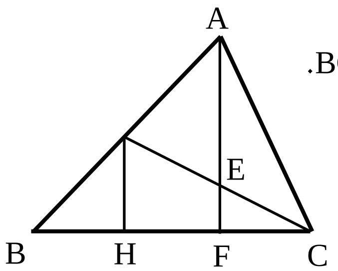
46) הקטע DE הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC .
הקטע FN הוא קטע אמצעים במשולש ΔBDE .
נתון: NF = 3 ס"מ. מצא את אורך הצלע BC.



47) הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC
AQ הוא גובה לצלע BC.
הוכח: $\sphericalangle N_1 = \sphericalangle N_2$.



48) AF הוא גובה לצלע BC ו- GC הוא תיכון
לצלע AB במשולש ΔABC . הקטע GH מאונך לצלע BC.
א. הוכח: HF = BH.
ב. נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את
התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס"מ.
חשב את אורך הקטע EF.



תשובות סופיות:

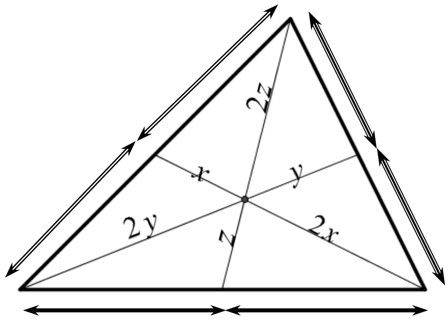
44) א. $x = 7$ ב. $x = 8$ ג. $x = \sqrt{13.5}$.
45) 62 ס"מ.
46) 12 ס"מ.
47) שאלת הוכחה.
48) א. שאלת הוכחה. ב. 3 ס"מ.

מפגש תיכונים במשולש:

סיכום כללי:

- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון ביחס של $2:1$ כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.
- אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של $2:1$ כך שהחלק הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.
- נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.

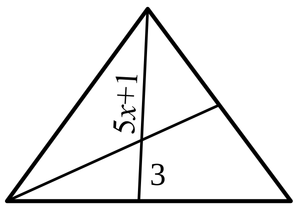
איור – מפגש תיכונים במשולש:



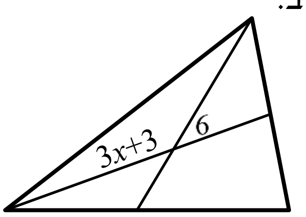
שאלות:

49) הקטעים שבמשולשים הם תיכונים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:

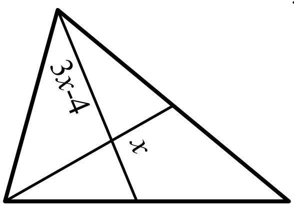
א.



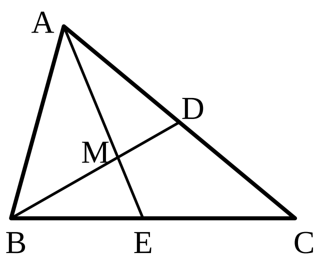
ב.



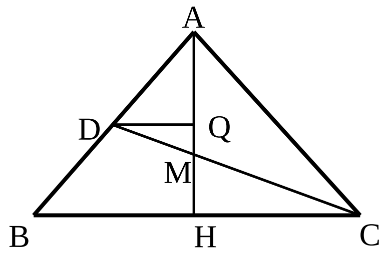
ג.



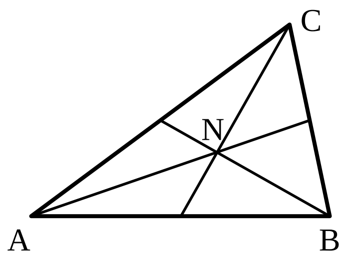
50) הקטעים AE ו-BD הם תיכונים במשולש ΔABC אשר נחתכים בנקודה M.
נתון: $AD = AM$ וכן: 30 ס״מ $= AC$.
חשב את AE.



51) המשולש ΔABC שבציור הוא משו"ש ($AB = AC$) שבו AH הוא הגובה לבסיס BC.
CD, התיכון לשוק AB,
יוצר זווית של $30°$ עם הבסיס BC.
נתון: $BC = 12\sqrt{3}$ ס"מ, $DQ \parallel BC$.
חשב את אורך הקטע MQ.



52) במשולש ΔABC נחתכים התיכונים בנקודה N.
נתון: $\sphericalangle CNB = 90°$.
הוכח: $BC = AN$.



תשובות סופיות:

49) א. $x = 1$ ב. $x = 3$ ג. $x = 4$
50) 22.5 ס"מ.
51) 3 ס"מ.
52) שאלת הוכחה.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 21 - גיאומטריה אוקלידית - מרובעים

תוכן העניינים

מרובע כללי:

סיכום כללי:

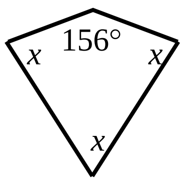
הגדרה: מרובע הוא מצולע בעל 4 צלעות.

משפט: סכום זוויות במרובע הוא 360°.

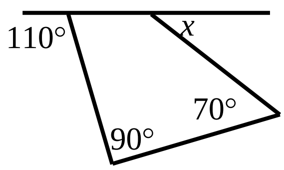
שאלות:

1) בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים.
חלק מהזוויות מסומנות ב- x.
מצא את x ואת הזוויות של כל מרובע.

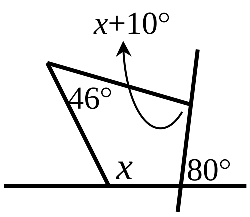
א.



ב.

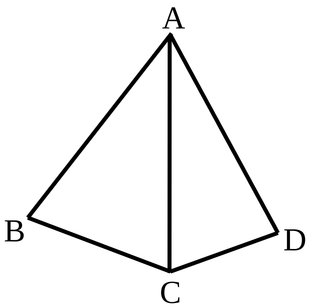


ג.

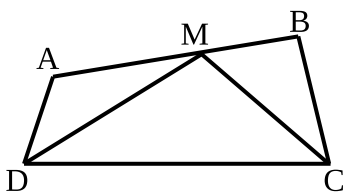


2) מצא את זוויות המרובע בכל אחד מהמקרים הבאים:
כל זווית במרובע (פרט לראשונה) גדולה ב- 10° מהזווית הקודמת לה.
זוויות המרובע מתייחסות זו לזו כמו: $1:2:3:4$.

3) המשולשים ABC ו-ACD שבציור הם משולשים שווי שוקיים ($AB = AC = AD$).
נתון: $\measuredangle BAD = 80^\circ$.
חשב את גודלה של הזווית BCD.



4) בסרטוט שלפניך נתון מרובע ABCD.
CM חוצה את זווית C ו-DM חוצה את זווית D.
ידוע כי: $CM = DM$, $\measuredangle A = 130^\circ$, $\measuredangle DMC = 110^\circ$.
מצא את שאר זוויות המרובע ABCD.



תשובות סופיות:

1) א. $x = 68°$. ב. $x = 50°$. ג. $x = 102°$

2) א. $75°, 85°, 95°, 105°$ ב. $36°, 72°, 108°, 144°$

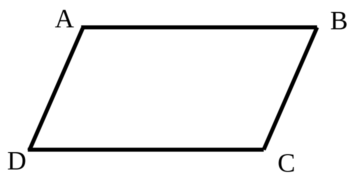
3) $140°$.

4) $\sphericalangle B = 90°, \sphericalangle C = \sphericalangle D = 70°$

המקבילית:

סיכום כללי:

הגדרה: מקבילית היא מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.



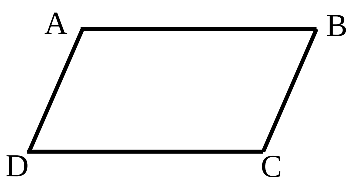
- במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
- במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות.
- במקבילית סכום כל שתי זוויות סמוכות הוא $180°$.
- במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
- היקף מקבילית = סכום הצלעות, שטח מקבילית = צלע · גובה לצלע.

כדי להוכיח כי מרובע הוא מקבילית נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית.
- מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.
- מרובע שבו זוג צלעות שוות ומקבילות הוא מקבילית.
- מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
- מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

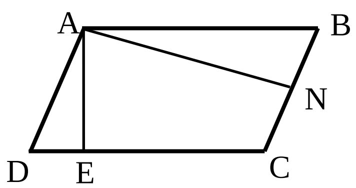
שאלות:

5) נתונה מקבילית ABCD.
בכל אחד מהסעיפים הבאים הזוויות מיוצגות ע"י תבניות מספר שונות.
מצא את זוויות המקבילית בכל מקרה.

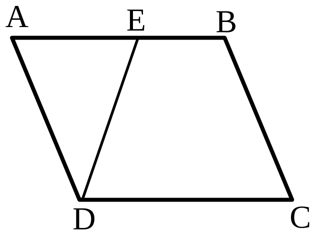


א. $\sphericalangle A = x$, $\sphericalangle B = x - 70°$.
ב. $\sphericalangle B = 3x - 130°$, $\sphericalangle D = x + 10°$.
ג. $\sphericalangle A = x + 20°$, $\sphericalangle C = 100° - x$.

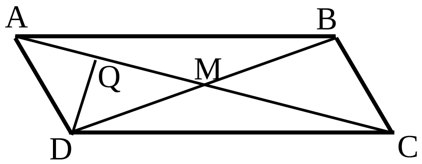
6) המרובע ABCD הוא מקבילית
ובו: $AN \perp BC$, $AE \perp CD$.
הוכח כי: $\sphericalangle BAN = \sphericalangle DAE$.



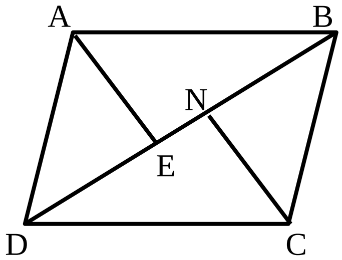
7) במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AB כך שמתקיים: $DE = BC$.
הוכח כי: $\measuredangle EAD = \measuredangle EDC$.



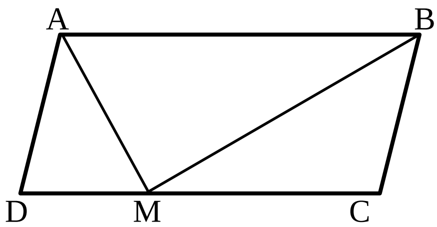
8) נתונה מקבילית ABCD שאלכסוניה נפגשים בנקודה M.
נתון: $AC =$ 20 ס"מ, $BC = \frac{1}{2}BD$ ו- $DQ \perp AC$.
חשב את אורך הקטע AQ.



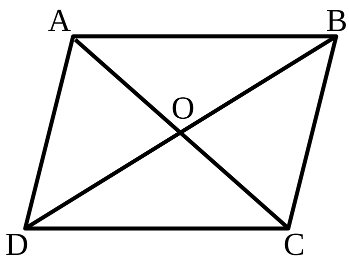
9) הוכח כי במקבילית הקדקודים הנגדיים נמצאים במרחקים שווים מאלכסון המקבילית שאינו עובר דרכם, כלומר הוכח: $AE = CN$.



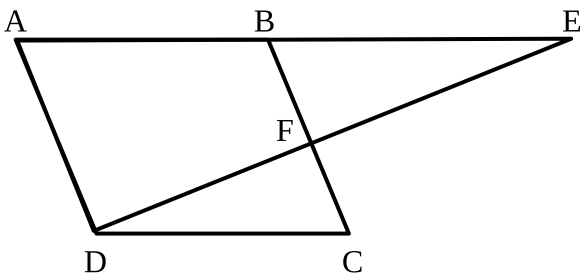
10) במקבילית ABCD הקטעים AM ו-BM הם חוצי הזוויות של A ו-B בהתאמה אשר נפגשים בנקודה M שעל הצלע DC.
א. הוכח כי: $AB = 2BC$.
ב. הוכח כי המשולש AMB הוא ישר זווית.



11) המרובע ABCD הוא מקבילית.
O – פגישת האלכסונים.
נתון: $AO = x+1$, $BO = x+8$, $DO = 3x-10$.
מצא את אורכי האלכסונים AC ו-BD.

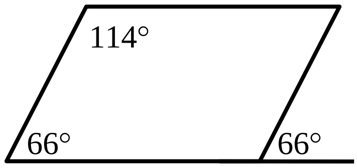


12) נתונה מקבילית ABCD ובה: $\measuredangle ADC = 120°$, $\measuredangle BEF = \frac{1}{2}\measuredangle EAD$.
הוכח כי: $BC \perp ED$.

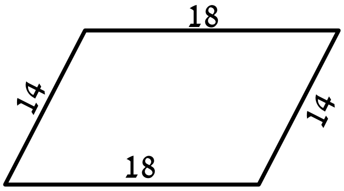


13) בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים.
קבע אלו מהם הם מקבילות וציין מדוע.

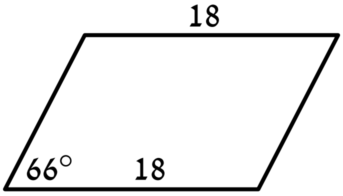
א.



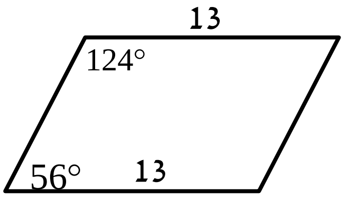
ב.



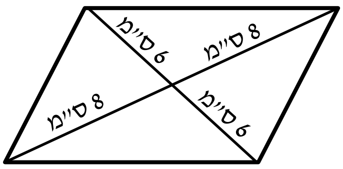
ג.



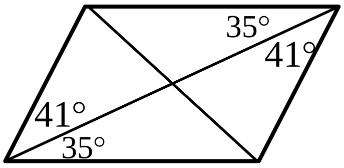
ד.



ה.

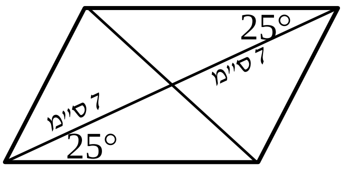


ו.

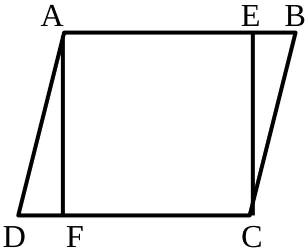


ז.

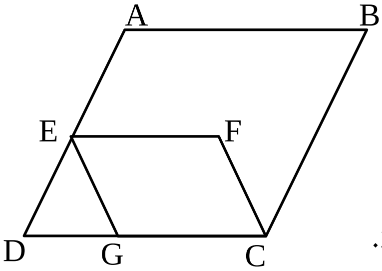
ח.



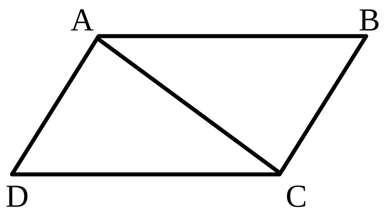
14) במקבילית ABCD הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AB ו-CD בהתאמה.
נתון: $\angle DAF = \angle BCE$.
הוכח כי המרובע AECF הוא מקבילית.



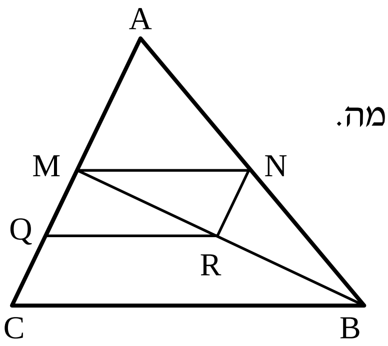
15) במקבילית ABCD הנקודות E ו-G נמצאות על הצלעות AD ו-DC בהתאמה כך שהמשולש DEG הוא שווה צלעות. הנקודה F נמצאת בתוך המקבילית כך שהקטע EF מקביל לצלע AB.
א. הוכח: $\angle DAB = \angle EGC$.
ב. נתון: $\angle GCF = \angle ABC$. הוכח כי EFCG מקבילית.



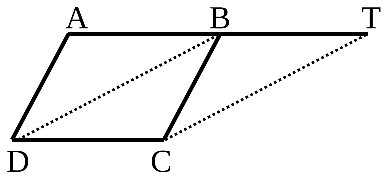
16) במרובע ABCD נתון כי הצלעות AB ו-DC שוות.
כמו כן: $AD \perp AC$, $BC \perp AC$.
הוכח כי המרובע ABCD הוא מקבילית.



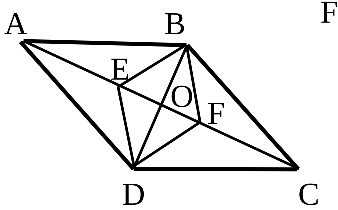
17) נתון משולש ABC ובו הקטע MN הוא קטע אמצעים.
הנקודות Q ו-R הן אמצעי הקטעים MC ו-BM בהתאמה.
א. הוכח כי המרובע MNRQ הוא מקבילית.
ב. ידוע כי הקטע AN שווה לקטע QR.
איזה סוג משולש הוא AMB? נמק.



18) את הצלע AB במקבילית ABCD האריכו כאורכה עד לנקודה T.
הוכח: BTCD מקבילית.
הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.



19) הנקודה O היא מפגש אלכסוני המקבילית ABCD. E ו-F הן נקודות על האלכסון AC.
נתון: $AE = FC$.
הוכח כי EBFD הוא מקבילית.



תשובות סופיות:

5) א. 55° , 125° ב. 80° , 100° ג. 60° , 120°.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) 5 ס"מ.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) $AC =$ 20 ס"מ, $BD =$ 34 ס"מ.
12) שאלת הוכחה.
13) מקבילות: א', ב', ד', ה', ו', ח'   אינן מקבילות: ג', ז'.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) שאלת הוכחה.
19) שאלת הוכחה.

המלבן:

סיכום כללי:

הגדרה: מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות.

(מסקנה: מלבן הוא סוג של מקבילית).

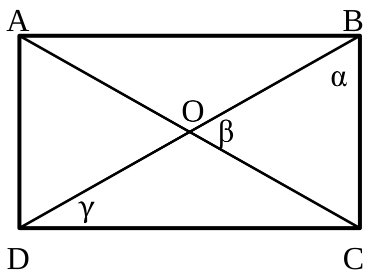
תכונות המלבן (בנוסף לתכונות המקבילית):

- ארבע זוויות המלבן שוות והן זוויות ישרות.
- האלכסונים במלבן שווים זה לזה
- היקף מלבן סכום הצלעות, שטח מלבן צלע גובה לצלע.

כדי להוכיח כי מרובע הוא מלבן נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מרובע שבו שלוש זוויות ישרות הוא מלבן.
- מקבילית שבה זווית ישרה היא מלבן.
- מקבילית שבה האלכסונים שווים היא מלבן.

שאלות:

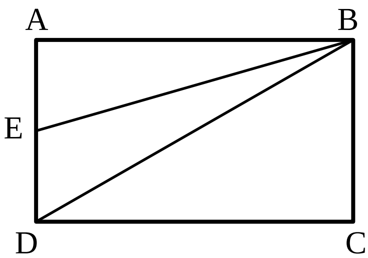


20) המרובע ABCD הוא מלבן.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
חשב את הזוויות β , α ו- γ במקרים הבאים:

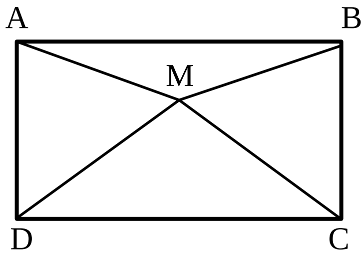
א. β קטנה ב- $15°$ מ- α.

ב. $\alpha = 2\gamma$.

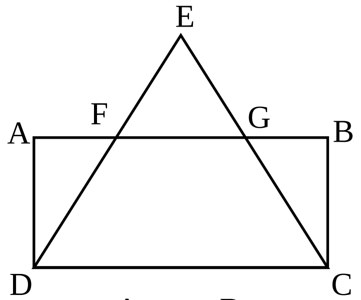
ג. $\gamma = 28°$.



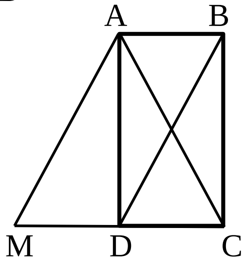
21) במלבן ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD.
נתון: $\sphericalangle AEB = 70°$, $BD = 2BC$.
חשב את גודלה של הזווית EBD.



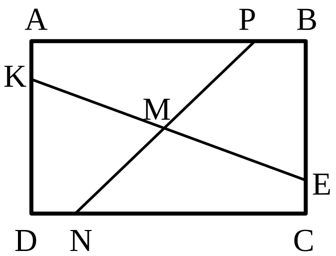
22) נתון מלבן ABCD שבו $DM = MC$.
הוכח: $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA$.



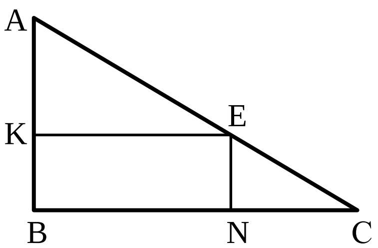
23) המרובע ABCD הוא מלבן.
המשכי הקטעים DF ו-CG נפגשים
בנקודה E.
נתון: $EF = EG$.
הוכח: $FD = GC$.



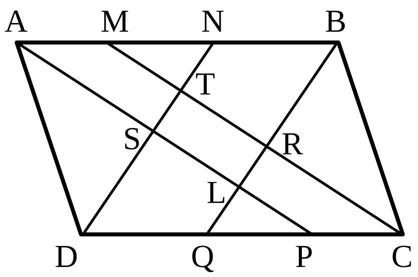
24) המרובע ABCD הוא מלבן.
המרובע ABDM הוא מקבילית.
הוכח כי המשולש ACM הוא שווה שוקיים.



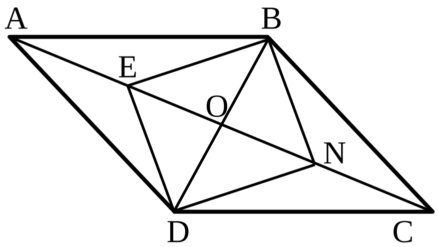
25) מרובע ABCD הוא מלבן.
נתון: $AP = CN$, $AK = CE$.
הוכח: $KM = EM$, $PM = NM$.



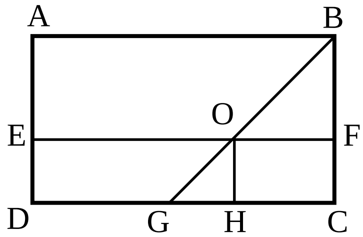
26) ΔABC הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90°)$.
המרובע KENB חסום במשולש זה.
נתון כי: $\sphericalangle AEK = \sphericalangle C$, $\sphericalangle NEC = \sphericalangle A$.
הוכח כי המרובע KENB הוא מלבן.



27) נתונה מקבילית ABCD
ובה AP, BQ, CM ו-DN
הם חוצי הזוויות $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ ו- $\sphericalangle D$
בהתאמה.
הוכח: TRLS מלבן.



28) מרובע ABCD הוא מקבילית.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD
אשר נחתכים בנקודה O.
נתון: $2BD = AC$.
E – אמצע AO. N – אמצע CO.
הוכח כי המרובע BNDE הוא מלבן.



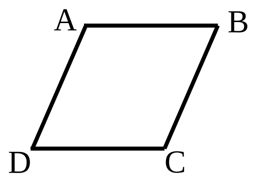
29) במלבן ABCD נתון:
$\sphericalangle ABO = \sphericalangle BOF$, $OH \perp DC$.
הוכח: EOHD הוא מלבן.

תשובות סופיות:

20) א. $\alpha = 55°$, $\beta = 70°$, $\gamma = 35°$ ב. $\alpha = \beta = 60°$, $\gamma = 30°$
ג. $\alpha = 62°$, $\beta = 56°$
21) $10°$.
22) שאלת הוכחה.
23) שאלת הוכחה.
24) שאלת הוכחה.
25) שאלת הוכחה.
26) שאלת הוכחה.
27) שאלת הוכחה.
28) שאלת הוכחה.
29) שאלת הוכחה.

המעוין:

סיכום כללי:



הגדרה: מעוין הוא מרובע שכל צלעותיו שוות.

(מסקנה: מעוין הוא סוג של מקבילית).

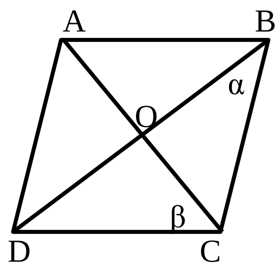
תכונות המעוין (בנוסף לתכונות המקבילית):

- במעוין כל הצלעות שוות.
- במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
- במעוין האלכסונים הם חוצי זוויות.
- היקף מעוין = צלע · 4, שטח מעוין = צלע · גובה לצלע = 2/(אלכסון · אלכסון).

כדי להוכיח כי מרובע הוא מעוין נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מרובע שבו כל הצלעות שוות הוא מעוין.
- מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.
- מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.
- מקבילית שבה אלכסון חוצה זווית היא מעוין (מספיק אחד).

שאלות:



30) המרובע ABCD הוא מעוין.

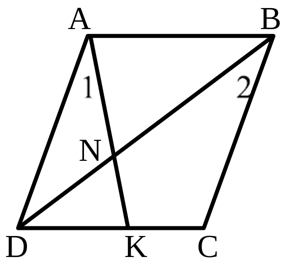
חשב בכל אחד מהמקרים הבאים את α ו- β.

א. $\sphericalangle A = 138^\circ$.

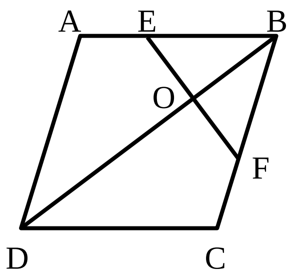
ב. $\beta = 3.5\alpha$.

ג. $\beta = \alpha + 20^\circ$.

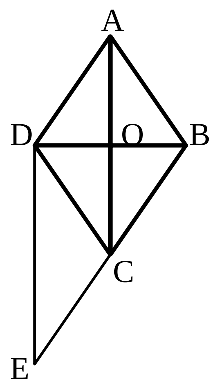
ד. $\sphericalangle B = \beta$.



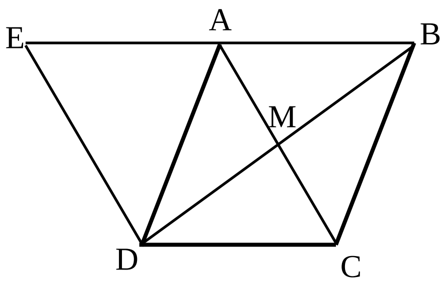
31) המרובע ABCD הוא מעוין.
מעבירים את האלכסון BD ואת הקטע AK
אשר נחתכים בנקודה N.
ידוע כי: $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle B_2$.
א. הוכח כי המשולש ADN הוא שווה שוקיים.
ב. הוכח כי: $\sphericalangle AND = \sphericalangle C$.



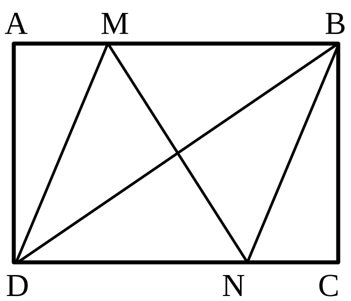
32) מעוין ABCD הנקודות E ו-F
נמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה.
נתון: $EF \perp BD$, $\sphericalangle DCB = 120°$.
הוכח כי משולש EBF הוא שווה צלעות.



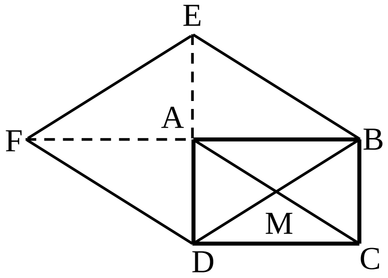
33) נתון מעוין ABCD.
הנקודה E נמצאת על המשך הצלע BC.
נתון: $\sphericalangle CDE = \sphericalangle BCA$.
הוכח כי המשולש BDE הוא ישר זווית.



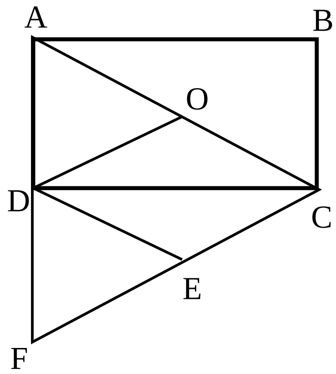
34) נתון מעוין ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M.
האריכו את הצלע AB עד לנקודה E
כך שמתקיים: $DE \perp BD$.
הוכח: $AD = AE$.



35) במלבן ABCD מעבירים את האלכסון BD.
הנקודות M ו-N נמצאות על הצלעות AB
ו-DC בהתאמה.
נתון: $AM = CN$ ו- $DM = DN$.
הוכח כי הקטע MN חוצה את
הזוויות BMD ו-BND.



36) נתון מלבן ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M.
האריכו את הצלע AB כאורכה עד
לנקודה F ואת הצלע AD כאורכה עד
לנקודה E כמתואר בשרטוט.
הוכח: המרובע EBDF הוא מעוין.



37) ABCD הוא מלבן שאלכסוניו נחתכים בנקודה O.
הנקודה F נמצאת על המשך הצלע AD
כך שמתקיים: $AD = DF$.
נתון: $FE = CE$.
הוכח כי DOCE הוא מעוין.

תשובות סופיות:

30) א. $\alpha = 21^\circ$, $\beta = 69^\circ$ ב. $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 70^\circ$
ג. $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 55^\circ$ ד. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

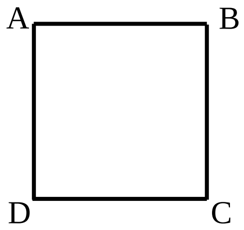
31) שאלת הוכחה.
32) שאלת הוכחה.
33) שאלת הוכחה.
34) שאלת הוכחה.
35) שאלת הוכחה.
36) שאלת הוכחה.
37) שאלת הוכחה.

הריבוע:

סיכום כללי:

הגדרה: ריבוע הוא מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות.

(מסקנה: ריבוע הוא סוג של מקבילית, סוג של מלבן וסוג של מעוין).
מכאן, שבנוסף לתכונות שבהגדרת הריבוע מתקיימים
כי אלכסוני הריבוע חוצים זה את זה, שווים זה לזה,
מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע.
היקף ריבוע = צלע · 4, שטח ריבוע = ^{2}(צלע) = $2/^2$(אלכסון)

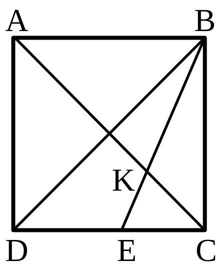


כדי להוכיח כי מרובע הוא ריבוע נשתמש באחת הדרכים הבאות:

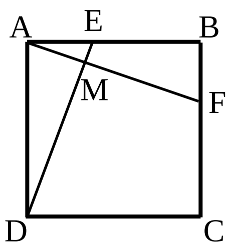
- מלבן שבו האלכסונים מאונכים הוא ריבוע.
- מלבן שבו אלכסון חוצה זווית הוא ריבוע.
- מלבן שבו שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.
- מעוין שבו האלכסונים שווים הוא ריבוע.
- מעוין שבו זווית ישרה הוא ריבוע.

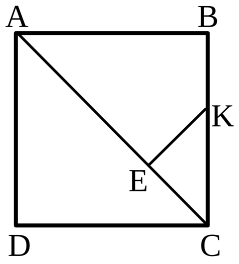
שאלות:

38) המרובע ABCD הוא ריבוע.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
BE חוצה זווית DBC וחותך את AC בנקודה K.
הוכח: $CE = CK$.

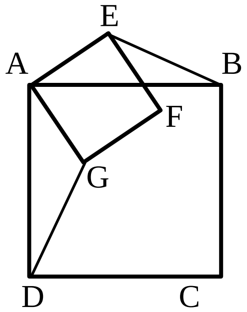


39) בריבוע ABCD מעבירים את הקטעים AF ו-DE.
נתון כי $AE = BF$.
הוכח: $DE \perp AF$.

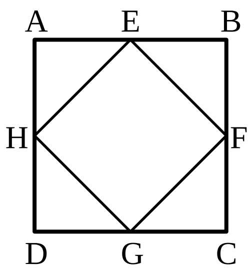




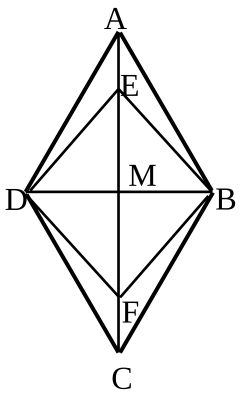
40) המרובע ABCD הוא ריבוע.
מעבירים את האלכסון AC.
מהנקודה E שעל האלכסון מעבירים
את הקטע KE אשר מאונך לאלכסון.
נתון: $AE = AB$.
הוכח כי: $CE = KE = BK$.



41) המרובעים ABCD ו-AEFG הם ריבועים.
הוכח: $BE = DG$.



42) הנקודות E, F, G, H הן אמצעי צלעות הריבוע ABCD.
הוכח כי EFGH הוא ריבוע.



43) נתון מעוין ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M.
נתון: $AE = FC$, $MB = \frac{1}{2}AB$, $\sphericalangle EBA = 15°$.
הוכח: המרובע EBFD הוא ריבוע.

תשובות סופיות:

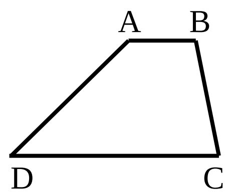
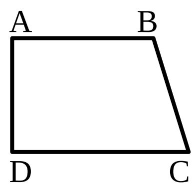
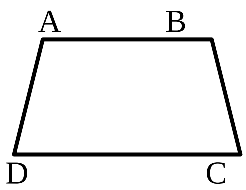
38) שאלת הוכחה.
39) שאלת הוכחה.
40) שאלת הוכחה.
41) שאלת הוכחה.
42) שאלת הוכחה.
43) שאלת הוכחה.

הטרפז:

סיכום כללי:

הגדרה: טרפז הוא מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות.

היקף טרפז = סכום הצלעות, שטח טרפז = 2/(גובה · סכום הבסיסים).

סוג הטרפז	טרפז כללי	טרפז ישר זווית	טרפז שווה שוקיים
איור מתאים			

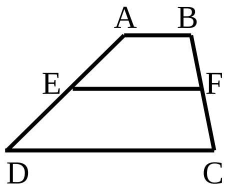
משפטים הנוגעים לטרפז שווה שוקיים:

- בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
- (משפט הפוך) טרפז שבו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.
- בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
- (משפט הפוך) טרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

קטע אמצעים בטרפז:

הגדרה: קטע אמצעים בטרפז הוא קטע המחבר את אמצעי השוקיים בטרפז.

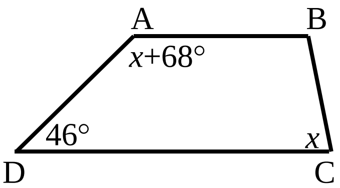
- קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
- (משפט הפוך) קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים בטרפז).



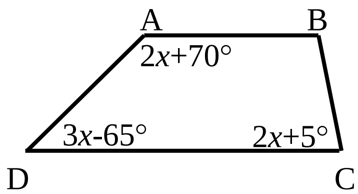
שאלות:

44) בסרטוטים שלפניך נתונים טרפזים כלליים $(AB \parallel CD)$.
מצא את x ואת זוויות הטרפז בכל מקרה.

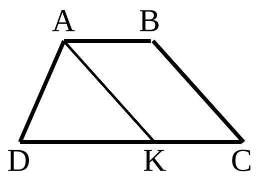
א.



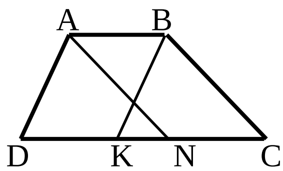
ב.



45) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
מעבירים את הקטע AK.
נתון: $AK \parallel BC$, $AK = DK$,
6 ס"מ = AB, 14 ס"מ = DC.
חשב את אורך השוק BC.



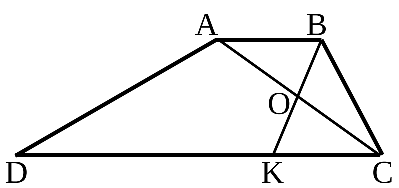
46) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
נתון כי: $AD \parallel BK$, $AN \parallel BC$.
הוכח כי: $DK = CN$.



47) המרובע ABCD הוא טרפז. $(AB \parallel CD)$.
מעבירים את האלכסון AC ואת
הקטע BK אשר חוצים זה את זה בנקודה O.
ידוע כי: $\measuredangle D = 30°$, $\measuredangle C = 60°$.

א. חשב את אורך DC, הבסיס הגדול,
אם ידוע כי: 7 ס"מ = AB, 9 ס"מ = BC.

ב. הוכח כי אם $AB = BC$ אז: $DC = 3AB$.

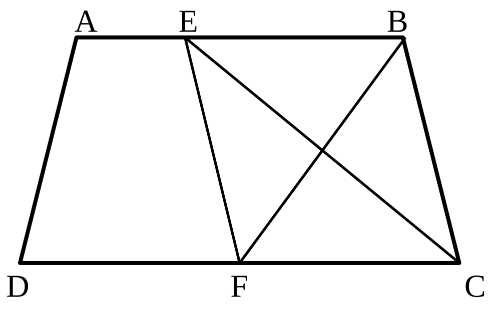


48) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$ ובו
הקטעים CE ו-BF חוצים את זוויות
הקדקודים C ו- B בהתאמה. הוכח:

א. $BF \perp CE$.

ב. המשולש EBC הוא שווה שוקיים.

ג. המרובע EBCF הוא מעוין.

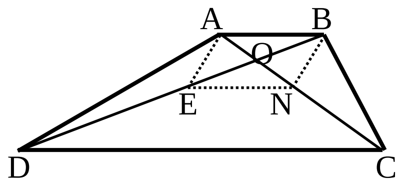


49) מרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.

O - היא נקודת פגישת האלכסונים.

נתון: $AO = NO$, $BO = EO$.

הוכח כי המרובע ENCD הוא טרפז.

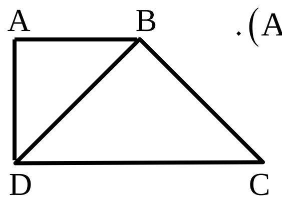


50) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB \parallel CD, \sphericalangle D = 90°)$.

האלכסון BD חוצה את זווית D

ונתון בנוסף כי: $BD = BC$ וכי: AD = 15 ס"מ.

חשב את אורכי בסיסי הטרפז.

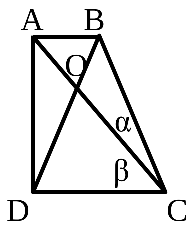


51) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית

$(AB \parallel CD, AD \perp DC)$.

נתון כי: $BD = BC$, $\beta = 2\alpha$ ו- $\sphericalangle DOC = 80°$.

חשב את זוויות הטרפז.

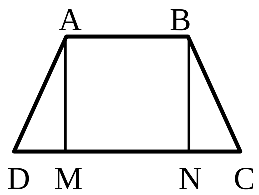


52) מרובע ABCD הוא טרפז שווה

שוקיים $(AB \parallel CD, AD = BC)$.

נתון כי: $BN \perp DC$, $AM \perp DC$.

הוכח כי: $DM = CN$.

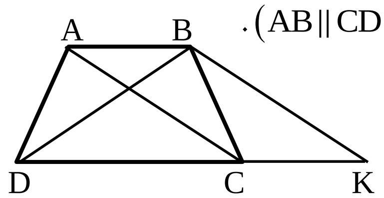


53) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB \parallel CD, AD = BC)$.

דרך הנקודה B מעבירים מקביל ל-AC הפוגש

את המשך הבסיס DC בנקודה K.

הוכח כי משולש BDK הוא שווה שוקיים.



54) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB \parallel CD, AD = BC)$.

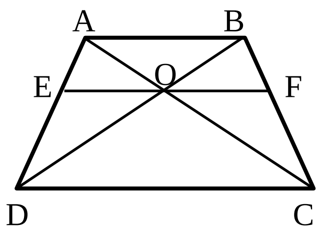
O היא פגישת האלכסונים.

נתון כי: $EF \parallel DC$ כאשר EF עובר דרך O.

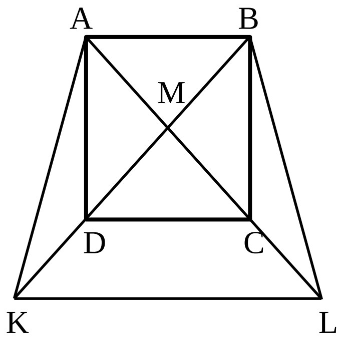
הוכח:

א. $\sphericalangle BOF = \sphericalangle COF$.

ב. $EO = FO$.

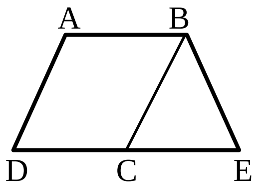


55) נתון ריבוע ABCD.
הנקודה M היא מפגש האלכסונים AC ו-BD.
ממשיכים את האלכסונים ויוצרים את הטרפז
השווה שוקיים ABLK.
ידוע גם כי DC הוא קטע אמצעים משולש KML.

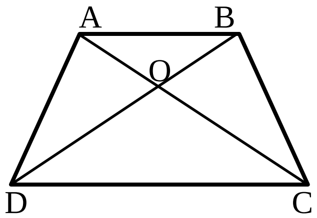


א. קבע אלו מהטענות הבאות ניתן להוכיח:
i. המשולש KML הוא ישר זווית ושווה שוקיים.
ii. הקטעים BK ו-BL מאונכים זה לזה.
iii. המרובע DCLK הוא טרפז שווה שוקיים.
iv. הקטעים DK ו-AD שווים זה לזה.
ב. הוכח כי: $3DK = AL$.
ג. נתון כי $8\sqrt{2}$ ס"מ = AD.
חשב את היקף הטרפז ABLK.

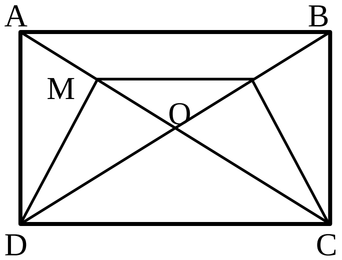
56) המרובע ABCD הוא מקבילית.
הקטע DE הוא קו ישר ונתון כי: $\sphericalangle A + \sphericalangle E = 180°$.
הוכח כי המרובע ABED הוא טרפז שווה שוקיים.



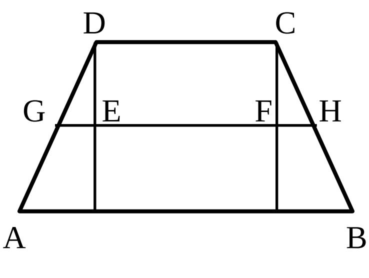
57) במרובע ABCD הנקודה O היא פגישת האלכסונים.
נתון כי: $AO = BO$, $CO = DO$.
הוכח כי מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.



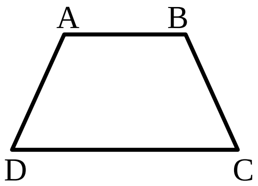
58) נתון מלבן ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה O.
נתון: $MN \parallel DC$.
הוכח: DMNC טרפז שווה שוקיים.



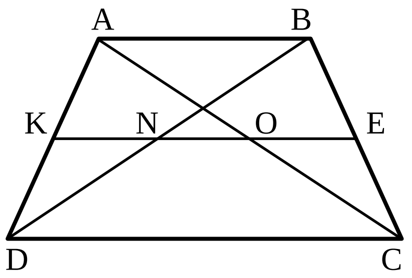
59) בטרפז ABCD $(AB \parallel CD)$ הורדו מקצות
הבסיס הקטן אנכים לבסיס הגדול.
קטע האמצעים GH חותך גבהים אלה בנקודות E ו-F.
נתון: 3 ס"מ = GE, 12 ס"מ = EF, 2 ס"מ = FH.
חשב את בסיסי הטרפז.



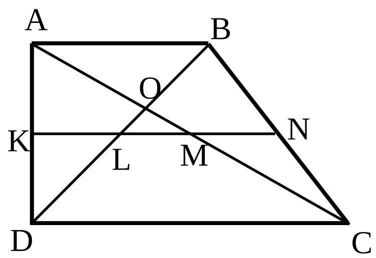
60) סכום כל אורכי הצלעות של טרפז שווה שוקיים הוא 54 ס"מ.
אורך קטע האמצעים הוא 13 ס"מ.
מצא את אורך שוק הטרפז.



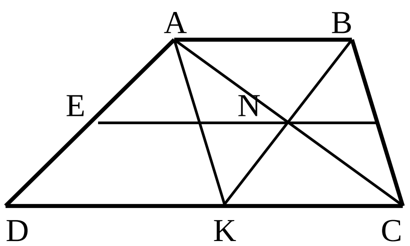
61) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
KE הוא קטע אמצעים בטרפז, החותך את אלכסוני הטרפז בנקודות N ו-O.
א. הוכח כי: $KN = EO$.
ב. בטרפז הנ"ל נתון:
14 ס"מ = AB, 26 ס"מ = DC.
חשב את אורכי הקטעים KN, NO ו-EO.
ג. בטרפז הנ"ל נתון: 13 ס"מ = KE,
3 ס"מ = NO. חשב את בסיסי הטרפז.



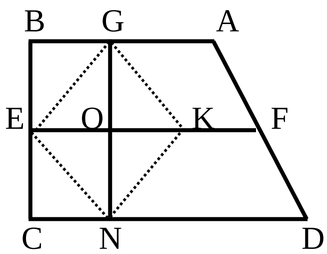
62) KN הוא קטע אמצעים בטרפז ישר זווית ABCDשאלכסוניו $(AB \parallel CD\ ,\ AD \perp AB)$
נפגשים בנקודה O.
נתון: 12 ס"מ = AD, $DC = 2AB$ $\sphericalangle ADB = 45°$.
חשב את אורך הקטע LM
והוכח כי: $KL = LM = MN$.



63) מרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
EF הוא קטע אמצעים. AC ו-BK נפגשים בנקודה N הנמצאת על EF.
א. הוכח כי מרובע ABCK הוא מקבילית.
ב. נתון: 13 ס"מ = EF, 9 ס"מ = EN.
חשב את בסיסי הטרפז AB ו-DC
ואת הקטע DK.



64) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB \parallel CD\ ,\ \sphericalangle B = 90°)$.
EF קטע אמצעים בטרפז.
G ו-N הן נקודות על AB ו-CD
בהתאמה המקיימות: $GN \perp DC$.
בנוסף נתון: $KO = EO\ ,\ \sphericalangle D < 90°$.
הוכח כי מרובע GENK הוא מעוין.

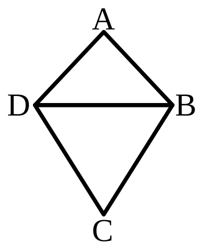


תשובות סופיות:

44) א. $x=66°;\quad 46°,134°,66°,114°$ ב. $x=35°\ ;\quad 40°,140°,75°,105°$
45) 8 ס"מ.
46) שאלת הוכחה.
47) א. 25 ס"מ. ב. שאלת הוכחה.
48) שאלת הוכחה.
49) שאלת הוכחה.
50) א. 15 ס"מ, 30 ס"מ. ב. שאלת הוכחה.
51) $90°\ ,\ 90°\ ,\ 60°\ ,\ 120°$
52) שאלת הוכחה.
53) שאלת הוכחה.
54) שאלת הוכחה.
55) א. ניתן להוכיח את טענות: iii ,i. ב. שאלת הוכחה.
ג. 69.71 ס"מ $\approx P_{ABLK}=16\sqrt{5}+24\sqrt{2}$.
56) שאלת הוכחה.
57) שאלת הוכחה.
58) שאלת הוכחה.
59) 22 ס"מ ו-12 ס"מ.
60) 14 ס"מ.
61) א. שאלת הוכחה. ב. $KN=EO=$ 7 ס"מ, $NO=$ 6 ס"מ
ג. $AB=$ 10 ס"מ, $DC=$ 16 ס"מ.
62) 6 ס"מ.
63) $AB=$ 8 ס"מ, $DC=$ 18 ס"מ, $DK=$ 10 ס"מ.
64) שאלת הוכחה.

הדלתון:

סיכום כללי:

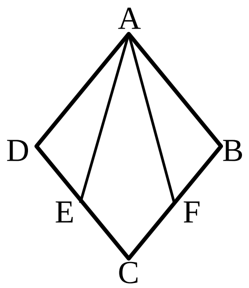


הגדרה:
דלתון הוא מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות.
(מסקנה: דלתון הוא מרובע שניתן לפרק לשני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף).

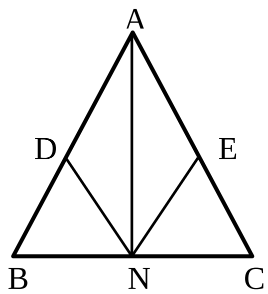
תכונות האלכסונים בדלתון:

- האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.
- האלכסון הראשי אינו בהכרח גדול מהאלכסון המשני.
- היקף דלתון = סכום הצלעות, שטח דלתון = (אלכסון · אלכסון)/2.

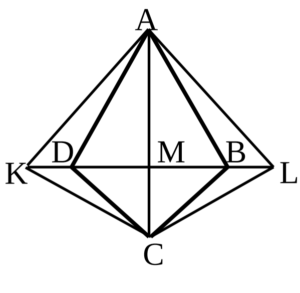
שאלות:



65) נתון מעוין ABCD. הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות DC ב-BC בהתאמה כך שהמרובע AFCE הוא דלתון.
הוכח: $\sphericalangle DAE = \sphericalangle FAB$.



66) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$ מקצים נקודות D ו-E על השוקיים.
נתון כי: $AD = AE$.
הנקודה N היא אמצע BC.
הוכח כי ADNE הוא דלתון.



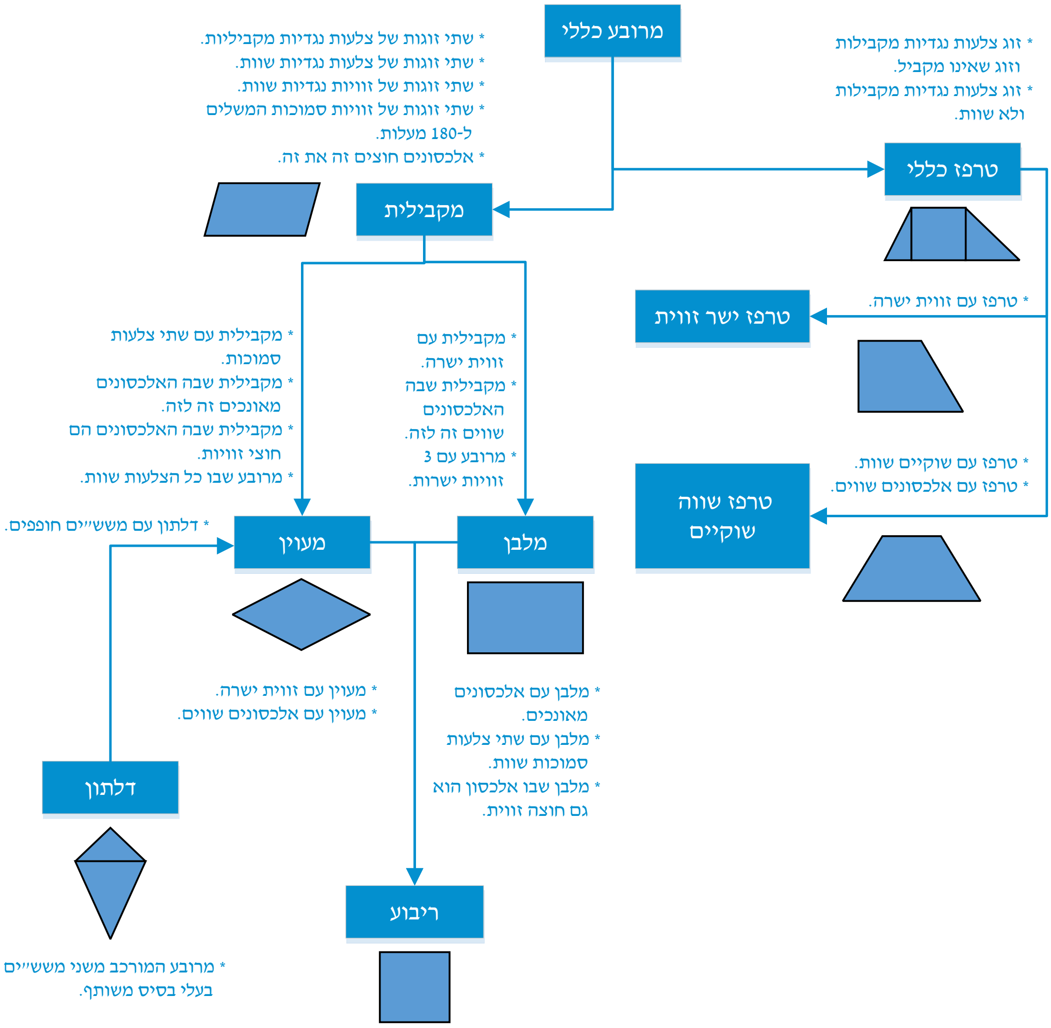
67) בדלתון ABCD האריכו את האלכסון המשני משני צדיו כמתואר בשרטוט כך שמתקיים: $KD = BL$.
הוכח: המרובע ALCK הוא דלתון.

תשובות סופיות:

65) שאלת הוכחה.
66) שאלת הוכחה.
67) שאלת הוכחה.

סיכום משפחת המרובעים:

להלן דיאגרמה מסכמת של כל משפחת המרובעים ותכונותיהם :



מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 22 - גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים

תוכן העניינים

שטחים והיקפים של משולשים:

סיכום כללי:

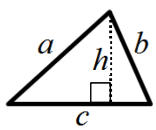
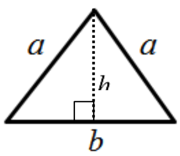
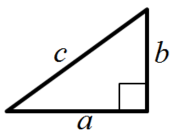
שטח – הגדרה:

גודל של תחום מישורי בהשוואה ליחידת מידה קבועה.
שטח נמדד ביחידות מידה של אורך בריבוע כגון :
מטר ריבועי (m^2), ס״מ ריבועי (סמ״ר cm^2).

היקף – הגדרה:

היקף מצולע הוא סכום כל צלעותיו.

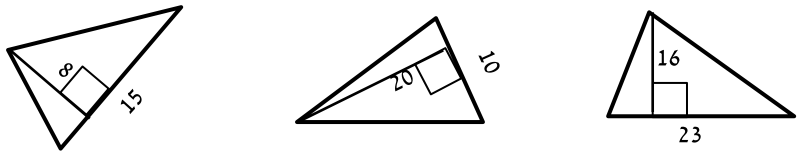
משולשים:

סוג	משולש כללי	משולש שווה שוקיים	משולש ישר זווית
איור			
שטח	$S=\frac{c\cdot h}{2}$	$S=\frac{b\cdot h}{2}$	$S=\frac{a\cdot b}{2}$
היקף	$P=a+b+c$	$P=2a+b$	$P=a+b+c$

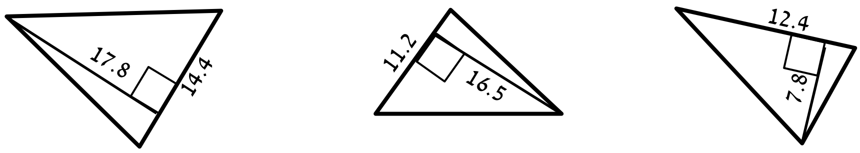
שאלות:

1) מצא את שטחם של המשולשים הבאים (כל המידות נתונות בס"מ):

ג. ב. א.

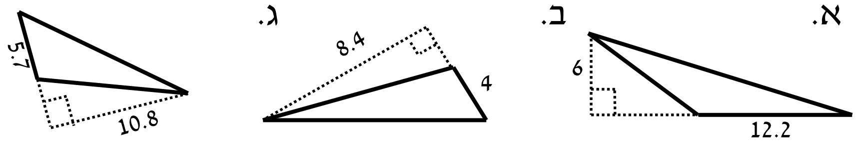


ו. ה. ד.



2) מצא את שטחם של המשולשים קהי-הזווית הבאים (כל המידות בס"מ):

ג. ב. א.

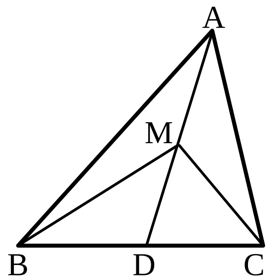


3) הוכח כי אם במשולש ABC, הקטע AD המחבר את הקדקוד A עם הצלע BC יוצר שני משולשים השווים בשטחם אז הוא תיכון ל-BC.

4) במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC.
M היא אמצע AD. הוכח כי:

א. הקטעים AD, MC ו-BM מחלקים את המשולש ABC ל-4 משולשים שווי שטח.

ב. $S_{MBC}=\frac{1}{2}S_{ABC}$.



תשובות סופיות:

1) א. 184 סמ"ר ב. 100 סמ"ר ג. 60 סמ"ר ד. 48.36 סמ"ר
ה. 92.4 סמ"ר ו. 128.16 סמ"ר.

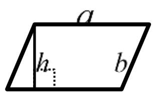
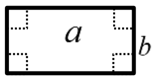
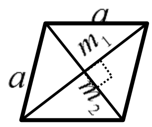
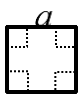
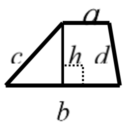
2) א. 36.6 סמ"ר ב. 16.8 סמ"ר ג. 30.78 סמ"ר.

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה.

שטחים והיקפים של מרובעים:

סיכום כללי:

סוג	מקבילית	מלבן	מעוין	ריבוע	טרפז
איור					
שטח	$S=a\cdot h$	$S=a\cdot b$	$S=a\cdot h$ $S=\frac{m_1\cdot m_2}{2}$	$S=a^2$	$S=\frac{(a+b)h}{2}$
היקף	$P=2(a+b)$	$P=2(a+b)$	$P=4a$	$P=4a$	$P=a+b+c+d$

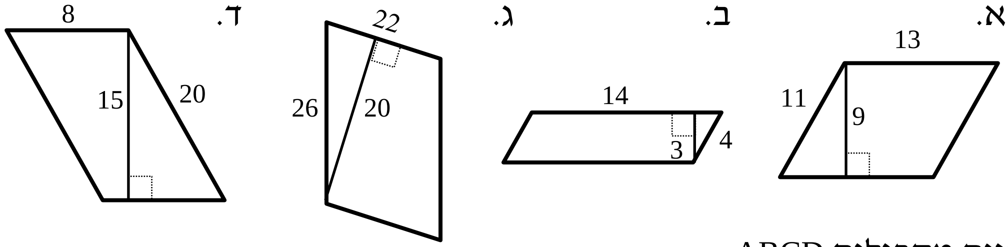
הערות כלליות:

- שטח מקבילית ניתן לחישוב ע״י מכפלת כל צלע בגובה המתאים לה. כך ניתן לקבל את הנוסחה: $S=a\cdot h_a=b\cdot h_b$ כאשר h_a ו- h_b הם הגבהים לצלעות a ו- b בהתאמה.
- ניתן לחשב שטח מעוין ע״י מחצית ממכפלת אלכסונים או ע״י מכפלת צלע בגובה שלה (שכן היא סוג של מקבילית).
- עבור טרפז ישר זווית, שבו $h=c$ נקבל: $S=\frac{(a+b)c}{2}$.
- ניתן לחשב שטח של טרפז ע״י הורדת גבהים, חלוקתו למלבן ושני משולשים, חישוב שטחם בנפרד ואיחודם.

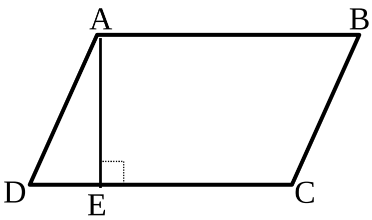
שאלות עם מקבילית:

שאלות:

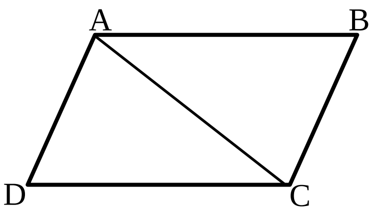
5) חשב את השטחים וההיקפים של המקביליות הבאות (כל המידות בס"מ):



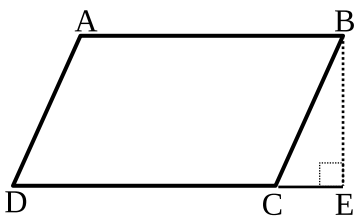
6) נתונה מקבילית ABCD.
מעבירים גובה AE לצלע CD שאורכו הוא 6 ס"מ.
ידוע כי שטח המקבילית הוא 60 סמ"ר.
   א. מצא את אורך הצלע AB.
   ב. ידוע כי היקף המקבילית הוא 36 ס"מ.
   מצא את אורך הצלע BC.



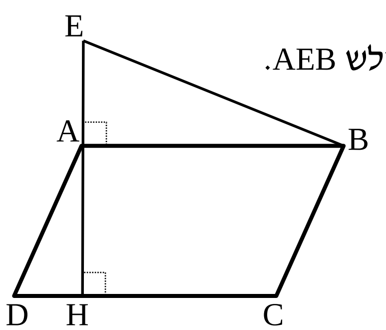
7) נתונה מקבילית ABCD.
מעבירים את האלכסון AC שאורכו 25 ס"מ.
ידוע כי היקף המשולש ACD הוא 66 ס"מ.
חשב את היקף המקבילית.



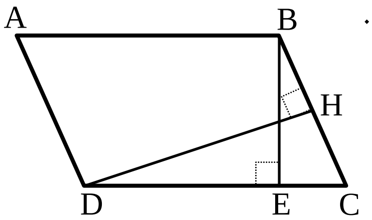
8) נתונה מקבילית ABCD.
מורידים גובה מהקדקוד B לצלע CD כך שנוצר המשולש BCE.
שטח המשולש BCE הוא 24 סמ"ר
ושטח המקבילית ABCD הוא 112 סמ"ר.
נתון: 6 ס"מ = CE.
   א. מצא את אורך הגובה BE.
   ב. מצא את אורך הצלע AB של המקבילית.



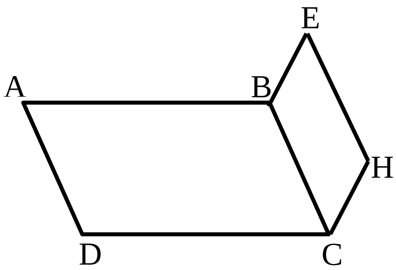
9) נתונה מקבילית ABCD.
מעלים אנך מהקדקוד A עד לנקודה E ויוצרים משולש AEB.
מורידים גובה AH לצלע CD שאורכו 12 ס"מ.
נתון: 8 ס"מ = AE, 13 ס"מ = AD.
שטח כל הצורה AEBCD הוא 256 סמ"ר.
   א. מצא את אורך הצלע AB.
   ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.



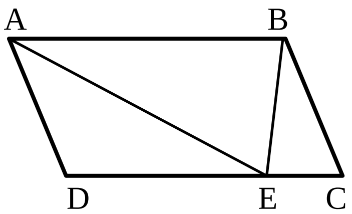
10) במקבילית ABCD מעבירים את הגבהים BE ו-DH לצלעות CD ו-BC בהתאמה.
נתון: 12 ס"מ = BE, ‏14.4 ס"מ = BC, ‏15 ס"מ = DH.
א. חשב את שטח המקבילית ABCD.
ב. חשב את אורך הצלע AB.
ג. חשב את היקף המקבילית.



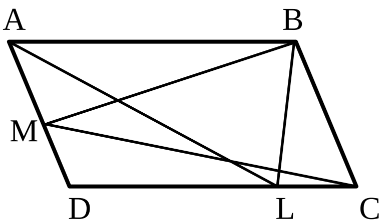
11) נתונה המקבילית ABCD.
על הצלע BC בונים מקבילית נוספת BCHE שהיקפה הוא 44 ס"מ.
ידוע כי היקף הצורה ABEHCD הוא 94 ס"מ.
נתון: 15 ס"מ = BC.
א. חשב את אורך הצלע AB.
ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.



12) המרובע ABCD הוא מקבילית.
הנקודה E נמצאת על DC.
הוכח כי: $S_{AEB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.



13) המרובע ABCD הוא מקבילית.
הנקודות M ו-L נמצאות על הצלעות AD ו-DC בהתאמה.
הוכח כי: $S_{BMC} = S_{ALB}$.



תשובות סופיות:

5) א. $P =$ 48 ס"מ , $S =$ 117 סמ"ר ב. $P =$ 36 ס"מ , $S =$ 42 סמ"ר
ג. $P =$ 96 ס"מ , $S =$ 440 סמ"ר ד. $P =$ 56 ס"מ , $S =$ 120 סמ"ר.

6) א. AB = 10 ס"מ ב. BC = 8 ס"מ.

7) $P =$ 82 ס"מ.

8) א. BE = 8 ס"מ ב. AB = 14 ס"מ.

9) א. AB = 16 ס"מ ב. $P =$ 58 ס"מ.

10) א. $S =$ 216 סמ"ר ב. AB = 18 ס"מ ג. $P =$ 64.8 ס"מ.

11) א. AB = 25 ס"מ ב. $P =$ 80 ס"מ.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

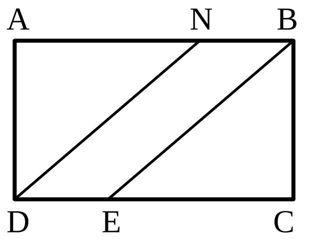
שאלות עם מלבן:

שאלות:

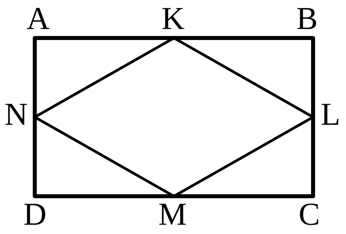
14) במלבן ABCD אורכי הצלעות הם: 12 ס"מ = AB, 8 ס"מ = BC.
מצאו את ההיקף של המלבן.

15) במלבן ABCD אורך הצלע AB הוא 10 ס"מ. היקף המלבן הוא 32 ס"מ.
מצאו את שטח המלבן.

16) במלבן ABCD נתון: 11 ס"מ = DC, 9 ס"מ = AD.
מצאו את האורך של האלכסון AC.



17) המרובע ABCD הוא מלבן.
הישרים DN ו-BE מקבילים.
נתון: 32 ס"מ = AB, 30 ס"מ = DN ו-8 ס"מ = BN.
הוכח כי מרובע NBED הוא מקבילית וחשב את שטחה.



18) הנקודות K, L, M ו-N הן אמצעי הצלעות AB, BC, CD ו-AD בהתאמה במלבן ABCD.
נתון כי היקף המלבן הוא 120 ס"מ וכי שטחו הוא 836 סמ"ר.
חשב את שטחו של המרובע KLMN.

תשובות סופיות:

14) 40 ס"מ.

15) 60 סמ"ר.

16) 14.21 ס"מ $\approx \sqrt{202}$.

17) 144 סמ"ר.

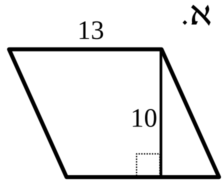
18) 418 סמ"ר.

שאלות עם מעוין:

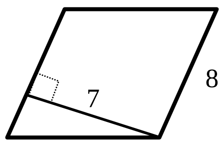
שאלות:

19) חשב את השטחים וההיקפים של המעוינים הבאים (כל המידות בס״מ):

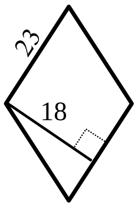
א.



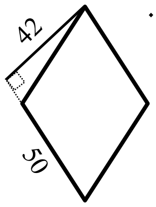
ב.



ג.



ד.



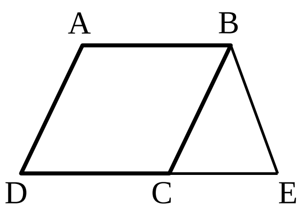
20) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O.
נתון: 3 ס״מ = AO, 4 ס״מ = BO. מצא את אורך צלע המעוין.

21) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O.
נתון: 12 ס״מ = AB, 8 ס״מ = BO. מצא את AO.

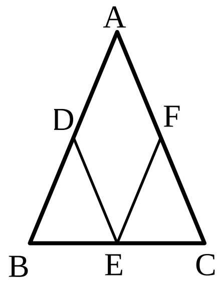
22) במעוין ABCD האלכסון AC שווה באורכו לצלע המעוין.
נתון: 20 ס״מ = AB.
א. חשב את אורך האלכסון BD.
ב. חשב את שטח המעוין.

23) נתון מעוין ABCD. אורך האלכסון הקצר הוא 7 ס״מ ושטח המעוין הוא 35 סמ״ר. חשב את היקף המעוין.

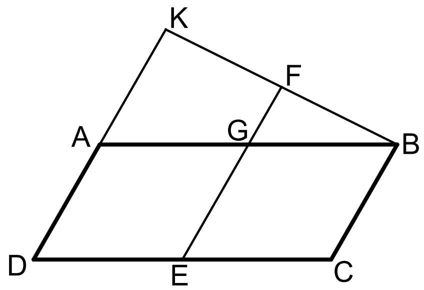
24) נתון מעוין ABCD בעל אורך צלע של 8 ס״מ.
מעבירים את הקטע BE השווה באורכו לצלע המעוין
כך שנוצר המשולש BCE. ידוע כי: 6 ס״מ = CE.
א. איזה סוג משולש הוא המשולש BCE? נמק.
ב. חשב את היקף הצורה ABECD.



25) נתון משולש שווה שוקיים ABC, (AB =AC).
מסמנים את אמצעי צלעות המשולש ב-D, E ו-F
ומעבירים את הקטעים DE ו-EF כך שהמרובע ADEF הוא מעוין.
נתון: 12 ס"מ = BC, וכי היקף המשולש ABC הוא 48 ס"מ.
א. מצא את אורך צלע המעוין ADEF.
ב. חשב את היקף המעוין ADEF.



26) המרובע ABCD הוא מקבילית שבה אורך הצלע AB גדולה פי 2 מהצלע AD.
ממשיכים את הצלע AD עד לנקודה K ומחברים אותה לקדקוד B. מעבירים את הקטע FE כך ש-F היא אמצע הקטע BK. EF חותך את הצלע AB בנקודה G ומקביל לצלע AD.
א. הוכח כי המרובע AGED הוא מעוין.
ב. שטח המעוין AGED הוא 20 סמ"ר.
חשב את שטח המרובע DCBK אם ידוע כי A היא אמצע הקטע DK.



תשובות סופיות:

19) א. 52 ס"מ $= P$, 130 סמ"ר $= S$ ב. 32 ס"מ $= P$, 56 סמ"ר $= S$.
ג. 92 ס"מ $= P$, 414 סמ"ר $= S$ ד. 200 ס"מ $= P$, 2100 סמ"ר $= S$.

20) 5 ס"מ.

21) 8.94 ס"מ $\approx \sqrt{80}$.

22) א. $20\sqrt{3}$ ס"מ = BD ב. 346.41 סמ"ר.

23) 24.413 ס"מ.

24) א. משולש שווה שוקיים, מכיוון ש-BE=BC. ב. 38 ס"מ $= P$.

25) א. 9 ס"מ. ב. 36 ס"מ $= P$.

26) ב. 60 סמ"ר.

שאלות עם ריבוע:

שאלות:

27) נתון ריבוע ABCD בעל אורך צלע של 6 ס"מ.

א. חשב את שטח הריבוע.

ב. חשב את היקף הריבוע.

ג. חשב את אורך האלכסון בריבוע.

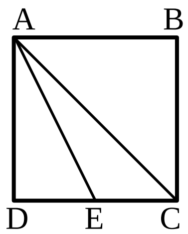
28) שטחו של ריבוע ABCD הוא 49 סמ"ר.

א. מהו אורך צלע הריבוע?

ב. מהו אורך האלכסון בריבוע?

ג. מהו היקף הריבוע?

29) בריבוע ABCD מעבירים את הקטע AE כך ש-E היא אמצע הצלע DC ואת האלכסון AC.
שטח הריבוע הוא 40 סמ"ר.



א. מצא את אורך צלע הריבוע.

ב. מצא את אורך אלכסון הריבוע.

ג. מצא את אורך הקטע AE.

30) חשב את צלע הריבוע השווה בשטחו לשטח משולש שצלעו 25 ס"מ והגובה לצלע זו הוא 18 ס"מ.

31) נתונים מלבן וריבוע השווים בשטחם.
אורכי צלעות המלבן הם 25 ס"מ ו-9 ס"מ.
חשב את היקף הריבוע.

32) נתונים מלבן וריבוע השווים בהיקפם.
שטח הריבוע הוא 36 ס"מ ואורך המלבן גדול ב-8 ס"מ מרוחבו.
חשב את שטח המלבן.

תשובות סופיות:

27) א. 36 סמ״ר ב. 24 ס״מ ג. 8.48 ס״מ.

28) א. 7 ס״מ ב. 9.89 ס״מ ג. 28 ס״מ.

29) א. 6.32 ס״מ ב. 8.94 ס״מ ג. 7.07 ס״מ.

30) 15 ס״מ.

31) 60 ס״מ.

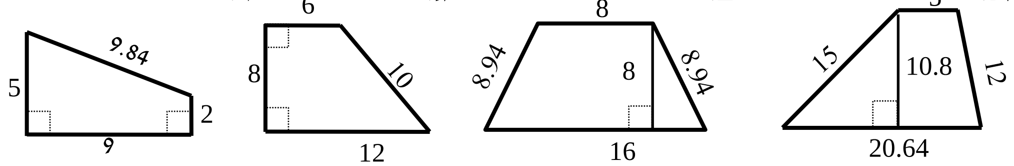
32) 20 סמ״ר.

שאלות עם טרפז:

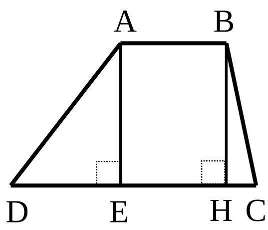
שאלות:

33) חשב את השטחים וההיקפים של הטרפזים הבאים (כל המידות בס"מ):

א. ב. ג. ד.



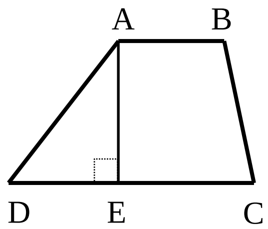
34) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$.
מורידים את הגבהים AE ו-BH שאורכם 8 ס"מ.
ידוע כי: 6 ס"מ = DE, 2 ס"מ = HC.
שטח הטרפז הוא 88 סמ"ר.
מצא את אורך בסיס הטרפז AB.



35) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$.
מורידים גובה AE מהקדקוד A.
היקף הטרפז הוא 68 ס"מ ונתון כי:
18 ס"מ = AD, 16 ס"מ = BC, 12 ס"מ = AB.

א. מצא את אורך הבסיס DC.

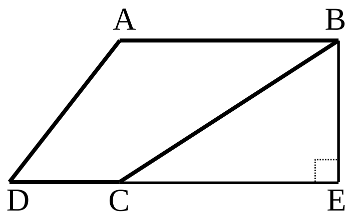
ב. מצא את הגובה AE אם ידוע כי שטח הטרפז הוא 255 סמ"ר.



36) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$.
מהקדקוד B מורידים גובה חיצוני לטרפז BE
כאשר E נמצאת על המשך הבסיס DC.
ידוע כי: 20 ס"מ = AB, 8 ס"מ = DC
וכי שטח הטרפז הוא 196 סמ"ר.

א. מצא את הגובה BE.

ב. נתון כי: $\sphericalangle D = 60^\circ$, $\sphericalangle BCD = 130^\circ$.
חשב את זווית $\sphericalangle A$ ואת זוויות המשולש BCE.



37) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$.

האלכסון AC הוא גובה בטרפז ואורכו 12 ס"מ.

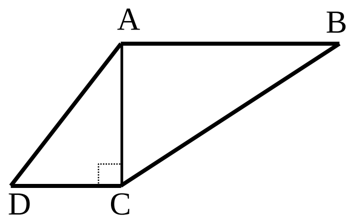
ידוע כי: 13 ס"מ = AD = AB, ‏17.7 ס"מ = BC.

היקף הטרפז הוא 48.7 ס"מ ו- $\sphericalangle B = 42.71°$.

א. מצא את אורך הבסיס DC.

ב. חשב את שטח הטרפז.

ג. חשב את זווית C.



38) הטרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$ הוא ישר זווית $(\sphericalangle A = 90°)$.

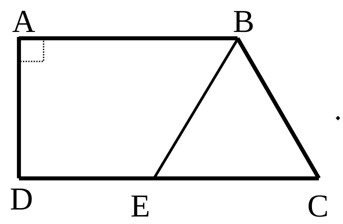
מהנקודה E שעל הבסיס DC מעבירים את הקטע BE

כך שהמשולש BCE הוא שווה צלעות עם 14 ס"מ = BC.

היקף הטרפז ABCD הוא 67 ס"מ ו- AD הוא 10 ס"מ.

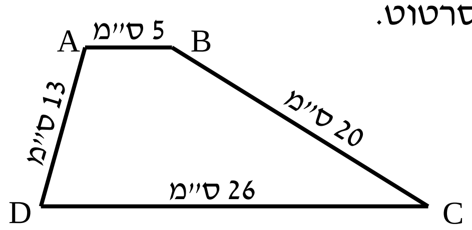
א. מהו היקף הטרפז ABED?

ב. חשב את שטח הטרפז ABED.



39) נתון טרפז ABCD שאורכי צלעותיו נתונים בסרטוט.

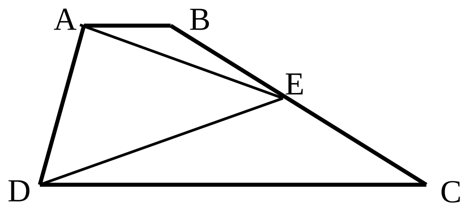
חשב את שטח הטרפז (פתור כתרגיל חישוב).



40) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.

הנקודה E היא אמצע השוק BC.

הוכח כי: $S_{ADE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.



41) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(\sphericalangle A = 90°)$.

הנקודה M נמצאת על אמצע האלכסון BD של הטרפז וממנה מעבירים

את הקטעים ME ו-MF השווים זה לזה ומחברים אותה עם הקדקוד A.

נתון כי: $MF \perp ME$ וכי: $\sphericalangle DFM > 90°$.

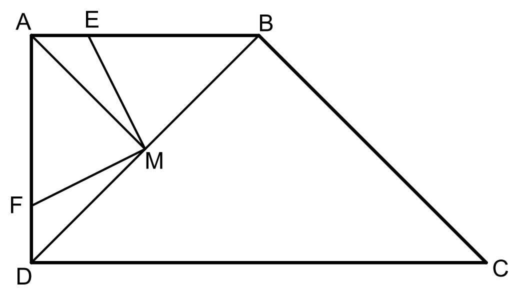
א. הוכח: $\Delta AMF \cong \Delta BME$.

ב. נתון כי: $BC = \sqrt{32}$, $AE = FD = 1$.

כמו כן: $AM \parallel BC$.

i. מצא את אורך הקטע BE.

ii. חשב את שטח הטרפז ABCD.



תשובות סופיות:

33) א. $P=$ 52.64 ס"מ, $S=$ 138.456 סמ"ר.
ב. $P=$ 41.88 ס"מ, $S=$ 96 סמ"ר.
ג. $P=$ 36 ס"מ, $S=$ 72 סמ"ר.
ד. $P=$ 25.48 ס"מ, $S=$ 31.5 סמ"ר.

34) AB = 7 ס"מ.

35) א. DC = 22 ס"מ. ב. AE = 15 ס"מ.

36) א. BE = 14 ס"מ. ב. $\sphericalangle A=120^\circ$, $\sphericalangle CBE=40^\circ$, $\sphericalangle BCE=50^\circ$, $\sphericalangle E=90^\circ$.

37) א. DC = 5 ס"מ. ב. $S=$ 108 סמ"ר. ג. $\sphericalangle C=137.29^\circ$.

38) א. $P=$ 53 ס"מ. ב. $S=$ 145 סמ"ר.

39) 186 סמ"ר.

40) שאלת הוכחה.

41) ב. i. 3 ס"מ. ב. ii. 24 סמ"ר.

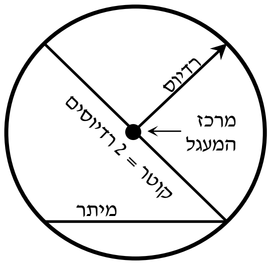
מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 23 - גיאומטריה אוקלידית - המעגל

תוכן העניינים

הגדרות:

- מעגל – המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה קבועה קבוע.
- הנקודה הקבועה נקראת מרכז המעגל.
- רדיוס – קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.
- מיתר – קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל.
- קוטר – מיתר העובר במרכז המעגל.
- היקף מעגל = $2\pi R$.
- שטח מעגל = πR^2.
- קשת – חלק מהיקף המעגל.
- גזרה – חלק משטח המעגל.
- זווית מרכזית – זווית שקדקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים.
- זווית היקפית – זווית שקדקודה על היקף המעגל ושוקיה מיתרים.



קשתות ומיתרים במעגל:

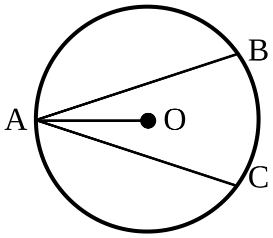
סיכום כללי:

משפטים העוסקים במיתרים במעגל:

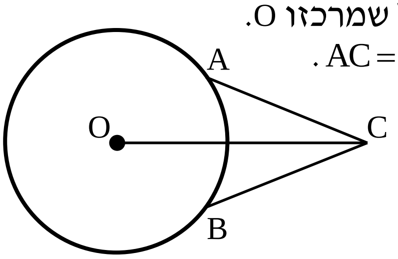
1. מיתרים שווים נשענים על קשתות שוות ולהפך.
2. על מיתרים שווים נשענות זוויות מרכזיות שוות ולהפך.
3. מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.
(משפט הפוך) מיתרים הנמצאים במרחק שווה ממרכז המעגל שווים.

שאלות:

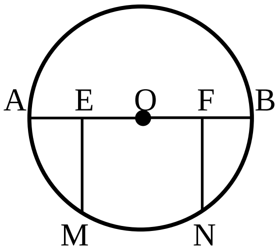
1) AB ו-AC הם שני מיתרים שווים במעגל שמרכזו O.
הוכח כי AO חוצה את זווית BAC.



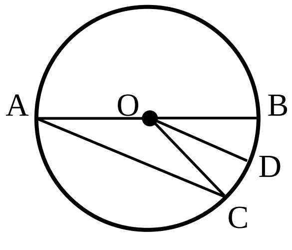
2) A ו-B הן שתי נקודות הנמצאות על היקף המעגל שמרכזו O.
נקודה C הנמצאת מחוץ למעגל מקיימת כי: $AC = BC$.
הוכח כי OC חוצה את זווית C.



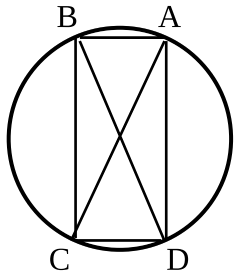
3) הקטע AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
נתון כי: $EO = FO$, $EM \perp AB$, $FN \perp AB$.
הוכח כי $MN = EF$.



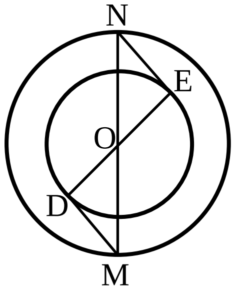
4) AB הוא קוטר במעגל שלפניך.
AC הוא מיתר ו-O מרכז מעגל.
הרדיוס OD חוצה את זווית BOC.
הוכח כי DO מקביל ל-AC.



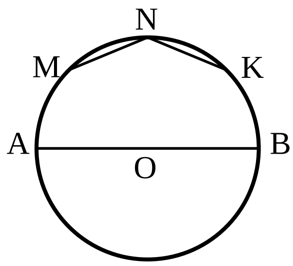
5) במעגל שלפניך AC ו-BD הם קטרים.
הוכח כי המרובע ABCD הוא מלבן.



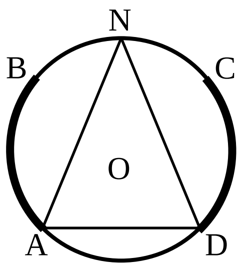
6) בשרטוט שלפניך שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
הקטע MN הוא קוטר במעגל הגדול והקטע DE
הוא קוטר במעגל הקטן.
מעבירים את הקטעים MD ו-NE.
הוכח כי MD שווה ל-NE.



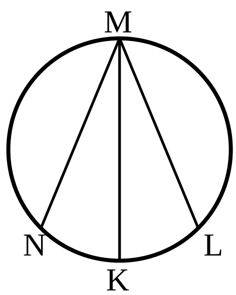
7) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
את הקשת העליונה של AB מחלקים ל-4
קשתות שוות, כלומר: $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NK} = \overset{\frown}{KB}$.
חשב את זווית KNM.



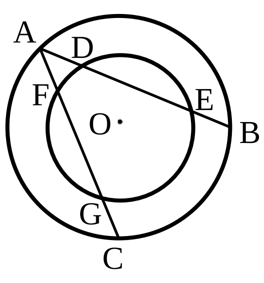
8) במעגל שלפניך נתון כי הקשתות המסומנות שוות
ז"א: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. הנקודה N היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{BC}$.
הוכח כי המשולש AND הוא שווה שוקיים.



9) המיתרים MN ו-ML שווים זה לזה.
המיתר MK חוצה את זווית NML.
הוכח כי $\Delta KNM \cong \Delta KLM$.
הוכח כי MK הוא קוטר במעגל.



10) נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
מעבירים את המיתרים AB ו-AC במעגל הגדול.
ידוע כי שני המיתרים שווים זה לזה.
מסמנים את נקודות החיתוך של המיתרים עם המעגל
הקטן ב-D ו-E עבור המיתר AB, ו-F, G עבור המיתר AC.
הוכח: $DE = FG$.



תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) $135°$.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.

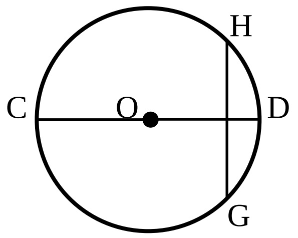
אנך אמצעי למיתר:

סיכום כללי:

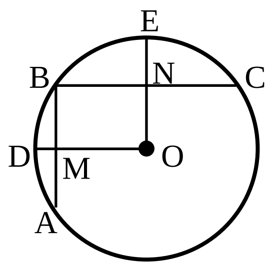
משפט אנך אמצעי למיתר:

1. אנך למיתר ממרכז המעגל חוצה את המיתר.
(משפט הפוך ל-4 (1)) רדיוס החוצה מיתר מאונך לו.
(משפט הפוך ל-4 (2)) קטע היוצא מאמצע מיתר ומאונך לו, עובר במרכז המעגל.

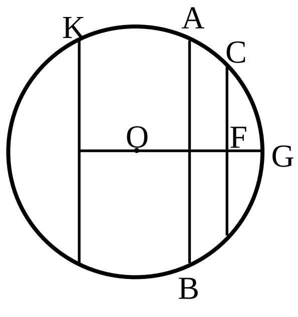
שאלות:



11) במעגל שמרכזו O המיתר GH מאונך לקוטר CD.
הוכח כי $GC = HC$.
נתון כי: $\overset{\frown}{HDG} = 80°$.
בת כמה מעלות הקשת $\overset{\frown}{CG}$?

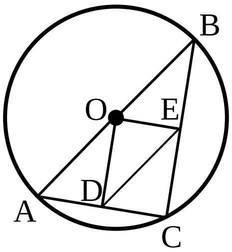


12) AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.
מעבירים את הרדיוסים OD ו-OE אשר חותכים את המיתרים AB ו-BC בנקודות M ו-N בהתאמה.
ידוע כי מרובע ONBM הוא מלבן. נתונות המידות הבאות: $R = 29$ ס"מ , $MD = 8$ ס"מ , $NE = 9$ ס"מ.
חשב את אורך כל אחד מהמיתרים AB ו-BC.



13) CD, AB ו-KL הם מיתרים במעגל שמרכזו O,
והם חותכים את הקטע MG, העובר במרכז המעגל,
בנקודות F, E ו-M בהתאמה.
נתון $CF = DF$, $KL \parallel CD$.
הוכח: $KM = LM$.
נתון בנוסף כי: $AB \perp MG$, $ML = BE$.
הוכח: $MO = EO$.

14) ABC הוא משולש החסום במעגל O. המיתר AB הוא קוטר במעגל. הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AC ו-BC בהתאמה. מעבירים את הקטעים OD ו-OE וידוע כי: $OD \perp AC$, $OE \perp BC$.
הוכח כי DE שווה באורכו לרדיוס המעגל.



תשובות סופיות:

11) א. שאלת הוכחה. ב. $140°$.
12) 40 ס״מ = AB, 42 ס״מ = BC.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.

זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל:

סיכום כללי:

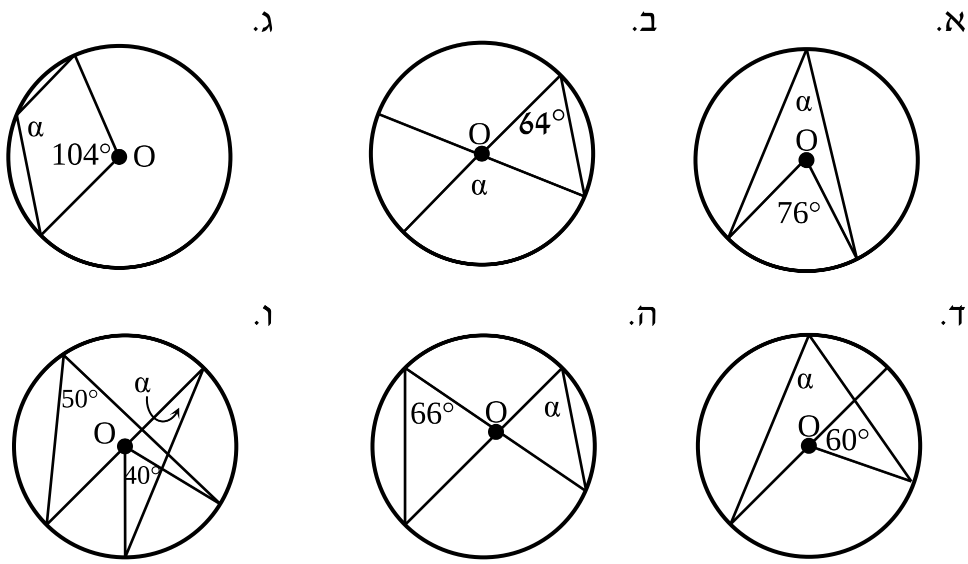
משפטים העוסקים בזוויות במעגל:

1. שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת/קשתות שוות, שוות ביניהן.
(משפט הפוך ל-5) זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות.

2. זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

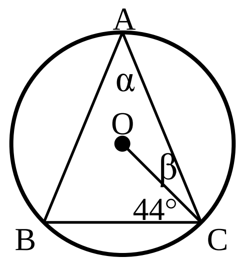
שאלות:

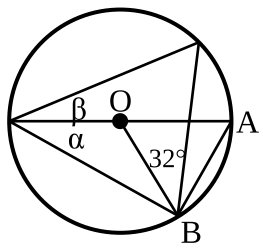
15) נתונים המעגלים הבאים שמרכזם הוא O.
חשב את הזווית α בכל אחד מהמקרים.

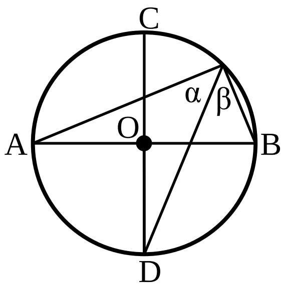


16) במעגלים הבאים שמרכזם O מופיעים הנתונים לידם.
חשב את הזוויות α ו- β בכל אחד מהמקרים:

א. $AB = AC$
ב. ΔAOB - שווה צלעות.
ג. AB, CD קטרים מאונכים זה לזה.





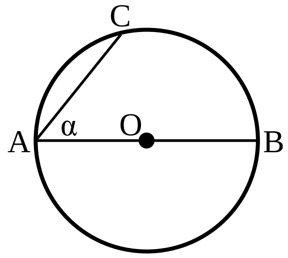


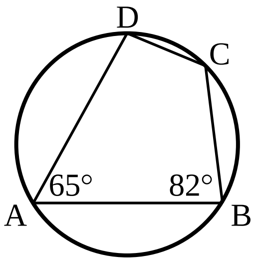
17) חשב את המבוקש בכל מקרה:

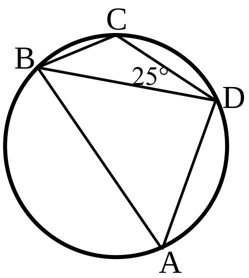
א. AB קוטר, $\overset{\frown}{AC} = 84°$
חשב את α.

ב. $\overset{\frown}{DC} = 52°$.
חשב: $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{DC}, \overset{\frown}{AD}$.

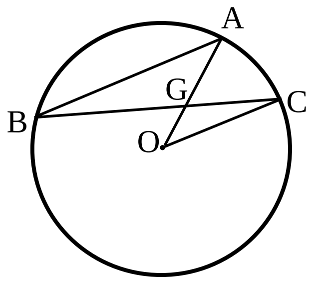
ג. $\overset{\frown}{DC} = 60°$.
חשב $\sphericalangle BAD$.



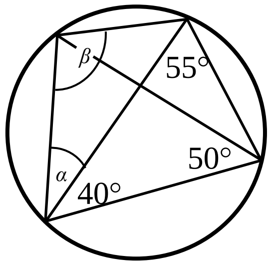




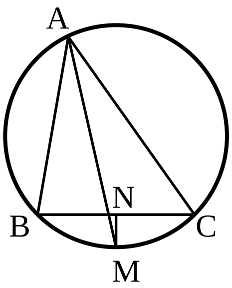
18) AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.
נתון: $AB \parallel CO$, $\sphericalangle AGC = 60°$.
חשב את גודלה של הזווית $\sphericalangle AOC$.



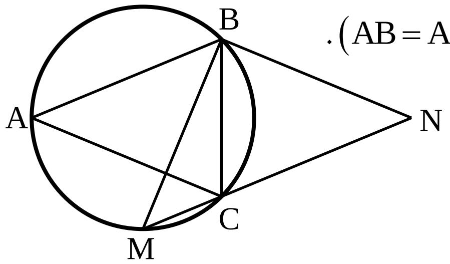
19) חשב את גודל הזוויות α ו- β במעגל הנתון.



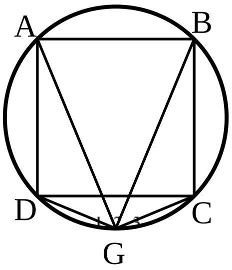
20) המשולש ABC חסום במעגל.
המיתר AM חוצה את זווית A.
מעבירים אנך מהנקודה M לצלע BC
החותך אותה בנקודה N.
הוכח: $BN = CN$.



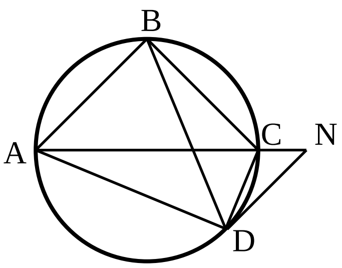
21) בסרטוט שלפניך נתון כי המשולשים
ABC ו-BMN הם שווי שוקיים $(AB = AC\ ,\ BM = BN)$.
זווית הראש במשולש BMN היא $94°$.
חשב את זווית ACB.



22) במעגל שלפניך חסום ריבוע ABCD.
הנקודה G נמצאת על היקף המעגל.
ממנה מעבירים מיתרים לכל קדקוד
כך שנוצרות הזוויות $\sphericalangle G_1\ ,\ \sphericalangle G_2\ ,\ \sphericalangle G_3$.
הוכח כי $\sphericalangle G_1 = \sphericalangle G_2 = \sphericalangle G_3$ ומצא אותן.



23) המרובע ABCD חסום במעגל.
ממשיכים את האלכסון AC עד לנקודה N
ומחברים אותה עם הקדקוד D
כך שמתקיים: $AB \parallel DN$.
הוכח כי זוויות המשולשים ΔADN
ו- ΔBDC שוות.



תשובות סופיות:

15) א. $38°$ ב. $128°$ ג. $128°$ ד. $60°$ ה. $66°$ ו. $30°$.

16) א. $\alpha = 46°$, $\beta = 23°$ ב. $\alpha = 30°$, $\beta = 28°$ ג. $\alpha = \beta = 45°$.

17) א. $\alpha = 48°$ ב. $\overset{\frown}{AB} = 118°$, $\overset{\frown}{BC} = 78°$, $\overset{\frown}{AD} = 112°$ ג. $55°$.

18) $40°$.

19) $\alpha = 35°$, $\beta = 95°$.

20) שאלת הוכחה.

21) $68.5°$.

22) $\sphericalangle G_1 = \sphericalangle G_2 = \sphericalangle G_3 = 45°$

23) שאלת הוכחה.

זווית היקפית הנשענת על קוטר:

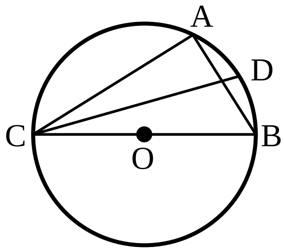
סיכום כללי:

משפט:

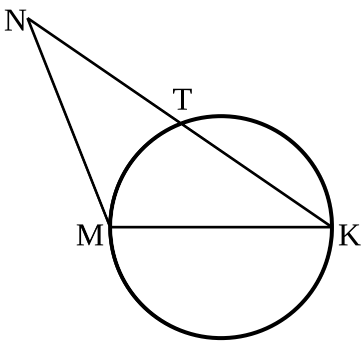
1. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.
(משפט הפוך) מיתר עליו נשענת זווית היקפית ישרה הוא קוטר.

שאלות:

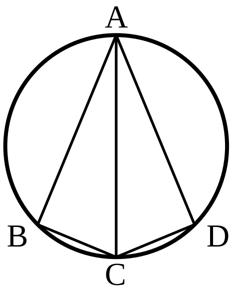
24) המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש-BC הוא קוטר. מעבירים את המיתר CD
המקיים: $\sphericalangle DCB = 20^\circ$.
מצא את זווית CAD.



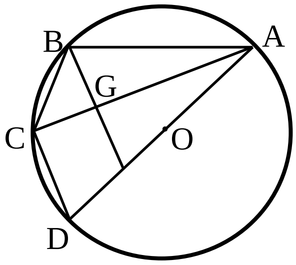
25) MK הוא קוטר במעגל שלפניך.
הקטע KN חותך את המעגל בנקודה T.
מתקיים: $KT = NT$.
הוכח כי: $MK = NM$.



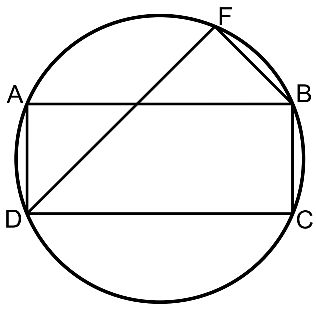
26) מרובע ABCD חסום במעגל כאשר האלכסון AC
הוא קוטר וחוצה את זווית BCD.
הוכח כי ABCD הוא דלתון.



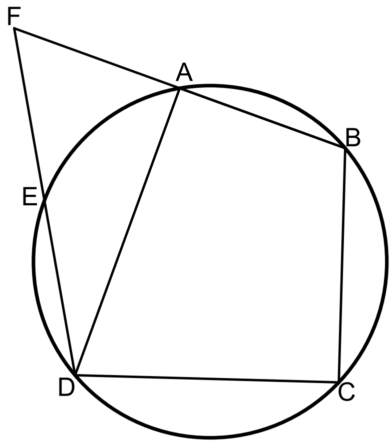
27) AB, AC, AD, BC ו-CD הם מיתרים במעגל
שמרכזו O (המיתר AD עובר ב-O).
הקטע BE חותך את המיתר AC בנקודה G.
נתון: $BG = GE$, $BE \parallel CD$.
הוכח: $BC = CD$.



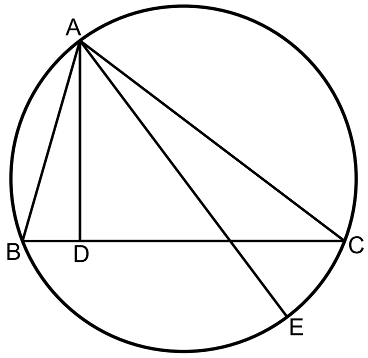
28) המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל.
מהקדקוד D מעבירים את המיתר DF
החותך את הצלע AB בנקודה E.
ידוע כי: $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CF}$.
הצלע AD של המלבן תסומן ב- a.
א. הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים.
ב. נתון גם כי: $BC = BF$.
הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.



29) המרובע ABCD חסום במעגל.
המשכי המיתרים AB ו-ED נפגשים בנקודה F.
הקטע FD חותך את היקף המעגל בנקודה E
כך שמתקיים: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AE}$.
נתון כי הזווית BCD היא ישרה.
א. הוכח כי הקטע DF שווה לקוטר המעגל.
ב. נתון כי: $DF = BF$ וכי רדיוס המעגל
הוא 12 ס"מ.
הוכח כי המרובע AEDB הוא טרפז.
ג. חשב את היקף הטרפז AEDB.



30) משולש ABC חסום במעגל.
AD גובה לצלע BC ו-AE קוטר במעגל.
א. הוכח: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$.
נתון גם כי: $CE = \sqrt{21}, AD = 6, CD = 8$.
ב. חשב את רדיוס המעגל.



תשובות סופיות:

24) $110°$.
25) שאלת הוכחה.
26) שאלת הוכחה.
27) שאלת הוכחה.
28) א. שאלת הוכחה. ב. $R = 1.3a$.
29) א. שאלת הוכחה. ב. 5.5.
30) א. $\alpha = 135°$ ב. $\alpha = 45°$ ג. $\alpha = 40°$.

משיקים למעגל:

סיכום כללי:

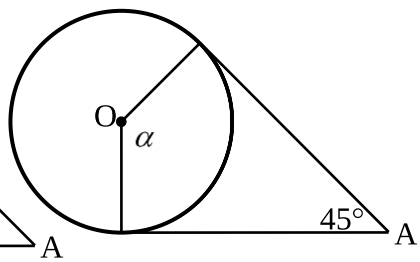
משפטים העוסקים במשיק למעגל ושני משיקים למעגל:

1. משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
(משפט הפוך ל-8) קטע המאונך לרדיוס בקצהו משיק למעגל.
2. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
3. קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שממנה יוצאים שני משיקים חוצה את הזווית בין המשיקים.

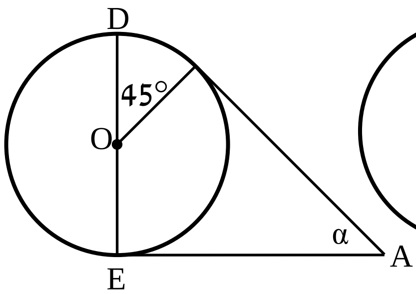
שאלות:

31) באיורים שלפניך נתונים שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה A שמחוץ למעגל.
מרכזי המעגלים מסומן ב-O. מצא את α בכל מקרה.

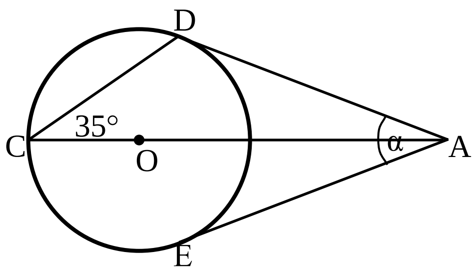
א.



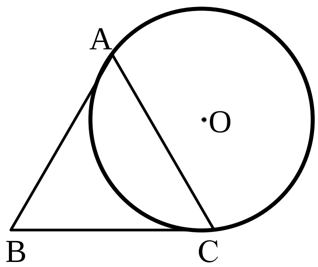
ב.



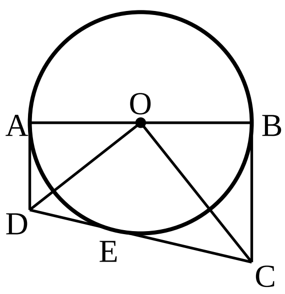
ג.

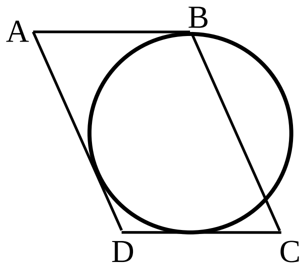


32) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$.
המעגל O משיק לצלעות AB ו-BC בנקודות A ו-C.
הוכח כי ABC הוא שווה צלעות.

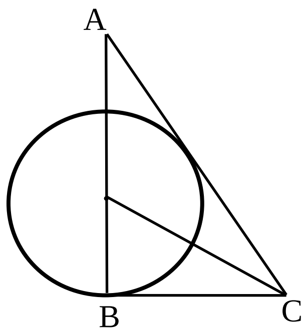


33) במעגל O מעבירים קוטר AB ושלושה משיקים AD, CD ו-BC. E היא נקודת ההשקה של CD עם המעגל.
הוכח כי: $\sphericalangle COD = 90°$.

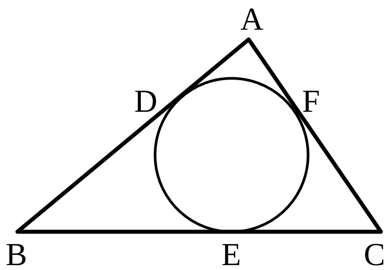




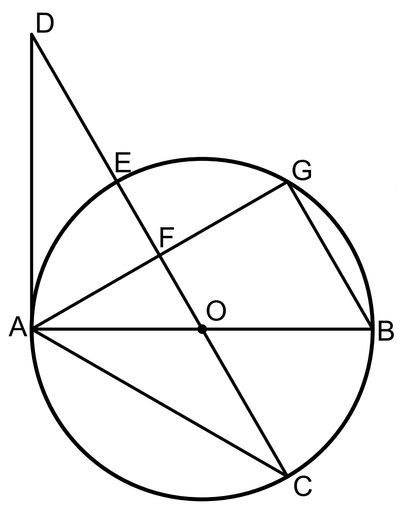
34) הצלעות AB, AD ו-DC של המקבילית ABCD משיקות למעגל בנקודות B , L ו-K בהתאמה (ראה שרטוט).
נתון: BC = 14 ס"מ, CK = 6 ס"מ.
חשב את היקף המקבילית.



35) הצלעות AC ו-BC של המשולש ABC משיקות למעגל שמרכזו O , בנקודות K ו-B בהתאמה.
הצלע AB עוברת בנקודה O.
נתון: AK = CK , AB = 15 ס"מ.
א. חשב את גודלה של זווית A.
ב. חשב את אורכו של רדיוס המעגל.



36) משולש ABC חוסם מעגל אשר משיק לצלעותיו בנקודות D, E ו-F כמתואר באיור.
נתון כי: AC = 18 ס"מ, BD = 14 ס"מ.
מצא את היקף המשולש ABC.



37) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
מהנקודה A מעבירים את המיתרים AC ו-AG ואת המשיק AD כך שהמשולש ACD שווה שוקיים.
הישר CD חותך את היקף המעגל בנקודה E,
את המיתר AG בנקודה F ועובר דרך מרכז המעגל O
המיתר BG מקביל לישר החותך CD.
א. חשב את זוויות המשולש ACD.
ב. הוכח כי: $AF = FG$.
ג. רדיוס המעגל יסומן ב- R .
הוכח כי: $DC = 3R$.

תשובות סופיות:

31) א. $\alpha = 135^\circ$ ב. $\alpha = 45^\circ$ ג. $\alpha = 40^\circ$.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) 48 ס"מ.

35) א. 30° ב. 5 ס"מ.

36) 64 ס"מ.

37) א. 120° , 30° , 30°. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

משיק ומיתר:

סיכום כללי:

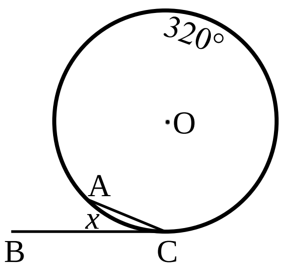
משפט:

1. הזווית הכלואה בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני.

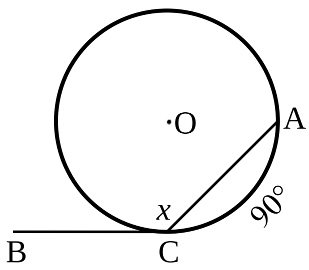
שאלות:

38) באיורים שלפניך נתון מעגל שמרכזו O, מיתר AC ומשיק BC בנקודה C.
מצא את x.

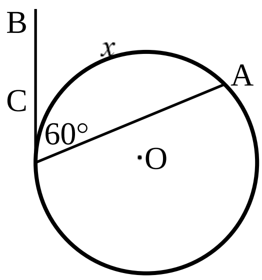
א.



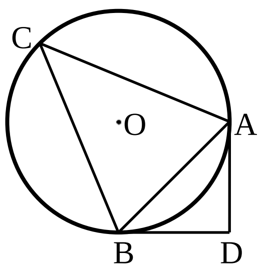
ב.



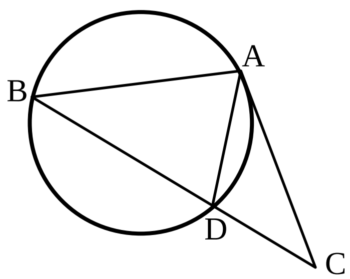
ג.



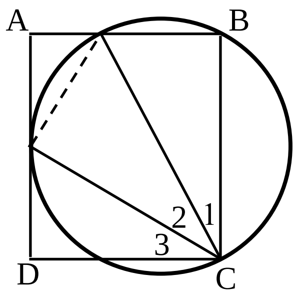
39) ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AC = BC)$
החסום במעגל שמרכזו O.
מהקדקודים A ו-B מעבירים משיקים אשר נחתכים
בנקודה D.
ידוע כי זווית הבסיס במשולש ABC היא $68°$.
חשב את זווית ADB.



40) AC הוא משיק למעגל בנקודה A.
BC חותך את המעגל בנקודה D.
נתון כי $AD = CD$, הוכח: $AB = AC$.



41) הקדקודים B ו-C של המלבן ABCD מונחים על מעגל.
צלע AD משיקה למעגל בנקודה G והצלע AB חותכת
את המעגל בנקודה H.
הוכח: $\sphericalangle C_2 = \sphericalangle C_3$.
(הדרכה: סמן $\sphericalangle AGH = \alpha$).



תשובות סופיות:

38) א. $x = 20°$ ב. $x = 135°$ ג. $x = 120°$.
39) $92°$
40) שאלת הוכחה.
41) שאלת הוכחה.

שני מעגלים:

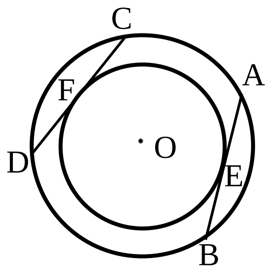
סיכום כללי:

משפטים העוסקים בשני מעגלים:

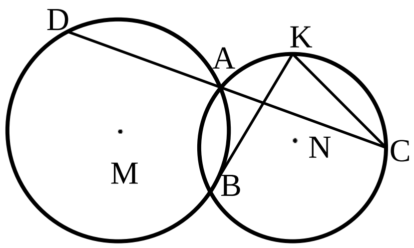
1. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.
2. קטע המרכזים (או המשכו) של שני מעגלים משיקים עובר בנקודת ההשקה.

שאלות:

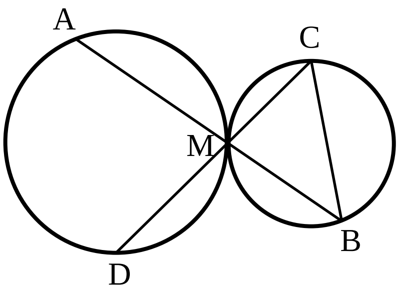
42) נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
דרך שתי נקודות E ו-F שעל היקף המעגל הפנימי
מעבירים משיקים אשר חותכים את המעגל החיצוני
בנקודות A, B, C ו-D. הוכח כי המיתרים AB
ו-CD הנוצרים באופן זה שווים.



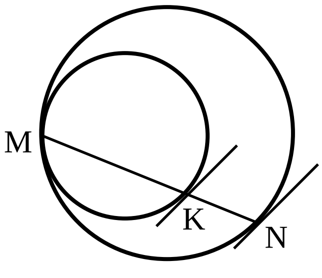
43) שני מעגלים M ו-N נחתכים בנקודות A ו-B.
הישר CD עובר דרך הנקודה A.
מעבירים משיק למעגל M בנקודה B
החותך את המעגל N בנקודה K.
הוכח כי: $BD \parallel CK$.



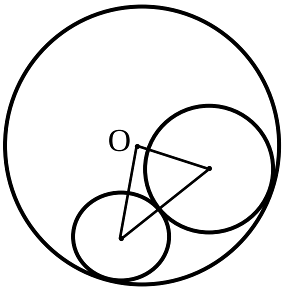
44) שני מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ בנקודה M.
דרך הנקודה M מעבירים שני ישרים חותכים.
האחד חותך את המעגל השמאלי בנקודה A
ואת הימני בנקודה B והאחר חותך את המעגל
השמאלי בנקודה D ואת הימני בנקודה C.
הוכח כי $BC \parallel AD$.



45) שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה M.
מעבירים מיתר MN במעגל החיצוני אשר חותך את
המעגל הפנימי בנקודה K.
הוכח כי המשיקים לשני המעגלים
בנקודות N ו-K מקבילים זה לזה.



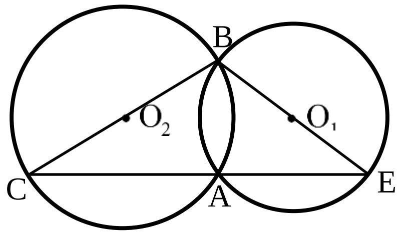
46) המעגלים שמרכזיהם M ו-G משיקים מבחוץ זה לזה ומשיקים מבפנים למעגל שמרכזו O.
נתון כי רדיוס המעגל שמרכזו O הוא 8 ס"מ.
חשב את היקף המשולש OMG.



47) שני מעגלים שמרכיזהם O_1 ו- O_2 נחתכים בנקודות A ו-B.
מעבירים את הקטרים BC ו-BE.

א. הוכח כי הנקודות C, E ו-A נמצאות על ישר אחד.

ב. הוכח כי O_1O_2 הוא קטע אמצעים במשולש BCE.



תשובות סופיות:

42) שאלת הוכחה.

43) שאלת הוכחה.

44) שאלת הוכחה.

45) שאלת הוכחה.

46) 16 ס"מ.

47) שאלת הוכחה.

מעגל חוסם ומעגל חסום:

סיכום כללי:

משפטים העוסקים במעגל חוסם ומעגל חסום:

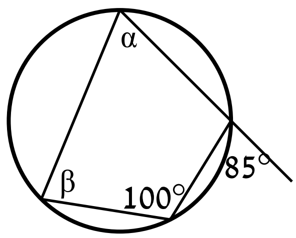
1. מרכז מעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים במשולש.
2. מרכז מעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי הזווית במשולש.
3. במרובע החסום במעגל, סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא 180°.
   (משפט הפוך) אם במרובע סכום זוג זוויות נגדיות הוא 180°, המרובע בר חסימה במעגל.
4. במרובע החוסם מעגל סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.
   (משפט הפוך) אם במרובע סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני אז ניתן לחסום בתוכו מעגל.
5. כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל וניתן לחסום בתוכו מעגל.

שאלות:

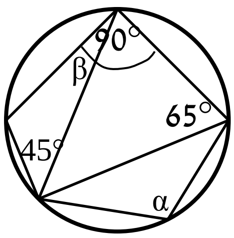
48) AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC.
א. הוכח: אם מרכז המעגל החסום במשולש ABC נמצא על AD אז המשולש ABC הוא שווה שוקיים.
ב. בהמשך לסעיף א', האם מרכז המעגל החוסם את משולש ABC נמצא על AD?

49) מצא את הנעלמים בכל אחד מהסרטוטים שלפניך:

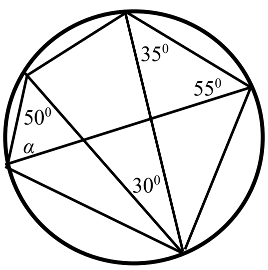
א.



ב.

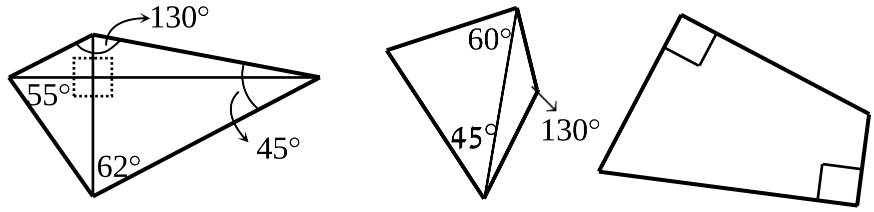


50) חשב את גודלה של הזווית α בסרטוט הבא:

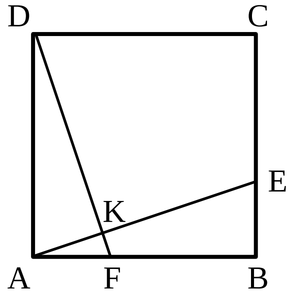


51) קבע אלו מהמרובעים הבאים ניתן לחסום במעגל:

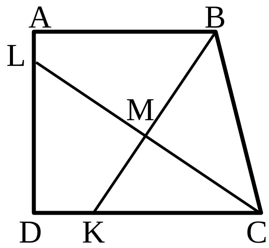
א. ב. ג.



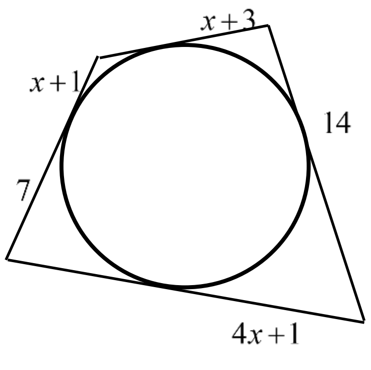
52) בריבוע ABCD נתון כי AF = BE.
הנקודה K היא חיתוך של הקטעים AE ו-DF.
הוכח כי את המרובע DKEC ניתן לחסום במעגל.



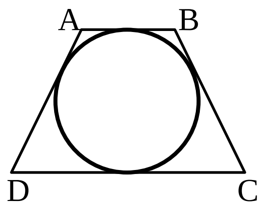
53) בטרפז ישר זווית ABCD שבו השוק AD מאונכת לבסיסים AB ו-DC הנקודות K ו-L נמצאות על הצלעות DC ו-AD בהתאמה, כך שהקטעים BK ו-CL הם חוצי הזוויות B ו-C בהתאמה.
חוצי הזוויות נפגשים בנקודה M.
הוכח: את המרובע DKML ניתן לחסום במעגל.
הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.



54) חשב את גודלו של x בשרטוט הבא:



55) בטרפז שווה שוקיים ABCD $(AB \parallel CD)$ שהיקפו 60 ס"מ וזוויות הבסיס החדות שלו הן $60°$ חסום מעגל.
מצא את אורכי צלעות הטרפז.



תשובות סופיות:

48) שאלת הוכחה.

49) **א.** $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 85^\circ$ **ב.** $\alpha = 110^\circ$, $\beta = 20^\circ$.

50) $\alpha = 70^\circ$.

51) ניתן לחסום את מרובע א' בלבד.

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) $x = 2$

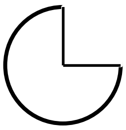
55) 15 ס"מ, 15 ס"מ, 7.5 ס"מ, 22.5 ס"מ.

שטחים והיקפים במעגל:

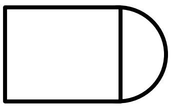
שאלות:

56) ענה על השאלות הבאות:

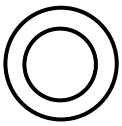
א. היקפו של עיגול הוא 44 ס"מ. חשב את שטחו.



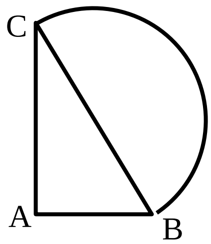
ב. הצורה שבאיור היא $\frac{3}{4}$ עיגול.
היקף הצורה שווה ל-45 ס"מ.
חשב את אורך הרדיוס של העיגול.



ג. שטח צורה המורכבת מריבוע וחצי עיגול הוא 30 סמ"ר.
חשב את רדיוס חצי העיגול.



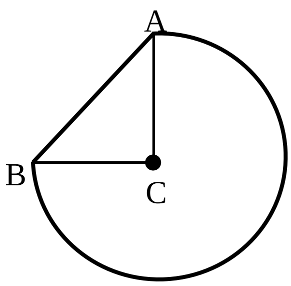
ד. שטח טבעת הוא 55π סמ"ר.
הרדיוס הפנימי הוא 3 ס"מ.
חשב את הרדיוס החיצוני של הטבעת.



57) נתון משולש ישר זווית ABC, $(\sphericalangle A = 90^\circ)$.
על היתר BC בונים חצי עיגול.
נתון: 10 ס"מ = AB, 24 ס"מ = AC, 26 ס"מ = BC.

א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.



58) באיור שלפניך שלושה רבעי עיגול החסומים ע"י הקטע AB ומשולש ישר זווית ABC (C מרכז העיגול).
ידוע כי רדיוס העיגול הוא 14 ס"מ
וכי אורך הקטע AB הוא 19.8 ס"מ.

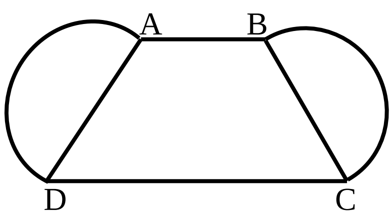
א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.

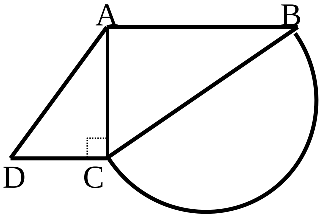
59) באיור שלפניך נתון טרפז שווה שוקיים ABCD, $(AB \parallel CD\,,\ AD = BC)$.
על שוקי הטרפז בונים חצאי עיגולים.
נתון: 10 ס"מ = AB, 16 ס"מ = CD, 12 ס"מ = BC.
אורך גובה הטרפז הוא 11.6 ס"מ.

א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.

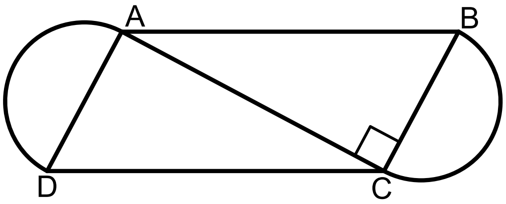


60) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$. מעבירים את האלכסון AC אשר מאונך לבסיסים AB ו-DC של הטרפז. על השוק BC בונים חצי עיגול.
נתון: 24 = AB ס"מ, 18 = AC ס"מ.
שטח הטרפז הוא 283.5 סמ"ר.



א. מצא את הבסיס DC.
ב. חשב את רדיוס העיגול.
ג. חשב את היקף הצורה המורכבת.
ד. חשב את שטח הצורה המורכבת.

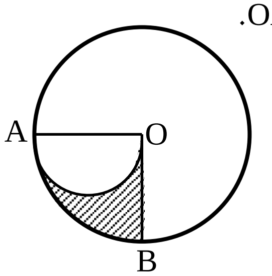
61) המרובע ABCD הוא מקבילית.
על הצלעות BC ו-AD בונים שני חצאי עיגול זהים בעלי רדיוס R.
מעבירים את האלכסון AC.
ידוע כי האלכסון AC מאונך לצלע BC.
נתון: $AC = 4R - 1$, $AB = 4R + 1$.



א. מצא את רדיוס העיגולים, R.
ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.
ג. חשב את השטח של הצורה המורכבת מהמקבילית ושני חצאי העיגולים.

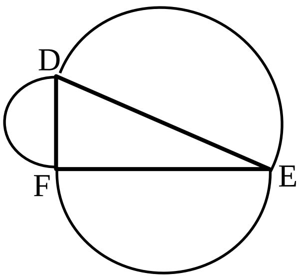
62) נתון מעגל שאורך רדיוסו הוא 16 ס"מ.
חשב את אורך הקשת ואת שטח הגזרה המתאימות לזווית מרכזית בכל אחד מהמקרים הבאים:
א. $60°$
ב. $45°$
ג. $270°$
ד. $17°$

63) על הרדיוס OA של מעגל O בונים חצי מעגל אשר קוטרו הוא OA.
ידוע כי $\sphericalangle BOA = 90°$.



א. חשב את השטח המקווקו OBA אם ידוע כי 10 = OA ס"מ.
ב. הוכח באופן כללי כי שטח הגזרה OBA שווה לשטח חצי מעגל אשר קוטרו הוא OA.

64) על הצלעות של משולש ישר זווית ΔDEF $(\sphericalangle F = 90°)$ בונים חצאי מעגלים.
הוכח כי שטח חצי המעגל הבנוי על היתר שווה לסכום שטחי חצאי המעגלים הבנויים על הניצבים.



תשובות סופיות:

56) א. $S=\frac{484}{\pi}$ סמ"ר. ב. $R=6.706$ ס"מ. ג. $R=2.32$ ס"מ. ד. $R=8$ ס"מ.

57) א. $P=74.84$ ס"מ. ב. $S=385.46$ סמ"ר.

58) א. $P=85.77$ ס"מ. ב. $S=559.814$ סמ"ר.

59) א. $P=63.7$ ס"מ. ב. $S=263.89$ סמ"ר.

60) א. $DC=7.5$ ס"מ. ב. $R=15$ ס"מ. ג. $P=98.12$ ס"מ. ד. $S=636.929$ סמ"ר.

61) א. $R=4$ ס"מ. ב. $P_{ABCD}=50$ ס"מ. ג. $S=120+16\pi\approx170.26$ סמ"ר.

62) א. $l=5\frac{1}{3}\pi$ ס"מ , $S=42\frac{2}{3}\pi$ סמ"ר ב. $l=4\pi$ ס"מ , $S=32\pi$ סמ"ר
ג. $l=24\pi$ ס"מ , $S=192\pi$ סמ"ר ד. $l=1.51\pi$ ס"מ , $S=12.08\pi$ סמ"ר.

63) א. 12.5π סמ"ר. ב. שאלת הוכחה.

64) שאלת הוכחה.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

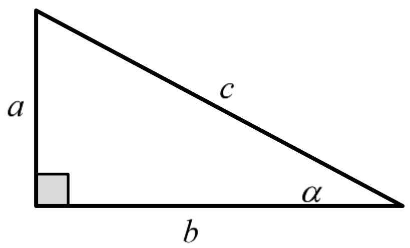
פרק 24 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

תוכן העניינים

משולש ישר זווית:

סיכום כללי:

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$

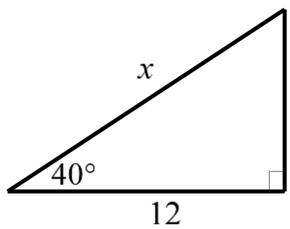
$\tan\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$

משפט פיתגורס: $a^2+b^2=c^2$

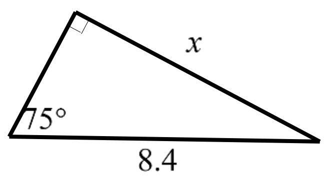
שאלות:

1) מצא את ערכו של α / x במשולשים ישרי הזווית הבאים:

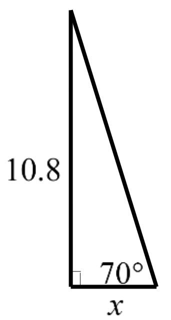
א.



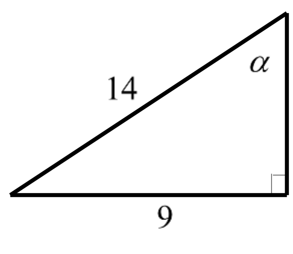
ב.



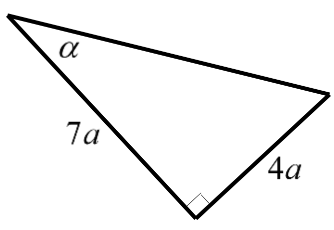
ג.



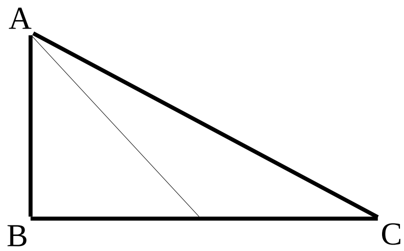
ד.



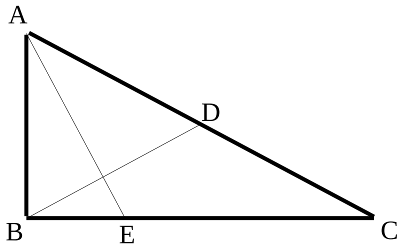
ה.



2) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\measuredangle B = 90^\circ)$.
AD הוא התיכון לניצב BC.
נתון: $\measuredangle C = 28^\circ$, 6 ס"מ = AB.
מצא את AD ואת $\measuredangle BAD$.

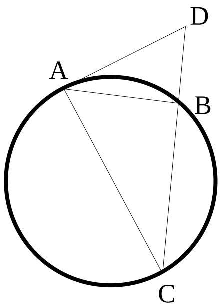


3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90^\circ)$. BD הוא התיכון ליתר ו-AE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle A$.
נתון: BD = 5.6 ס"מ , BC = 8 ס"מ.
מצא את BE ואת $\sphericalangle BAE$.



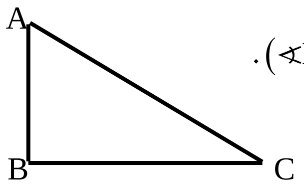
4) מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסוניו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל.
המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D.
נתון: BD= 4 ס"מ , $\sphericalangle DAB = 32^\circ$.
מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

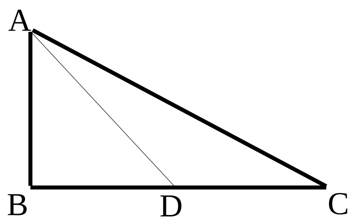


6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא 34.92°. מצא את שטח המשולש.

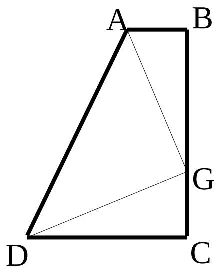
7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90^\circ)$.
נתון: $\sphericalangle A = \alpha$, $AB = a$.
הבע באמצעות α ו-a את היקף המשולש.



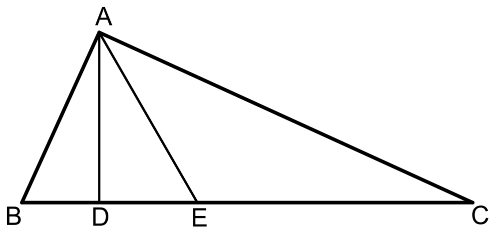
8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90^\circ)$.
AD הוא התיכון לניצב BC.
נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $AB = b$.
הבע באמצעות α ו-b את אורכי הקטעים BD ו-AD.



9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה זווית זו הוא k.
הבע באמצעות α ו-k את שטח המשולש ואת אורך היתר.



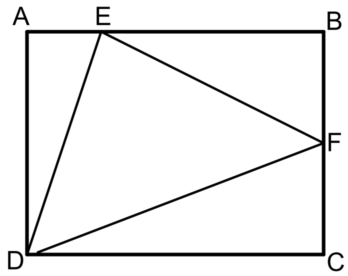
10) טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית $(\sphericalangle B=\sphericalangle C=90^\circ)$.
הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG\perp DG$.
נתון: $AG=DG=m$, $\sphericalangle BAG=\beta$.
הבע באמצעות β ו- m את שטח הטרפז.



11) המשולש ABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle A=90^\circ)$.
הקטעים AD ו-AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית.
מסמנים: $DE=k$, $\sphericalangle DAE=\alpha$.

א. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי: $\alpha=30$ ו- $k=2$.



12) במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו-F הנמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה כך ש-E מקיימת: $3AE=BE$ ו-F היא אמצע הצלע BC.
אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE.
מעבירים את הקטעים EF , DF ו-DE כך שנוצר במשולש DEF.

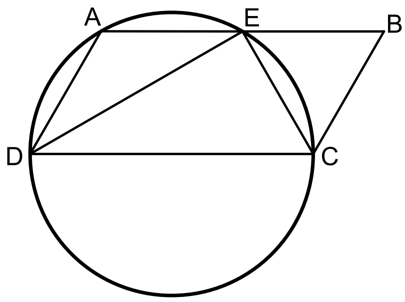
א. סמן ב- t את אורך הקטע AE והבע באמצעות t את אורכי צלעות המשולש DEF.

ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

13) משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k וזווית הבסיס שלו היא β חוסם מעגל.
הבע באמצעות β ו- k את רדיוס המעגל.

14) בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא b והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא α .
הבע באמצעות α ו- b את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:

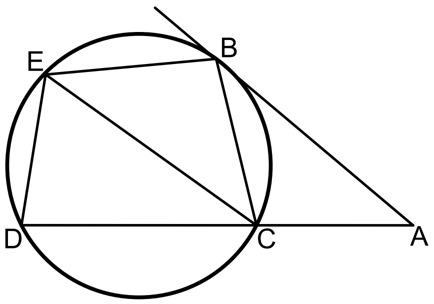


15) דרך הקודקודים A , C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E, $(AE = BE)$.
נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.

א. הוכח כי המיתר CE חוצה את זוויות C.

ב. רדיוס המעגל יסומן ב- R.
הבע באמצעות R את היקף המקבילית.

ג. מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא $16\sqrt{3}$סמ"ר.



16) מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD.
מעבירים את המיתרים BC ו-BE אשר זהים באורכם.
כמו כן מעבירים את המיתר DE.
אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.

א. הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.

ב. הוכח כי: $2\cdot\sphericalangle BEC = \sphericalangle EDC$.

ג. נתונים: $\sphericalangle A = 40°$, 6 ס"מ = AC, 9 ס"מ = AB , 8 ס"מ = CE.
חשב את שטח המרובע ABEC.

תשובות סופיות:

1) א. $x=15.665$ ב. $x=8.114$ ג. $x=3.931$ ד. $\alpha=40.005°$ ה. $\alpha=29.745°$.

2) $\sphericalangle BAD=43.24°$, AD = 8.236 ס"מ.

3) $\sphericalangle BAE=22.792°$, BE = 3.294 ס"מ.

4) $106.26°$, $106.26°$, $73.74°$, $73.74°$.

5) $R=$ 6.04 ס"מ.

6) $S=$ 28.618 סמ"ר.

7) $P=a\left(1+\tan\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$.

8) $\text{BD}=\frac{b}{2\tan\alpha}$, $\text{AD}=\sqrt{b^2+\frac{b^2}{4\tan^2\alpha}}$.

9) $S=\frac{k^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\tan\alpha}{2}$, $\text{AC}=\frac{k\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

10) $\frac{(m\sin\beta+m\cos\beta)^2}{2}$.

11) א. $S=\frac{k^2}{\cos 2\alpha\tan^2\alpha}$ ב. 24 סמ"ר.

12) א. $\text{DF}=t\sqrt{18.25}$, $\text{EF}=t\sqrt{11.25}$, $\text{DE}=t\sqrt{10}$ ב. $47.14°$, $51°$, $81.86°$.

13) $R=k\cos\beta\tan\frac{\beta}{2}$.

14) $S=\frac{1}{2}b^2\sin\alpha(1+\sin\alpha)$, $\frac{1}{2}b\sin\alpha+\frac{\frac{1}{2}b\sin\alpha}{\tan\frac{\alpha}{2}}$.

15) א. שאלת הוכחה. ב. $6R$ ג. 4 ס"מ.

16) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 32.78 סמ"ר.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 25 - זהויות טריגונומטריות

תוכן העניינים

זהויות יסוד:

סיכום כללי:

קשרים בין פונקציות	$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$
זוויות משלימות ל- $90°$	$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$	$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$
	$\cot\alpha = \tan(90° - \alpha)$	$\tan\alpha = \cot(90° - \alpha)$
קשרים בין פונקציות	$\cot^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	$\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

שאלות:

הוכחת זהויות יסודיות:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

1) $\tan\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\alpha$

2) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1$

3) $\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \tan\alpha$

4) $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha = 1 + \cos^2\alpha$

5) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha} = 2$

6) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$

7) $\dfrac{\cos(90° - \alpha)}{\cos\alpha} = \tan\alpha$

8) $\sin^2(\alpha + 45°) + \sin^2(45° - \alpha) = 1$

9) $\sqrt{1+\tan^2\alpha} \cdot \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \tan\alpha$

10) $\dfrac{\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha} = \tan^3\alpha$

11) $\dfrac{\sin(90° - \alpha) - \cos^3\alpha}{\sin^3\alpha} = \cot\alpha$

12) $\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha) = 1$

13) $\dfrac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \cot\alpha$

14) $\dfrac{\sin^3\alpha}{\sin(90° - \alpha) - \cos^3\alpha} = \tan\alpha$

15) $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\alpha \sin^2\alpha$

16) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} = \tan^2\alpha + \cot^2\alpha$

הוכחות מתקדמות:

17) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=2+4\cot^2\alpha$.

18) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

19) הוכח את הזהות הבאה: $(\cot\alpha-\tan\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=(1+\cot^2\alpha)(1+\tan\alpha)(1-\tan\alpha)$.

20) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\cot^4\alpha$.

21) הוכח את הזהות הבאה: $1-\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha)=\cos^4\alpha$.

22) הוכח את הזהות הבאה: $\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)^2=4+4\cot^2\alpha$.

23) הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

24) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\tan\alpha\tan\beta$.

הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:

25) נתון כי: $\sin\alpha+\cos\alpha=k$.
הבע באמצעות k את ערכי הביטויים הבאים:
א. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.
ב. $\sin\alpha-\cos\alpha$.
ג. $\tan\alpha+\cot\alpha$.
ד. $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

26) נתון כי: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.
מבלי למצוא את α חשב את: $\tan^2\alpha-2\cot^2\alpha$.

27) נתון כי: $\tan\alpha = \sqrt{7}$.

מבלי למצוא את α חשב את: $\frac{\sqrt{7}\sin\alpha + 6\cos\alpha}{\sqrt{28}\sin\alpha - \cos\alpha}$.

28) חשב את ערך המכפלה הבאה: $\tan 1° \cdot \tan 2° \cdot \tan 3° \cdot \dots \cdot \tan 88° \cdot \tan 89°$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) שאלת הוכחה.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) שאלת הוכחה.
22) שאלת הוכחה.
23) שאלת הוכחה.
24) שאלת הוכחה.
25) א. $\frac{k^2-1}{2}$ ב. $\pm\sqrt{2-k^2}$ ג. $\frac{2}{k^2-1}$ ד. $\frac{k}{2}\left(3-k^2\right)$
26) -7.75
27) 1
28) 1

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

סיכום כללי:

	$\alpha=0^\circ$	$\alpha=30^\circ$	$\alpha=45^\circ$	$\alpha=60^\circ$	$\alpha=90^\circ$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ϕ
$\cot\alpha$	ϕ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של 0° ו- 90° תִּלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי: $\frac{\sqrt{0}}{2},\frac{\sqrt{1}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{4}}{2}$ אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל.
עבור שורת ה- $\cos\alpha$ יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי $\tan\alpha$ ולסובב עבור ערכי $\cot\alpha$.

שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

1) $\sin 30^\circ+\cos 30^\circ$.

2) $\frac{\sin 30^\circ\cdot\cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$.

3) $\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}+\tan 45^\circ$.

4) $\frac{1+\cos 60°}{2\sin 60°}$.

5) $\cos^2 45° + \sin^2 30°$.

6) $\frac{\tan^2 60° \cdot \cos^2 30°}{\cos^2 60°}$.

7) $\frac{\tan 30° \cdot \cot 60° - \cot 45° \cdot \tan 45°}{4\left(\sin^2 60° - \frac{1}{4}\right)}$.

8) $\frac{27\cot^4 60°}{\sin 30° \cdot \cos 45° \cdot \tan 60°}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2) $\frac{1}{2}$

3) 2

4) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

5) $\frac{3}{4}$

6) 9

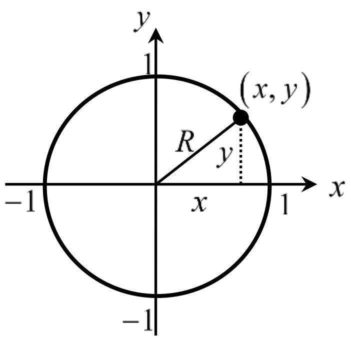
7) $-\frac{1}{3}$

8) $2\sqrt{6}$

מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

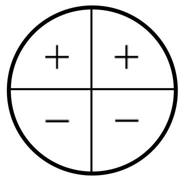
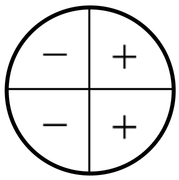
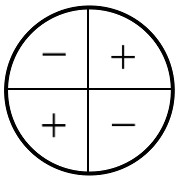
סיכום כללי:

הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ מתאימות לזוויות של $0°$, $90°$, $180°$, $270°$.

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
II III VI	$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ $\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$ $\sin(-a)=-\sin\alpha$	$\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(180^o+\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(180^o-\alpha)=-\tan\alpha$ $\tan(180^o+\alpha)=\tan\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
סימנים			

זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{array}{l}\tan(\alpha+180°k)=\tan\alpha\\ \cot(\alpha+180°k)=\cot\alpha\end{array}}\ ,\ \boxed{\begin{array}{l}\sin(\alpha+360°k)=\sin\alpha\\ \cos(\alpha+360°k)=\cos\alpha\end{array}}$$

כאשר k הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

שאלות:

1) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120°$
ב. $\cos 150°$
ג. $\tan 160°$
ד. $\cot 130°$
ה. $\sin 215°$
ו. $\cos 245°$
ז. $\tan 230°$
ח. $\cot 200°$
ט. $\sin 300°$
י. $\cos 310°$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150°$
ב. $\cos 210°$
ג. $\tan 120°$
ד. $\sin 330°$
ה. $\tan 225°$
ו. $\sin 315°$
ז. $\cos 120°$
ח. $\tan(-30°)$
ט. $\cos(-45°)$
י. $\sin 510°$
יא. $\cos 930°$
יב. $\tan(-225°)$

3) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

א. $\left(\sin 240° \cdot \tan 150° + \cos(-60°)\right)^2$.
ב. $8\sin^2 150° \cdot \tan 135° - 2 \cdot \sin 135° \cdot \cos(-135°)$.
ג. $\dfrac{\cot 225°}{\sin(-225°) - \cos 135°} + \tan^2 210°$.

4) הוכח כי אם α, β ו- γ הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

א. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$.
ב. $\sin\left(\dfrac{\gamma+\beta}{2}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\sin 60°$ ב. $-\cos 30°$ ג. $-\tan 20°$ ד. $-\cot 50°$
ה. $-\sin 35°$ ו. $-\cos 65°$ ז. $\tan 50°$ ח. $\cot 20°$
ט. $-\sin 60°$ י. $\cos 50°$

2) א. $\frac{1}{2}$ ב. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ג. $-\sqrt{3}$ ד. $-\frac{1}{2}$
ה. 1 ו. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ז. $-\frac{1}{2}$ ח. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
ט. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ י. $\frac{1}{2}$ יא. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ יב. -1

3) א. 1 ב. -1 ג. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$.

4) שאלת הוכחה.

סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

סכום והפרש עבור $\sin(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cos(\alpha\pm\beta)$ יחושב לפי:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta)&=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha\\ \cos(\alpha\pm\beta)&=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}.$$

סכום והפרש עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha\pm\beta)&=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\\ \cot(\alpha\pm\beta)&=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}\end{aligned}}.$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

א. $\sin 75°$
ב. $\sin 15°$
ג. $\sin 105°$
ד. $\sin(-15°)$
ה. $\cos 75°$
ו. $\cos 15°$
ז. $\cos(-105°)$
ח. $\cos 165°$
ט. $\cos(-195°)$

2) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin 65°\cos 25°+\sin 25°\cos 65°$.
ב. $5\cos 50°\cos 20°+5\sin 50°\sin 20°$.

3) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\sin(60°+\alpha)+\sin(60°-\alpha)=\sqrt{3}\cos\alpha$.

ב. $\cos(45°-\alpha)-\cos(45°+\alpha)=\sqrt{2}\sin\alpha$.

ג. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

ד. $\tan\alpha-\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

4) נתון: $\cos\beta=\dfrac{8}{17}$, $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ ו- α,β זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של α ו- β חשב:

א. $\sin(\alpha+\beta)$.

ב. $\cos(\alpha+\beta)$.

ג. $\tan(\alpha+\beta)$.

5) הוכח את הזהות: $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$.

6) הוכח את הזהות: $(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin2\alpha+\cos2\alpha)=\sin3\alpha+\cos\alpha$.

7) הוכח את הזהות: $\tan7\alpha-\tan5\alpha-\tan2\alpha=\tan7\alpha\tan5\alpha\tan2\alpha$.

8) הוכח את הזהות: $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

9) הוכח את הזהות: $\cot\alpha-\cot\beta=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

10) הוכח את הזהות הבאה:

$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

11) הוכח כי מתקיים: $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$.

12) הוכח כי מתקיים: $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$.

13) נתון כי: $\sin 76^\circ = m$. הבע את $\sin 31^\circ$ באמצעות m.

14) הזוויות α ו- β הן זוויות חדות.
נתון כי: $\tan\alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$ ו- $\tan\beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$.
הראה כי מתקיים: $\alpha + \beta = 60^\circ$.

15) היעזר בנוסחה: $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$ ומצא את $\tan x$ ו- $\tan y$
אם ידוע כי: $\tan(x+y) = -3$ ו- $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$. הבחן בין שני מקרים.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ב. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ג. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ד. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ה. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
ו. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ז. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ח. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ט. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) א. 1 ב. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

3) שאלת הוכחה.

4) א. $\frac{84}{85}$ ב. $-\frac{13}{85}$ ג. $-6\frac{6}{13}$

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(m-\sqrt{1-m^2}\right)$.

15) שאלת הוכחה.

16) 1 ו-2 או $-\frac{1}{2}$ ו- -1.

זווית כפולה:

סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\\&\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}}$$

שאלות:

1) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$

ב. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$

ג. $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$

ד. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

ה. $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\cot 2\alpha$

ו. $\dfrac{\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \dfrac{1}{2}\cot 2\alpha$

ז. $\cos^2 2\alpha = 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha + 1$

ח. $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

2) הוכח את הזהות: $\sin^3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ע״י כתיבה של $\sin 3\alpha$ לפי: $\sin(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

3) הוכח את הזהות: $\cos^3\alpha = \dfrac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$ ע״י כתיבה של $\cos 3\alpha$ לפי: $\cos(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

4) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\sin\alpha = \dfrac{40}{41}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\cos\alpha$.

ב. $\tan\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

ה. $\tan 2\alpha$.

5) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\tan\alpha=\frac{5}{12}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\sin\alpha$.

ב. $\cos\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

6) נתונה זווית α ברביע הראשון וזווית β ברביע השני המקיימות: $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ ו- $\cos\beta=-0.8$. מבלי למצוא את α ו- β חשב את הביטויים הבאים:

א. $\sin(\alpha+\beta)$.

ב. $\cos(\alpha+\beta)$.

ג. $\sin(2\alpha+\beta)$.

7) נתון כי $\sin\alpha+\cos\alpha=1.2$ עבור $0°<\alpha<90°$. חשב את $\sin 2\alpha$.

8) פשט את הביטוי הבא: $\sqrt{\frac{1+\cos 8\alpha}{2}}$.

9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 16°\cos 16°}{3-6\sin^2 29°}$.

10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin^2 78°-\cos^2 78°}{\sin 66°}$.

11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{5\tan 15°\left(1-2\cos^2 15°\right)}{1-\tan^2 15°}$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) א. $\frac{9}{41}$ ב. $4\frac{4}{9}$ ג. $\frac{720}{1681}$ ד. $-\frac{1519}{1681}$
ה. $-\frac{720}{1519}$
5) א. $\frac{5}{13}$ ב. $\frac{12}{13}$ ג. $\frac{120}{169}$ ד. $\frac{119}{169}$
6) א. $\frac{16}{65}$ ב. $-\frac{63}{65}$ ג. $-\frac{123}{845}$
7) 0.44.
8) $\cos 4\alpha$.
9) $\frac{1}{6}$.
10) 1.
11) -1.25.

סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

שאלות:

1) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 5\alpha+\sin 3\alpha=2\sin 4\alpha\cos\alpha$.

2) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha-\sin 2\alpha=2\sin 2.5\alpha\cos 4.5\alpha$.

3) הוכח את הזהות הבאה: $\cos\alpha+\cos 5\alpha=2\sin 2\alpha\cos 3\alpha$.

4) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 5\alpha-\cos 2\alpha=-2\sin 3.5\alpha\cos 1.5\alpha$.

5) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha$.

6) הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

7) הוכח את הזהות הבאה: $\sin(2\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin\beta$.

8) הוכח את הזהות הבאה: $\dfrac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\sin 4\alpha-\sin 2\alpha}=2\cos\alpha$.

9) הוכח את הזהות הבאה: $2\sin\alpha = \frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha}$.

10) הוכח את הזהות הבאה: $\tan 2\alpha = \frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$.

11) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{2\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} = \tan\alpha + \tan 3\alpha$.

12) פשט את הביטוי: $\frac{1+\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}$ ומצא את ערכו מבלי להיעזר
במחשבון אם ידוע כי $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$.

13) נתון כי α ו- β הן זוויות חדות המקיימות: $\sin\alpha = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ ו- $\sin\beta = \frac{n^2-m^2}{m^2+n^2}$.
הראה כי: $\alpha + \beta = 90°$.

14) היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\cos 6\alpha\cos 2\alpha - \cos 5\alpha\cos\alpha = -\sin 7\alpha\sin\alpha$.

15) היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\sin 4\alpha\sin 2\alpha - \sin 5\alpha\sin\alpha + \cos 3\alpha\cos\alpha = \cos 2\alpha$.

16) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 52.5° \cdot \sin 7.5°$.

17) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 35° \sin 55°}{\cos 40° \cos 20° - 0.25}$.

18) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\cos 20° \cos 40° \cos 80°$.

19) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 5° \cdot \sin 25° \cdot \sin 35° \cdot \sin 55° \cdot \sin 65° \cdot \sin 85°$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) $-\frac{7}{9}$.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.
17) 1.
18) $\frac{1}{8}$.
19) $\frac{1}{64}$.

מכפלת פונקציות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום :

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

שאלות:

1) הוכח את הזהות הבאה : $\sin7\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}(\sin8\alpha+\sin6\alpha)$.

2) הוכח את הזהות הבאה : $\cos11\alpha\sin3\alpha=\frac{1}{2}(\sin14\alpha-\sin8\alpha)$.

3) הוכח את הזהות הבאה : $\cos4\alpha\cos10\alpha=\frac{1}{2}(\cos6\alpha+\cos14\alpha)$.

4) הוכח את הזהות הבאה : $\sin3\alpha\sin7\alpha=\frac{1}{2}(\cos4\alpha-\cos10\alpha)$.

5) הוכח את הזהות הבאה : $2\sin7\alpha\sin2\alpha+\cos9\alpha=\cos5\alpha$.

6) הוכח את הזהות הבאה : $\sin7\alpha\cos4\alpha-\sin4\alpha\cos\alpha=\sin3\alpha\cos8\alpha$.

7) הוכח את הזהות הבאה : $\sin\alpha\sin3\alpha=\cos2\alpha-\cos3\alpha\cos\alpha$.

8) הוכח את הזהות הבאה : $2\left(\sin^2\beta-\sin^2\alpha\right)=\cos2\alpha-\cos2\beta$.

9) הוכח את הזהות הבאה : $\frac{2}{\cot\beta-\tan\alpha}=\tan(\alpha+\beta)-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 26 - משוואות טריגונומטריות

תוכן העניינים

משוואות טריגונומטריות כלליות:

סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית נתונה/ידועה:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin\alpha$	$x_1 = \alpha + 360°k \ \ , \ x_2 = 180° - \alpha + 360°k$
$\cos x = \cos\alpha$	$x_{1,2} = \pm\alpha + 360°k$
$\tan x = \tan\alpha$	$x = \alpha + 180°k$
$\cot x = \cot\alpha$	$x = \alpha + 180°k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

א. $\sin x = \frac{1}{2}$ ב. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ד. $\sin x = -\frac{1}{2}$

2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

א. $\cos x = \frac{1}{2}$ ב. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

א. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ב. $\tan x = -1$

4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית):

א. $\sin x = 0.7$ ב. $\cos x = -0.6$ ג. $\tan x = 5$

5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות):

א. $\sin 3x = \frac{1}{2}$ ב. $2\cos 2x = -\sqrt{3}$

ג. $\tan 5x = -1$ ד. $3\sin 2x = 2$

ה. $3\cos 3x = 1$ ו. $2\tan 4x = 1$

6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב):

א. $\sin(2x+30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. $\cos(75°-3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\tan(50°-x) = 1.3$

7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים):

א. $\sin x = \sin 3x$ ב. $\sin 2x = \sin(x+30°)$

ג. $\sin x = \sin(120°-x)$ ד. $\cos x = \cos 3x$

ה. $\cos x = \cos(40°-x)$ ו. $\tan x = \tan 3x$

ז. $\tan 2x = \tan(60°-x)$

8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות):

א. $\sin x = 0$ ב. $\sin x = 1$

ג. $\sin x = -1$ ד. $\cos x = 0$

ה. $\cos x = 1$ ו. $\cos x = -1$

ז. $\tan x = 0$ ח. $\tan x = 1$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1 = 30° + 360°k$, $x_2 = 150° + 360°k$ ב. $x_1 = 45° + 360°k$, $x_2 = 135° + 360°k$

ג. $x_1 = -60° + 360°k$, $x_2 = 240° + 360°k$ ד. $x_1 = -30° + 360°k$, $x_2 = 210° + 360°k$.

2) א. $x_{1,2} = \pm 60° + 360°k$ ב. $x_{1,2} = \pm 150° + 360°k$.

3) א. $x = 30° + 180°k$ ב. $x = 135° + 180°k$.

4) א. $x_1 = 44.427° + 360°k$, $x_2 = 135.573° + 360°k$

ב. $x_{1,2} = 126.87° + 360°k$ ג. $x = 78.69° + 180°k$.

5) א. $x_1 = 10° + 120°k$, $x_2 = 50° + 120°k$ ב. $x_1 = 75° + 180°k$, $x_2 = -75° + 180°k$

ג. $x = -9° + 36°k$ ד. $x_1 = 20.9° + 180°k$, $x_2 = 69.09° + 180°k$

ה. $x_{1,2} = \pm 23.5° + 120°k$ ו. $x = 6.64° + 45°k$.

6) א. $x_1 = 105° + 180°k$, $x_2 = -45° + 180°k$

ב. $x_1 = 10° + 120°k$, $x_2 = 40° + 120°k$ ג. $x = -2.431° + 180°k$.

7) א. $x_1 = 180°k$, $x_2 = 45° + 90°k$ ב. $x_1 = 30° + 360°k$, $x_2 = 50° + 120°k$

ג. $x = 60° + 180°k$ ד. $x = 90°k$

ה. $x = 20° + 180°k$ ו. $x = 180°k$ ז. $x = 20° + 60°k$.

8) א. $x = 180°k$ ב. $x = 90° + 360°k$ ג. $x = 180° + 360°k$

ד. $x = 90° + 180°k$ ה. $x = 360°k$ ו. $x = 180° + 360°k$

ז. $x = 180°k$ ח. $x = 45° + 180°k$.

משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע״י הוצאת גורם משותף, ע״י נוסחאות הכפל המקוצר וע״י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

1) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

2) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

3) $\tan^2 2x = 3$

4) $\sin x \cos 3x = 0$

5) $\sin 2x - 2\sin^2 2x = 0$

6) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$

7) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

8) $3\sin^2 x - \sin x = 2$

9) $6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

10) $\cos^2 x + 2\cos x = 3$

11) $\tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0$

12) $\tan^2 x = 4\tan x - 1$

13) $\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0$

14) $\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0$

15) $\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0$

תשובות סופיות:

1) $x_{1,2}=\pm30°+360°k\ ,\ x_{3,4}=\pm150°+360°k$.

2) $x_1=30°+360°k\ ,\ x_2=150°+360°k\ ,\ x_3=330°+360°k\ ,\ x_4=210°+360°k$.

3) $x_1=30°+90°k\ ,\ x_2=-30°+90°k$.

4) $x_1=180°k\ ,\ x_2=30°+60°k$.

5) $x_1=90°k\ ,\ x_2=15°+180°k\ ,\ x_3=75°+180°k$.

6) $x_1=90°+180°k\ ,\ x_{2,3}=\pm150°+360°k$.

7) $x_1=90°+360°k\ ,\ x_2=210°+360°k\ ,\ x_3=-30°+360°k$.

8) $x_1=90°+360°k\ ,\ x_2=-41.8°+360°k\ ,\ x_3=221.8°+360°k$.

9) $x_1=30°+360°k,\ x_2=150°+360°k,\ x_3=-19.4°+360°k,\ x_4=199.4°+360°k$.

10) $x=360°k$.

11) $x_1=-45°+180°k\ ,\ x_2=75.964°+180°k$.

12) $x_1=75°+180°k\ ,\ x_2=15°+180°k$.

13) $x=360°k$.

14) $x=180°+360°k$.

15) $x=45°+90°k\ ,\ x\neq-45°+180°k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:

קשרים בין פונקציות	$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$
זוויות משלימות ל- $90°$	$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$	$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$
	$\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$	$\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$
קשרים בין פונקציות	$\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x=\cos x$

2) $\sin x=\cos(x+45°)$

3) $\cos x=\frac{2}{3}\sin^2 x$

4) $2\cos^2 x=3\sin x$

5) $\sin^2 x-\cos x=\frac{1}{4}$

6) $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x$

7) $\sin^2 x+2\cos^2 x=1.5$

8) $\sin x-\tan x=0$

תשובות סופיות:

1) $x = 45° + 180°k$.

2) $x = 22.5° + 180°k$.

3) $x_{1,2} = \pm 60° + 360°k$.

4) $x_1 = 30° + 360°k$, $x_2 = 150° + 360°k$.

5) $x_{1,2} = \pm 60° + 360°k$.

6) $x_1 = 30° + 120°k$, $x_2 = -90° + 360°k$

7) $x_{1,2} = \pm 45° + 360°k$, $x_{3,4} = \pm 135° + 360°k$.

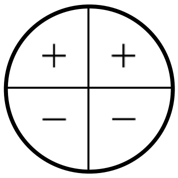
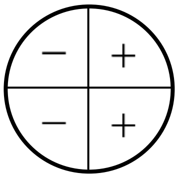
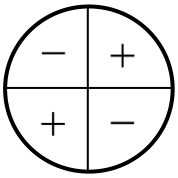
8) $x = 180°k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
I II III	$\sin\left(180^o-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\sin\left(180^o+\alpha\right)=-\sin\alpha$	$\cos\left(180^o-\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\cos\left(180^o+\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\cos\left(-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\tan\left(180^o-\alpha\right)=-\tan\alpha$ $\tan\left(180^o+\alpha\right)=\tan\alpha$ $\tan\left(-\alpha\right)=-\tan\alpha$
סימנים			

זהויות עבור זוויות הגדולות מ-360 מעלות:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\left(\alpha+360°k\right)&=\sin\alpha\\ \cos\left(\alpha+360°k\right)&=\cos\alpha\end{aligned}}\quad , \quad \boxed{\begin{aligned}\tan\left(\alpha+180°k\right)&=\tan\alpha\\ \cot\left(\alpha+180°k\right)&=\cot\alpha\end{aligned}}$$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x=-\sin 3x$

2) $\cos 2x=-\cos 3x$

3) $\sin\left(x+30°\right)=-\cos x$

4) $\sin 3x=-\cos\left(180°-x\right)$

תשובות סופיות:

1) $x_1=90°k\ ,\ x_2=-90°+180°k$

2) $x_1=180°+360°k\ ,\ x_2=36°+72°k$

3) $x=120°+180°k$

4) $x_1=22.5°+90°k\ ,\ x_2=45°+180°k$

משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה: $\sin x = a\cos x$ לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע״י חלוקה ב-$\cos x$ (בתנאי ש-$\cos x \neq 0$).
כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a\cos x \quad / : \cos x \neq 0$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = a\frac{\cos x}{\cos x}$$
$$\tan x = a$$
$$x = \tanh^{-1}(a) + 180°k$$

הערה:

יש לבדוק האם ערכי x שמקיימים $\cos x = 0$ מהווים פתרון למשוואה.
אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x = 2\cos x$

2) $3\sin x = \cos x$

3) $4\sin x = 7\cos x$

4) $2\sin x = -5\cos x$

5) $\sin^2 x = 8\cos^2 x$

6) $3\sin^2 x = \cos^2 x$

תשובות סופיות:

1) $x = 63.43° + 180°k$.

2) $x = 18.43° + 180°k$.

3) $x = 60.25° + 180°k$.

4) $x = -68.19° + 180°k$.

5) $x_1 = 70.52° + 180°k$, $x_2 = -70.52° + 180°k$.

6) $x_1 = 30° + 180°k$, $x_2 = -30° + 180°k$.

משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:

סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס	$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס	$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ $\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $2\sin x=\sin(60°-x)$

2) $\sin(x+45°)\sin(x-45°)=\dfrac{1}{2}$

3) $\dfrac{\cos3x}{\sin x}-\dfrac{\sin3x}{\cos x}=2$

4) $3\cos^2x-\sin^2x=\sin3x$

תשובות סופיות:

1) $x=19.11°+180°k$.

2) $x=90°+180°k$.

3) $x=15°+60°k$.

4) $x_{1,2}=\pm60°+180°k\ ,\ x_3=90°+360°k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

סינוס זווית כפולה	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
קוסינוס זווית כפולה	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x - \sin 2x = 0$
2) $\sqrt{2}\sin x + \sin 2x = 0$
3) $4\cos x = \sin 2x$
4) $2\cos 2x + \sin 4x = 0$
5) $3\cos x - \cos 2x = 0$
6) $\cos 2x = 2\sin x$
7) $\sin x + \cos 2x = 1$
8) $2\sin^2 x = \cos 2x + 2$

תשובות סופיות:

1) $x_1 = 360°k \ , \ x_2 = 60° + 120°k$
2) $x_1 = 180°k \ , \ x_{2,3} = \pm 135° + 360°k$
3) $x = 90° + 180°k$
4) $x_1 = 45° + 90°k \ , \ x_2 = 135° + 180°k$
5) $x_{1,2} = \pm 106.307° + 360°k$
6) $x_1 = 21.1° + 360°k \ , \ x_2 = 158.9° + 360°k$
7) $x_1 = 180°k \ , \ x_2 = 30° + 360°k \ , \ x_3 = 150° + 360°k$.
8) $x_1 = -60 + 360°k \ , \ x_2 = 60° + 360°k \ , \ x_3 = 120° + 360°k \ , \ x_4 = 240° + 360°k$.

משוואות מהצורה: a sin(x) + b cos(x) = c :

סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה: $a\sin x+b\cos x=c$ לצורה: $\sin x+\frac{b}{a}\cos x=\frac{c}{a}$.

מציאת זווית α המקיימת: $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ תאפשר לכתוב: $\sin x+\tan\alpha\cdot\cos x=\frac{c}{a}$.

שימוש בזהות: $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ובזהות: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ יובילו:

$$\sin x+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos x=\frac{c}{a}\quad /\cdot\cos\alpha$$

$$\sin x\cos\alpha+\sin\alpha\cos x=\frac{c}{a}\cos\alpha$$

$$\sin(x+\alpha)=\frac{c}{a}\cos\alpha$$

אם נסמן: $\frac{c}{a}\cos\alpha=k$ נקבל את המשוואה: $\sin(x+\alpha)=k$ כאשר α ו- k ידועים.
מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $10\sin x+3\cos x=5$

2) $5\cos x-6\sin x=1$

3) $\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x=\sqrt{12}$

4) $\frac{1}{2}\sin x+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}$

5) $\cos x+\cos(60^\circ+x)=\sqrt{2}+\cos(60^\circ-x)$

תשובות סופיות:

1) $x_1=11.91^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=134.69^\circ+360^\circ k$

2) $x_1=227.156^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=32.44^\circ+360^\circ k$

3) $x=15^\circ+180^\circ k$

4) $x_1=-60^\circ+720^\circ k\ ,\ x_2=180^\circ+360^\circ k$

5) $x_1=-105^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=15^\circ+360^\circ k$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סכום והפרש פונקציות עבור סינוס	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
סכום והפרש פונקציות עבור קוסינוס	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x+\sin 3x=\sin 2x$.

2) $\cos 2x-\cos 6x=\sin 2x$.

3) $\sin x+\sin 3x=4\sin^3 x$.

4) $\sin 6x-\sin 4x=1-\cos 2x$.

5) $(\sin 5x+\sin 7x)^2=(\cos 5x+\cos 7x)^2$.

6) $2\cos^2\frac{x}{2}+\cos 3x+\cos 5x=1$.

7) $1+\sin x+\sin 7x=\cos 8x$.

8) $2\sin 3x(\cos 2x+\cos x)=\sin x+\sin 2x$.

9) $\sin(x+60°)-\sin x=\sin(2x+60°)-\sin 2x$.

10) $\cos^2 3x-\cos^2 x=\sin x\cos x$.

11) $\sin 8x\sin 2x+\cos 10x=0$.

12) $\cos x+3\sin x=1+2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

13) $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x-\sin 4x=0$.

14) $4\cos x\cos 2x\cos 3x=1$.

תשובות סופיות:

1) $x_{1,2}=\pm 60°+360°k\ ,\ x_3=90°k$.

2) $x_1=45°+90°k\ ,\ x_2=180°k$.

3) $x_1=37.5°+90°k\ ,\ x_2=7.5°+90°k\ ,\ x_3=90°k$.

4) $x_1=15°+60°k\ ,\ x_2=180°k\ ,\ x_3=-22.5°+90°k$.

5) $x_1=36°k\ ,\ x_2=\left(\frac{180}{7}\right)°+\left(\frac{180}{7}\right)°k$.

6) $x_{1,2}=\pm 30°+90°k\ ,\ x_3=90°+180°k$.

7) $x_1=-\left(12\frac{6}{7}\right)°k+\left(51\frac{3}{7}\right)°k\ ,\ x_2=45°k$.

8) $x_1=40°k\ ,\ x_2=180°+360°k$.

9) $x_1=-20°+120°k\ ,\ x_2=360°k$.

10) $x_1=52.5°+90°k\ ,\ x_2=-7.5°+90°k\ ,\ x_3=90°k$.

11) $x_1=45°+90°k\ ,\ x_2=11.25°+22.5°k$.

12) $x_1=30°+360°k\ ,\ x_2=150°+360°k$.

13) $x_1=7.5°+15°k\ ,\ x_2=90°k$.

14) $x_1=60°+180°k\ ,\ x_2=22.5+45°k$.

משוואות עם תחום נתון:

סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- k ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

1) $8\sin x-4=0$, $[0°:180°]$.

2) $\sin 2x=\sin(x+60°)$, $[-90°:90°]$.

3) $3\cos(2x+30°)+1=0$, $[-90°:90°]$.

4) $\cos(50°-x)=-\cos x$, $[0°:360°]$.

5) $2\sin 3x-5\cos 3x=0$, $[-30°:30°]$.

6) $2\cos^2 3x=\sin 6x+1$, $[0°:180°]$.

7) $\cos 4x+1=3\sin 2x$, $[-180°:180°]$.

8) $\cos 2x+\cos^2 x+\sin x=0$, $[-180°:180°]$.

תשובות סופיות:

1) $x=30°\ ,\ 150°$.

2) $x=-80°\ ,\ 40°\ ,\ 60°$.

3) $x=39.736°\ ,\ -69.736°$.

4) $x=115°\ ,\ 295°$.

5) $x=22.733°$.

6) $x=7.5°\ ,\ 37.5°\ ,\ 67.5°\ ,\ 97.5°\ ,\ 127.5°\ ,\ 157.5°$.

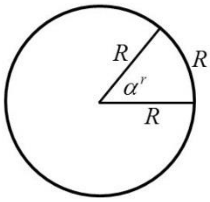
7) $x=-165°\ ,\ -105°\ ,\ 15°\ ,\ 75°$.

8) $x=-138.19°\ ,\ -41.81°\ ,\ 90°$.

משוואות עם זוויות ברדיאנים:

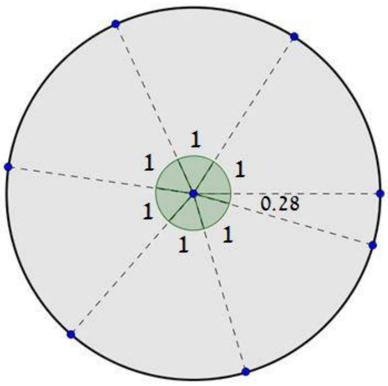
סיכום כללי:

הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו R, תימצאנה 2π רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא $P=2\pi\cdot R$.



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל-$2\pi=6.28$ קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל.
הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד,
כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן.
מקבלים 2π רדיאנים.

קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית α° (במעלות) לזווית α^r (ברדיאנים): $\alpha^r=\frac{\pi}{180}\alpha^\circ$.
- נוסחת מעבר מזווית α^r (ברדיאנים) לזווית α° (במעלות): $\alpha^\circ=\frac{180}{\pi}\alpha^r$.

פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות כאשר x הוא משתנה ו-α היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

המשוואה	הפתרון
$\sin x=\sin\alpha$	$x_1=\alpha+2\pi k\ \ ,\ \ x_2=\pi-\alpha+2\pi k$
$\cos x=\cos\alpha$	$x_{1,2}=\pm\alpha+2\pi k$
$\tan x=\tan\alpha$	$x=\alpha+\pi k$
$\cot x=\cot\alpha$	$x=\alpha+\pi k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

1) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

א. 30° ב. 90° ג. 75° ד. 120°

ה. 210° ו. 315° ז. 18° ח. 285°

ט. -15° י. -80° יא. 510° יב. -390°

2) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

א. π ב. 2π ג. 4π ד. 1.5π

ה. $\frac{1}{2}\pi$ ו. $\frac{\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{6}$ ח. $\frac{1}{18}\pi$

ט. $\frac{13}{18}\pi$ י. $\frac{19}{12}\pi$ יא. $1\frac{1}{6}\pi$ יב. $2\frac{1}{4}\pi$

3) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

א. $2\sin 3x = 1$, $\left[0 : \frac{1}{3}\pi\right]$

ב. $\sqrt{3} + 2\cos x = 0$, $[0 : \pi]$

ג. $3 - 3\tan\frac{x}{2} = 0$, $[0 : 2\pi]$

ד. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0 : \pi]$

ה. $4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$, $\left[0 : \frac{1}{2}\pi\right]$

ו. $\sin x = \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)$, $\left[-\frac{5\pi}{18} : \frac{5\pi}{18}\right]$

ז. $5 - 5\tan(4x - 0.1\pi) = 0$, $\left[0 : \frac{\pi}{3}\right]$

ח. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.7$, $\left[-\frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{4}\right]$

4) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

א. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$, $\left[0 : \frac{\pi}{2}\right]$

ב. $16\cos^2 2x - 1 = 0$, $\left[-\frac{\pi}{8} : \frac{\pi}{8}\right]$

ג. $2\tan^2 x - 18 = 0$, $[0 : \pi]$

ד. $3\sin x\cos x + 3\cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{3} : \frac{\pi}{3}\right]$

ה. $\sin^2 x - 5\sin x\cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]$

ו. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$, $[-\pi : \pi]$

ז. $4\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 1 = 0$, $[-\pi : 0]$

ח. $\tan^2 x - 7\tan x + 10 = 0$, $[0 : 2\pi]$

5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א. $0 \le x \le \pi \ , \ \sin x = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

ב. $0 \le x \le \pi \ , \ \tan x = 4\sin x$

ג. $0 \le x \le 2\pi \ , \ 2\sin^2 x = 3\cos x$

6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $[-\pi : \pi] \ , \ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב. $[0 : \pi] \ , \ \sin\left(2x+\frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג. $[0 : \pi] \ , \ \sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד. $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right] \ , \ \tan x = -\tan 2x$

7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א. $-\pi \le x \le \pi \ , \ \sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב. $[-\pi : \pi] \ , \ \cos 4x + 1 = 3\sin 2x$

ג. $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \ 2\sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד. $0 \le x \le \pi \ , \ \cos 4x + \sin^2 x = 1$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{5\pi}{12}$ ד. $\frac{2\pi}{3}$ ה. $\frac{7\pi}{6}$

ו. $\frac{7\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{10}$ ח. $\frac{19\pi}{12}$ ט. $-\frac{\pi}{12}$ י. $-\frac{4\pi}{9}$

יא. $\frac{17\pi}{6}$ יב. $-\frac{13\pi}{6}$.

2) א. $180°$ ב. $360°$ ג. $720°$ ד. $270°$ ה. $90°$

ו. $45°$ ז. $30°$ ח. $10°$ ט. $130°$ י. $285°$

יא. $210°$ יב. $405°$.

3) א. $x=\frac{5\pi}{18}\ ,\ \frac{\pi}{18}$ ב. $x=\frac{5\pi}{6}$ ג. $x=\frac{\pi}{2}$ ד. $x=\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{4}$

ה. $x=0$ ו. $x=\frac{2\pi}{9}$ ז. $x=0.0875\pi$ ח. $x=0.224\pi$.

4) א. $x=\frac{\pi}{3}$ ב. ϕ ג. $x=0.398\pi,0.602\pi$ ד. ϕ

ה. $x=0,0.437\pi$ ו. $x=\frac{5\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{6}$

ז. $x=-\frac{\pi}{4}\ ,\ -0.615\pi$ ח. $x=0.352\pi\ ,\ 0.437\pi\ ,\ 1.352\pi\ ,1.437\pi$.

5) א. $x=\frac{\pi}{8}$ ב. $x=0\ ,\ 0.42\pi\ ,\ \pi$ ג. $x=\frac{5\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{3}$

6) א. $x=-\frac{11\pi}{12}\ ,\ \frac{\pi}{12}$ ב. $x=\frac{59\pi}{72}\ ,\ \frac{23\pi}{72}$

ג. $x=\frac{9\pi}{10}\ ,\ \frac{5\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{10}$ ד. $x=\pm\frac{\pi}{3}\ ,\ 0$.

7) א. $x=\pm\frac{\pi}{2}\ ,\ -0.148\pi\ ,\ 0.852\pi$ ב. $x=\frac{11\pi}{12}\ ,\ \frac{5\pi}{12}\ ,\ \frac{\pi}{12}\ ,\ -\frac{7\pi}{12}$

ג. $x=\pm\frac{\pi}{3}$ ד. $x=0\ ,\ 0.38\pi\ ,\ 0.61\pi\ ,\ \pi$.

אי שוויונים טריגונומטריים:

סיכום כללי:

כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:

1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
   - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
   - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

הערה:

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $\sin x < \frac{1}{2}$ $[0,180°]$

2) $2\cos x - \sqrt{3} \ge 0$ $[0,1.5\pi]$

3) $2\cos^2 x + \sin x \ge 1$ $(-90°,90°)$

4) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0$ $[0,\pi]$

5) $1 < 2\sin(x+10°) < \sqrt{3}$ $[0°,180°]$

6) $\sin x + \sqrt{3}\cos x \ge 1$ $(0 < x < \pi)$

7) $\tan x + \cot x > 0$ $[0,2\pi]$

8) $|\tan(x)| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ $(-\pi < x < \pi)$

תשובות סופיות:

1) $0^\circ \le x < 30^\circ$, $150^\circ \le x \le 180^\circ$.

2) $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

3) $-30^\circ \le x < 90^\circ$.

4) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$.

5) $20^\circ < x < 50^\circ$, $110^\circ < x < 140^\circ$.

6) $0 < x \le \frac{\pi}{2}$.

7) $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

8) $x \ne \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ או: $x \ne -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}$.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

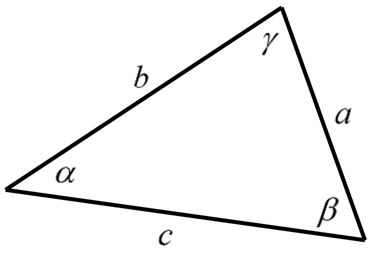
פרק 27 - טריגונומטריה במישור

תוכן העניינים

שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים:

סיכום כללי:

משפט הסינוסים:



במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע
והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.
בצורה מתמטית: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.

משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן
בקוסינוס הזווית שביניהן: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ או $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

מתי נשתמש בכל משפט:

- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
  א. נתונות שתי זוויות וצלע.
  ב. נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
  ג. נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.

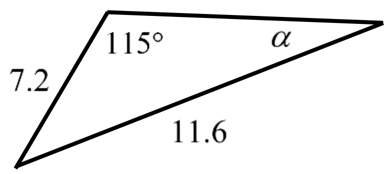
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
  א. נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
  ב. נתונות שלוש צלעות.

- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

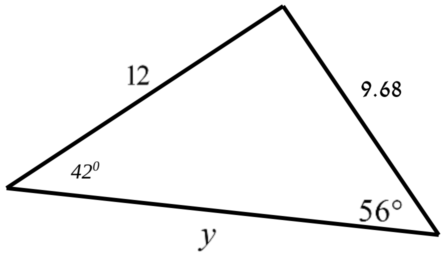
שאלות:

1) מצא את ערכו של $a / x / y$ במשולשים הבאים
(R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ) :

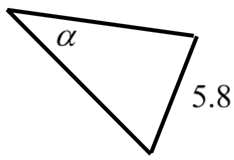
א.



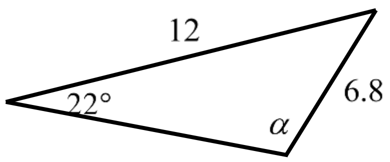
ב.



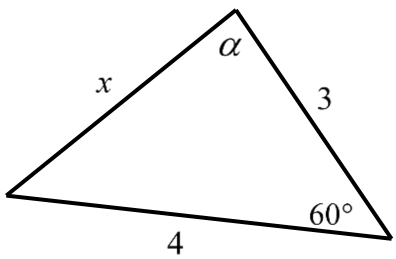
ג. רדיוס המעגל: $R = 7$.



ד.

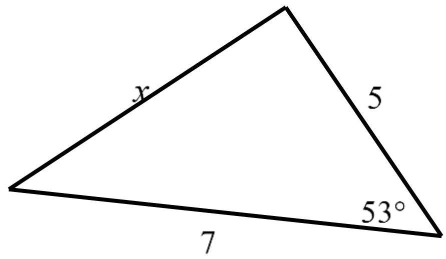


ה.

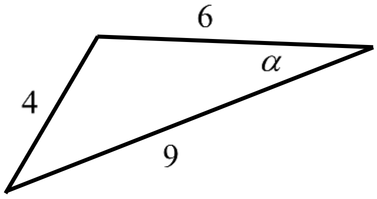


2) מצא את ערכו של α / x במשולשים הבאים:

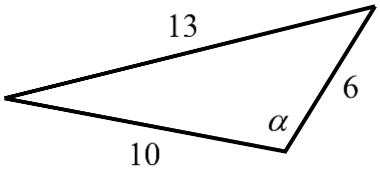
א.



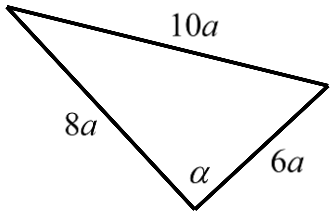
ב.



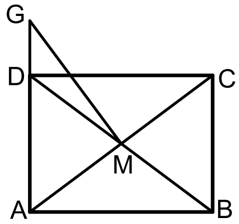
ג.



ד.

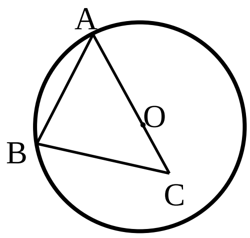


3) נתון משולש שווה שוקיים ABC (AB=AC) שאורך השוק שלו הוא 22 ס״מ
וגודלה של זווית הבסיס בו הוא $70°$. CD הוא חוצה זווית הבסיס $\sphericalangle C$.
מצא את אורכו של הקטע AD.



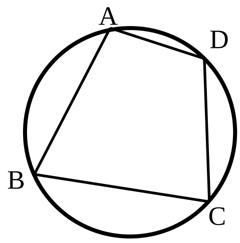
4) אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה M.
הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD.
נתון: $AD = 3$ ס״מ, $AB = 4$ ס״מ, $DG = 1.2$ ס״מ.
מצא את גודלו של הקטע GM.

5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס״מ ו-11 ס״מ חסום במעגל
שאורך רדיוסו הוא 6 ס״מ.
חשב את זוויות המרובע.

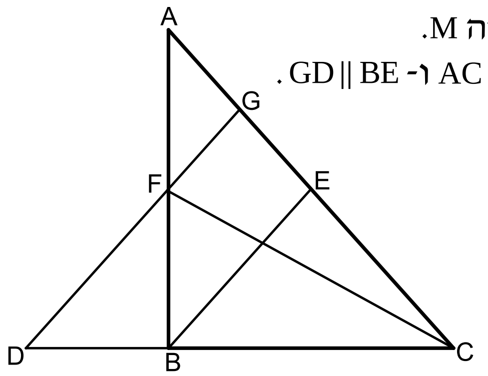


6) הצלע AB במשולש ABC היא מיתר במעגל שמרכזו O.
הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט.
נתון: $BC = 9$ ס״מ, $OC = 3$ ס״מ, $\sphericalangle BAC = 38°$.
מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB.

7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של $30°$ עם
צלע אחת של המקבילית וזווית של $61.05°$ עם הצלע הסמוכה לה.
אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס״מ מהצלע הסמוכה לה.
חשב את היקף המקבילית.



8) המרובע ABCD חסום במעגל.
נתון: $AB = 6$ ס״מ, $BC = 9$ ס״מ, $CD = 10$ ס״מ
ו-$AD = 4$ ס״מ.
מצא את אורכם של האלכסון AC ושל רדיוס המעגל.

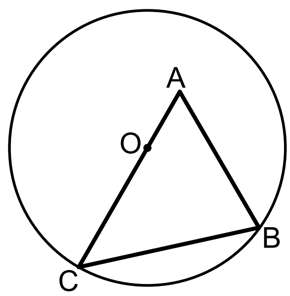


9) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.
מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: AC = DC ו- BE || GD.

א. הוכח: $\frac{AG}{BD}=\frac{3}{4}$.

ב. נתון כי: ME = 4 ס"מ.
חשב את אורך הקטע DG.

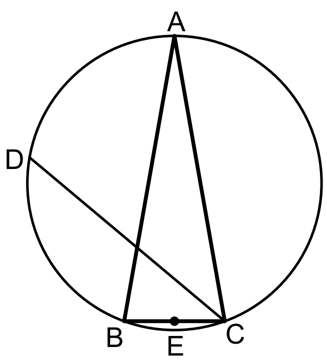
ג. נתון כי: $\sphericalangle ACD = 48.189^\circ$
הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.



10) נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא 60°.

א. חשב את רדיוס המעגל.

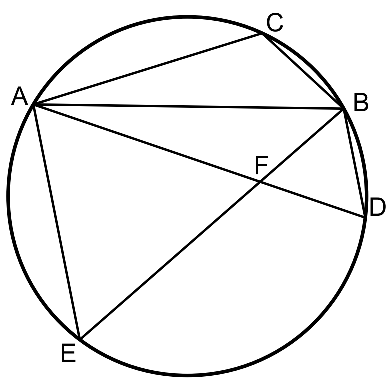
ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD
כך שנוצר המשולש ADB.
חשב את זווית ADB.



11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC)
החסום במעגל שרדיוסו R.
הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D
היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$.
ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא 80°.

א. הבע באמצעות R את הקטעים CD ו-DE.

ב. r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED.
הבע באמצעות R את r.

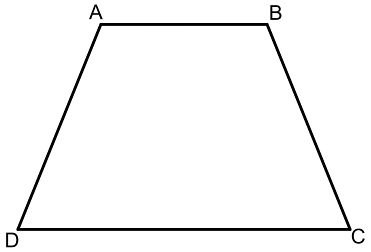


12) AB, AC ו-AD הם מיתרים במעגל המקיימים: $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BC}$.
מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את
המיתרים AE ו-BE.
המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F.
נתון כי: AC = AF = EF.

א. הוכח: $\Delta ABF \cong \Delta ABC$.

ב. נתון גם: $3\cdot\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAE$.
הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.

13) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB \parallel CD\,,\ AD = BC)$.



מידות הטרפז הן:

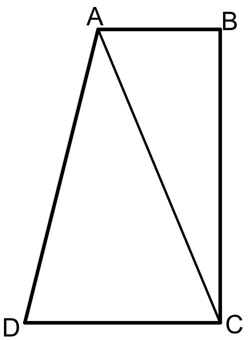
AB = 6 ס"מ , BC = 8 ס"מ , CD = 12 ס"מ.

א. מצא את זווית C (עגל למספר שלם).

ב. מצא את אורך אלכסון הטרפז.

ג. חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

14) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB \parallel CD\,,\ \sphericalangle B = 90^\circ)$.



מסמנים את הבסיס: $AB = t$ וידוע כי: $DC = 1.6t$, $AD = 3t$.

היקף הטרפז הוא: 40 ס"מ.

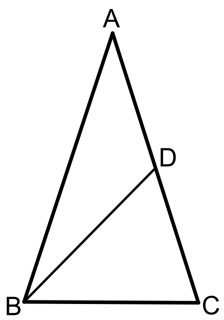
א. הבע באמצעות t את אורך האלכסון AC.

ב. ידוע גם כי: $\sphericalangle D = 60^\circ$.

i. חשב את אורך הקטע AC.

ii. חשב את שטח הטרפז.

15) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC) בעל זווית ראש 36° החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.



א. מצא את אורך הבסיס BC במשולש.

ב. חשב את אורך התיכון BD.

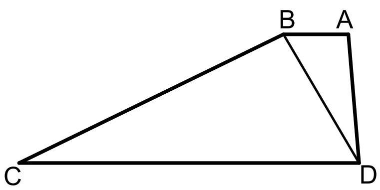
ג. מסמנים:

r_1 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.

r_2 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

הוכח את היחס הבא: $\frac{r_1}{r_2} = 2\cos 36$.

16) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.



מעבירים את האלכסון BD המקיים: $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADB$.

נתון כי: CD = 20 ס"מ , AD = 10 ס"מ , AB = 5 ס"מ.

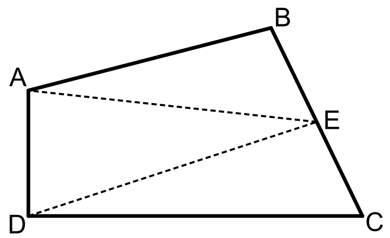
כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.

א. הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.

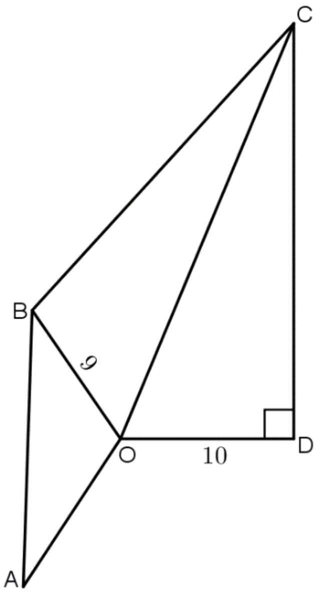
ב. חשב את זווית C.

ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

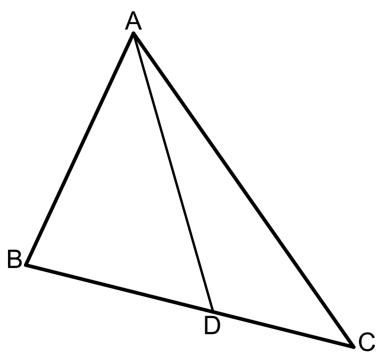
17) באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.
ידוע כי: $\sphericalangle D=90^\circ$.
נסמן את הצלעות באופן הבא: $AD=3x$, $CD=8x$, $BC=5x$, $AB=6x$.
א. חשב את זווית BCD.
ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.
מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך
ש-DE מקביל ל-AB.
חשב את היחס הבא: $\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}$.



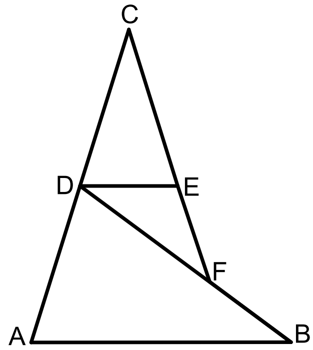
18) מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA , OB , OC ו-OD.
ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- α.
המשולש COD הוא ישר זווית $\sphericalangle CDO=90^\circ$.
נתונים האורכים: $DO=10$, $BO=9$.
מסמנים: $CD=1.5m$, $BC=1.4m$.
א. הבע באמצעות m את $\sin\alpha$.
(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).
ב. נתון גם כי: $AB=m$.
מצא את m אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם
את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.
ג. חשב את זווית BOC.



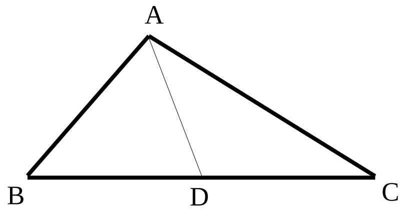
19) במשולש ABC הזווית A היא בת 60°.
מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית: $\sphericalangle ADB=60^\circ$.
ידוע כי $AB=\sqrt{28}$ וכי הצלע AD במשולש ABD
גדולה פי 1.5 מהצלע BD.
א. מצא את אורך הצלע BD.
ב. היקף המשולש ABC הוא: $P=5\sqrt{7}+7$.
i. סמן: $DC=t$ והבע באמצעות t
את אורך הצלע AC.
ii. מצא את t.
ג. חשב את שטח המשולש ABC.



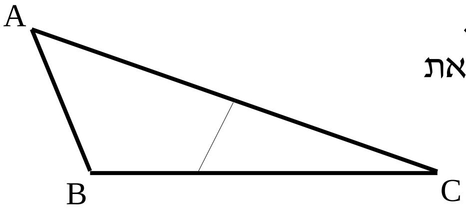
20) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.
הנקודות C , E ו-F נמצאות על אותו הישר.
ידוע כי המשולשים ABD , DEF ו-DCE הם
שווי שוקיים (AB = BD , DC = CE , EF = DE).
נתון כי: AD = 8.
א. חשב את אורך הקטע BF.
ב. מחברים את הנקודות B ו-C.
חשב את אורך הצלע BC.



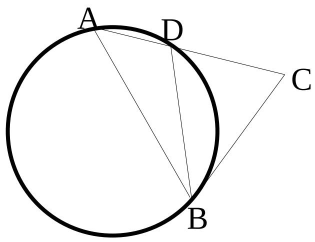
21) בשרטוט נתון: AB = 6 ס"מ , AC = 8 ס"מ ,
AD = 5 ס"מ. הנקודה D היא אמצע הצלע BC.
חשב את אורך הקטע BC.



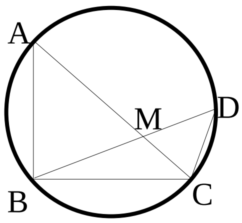
22) הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.
הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת
על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$.
נתון: $AB = a$, $BC = b$.
הבע באמצעות a ו-b את אורך הקטע DE.



23) המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R.
המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B
נפגשים בנקודה C. נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $\sphericalangle ADB = \beta$.
הבע באמצעות R, α ו-β את אורך הקטע BC.



24) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R,
שנפגשים בנקודה M. זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון: $AB = k$, $DM = p$, $DC = q$.
הבע באמצעות R, k, p ו-q את אורך הקטע MC.



תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 34.231°$ ב. $y =$ 14.33 ס"מ ג. $\alpha = 155.526°$ או $\alpha = 24.474°$
ד. $\alpha = 41.382°$ או $\alpha = 138.618°$ ה. $x =$ 3.606 ס"מ , $\alpha = 73.898°$

2) א. $x =$ 5.646 ס"מ ב. $\alpha = 20.742°$ ג. $\alpha = 105.962°$ ד. $\alpha = 90°$

3) AD = 13.064 ס"מ

4) GM = 3.360 ס"מ

5) $138.190°$, $41.810°$, $113.556°$, $66.444°$

6) AB = 14.56 ס"מ , $R =$ 9.242 ס"מ

7) $P =$ 22 ס"מ

8) AC = 10.790 ס"מ , $R =$ 5.395 ס"מ

9) DG = 18

10) $R =$ 10.5 ס"מ ב. $24.32°$

11) א. $\text{CD} = R\sqrt{3}$, $\text{DE} = 1.48R$ ב. $r = 1.15R$

13) א. $68°$ ב. 11.66 ס"מ ג. $R =$ 6.29 ס"מ

14) א. $\text{AC} = \sqrt{32.36t^2 - 448t + 1600}$ ב.i. 13 ס"מ ב.ii. 78 סמ"ר

15) א. 9.4 ס"מ ב.i. 10 ס"מ

16) ב. $\sphericalangle C = 28.9°$ ג. $R = 13.77$

17) א. $64.04°$ ב. $\frac{S_{\text{ABE}}}{S_{\text{ECD}}} = 0.817$

18) א. $\sin\alpha = \frac{1.5m}{\sqrt{100 + 2.25m^2}}$ ב. $m = 16$ ג. $56.94°$

19) א. 4 ב.i. $1.5\sqrt{28} + 3 - t$ ב.ii. 3 ג. $S = 18.18$

20) א. 4.94 ס"מ ב. 17.19 ס"מ

21) BC = 10 ס"מ

22) $\text{DE} = \sqrt{\frac{1}{9}b^2 - a^2}$

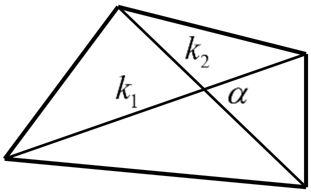
23) $\text{BC} = \frac{2R\sin\beta\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha}$

24) $\text{MC} = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{pqk}{R}}$

שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש:

סיכום כללי:

שטחים של משולשים ומרובעים:

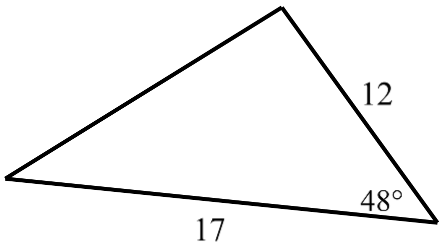


- שטח משולש ניתן לחישוב ע"י: $S=\dfrac{a\cdot h}{2}=\dfrac{ab\sin\gamma}{2}=\dfrac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$.
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסוניו: $S=\dfrac{k_1k_2\sin\alpha}{2}$.

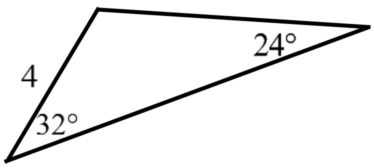
שאלות:

25) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

א.



ב.

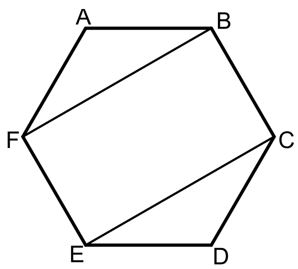


26) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של $15°$ עם הבסיסים.

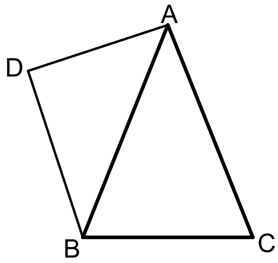
27) אורכו של מלבן הוא m ורוחבו n. הזווית שבין אלכסוני המלבן היא θ.
הוכח כי מתקיים: $\sin\theta=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$.

28) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$), BD חוצה את הזווית $\sphericalangle B$.
נתון: $AB=m$, $\sphericalangle A=\alpha$.
הבע באמצעות α ו-m את שטח המשולש BCD.

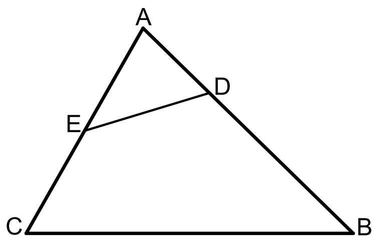
29) באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא S.
א. הבע באמצעות S את אורך צלע המשושה.
ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן BFEC.
הבע באמצעות S את שטח המלבן.



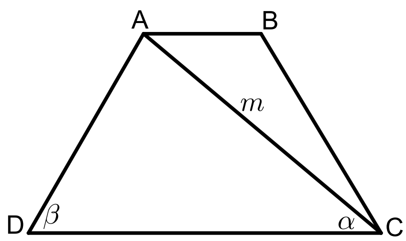
30) המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש α, (AB = AC).
אורך הבסיס BC הוא k.
על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו $\measuredangle D = 90°$.
א. הבע באמצעות k ו- α את אורך שוק המשולש ABC.
ב. הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$
וכי: $\measuredangle ABD = 40°$. מצא את זוויות המשולש ABC.
ג. חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי $k = 6$.



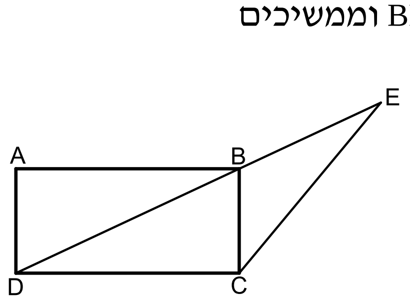
31) במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.
הנקודה E היא אמצע הצלע AC
והנקודה D מקיימת: 3 ס"מ = AD.
ידוע כי: $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$.
א. מצא את אורך הקטע DE.
ב. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
ג. חשב את שטח המרובע BCED.



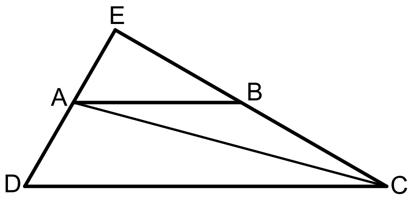
32) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$. הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.
מסמנים: $\measuredangle ADC = \beta$, $\measuredangle ACD = \alpha$, $AC = m$.
א. הבע באמצעות α, β ו- m את אורך הבסיס הגדול DC.
ב. נתון כי האלכסון AC מקיים: $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = 3$.
הבע באמצעות α, β ו- m את הבסיס AB.
ג. חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי: $\beta = 60°$, $\alpha = 40°$ ו- $m = 8$.



33) המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.
מחברים את הנקודה E עם הקודקוד C.
ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא $115°$.
א. מצא את אורך הקטע CE.
ב. מצא את אורך האלכסון BD.
ג. חשב את שטח המשולש DCE.

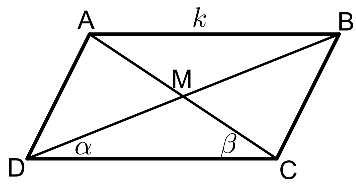


34) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם
בנקודה E. ידוע כי: $DE \perp CE$.
מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C.
מסמנים את הבסיס הגדול DC ב- k ואת: $\sphericalangle ACD = \alpha$.



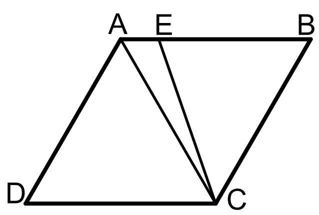
א. הבע באמצעות k ו- α את הבסיס הקטן AB.
ב. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.
ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר: $\alpha = 15°$, $k =$ 12 ס"מ.

35) נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים
את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים
בנקודה M כמתואר באיור.
מסמנים: $\sphericalangle ACD = \beta$, $\sphericalangle BDC = \alpha$, $AB = k$.



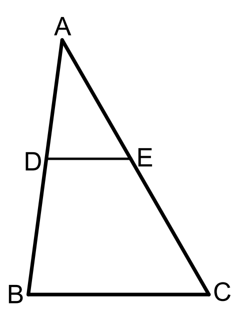
א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים: $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.
ב. ענה על השאלות הבאות:
i. הבע באמצעות α , β ו- k את שטח המשולש DMC.
ii. הבע באמצעות α , β ו- k את שטח המקבילית ABCD.
ג. נתון כי: $\frac{AC}{BD} = 2$. הראה כי שטח המקבילית הוא: $\frac{4k^2\sin^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

36) המרובע ABCD הוא מעוין ובו $\sphericalangle D = 60°$.
מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE
כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת
אותה ביחס: $\frac{BE}{AE} = 4$.

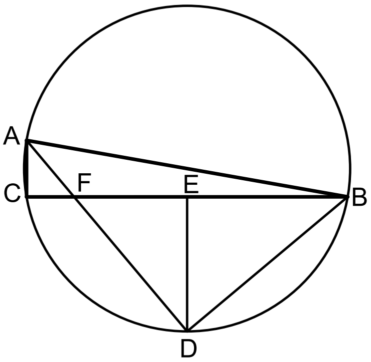


א. חשב את זווית AEC.
ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.

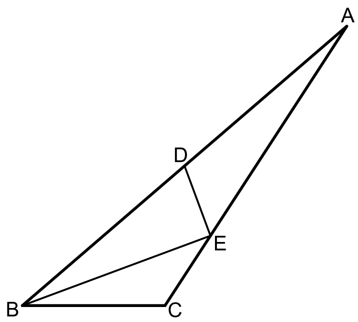
37) הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.
נתון כי: $CE = 13$, $BC = 15$, $BD = \sqrt{129}$.
ידוע כי זווית AED היא $60°$.



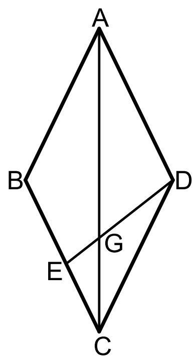
א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע
ב. כי הוא קטן מ-10 ס"מ.
ג. חשב את שטח המשולש ADE.



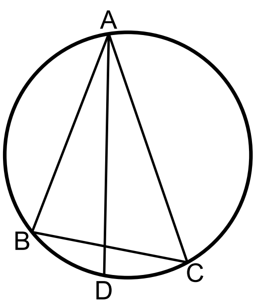
38) המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.
הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה
מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים
גובה DE לצלע BC .
מסמנים: $DE = k$ ונתון כי: $\sphericalangle ABC = 10°$.
א. הבע באמצעות k את רדיוס המעגל.
ב. הבע באמצעות k את שטח המשולש ABF.
ג. מצא את k אם ידוע כי שטח המשולש ABF
הוא 15.363 סמ"ר.



39) במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.
הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת: DE = CE .
ידוע כי: BC = 6 , BE = 8 , BD = 9 .
א. מצא את זווית B.
ב. חשב את שטח המשולש ADE.

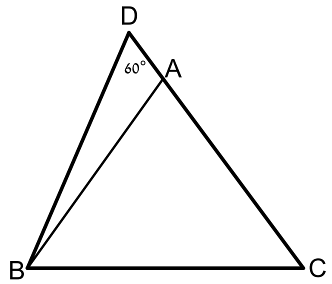


40) נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC
גדול פי 1.8 מצלע המעוין.
א. חשב את זוויות המעוין.
ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא m .
הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.
הזווית EDC תסומן ב- α .
i. הבע באמצעות m ו- α את אורך הקטע CE.
ii. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש EGC.

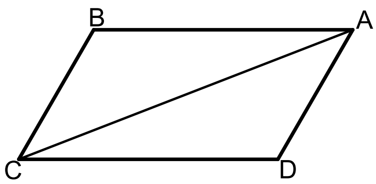


41) המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.
מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.
ידוע כי: $\sphericalangle ACB = 60°$, $\sphericalangle BAC = 40°$.
מסמנים: $AD = k$.
א. הבע באמצעות k את אורך המיתר BD.
ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.
מצא את k (עגל למספר שלם).

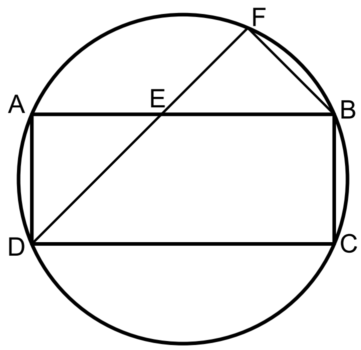
42) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).
ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך
שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD.
ידוע כי: $\sphericalangle D = 60^\circ$.
אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ.
א. מצא את אורך הקטע AD.
ב. חשב את שטח המשולש ABC.



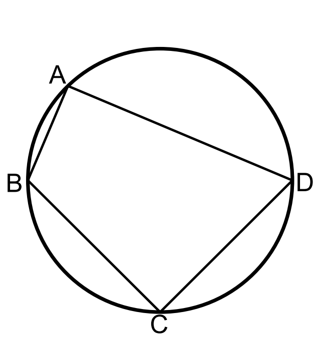
43) במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא $\sqrt{79}$ ס"מ.
היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי: $\sphericalangle B = 120^\circ$.
א. מצא את אורכי צלעות המקבילית.
ב. חשב את שטח המקבילית.
ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.



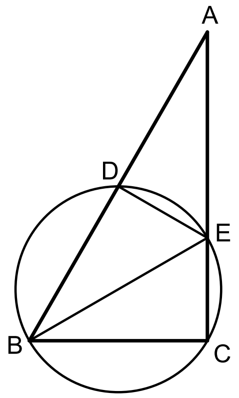
44) המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל.
מהקודקוד D מעבירים את המיתר DF
החותך את הצלע AB בנקודה E.
ידוע כי: $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CF}$.
הצלע AD של המלבן תסומן ב- a.
א. הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים.
ב. נתון גם כי: $BC = BF$.
i. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.
ii. חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$
(אין צורך לסרטט אותן).



45) המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור.
ידוע כי: $AB = b$, $BC = a$, $CD = a$, $AD = 3b$.
א. הבע באמצעות a ו- b את $\cos\sphericalangle BCD$.
ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים: $a = b\sqrt{5}$.
ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ.
הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.



46) המשולש ABC הוא ישר זווית $\sphericalangle C = 90^\circ$ ובו: $\sphericalangle B = 2\alpha$.
מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקודקודים B ו-C
אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E.
המיתר BE חוצה את זווית B.

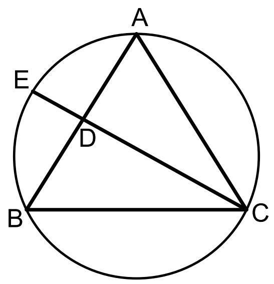


א. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש ABE.
ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים
וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המשולש ABE.

47) במשולש שווה שוקיים ABC ‏(AB = AC) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו היא β, BE חוצה את זווית $\sphericalangle B$ ו- CD הוא הגובה לשוק AB.

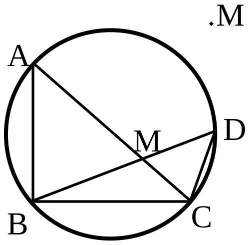
הוכח כי שטח המשולש ADE הוא: $S_{\text{ADE}} = -\dfrac{k^2 \sin\frac{\beta}{2} \sin 4\beta}{4\sin\frac{3\beta}{2}}$.

48) נתון משולש שווה שוקיים ABC ‏(AB = AC) החסום במעגל.
מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D.
ידוע כי E היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$ והיחס בין
הקטעים BD ו-CD הוא $4:7$.
מסמנים: $\sphericalangle ACD = \alpha$.



א. מצא את זוויות המשולש ABC
(עגל למספרים שלמים).
ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי
רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.

49) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R, שנפגשים בנקודה M.
זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון: $\sphericalangle MBC = \alpha$, $\sphericalangle MCB = \beta$.

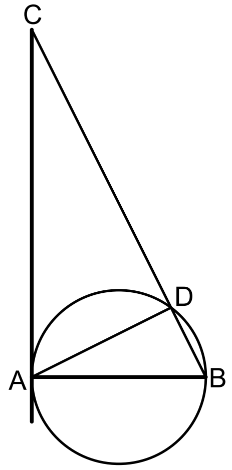


א. הבע באמצעות R, α ו- β את שטח המשולש BDC.
ב. נתון: $\beta = 2\alpha$, $S_{\text{BDC}} = \frac{1}{2}R^2$.
חשב את α.

50) בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא b והזווית שליד הבסיס הגדול היא γ נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות γ ו- b את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את γ אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי $\sqrt{3}$ מהבסיס הקטן.

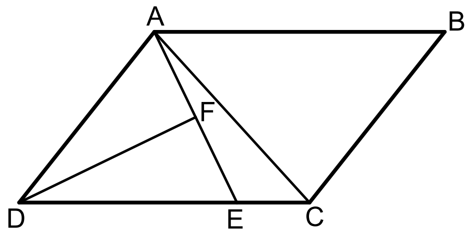


51) המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ו-AD הוא מיתר.
ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.
המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C.
מסמנים: $\sphericalangle BAD = \alpha$.

א. הבע באמצעות α ו- R את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות α ו- R את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את α אם ידוע כי שטח המשולש ABD קטן פי 4 משטח המשולש ACD.



52) המרובע ABCD הוא מקבילית.
הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים המקיימים: 3CE = DE.
מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.
ידוע כי: $\sphericalangle ADF = \sphericalangle CDF = \alpha$.
מסמנים: $CE = k$.

א. הבע באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.
הבע באמצעות k ו- α את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצא את α.

תשובות סופיות:

25) א. $S=$ 75.801 סמ"ר ב. $S=$ 8.641 סמ"ר

26) $S=$ 16 סמ"ר

27) $S_{\Delta BCD}=\dfrac{m^2\tan^2\alpha\sin45^\circ\cos\alpha}{2\sin(\alpha+45^\circ)}$

28) א. $\sqrt{\dfrac{2S}{\sqrt{27}}}\approx0.62S$ ב. $\dfrac{2}{3}S$

29) א. $\dfrac{k}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ ב. $44.4^\circ\ ,\ 67.78^\circ\ ,\ 67.78^\circ$ ג. $S=37.18$

30) א. $DE=\sqrt{1.6}=1.26$ ב. $R=2$ ג. $S=21.48$

31) א. $DC=\dfrac{m\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ ב. $AB=\dfrac{m\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\beta}$ ג. $S_{ABCD}=31.2$

32) א. 12.75 ס"מ ב. 14.19 ס"מ ג. 63.05 ס"מ

33) א. $\dfrac{k\tan\alpha}{\tan2\alpha}$ ב. $\dfrac{k^2\tan\alpha\sin2\alpha}{2\tan^2 2\alpha}$ ג. $S=$ 7.754 ס"מ

34) ב.i. $\dfrac{k^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ ב.ii. $\dfrac{2k^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

35) א. 109.1° ב. $S=86.6$

36) א. 7 ס"מ ב. 34.48 סמ"ר

37) א. $R=\dfrac{k}{2\sin^2 40}=1.21k$ ב. $S=\dfrac{k^2\sin10}{2\sin50\sin^3 40}$ ג. $k=6$

38) א. 40.72° ב. $S=12.52$

39) א. $128.32^\circ\ ;\ 51.68^\circ$ ב. $1.27m\sin\alpha$ ג. $\dfrac{0.35m^2\sin^2\alpha\sin(128.32-\alpha)}{\sin(25.84+\alpha)}$

40) א. $BD=\dfrac{k\sin20}{\sin100}$ ב. $k=7$

41) א. 5 ס"מ ב. $S=172.77$

42) א. BC = 3 ס"מ ו-AB = 7 ס"מ ב. $S=$ 18.18 סמ"ר ג. $R=\sqrt{\dfrac{37}{3}}$

43) ב. i. $R=a\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\approx 1.3a$ ב. ii. $45°\ ,\ 135°$

44) א. $\cos\sphericalangle BCD=\frac{a^2-5b^2}{a^2+3b^2}$ ג. $S=$ 14.4 סמ"ר.

45) א. $S=R^2\tan 2\alpha$ ב. $S=36\sqrt{3}$ סמ"ר.

48) א. $58°\ ,\ 58°\ ,\ 64°$ ב. $BE=7.75$.

49) א. $S=2R^2\sin\alpha\cos\beta\sin(90°-\alpha+\beta)$ ב. $\alpha=22.5°$.

50) א. $\frac{b\sin(\gamma-45°)}{\sin 45°}\ ,\ \frac{b\sin(135°-\gamma)}{\sin 45°}$ ב. $\gamma=75°$.

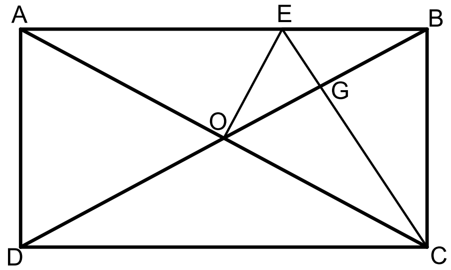
51) א. $S=R^2\sin 2\alpha$ ב. $S=\frac{2R^2\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$ ג. $\alpha=26.56°$.

52) א. $AE=6k\sin\alpha$ ב. $P_{ACE}=k+6k\sin\alpha+k\sqrt{25-24\cos 2\alpha}$

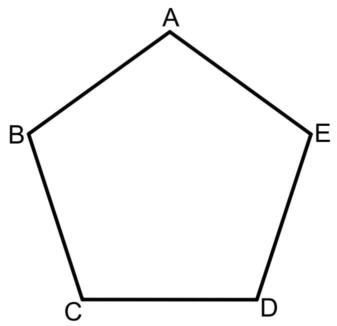
ג. $\alpha=14.47°$.

שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה:

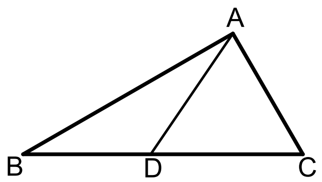
שאלות:



53) המרובע ABCD הוא מלבן.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן
ומחלקת אותה כך ש- 2BE = AE.
ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC
ושווה ל-BE.
הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.
א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.
ב. הוכח כי מתקיים: 4GE = AE.
ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.
חשב את שטח המלבן ABCD.

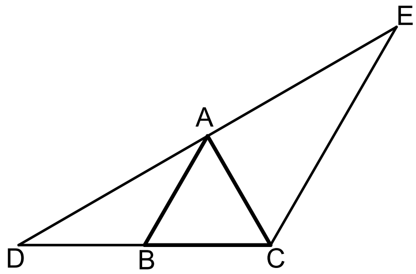


54) באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE
(כל זוויותיו הן 108°) בעל אורך צלע α.
א. הבע באמצעות α את אלכסון המחומש AD.
ב. הבע באמצעות α את רדיוס המעגל
החוסם את המחומש.
ג. הבע באמצעות α את שטח המחומש.
ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.



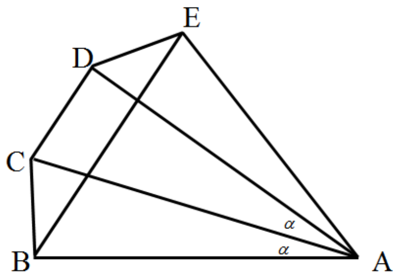
55) במשולש ABC הזווית C היא 60°.
מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים
המשולשים ACD ו-ABD.
ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את
המשולש ACD הוא: $R_1 = \sqrt{3}$ ס"מ.
כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא: $R_2 = 3$ ס"מ.
א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.
ב. היקף המשולש ABC הוא: $P = 12+4\sqrt{3}$ ס"מ.
חשב את שטח המשולש.

56) המשולש ABC הוא שווה צלעות.
הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים
שני משולשים ABD ו-ACE .
ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.



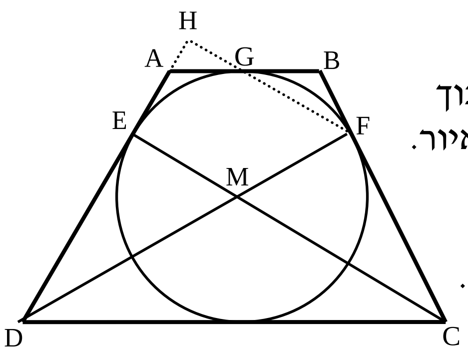
א. הוכח: $AB \parallel CE$.
ב. הוכח: $BC \cdot DE = DC \cdot AE$.
ג. נתון: DC = 8 ס"מ
וכי: $AC \perp DE$.
i. חשב את שטח המשולש DCE .
ii. חשב את שטח המשולש ABD.

57) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB , AC , AD ו-AE
כך שמתקיים: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \alpha$ ו- AB = AE .
מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE.
מתקיים: $BE \parallel CD$.
ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה.



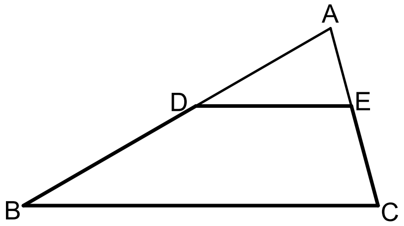
א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים.
ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש (AC = AD).
הוכח כי: $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.
ג. ידוע כי: $\sphericalangle ADC = 3\alpha + 2.5$ ו- $\sphericalangle ADE = 3\alpha - 10$.
הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית.
ד. נסמן: $AB = m$.
i. הבע באמצעות m את צלעות הטרפז BCDE.
ii. הבע באמצעות m את שטח המחומש ABCDE.
iii. מצא את m אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).

58) הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F ו-G כמתואר באיור.
הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז
ונחתכים בנקודה M.



א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.
ב. חשב את זוויות הטרפז.
ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.
חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$.

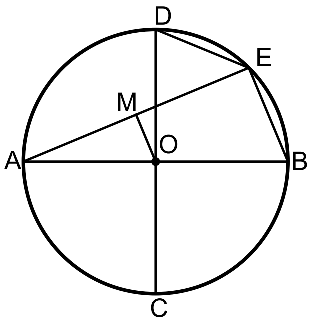
59) המרובע BDEC הוא טרפז $BC \parallel DE$.
המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A
כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = BC).
נתון: AB = 18 ס"מ, $\sphericalangle ADE = 30°$.



א. סמן את אורך הבסיס DE ב-x
ואת שטח הטרפז BDEC ב-S.
הבע את S באמצעות x.

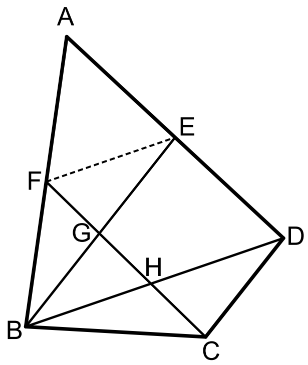
ב. על הקטע AD בונים ריבוע.
ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ"ר משטח הטרפז BDEC.
חשב את היחס: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$.

60) במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו- CD
המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף
המעגל המקיימת: BE + DE = 15 ס"מ.
מעבירים את המיתר AE.
הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE.



א. הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.
ב. מצא את אורך המיתר BE.
נתון כי שטח הטרפז הוא 90 סמ"ר.
ג. מצא את רדיוס המעגל.
ד. חשב את זווית B.

61) BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD.
הנקודות E ו- F הן בהתאמה אמצעי
הצלעות AD ו- AB במרובע.
מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש- $BE \parallel CD$.
נתון כי הזוויות $\sphericalangle A$ ו- $\sphericalangle BFE$ משלימות ל- $180°$.



א. הוכח: $\Delta BFE \sim \Delta BCD$.
ב. נתון כי: BE = 7.5 וכי: $GE - HD = 17\frac{1}{15}$.
חשב את אורך הקטע FE.
ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED
הוא: 4.001 ס"מ = R. מצא את זווית $\sphericalangle EBD$.

תשובות סופיות:

53) ג. 120 סמ"ר

54) א. 1.618α ב. 0.85α ג. $1.72\alpha^2$ ד. $S=85.57$

55) ב. $S=8\sqrt{3}$

56) ג.i. $S_{\text{CDE}}=16\sqrt{3}$ ג.ii. $S_{\text{ABD}}=4\sqrt{3}$

57) ד.i. $\text{BE}=1.2175m$, $\text{CD}=0.4776m$, $\text{DE}=0.4663m$, $\text{BC}=0.4663m$

62) ד.ii. $0.7232m^2$ ד.iii. $m=$ 8 ס"מ

58) ב. $120°$, $60°$ ג. $\frac{2}{3}$

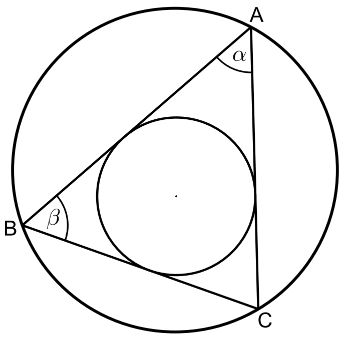
59) א. $S=81-0.25x^2$ ב. $\frac{S_{\text{ADE}}}{S_{\text{ABC}}}=\frac{16}{81}$

60) ב. BE = 10 ג. R = 13 ד. $\sphericalangle B=67.38°$

61) ב. FE = 4 ג. $16.73°$

שאלות מסכמות:

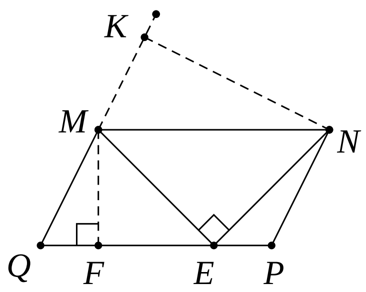
שאלות:



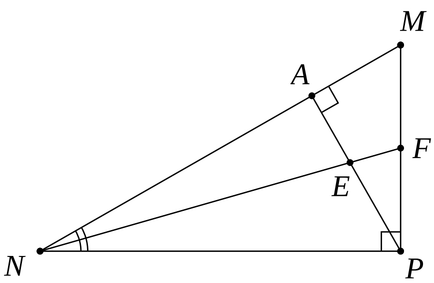
1) המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו R.
נתון כי $\sphericalangle B=\beta$, $\sphericalangle A=\alpha$.

א. הבע את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R, β, α.

ב. נתון כי: $\alpha=\beta=60^\circ$.
חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R.



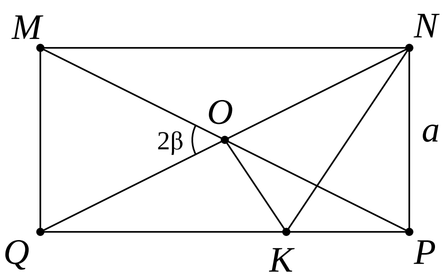
2) במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על הצלע PQ כך ש- $\sphericalangle MEN=90^\circ$ (ראה ציור).
נתון: $MQ=12$ ס"מ , $\sphericalangle MQP=70^\circ$, $\sphericalangle MNE=40^\circ$.
מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



3) במשולש ישר-זווית MNP, $(\sphericalangle P=90^\circ)$
PA הוא גובה ליתר ו-NF חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.
PA ו-NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור).
נתון: $NP=24$ ס"מ , $\sphericalangle MNP=40^\circ$.

א. מצא את אורך הקטע NA.

ב. מצא את אורך הקטע EF.

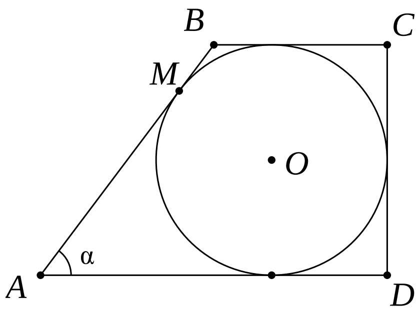


4) אלכסוני המלבן MNPQ נחתכים בנקודה O.
מנקודה O מעלים אנך ל-QN החותך את QP בנקודה K (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle MOQ=2\beta$, $NP=a$.

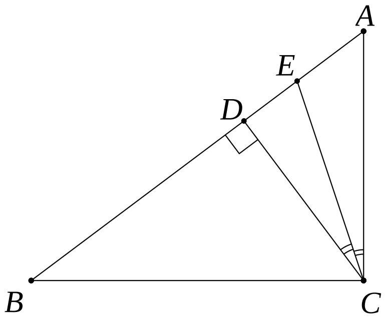
א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות β ו- a.

ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות β ו- a.

5) בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.
הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.
נתון: 12 ס"מ = AM , $\sphericalangle BAD=\alpha$.
א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת α .
ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת α .



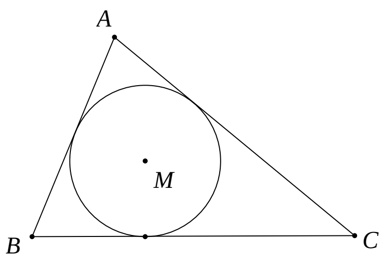
6) במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון:
8 ס"מ = BC, $\sphericalangle ACB=90°$, $\sphericalangle ABC=\beta$.
CD הוא הגובה ליתר.
CE הוא חוצה-הזווית $\sphericalangle ACD$.
הבע את אורך הקטע AE באמצעות β .



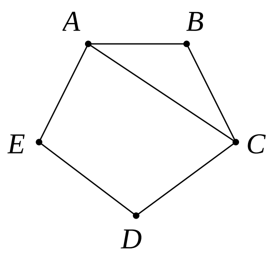
7) נתון מעגל שרדיוסו R . מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה.
מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חסום בתוך מעגל זה.
חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

8) ΔABC הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC) שאורך בסיסו 12 ס"מ.
AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB.
שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון: $\sphericalangle ABC=\alpha$ $(\alpha>45°)$.
א. הבע את היחס $AO:DO$ באמצעות α .
ב. הראה כי בעבור $\alpha=60°$ הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.

9) במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M ורדיוסו r (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle C=46°$, $\sphericalangle B=62°$.
א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC .
ב. נתון: 16 ס"מ = BC. מצא את r .



10) במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)
אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.

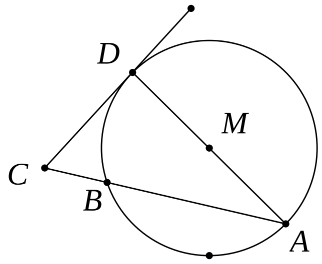


11) מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחותך CBA למעגל (ראה ציור).

נתון: $\text{CD}=\frac{3}{5}R$.

א. מצא את זוויות המשולש CAD.

ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש BCD.



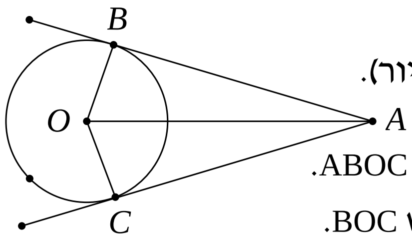
12) מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle\text{BAC}=2\alpha$, AO = 10 ס"מ.

א. הבע באמצעות α את S_1, שטח המרובע ABOC.

ב. הבע באמצעות α את S_2, שטח המשולש BOC.

ג. הראה שאם $\alpha=30^\circ$, אזי: $S_1=4\cdot S_2$.

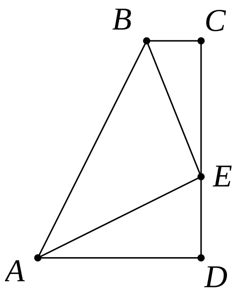


13) ABCD הוא טרפז ישר-זווית $(\sphericalangle\text{C}=\sphericalangle\text{D}=90^\circ)$.

נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle\text{AEB}=90^\circ$, $\text{AE}=\text{BE}=k$ ו- $\sphericalangle\text{CBE}=\beta$.

הבע באמצעות k ו- β את שטח הטרפז.



14) ענה על השאלות הבאות:

א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל.
מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.

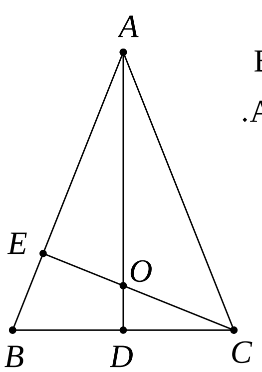
ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'.
מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.

15) ABC הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC) שבו זווית הראש היא זווית חדה. נתון כי זווית הבסיס היא β ואורך הבסיס BC הוא 2α. AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).

א. הבע באמצעות α ו- β את אורכי הקטעים CO ו-CE.

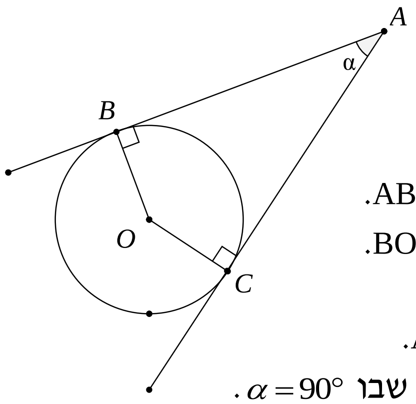
ב. הבע באמצעות β את היחס $\frac{\text{CO}}{\text{CE}}$.

ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר $\beta=60^\circ$, והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.

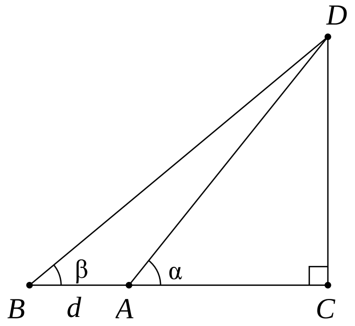


16) מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם m (כלומר: $AB = AC = m$).
נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא $\sphericalangle BAC = \alpha$ (ראה ציור).

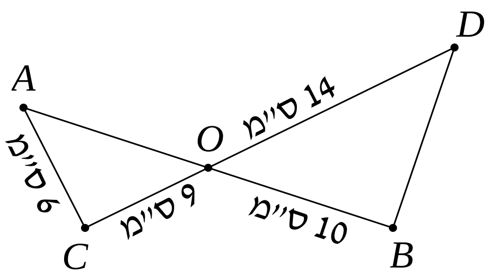
א. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש ABC.
ב. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש BOC.
ג. הבע באמצעות α את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.
ד. בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו $\alpha = 90°$.



17) במשולש ישר-זווית DAC נתון $\sphericalangle DAC = \alpha$.
מאריכים את הניצב AC כך ש- $AB = d$.
נתון כי: $\sphericalangle DBA = \beta$ (ראה ציור).
סמן: $AC = x$.
הבע את x באמצעות d, α ו- β.

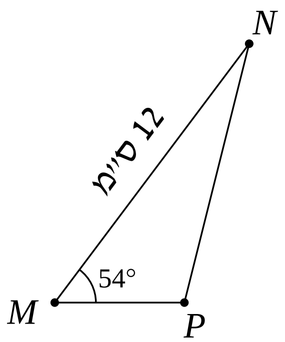


18) הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O.
נתון כי: $\sphericalangle OAC = 60°$,
AC = 6 ס"מ, CO = 9 ס"מ,
OB = 10 ס"מ, OD = 14 ס"מ.
חשב את $\sphericalangle ODB$.



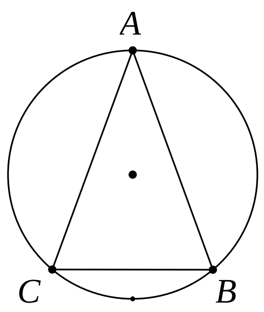
19) במשולש MNP גודל הזווית M הוא $54°$.
נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ (ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP.

א. חשב את אורך הצלע NP.
ב. PA הוא תיכון לצלע MN.
חשב את שטח המשולש PAN.

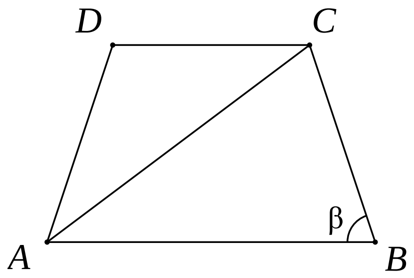


20) המשולש השווה-שוקיים ABC (AB = AC) חסום במעגל (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle ABC = \beta$.
כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.

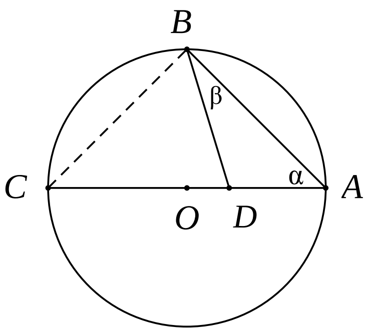
א. הבע בעזרת β את שטח המשולש ABC.
ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור $\beta = 45°$.



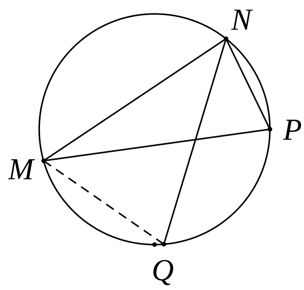
21) במשולש ABC הזווית $\sphericalangle C$ היא בת $60°$, אורך הצלע AB הוא $\sqrt{13}$ ס"מ, והיקף המשולש הוא $7+\sqrt{13}$ ס"מ. חשב את שטח המשולש.



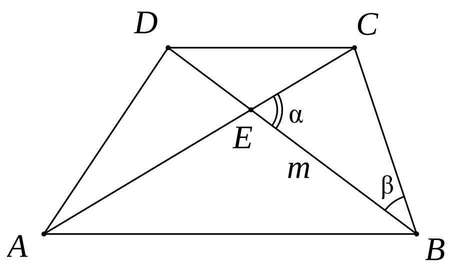
22) בטרפז שווה-שוקיים ABCD (AD = BC)
אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון.
זווית הבסיס היא β $(\beta > 60°)$, (ראה ציור).
הבע באמצעות β את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



23) הקודקודים A ו- B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O.
הקודקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA.
א. הבע בעזרת α ו- β את שטח המשולש ABD.
ב. הבע בעזרת α ו- β את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.



24) משולש MNP חסום במעגל.
המיתר NQ חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.
נתון: $\sphericalangle MNP = 80°$, $\sphericalangle MPN = 70°$,
NP = 12 ס"מ.
חשב את אורך המיתר MQ.

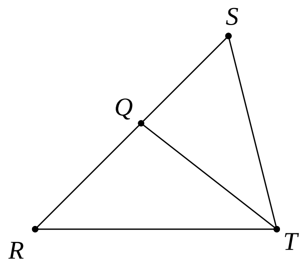


25) נתון טרפז ABCD $(AB \| CD)$.
הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז.
נתון: $DC = BC$, $BE = m$,
$\sphericalangle CEB = \alpha$, $\sphericalangle CBD = \beta$ (ראה ציור).
הבע את אורכי בסיס הטרפז:
AB ו- CD באמצעות m , α ו- β.

26) במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית $\sphericalangle RTS$
(ראה ציור), $QS = m$, $RQ = \sqrt{2}$,
$\sphericalangle RST = \alpha$, $\sphericalangle TRQ = 45°$.

א. הבע את $\sin\alpha$ באמצעות m.

ב. נתון כי: $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
חשב את זוויות המשולש RST.



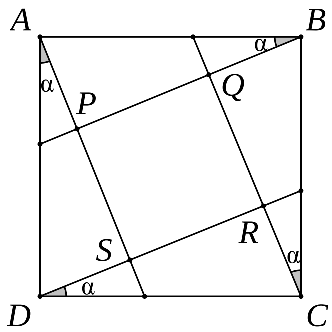
27) במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

28) נתון משולש שצלעותיו kt , $2t$, t.

א. לאיזה ערכים של הקבוע k המשולש הוא קהה זווית?

ב. נתון $k = \sqrt{7}$. הבע ע״י t את אורך חוצה הזווית הקהה.

29) בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה קטעים היוצרים את אותה זווית α עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע פנימי PQRS.



א. הוכח כי: $\frac{PQ}{AB} = \cos\alpha - \sin\alpha$.

ב. לאיזו זווית α מתקיים: $PR = AB$?

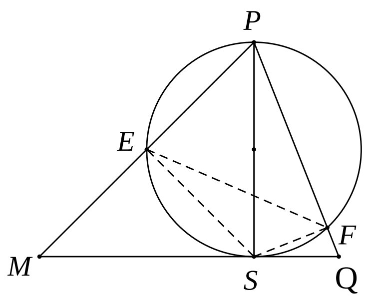
30) PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).
נתון $\sphericalangle SPQ = \beta$, $\sphericalangle MPS = \alpha$, $PS = h$.

א. הבע את שטח המשולש PMQ
באמצעות h , α ו- β.

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את
הצלעות PM ו-PQ בנקודות E
ו-F בהתאמה (ראה ציור).

i. הבע באמצעות α ו- β את $\sphericalangle ESF$.

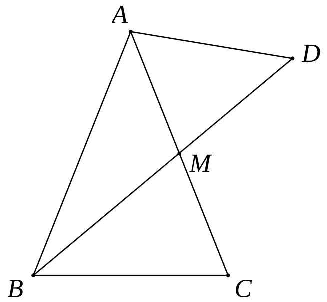
ii. הבע באמצעות α ו- β את היחס בין
שטח המשולש ESF לשטח המשולש PMQ.



31) במשולש ABC הצלעות הן a, b ו- c והזוויות שמונחות מולן הן: α, β ו- γ בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון m_a (התיכון לצלע a) באמצעות הצלעות b ו- c והזווית α.

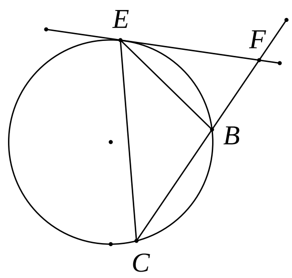
ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.



32) במשולש שווה שוקיים ABC ‏(AB = AC), BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור). נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\sphericalangle BAC = 50°$.

א. מצא את גודל הזווית $\sphericalangle BMC$.

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D, כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ. מצא את שטח המשולש AMD.

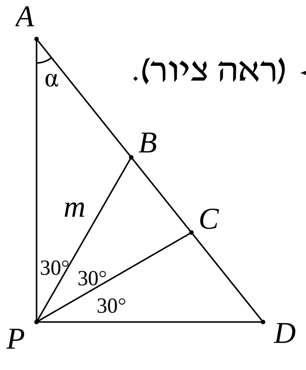


33) משולש שווה שוקיים BCE ‏(BC = BE) חסום במעגל שרדיוסו R. זווית הבסיס של המשולש BCE היא α. בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

א. בטא את שטח המשולש BEF באמצעות R ו- α.

ב. מצא את הערך של α שבעבורו שטח המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.

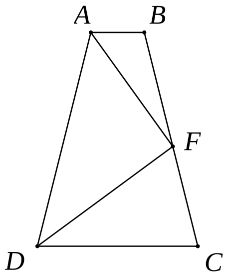
34) בטרפז BCDE ‏$(BC \| ED)$ אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ. הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא $80°$. אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית $\sphericalangle CBE$. חשב את היקף הטרפז.



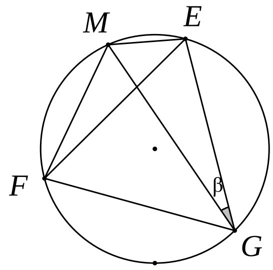
35) במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית הישרה $\sphericalangle P$ לשלוש זוויות שוות, כלומר $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPD = 30°$ (ראה ציור). נתון כי: $PB = m$, $\sphericalangle PAD = \alpha$.

א. היעזר במשפט הסינוסים, והבע את AB, AC, BD ו- CD באמצעות m ו- α.

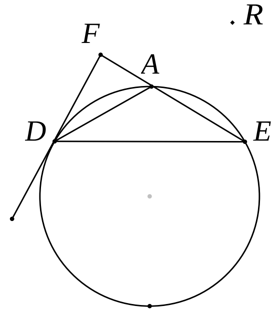
ב. הוכח כי: $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$.



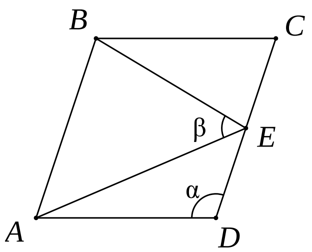
36) בטרפז שווה שוקיים ABCD $(AD = BC\ ,\ AB \| DC)$,
F היא נקודה על השוק BC, כך ש-DF חוצה את
הזווית $\sphericalangle CDA$ ו-AF חוצה את הזווית $\sphericalangle DAB$ (ראה ציור).
נתון: $AB = \beta\ ,\ \sphericalangle FAB = \beta$.
הבע באמצעות b ו-β את אורך הבסיס DC.



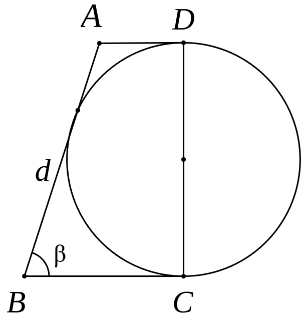
37) משולש שווה צלעות EFG חסום במעגל שרדיוסו R.
M היא נקודה על המעגל. נתון: $\sphericalangle MGE = \beta$ (ראה ציור).
א. הוכח כי: $ME + MF = MG$.
ב. אם $ME = R$ מה תוכל לומר על MG?



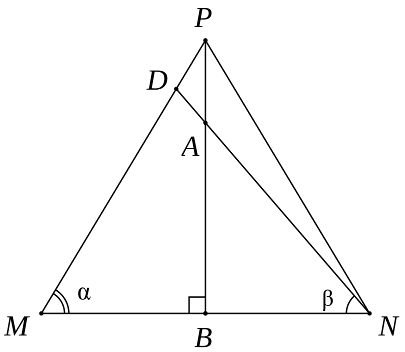
38) משולש שווה שוקיים ADE (AD = AE) חסום במעגל שרדיוסו R.
ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך
הצלע AE בנקודה F (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle AE = \alpha$ $(60° < \alpha < 180°)$.
א. הבע את שטח המשולש ADF באמצעות R ו-α.
ב. הבע באמצעות α את היחס שבין שטח
המשולש ADE ובין שטח המשולש ADF.
ג. חשב את α אם שטח המשולש ADE שווה לשטח המשולש ADF.



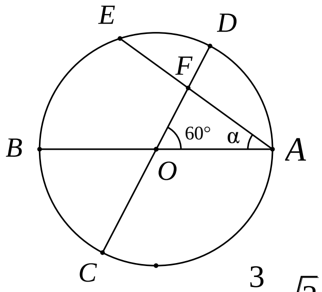
39) במעוין ABCD הנקודה E היא אמצע הצלע CD.
נתון: $\sphericalangle ADC = \alpha\ ,\ \sphericalangle AEB = \beta$ (ראה ציור).
הוכח כי: $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{25 - 16\cos^2\alpha}}$.



40) נתון טרפז ABCD ונתון מעגל. השוק DC הוא קוטר המעגל.
השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו-BC
משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו-C בהתאמה (ראה ציור).
נתון כי: $\sphericalangle B = \beta\ ,\ AB = d$.
א. הבע באמצעות d את סכום בסיסיו של הטרפז.
ב. הבע באמצעות d ו- β את היקף הטרפז ואת השטח
של הטרפז.
ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר.
חשב את הזווית החדה β.



41) במשולש שווה שוקיים PMN ‏(PM = PN),
A היא נקודה על הגובה PB, כך ש- $PA=\frac{1}{5}\cdot PB$.
הישר NA חותך את השוק PM בנקודה D (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle DNM=\alpha$, $\sphericalangle DNB=\beta$ ו- $BN=\alpha$.
א. חשב את היחס $\tan\beta:\tan\alpha$.
ב. חשב את היחס PM:DM.



42) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני קטרים AB ו- CD הנחתכים בזווית של $60°$.
מיתר AE, היוצר זווית α עם הקוטר AB, חותך את הקוטר CD בנקודה F (ראה ציור).
א. הבע את שטח המשולש ACF באמצעות R ו- α.
ב. הוכח שכאשר $\alpha=30°$, שטח המשולש ACF הוא $\frac{3}{8}\cdot\sqrt{3}\cdot R^2$.

תשובות סופיות:

1) א. $r=\dfrac{2R\sin(\alpha+\beta)\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ב. $\frac{1}{2}R$

2) MF = 11.28 ס"מ , KN = 21.52 ס"מ

3) א. NA = 18.385 ס"מ ב. EF = 5.975 ס"מ

4) א. $OK=\dfrac{a}{2\cos\beta}$ ב. $\dfrac{a}{2\sin\beta}\cdot\left[1+\tan\beta+\dfrac{1}{\cos\beta}\right]$

5) א. $12\cdot\tan\dfrac{\alpha}{2}$ ב. $24\cdot\left(1+\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$

6) $AE=8\sin\beta\cdot\left[\tan\beta-\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)\right]=8\tan\beta\cdot\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)$

7) $2\cdot\dfrac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ}=\dfrac{1}{\cos^2 20^\circ}\approx 1.132$

8) א. $-2\cdot\dfrac{\tan\alpha}{\tan 2\alpha}=-\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha-1$

ב. מתקיים: $AO=2\cdot DO$ (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

9) א. $BC=r\cdot(\tan 59^\circ+\tan 67^\circ)\approx 4.02\cdot r$ ב. $r=\dfrac{16}{\tan 59^\circ+\tan 67^\circ}\approx 3.98$

10) $S=$ 147.86 סמ"ר

11) א. $\sphericalangle A=16.7^\circ$, $\sphericalangle D=90^\circ$, $\sphericalangle C=73.3^\circ$ ב. $S\approx 0.0495\cdot R^2$

12) א. $S_1=100\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=50\cdot\sin 2\alpha$

ב. $S_2=50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin(180^\circ-2\alpha)=50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin 2\alpha$

13) א. $S=\dfrac{1}{2}k^2\cdot(1+2\sin\beta\cos\beta)$ (או כל תשובה שקולה). ב. 27 יח"ש.

14) א. $r\approx$ 5.548 ס"מ ב. $S\approx$ 90.45 סמ"ר

15) א. $CO=\dfrac{a}{\sin\beta}$, $CE=2a\cdot\sin\beta$ ב. $\dfrac{CO}{CE}=\dfrac{1}{2\sin^2\beta}$

ג. היחס הוא: $\dfrac{2}{3}$ (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

16) א. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha$ ב. $S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha\cdot\tan^2\frac{\alpha}{2}$

ג. יחס השטחים: $\tan^2\frac{\alpha}{2}$

ד. במקרה זה ABOC הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 $\left(\tan^2 45°=1\right)$.

17) $AC=x=d\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

18) $\sphericalangle ODB\approx 44.7°$

19) א. NP = 10.38 ס"מ ב. $S_{\Delta PAN}=$ 8.2 סמ"ר

20) א. $S=800\cdot\sin^2\beta\cdot\sin 2\beta$ ב. 400 סמ"ר

21) $S_{\Delta ABC}=3\cdot\sqrt{3}\approx$ 5.196 סמ"ר

22) יחס השטחים הוא: $1-4\cos^2\beta$ $=\left(-\frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}\right)$ או כל תשובה שקולה.

23) א. $S_{\Delta ABD}=288\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ ב. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cdot\cos\alpha}$

24) $MQ\approx$ 15.43 ס"מ

25) $AB=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$, $DC=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

26) א. $\sin\alpha=\frac{1}{m}$ ב. $15°$, $120°$, $45°$ או $75°$, $60°$, $45°$

27) $\alpha\approx 20.7$

28) א. $\sqrt{5}<k<3$ או $1<k<\sqrt{3}$ ב. $\frac{2}{3}\cdot t\approx 0.667t$

29) $\alpha=15°$

30) א. $S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{2}\cdot h^2\cdot(\tan\alpha+\tan\beta)$ ב. i. $\sphericalangle ESF=180°-(\alpha+\beta)$

ב. ii. $S_{\Delta EFS}:S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{4}\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

31) א. $m_a=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2+c^2+2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}$ ב. $m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot b$

32) א. $\sphericalangle BMC=79.5°$ ב. $S_{\Delta AMD}=$ 54.1 סמ"ר

33) א. $S_{\Delta BEF}=\dfrac{2R^2\cdot\sin^3\alpha\cdot\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$ ב. $\alpha=45^\circ$

34) $P_{BCDE}=51.09$

35) א. $AC=\dfrac{\sqrt{3}\cdot m\cdot\sin(30^\circ+\alpha)}{2\cdot\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin\alpha}$, $AB=\dfrac{m}{2\cdot\sin\alpha}$, $BD=\dfrac{\sqrt{3}\cdot m}{2\cdot\cos\alpha}$,

$CD=\dfrac{m\cdot\sin(30^\circ+\alpha)}{2\cdot\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\cos\alpha}$ ב. הוכחה.

36) $DC=\dfrac{-b\cdot\tan\beta}{\tan 3\beta}$

37) ב. MG הוא קוטר במעגל.

38) א. $S_{\Delta ADF}=\dfrac{-2R^2\cdot\cos^3\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha}{\cos(1.5\alpha)}$ ב. $\dfrac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ADF}}=-\dfrac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)}$

ג. $\alpha=90^\circ$

40) א. $AD+BC=d$ ב. $S=\dfrac{1}{2}d^2\cdot\sin\beta$, $P=2d+d\sin\beta$

ג. $\beta=30^\circ$

41) א. $\tan\beta:\tan\alpha=\dfrac{4}{5}=0.8$ ב. $PM:DM=\dfrac{9}{8}=1.125$

42) א. $S=\dfrac{3R^2\cdot\sin(30^\circ+\alpha)}{4\cdot\sin(60^\circ+\alpha)}$.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

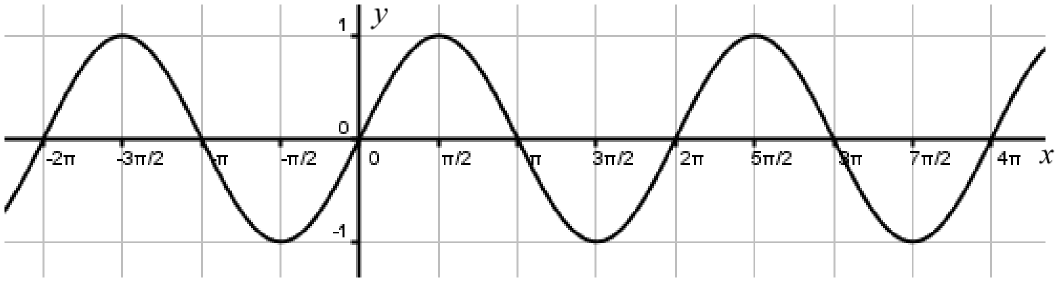
פרק 28 - פונקציות טריגונומטריות

תוכן העניינים

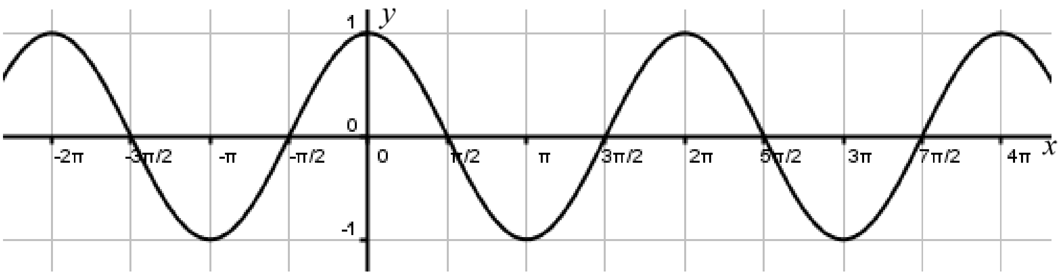
הגדרות כלליות:

סיכום כללי:

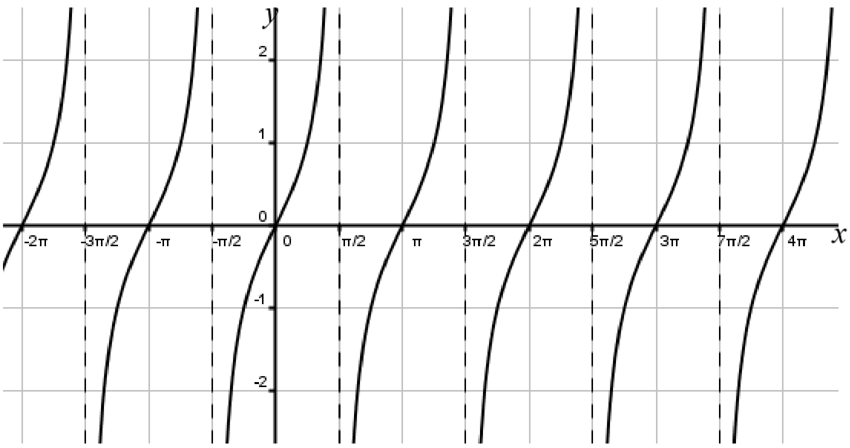
תיאור גרפי של פונקציית הסינוס $y = \sin x$:



תיאור גרפי של פונקציית הקוסינוס $y = \cos x$:



תיאור גרפי של פונקציית הטנגנס $y = \tan x$:



הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=\tan x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y=\cot x$	$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

זוגיות של פונקציות:

- פונקציה $f(x)$ תקרא זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x)=f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תקרא אי-זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x)=-f(-x)$.
- פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הנ"ל אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

מחזוריות של פונקציות:

1) פונקציה $f(x)$ תיקרא מחזורית במחזור T אם היא מקיימת: $f(x+T)=f(x)$ לכל x בתחום הגדרתה.

2) מחזור של פונקציות טריגונומטריות:

- הפונקציה $f(x)=\sin x$ מחזורית במחזור $T=2\pi$ שכן: $\sin(x+2\pi)=\sin x$.
- הפונקציה $f(x)=\cos x$ מחזורית במחזור $T=2\pi$ שכן: $\cos(x+2\pi)=\cos x$.
- הפונקציה $f(x)=\tan x$ מחזורית במחזור $T=\pi$ שכן: $\tan(x+\pi)=\tan x$.
- הפונקציה $f(x)=\cot x$ מחזורית במחזור $T=\pi$ שכן: $\cot(x+\pi)=\cot x$.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

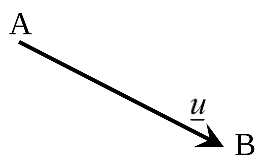
פרק 29 - וקטורים גיאומטריים

תוכן העניינים

הגדרות וכללים יסודיים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:



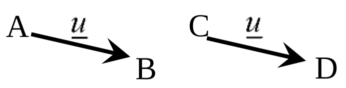
להלן תיאור של וקטור גיאומטרי: וקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: $\overrightarrow{AB}$.

ניתן לסמן וקטור באות קטנה באופן הבא: $\underline{u}$ (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u},\ \underline{v},\ \underline{w}$).

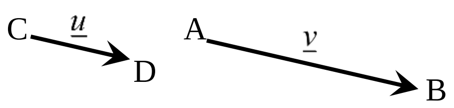
מהאיור לעיל מתקיים: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

קשרים בין וקטורים:

- וקטורים שווים: שני וקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.
דוגמא לווקטורים שווים: מתקיים: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

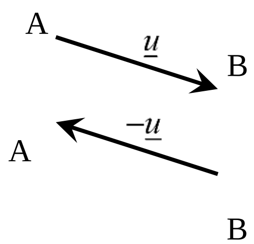


- וקטורים מקבילים: שני וקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.
ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.
וקטורים מקבילים נקראים גם "וקטורים תלויים ליניארית".
דוגמא לתלות בין וקטורים מקבילים:
עבור $\alpha>1$ מתקיים: $\underline{v}=\alpha\underline{u}$, או: $\overrightarrow{AB}=\alpha\cdot\overrightarrow{CD}$.



- אם זוג וקטורים במרחב: $\overrightarrow{AB}=\alpha\underline{u}+\beta\underline{v}+\gamma\underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD}=a\underline{u}+b\underline{v}+c\underline{w}$ מקבילים
אז מתקיים: $\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}=\frac{\gamma}{c}$.

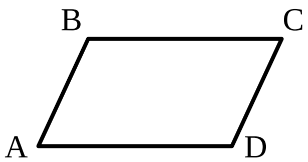
- וקטור המסומן $\overrightarrow{BA}$ הוא בעל גודל זהה לווקטור $\overrightarrow{AB}$
וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overrightarrow{BA}=-\underline{u}$.



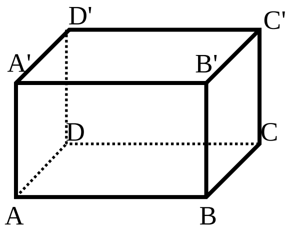
הערה:

שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ יקראו מקבילים אם מתקיים: $\underline{v}=\alpha\underline{u}$ כאשר הגודל α יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום $\alpha\neq 0$. בפרט עבור $\alpha<0$ כיוונם הפוך ב- $180°$.

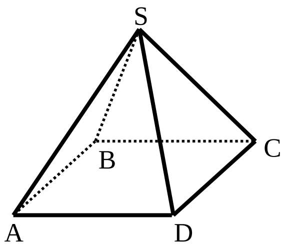
שאלות:



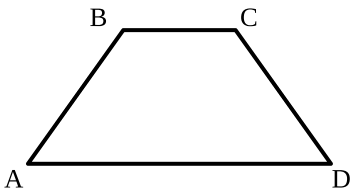
1) במקבילית ABCD נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים
ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



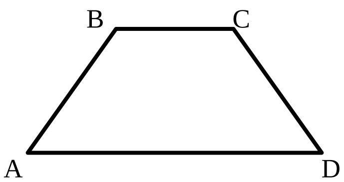
2) בתיבה ABCDA'B'C'D'
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.
מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים
ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים
ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



4) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $AD=3BC$.
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע
באמצעות $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



5) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $AD=3BC$

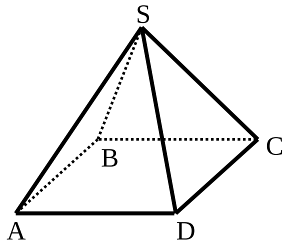
א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את
הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{DC}$.

ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{BE}$.

ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.

6) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע

נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.



א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{SC}$.

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{BN}$.

7) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=2:3$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

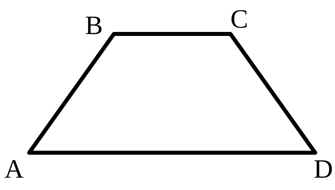
8) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=3:5$. נתון: $\overrightarrow{AP}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{PB}$ ו- $\overrightarrow{AB}$.

9) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

10) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

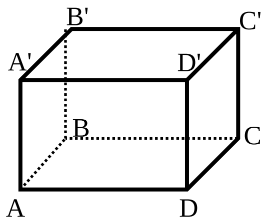
11) בטרפז ABCD שבשרטוט

נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.



הנקודה F נמצאת על הצלע CD
ומקיימת: $\frac{DF}{FC}=\beta$.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- β את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.

12) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

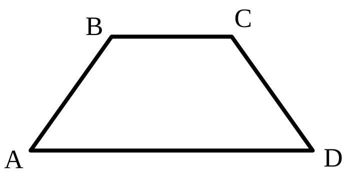


הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$

הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור: $\overrightarrow{PQ}$.

13) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$.

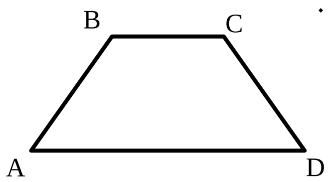


הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

מצא את ערכו של α שעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AB}$.

14) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$.

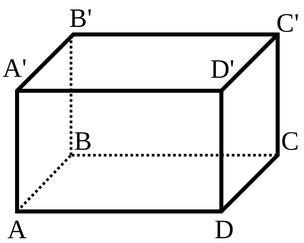


הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

מצא את ערכו של α שעבורו מתקיים: $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AC}$.

15) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שעבורם $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה ABB'A'.

מצא את ערכי α ו- β אם נתון כי $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{EC}$.

תשובות סופיות:

1) $\underline{u}=\overrightarrow{DC}\ ,\ \underline{v}=\overrightarrow{BC}$.

2) $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{B'C'}\ ,\ \underline{u}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}\ ,\ \underline{w}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BB'}$.

3) $\underline{w}=\overrightarrow{AS}\ ,\ \underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\ ,\ \underline{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

4) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\underline{v}$.

5) א. $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}\ ,\ \overrightarrow{DC}=\underline{u}-\frac{2}{3}\underline{v}$ ב. $\overrightarrow{BE}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$ ג. $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}$.

6) א. $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\underline{v}\ ,\ \overrightarrow{SC}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$ ב. $\overrightarrow{BN}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$.

7) $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\underline{u}$.

8) $\overrightarrow{AB}=\frac{8}{3}\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{PB}=\frac{5}{3}\underline{u}$.

9) $\overrightarrow{AP}=\alpha\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{PB}=(1-\alpha)\underline{u}$.

10) $\overrightarrow{AP}=\frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{PB}=\frac{1}{1+\alpha}\underline{u}$.

11) $\overrightarrow{AF}=\frac{\beta}{1+\beta}\underline{u}+\frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v}$.

12) $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$.

13) $\alpha=2$.

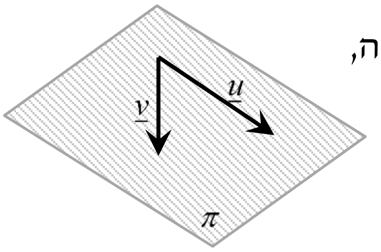
14) $\alpha=1$.

15) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. לא ג. $\beta=1\ ,\ \alpha=\frac{1}{2}$.

ווקטורים הפורשים מישור:

סיכום כללי:

ווקטורים הפורשים מישור:



כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ בעלי כוונים שונים ולכן פורשים את המישור π.

קומבינציה לינארית של ווקטורים:

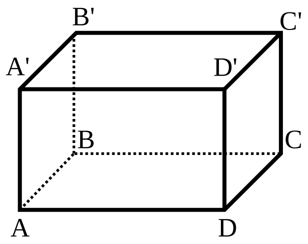
- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה לינארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים תלויים ליניארית (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

דוגמא:

עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור $\underline{w}$ המוכל, או מקביל למישור π באופן הבא: $\underline{w}=\alpha\cdot\underline{u}+\beta\cdot\underline{v}$ כאשר: $\alpha,\ \beta$ מספרים ממשיים כלשהם.

במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ נקראים תלויים ליניארית.

שאלות:



16) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

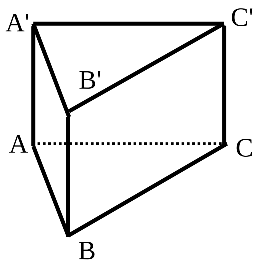
הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$

א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. מהו ערכו של α שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לבסיס ABCD?



17) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C'

ובה נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

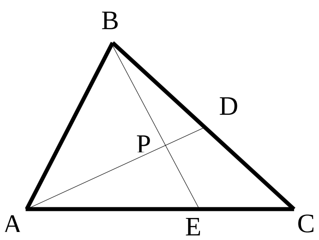
הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת: $\frac{A'M}{MC'}=\alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC}=\beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{NM}$.

ב. מהו ערכו של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ABB'A'.
הבע את α באמצעות β.



18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC

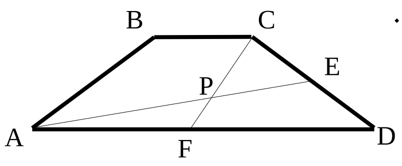
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE}=2$.

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

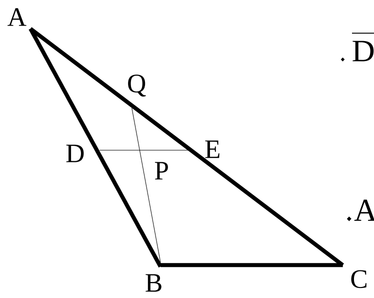
נגדיר: $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, וכן: $\overrightarrow{AP}=t\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP}=s\cdot\overrightarrow{BE}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, t ו- s את הווקטור $\overrightarrow{AP}$ בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.



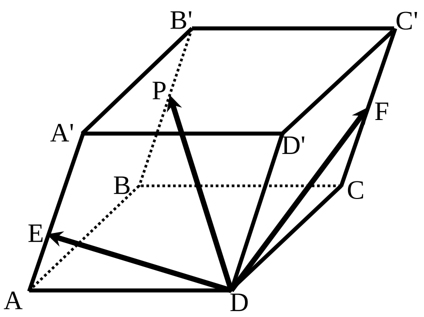
19) בטרפז ABCD, $(AD \parallel BC)$ שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$.
הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD
והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו-CF.
מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF.



20) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$.
הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP
חותך את הצלע AC בנקודה Q.

א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\Delta QPE}}{S_{\Delta DPB}}$.



21) במקבילון ABCDA'B'C'D'
נתון: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$.
הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC',
הנקודה E נמצאת על המקצוע AA'
ומקיימת: $A'E = 2AE$ והנקודה P נמצאת על
המקצוע BB' ומקיימת: $\overrightarrow{B'P} = k \cdot \overrightarrow{B'B}$.
נתון: $\overrightarrow{DP} = t \cdot \overrightarrow{DE} + s \cdot \overrightarrow{DF}$.

א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו-k את הווקטור $\overrightarrow{DP}$.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB'.

ג. האם הנקודות D , E, F ו- P נמצאות על אותו מישור? נמק.

תשובות סופיות:

16) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. $\alpha=1$ ג. לא.

17) א. $\overrightarrow{NM}=(\beta-1)\underline{u}+\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}-\beta\right)\underline{v}+\underline{w}$ ב. $\beta=1$ ג. $\alpha=\frac{\beta}{1-\beta}$

18) א. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}t\underline{u}+\frac{1}{2}t\underline{v}$, $\overrightarrow{AP}=(1-s)\underline{u}+\frac{2}{3}s\underline{v}$ ב. $BP:PE=3:2$, $AP:PD=4:1$

19) $AP:PE=2:1$, $CP:PF=2:1$

20) א. $AQ:QC=1:2$ ב. $\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}}=\frac{1}{3}$

21) א. $\overrightarrow{DP}=\underline{u}+\underline{v}+(1-k)\underline{w}$ ב. $B'P:PB=1:5$ ג. כן.

מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:

סיכום כללי:

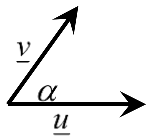
מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$$

כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.

ניתן למצוא את הזווית שבין שני וקטורים ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.

גודל של וקטור נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}$, או: $|\underline{u}|^2=\underline{u}^2$.



הערה:

המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$ בין שני וקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

שאלות:

22) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

א. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=2$, $\alpha=60°$
ב. $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$, $\alpha=120°$
ג. $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=6$, $\alpha=30°$
ד. $|\underline{u}|=8$, $|\underline{v}|=3$, $\alpha=180°$
ה. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=5$, $\alpha=0°$
ו. $|\underline{u}|=7$, $|\underline{v}|=4$, $\alpha=90°$

23) חשב את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

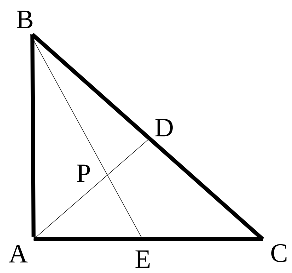
א. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=4$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=6$
ב. $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=2$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=-4\sqrt{3}$
ג. $|\underline{u}|=9$, $|\underline{v}|=5$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$
ד. $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=6$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=12$

24) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא $120°$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר: $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

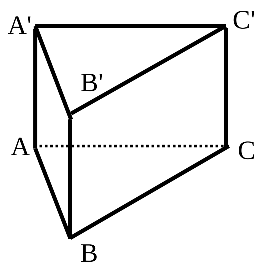
25) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר: $\overrightarrow{MN}=0.5\underline{u}-\underline{v}$.

26) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא $120°$.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PM}=4\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

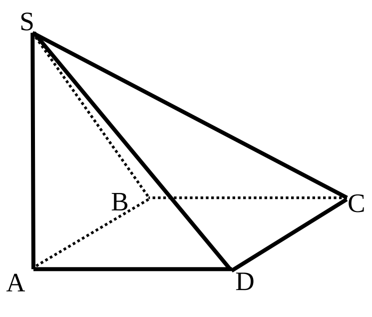
27) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle BAC=90°$).
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.
נתון: $\frac{AP}{PD}=3$, $AB=8$, $AC=12$.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle DPC$.



28) נתונה מנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.
הנקודה M היא אמצע המקצוע A'C' והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $BN=2CN$.
נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle MAN$.



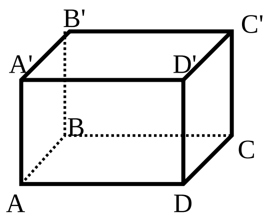
29) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.
נתון: $AB=AD=\frac{1}{2}AS=k$.
נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.
הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle PAQ$.



30) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $AB=\frac{1}{\sqrt{2}}AD=AA'$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע DD'.



א. מהו ערכו של α שבעבורו מתקיים: $|\overrightarrow{AP}|=\frac{5}{6}|\overrightarrow{AQ}|$?

ב. הבע באמצעות α את $\cos\sphericalangle PAQ$
והראה כי לכל ערך של α הזווית $\sphericalangle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של α שבעבורו הזווית $\sphericalangle PAQ$ מקיימת: $\cos\sphericalangle PAQ=\frac{2}{3\sqrt{5}}$?

31) הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

32) נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$.

33) נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$.

34) נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $\overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}}{2}$.

35) נתונה פירמידה משולשת SABC שבה $\overrightarrow{AS}\perp\overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{AC}$.
הוכח: $\overrightarrow{CS}\perp\overrightarrow{AB}$.

36) הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

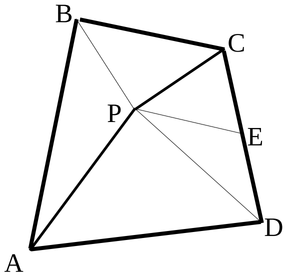
37) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.
הוכח: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$.

ב. נתונה פירמידה משולשת SABC. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC.
הוכח: $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}\right)$.

ג. נתון בנוסף כי $\overrightarrow{AS}$ ו- $\overrightarrow{AP}$ מאונכים ל- $\overrightarrow{BC}$.
הוכח כי $AB=AC$. (הדרכה: סמן $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$).

38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD
כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים
ישרי זווית ושו"ש ($AP=PD$, $BP=PC$).
הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח: $\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{AB}$.
(הדרכה: סמן $\overrightarrow{PB}=\underline{a}$, $\overrightarrow{PC}=\underline{b}$, $\overrightarrow{PA}=\underline{c}$, $\overrightarrow{PD}=\underline{d}$).



39) בטטראדר SABC נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.
הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\overrightarrow{AP}=\alpha\cdot\overrightarrow{AS}$.
הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\overrightarrow{SQ}=\beta\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$.

א. מצא את הקשר בין α ו- β שבעבורו $\overrightarrow{PQ}$ מקביל למישור ABC.

ב. נתון: $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BC}$. הוכח: $AB=AC$.

40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה
שווים, אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

תשובות סופיות:

22) א. 3   ב. -10 ג. $6\sqrt{3}$ ד. -24 ה. 15   ו. 0.

23) א. 60° ב. 150° ג. 90° ד. 0°.

24) $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 18.248$

25) $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{29}$

26) 31.87°

27) 55.49°

28) 70.623°

29) 24.095°

30) א. $\alpha = \frac{3}{4}$ ב. $\cos(\sphericalangle PAQ) = \frac{1}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$ ג. $\alpha = \frac{1}{2}$

31) שאלת הוכחה.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) שאלת הוכחה.

36) שאלת הוכחה.

37) שאלת הוכחה.

38) שאלת הוכחה.

39) א. $\alpha + 2\beta = 1$ ב. שאלת הוכחה.

40) שאלת הוכחה.

מתמטיקה הכנה למבחן סיווג להנדסאים

פרק 30 - וקטורים אלגבריים

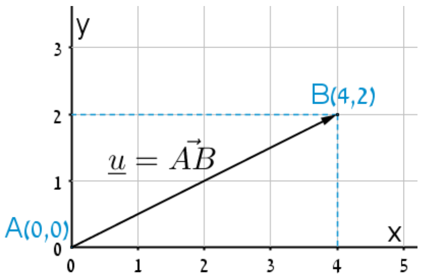
תוכן העניינים

שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים:

סיכום כללי:

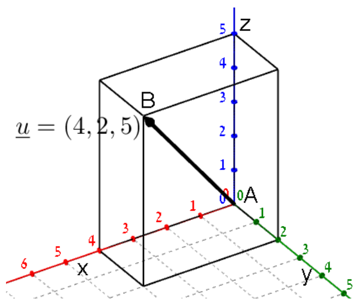
הגדרה כללית:

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.



דוגמאות:

- הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.
- הווקטור: $\underline{u}=(4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.



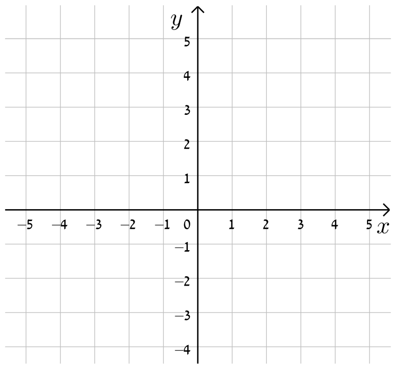
וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים:

וקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u}=\overline{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון:

- אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ הוא: $z_M=\dfrac{z_1+z_2}{2}$, $y_M=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, $x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו-$B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $z_P=\dfrac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$; $y_P=\dfrac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$; $x_P=\dfrac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$.

שאלות:



1) שרטט את הווקטורים הבאים:

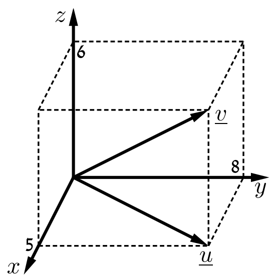
א. $\underline{u}=(4,2)$

ב. $\underline{v}=(-5,1)$

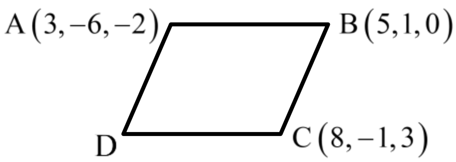
ג. $\underline{w}=(3,-4)$

ד. $\underline{a}=(0,3)$

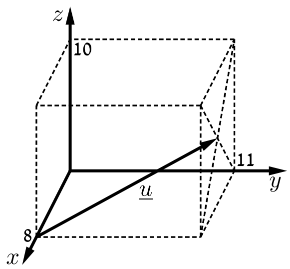
ה. $\underline{b}=(-5,0)$



2) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט.

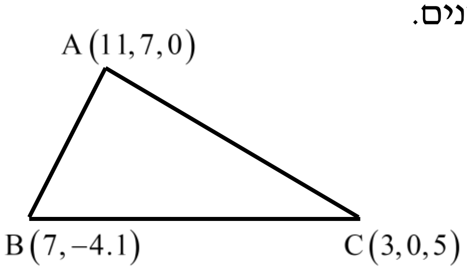


3) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים (ראה איור).
מצא את שיעורי הקודקוד D.



4) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.

5) בשרטוט נתון משולש ששיעורי קודקודיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.



6) מצא את x, y ו- z אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר:

$\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ אם נתונות הנקודות $A(-3,5)$ ו- $B(6,1)$.

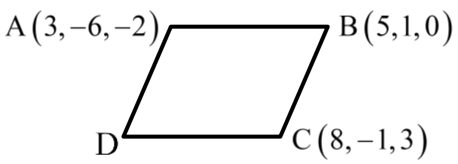
ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8,11)$ והווקטור $\overrightarrow{PQ}=(4,-3)$.

8) ענה על הסעיפים הבאים:

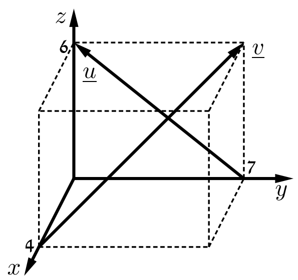
א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

9) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקודקוד D.

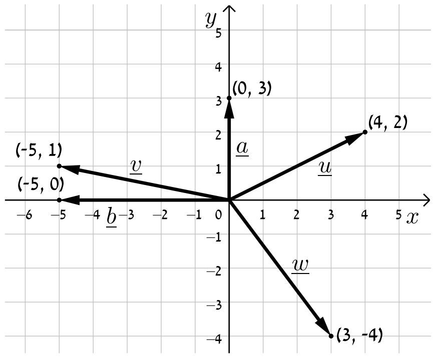


10) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



תשובות סופיות:

1) להלן סרטוט:



2) $\underline{u}=(5,8,0)$, $\underline{v}=(5,8,6)$.

3) $D(6,-8,1)$.

4) $\underline{u}=(4,11,5)$.

5) $(7,1,2)$.

6) $x=5$, $y=-2$, $z=6$.

7) א. $\overrightarrow{AB}=(9,-4)$ ב. $Q(12,8)$.

8) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N(-1,-5,10)$.

9) $D(6,-8,1)$.

10) $\underline{u}=(0,-7,6)$, $\underline{v}=(-4,7,6)$.

פעולות אלגבריות בין וקטורים:

סיכום כללי:

מכפלה סקלרית בהצגה אלגברית:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$, $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

שאלות:

11) נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{v}=(-1,3,-5)$, $\underline{u}=(4,0,9)$.
חשב את ערכי הווקטורים הבאים: $3\underline{u}+2\underline{v}$, $\underline{u}-2\underline{v}$, $\underline{u}-\underline{v}$, $\underline{u}+\underline{v}$.

12) נתונים הווקטורים: $\underline{w}=(2,6,-5)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$, $\underline{u}=(-3,1,4)$.
חשב את:

א. $2\underline{u}$
ב. $-0.5\underline{v}$
ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$
ד. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$
ה. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$
ו. $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) נתונות הנקודות הבאות: $C(3,-1,2)$, $B(4,2,-1)$, $A(1,-3,0)$.
מצא את הווקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$
ב. $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$
ג. $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

14) נתונים שלושה וקטורים: $\underline{w}=(x,5,-10)$, $\underline{v}=(0,y,4)$, $\underline{u}=(6,-1,z)$.

א. מצא את ערכם של x,y,z המקיימים: $\underline{u}+2\underline{v}=\underline{w}$.
ב. מצא את ערכם של x,y,z המקיימים: $2\underline{v}-3\underline{w}=\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v})$.
ג. כיצד תשתנה התוצאה של סעיף א' אם: $\underline{u}=(6,y,z),\ \underline{v}=(y\text{-}1,2,x),\ \underline{w}=(x,2z,\text{-}10)$?

15) נתונים הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$.

א. חשב את תוצאת המכפלה הסקלרית עבור: $\underline{v}=(4,0,1)$, $\underline{u}=(-6,2,3)$.

ב. מצא את y עבורו תוצאת המכפלה הסקלרית של הווקטורים: $\underline{v}=(2,y,4)$, $\underline{u}=(1,7,-6)$ תהיה 1-.

ג. מצא את y עבורו הוקטורים מהסעיף הקודם יהיו מאונכים זה לזה.

תשובות סופיות:

11) $3\underline{u}+2\underline{v}=(10,6,17)$; $\underline{u}-2\underline{v}=(6,-6,19)$; $\underline{u}-\underline{v}=(5,-3,14)$; $\underline{u}+\underline{v}=(3,3,4)$.

12) א. $(6,-2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$
ד. $(2.5,-1,-3.5)$ ה. $(9.5,9.5,-18)$ ו. $(19,19,-36)$

13) א. $(5,7,1)$ ב. $(-8,-16,8)$ ג. $(8,12,0)$

14) א. $x=6$, $y=3$, $z=-18$ ב. $x=-1$, $y=9\frac{2}{3}$, $z=72$
ג. $x=-4\frac{8}{9}$, $y=-4\frac{4}{9}$, $z=-\frac{2}{9}$.

15) א. $\underline{u}\cdot\underline{v}=-21$ ב. $y=3$ ג. $y=3\frac{1}{7}$.

גודל של וקטור:

סיכום כללי:

גודלו של ווקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

שאלות:

16) נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{v}=(5,-1,0)$, $\underline{u}=(1,-3,2)$.
חשב את הגדלים של הוקטורים הבאים: $4\underline{u}-3\underline{v}$, $2\underline{v}+\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$.

17) נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

תשובות סופיות:

16) $|4\underline{u}-3\underline{v}|=\sqrt{266}$; $|2\underline{v}+\underline{u}|=\sqrt{150}$; $|\underline{v}|=\sqrt{26}$; $|\underline{u}|=\sqrt{14}$.
17) הוכחה.

וקטורים מקבילים ושווים:

שאלות:

18) נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD :

$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

19) נתונות הנקודות הבאות : $E(9,11,4)$, $D(7,4,10)$, $C(6,9,0)$, $B(3,7,-4)$, $A(1,0,2)$.

א. הראה כי : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

תשובות סופיות:

18) א. הוכחה. ב. כן.

19) א. הוכחה. ב. לא.

זווית בין וקטורים:

סיכום כללי:

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ תחושב ע״י: $\cos\alpha = \frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.

שאלות:

20) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

21) מצא את שטחו של משולש ABC שקודקודיו הם: $A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

22) נתונים הווקטורים: $\underline{u}=(2,-1,0)$, $\underline{v}=(5,0,3)$.
מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

תשובות סופיות:

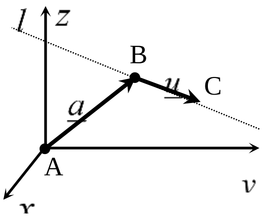
20) א. 92.277° ב. 90° ג. 180°.

21) 10.173 יח״ש.

22) $\underline{w}=(3,6,-5)$ או $\underline{w}=(-3,-6,5)$.

הצגה פרמטרית של ישר:

סיכום כללי:



ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע״י שני וקטורים.

הווקטור $\underline{a}$ נקרא וקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.

הווקטור $\underline{u}$ נקרא וקטור הכיוון של הישר.

זה הוא וקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.

הקשר בין שני הווקטורים נתון ע״י: $\ell : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$

כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא וקטור המתקבל ע״י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר l.

<u>דוגמא</u>: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים: $\underline{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$; $\underline{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,3,1)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l : \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$.

הערות:

- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת וקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
  ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l : \underline{x} = (7,0,10) + t(-6,9,-27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע״י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע״י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים וקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

שאלות:

23) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x}=(4,3,0)+t(1,-1,1)$?

24) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x}=t(2,-1,5)$?

25) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.

26) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.

27) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$
ומקביל לישר $\ell: \underline{x}=(0,3,-1)+t(-4,2,1)$.

28) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$
ומאונך לישר: $\ell: \underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

29) ענה על הסעיפים הבאים:
א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell: \underline{x}=(1,2,3)+t(4,5,6)$.
כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות x, y ו- z.
ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות: $z=4-t$, $y=10$, $x=1+2t$.
כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

30) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

31) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$
ומקביל לציר ה- z.

32) מצא את נקודת החיתוך של הישר $\ell: \underline{x}=(1,-2,6)+t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

תשובות סופיות:

23) כן.

24) לא.

25) $\ell : \underline{x}=(-5,-2)+t(6,8)$.

26) $\ell : \underline{x}=(4,1,1)+t(1,1,3)$.

27) $\ell : \underline{x}=(2,-7,1)+s(-4,2,1)$.

28) $\ell : \underline{x}=(1,2,3)+t(2,1,0)$.

29) א. $x=1+4t \ , y=2+5t \ , z=3+6t$ ב. $\ell : \underline{x}=(1,10,4)+t(2,0,-1)$

30) $\ell : \underline{x}=t(0,1,0)$.

31) $\ell : \underline{x}=(3,-1,4)+t(0,0,1)$.

32) $(7,-5,0)$.

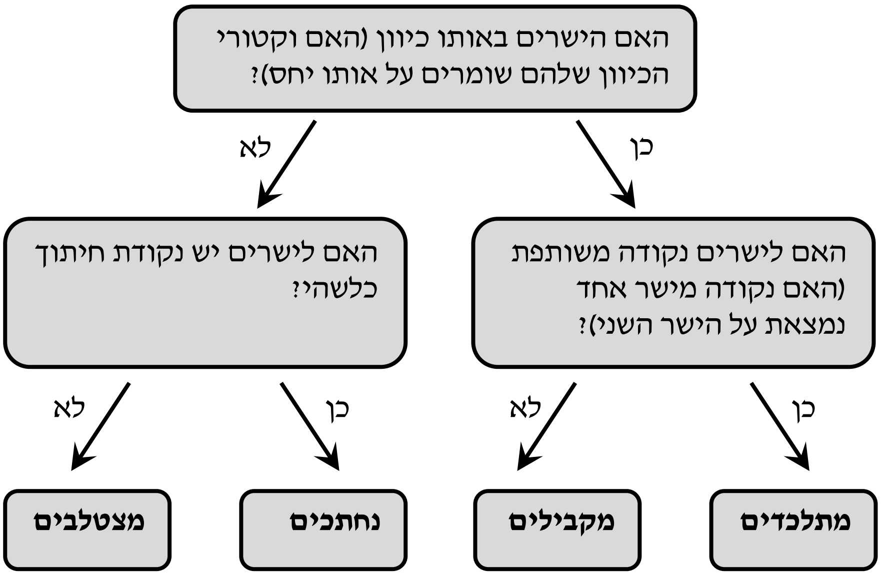
מצב הדדי בין ישרים:

סיכום כללי:

ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



שאלות:

33) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_1 : \underline{x}=(2,-3,0)+t(5,-1,2)$, $\ell_2 : \underline{x}=(12,-5,4)+s(-10,2,-4)$.

34) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_3 : \underline{x}=(0,1,-7)+t(-2,1,1)$, $\ell_4 : \underline{x}=(2,0,-6)+s(6,-3,-3)$.

35) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_5 : \underline{x}=(-3,5,1)+t(4,0,-1)$, $\ell_6 : \underline{x}=(-1,7,4)+s(-1,1,2)$.

36) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_7 : \underline{x}=(3,0,0)+t(2,-2,5)$, $\ell_8 : \underline{x}=(0,1,-5)+s(3,1,-2)$.

37) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_9 : \underline{x}=(-4,1,-1)+t(3,0,-1)$, $\ell_{10} : \underline{x}=s(6,0,-2)$.

38) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{11} : \underline{x}=(2,8,-1)+t(1,0,0)$, $\ell_{12} : \underline{x}=(-5,8,2)+s(2,0,-1)$.

39) מצא את ערכו של הפרמטר k שבעבורו הישרים הבאים:
$\ell_1 : \underline{x}=(k+1,1-k,6)+t(1,-2,2)$, $\ell_2 : \underline{x}=(k-1,7,-k)+s(1-k^2,k^2+2,-6)$
א. מקבילים.
ב. מתלכדים.

40) נתונות הנקודות: $A(3,-1,5)$, $B(k,-1,3)$, $C(-6,3,-1)$, $D(-2,3,k)$.
הראה כי לכל ערך של k הישרים ℓ_{AB} ו-ℓ_{CD} מצטלבים.

תשובות סופיות:

33) מתלכדים.

34) מקבילים.

35) נחתכים, $(1,5,0)$.

36) מצטלבים.

37) מקבילים.

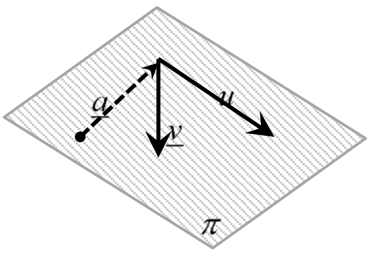
38) נחתכים, $(1,8,-1)$.

39) א. $k=2$. ב. $k=-2$.

40) הוכחה.

הצגה פרמטרית של מישור:

סיכום כללי:



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.
הווקטור $\underline{a}$ הוא ווקטור ההעתקה.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם וקטורי הכיוון של המישור.
אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר t, s הם מספרים ממשיים כלשהם ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם
אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π.

שאלות:

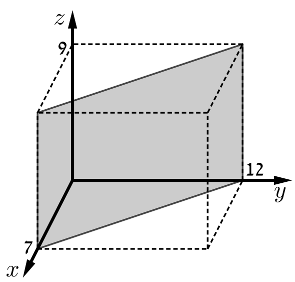
41) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבאות:
$A(1,-4,0)$, $B(3,6,2)$, $C(0,-3,1)$.

42) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$,
ומכיל את הישר $\ell : \underline{x} = (-2,-2,5) + t(1,0,-4)$.

43) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x} = (0,1,-1) + t(1,9,-3)$, $\ell_2 : \underline{x} = (2,16,11) + s(0,1,-6)$.
הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

44) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5,-2,-1)$ ומכיל
את ציר ה- x.

45) מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.



46) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המסומן.

תשובות סופיות:

41) $\pi: \underline{x}=(1,-4,0)+t(2,10,2)+s(-1,1,1)$.

42) $\pi: \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)+s(8,9,-6)$.

43) $\pi: \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)+s(0,1,-6)$.

44) $\pi: \underline{x}=t(1,0,0)+s(5,-2,-1)$.

45) $\pi: \underline{x}=t(1,0,0)+s(0,0,1)$.

46) $\pi: \underline{x}=(7,0,0)+t(0,0,1)+s(-7,12,0)$.

משוואת מישור:

סיכום כללי:

ניתן להציג מישור ע״י משוואה באופן הבא: $\pi: \ ax+by+cz+d=0$,

כאשר: (x,y,z) היא נקודה על המישור והמקדמים a,b,c הם שיעורי וקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h}=(a,b,c)$.

שאלות:

47) קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi: 2x-y+3z-6=0$:

א. $\mathrm{D}(5,7,1)$ **ב.** $\mathrm{E}(2,-1,1)$

48) מצא את ערכו של k שבעבורו הנקודה $\mathrm{A}(1,k,-1)$ נמצאת על המישור: $\pi: kx-2y+(1+k)z+7=0$.

49) נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x+2y-z-9=0$.
מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

50) נתונה משוואת מישור: $\pi: 4x+y-2z+8=0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

תשובות סופיות:

47) א. על המישור. ב. לא על המישור.

48) $k=3$.

49) $(0,0,-9)$, $\left(0,4\frac{1}{2},0\right)$, $(3,0,0)$.

50) $\ell: \underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$.

מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור:

שאלות:

51) נתונה משוואת מישור: $\pi : 2x+3z-12=0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

52) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.
מצא את משוואת המישור.

53) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

54) המישור π עובר בנקודות: $A(1,0,-3)$, $B(2,0,0)$, $C(4,-1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

55) ענה על הסעיפים הבאים:
א. לפניך הנקודות הבאות: $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, $(2,0,5)$.
i. הראה ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד ומצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
ii. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.
ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.
ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א'?

תשובות סופיות:

51) $\pi : \underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$.

52) $\pi : -2x+3y+z+19=0$.

53) $\pi : x-3y+8z=0$.

54) $\pi : 3x+6y-z-6=0$.

55) א.i $\pi : \underline{x}=(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$. ii. $-2x+3y+z-1=0$
ב. למשל: $(0,0,1)$, $(-0.5,0,0)$ ג. לא.

מישורים המקבילים לצירים:

שאלות:

56) נתונה משוואת מישור: $\pi : (k+2)x+(k^2-2k-3)y-3z+k^2-1=0$.
לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

57) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$
ו- $x+3y+2z-6=0$. מצא את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות:

56) $k=3$.

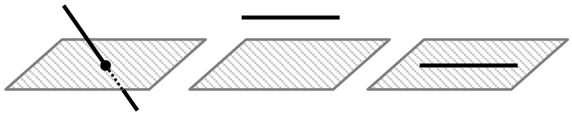
57) 6 יח"נ.

מצב הדדי בין ישר ומישור:

סיכום כללי:

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.



כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

שאלות:

58) נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell : \underline{x}=(5,0,1)+t(4,1,-2)$, $\pi : 2x-y-3z+6=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

59) נתונים הישר והמישור הבאים:
$\ell : \underline{x}=(2,-1,6)+t(-1,1,2)$, $\pi : x-3y+2z-11=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

60) נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell : \underline{x}=(-6,1,0)+t(3,0,-1)$, $\pi : 2x+y+6z+11=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

61) נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell : \underline{x}=(1,a,3)+t(4,1-b,0)$, $\pi : 2x-y+z-4=0$.
מצא את ערכי a ו- b בעבורם הישר מוכל במישור.

תשובות סופיות:

58) הישר חותך, $(1,-1,3)$.

59) מקבילים.

60) הישר מוכל.

61) $a=1$, $b=-7$.

מצב הדדי בין מישורים:

סיכום כללי:

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא ישר החיתוך.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך וקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

מתלכדים	מקבילים	נחתכים
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$	כל מצב אחר

שאלות:

62) נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א. $\pi_1:2x-y+4z-5=0$, $\pi_2:4x-2y+8z-10=0$.

ב. $\pi_3:x+3y-z+1=0$, $\pi_4:3x+9y-3z-8=0$.

ג. $\pi_5:5x-2y-2z+3=0$, $\pi_6:2x+3y+z-5=0$.

63) נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_1:2x+\left(k^2+k\right)y-2z+1=0$, $\pi_2:4x+12y-4z+k^2-2=0$.

מצא את ערכי k עבור המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים.

תשובות סופיות:

62) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

63) א. $k\neq 2,-3$. ב. $k=-3$. ג. $k=2$.

ישר חיתוך בין מישורים:

שאלות:

64) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x+y-2z+2=0$, $\pi_2 : 2x-y+z+10=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

65) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x+2y-3z+2=0$, $\pi_4 : 2x-3y+z+4=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

66) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x-3y+z+2=0$, $\pi_6 : 5x-2z+20=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

67) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x-2y-z+6=0$, $\pi_8 : z-2=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

68) מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x-5y+z+18=0$
עם המישור $[xz]$.

69) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x-3y+2z-1=0$, $\pi_2 : 4x+y-z-6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

תשובות סופיות:

64) $\ell : \underline{x}=(-2,6,0)+t(2,16,12)$.

65) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(1,2,4)$.

66) $\ell : \underline{x}=(0,4,10)+t\left(4,7\frac{1}{3},10\right)$.

67) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(4,2,0)$.

68) $\ell : \underline{x}=(-3,0,0)+t(3,0,-18)$.

69) $\ell : \underline{x}=t(1,9,13)$.

זווית בין שני ישרים:

סיכום כללי:

- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1=\underline{a}_1+t\underline{u}_1$ ו- $l_2=\underline{a}_2+s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{u}_1\cdot\underline{u}_2}{|\underline{u}_1|\cdot|\underline{u}_2|}\right|$.

שאלות:

70) מצא את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\ell_1:\ \underline{x}=(4,0,0)+t(6,8,1)$, $\ell_2:\ \underline{x}=s(-4,2,-4)$.

ב. $\ell_1:\ \underline{x}=(10,17,-18)+t(3,0,-6)$, $\ell_2:\ \underline{x}=(6,5,4)+s(0,4,0)$.

71) מצא את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $B(6,0,-2)$, $A(3,4,6)$ וישר העובר דרך הנקודות: $D(-1,4,2)$, $C(6,5,1)$ וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.

72) נתונות הנקודות $C(3,-1,2)$, $B(4,2,-1)$, $A(1,-3,0)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

i. A ו-B.

ii. B ו-C.

iii. A ו-C.

ב. מי מבין הנקודות $D(4,2,-1)$ ו- $E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

73) נתון מישור שמשוואתו: $3x-4y+6=0$. הנקודות $B(-2,y,-1)$, $A(x,6,1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C=11$.
מצא את שיעורי הנקודה C אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא: $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

תשובות סופיות:

70) א. $78.521°$ ב. $90°$.

71) $68.21°$. הישרים מצטלבים.

72) א. i. $\ell : \underline{x}=(1,-3,0)+t(3,5,-1)$ א. ii. $\ell : \underline{x}=(4,2,-1)+t(-1,-3,3)$

א. iii. $\ell : \underline{x}=(1,-3,0)+t(2,2,2)$ ב. הנקודה D. ג. $35.477°$.

73) $C(0,2,11)$ או $C(0,28.45,11)$

זווית בין ישר ומישור:

סיכום כללי:

- זווית חדה α בין ישר $l=\underline{a}+t\underline{u}$ ומישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$
תחושב ע״י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha=\left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.

שאלות:

74) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
$\ell:\ \underline{x}=(-2,0,5)+t(-2,1,2)$, $\pi:\ 3x-2y+2z+9=0$.

75) נתונות הנקודות $D(-7,3,-1)$, $C(1,2,5)$, $B(0,2,-1)$, $A(1,-1,2)$.
מצא את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

76) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה
היא: $2x+y-2z-6=0$. קדקוד הפירמידה הוא $S(3,1,-2)$.
מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
אם נתון כי שיעורי הקודקוד B מקיימים: $x_B=z_B=-1$.

תשובות סופיות:

74) $18.87°$.

75) $44.83°$.

76) $14.9°$.

זווית בין שני מישורים:

סיכום כללי:

- זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$
- תחושב ע"י: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{h_1}\cdot\underline{h_2}}{|\underline{h_1}|\cdot|\underline{h_2}|}\right|$.

שאלות:

77) מצא את הזווית שבין המישורים הבאים: $\pi_1: 4x+3y+z-12=0$ ו- $\pi_2: 4x-7y+5z+3=0$.

78) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקודקודיה הם: $A(0,2,-5)$, $B(3,-1,1)$, $C(7,-1,-5)$, $D(3,2,0)$.
מצא את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

79) מצא את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x+5y-z+4=0$ למישור $[xz]$.

תשובות סופיות:

77) $90°$.

78) $87.539°$.

79) $32.312°$.

מרחק בין שתי נקודות במרחב:

סיכום כללי:

מרחק בין שתי נקודות $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

שאלות:

80) נתונות הנקודות: $A(2,4,-5)$, $B(0,-2,6)$ ו- $C(k,-1,13-k)$.
מצא ערכי k עבורם המשולש ABC יהיה שווה-שוקיים: $AB=AC$.

תשובות סופיות:

80) $k=8$ או $k=12$.

מרחק בין נקודה לישר:

סיכום כללי:

מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l: \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$ יחושב ע״י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

שאלות:

81) מצא את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $\ell: \underline{x}=t(2,0,-7)$.

82) נתונות הנקודות $C(6,-4,0)$, $B(2,-1,0)$, $A(1,6,-1)$.
חשב את שטח המשולש ABC.

83) על הישר $\ell: \underline{x}=(5,-2,0)+t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$.
מצא את שיעורי הקודקוד B (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

81) $\sqrt{54}$.

82) 12.75 יח״ש.

83) $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$.

מרחק בין נקודה למישור:

סיכום כללי:

מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ למישור: $\pi: \ ax+by+cz+d=0$ יחושב ע"י: $d=\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

שאלות:

84) מצא את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

85) מצא משוואת מישור המאונך לישר $\ell: \underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4,5,-9)$.

86) נתונים ישר ומישור: $\pi: 2x+4y-4z+15=0$, $\ell: \underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$.
מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

תשובות סופיות:

84) $2\frac{1}{2}$.

85) $\pi: 3x-2y+z+21=0$ או $\pi: 3x-2y+z-7=0$.

86) $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.

מרחק בין ישרים מקבילים:

סיכום כללי:

מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע״י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני ע״י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו.

שאלות:

87) נתונות הנקודות $D(12,11,-8)$, $C(6,1,4)$, $B(12,-5,2)$, $A(15,0,-4)$.

א. מצא את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצא את המרחק בין הישרים מסעיף א׳.

88) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x} = (2,0,-1) + t(1,-2,1) \quad , \quad l_2: \underline{x} = (-8,-1,19) + s(-4,1,6)$$

$$l_3: \underline{x} = (-2,7,-11) + r(-2,4,-2) \quad , \quad l_4: \underline{x} = (-2,1,5) + q(4,-1,-6)$$

א. הוכח כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצא את שטח המלבן.

תשובות סופיות:

87) א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח״א.

88) א. הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח״ש.

מרחק בין ישר למישור:

סיכום כללי:

מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאת מרחקה מהמישור.

שאלות:

89) נתונה משוואת מישור: $4x-z+6=0$.

א. מצא את המצב ההדדי בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

ב. מצא את המרחק בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

90) נתונים ישר ומישור: $\pi: 3x+12y-4z+k-10=0$, $l: \underline{x}=(1,k-1,5)+t(4,-2,-3)$.

א. הוכח שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצא את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

תשובות סופיות:

89) א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$.

90) א. הוכחה. ב. $k=2,4$.

מרחק בין מישורים מקבילים:

סיכום כללי:

מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
1. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.
2. שימוש בנוסחה: $d=\left|\frac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

שאלות:

91) נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x-4y+5z-10=0$.
מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

92) נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1: x-2y-2z+6=0$, $\pi_2: x-2y-2z-12=0$.
מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

93) נתונים שישה מישורים:
$\pi_1: 2x+y-2z-11=0$, $\pi_2: x+2y+2z+5=0$, $\pi_3: 2x-2y+z+3=0$
$\pi_4: 2x+y-2z+7=0$, $\pi_5: x+2y+2z-1=0$, $\pi_6: kx+qy+z+p=0$
מצא את ערכי הפרמטרים k, q ו- p שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

94) כדור שמרכזו בנקודה $O(3,8,-1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x+4y-3z-6=0$.
מצא את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

תשובות סופיות:

91) $\pi_1: 3x-4y+5z+10=0$, $\pi_2: 3x-4y+5z-30=0$.

92) $\pi_3: x-2y-2z-3=0$.

93) $k=2$, $q=-2$, $p=18,-12$.

94) $12x+4y-3z-136=0$.

מרחק בין ישרים מצטלבים:

סיכום כללי:

מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע״י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני.

שאלות:

95) נתונים שני הישרים הבאים: $\ell_1 : \underline{x} = (-3,2,6) + t(-4,1,2)$
ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0,2,-7) + s(1,0,-1)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

96) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים: $\ell_1 : \underline{x} = (-1,0,5) + t(1,1,-2)$
ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2,-1,9) + s(6,-1,0)$.
מצא את המרחק שביניהם.

97) מצא את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4,-2,-1) + t(-1,1,6)$ מציר ה- z.

תשובות סופיות:

95) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח״א.

96) 1.567 יח״א.

97) $\sqrt{2}$ יח״א.

שאלות מסכמות בוקטורים:

שאלות:

1) נתונות הנקודות $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.
הראה כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.

ב. חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.

ג. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

2) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את המרחק ביניהם.

א. $\underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0)$, $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0)$.

ב. $\underline{x}=(1,-1,0)+s(12,-3,1)$, $\underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1)$.

ג. $\underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2)$, $\underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1)$.

ד. $\underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1)$, $\underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4)$.

3) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור. במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$, $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$, $2x-14y+10z=-6$.

4) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק בינים.
במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

א. $2x+y+2z-4=0$, $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$, $2x-14y+10z=-6$.

5) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D' שנפחה הוא 8.
משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא: $\pi_1 : 4x+y+3z-28=0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא: $\pi_2 : x+2y-2z+6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

6) הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור שמרכזו $O(1,1,2)$.
מצא את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.

7) נתונים מישור וישר: $\pi : 2x-y+2z+1=0$, $\ell : \underline{x}=(1,5,5)+t(1,1,0)$.
מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

8) נתונים שני מישורים: $\pi_2 : 4x-2y+4z-1=0$, $\pi_1 : 2x-4y+4z-5=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

9) נתונים ישר ומישור: $\pi : 6x+2y-z+5=0$, $\ell_1 : \underline{x}=(0,-3,0)+t(1,1,-8)$.
ישר נוסף, ℓ_2, המקביל למישור π, עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π, הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q. מצא את שטח המלבן PQQ'P'. (הדרכה: הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2).

10) נתונים שני מישורים: $\pi_2 : 3x+y+2z+11=0$, $\pi_1 : 2x+y+z-5=0$.
ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של $60°$ עם הישר $\ell_2 : \underline{x}=(1,3,-4)+t(1,1,0)$.
מצא את משוואת המישור π_3.

תשובות סופיות:

1) א. $\underline{x}=(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y-z+2=0$

2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$, הזווית היא: $47.6°$.

3) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל
ג. חותך בנקודה $(3.5,-0.5,-2)$, הזווית היא: $40.78°$.

4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x}=(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$, זווית: $63.6°$.
ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.

5) $\ell:\underline{x}=(0,7,7)+t(8,-11,-7)$, $\ell:\underline{x}=(0,2.5,8.5)+t(2,-2.75,-1.75)$.

6) $\pi:\ -3x+y+3z+15=0$.

7) $(0,0,4)$ או $\left(0,0,14\frac{4}{5}\right)$.

8) $\ell:\underline{x}=\left(0,-14,-15\frac{3}{4}\right)+t(-14,14,21)$.

9) 10.467 יח״ש.

10) $\pi_3:x+2y-z-58=0$ או $\pi_3:2x+y+z-5=0$.

שאלות הנפתרות עם מכפלה וקטורית:

שאלות:

מציאת משוואת מישור:

1) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = t(-2,2,1) + s(3,1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

2) המישור π עובר בנקודות: $A(1,0,-3)$, $B(2,0,0)$, $C(4,-1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

3) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x} = (5,-4,1) + t(0,2,-1)$, $\ell_2 : \underline{x} = (0,-6,2) + s(0,-2,1)$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את משוואת המישור המכיל אותם.

4) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x} = (-1,1,3) + t(3,-2,4)$, $\ell_2 : \underline{x} = (-7,1,0) + s(4,-3,0)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1
ומקביל לישר ℓ_2.

5) מצא משוואת מישור שעובר בנקודה $A(6,0,-1)$ ומכיל את ציר ה- z.

מצב הדדי בין ישר ומישור:

6) נתונים הישר והמישור הבאים:
$\pi : \underline{x} = (-1,0,2) + s(1,0,-2) + r(3,0,-1)$, $\ell : \underline{x} = (0,3,-2) + t(1,-1,2)$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

7) נתונים שני המישורים הבאים: $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

מצב הדדי בין מישורים:

8) במקבילון ABCDA'B'C'D' נתונים שלוש הקודקודים הבאים:
$A(1,-1,4)$, $B(9,0,2)$, $C(5,2,-2)$.
מצא את משוואת המישור עליו מונחת הפאה A'B'C'D' אם ידוע שהנקודה $(2,-1,0)$ נמצאת עליו.

מציאת ישר חיתוך בין שני מישורים:

9) המישורים π_1 ו-π_2 מאונכים זה לזה.
הישר $\ell : \underline{x}=(4,1,-1)+t(2,-1,1)$ הוא ישר החיתוך שבין המישורים.
מצא את משוואות המישורים אם ידוע שהמישור π_1 עובר בראשית.

10) נתונים ישר ומישור: $\pi : 4x-2y-3z-6=0$, $\ell : \underline{x}=(-2,0,5)+t(3,1,-1)$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שהוא היטלו של הישר ℓ על המישור.

חישובי מרחקים שונים:

11) חשב את נפחה של פירמידה משולשת SABC שקודקודיה הם:
$A(1,6,-1)$, $B(2,-1,0)$, $C(6,-4,0)$, $S(11,-2,4)$.

12) בפירמידה משולשת SABC המקצועות SA, SB ו-SC מאונכים זה לזה.
נתון: $SA=6$, $SB=8$, $SC=12$.
חשב את אורכו של גובה הפירמידה היורד מהקודקוד S לבסיס ABC.

13) נתונים שני הישרים הבאים: $\ell_1 : \underline{x}=(-3,2,6)+t(-4,1,2)$
ו-$\ell_2 : \underline{x}=(0,2,-7)+s(1,0,-1)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

14) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים: $\ell_1 : \underline{x}=(-1,0,5)+t(1,1,-2)$
ו-$\ell_4 : \underline{x}=(2,-1,9)+s(6,-1,0)$. מצא את המרחק שביניהם.

15) מצא את מרחק הישר $\ell : \underline{x}=(4,-2,-1)+t(-1,1,6)$ מציר ה-z.

שאלות שונות:

16) נתונים שני ישרים: $\ell_2 : \underline{x}=(-7,3,-1)+s(-5,4,-2)$, $\ell_1 : \underline{x}=(-2,1,5)+t(5,-4,2)$.

א. מצא את המצב ההדדי שבין הישרים.

ב. המישור π_1 מכיל את שני הישרים והמישור π_2 נמצא בין שני הישרים במרחק שווה מכל אחד מהם, מקביל לשני הישרים ומאונך למישור π_1.
מצא את משוואות המישורים π_1 ו-π_2.

17) נתונים שני מישורים: $\pi_2 : x-y+2z-4=0$, $\pi_1 : 2x-y+4z-8=0$.
המישור π_3 מכיל את ישר החיתוך של שני המישורים וחותך את ציר ה-y בנקודה A כך שמתקיים $\mathrm{OA}=m$ (O ראשית הצירים).
הזווית שבין המישור π_2 למישור π_3 היא α ונתון כי: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$.
מצא את הערכים האפשריים של הפרמטר m.

18) נתונות שלוש נקודות: $\mathrm{O}(3,1,0)$, $\mathrm{B}(2,-1,0)$, $\mathrm{A}(3,-1,1)$.
הנקודות A ו-B נמצאות על היקפו של מעגל שהנקודה O היא מרכזו.
מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל בנקודה A
(הישר נמצא במישור המעגל).

תשובות סופיות:

1) $\pi:\ x-3y+8z=0$.

2) $\pi:\ 3x+6y-z-6=0$.

3) $\pi:\ y+2z+2=0$.

4) $\pi:\ 12x+16y-z-1=0$.

5) $\pi:\ y=0$.

6) נחתכים בנקודה: $(3,0,4)$.

7) $l: \underline{x}=t(1,9,13)$.

8) $\pi_{A'B'C'D'}:\ 2y+z+2=0$.

9) $\pi_1:\ y+z=0\ ,\ \pi_2:\ x+y-z-6=0$.

10) $l: \underline{x}=(-5,-13,0)+t(7,11,2)$.

11) 20.5 יח"ר.

12) 4.46 יח"א.

13) $\frac{4}{\sqrt{6}}$ יח"א.

14) 1.567 יח"א.

15) $\sqrt{2}$ יח"א.

16) א. הישרים מקבילים. ב. $\pi_1: 2x+2y-z+7=0\ ,\ \pi_2: y+2z-6=0$.

17) $m=4$ או $m=-\frac{4}{7}$.

18) $l: \underline{x}=(3,-1,1)+k(-5,-2,-4)$.