מתמטיקה דיסקרטית

תוכן העניינים

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 1 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) לגבי כל אחד והממדים הבאים רשמו ב- $\square$ את הסימן המתאים, $\in,\notin,\subseteq,\subset,\not\subseteq$.
שימו לב שיתיכן יותר מתשובה אחת. אם התשובה היא $\not\subseteq$, נמקו.

א. $1\square\{1,\{1\}\}$

ב. $\{1\}\square\{1,\{1\}\}$

ג. $\{8,\varnothing\}\ \square\ \{1,2,8\}$

ד. $\varnothing\ \square\ \{1,2\}$

ה. $\varnothing\ \square\ \{\varnothing,1,2\}$

ו. $\{2\}\square\{\{1,\{2\}\}\}$

ז. $\{2\}\ \square\ \{2,\{2,\{2\}\}\}$

ח. $\{2\}\ \square\ \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$

ט. $\{2\}\ \square\ \{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$

י. $\{\{2\},\varnothing\}\ \square\ \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$

יא. $\varnothing\ \square\ \{1,\{\varnothing\}\}$

יב. $\{\varnothing\}\ \square\ \{1,\{\varnothing\}\}$

יג. $\{1,2\}\ \square\ \{1,\{2\}\}$

יד. $1\ \square\ \mathbb{N}$

טו. $\{1\}\ \square\ \mathbb{N}$

טז. $1\ \square\ \{\mathbb{N}\}$

יז. $\{1\}\ \square\ \{\mathbb{N}\}$

תשובות סופיות

1) א. $\in$ ב. $\in,\subseteq,\subset$ ג. $\notin,\not\subseteq$ ד. $\notin,\subseteq,\subset$ ה. $\in,\subseteq,\subset$
ו. $\notin,\not\subseteq$ ז. $\notin,\subseteq,\subset$ ח. $\in,\subseteq,\subset$ ט. $\in,\subseteq,\subset$ י. $\notin,\not\subseteq$
יא. $\notin,\subseteq,\subset$ יב. $\in,\not\subseteq$ יג. $\notin,\not\subseteq$ יד. $\in,\notin$ טו. $\notin,\subseteq,\subset$
טז. $\notin$ יז. $\notin,\not\subseteq$

כתב ופתר – טל פלדמן ©

פעולות על קבוצות

שאלות

1) עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $(A\cup C)\setminus B$

ב. $(A\cap B)\cup C$

ג. $A\cap(B\cup C)$

ד. $P(A)$

ה. $C\setminus A$

2) עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$:

א. האם $B\subseteq C$?

ב. האם $\{1\}\subseteq B$?

ג. האם $\{1\}\subseteq A$?

ד. האם $\{1\}\in P(A)$?

ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$?

ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$?

ז. האם $\{\{1\},\varnothing\}\subseteq P(A)$?

3) עבור $A=\{1,\{3,*\},\varnothing\}, B=\{4,\varnothing\}$, חשבו:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $A-B$

ד. $B-A$

ה. $A\oplus B$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

תשובות סופיות

1) א. $\{1,2,6\}$ ב. $\{1,3,4,6\}$ ג. $\{1,3\}$ ד. $2\notin P(A)$

2) א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.
ה. לא. ו. כן. ז. כן.

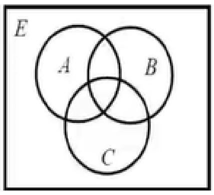
3) א. $\{1,\{3,*\},\varnothing,4\}$ ב. $\{\varnothing\}$ ג. $\{1,\{3,*\}\}$ ד. $\{4\}$
ה. $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

דיאגרמת ון

שאלות

1) באיור שלהלן דיאגרמת ון.



קווקוו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:

א. $(A-B)-C$

ב. $A-(B-C)$

ג. $A\cap B^c$

ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$

ה. $(A\cap B)\cap C$

ו. $A\cap(B\cap C)$

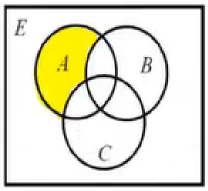
ז. $(A\cup B)\cup C$

ח. $A\cup(B\cup C)$

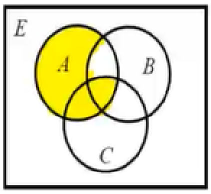
כתב ופתר – טל פלדמן ©

תשובות סופיות

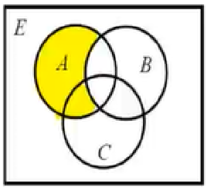
1) א.



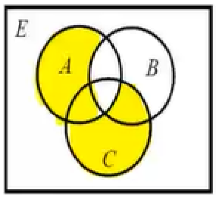
ב.



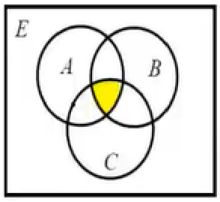
ג.



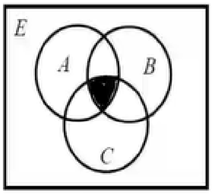
ד.



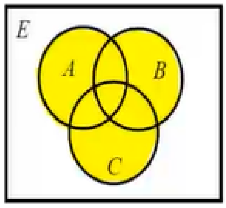
ה.



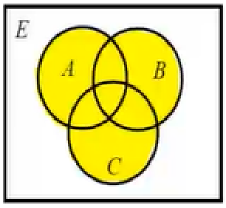
ו.



ז.



ח.



כתב ופתר – טל פלדמן ©

שאלות הוכחה

שאלות

בכל אחת משאלות הפרק יש לפעול כפי שמתואר בשאלה 1.

1) תהיינה A, B קבוצות.

אם הטענה נכונה, ציינו זאת ותנו נימוק קצר מדוע.
אם הטענה אינה נכונה, ציינו זאת, ותנו דוגמה נגדית.
יש ערך רב יותר לדוגמה מינימלית; בדקו האם בדוגמה הנגדית יש פרטים מיותרים והסירו אותם.
אם טענות יב-כא נכונות, נסו להוכיחן, ובמיוחד את טענה יב, שבה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x \notin A$, אז $x \notin A \cup B$.

ב. אם $x \notin A \cup B$, אז $x \notin A$.

ג. אם $x \notin A$, אז $x \notin A \cap B$.

ד. אם $x \notin A \cap B$, אז $x \notin A$.

ה. אם $x \notin A$, אז $x \notin A - B$.

ו. אם $x \notin A - B$, אז $x \notin A$.

ז. אם $x \in B$, אז $x \notin A - B$.

ח. אם $x \notin A - B$, אז $x \in B$.

ט. $x \notin A - B \Leftrightarrow x \notin A$

י. $x \notin A - B \Leftrightarrow x \in B$

יא. השלימו: $x \notin A - B \Leftrightarrow$ ______.

יב. $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$

יג. $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$

יד. אם $A = A \cup B$, אז $A \subseteq B$.

טו. אם $A = A \cup B$, אז $B \subseteq A$.

טז. אם $A = A \cap B$, אז $A \subseteq B$.

יז. אם $A = A \cap B$, אז $B \subseteq A$.

יח. אם $A \subseteq B$, אז $A = A \cup B$.

יט. אם $B \subseteq A$, אז $A = A \cup B$.

כ. אם $A \subseteq B$, אז $A = A \cap B$.

כא. אם $B \subseteq A$, אז $A = A \cap B$.

כתב ופתר – טל פלדמן ©

2) תהיינה A,B,C קבוצות.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $A=A-B$, אז $B=\varnothing$.

ב. אם $A=A-B$, אז $A\cap B=\varnothing$.

ג. אם $A=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.

ד. אם $B=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.

ה. אם $A\cap B=A$, אז $A=A\cup B$.

ו. אם $A\cap B=B$, אז $A=A\cup B$.

ז. אם $A\cup B=A\cup C$ וגם $A\cap B=A\cap C$ אז $B=C$.

ח. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$

ט. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$

י. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$

יא. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$

יב. $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

יג. $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

יד. להלן שתי טענות. הוכיחו את הנכונה והפריכו את השגויה:

1. $A\cap B\cap C\subseteq A\oplus B\oplus C$
2. $A\oplus B\oplus C\subseteq A\cap B\cap C$

תשובות סופיות

1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x\in B \vee x\notin A$ יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.

2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד.1. נכונה. 2. לא נכונה.

כתב ופתר – טל פלדמן ©

קריאת קבוצות

שאלות

1) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, רשמו בשתי דרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים, $\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,...\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי, $A=\{1,4,9,16,25,36,49,...\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי,
$B=\{2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17,18,...\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים,
$C=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},...\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2,
$D=\{2^1,2^2,2^3,...\}=\{2,4,8,16,32,...\}$.

2) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $C=\{3n-1 \mid n\in\mathbb{N}\}$

ב. $K=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\geq 2\to x^2>41\}$

ג. $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\geq 7\to x<20\}$

ד. $C=\{3n-1 \mid n\in\mathbb{N}\wedge\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}=\{3n-1 \mid \sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$

ה. $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\geq 8\to x^2<67\}$

כתב ופתר – טל פלדמן ©

תשובות סופיות

1) א. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\frac{n+1}{2}\in\mathbb{N}\right\}$, דרך 2: $\{2n-1|n\in\mathbb{N}\}$.

ב. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n^2|n\in\mathbb{N}\}$.

ג. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\notin\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n|n\in\mathbb{N}\wedge\forall k\in\mathbb{N}\ n\neq k^2\}$.

ד. דרך 2: $\{\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}\}$.

ה. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\exists k\in\mathbb{N}\ n=2^k\}$, דרך 2: $\{2^n|n\in\mathbb{N}\}$.

2) א. $C=\{2,5,8,11,14,17,20,...\}$

ב. $\mathbb{Z}-\{\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,...\}$

ג. $\mathbb{Z}-\{20,21,22,23,...\}$

ד. $\{2,11,26,74,107,146,...\}$

ה. $\mathbb{Z}-\{9,10,11,12,...\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

דרך השלילה

שאלות

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם α, אז β, נוכיח אם $\neg\beta$, אז $\neg\alpha$.

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

1) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$, אז $A\cap C=\varnothing$
2) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$, אז $A\subseteq B$.
3) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$, אז $(A-C)\cap B=\varnothing$.
4) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$, אז $B\subseteq A$.
5) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$, אז $A\cap C=\varnothing$.
6) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C=B\oplus C$, אז $A\cap C=\varnothing$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

קבוצת חזקה

שאלות

1) עבור $A=\{3,\{\varnothing\}\}$, $B=\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}$, $C=\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}$
רשמו את הקבוצות הבאות:

א. את $P(C)$, $P(B)$ ואת $P(A)$.

ב. $P(A)\cap B$, $P(A)\cap A$, $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$.

2) עבור הקבוצות $B=\{1,\varnothing\}$, $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,

א. רשמו את $P(A)$ ואת $P(B)$.

ב. רשמו את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$.

ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$.

3) רשמו את $P(\varnothing)$, את $P(P(\varnothing))$ ואת $P(P(P(\varnothing)))$.

4) תהיינה A,B שתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:

א. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

ב. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

ג. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

ד. $P(A)\cap A\neq\varnothing$

ה. $P(A)\cap A=\varnothing$

ו. תנו דוגמה לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$.

ז. אם $\{A\}\subseteq P(B)$, אז $P(A)\subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכיחו בדרך השלילה:

ח. אם $P(A)\subseteq P(A-B)$, אז $A\cap B=\varnothing$.

ט. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$, אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

5) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן, ונתון $P(B)-P(A)=P(B)-\{\varnothing\}$.
הוכיחו כי $B-A=B$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

תשובות סופיות

1) א. $P(A)=\{\varnothing,\{3\},\{\{\varnothing\}\},\{3,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{\{3\}\},\{\{4,\varnothing\}\},\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}\}$,
$P(C)=\{\varnothing,\{3\},\{\{3\}\},\{\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\}\},\{3,\{\varnothing,3\}\},\{\{3\},\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}\}$.

ב. $P(A)\cap B=\{\{3\}\}$, $P(A)\cap A=\varnothing$, $P(C)\cap C=\{\{3\}\}$, $C-P(C)=\{3,\{\varnothing,3\}\}$.

2) א. $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\varnothing\},\{1,\varnothing\}\}$.

ב. $P(A)-P(B)=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)-P(A)=\{\{1\},\{1,\varnothing\}\}$.

ג. $P(A)-A=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(A)-\{A\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$.

3) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$, $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. ראו סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.

5) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

מכפלה קרטזית

שאלות

1) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו:

א. $(A=B)\Leftrightarrow(A\times A=B\times B)$

ב. $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B))\Leftrightarrow(A\times B=B\times A)$

ג. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים
$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

ד. אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$, אז
$(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$.

ה. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים
$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

2) הוכיחו או הפריכו:
תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$.
אז קיימות $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$, כך ש-$S=C\times D$.

3) הוכיחו או הפריכו:
קיימות שתי קבוצות A,B, כך ש-$|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$ (סימון $|\ |$ על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

4) הוכיחו או הפריכו:
לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$.

5) הדגימו שלוש קבוצות A,B,C, כך ש-$(A\times(B\times C))\cap((A\times B)\times C)\neq\varnothing$.

כתב ופתר – טל פלדמן ©

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
2) לא נכונה.
3) לא נכונה.
4) נכונה.
5) ראו סרטון.

כתב ופתר – טל פלדמן ©

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 2 - הבינום של ניוטון

תוכן העניינים

הבינום של ניוטון

שאלות

1) הוכיחו אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=3^n$.

2) הוכיחו לכל $n\geq 0$ את הזהות $6^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{2n-k}$.

3) הוכיחו את השוויון

$$2^n=3^n-n3^{n-1}+\binom{n}{2}3^{n-2}-\ldots+(-1)^k\binom{n}{k}3^{n-k}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}3^0$$

4) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=2^{2n}$.

5) הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\binom{m+n}{2}=\binom{n}{2}+\binom{m}{2}+mn$.

6) הוכיחו כי $\binom{2n}{n}$ זוגי לכל $n\in\mathbb{N}$.

7) הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}2^{k-1}=\frac{n}{3}\cdot 3^n$.

8) הוכיחו כי $\binom{x+y}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$, $\forall x,y,n\in\mathbb{N}^+$.

9) הוכיחו את השוויון $\sum_{k,j=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{j}\binom{n}{k+j}=\binom{3n}{n}$.

10) הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$.

כתב ופתר – טל פלדמן ©

11) הוכיחו שלכל $n\geq 0$ ולכל $0\leq k\leq n$ מתקיים $\binom{n}{k}+2\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}=\binom{n+2}{k+2}$.

12) הוכיחו אלגברית וקומבינטורית את הזהות

$$(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1=\frac{\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2}}{n!}$$

13) הוכיחו את הזהות $6n^2\binom{5n-2}{n-2}=\sum_{k=1}^{n}k(n-k)\binom{2n}{k}\binom{3n}{n-k}$.

14) הוכיחו את השוויון $\sum_{n=0}^{N}\binom{k-1+n}{n}=\binom{k+N}{N}$.

15) הוכיחו כי אם $n>0$ זוגי, אז $2^n>\binom{n}{\frac{n}{2}}$.

16) כמה מבין המספרים בפיתוח הבינום $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{7}\right)^{80}$ שלמים?

17) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $n^n-(n-1)^n=\sum\binom{n}{i}(n-1)^{n-i}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – טל פלדמן ©

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 3 - יחסים

תוכן העניינים

יחסים – מושגי יסוד

שאלות

1) רשמו במפורש את היחסים כקבוצה של זוגות סדורים.
היחס R המוגדר מעל A להיות $aRb \Leftrightarrow b > a+3$, כאשר:

א. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

ב. $A=\{3,5,19,103\}$

ג. $A=\{5,6,7\}$

2) עבור $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, רשמו את היחסים הבאים כקבוצה מפורשת של זוגות:

א. $R_1=\{\langle x,y\rangle \mid x^2+y^2<5\}$

ב. $R_2=\{\langle x,y\rangle \mid x^2+y^2>5\}$

ג. $R_3=\{\langle x,y\rangle \mid x<y+2\}$

ד. $R_4=\{\langle x,y\rangle \mid x\cdot y>8\}$

3) עבור כל אחת מהקבוצות הבאות קבעו האם היא יחס, ובמידה וכן, מצאו קבוצה קטנה ביותר A, כך ש-R יחס מעל A.

א. $R=\{2,5,(7,8)\}$

ב. $R=\{(1,3),(3,7),(2,5)\}$

ג. $R=\{((1,2),(3,4)),((1,3),(2,4))\}$

4) עבור הקבוצות משאלה **1**, בכל מקרה בו הקבוצה היא יחס רשמו את $\operatorname{dom}(R)$ ואת $\operatorname{range}(R)$, ורשמו את היחס במטריצה.

5) נגדיר יחס R מעל הקבוצה $A\{1,2,3,4,5\}$, כך: $\langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow |y-x|>2$.

א. רשמו את R במפורש בעזרת $\langle\ldots\rangle$ ובעזרת דיגרף.

ב. חשבו את היחס R^{-1} ואת כל החזקות השונות של R.

ג. מצאו אם היחס R מקיים את התכונות הבאות ומה נובע מכך:

$$R\cap R^{-1}\subseteq I_A,\ \ R=R^{-1},\ \ I_A\subseteq R,\ \ R^2\subseteq R$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

6) תהי $A\{1,2,3,4\}$ ויהי R יחס מעל A.
איזו טענה נכונה:
א. ה- Domain של $R=\{(1,1),(2,2),(1,3)\}$ הוא $\{1,2\}$.
ב. ה- Range של $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ הוא $\{2,3,1\}$.
ג. ה- Domain של היחס $R=\{(1,1),(2,2),(1,3)\}$ שווה ל- Range של R^{-1}.

7) תהי $A\{1,2,5\}$ ויהי R יחס מעל A.
איזו טענה נכונה:
א. אם R הוא יחס הזהות $(R=I_A)$, אז $R=\{(1,1),(2,2),(5,5)\}$.
ב. אם R הוא היחס המלא, אז
$R=\{(1,1),(1,2),(1,5)(2,1),(2,2),(2,5),(5,1),(5,2),(5,5)\}$.
ג. אם R הוא יחס הזהות, אז $R=\left((IR)^{-1}\right)^{-1}$.

8) תהיינה $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{5,6\}$, יהי R יחס כך ש- $R\subseteq A\times B$,
ויהי S יחס כך ש- $S\subseteq B\times C$.
איזו טענה נכונה:
א. $SR=\varnothing$
ב. אם R ו- S יחסים מלאים, אז ב- RS יש ארבעה איברים.
ג. אם R הוא היחס הריק ו- S הוא היחס המלא, אז $RS=S$.
ד. ה- Domain שווה ל- Range של $S^{-1}R^{-1}$.

9) תהי $A=\{1,2,5\}$ ויהי $R=\{(1,1),(1,2),(2,5),(5,5)\}$ יחס מעל A.
א. הביעו את R בצורה של גרף.
ב. הביעו את R^{-1} בצורה של גרף.
ג. הביעו את יחס הזהות מעל A בצורה של גרף.
ד. הביעו את היחס המלא מעל A בצורה של גרף.
ה. הביעו את יחס הזהות מעל A בצורה של מטריצת סמיכויות.
ו. הביעו את היחס הריק בצורה של מטריצת סמיכויות.
ז. הביעו את RR^{-1} בצורה של גרף.
ח. הביעו את $R\cup R^{-1}$ בצורה של גרף.
הדרכה: יש למצוא תחילה את הזוגות.
ט. הביעו את $(R^{-1}R)\cap(RR^{-1})$ בצורה של מטריצת סמיכויות.
י. הביעו את $(R^{-1}R)\setminus(RR^{-1})$ בצורה של גרף.
יא. הביעו את $(R^{-1}R)\Delta(RR^{-1})$ בצורה של גרף.

כתב ופתר – טל פלדמן ©

יחס רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי, אנטי-יחס, סגור

שאלות

1) עבור $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ נגדיר יחס T באופן הבא: $\langle x,y\rangle \in T \Leftrightarrow x\cdot y\le 23$
רשום מדגם בן שלושה זוגות של איברים ביחס ובדוק האם T רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי (חלש) טרנזיטיבי.

2) נתון היחס T הבא מעל $A=\{1,2,3,4\}$

$$T=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

האם T רפלקסיבי? אם לא רפלקסיבי אז הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי שהתשובה תהיה חיובית.
האם T סימטרי? אם לא אז סימטרי הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי שהתשובה תהיה חיובית.
האם T טרנזיטיבי? אם לא טרנזיטיבי אז הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי שהתשובה תהיה חיובית.
הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי ש- T יהיה גם רפלקסיבי, גם סימטרי, וגם טרנזיטיבי.

3) נגדיר יחס T מעל $\mathbb{Z}$ באופן הבא: $T=\{|\langle a,b\rangle| a\cdot b\in \mathbb{Z}_{even}\}$

א. רשום שלוש זוגות ביחס ושלושה זוגות שאינם ביחס.

ב. בדוק האם T רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי.

4) נתון יחס S מעל $\mathbb{Z}$ המוגדר באופן הבא: (יש ל- x,y אותה הזוגיות)
$\langle x,y\rangle \in S \Leftrightarrow$ (כלומר שניהם זוגיים או שניהם אי זוגיים)
הוכח כי S רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

5) נתון יחס R מעל קבוצה A.
הוכיחו כי $R^2\subseteq R$ אם״ם R טרנזיטיבי.

6) נתון יחס S מעל $\mathbb{Z}$ המוגדר באופן הבא: $\langle x,y\rangle \in S \Leftrightarrow 3|x-y$
הוכח כי S רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

7) נתונים היחסים הבאים מעל $A=\{1,2,3\}$,

$$R_2\{(1,2),(2,2),(2,3)(2,1)\} \qquad R_1=\{(1,2),(2,1),(2,3)\}$$

עבור כל אחד מארבעת היחסים $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_2 , R_1,
קבעו האם הוא רפלקסיבי, סימטרי או טרנזיטיבי.
(במקרה של הפרכה הביאו דוגמה מתאימה)

8) עבור $A\{1,2,3,4,5,6\}$, נגדיר S מעל A כך:

$$S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 6,3\rangle\}$$

א. בדקו אם S רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי חלש, חזק וטרנזיטיבי.
ב. רשמו את היחסים I_A ו-S^{-1}.
ג. רשמו את כל החזקות השונות של S.
ד. רשמו את היחס $R=\{1,3,6\}^2 \cup \{2,4\}^2 \cup \{5\}^2$, כקבוצה של זוגות.
ה. היחס R הוא יחס שקילות.
רשמו את מחלקות השקילות השונות ואת קבוצת המנה.

9) לגבי כל אחד מהיחסים הבאים, רשמו שלושה זוגות שנמצאים ביחס, ונמקו מדוע הם ביחס. כתבו שלושה זוגות שאינם ביחס, ונמקו מדוע אינם ביחס. כמו כן, קבעו האם היחס הוא רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, א-סימטרי חלש, חזק, וטרנזיטיבי.
א. יחס $@$ מעל $\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in @ \Leftrightarrow |x-y|\le 100$.
ב. יחס $\clubsuit$ מעל $\mathbb{Z}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in\clubsuit \Leftrightarrow 3|x-y$.
ג. היחס $\subseteq$ מעל $P(\mathbb{N})$, המוגדר באופן הבא: $(A,B)\in\subseteq \Leftrightarrow A\subseteq B$.
ד. היחס שרגא מעל $\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in$ שרגא $\Leftrightarrow x+y\ge x\cdot y$.
ה. יחס T מעל $\mathbb{Z}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in T \Leftrightarrow x^2+y\ge 1$.

10) תהי $\mathbb{N}_+$ הקבוצה $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, ונגדיר עליה יחס R כך: $aRb \Leftrightarrow \left[a=b^b \vee b=a^a\right]$.
א. האם $1R1$? האם R רפלקסיבי?
ב. האם R סימטרי?
ג. האם R אנטי-סימטרי?
ד. האם R טרנזיטיבי?

כתב ופתר – טל פלדמן ©

11) נגדיר יחס R על הקבוצה $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, על ידי $\langle f,g\rangle\in R$ אם ורק אם קיימת $A\subseteq\mathbb{N}$ אינסופית, כך ש- $f(n)=g(n)$ לכל $n\in A$.

א. האם R רפלקסיבי?

ב. האם R אנטי-סימטרי?

ג. האם R טרנזיטיבי?

12) בדקו האם היחס הוא רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי:

א. נגדיר יחס T מעל $\mathbb{R}$, כך: $aTb \iff a<b+1$.

ב. נגדיר יחס P מעל $P(\mathbb{N})$, כך: $APB \iff \left(A=B\vee A\cup\{1,2\}=b\right)$.

13) מצאו אלו מהתכונות: רפלקסיביות, אנטי-רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות חלשה, אנטי סימטריות חזקה וטרנזיטיביות, מקיים כל אחד מהיחסים הבאים, מעל הקבוצות $A=\{3,5,7,9\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.

א. $xRy \iff \exists m\in\mathbb{Z}_{odd}\ \ x=my$

ב. $xsy \iff \exists m\in\mathbb{Z}_{evevn}\ \ x=my$

ג. $xRy \iff \exists m\in\mathbb{Z}_{odd}\ \left(x=my\vee y=mx\right)$

14) תהי $A\{1,2,3,4\}$ ויהי R יחס מעל A.

איזו טענה נכונה:

א. $R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ הוא יחס הזהות מעל A.

ב. $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$ הוא היחס המלא מעל A.

ג. אם R הוא היחס המלא מעל A, אז R^{-1} הוא היחס המלא מעל A.

ד. אם R הוא יחס הזהות מעל A, אז R^{-1} הוא יחס הזהות מעל A.

ה. יהי R יחס מעל $A=\{1,2\}$.

האם יתכן כי R אינו טרנזיטיבי? נמקו.

15) יהי R יחס מעל A. הוכיחו:

א. אם $I_A\subseteq R$, אז R רפלקסיבי.

ב. אם $R=R^{-1}$, אז R סימטרי.

ג. אם $R^2\subseteq R$, אז R טרנזיטיבי.

ד. אם $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$, אז R אנטי-סימטרי.

כתב ופתר – טל פלדמן ©

16) תהי $A=\{1,2,3,4\}$ ויהי $R=\{(1,2),(2,1),(1,3)\}$ יחס מעל A.

א. רשמו את הסגור הרפלקסיבי של R.

ב. רשמו את הסגור הסימטרי של R.

ג. רשמו את הסגור הטרנזיטיבי של R.

17) תהי A קבוצה ו-R יחס מעל A הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות.
בכל מקרי ההפרכה תנו דוגמה נגדית מינימלית. בדקו האם יש בדוגמתך פרטים מיותרים והסר אותם.

א. אם R סימטרי, אז R טרנזיטיבי.

ב. אם R אנטי סימטרי חלש, אז R טרנזיטיבי.

ג. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז R טרנזיטיבי.

ד. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז $R=\varnothing$.

ה. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חזק, אז $R=\varnothing$.

ו. אם R טרנזיטיבי וסימטרי, אז R רפלקסיבי.

ז. אם R טרנזיטיבי ואנטי רפלקסיבי, אז R אנטי סימטרי חזק.

ח. אם R טרנזיטיבי ולא סימטרי, אז R אנטי סימטרי חלש.

18) יהי R יחס סימטרי וטרנזיטיבי מעל A, כך ש- $\forall a\in A\exists b\in A\quad aRb$.
הוכיחו כי R רפלקסיבי.

19) הוכיחו או הפריכו: לכל קבוצה A ולכל יחס רפלקסיבי R מעל A קיימות קבוצות $B,C\subseteq A$, כך ש- $R=B\times C$.

20) יהי S יחס אנטי רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל קבוצה A, ונניח שקיים $y\in A$, עבורו $\forall x\in A(x,y)\in S$.
הוכיחו כי לכל $z\in A$ מתקיים $(y,z)\notin S$.

21) נתון כי R יחס על A וכן $R\cap I_A=\varnothing$ (אנטי-רפלקסיבי),
וכן $a,b\in A$, לא בהכרח שונים זה מזה, המקיימים $(a,b)\in R^2$ וגם $(b,a)\in R^2$.
הוכיחו שקיימים $c,d\in A$ (לא בהכרח שונים זה מזה), שאף אחד מהם אינו שווה ל- a ואינו שווה ל- b, המקיימים $(c,d)\in R^2$ וגם $(d,c)\in R^2$.

כתב ופתר – טל פלדמן ©

יחס שקילות, קבוצת מנה, מחלקת שקילות

שאלות

1) עבור $A=\{1,2,3,4,5\}$ נגדיר יחס S על A כך: $xSy \iff x\cdot y\ge 2$.

א. האם $S^2\setminus S=\varnothing$?

ב. האם S יחס שקילות על A?

2) עבור $A\{1,2,3\}$ נגדיר יחסים R,S מעל A כך:

$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,2\rangle\},\qquad S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

א. חשבו את היחסים RS ו- SR, ובדקו האם הם יחסי שקילות.

ב. האם היחסים S ו- S^2 אנטי-סימטריים? נמקו.

3) תהי S קבוצה שאיבריה הן קבוצות, ונגדיר יחס בינארי E מעל S באופן הבא:
$AEB \Leftrightarrow (A\subseteq B\wedge B\subseteq A)$.
הוכיחו או הפריכו: E יחס שקילות.

4) נגדיר יחס בינארי E מעל $\mathbb{Z}-\{0,1\}$ (קבוצת השלמים ללא 0 ו-1) באופן הבא:
$aEb\Leftrightarrow ab\ge -1$.
הוכיחו כי E יחס שקילות ותנו תיאור מפורש של מחלקות השקילות שלו.

5) תהי $A=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ קבוצת כל הזוגות הסדורים של המספרים הטבעיים,
ויהי $R\subseteq A^2$ יחס המוגדר על ידי $(m_1,n_1)R(m_2,n_2)\Leftrightarrow m_1-m_2=n_1-n_2$.

א. הוכיחו כי R הינו יחס שקילות ב-A.

ב. תארו באופן גרפי את מחלקות השקילות $[(2,1)]_R$, $[(1,2)]_R$, $[(1,1)]_R$.

6) נתון היחס R מעל $\mathbb{N}$.
$xRy\leftrightarrow(6|x-y)\vee(3\nmid x\cdot y)$ (אין צורך להוכיח כי R יחס שקילות)
מצאו את מחלקות השקילות ואת קבוצת המנה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

7) נגדיר יחס שקילות S מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xSy \Leftrightarrow (x=y=0)\vee(xy>0)$

ונגדיר יחס שקילות T מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xTy \Leftrightarrow (x^2-9)S(y^2-9)$.

(אין צורך להוכיח כי מדובר ביחסי שקילות)

כתבו במפורש את קבוצת המנה $\mathbb{R}/T$, ונמקו בקצרה.

8) יהי R יחס שקילות על A.

נאמר כי R אוקלידי, אם עבור כל $a,b,c\in A$ מתקיים התנאי:

$[(a,b)\in R\wedge(a,c)\in R]\Rightarrow(b,c)\in R$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם R יחס שקילות, אז הוא אוקלידי.

ב. אם R רפלקסיבי ואוקלידי, אז הוא יחס שקילות.

9) נתון כי R יחס שקילות על A, וכן $A\in P(B)\setminus\{B\}$.

האם מהנתון נובע כי R יחס שקילות על B, או שאינו יחס שקילות על B?

10) תהי A קבוצה ויהיו R,S יחסים מעל A.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (הפרכה = דוגמה מינימלית):

א. אם R,S רפלקסיביים, אז $R\cap S$ רפלקסיבי.

ב. אם R,S רפלקסיביים, אז $R\cup S$ רפלקסיבי.

ג. אם R,S סימטריים, אז $R\cap S$ סימטרי.

ד. אם R,S סימטריים, אז $R\cup S$ סימטרי.

ה. אם R,S טרנזיטיביים, אז $R\cap S$ טרנזיטיבי.

ו. אם R,S טרנזיטיביים, אז $R\cup S$ טרנזיטיבי.

ז. אם R,S יחסי שקילות, אז $R\cap S$ יחס שקילות.

ח. אם R,S יחסי שקילות, אז $R\cup S$ יחס שקילות.

ט. אם R,S אנטי סימטריים חלש, אז $R\cap S$ אנטי סימטרי חלש.

י. אם R,S אנטי סימטריים חלש, אז $R\cup S$ אנטי סימטרי חלש.

11) רשמו במפורש את כל יחסי השקילות E מעל $S=\{a,b,c,d\}$

המקיימים $\left|S/E\right|=2$ וכל מחלקות השקילות הן שוות עוצמה.

הערה: יש להציג כל יחס כתת קבוצה מפורשת של $S\times S$.

כתב ופתר – טל פלדמן ©

12) יהי S יחס המוגדר מעל $P(\mathbb{N})$ קבוצת החזקה של $\mathbb{N}$ באופן הבא:
$ASB \Leftrightarrow \min A = \min B$, כאשר $\min A$ הוא המספר הקטן ביותר ב-A.
א. הוכיחו כי S הינו יחס שקילות.
ב. נסמן ב-K את קבוצת מחלקות השקילות של היחס S.
בנו פונקציה $F: K \to \mathbb{N}$ חח״ע ועל.

13) יהיו R,S יחסי שקילות מעל A.
הוכיחו כי $R \triangle S$ לא יחס שקילות מעל A.

14) יחס R מעל A נקרא סוגר משולשים, אם מתקיים $(aRb \wedge bRc) \to cRa$ לכל $a,b,c \in A$.
א. הוכיחו כי יחס רפלקסיבי וסוגר משולשים הוא יחס שקילות.
ב. הוכיחו כי אם R סימטרי, סוגר משולשים ואינו ריק,
אז R אינו אנטי רפלקסיבי.

15) יחס השקילות S על $P(N)$ מוגדר כך: $S\{\langle A,B\rangle \mid A \cap \{1,2,3\} = B \cap \{1,2,3\}\}$.
א. מהי העוצמה של מחלקת השקילות $[\{4,7,9\}]_S$?
ב. כמה מחלקות שקילות יש?

כתב ופתר – טל פלדמן ©

יחסי סדר

שאלות

1) הוכיחו כי היחס R, המוגדר מעל הקבוצה $A=\{2^k|k\in\mathbb{N}\}$, על ידי $aRb\Leftrightarrow a|b$, הוא יחס סדר מלא.

2) נגדיר יחס בינארי D מעל הקבוצה $\mathbb{R}^2=\{(a,b)|a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}\}$, באופן הבא: $(a_1,b_1)D(a_2,b_2)\Leftrightarrow(a_1\geq a_2)\wedge(a_1+b_1\geq a_2+b_2)$.
הוכיחו כי D יחס סדר חלש שאינו מלא.

3) נגדיר יחס R מעל הקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ באופן הבא:
$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow(a\leq c\wedge b\leq d)$.
א. הוכיחו כי R יחס סדר חלש שאינו מלא.
ב. מצאו תת קבוצה אינסופית של $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, שעליה היחס R הוא מלא.

4) נגדיר יחס סדר (חלש) S מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xSy\Leftrightarrow\neg((\lfloor x\rfloor=\lfloor y\rfloor\rightarrow y<x))$
(אין צורך להוכיח שמדובר ביחס סדר).
כתבו במפורש את כל האיברים המינימליים של S.
תזכורת: $x\in A$ נקרא מינימלי ביחס סדר R, אם $\forall y\in A((y\neq x)\rightarrow\neg(yRx))$.

5) יהי R יחס סדר חלש מעל A, ויהי S יחס סדר חלש מעל B.
הוכיחו כי אם $A\cap B=\varnothing$, אז $R\cup S$ יחס סדר חלש מעל $A\cup B$.

6) תהי A קבוצה לא-ריקה ותהי K קבוצת כל יחסי השקילות מעל A (סדורה חלקית ביחס להכלה).
א. הראו שיש ב-K איבר קטן ביותר וגדול ביותר, והוכיחו שהם שייכים ל-K ואכן מקיימים את הנדרש.
ב. תהי $A=\{1,2,3,4\}$.
נסלק מ-K את האיבר הקטן ביותר והגדול ביותר שנמצאו בסעיף א, ונסמן את הקבוצה החדשה שהתקבלה ב-L (שאף היא סדורה חלקית ביחס להכלה).
תנו דוגמה לשני איברים מינימליים ב-L והוכיחו שהם מינימליים, ותנו דוגמה לשני איברים מקסימליים ב-L והוכיחו שהם מקסימליים.
ג. הוכיחו שאין ב-L איבר קטן ביותר וגדול ביותר.

כתב ופתר – טל פלדמן ©

שאלות שמשלבות יחסים ופונקציות

שאלות

1) יחס T מעל $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מוגדר באופן הבא: $fTg \leftrightarrow f\circ g=g\circ f$.
הוכיחו או הפריכו: T יחס שקילות.

2) תהיינה A,B שתי קבוצות לא ריקות ויהיו $<_A,<_B$ יחסי סדר חזקים ומלאים (משווים) מעל A,B בהתאמה.
תהי $f:A\to B$ פונקציה המקיימת אם $a_1<_A a_2$, אז $f(a_1)<_B f(a_2)$.
הוכיחו כי f חח"ע אך אינה בהכרח על.

3) יהי T יחס המוגדר מעל הקבוצה $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ באופן הבא:
$fTg \Leftrightarrow$ קיים $x\in\mathbb{R}$, כך ש- $f(x)=g(x)$.
האם T יחס שקילות?

4) תהי $F:A\to A$ פונקציה, ונגדיר יחס R מעל A כך: $aRb\Leftrightarrow f(a)=b$.
נתון ש- R סימטרי וטרנזיטיבי.
הוכיחו כי F היא פונקציית הזהות.

5) נגדיר יחס S על הקבוצה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ כך: $(x_1,x_2)S(y_1,y_2)\Leftrightarrow x_1^2-x_2=y_1^2-y_2$.
S יחס שקילות (אין צורך להוכיח).
הוכיחו כי קבוצת המנה $S\setminus\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ שוות עוצמה לקבוצה $\mathbb{R}$.

6) תהי A קבוצה לא ריקה ותהי A^A קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- A.
נגדיר יחס E מעל A^A באופן הבא: לכל $f,g\in A^A$, fEg אם ורק אם קיימת $h\in A^A$ הפיכה, כך ש- $f=h\circ g$.

א. הוכיחו כי E יחס שקילות.

ב. יהי $c\in A$ כלשהו, ותהי $f_c:A\to A$ הפונקציה הקבועה המוגדרת על ידי $\forall x\in A \quad f_c(x)=c$.
תארו את מחלקת השקילות של f_c ביחס ל- E (תנו תיאור מפורש ככל הניתן) ונמקו.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

7) תהי J קבוצת כל היחסים מעל A, ו- E קבוצת כל יחסי השקילות מעל A.
נגדיר פונקציה $F: J \times E \to J$ באופן הבא: $F(R,S) = R \cap S$.
הוכיחו כי F על.

8) תהי A קבוצה סופית ותהי B תת קבוצה של A.
נסמן ב- F את קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- $\{0,1\}$.
נגדיר יחס E מעל F באופן הבא: $F = \{(f,g) | B \subseteq \{x | f(x) g(x)\}\}$.

א. בהינתן $A = \{1,2,3\}$ ו- $B = \{1,2\}$, תנו דוגמה ל- $f,g,h \in F$ שונים, כך ש- $(f,g) \in E, (f,h) \notin E$.

ב. הוכיחו כי E יחס שקילות.

ג. מה עוצמת קבוצת המנה F/E ? נמקו.

9) תהי $A = \{1,2,3\}$ ותהי M קבוצת כל היחסים מעל A,
נגדיר פונקציה $t: M \to M$, המתאימה לכל יחס את הסגור הטרנזיטיבי שלו.

א. t חח״ע.

ב. t על.

ג. לכל $R \in M$ מתקיים $t(R^2) = (t(R^2))^2$.

ד. לכל $R \in M$ מתקיים $t(t(R)) = t(R)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 4 - קומבינטוריקה בסיסית

תוכן העניינים

מבוא לקומבינטוריקה בסיסית

שאלות

1) חשבו, ללא מחשבון:

א. $\frac{4!\cdot 7!}{0!\cdot 10!}$

ב. $\frac{14!\cdot 20!}{10!\cdot 17!}$

2) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2-n)=n!$

ב. $(n-1)!n^2+n!=(n+1)!$

ג. $\frac{n^2-2}{(n+1)!}+\frac{(n+2)^2}{(n+2)!}=\frac{1}{(n-1)!}$

3) חשבו ללא מחשבון:

א. $\binom{5}{3}$

ב. $\binom{4}{1}$

ג. $\binom{10}{0}$

ד. $\frac{1}{13}\binom{14}{11}$

4) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $1=\binom{n}{0}=\binom{n}{n}$

ב. $\binom{n-1}{k-1}=\frac{k}{n}\binom{n}{k}$

ג. $\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$

ד. $\binom{2n+1}{n}=\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון?
רשמו את כל התוצאות.

ב. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון ואחר כך מטבע? רשמו את כל התוצאות.

ג. עושים ניסוי ומטילים מטבע.
אם יצא עץ אז מטילים סביבון ואם יצא פלי אז מטילים שוב את המטבע ולאחר מכן סביבון.
כמה תוצאות אפשריות לניסוי?
למשל (פלי, פלי, גדול) ו-(עץ, היה) הן תוצאות אפשריות.
רשמו את כל התוצאות.

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מהאותיות ב, ג, ד, ה ניצור מילה בת שתי אותיות, לא בהכרח בעלת משמעות. רשמו את כל המילים האפשריות ואשרו עם עיקרון הכפל.

ב. מהאותיות א, ב, ג, ד, ה ניצור מילה בת שלוש אותיות, לא בהכרח בעלת משמעות. כמה מהמילים הנ"ל מתחילות באות א וגם א מופיעה פעם אחת בדיוק?
(רמז: סעיף קודם)

7) במסעדה מציעים ארוחה עסקית, המורכבת ממנה ראשונה, עיקרית ושתייה. המנה הראשונה יכולה להיות סלט ירקות, סלט פטריות, סלט כבד קצוץ או מרק עוף. המנה העיקרית יכולה להיות סטייק אנטרקוט, שניצל, כבד אווז, דג, לזניה טבעונית, או שניצל מהצומח, ולשתייה מוצע, קפה, תה, לימונדה או קולה.

א. כמה ארוחות אפשריות יש?

ב. כמה ארוחות אפשריות יש אם אין שתיה חמה?

ג. כמה ארוחות אפשרויות יש למסעדה להציע לסועדת טבעונית?

8) כמה תת קבוצות יש לקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,

א. בנות שלושה איברים? רשמו את כולן.

ב. בנות ארבעה איברים? השוו לסעיף א'.

ג. רשמו את כל התמורות של 0001111 והשוו לסעיפים קודמים.

ד. בכמה תמורות של המספרים 00112222222 כל 0 חייב להופיע ליד 1?

9) בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב זוג מתלמידי כיתות א', אם בכיתה א' 1 יש 20 בנים ובכיתה א' 2 יש 15 בנות, כך ש:

א. ללא הגבלה.

ב. זוג מעורב (בן ובת).

ג. זוג חד מיני (שני בנים, או שתי בנות).

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

(10 בלוטו יש 45 מספרים וצריך לנחש 6 מספרים ואת המספר החזק מתוך הקבוצה $\{1,2,3,4,\cdots,10\}$.
כמה אפשרויות יש?

(11 בכמה אופנים שונים ניתן לבחור מספר תלת ספרתי כך ש:
א. ללא הגבלה (זכרו שמספר לא יכול להתחיל באפס).
ב. כל ספרותיו שונות.
ג. כל ספרותיו שונות וסדר הספרות לא משנה?
(למשל 123 ו-321 נחשבים אותו דבר)
ד. כל ספרותיו שונות וגם בסדר יורד. כלומר, ספרת המאות גדולה או שווה מספרת העשרות גדולה או שווה מספרת היחידות.
ה. כל ספרותיו שונות וגם בסדר עולה. כלומר, ספרת המאות קטנה או שווה מספרת העשרות קטנה או שווה מספרת היחידות.

(12 כמה מספרים מורכבים מהמספרים 1,2,3,4,5,6,7 יש, כך ש:
א. באורך 7?
ב. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לכל היותר?
ג. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לפחות?

(13 בכמה אופנים שונים ניתן להושיב 5 זוגות נשואים על ספסל בן 10 מקומות (ענו גם לגבי שולחן עגול) כך ש:
א. ללא הגבלה.
ב. כל אישה תשב לצד בן-זוגה.
ג. גבר ישב רק ליד אישה.
ד. אף שתי נשים לא ישבו זו לצד זו ואף שני גברים לא ישבו זה לצד זה.

(14 כמה מספרים שונים בני חמש ספרות ניתן להרכיב מהספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, כך ש:
א. ללא הגבלה.
ב. המספר מתחיל בספרה 2.
ג. המספר לא מתחיל בספרה 2.
ד. כל הספרות שונות.
ה. הספרות 1 וגם 2 לא מופיעות.
ו. בדיוק אחת מן הספרות 1 או 2 מופיעה.
ז. ספרות 1 וגם 2 מופיעות.
ח. חזרו על סעיפים ה-ז כאשר כל הספרות שונות.
ט. כל הספרות שונות והספרות 1,2 מופיעות צמודות.
י. כל הספרות שונות והספרות 1,2 מופיעות ולא צמודות.
יא. כל הספרות שונות והספרות 1,2,3 מופיעות וצמודות.
יב. כמו סעיף יא וגם הספרות 6,7 מופיעות וצמודות.
יג. כמו סעיף יא וגם הספרות 6,7 מופיעות ולא צמודות.

כתב ופתר – טל פלדמן ©

15) בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב קוד סודי המורכב מארבע ספרות מתוך הספרות $0,1,2,3,\cdots,9$, כך ש :

א. ללא הגבלה?
ב. הקוד מגדיר מספר זוגי?
ג. הקוד מגדיר מספר המתחלק בחמש?
ד. אין בקוד ספרות זהות?
ה. יש בקוד לפחות שתי ספרות זהות?
ו. יש בקוד בדיוק שתי ספרות זהות?
ז. אין בקוד את הספרה 5?
ח. הספרה 5 חייבת להופיע בקוד?
ט. יש בקוד לפחות אחד מהספרות 4,5?
י. אין בקוד לא את הספרה 4 ולא את הספרה 5?
יא. אם יש את הספרה 5 אז אין ספרה יותר גדולה מ-5?
הדרכה : רשמו שני מספרים המקיימים את התנאי ושניים שאינם מקיימים את התנאי וכתבו מהו המשלים של סעיף זה? נסחו זאת על דרך החיוב. כלומר, בלי להשתמש במילים 'אין' ו-'לא'.

16) נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,\cdots,17\}$. כמה תת קבוצות יש ל- A כך ש :

א. ללא הגבלה?
ב. בנות 3 איברים?
ג. בעלות 3 איברים לפחות?
ד. מכילות רק מספרים זוגיים? רק אי זוגיים?
מכילים רק מספרים מאותה זוגיות?
ה. מכילות אי זוגי אחד לפחות?
מכילות זוגי אחד לפחות וגם אי זוגי אחד לפחות?
ו. אם הן מכילות את 1 אז מכילות גם את 2?
(סעיף קשה ; אפשר לנסות בעזרת משלים)
ז. מכילות ממש את $\{1,2,3\}$.

17) בכמה אופנים שונים ניתן להכניס 7 כדורים ל-13 תאים, כך ש :

א. הכדורים שונים ומותר יותר מכדור בתא?
ב. הכדורים זהים ומותר יותר מכדור בתא?
ג. הכדורים שונים ואסור יותר מכדור בתא?
ד. הכדורים זהים ואסור יותר מכדור בתא?
ה. הכדורים שונים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?
ו. הכדורים זהים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?

כתב ופתר – טל פלדמן ©

18) נתונים חמישה כדורים ונתונים שבעה צבעים שונים (למשל שחור, לבן, אפור, צהוב אדום כחול וסגול).
בכמה אופנים שונים ניתן לצבוע את הכדורים ולסדרם בשורה אם:
א. סדר הכדורים בשורה משנה.
ב. סדר הכדורים בשורה לא משנה.
כלומר, ארבעה כדורים שחורים ואחד לבן זה נחשבו אותו דבר לא משנה היכן הלבן ממוקם.

19) עבור $B=\{x,y\}$ $A=\{1,2,3\}$, חשבו כמה פונקציות יש מ-A ל-B ומ-B ל-A, ואשרו עם עיקרון הכפל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

תשובות סופיות

1) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{1001}{285}$

2) הוכחה.

3) א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 28

4) הוכחה.

5) א. 24 ב. 48 ג. 12

6) א. 16 ב. 16

7) א. 96 ב. 48 ג. 16

8) א. 35 ב. 35 ג. 35 ד. 180

9) א. 595 ב. 300 ג. 295

10) 81,450,600

11) א. 900 ב. 648 ג. $\binom{10}{3}$ ד. $\binom{10}{3}$ ה. $\binom{9}{3}$

12) א. $\binom{7}{7}$ ב. אין ג. אין

13) א. ספסל: $10!$, מעגל: $9!$. ב. ספסל: $5!\cdot 2^5$, מעגל: $4!\cdot 2^5$.
ג. ספסל: $(5!)^2\cdot 2!$, מעגל: $4!\cdot 5!$. ד. ספסל: $(5!)^2\cdot 2!$, מעגל: $4!\cdot 5!$.

14) א. 7^5 ב. 7^4 ג. $6\cdot 7^4$ ד. $3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$ ה. 5^5
ו. $2(6^5-5^5)$ ז. $7^5-2\cdot 6^5+5^5$ ח. (ה) $5!$ ח. (ו) $10\cdot 5!$
ח. (ז) $10\cdot 5!$ ט. $4\cdot 5!$ י. $6\cdot 5!$ יא. 216 יב. 24 יג. 12

15) א. 10^4 ב. $5\cdot 10^3$ ג. $2\cdot 10^3$ ד. $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$
ה. $10^4-10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$ ו. $10\cdot 9\cdot 8\cdot\binom{4}{2}$ ז. 9^4
ח. 10^4-9^4 ט. 10^4-8^4 י. 8^4 יא. $9^4+6^4-5^4$

16) א. 2^{17} ב. 680 ג. 130,918
ד. זוגיים: 2^8, אי זוגיים: 2^9, אותה זוגיות: 768.
ה. לפחות אי זוגי אחד: 130,816, לא מאותה זוגיות: 130,304.
ו. 98,304 ז. 16,383

17) א. 13^7 ב. $\binom{19}{7}$ ג. $\binom{131}{61}$ ד $\binom{13}{7}$
ה. $5!\binom{12}{5}\binom{7}{2}13$ ו. $13\cdot\binom{16}{5}$

18) א. 7^5 ב. $\binom{11}{5}$

19) מ- A ל- B : 8, מ- B ל- A : 9.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

קומבינטוריקה יותר לעומק

שאלות

1) בכמה אופנים ניתן לסדר 10 אנשים בשורה כך ש :
א. ללא הגבלה.
ב. אבי ובני סמוכים.
ג. אבי, בני וגדי סמוכים.
ד. אבי ובני לא סמוכים.
ה. אבי ובני סמוכים וגם גדי ודני סמוכים.
ו. אבי ובני סמוכים וגדי ודני לא סמוכים.

2) בכיתה בה יש 10 בנים ו-15 בנות יש להרכיב נבחרת כדורסל בה יש לפחות שני בנים ולפחות שתי בנות.
בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

3) בכמה אופנים שונים ניתן להניח 8 צריחים על לוח שחמט 8×8 מבלי שאף צריח יאיים
על חברו כך ש :
(צריח מאיים על חברו אם הוא נמצא באותה שורה או באותה עמודה של חברו)
א. כל הצריחים הם לבנים.
ב. שלושה צריחים הם לבנים וחמישה הם שחורים.
ג. הצריחים נלקחים מתוך שקית ובה מלאי בלתי מוגבל של צריחים לבנים ומלאי בלתי מוגבל של צריחים שחורים.

4) בכמה מספרים 6 ספרתיים מופיעה הספרה :
א. 0 פעם אחת בדיוק.
ב. 0 פעם אחת לפחות.
ג. 7 פעם אחת לפחות.
ד. 7 פעם אחת בדיוק.
יש לזכור שמספר לא יכול להתחיל בספרה 0.

5) ענו על הסעיפים הבאים :
א. יהי n טבעי.
בכמה תת קבוצות של $\{1,2,3,\ldots,2n\}$ יש אי זוגי אחד לפחות?
ב. בכמה תת קבוצות של $\{1,2,3,\ldots,2n\}$ יש לפחות $n+1$ איברים?

כתב ופתר – טל פלדמן ©

6) בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 10 לימונדות זהות, כוס קולה 1 וכוס קינלי 1 ל-4 תלמידים צמאים, כך שכל תלמיד מקבל לפחות משקה אחד והקולה והקינלי ניתנים לתלמידים שונים?

7) בכמה דרכים ניתן לחלק 400 כדורים זהים ל-3 תאים, כך ש:
א. יש תא ובו יותר מ-200 כדורים.
ב. בכל תא מספר זוגי של כדורים.
ג. בשני תאים מתוך השלוש מספר אי זוגי של כדורים ובתא אחד מספר זוגי של כדורים.

8) 7 אנשים נכנסים למעלית בבניין בן 13 קומות.
בכמה אופנים הם יכולים ללחוץ על כפתורי המעלית כך ש:
א. המעלית תעצור בקומה החמישית? (יתכן ותמשיך הלאה משם)
ב. המעלית תעצור בקומה החמישית לכל היותר.
ג. המעלית תגיע לפחות עד הקומה החמישית.
ד. המעלית תעצור בקומה החמישית (ולא תמשיך משם הלאה).

9) בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים לבנים זהים ו-n כדורים צבעוניים (שונים) ל-$2n$, כך שבכל תא יהיה:
א. לכל היותר כדור אחד.
ב. לכל היותר כדור לבן אחד ואין מגבלה על מספר הצבעוניים.
ג. לכל היותר כדור צבעוני אחד ואין הגבלה על מספר הלבנים.
ד. מספר שווה של לבנים וצבעוניים.

10) במלבן בן k שורות ו-m עמודות יש לסמן $\times$ או $\bigcirc$ בכל משבצת.
א. הראו כי יש $\left(2^m-1\right)^k$ דרכים לעשות זאת, כך שבכל שורה יופיע $\times$ אחד לפחות.
ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת, כך שיופיע $\bigcirc$ אחד לפחות בכל עמודה.
ג. הסיקו כי $2^{mk}\le\left(2^m-1\right)^k+\left(2^k-1\right)^m$.

11) ענו על הסעיפים הבאים:
א. כמה תמורות של $1,2,3,\cdots,n$ מספר 2 מופיע בין 1 ל-3? (לאו דווקא צמודים. למשל, עבור $n=7$ התמורה 4352981 חוקית, כי 2 נמצא בין 1 ל-3)
ב. בכמה תמורות של $1,2,3,\cdots5$ מימין למספר 3 אין מספרים קטנים מ-3.
(למשל 24135 חוקית ואילו 43152 לא חוקית)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

12) ענו על הסעיפים הבאים:
א. בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 12 אנשים לשלושה זוגות ושתי שלשות?
ב. כמו סעיף א, אך בנוסף דני ודנה לא נמצאים באותה קבוצה.

13) כמה פתרונות בשלמים אי-שליליים יש לכל אחת מהמשוואות הבאות?
א. $x_1 + x_2 + \cdots x_7 = 20$
ב. $x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 14$
ג. $(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6) = 18$

14) בכמה דרכים ניתן לבחור ועדה בת n אנשים מתוך n זוגות נשואים, כך ש:
א. בוועדה לא ישתתף אף זוג נשוי.
ב. מספר הגברים יהיה שווה למספר הנשים.
ג. מספר הגברים יהיה קטן ממש ממספר הנשים.

15) מצאו כמה פונקציות $f:\{1,2,3,\dots,3n-1,3n\} \to \{1,2,3,\dots,n-1,n\}$ מקיימות את התנאי הבא: לכל איבר בתמונה יש בדיוק 3 מקורות.

16) מה מספר הדרכים לפזר 50 כדורים אדומים ו-20 כדורים כחולים ל-10 תאים, כך שבכל תא מספר הכדורים האדומים יהיה לפחות כמספר הכדורים הכחולים?

17) בכמה דרכים ניתן לחלק קבוצה בגודל $2n$ לקבוצה בגודל n ולזוגות? (ניתן להניח כי n זוגי)

18) בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה 8 פילים <u>שונים</u>, 2 שועלים <u>זהים</u> ושתי תרנגולות <u>זהות</u>, כך שהפילים מסודרים משמאל לימין על פי משקלם בסדר עולה, ואף שועל לא יהיה צמוד לתרנגולת?

19) בכמה דרכים ניתן לחלק 100 כדורים לבנים ו-100 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ל-250 תאים, כך שיתקיימו שני התנאים הבאים: יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור לבן אחד, ויהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד.

20) בכמה דרכים ניתן לסדר n גברים ו-n נשים במעגל כך שבני אותו מין לא ישבו זה לצד זה? כנ"ל לגבי שורה.

כתב ופתר – טל פלדמן ©

21) יש לבחור קבוצה של שישה ילדים מבין תלמידי כיתות א1 ו-א2, באופן ששלושה מהם יהיו מ-א1 ושלושה מ-א2. מספר הבנים בקבוצה צריך להיות שווה למספר הבנות בקבוצה (3 ו-3). ב-א1 יש 10 בנים ו-15 בנות וב-א2 יש 15 בנים ו-10 בנות. בכמה אופנים ניתן לבחור את הקבוצה?

22) בכמה קבוצות של n כדורים ב-10 צבעים יש לפחות כדור אחד מכל צבע?

23) כמה פונקציות $f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ (כאשר $n\geq 1$) מקיימות את התנאי $f(k)\neq f(k+1)$ לכל $1\leq k\leq n-1$?

24) כמה פונקציות $f:\{1,2,3,\cdots,n\}\to\{1,2,3,\cdots,n\}$ חח״ע ועל יש, המקיימות $f(k)-k$ זוגי לכל $k\in\{1,2,3,\cdots,n\}$?

25) בכמה דרכים ניתן לחלק 60 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ו-90 כדורים לבנים זהים ל-100 תאים, כך שיתקיימו שני התנאים הבאים גם יחד: יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד וכמו כן בכל תא יהיו לכל היותר 50 כדורים לבנים.

26) בכמה דרכים ניתן לחלק 4 בננות, 2 תפוזים, ו-4 תפוחים ל-10 אנשים, כך שכל אחד יקבל בדיוק פרי אחד? שימו לב שפירות מאותו סוג נחשבים זהים.

27) בכמה דרכים ניתן לבנות שורה מ-$k\geq 0$ כדורים לבנים זהים ו-$m\geq 0$ כדורים צבעוניים שונים (ושונים מלבן)?

28) כמה תת קבוצות בגודל 7 יש לקבוצה $A=\{1,2,3,...,12,13\}$, שיש בהם שני איברים עוקבים?

29) תהי $A_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$, כאשר $n\in\mathbb{N}_{odd}$, ותהי $a_1,a_2,\cdots a_n$ תמורה כלשהי של A_n. הוכיחו כי המכפלה $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ בהכרח זוגית (יש לפתור).

30) מטילים n קוביות. כמה תוצאות יש אם:
א. הקוביות שונות.
ב. הקוביות זהות.

כתב ופתר – טל פלדמן ©

31) נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,\cdots n\}$.

כמה זוגות של קבוצת (C,D), $C,D\subseteq A$ כך ש:

א. ללא הגבלה. עבור $A=\{1,2\}$, רשמו את כל הפתרונות.

ב. $C\cap D=\varnothing$. עבור $A=\{1,2\}$, רשמו את כל הפתרונות.

ג. $C\subseteq D$. עבור $A=\{1,2\}$, רשמו את כל הפתרונות.

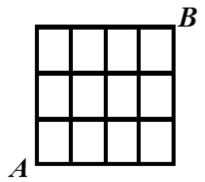
ד. $C\cup D=A$. עבור $A=\{1,2\}$, רשמו את כל הפתרונות.

ה. אם $2\in C$, אז $2\in D$ (עבור $A=\{1,2,3\}$, הדגימו זוג שמקיים את הדרישה וזוג שאינו מקיים את הדרישה).

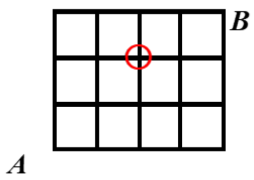
ו. אם יש מספר אי זוגי ב- C, אז יש כזה גם ב- D (שימו לב שלא נתון ש- n הוא זוגי).

32) חרגול נמצא בנקודה A בשריג המתואר להלן. בכל שלב יכול החרגול להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה.

א. בכמה אופנים שונים יכול החרגול להגיע מנקודה A לנקודה B?



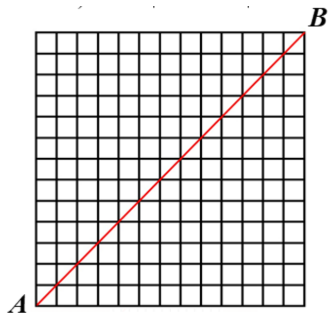
ב. בכמה אופנים הוא יכול לעשות זאת מבלי לעבור דרך הנקודה המסומנת להלן $(2,2)$?



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

33) החרגול החביב מהשאלה הקודמת לא התעייף (מדובר בחרגול ספורט) ונמצא עכשיו בנקודה A בשריג $n\times n$ המתואר להלן (13×13 להמחשה).
תזכורת: בכל שלב יכול החרגול להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה.
בכמה דרכים יכול החרגול להגיע מנקודה A לנקודה B?
(שימו לב שהשריג בשאלה הוא $n\times n$)

א. ללא הגבלה.
ב. מבלי לעבור דרך אף אחד מהנקודות $(5,9),(7,3)$?
(מה המשלים של הסעיף?)
ג. מבלי לעבור דרך אף אחד מהנקודות $(7,9),(5,3)$?
ד. מבלי לגעת באלכסון האדום? (פרט לנקודת ההתחלה ונקודת הסיום)



34) למורה צילה מאגר בלתי מוגבל של חרוזים בשלושה צבעים: אדום, צהוב וירוק (חרוזים מאותו צבע נחשבים זהים). בכיתה ג' 27 תלמידים. בשיעור מלאכה המורה צילה נותנת לכל ילד שקית והילד בוחר חמישה חרוזים ומכניס לשקית. בסוף השיעור המורה מכניסה את כל השקיות למחסן.
כמה תכולות מחסן אפשריות?

כתב ופתר – טל פלדמן ©

תשובות סופיות

1) א. $10!$ ב. $2!9!$ ג. $3!8!$ ד. $8!9!$ ה. $4!8!$ ו. $14!8!$

2) שתי דרכים.

3) א. $8!$ ב. $8!\cdot\binom{8}{3}$ ג. $8!\cdot 2^8$

4) א. $5\cdot 9^5$ ב. $9\cdot 10^5-9^6$. ג. $9\cdot 10^5-8\cdot 9^5$ ד. $9^5+5\cdot 8\cdot 9^4$

5) א. $2^{2n}-2^n$ ב. $|A|=\frac{2^{2n}-\binom{2n}{n}}{2}$

6) $4\cdot 3\cdot\binom{11}{3}$

7) א. $3\cdot\binom{201}{2}$ ב. $\binom{202}{2}$ ג. $3\cdot\binom{201}{2}$

8) א. 13^7-12^7 ב. 5^7 ג. 13^7-4^7. ד. 5^7-4^7

9) א. $\binom{2n}{n}n!$ ב. $\binom{2n}{n}\cdot(2n)^2$ ג. $\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot\binom{3n-1}{n}$ ד. $(2n)^2$

10) א. ראו בסרטון. ב. $\left(2^k-1\right)^m$ ג. שאלת הוכחה.

11) א. $\frac{1}{3}5!$ ב. $\frac{1}{3}5!$

12) א. $\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}$

ב. $\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}-\left(\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}+10\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{2}\cdot\frac{1}{3!}\right)$

13) א. $\binom{26}{20}\binom{26}{6}$ ב. $\binom{16}{2}+\binom{11}{2}+\binom{6}{2}$ ג. $2\left[3\cdot\binom{20}{2}+\binom{4}{2}\cdot\binom{11}{2}+\binom{5}{2}\cdot\binom{8}{2}\right]$

14) א. 2^n ב. $\binom{n}{\frac{n}{2}}^2$ ג. n זוגי: $\frac{\binom{2n}{n}-\binom{n}{\frac{n}{2}}^2}{2}$, n אי זוגי: $\frac{\binom{2n}{n}}{2}$.

15) $\frac{(3n)!}{6^n}$

16) $\binom{29}{9}\binom{39}{9}$

17) $\frac{(2n)!}{n!\left(\frac{n}{2}\right)!2^{\frac{n}{2}}}$

כתב ופתר – טל פלדמן ©

18) 1638

19) $\left(\binom{349}{100}-\binom{250}{100}\right)\left(250^{50}-\frac{250!}{200!}\right)$

20) $2(n!)^2$

21) $\binom{15}{3}^2+\binom{15}{2}^2\binom{10}{1}^2+\binom{15}{1}^2+\binom{10}{2}^2+\binom{10}{3}^2$

22) $\binom{n-1}{9}$

23) $n(n-1)^{n-1}$

24) $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil!\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor!$

25) $\left(100^{60}-\frac{100!}{40!}\right)\cdot\left(\binom{189}{90}-100\cdot\binom{138}{39}\right)$

26) $\frac{10!}{4!4!2!}$

27) $\frac{(m+k)!}{k!}$

28) $2^{13}-1$

29) שאלת הוכחה.

30) א. 6^n ב. $\binom{n+5}{5}$

31) א. 4^n ב. 3^n ג. 3^n ד. 3^n ה. $3\cdot 4^{n-1}$ ו. $4^n-\left(2^n-2^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\right)2^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}$

32) א. $\binom{7}{4}$ ב. 17

33) א. $\binom{2n}{n}$ ב. $|\bar{A}\cap\bar{B}|=\binom{2n}{n}-\left(\binom{10}{3}\binom{2n-10}{n-3}+\binom{14}{5}\binom{2n-14}{n-5}\right)$

ג. $|\bar{A}\cap\bar{B}|=\binom{2n}{n}-\left(\binom{8}{3}\binom{2n-8}{n-3}+\binom{16}{7}\binom{2n-16}{n-7}-\binom{8}{5}\binom{8}{2}\binom{2n-16}{7}\right)$

ד. $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

34) $\binom{47}{20}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

מתמטיקה דיסקרטית

פרק 5 - הכלה והדחה

תוכן העניינים

הכלה והדחה

שאלות

1) כמה מילים באורך n יש מעל הא"ב $\{A,B,C,D\}$, כך שהאותיות A,B חייבות להופיע?

2) לארוחת ערב הוזמנו חמישה אנשים, להם המארח קנה 10 מתנות שונות. בכמה דרכים ניתן לחלק את המתנות בין האורחים, כך שכל אורח יקבל לפחות פרס אחד?

3) בקייטנת ההשקעות הלא-הגיוניות יש חמישה קורסים. בכל אחד מחמשת הקורסים רשומים בדיוק 55 ילדים. לכל זוג קורסים יש בדיוק 44 ילדים שרשומים לשניהם, לכל שלושה מהקורסים יש בדיוק 33 ילדים שרשומים לשלושתם, ולכל ארבעה מהקורסים יש בדיוק 22 ילדים שרשומים לארבעתם. הוכיחו כי יש לפחות ילד אחד שרשום לכל חמשת הקורסים בו זמנית.

4) א. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 23 בדיוק?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק על פונקציות יוצרות)
ב. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 31 בדיוק?
ג. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 23 לכל היותר?

5) קובייה הוטלה 8 פעמים ורשמו את התוצאות כסדרה של 8 מספרים. מה מספר האפשרויות לסדרות באורך 8 של הטלות, שבהן יופיעו כל ששת המספרים מ-1 עד 6 (כל מספר לפחות פעם אחת)?

6) במערכת שנה א של התוכנית למדעי המחשב באקדמיה המכללתית של תל-יפו-אביב יש חמישה קורסים. בכל אחד מחמשת הקורסים רשומים בדיוק 40 תלמידים. לכל זוג קורסים יש בדיוק 32 תלמידים שרשומים לשניהם, לכל שלושה מהקורסים יש בדיוק 24 תלמידים שרשומים לשלושתם, ולכל ארבעה מהקורסים יש בדיוק 16 תלמידים שרשומים לארבעתם.
הוכיחו שיש לפחות תלמיד אחד שרשום לכל חמשת הקורסים בו זמנית.
<u>הדרכה</u>: על סמך הנתונים כתבו ביטוי שמתאר כמה תלמידים יש בכל חמשת הקורסים יחד.

7) לארוחת ערב הוזמנו חמש נשים, להן המארחת קנתה 10 מתנות שונות. בכמה דרכים ניתן לחלק את המתנות בין האורחות, כך שכל אורחת תקבל לפחות פרס אחד?

כתב ופתר – טל פלדמן ©

8) איש ציבור מושחת לוקח כל שנה שוחד בסך 2, 4 או 6 מיליון דולר (שלא כמו איש ציבור נורמטיבי, איש ציבור מושחת יכול לקחת שוחד של 6 מיליון דולר מספר שנים ברציפות). סדרת שוחד היא סדרת סכומים שקיבל איש ציבור מושחת במשך כמה שנים, למשל 2, 4, 2, 6, 6.
כמה סדרות שוחד יניבו עבור איש ציבור מושחת סך של 20 מיליון דולר במשך 6 שנים?

9) עבור $A=\{1,2,3.\cdots,10\}$, כמה פונקציות $f:A\to A$ חח"ע ועל יש, כך ש- $f(k)\neq k$ עבור $k=1,2,3$?

10) בכמה תמורות של המספרים $\{1,2,3,4,\cdots,18\}$, כל המספרים שמתחלקים ב-3 במקומות של מספרים שמתחלקים בשלוש ואף זוגי לא במקומו?

11) ברשותך שלושה כדורים לבנים זהים, שלושה כדורים שחורים זהים, ומאגר בלתי מוגבל של כדורים אדומים זהים. בכמה אופנים ניתן להרכיב מהם קבוצה (סדר הכדורים לא משנה) בת n כדורים?
פתרו בעזרת פונקציות יוצרות ובעזרת הכלה והדחה והשוו את התוצאות.

12) שבע משפחות בנות שלוש נפשות כל אחת (אבא, אמא וילדה) מגיעות למפגש חברתי.
בכמה אופנים ניתן לסדר אותם בשלשות, כך ש :
א. ללא הגבלה?
ב. כל שלשה תהיה מורכבת מאבא, אמא וילד אבל אף שלשה לא תרכיב משפחה שלמה?
ג. אף שלשה לא תרכיב משפחה שלמה (כלומר, יתכן שלשה המורכבת משלושה אבות או שני אבות וילד).

13) בכמה דרכים ניתן לחלק 40 כדורים לארבעה תאים, כך שאף תא לא יהיה ריק, כאשר
א. הכדורים זהים.
ב. הכדורים שונים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

14) ארבעה אנשים שונים (שנמספר 1, 2, 3, 4) אחראים יחד על ביצוע של 5 משימות שונות (שנקטלג א, ב, ג, ד, ה). לביצוע כל משימה נדרשים **בדיוק שני אנשים**, כאשר אין הבדל בין תפקידי שני האנשים בצוות המבצע משימה נתונה.

א. בכמה דרכים ניתן להקצות את 5 המשימות לצוותים של שני אנשים?
הנה כמה דוגמאות לדרכים **לגיטימיות** לעשות זאת:
דוגמה 1: הצוות $\{1,2\}$ יבצע את כל המשימות.
דוגמה 2: הצוות $\{1,2\}$ יבצע את משימות א ו-ב, הצוות $\{1,3\}$ את משימות ג ו-ד, והצוות $\{2,3\}$ את משימה ה.
דוגמה 3: הצוות $\{1,2\}$ יבצע את משימות א ו-ב, הצוות $\{3,4\}$ את משימות ג ו-ד, והצוות $\{2,3\}$ את משימה ה.

ב. בכמה דרכים ניתן להקצות את חמשת המשימות לצוותים של שני אנשים, אם אסור שמישהו יתחמק לגמרי מעבודה, כאשר כל אחד מ-4 האנשים חייב לקחת חלק במשימה אחת לפחות (דוגמאות 1 ו-2 בסעיף א אינן חוקיות כעת, אולם דוגמה 3 חוקית).

15) דנה, תלמידה בכיתה א', קראה בספר את המשפט המעניין: **דנה קמה דנה נמה**. אחרי שקראה בהצלחה את המשפט, עלו בדעתה של דנה כמה שאלות מעניינות לא פחות:

א. בכמה דרכים אפשר לסדר את כל 12 האותיות במשפט זה במחרוזת אחת ללא רווחים, כגון **דנהקמהדנהנמה**?

ב. בכמה מהדרכים הללו מופיע בתוך המחרוזת הרצף **דמקה**?

ג. מה מספר הדרכים לסדר את 12 האותיות, כך **שלא** תופיע בתוך המחרוזת **אף אחת** מארבע המחרוזות: **דמקה, קהה, ממד, ננהה**?

16) בבחינה מתמטיקה בדידה בקורס זה יש 11 שאלות בארבעה נושאים: 2 שאלות בקומבינטוריקה בסיסית, 3 שאלות בפונקציות יוצרות, 2 שאלות בגרפים ו-4 שאלות בהכלה והדחה, כאשר יש לענות על 6 שאלות לפחות (אפשר יותר) וחייבים לענות על לפחות שאלה אחת מכל נושא.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

17) בכמה דרכים ניתן להרכיב מילה מהמספרים $\{1,2,3,\ldots,n\}$, כך שכל מספר יופיע k פעמים, אבל אף מספר לא יופיע k פעמים ברצף?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – טל פלדמן ©