

# מתמטיקה ב



## תוכן העניינים

1	1. חוקי החזקות והשורשים
11	2. משוואות ואי-שוויונים מעריכיים
21	3. חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים
37	4. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות
53	5. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות
69	6. חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון
91	7. נגזרת סתומה
93	8. מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה
98	9. פונקציות בשני משתנים לכלכלנים - עקומות שוות ערך ונגזרות חלקיות
108	10. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים
110	11. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')
113	12. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

# מתמטיקה ב

## פרק 1 - חוקי החזקות והשורשים

### תוכן העניינים

- 1. חוקי החזקות..... 1
- 2. חוקי השורשים..... 6
- 3. כתיבה מדעית של מספרים..... 10

## חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 a^0 = 1 & .1 & a^1 = a & .2 & a^n \cdot a^m = a^{m+n} & .3 \\
 \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & .4 & (a^n)^m = a^{n \cdot m} & .5 & a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m & .6 \\
 \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & .7 & a^{-m} = \frac{1}{a^m} & .8 & \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m & .9
 \end{array}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 a^2 a^6 & .א & t^3 t^5 t^7 & .ב & b^2 b^5 b^{12} b^3 & .ג \\
 \frac{k^8}{k^3} & .ד & \frac{n^{14}}{n^9} & .ה & \frac{c^6}{c^2} & .ו \\
 \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & .ז & \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & .ח & \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} & .ט \\
 3^2 3^3 3^4 & .י & \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & .יא & \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8} & .יב
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & .א & \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & .ב & \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4} & .ג
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא:  $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין הביטוי  $2^n \cdot 243$  לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

$\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$ .ב.	$\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$ .א.	
$2^3 + 2^5$ .ד.	$\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$ .ג.	

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק:  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ .

$(x^3 x^{10})^2$ .ג.	$(c^3)^{10}$ .ב.	$(a^2)^4$ .א.
$\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$ .ו.	$\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$ .ה.	$\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$ .ד.
$\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$ .ט.	$\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$ .ח.	$\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$ .ז.
$\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$ .יב.	$\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$ .יא.	$\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$ .י.

(6) לפניך הביטויים הבאים:  $\left( (3^2)^3 \right)^4$  ו-  $\left( (3^6)^n \right)^2$ .

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

$\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$ .ג.	$\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$ .ב.	$\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$ .א.
---	---	-------------------------------

(8) פשט את הביטויים הבאים:

$125 \cdot 25 \cdot 5^5$ .ג.	$64^2 2^3 8^2$ .ב.	$3^2 9 \cdot 81^2$ .א.
$\frac{\left( (3^4)^4 \right)^5}{81^3 27^4 3^5}$ .ו.	$\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$ .ה.	$\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$ .ד.

9 פשט את הביטויים הבאים :

$\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \quad \text{ב.}$ $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} \quad \text{ד.}$	$\frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \quad \text{א.}$ $\frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \quad \text{ג.}$
--	---

10 פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $(ab)^n = a^n b^n$  ו-  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(x^{12}y^3)^3 \quad \text{ג.}$ $\left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3 \quad \text{ו.}$ $\left(\frac{(b^{12}c)^2 c^{14}}{c(c^3b^5)^4 b^3}\right)^2 \quad \text{ט.}$	$(m^4n^3)^5 \quad \text{ב.}$ $\left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7 \quad \text{ה.}$ $\left(\frac{t^7 r^{20} t^3}{r^2 r^{12} t^8}\right)^2 \quad \text{ח.}$	$(a^2b)^3 \quad \text{א.}$ $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 \quad \text{ד.}$ $\left(\frac{x^3 y^5 y^2 x^6}{y^4 x^7}\right)^6 \quad \text{ז.}$
--	--	--

11 חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$\left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^27)^5}\right)^3 \quad \text{ג.}$	$\left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2 \quad \text{ב.}$	$\left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 \quad \text{א.}$
---	--	--

12 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$\frac{1}{2^{10}} \quad \text{ג.}$ $\frac{1}{125} \quad \text{ו.}$	$\frac{1}{5^3} \quad \text{ב.}$ $\frac{1}{81} \quad \text{ה.}$	$\frac{1}{4^6} \quad \text{א.}$ $\frac{1}{8} \quad \text{ד.}$
--	--	---

13 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$\frac{1}{5^{-3}} \quad \text{ג.}$	$\frac{1}{3^{-2}} \quad \text{ב.}$	$\frac{1}{4^{-3}} \quad \text{א.}$
------------------------------------	------------------------------------	------------------------------------

14) חשב את הביטויים הבאים :

ג.  $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב.  $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א.  $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו.  $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה.  $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד.  $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג.  $\frac{2^{-3}5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב.  $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2}4^3)^{-6}}$

א.  $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

16) פשט את הביטויים הבאים :

ג.  $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב.  $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א.  $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $a^8$     ב.  $t^{15}$     ג.  $b^{22}$     ד.  $k^5$     ה.  $n^5$     ו.  $c^4$
- ז.  $a^7$     ח.  $x^3$     ט. 1    י.  $3^9$     יא.  $2^8$     יב.  $5^5$
- (2) א. 18    ב.  $ab$     ג.  $x^6 y^{10}$
- (3)  $n=16$
- (4) א. 2    ב.  $\frac{1}{3}$     ג.  $\frac{5}{8}$     ד. 40
- (5) א.  $a^8$     ב.  $c^{30}$     ג.  $x^{26}$     ד.  $b$     ה.  $n^3$     ו.  $d^{10}$
- ז. 2    ח. 9    ט.  $8^{18}$     י.  $3^7$     יא. 3    יב.  $3^5$
- (6)  $n=2$
- (7) א. 6    ב. 9    ג. 56
- (8) א.  $3^{12}$     ב.  $2^{21}$     ג.  $5^{10}$     ד.  $2^{12}$     ה.  $2^7$     ו.  $3^{51}$
- (9) א.  $\frac{2b^3}{a}$     ב.  $k$     ג.  $3\frac{1}{5}$     ד.  $\frac{1}{x} + x$
- (10) א.  $a^6 b^3$     ב.  $m^{20} n^{15}$     ג.  $x^{36} y^9$     ד.  $\frac{a^{12}}{b^8}$     ה.  $\frac{i^{28}}{k^{21}}$     ו.  $a^{21} b^3$
- ז.  $x^{12} y^{18}$     ח.  $t^4 r^{12}$     ט.  $b^2 c^6$
- (11) א. 576    ב. 225    ג. 8
- (12) א.  $4^{-6}$     ב.  $5^{-3}$     ג.  $2^{-10}$     ד.  $2^{-3}$     ה.  $3^{-4}$     ו.  $5^{-3}$
- (13) א. 64    ב. 9    ג. 125
- (14) א. 81    ב. 8    ג. 5    ד.  $\frac{1}{9}$     ה. 1000    ו. 3
- (15) א.  $5^{24} \cdot 3^{12}$     ב.  $\frac{4^2}{3^{23}}$     ג.  $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א.  $a^{1-5n}$     ב.  $k$     ג.  $m^{2n+12}$

## חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} & .3 & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & .2 & \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} & .1 \\
 \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} & .6 & \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} & .5 & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & .4
 \end{array}$$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה:  $\sqrt[n]{a^m}$ .

א. $3^{\frac{1}{4}}$	ב. $2^{\frac{3}{5}}$	ג. $6^{\frac{5}{6}}$
ד. $-12^{\frac{2}{7}}$	ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$	ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$
ז. $5^{-\frac{1}{4}}$	ח. $27^{\frac{1}{3}}$	ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$	ב. $-\sqrt{25}$	ג. $\sqrt[3]{8}$
ד. $-\sqrt[3]{128}$	ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$	ו. $(\sqrt[5]{1024})^2$
ז. $(\sqrt[5]{-243})^3$	ח. $\sqrt[4]{-16}$	ט. $\sqrt[4]{-25^2}$
י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$		

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

ג.  $128^{\frac{2}{7}}$

ב.  $32^{\frac{3}{5}}$

א.  $8^{\frac{2}{3}}$

ו.  $\left(\frac{64}{343}\right)^{\frac{2}{3}}$

ה.  $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$

ד.  $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$

ט.  $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$

ח.  $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$

ז.  $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{\frac{1}{3}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא :  $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[3]{128}}$

21) פשט את הביטויים הבאים :

ג.  $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

ב.  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

א.  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

ו.  $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ה.  $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

ד.  $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

ט.  $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$

ח.  $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$

ז.  $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים :

ג.  $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ב.  $5\sqrt{3}$

א.  $3\sqrt{2}$

ה.  $x\sqrt{x}$

ד.  $2\sqrt[3]{3}$

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש :

ג.  $2\sqrt[5]{3}$

ב.  $4\sqrt[3]{2}$

א.  $2\sqrt{5}$

ו.  $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ה.  $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$

ד.  $\frac{\sqrt{24}}{2}$

ט.  $-5\sqrt{-2}$

ח.  $-5\sqrt[4]{2}$

ז.  $-5\sqrt[3]{2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א.  $\sqrt{12}$       ב.  $\sqrt{48}$       ג.  $\sqrt{63}$
- ד.  $\sqrt[3]{54}$       ה.  $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א.  $\sqrt{40}$       ב.  $\sqrt{50}$       ג.  $\sqrt{320}$
- ד.  $\sqrt[3]{108}$       ה.  $\sqrt[3]{56}$       ו.  $\sqrt[3]{160}$
- ז.  $\sqrt[4]{162}$       ח.  $\sqrt[5]{972}$       ט.  $\sqrt[9]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $\sqrt{18} - \sqrt{8}$       ב.  $\sqrt{7} + \sqrt{63}$       ג.  $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד.  $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$       ה.  $\frac{20}{\sqrt{5}}$       ו.  $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז.  $\frac{16}{\sqrt{2}}$       ח.  $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$       ט.  $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$       ב.  $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$       ג.  $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד.  $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$       ה.  $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$       ו.  $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

## תשובות סופיות:

- (17) א.  $\sqrt[4]{3}$     ב.  $\sqrt[5]{2^3}$     ג.  $\sqrt[6]{6^5}$     ד.  $-\sqrt[7]{12^2}$     ה.  $-\sqrt[3]{-4}$     ו.  $\phi$
- ז.  $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$     ח.  $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$  או  $\frac{1}{3}$     ט.  $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$  או  $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7    ב. -5    ג. 2    ד. -2    ה. 4    ו. 16
- ז. -27    ח.  $\phi$     ט.  $\phi$     י. 5
- (19) א. 4    ב.  $\frac{1}{8}$     ג.  $\frac{1}{4}$     ד. 125    ה.  $\frac{32}{243}$     ו.  $\frac{49}{16}$
- ז.  $\frac{27}{4}$     ח.  $\frac{10}{49}$     ט.  $\frac{1}{2}$
- (20)  $\sqrt{2}$
- (21) א. 4    ב. 9    ג. 20    ד. 6    ה. 3    ו. 2
- ז.  $\sqrt{2}$     ח.  $\sqrt{5}$     ט.  $\sqrt{2}$
- (22) א.  $\sqrt{18}$     ב.  $\sqrt{75}$     ג.  $\sqrt{9}$     ד.  $\sqrt[3]{24}$     ה.  $\sqrt{x^3}$
- (23) א.  $\sqrt{20}$     ב.  $\sqrt[3]{128}$     ג.  $\sqrt[5]{96}$     ד.  $\sqrt{6}$     ה.  $\sqrt[3]{3}$
- ו.  $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$     ז.  $\sqrt[3]{-250}$     ח.  $-\sqrt[4]{1250}$     ט.  $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א.  $2\sqrt{3}$     ב.  $4\sqrt{3}$     ג.  $3\sqrt{7}$     ד.  $3\sqrt[3]{2}$     ה.  $x^2\sqrt{x}$
- (25) א.  $2\sqrt{10}$     ב.  $5\sqrt{2}$     ג.  $8\sqrt{5}$     ד.  $3\sqrt[3]{4}$     ה.  $2\sqrt[3]{7}$     ו.  $2\sqrt[5]{5}$
- ז.  $3\sqrt[4]{2}$     ח.  $3\sqrt[5]{4}$     ט.  $2\sqrt[6]{3}$
- (26) א.  $\sqrt{2}$     ב.  $4\sqrt{7}$     ג.  $6\sqrt[3]{2}$     ד.  $\sqrt[4]{5}$     ה.  $4\sqrt{5}$     ו.  $\sqrt{2}$
- ז.  $8\sqrt{2}$     ח.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  או  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$     ט.  $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$  או  $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א.  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$     ב.  $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$     ג.  $\sqrt[6]{5^{11}}$     ד. 27    ה.  $\frac{1}{7}$     ו.  $\sqrt[8]{2^5}$

## כתיבה מדעית של מספרים:

### שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000	ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000	ד. 23,400,000
ה. 0.0003	ו. 0.00000042
ז. 0.000000042	ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$	ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$	ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$	ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$	ח. $(0.000000007)^3$

### תשובות סופיות:

28) א. $1.5 \cdot 10^7$	ב. $1.5 \cdot 10^6$	ג. $1.5 \cdot 10^{11}$	ד. $2.34 \cdot 10^7$	ה. $3 \cdot 10^{-4}$
ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$	ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$	ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$		
29) א. $9 \cdot 10^{12}$	ב. $4 \cdot 10^{12}$	ג. $1.25 \cdot 10^{11}$	ד. $1.25 \cdot 10^{14}$	ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$
ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$	ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$	ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$		

## מתמטיקה ב

### פרק 2 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

#### תוכן העניינים

- 11 ..... 1. משוואות מעריכיות יסודיות.
- 13 ..... 2. משוואות עם חיבור וחסור איברים.
- 15 ..... 3. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס.
- 16 ..... 4. משוואות מסכמות שונות.
- 17 ..... 5. משוואות עם קבוע אוילר.
- 18 ..... 6. מערכת משוואות מעריכיות.
- 19 ..... 7. אי שוויונים מעריכיים.
- 20 ..... 8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך.

## משוואות מעריכיות יסודיות:

### סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה:  $a^x = a^y$  הוא:  $x = y$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = 1$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = 1 = a^0$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = b^x$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = b^x = 1$  ללא תלות בבסיסים.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א.  $2^x = 16$       ב.  $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג.  $10^{x-2} = 10000^{x+1}$       ד.  $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה.  $(2^x \cdot 32)^3 = 8$       ו.  $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז.  $\frac{7^x}{343^3} = 1$       ח.  $(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

(2) פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א.  $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$       ב.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג.  $25 \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א.  $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$       ב.  $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג.  $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$       ד.  $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה.  $2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8(\sqrt{8})^{-\sqrt{x}}$       ו.  $5^x \cdot \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$	ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$
ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$	ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$
ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$	ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$
ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = (2\sqrt{5})^{4-x}$	

### תשובות סופיות:

א. $x = 4$	ב. $x = -\frac{1}{3}$	ג. $x = -2$	ד. $x = 2, 8$	ה. $x = -4$
ו. $x = 1, -\frac{1}{5}$	ז. $x = 9$	ח. $x = 1$		
א. $x = -1$	ב. $x = -2$	ג. $x = 3, -2$		
א. $x = -\frac{1}{2}$	ב. $x = 1$	ג. $x = -\frac{8}{19}$	ד. $x = 2, -\frac{2}{3}$	ו. $x = 25$
א. $x = 0$	ב. $x = 4$	ג. $x = 2$	ד. $x = 2$	ה. $x = 5$
ו. $x = 1.5$	ז. $x = \frac{2}{3}$			

## משוואות עם חיבור וחסור איברים:

### סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- $t$ , למשל במשוואה:  $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$  נסמן:  $2^x = t$ .  
 נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות  $t$  ונפתור אותה עבורו.  
 לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- $x$  המתאימים.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

א.  $2^x + 6 \cdot 2^x = 56$

ב.  $8^x + 3 \cdot 8^x = 256$

ג.  $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$

ד.  $2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

א.  $81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$

ב.  $5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$

ג.  $(2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 15$

ד.  $\sqrt{10000^{x+1}} - \sqrt[4]{10^{8x+1}} = \sqrt[4]{1000} \cdot (\sqrt[4]{10^7} - 1)$

ה.  $6^{-x} - 5 \cdot 36^{-\left(\frac{x+1}{2}\right)} = 186$

ו.  $5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$

ז.  $2 \cdot 10^{x+1} + 10^{x+2} = 3 \cdot 5^{x+1}$

ח.  $4^{x+2} - 6 \cdot 4^x = 7 \cdot 12^{x+1} + 6 \cdot 12^x$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

א.  $9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$

ב.  $16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$

ג.  $6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$

ד.  $4^{-x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$

ה.  $\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$

ו.  $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} + 1 = 0$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

א.  $\frac{20}{9^x+1} = 3 - \frac{8}{9^x-1}$

ב.  $\frac{7^x}{7^x-4} + \frac{8}{7^x+5} = 3$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$	ב. $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$
ג. $36^x - 6^{x+1} \cdot 3^x + 8 \cdot 9^x = 0$	ד. $4 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$
ה. $25 \cdot 5^{2x} + 16 \cdot 15^x = 9^{x+1}$	ו. $9^x + 4^x - 6^x = \frac{7}{6^{1-x}}$
ז. $\frac{8^{2x} - 8}{7} = 4^x - 2$	ח. $2^{3x} - 2^{2x+2} - 2^x + 4 = 0$

### תשובות סופיות:

א. $x=3$	ב. $x=2$	ג. $x=4$	ד. $x=1$
א. $x=\frac{1}{2}$	ב. $x=0$	ג. $x=\frac{1}{3}$	ד. $x=\frac{1}{4}$
ה. $x=-3$	ו. $x=-2$	ז. $x=-3$	ח. $x=-2$
א. $x=2,3$	ב. $x=1,-2$	ג. $x=0$	ד. $x=0$
ה. $x=0,1$	ו. $x=-6,-9$		
א. $x=1, -\frac{1}{2}$	ב. $x=1$		
א. $x=\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	ב. $x=1,3$	ג. $x=1,2$	ד. $x=1,0$
ה. $x=-2$	ו. $x=1,-1$	ז. $x=0, \frac{1}{2}$	ח. $x=0,2$

## משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

### סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי. יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

### הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- $x$  עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(\sqrt{3-x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{3-x})^x \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3-x}} \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}} = |x-3|^{-1} \quad (3)$$

### תשובות סופיות:

$$x = \frac{1}{4}, 1, 2 \quad (1)$$

$$\text{אין פתרון.} \quad (2)$$

$$x = 0, 1, 2, 4 \quad (3)$$

## משוואות מסכמות שונות:

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$.5(2^x - 2) + 2 = 4^x - 2^x \quad (1)$$

$$\cdot \frac{6}{4^{x-1} - 1} + \frac{2^{x+1}}{2^x + 2} = \frac{2^x + 4}{2^x - 2} \quad (2)$$

$$\cdot \frac{4^x}{4^x - 10} - \frac{4}{2^{2x-1} - 3} = \frac{32}{16^x - 4^{x+2} + 60} \quad (3)$$

$$\cdot 3^{2x^2+2} - 3^{x^2+3} + 9 = 3^{x^2+1} \quad (4)$$

$$\cdot \sqrt{x}{10} = 4 \cdot \sqrt[2x]{10} + 60 \quad (5)$$

$$\cdot \sqrt[x-1]{8 \cdot 2^{x+1}} = (\sqrt{x}{2})^2 \cdot \sqrt[x-1]{\sqrt{x}{32}} \quad (6)$$

$$\cdot 10 \cdot 4^{x+2} - 16 \cdot 10^x - 90 \cdot 6^x + 36 \cdot 15^x = 0 \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$\cdot x = 1, 2 \quad (1)$$

$$\cdot x = 3 \quad (2)$$

$$\cdot x = 1.5 \quad (3)$$

$$\cdot x = 1, -1 \quad (4)$$

$$\cdot x = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\cdot x = -3 \quad (6)$$

$$\cdot x = 1, -2 \quad (7)$$

## משוואות עם קבוע אוילר:

### סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות  $e$  וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא  $e$  זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

$$\text{א. } e^{3x} = e^{2x-1} \quad \text{ב. } e^{5x-1} = e \cdot e^{6x+1}$$

$$\text{ג. } e^{x-5} = (e^{1-x})^3 \quad \text{ד. } e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

$$\text{א. } e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad \text{ב. } \sqrt[3]{e^{x+1}} \cdot e^2 = e^x \sqrt{e}$$

$$\text{ג. } e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{ד. } e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

$$\text{א. } xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x \quad \text{ב. } e^{3x} = x \cdot e^{3x}$$

$$\text{ג. } xe^{x^2} = \frac{x}{\sqrt{e^x}} \quad \text{ד. } \sqrt[3]{e^{3x-1}} \cdot x = xe^x$$

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = -3 \quad \text{ג. } x = 2 \quad \text{ד. } x = 1, \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = \frac{11}{4} \quad \text{ג. } x = 0 \quad \text{ד. } x = 1, -1$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0, \frac{1}{4} \quad \text{ב. } x = 1 \quad \text{ג. } x = 0, -\frac{1}{2} \quad \text{ד. } x = 0$$

## מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

(1,3) <b>(4)</b>	(1,2) <b>(3)</b>	(0,2) , (2,4) <b>(2)</b>	(2,9) <b>(1)</b>
(1,2) , (-1,0) <b>(7)</b>	(-1,-2) <b>(6)</b>	(3,2) <b>(5)</b>	

## אי שוויונים מעריכיים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $a^x > a^y$  הוא: עבור  $x > y$  עבור:  $a > 1$  ו- $x < y$  עבור:  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} \quad (2)$$

$$3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} \quad (4)$$

$$e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} \quad (3)$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 \quad (6)$$

$$25^x + 5 < 6 \cdot 5^x \quad (5)$$

### הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ( $\ln$ ) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad (8)$$

$$e^x > 3 \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$x < \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$x \leq \frac{1}{8} \quad (4)$$

$$0 \leq x < 1 \quad (3)$$

$$x = 0 \quad (6)$$

$$0 < x < 1 \quad (5)$$

$$x < 0 \text{ או } x > \ln 4 \quad (8)$$

$$x > \ln 3 \quad (7)$$

## אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

### סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון:  $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$  נדרוש:  $f(x) > 0$ .

דרך הפתרון: אם  $f(x) > 1$  אז  $g(x) > h(x)$ .

אם  $0 < f(x) < 1$  אז  $g(x) < h(x)$ .

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1} \quad (2) \qquad x^{2x-1} > x^{x+2} \quad (1)$$

$$x^{2x^2+2} < x^{5x} \quad (4) \qquad x^{2x-6} < 1 \quad (3)$$

$$(x+1)^{|x|} < x^2 + 2x + 1 \quad (6) \qquad (x^2 - 6x + 13)^{x^2 - 2x} \geq (x^2 - 6x + 13)^3 \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$.0 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$.3 < x < 6 \quad (2)$$

$$.1 < x < 3 \quad (3)$$

$$.0 < x < 0.5, 1 < x < 2 \quad (4)$$

$$.x \leq -1, x \geq 3 \quad (5)$$

$$.0 < x < 2 \quad (6)$$

## מתמטיקה ב

פרק 3 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות ..... 21
2. חוקי הלוגריתמים ..... 24
3. חישובים עם חזקה לוגריתמית ..... 28
4. מעבר בין בסיסים ..... 29
5. הלוגריתם הטבעי ..... 31
6. משוואות עם בסיסים שונים ..... 33
7. מערכת משוואות לוגריתמיות ..... 34
8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות ..... 35
9. אי-שוויונים לוגריתמים ..... 36

## הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא:  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$  כאשר:  $a, b > 0, a \neq 1$ .

#### הסבר:

לוגריתם על בסיס  $a$  של  $b$  מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את  $a$  על מנת שיהיה שווה ל- $b$ .  
 ערך חזקה זו הוא  $x$ . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים  
 ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

### כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי:  $\log_a a = 1$  וכן:  $\log_a 1 = 0$  לכל  $a > 0, a \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א.  $\log_2 32$       ב.  $\log 1000$       ג.  $\log_{25} 5$

ד.  $\log_8 4$       ה.  $\log_4 \frac{1}{16}$       ו.  $\log_a a^4$

ז.  $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א.  $\log_{36} 6 = x$       ב.  $\log_2 x = 16$

ג.  $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$       ד.  $\log_x 64 = 3$

ה.  $\log_x 25 = 2$       ו.  $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\log_4(4-x) = \frac{1}{2} \quad \text{ב.} \qquad \log_6(4x-2) = 1 \quad \text{א.}$$

$$\log_3 \frac{x+3}{3-3x} = -2 \quad \text{ד.} \qquad \log_8(x^4 - 73) = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\log_{\sqrt{x+1}}(2x^2 - 5) = 2 \quad \text{ו.} \qquad \log_x(2x^2 + x - 12) = 2 \quad \text{ה.}$$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

$$3\log_{27}(\log_2(x+3)) = 1 \quad \text{ב.} \qquad \log_4(\log_3 x) = 1 \quad \text{א.}$$

$$\log_6\left(3 + \log_2\left(6 + \log_4(x^2 + 15)\right)\right) = 1 \quad \text{ד.} \qquad \log_{\frac{1}{16}}\left(\log_3(5x^2 + 1)\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{ג.}$$

5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_3(3 \cdot 2^x - 303) = 4 \quad \text{ב.} \qquad \log_2(3^x + 37) = 6 \quad \text{א.}$$

$$3\log_2\left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x} - 11 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 3\right) = 12 + 2x \quad \text{ד.} \qquad \log_5(126 \cdot 5^x - 25) = 2x + 1 \quad \text{ג.}$$

6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$2(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 10 \quad \text{ב.} \qquad (\log_2 x)^4 = 10000 \quad \text{א.}$$

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x + 2} = 2 \quad \text{ד.} \qquad \frac{3 \cdot \log_{14} x + 1}{(\log_{14} x)^2} = 4 \quad \text{ג.}$$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 5    ב. 3    ג.  $\frac{1}{2}$     ד.  $\frac{2}{3}$     ה. -2
- ו. -1.5    ז. 4
- (2) א.  $x = \frac{1}{2}$     ב.  $x = 65,536$     ג.  $x = 27$     ד.  $x = 4$
- ה.  $x = 5$     ו.  $x = 4$
- (3) א.  $x = 2$     ב.  $x = 2$     ג.  $x = \pm 3$     ד.  $x = -2$     ה.  $x = 3$     ו.  $x = 2$
- (4) א.  $x = 81$     ב.  $x = 5$     ג.  $x = \pm 4$     ד.  $x = \pm 1$
- (5) א.  $x = 3$     ב.  $x = 7$     ג.  $x = -1, 2$     ד.  $x = -6$
- (6) א.  $x = 1024, \frac{1}{1024}$     ב.  $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$
- ג.  $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$     ד.  $x = \frac{1}{3}$

## חוקי הלוגריתמים:

### סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס  $a > 0 \neq 1$  וארגומנטים  $x$  ו- $y$  חיוביים:
- מכפלה לסכום:  $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ .
  - מנה להפרש:  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ .
  - מקדם למעריך:  $\log_a b^n = n \log_a b$  (כאשר  $b > 0$  ו- $n$  מספר ממשי כלשהו).

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- |  |   |
|--|---|
| א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$   | ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$ |
| ג. $\log_2 200 - \log_2 100$   | ד. $\log_3 60 - \log_3 540$   |
| ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$   | ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$   |
| ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$   | ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$                                |
| ט. $\frac{1}{2} \left( \log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$ | י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$                             |

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- |   |  |
|---|--|
| א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$                             | ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$                                   |
| ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 225 - 2}$ | ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$ |

## משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א.  $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$       ב.  $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

ג.  $\log_2 (x+30) - \log_2 x = 4$       ד.  $\log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2$

ה.  $2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1$

ו.  $2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א.  $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$

ב.  $2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א.  $\log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3)$

ב.  $\log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א.  $\log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8$

ב.  $\log_2 \left(\frac{x}{4}\right) \cdot \log_2 (1024x) = -11$

ג.  $\log_2 x^2 \log_2 \left(\frac{x}{16}\right) = -\log_2 (64x)$

ד.  $(\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1$

ה.  $\log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left(\frac{81}{x}\right) + 2$

ו.  $\frac{\log_2 \left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9}$

## שאלות הבעה:

(7) נתון:  $\log_3 2 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_3 16$       ב.  $\log_3 6$

ג.  $\log_3 24$       ד.  $\log_3 1.5$

(8) נתון:  $\log_2 5 = b$ ,  $\log_2 3 = a$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_2 45$       ב.  $\log_2 60$       ג.  $\log_2 \sqrt{7.5}$

(9) נתון:  $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$ .

הבע באמצעות  $a$  את  $\log_{18} 27$  ואת  $\log_{18} 16$ .

## שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

$$\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64 \quad (10)$$

$$2 \log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2 \quad (11)$$

$$\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2 \quad (12)$$

$$\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2 \quad (13)$$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 3    ב. -3    ג. 1    ד. -2    ה. 2    ו. -0.5
- (2) א.  $\frac{4}{3}$     ב. -3    ג. 1.5    ד. 0.5
- (3) א.  $x=8$     ב.  $x=3, \frac{1}{27}$     ג.  $x=2$     ד.  $x=4$     ה.  $x=3$     ו.  $x=4$
- (4) א.  $x=2.5$     ב.  $x=6$
- (5) א.  $x=1$     ב.  $x=-2$
- (6) א.  $x=16, \frac{1}{256}$     ב.  $x=2, \frac{1}{512}$     ג.  $x=4, 2\sqrt{2}$     ד.  $x=4, \frac{1}{4}$
- ה.  $x=\frac{1}{9}, \sqrt[9]{3}$     ו.  $x=8, \sqrt[7]{2^{15}}$
- (7) א.  $4a$     ב.  $a+1$     ג.  $3a+1$     ד.  $1-a$
- (8) א.  $2a+b$     ב.  $2+a+b$     ג.  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (9)  $4(2a-1), 3(1-a)$
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) הוכחה.

## חישובים עם חזקה לוגריתמית:

### סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא:  $a^{\log_a x} = x$  כאשר  $a > 0 \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א.  $6^{\log_6 8}$       ב.  $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית:  $3 \cdot 4^x$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = \log_4 7$       ב.  $x = \log_4 \sqrt{3}$

ג.  $x = 2 \log_4 0.1$       ד.  $x = \sqrt{\log_2 5}$

(3) נתונה התבנית:  $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = -1$       ב.  $x = \log_3 5$

ג.  $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א.  $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{56}} 81}$       ב.  $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}} 5}}$

### תשובות סופיות:

(1) א. 8      ב. 25

(2) א. 21      ב.  $3\sqrt{3}$       ג. 0.03      ד. 15

(3) א.  $\frac{19}{54}$       ב.  $-4\frac{5}{6}$       ג.  $2 - 2\sqrt{6}$

(4) א.  $\frac{1}{81}$       ב.  $\frac{2}{\sqrt[2]{25}}$

## מעבר בין בסיסים:

### סיכום כללי:

מעבר מבסיס  $a$  לבסיס  $m$  (כאשר:  $a > 0 \neq 1$  ו-  $m > 0 \neq 1$ , וכן:  $b > 0$ )

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$$

יתבצע באופן הבא:

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $\log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000$

א.  $\log_4 7 \cdot \log_7 4$

ד.  $\log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625$

ג.  $\log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9$

(2) הוכח את השוויונים הבאים:

א.  $\log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1$

ב.  $\log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1$

#### משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $\log_3 x \cdot \log_{27} x = 3$

א.  $\log_2 x + \log_{32} x = 6$

ד.  $\log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1$

ג.  $\log_2 4x \cdot \log_8 \frac{x}{16} = -\frac{5}{3}$

#### שאלות הבעה:

(4) נתון:  $\log_4 6 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_2 3$       ב.  $\log_{32} 36$       ג.  $\log_{216} 96$

(5) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_3 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו-  $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_3 50$       ב.  $\log_2 \sqrt{30}$       ג.  $\log_5 22.5$

6 נתון  $\log_3 7 = a$ ,  $\log 9 = 2b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את:

א.  $\log 21$ .

ב.  $\log_3 \left( \frac{10}{7} \right)$ .

ג.  $\log_7 10$ .

ד.  $\log_{30} 63$ .

### שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7  $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

8  $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

### תשובות סופיות:

1 א. 1      ב. -1.5      ג.  $2\frac{2}{3}$       ד. 12

2 א. שאלת הוכחה.      ב. שאלת הוכחה.

3 א.  $x = 32$       ב.  $x = 27, \frac{1}{27}$       ג.  $x = 8, \frac{1}{2}$       ד.  $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$

4 א.  $2a - 1$       ב.  $0.8a$       ג.  $\frac{a+2}{3a}$

5 א.  $2b + \frac{1}{a}$       ב.  $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$       ג.  $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$

6 א.  $b + ab$       ב.  $\frac{1}{b} - a$       ג.  $\frac{1}{ab}$       ד.  $\frac{ab+2b}{b+1}$

7 הוכחה.

8 הוכחה.

## הלוגריתם הטבעי:

### סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס  $e$  (קבוע אוילר) מסומן:  $\log_e \Rightarrow \ln$  והוא נקרא הלוגריתם הטבעי. למשל:  $\ln 3 = \log_e 3$  או  $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$ . לוג זה נקרא בשם לן. מהגדרת הלוגריתם מתקיים:  $\ln a = b \rightarrow e^b = a$  כאשר  $a > 0$  ו- $b$  מספרים כלשהם.

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x \\ \text{ב. } 3 \ln^2 x + \ln x = 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3 \ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2 \ln 3}$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 2 \quad \text{ב. } -4 \quad \text{ג. } -1.5$$

$$(2) \quad \text{א. } x = e^2 \quad \text{ב. } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0 \quad \text{ב. } x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e} \quad \text{ג. } x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$$

$$(4) \quad \text{א. } x = e^3, \frac{1}{e^2} \quad \text{ב. } x = \sqrt{e}, e$$

$$(5) \quad \text{א. } 3 \quad \text{ב. } 9$$

## משוואות עם בסיסים שונים:

### סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון:  $3^x = 4$ . במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך:  $x = \log_3 4$ . את ערך הביטוי  $\log_3 4$  ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10:  $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א.  $3^x = 6$       ב.  $2^x - 9 = 0$

ג.  $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$       ד.  $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א.  $e^{3x} = 3$       ב.  $4 + 3e^x = 9$

ג.  $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$       ד.  $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א.  $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{10}{5^x}$       ב.  $\log_2(4e^{2x} + 6) - 1 = \log_2(7e^x)$

### תשובות סופיות:

(1) א.  $x = \log_3 6 = 1.63$       ב.  $x = \log_2 9 = 3.17$

ג.  $x = \log_7 3 = 0.564$ ,  $x = \log_7 5 = 0.827$       ד. אין פתרון.

(2) א.  $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$       ב.  $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$       ג.  $x = 0$ ,  $x = -\ln 3 = -1.09$

ד.  $x = \ln 16 = 2.7725$

(3) א.  $x = 1$ ,  $x = \log_5 2 = 0.43$       ב.  $x_1 = \ln \frac{1}{2} = -0.693$ ,  $x = \ln 3 = 1.098$

## מערכת משוואות לוגריתמיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{llll} (8, -5) \quad (3) & (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) & (8, 3) \quad (1) \\ \left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) & (25, 8) \quad (5) & (16, 7) \quad (4) \\ (4, 7) \quad (9) & (3, 9), (9, 3) \quad (8) & (25, 4), (625, 2) \quad (7) \end{array}$$

## מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2(4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3(9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4(5 - 9^y) \\ \log_2(2^x + 3) = \log_4(29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2(y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$(36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) \quad (3) \quad (3, 3) \quad (2) \quad (1, 1) \quad (1)$$

$$(1, 0) \quad (6) \quad (1, 1), (2, 3) \quad (5) \quad \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \quad (4)$$

## אי-שוויונים לוגריתמים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $\log_a x > \log_a y$  הוא: עבור  $x > y$ : עבור  $a > 1$  ו- עבור  $x < y$ : עבור  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\log_6(x^2 - 5x) < 1$ (2)	$\log_2 x < \log_2(5x - 20)$ (1)
$\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x)$ (4)	$\log_3 x > \log_9(15 - 2x)$ (3)
$\ln x < 3$ (6)	$\ln x \geq \ln(x^2 - 12)$ (5)
$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8)	$\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7)

### תשובות סופיות:

$-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2)	$x > 5$ (1)
$-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4)	$3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3)
$0 < x < e^3$ (6)	$2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5)
וגם $x \neq 1$ וגם $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8)	$\frac{1}{e} < x < e^7$ (7)

## מתמטיקה ב

פרק 4 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות

תוכן העניינים

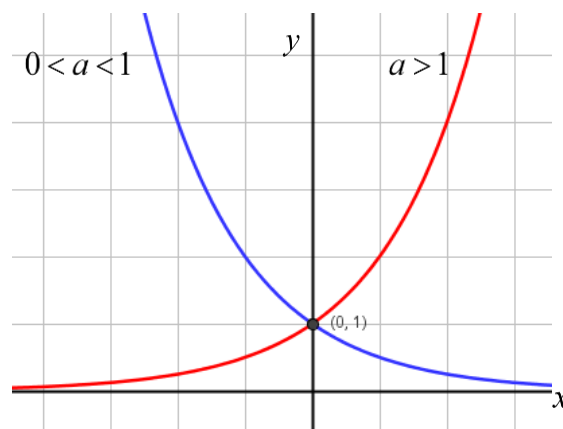
- 1. הנגזרת של פונקציה מעריכית..... 37
- 2. שימושי הנגזרת..... 41
- 3. חקירה של פונקציה מעריכית..... 42

## הנגזרת של פונקציה מעריכית:

**סיכום כללי:**

**הגדרות כלליות:**

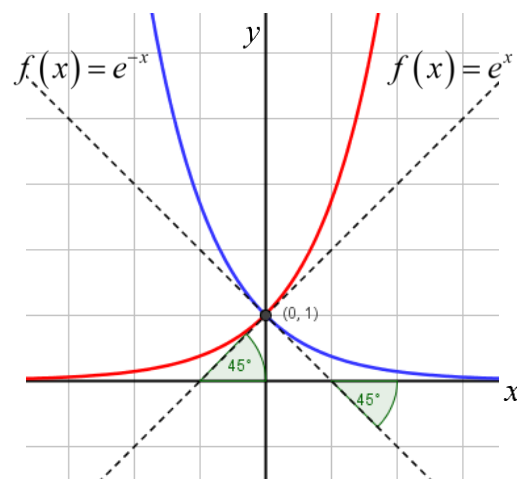
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה:  $f(x) = a^x$   
 עבור:  $a > 1$  ו-  $0 < a < 1$ :



**תכונות כלליות:**

1. הפונקציות מוגדרות לכל  $x$ .
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $y$  בנקודה:  $(0, 1)$ .
4. עבור:  $a > 1$  הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור:  $0 < a < 1$  הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות  $f(x) = e^x$  ו-  $f(x) = e^{-x}$  נקבל:



**תכונות נוספות:**

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$  בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^{-x}$  בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  הוא -1.

**נגזרות של פונקציות מעריכיות:**

הפונקציה	הנגזרת
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

**תזכורת - כללי הגזירה:**

מספר כלל	הפונקציה	תיאור	הנגזרת
1.	$y = a \cdot f(x)$	מכפלה בקבוע	$y' = a \cdot f'(x)$
2.	$y = f(x) + g(x)$	סכום פונקציות	$y' = f'(x) + g'(x)$
3.	$y = f(x) \cdot g(x)$	מכפלת פונקציות	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4.	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	מנת פונקציות	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
5.	$y = f(g(x))$	פונקציה מורכבת	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

**שאלות:**

(1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

א.  $f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1$  .  
 ב.  $f(x) = e^{x^2-3x} + ex$  .  
 ג.  $f(x) = 2^{3x}$  .  
 ד.  $f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x}$  .

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

א.  $f(x) = x \cdot e^x$  .  
 ב.  $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$  .  
 ג.  $f(x) = (x+1) \cdot 2^x$  .

(3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

א.  $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$  .  
 ב.  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$  .

(4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

א.  $f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3$  .  
 ב.  $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$  .  
 ג.  $f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$  .

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א.  $f(x) = e^{2x}$  .  
 ב.  $f(x) = e^x + 1$  .  
 ג.  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$  .  
 ד.  $f(x) = (x^2 + 1)e^x$  .  
 ה.  $f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 1)$  .  
 ו.  $f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x}$  .  
 ז.  $f(x) = x^3 e^{2x}$  .  
 ח.  $f(x) = e^{2x+1}(1-x)$  .  
 ט.  $f(x) = e^{-2x}(x+4)$  .  
 יא.  $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}}$  .  
 יב.  $f(x) = \frac{x^3}{e^{3x}}$  .  
 יג.  $f(x) = \frac{2+x^2}{e^{x^2}}$  .  
 יד.  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x}$  .  
 טו.  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{-x}}$  .  
 טז.  $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{x+1}}$  .

**תשובות סופיות:**

(1) א.  $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$  ב.  $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$  ג.  $3\ln 2 \cdot 2^{3x}$  ד.  $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$

(2) א.  $(1+x)e^x$  ב.  $2xe^{4x}(1+2x)$  ג.  $2^x(1+x\ln 2 + \ln 2)$

(3) א.  $\frac{x(2-x)}{e^x}$  ב.  $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

(4) א.  $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$  ב.  $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$  ג.  $\frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$

(5) א.  $2e^{2x}$  ב.  $e^x$  ג.  $-\frac{e^{1/x}}{x^2}$  ד.  $(x+1)^2 e^x$

ה.  $e^{-x}(-x^2-2x+3)$  ו.  $3e^{3x-2}$

ז.  $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$  ח.  $x^2 e^{2x}(3+2x)$  ט.  $-e^{-2x}(2x+7)$

י.  $e^{2x+1}(1-2x)$

יא.  $\frac{e^{-1/x}}{x^2}$  יב.  $\frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}}$  יג.  $\frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$

יד.  $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$  טו.  $\frac{(x+1)^2}{e^{-x}}$  טז.  $\frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2}$

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

- (6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^x$  בנקודה  $A(1, e)$ .
- (7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$  בנקודה שבה  $x = 0$ .
- (8) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$  בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = e$ .
- (9) נתונה הפונקציה:  $y = e^{2x} + 3ex$ .  
 לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה:  $x = 2$ .  
 מצא את משוואת המשיק.
- (10) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$  בנקודה  $(1, 15)$  הוא  $21 \ln 3$ .  
 מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

### תשובות סופיות:

- (6)  $y = ex$
- (7)  $y = 3x + 1$
- (8)  $y = (-e^2 + e)x + e^2$ ,  $y = (e-1)x + e$
- (9)  $y = 2e^4x + 3ex - 3e^4$
- (10)  $b = -1$ ,  $a = 2$

## חקירה של פונקציה מעריכית:

### שאלות:

(11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } f(x) = \frac{2x-1}{e^x} & \text{ב. } f(x) = \frac{3}{e^x-1} & \text{ג. } f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \\
 \text{ד. } f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2} & \text{ה. } f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x} & \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2} \\
 \text{ז. } f(x) = \sqrt{e^{2x}-4e^x+3} & & 
 \end{array}$$

(12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^2e^x$ .

(13) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$ .

(14) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax^2+bx+9}{e^x}$ .

הפונקציה משיקה לציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 1.5$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$ . לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה  $(\log_2 3, -19)$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $p$  ו- $q$ .

(16) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^{2x} + e^x$ .

(17) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$ .

(18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x - 1}$ .

(19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 5e^x + 6}$

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^x}$

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x-1}{e^{3x} - e}$

(25) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = (x-3)e^x$

(26) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

(27) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 + a}{be^x}$ . לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה  $(1, \frac{2}{e})$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.

**(28)** חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x \quad \text{ב.} \qquad f(x) = (x-1)e^x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = e^{x^2-x} \quad \text{ד.} \qquad f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{x+1}} \quad \text{ו.} \qquad f(x) = \frac{2}{e^{x^2} + 1} \quad \text{ה.}$$

**(29)** נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-3)e^x$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(30)** נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(31)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{e^{0.5x^2}}$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(32)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(33)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2x \cdot 3^x$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(34)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2e^{\frac{x}{x^2+1}}$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ז. לאלו ערכי  $m$  יש למשוואה  $f(x) = m$  בדיוק פתרון אחד?

**(35)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
- ז. כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(36) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2 + 1}$$

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(37) \text{ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: } f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+k}} \text{ בנקודה שבה } x=1 \text{ הוא } -\frac{12}{e^{10}}$$

- מצא את ערך הפרמטר  $k$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- הוכח על סמך הסקיצה את אי-שוויון הבא:  $0 < \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}} \leq e^2$ .

(38) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$ . גוזרים את הפונקציה פעמיים

$$\text{וידוע כי כאשר } x = \ln \frac{2}{3} \text{ הנגזרות מקיימות: } f'(x) + f''(x) = 8$$

- מצא את  $a$ .
- משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא:  $y = 16x + 7 - 16 \ln 2$ .
- מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.
- מצא את  $b$ .
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

(39) נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = 6x - e^x$  ו-  $g(x) = ae^x - e^{2x} + b$ . ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור  $x$  וכי שתיהן נפגשות על ציר ה- $y$ .

- מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

40) לגרף הפונקציה:  $f(x) = ax^2 \cdot e^{-bx^2}$  יש נקודת קיצון:  $\left(2, \frac{4}{e}\right)$ ,  $a, b \neq 0$ .

- מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים ישר:  $y = k$ . באיזה תחום ערכים צריך להימצא  $k$  כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

41) לפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{e^{ax-1}}$  יש קיצון בנקודה שבה:  $x = 1$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $a$ .
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

42) הישר  $x = \sqrt{6}$  הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + m}$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $m$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$ .

- מצא את הנקודות המקיימות:  $f'(x) = 0$  וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- בכמה נקודות חותך הישר  $y = -0.01$  את גרף הפונקציה?

44 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$ . גוזרים את הפונקציה פעמיים

$$. f'(x) + f''(x) = 12 \text{ הנגזרות מקיימות: } x = \ln \frac{2}{3}$$

א. מצא את  $a$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא:  $y = 22x + 28 - 22 \ln 2$ .

ב. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.

ג. מצא את  $b$ .

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ ? אם כן מצא את הנקודות.

45 נתונה הפונקציה:  $f(x) = x \cdot a^x$ ,  $(a > 0)$ .

$$. x = -\frac{1}{\ln 2} \text{ לפונקציה יש נקודת קיצון שבה:}$$

א. מצא את  $a$ .

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה  $x = 2$  היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$

$$. g(x) = x^2 \cdot 2^x - kx \cdot 2^x \text{ עם גרף הפונקציה:}$$

ג. מצא את  $k$ .

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

46 נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{1-x}$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה

עם ציר ה- $y$ .

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- $x$ .

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

## תשובות סופיות:

$$(11) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } x \neq 0 \quad \text{ג. } x \neq \ln 5 \quad \text{ד. } x \neq \ln 2, x \neq 0 \quad \text{ה. כל } x$$

$$\text{ו. } 0 \leq x \neq \frac{2}{5} \quad \text{ז. } x \leq 0, x \geq \ln 3$$

$$(12) \quad \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$$

$$(13) \quad \min(3, e^3)$$

$$(14) \quad \min(1.5,0), \max(3.5,0.483), b=-12, a=4$$

$$(15) \quad p=-27, q=35$$

$$(16) \quad y=0$$

$$(17) \quad y=0$$

$$(18) \quad x=0, y=-5, y=1$$

$$(19) \quad x=\ln 5, y=-\frac{1}{5}$$

$$(20) \quad y=-1, y=1$$

$$(21) \quad \text{נקודת אי הגדרה: } (\ln 2, -1), x=\ln 3, y=-\frac{1}{3}, y=0$$

$$(22) \quad x=0, y=0$$

$$(23) \quad y=0$$

$$(24) \quad x=\frac{1}{3}, y=0$$

$$(25) \quad y=0$$

$$(26) \quad \text{נקודת אי הגדרה: } (0,0), x=0$$

$$(27) \quad \left(3, \frac{10}{e^3}\right), a=1, b=1$$

$$(28) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } (1,0), (0,-1) \quad \text{ג. } \min(0,-1) \quad \text{ד. עולה: } x>0 \quad \text{יורדת: } x<0$$

$$\text{ב. כל } x \quad \text{ג. } (0,1) \quad \text{ד. עולה: } x < -1, x > -1 \quad \text{פיתול } \left(-1, \frac{2}{e}\right)$$

$$\text{ג. כל } x \quad \text{ד. } (0,0) \quad \text{ה. } \max\left(2, \frac{4}{e}\right), \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$$

$$\text{ז. עולה: } x < -2, 0 < x < 2 \quad \text{יורדת: } x > 2, -2 < x < 0$$

$$\text{ד. כל } x \quad \text{ה. } (0,1) \quad \text{ו. } \min(0.5, e^{-0.25}) \quad \text{ז. עולה: } x > 0.5 \quad \text{יורדת: } x < 0.5$$

- ה.1. כל  $x$  .2.  $(0,1)$  .3.  $\max(0,1)$  .4. עולה:  $x < 0$  יורדת:  $x > 0$
- ו.1. כל  $x$  .2.  $(0, 2e^{-1})$  .3.  $\min(0, 2e^{-1})$  .4. עולה:  $x > 0$  יורדת:  $x < 0$
- (29) א. כל  $x$  .ב.  $\min(2, -e^2)$  .ג. תחומי עלייה:  $x > 2$  תחומי ירידה:  $x < 2$
- ד.  $(3,0)$  ,  $(0,-3)$
- (30) א. כל  $x$  .ב.  $\max(0,3)$  ,  $\min(\ln 3, 1.59)$  .ג. תחומי עלייה:  $x > \ln 3$  או  $x < 0$  תחומי ירידה:  $0 < x < \ln 3$  .ד.  $(0,3)$
- (31) א. כל  $x$  .ב.  $\min\left(-1, -\frac{4}{e^{0.5}}\right)$  ,  $\max\left(1, \frac{4}{e^{0.5}}\right)$  .ג. תחומי עלייה:  $-1 < x < 1$  תחומי ירידה:  $x > 1$  או  $x < -1$  .ד.  $(0,0)$
- (32) א. כל  $x$  .ב.  $\max\left(3, \frac{27}{e^3}\right)$  .ג. עולה:  $x < 3$  , יורדת:  $x > 3$
- ד.  $(0,0)$
- (33) א. כל  $x$  .ב.  $\min(-0.91, -0.67)$  .ג. עולה:  $x > -0.91$  יורדת:  $x < -0.91$
- ד.  $(0,0)$
- (34) א. כל  $x$  .ב.  $\max(1, 2\sqrt{e})$  ,  $\min\left(-1, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$  .ג. עולה:  $-1 < x < 1$  יורדת:
- ד.  $(0,2)$  .ה.  $y = 2$  .ו.  $m = 2$  ,  $m = 2\sqrt{e}$  ,  $m = \frac{2}{\sqrt{e}}$
- (35) א.  $x \neq 0$  .ב.  $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$  .ג. עולה:  $x > \frac{1}{2}$  , יורדת:  $0 \neq x < \frac{1}{2}$
- ד. אין
- (36) א. כל  $x$  .ב.  $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$  ,  $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$  .ג. עולה:  $x > \frac{1}{2}$  ,  $x < \frac{1}{6}$  יורדת:
- ד.  $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$  .ד.  $(0,1)$
- (37) א.  $k = 1$  ,  $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$  .ב.  $(-1, e^2)$
- ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה  $f(x)$  נמצא בתחום  $0 < f(x) \leq e^2$
- (38) א.  $a = 4$  .ב.  $x = \ln 2$  .ג.  $b = -5$  .ד.  $(0,0)$
- (39) א.  $a = 12$  ,  $b = -12$  .ב. עולות:  $x < \ln 6$  יורדות:  $x > \ln 6$

א.  $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2}$ ,  $a=1$ ,  $b=0.25$  (40)      ב.  $\max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$ ,  $\min(0,0)$

ג.  $(0,0)$       ה.  $0 < k < \frac{4}{e}$

א.  $a = \frac{1}{3}$  (41)      ב. כן:  $\left(11, \frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$       ג. עולה:  $1 < x < 11$  יורדת:  $x < 1, x > 11$

ד.  $(-1,0)$ ,  $(7,0)$ ,  $(0,-7e)$

א.  $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 6}$ ,  $m = -6$  (42)      ב.  $\max\left(-2, -\frac{1}{2e^4}\right)$ ,  $\min\left(3, \frac{e^6}{3}\right)$       ג.  $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$

א.  $x = 0, -1.5$ . נקודת הקיצון היא:  $\min\left(-1.5, -3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$  (43)      ב.  $y = 0$

ד. 2 נקודות.

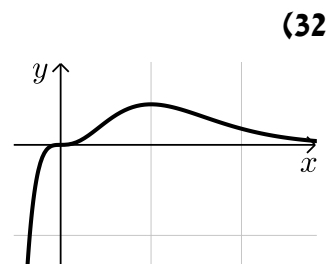
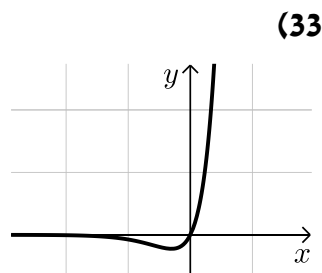
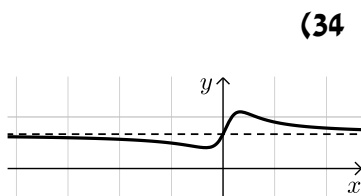
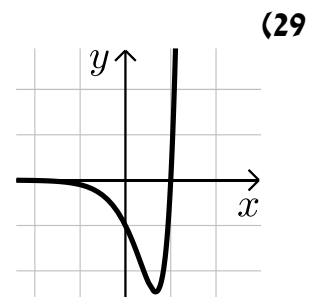
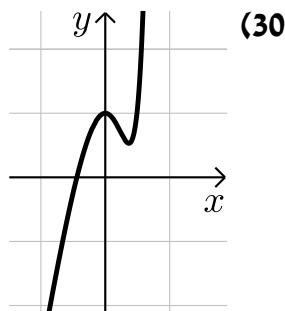
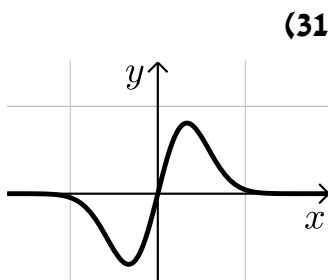
א.  $a = 7$  (44)      ב.  $x = \ln 2$       ג.  $b = 10$       ד. לא.

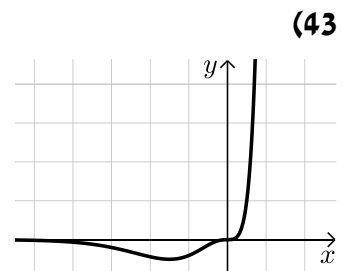
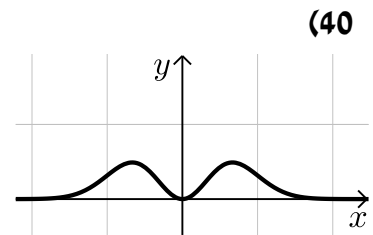
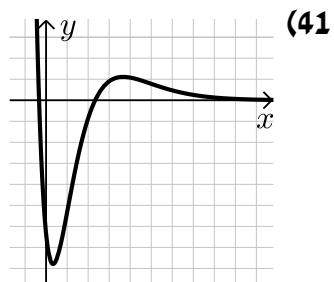
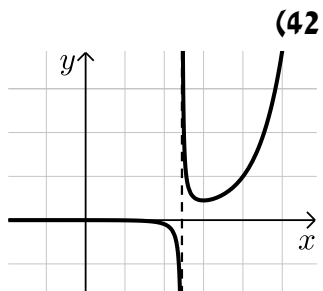
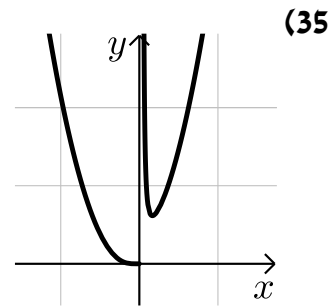
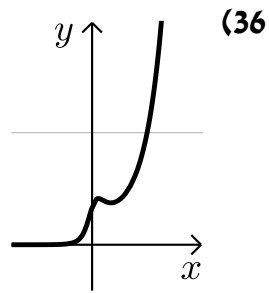
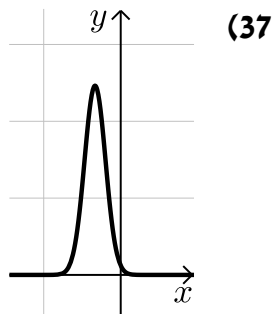
א.  $a = 2$  (45)      ב. עולה:  $x > -\frac{1}{\ln 2}$  יורדת:  $x < -\frac{1}{\ln 2}$       ג.  $k = 1$

ד.  $(0,0)$

א.  $y = -x \ln 81 + 7$  (46)      ג.  $\min\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{243}\right)$

סקיצות לשאלות החקירה:





## מתמטיקה ב

פרק 5 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

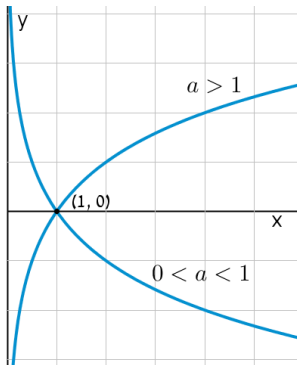
תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית..... 53
2. שימושי הנגזרת..... 58
3. חקירה של פונקציה לוגריתמית..... 59

## הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

**סיכום כללי:**

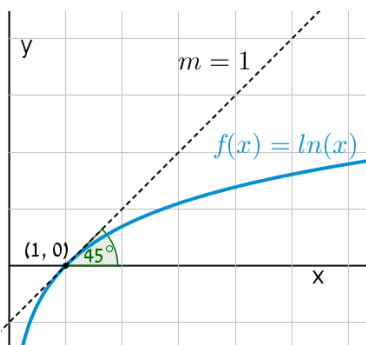
**הגדרות כלליות:**



להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה:  $f(x) = \log_a x$  עבור  $a > 1$  ו-  $0 < a < 1$ :

**תכונות כלליות:**

- לפונקציות תחום הגדרה  $x > 0$ .
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $x$  בנקודה  $(1, 0)$ .
- עבור  $a > 1$  הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור  $0 < a < 1$  הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות  $f(x) = \ln x = \log_e x$  נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  הוא 1:

**תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:**

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה:  $y = \log(f(x))$  הוא:  $f(x) > 0$ .

## נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

## שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א.  $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$     ב.  $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג.  $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$     ד.  $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה.  $f(x) = \ln(\cos x)$     ו.  $f(x) = \log_2 x + 5 \log_3(2x-1)$

2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א.  $f(x) = x \ln x$     ב.  $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$     ג.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד.  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$     ה.  $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א.  $f(x) = \ln^3 x$     ב.  $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג.  $f(x) = x^2 \ln^2 x$     ד.  $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

- |                                  |                                     |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| א. $f(x) = \ln(x+2)$             | ב. $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3$   |
| ג. $f(x) = x^2 \ln x$            | ד. $f(x) = x^3 \ln x$               |
| ה. $f(x) = \ln e^{2x}$           | ו. $f(x) = e^x \ln x$               |
| ז. $f(x) = e^{-x^2} \ln x$       | ח. $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$        |
| ט. $f(x) = \ln(x^2)$             | י. $f(x) = \ln(x^4)$                |
| יא. $f(x) = (\ln x)^4$           | יב. $f(x) = x \ln x - \ln x^2$      |
| יג. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ | יד. $f(x) = \ln \sqrt{x}$           |
| טו. $f(x) = \sqrt{\ln x}$        | טז. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ |

5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

- |  |  |
|--|--|
| א. $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$          | ב. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$          |
| ג. $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$        | ד. $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$  |
| ה. $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$         | ו. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$    |
| ז. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$           | ח. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$     |
| ט. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ | י. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+5x}{1-5x}}$ |
| יא. $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$ | יב. $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$         |
| יג. $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$        | יד. $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$ |
| טו. $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$         |  |



$$\frac{3\ln^2 x - \ln^3 x}{x^2} \quad \text{י.ב.}$$

$$\frac{\ln x - 4}{\ln^5 x} \quad \text{ט.ו.}$$

$$\frac{1 - 3\ln \sqrt[3]{x}}{3x^2} \quad \text{י.א.}$$

$$\frac{2(\ln^4 x - 1)}{x \ln^3 x} \quad \text{י.ד.}$$

$$\frac{5}{1 - 25x^2} \quad \text{י.}$$

$$\frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)} \quad \text{י.ג.}$$

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $A(e, 1)$ .

(7) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$  בנקודה  $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$  הוא  $\frac{e}{3}$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

(8) הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \ln x$  ו- $g(x) = 1 - x$  נחתכים בנקודה  $A$  ברביע הראשון. בנקודה  $A$  העבירו משיק ל- $f(x)$ . מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

(9) לפונקציה  $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$  העבירו משיק בנקודה שבה  $x = e^2$ . מצא את משוואת המשיק.

(10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x \ln(x^2 + 1)$  בנקודה שבה  $x = 1$ .

### תשובות סופיות:

(6)  $y = \frac{1}{e}x$

(7)  $a = 2, b = -2$

(8)  $y = \frac{1}{e}x$

(9)  $y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$

(10)  $y = \ln 2 \cdot x + x - 1$

## חקירה של פונקציה לוגריתמית:

### שאלות:

11 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \ln x$	ב. $f(x) = \ln(x^2)$
ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$	ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$
ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$	ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$
ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$	

12 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = 2 \ln x - x^2$ .

13 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^2 \ln x$ .

14 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$ .

15 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$ .

16 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$ . הנקודה  $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$  היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

17 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$ . הנקודה  $\left(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8}\right)$  היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

18 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \ln(x-3)$ .

19 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$ .

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{2\ln x - 1}{\ln x + 1}$ .

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$ .

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$ .

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x \ln x + 2$ .

(25) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

(26) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

- i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$y = x \ln x$ ב.	$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3 \ln x$ א.
$y = \sqrt{x} \ln x$ ד.	$y = x \ln x - x$ ג.
$y = \ln(x^2 + 1)$ ו.	$y = x^2 \ln x$ ה.

**(27)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2x \ln^2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(28)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא לאלו ערכי  $k$  הישר  $y = k$  חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

**(29)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(30)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ .

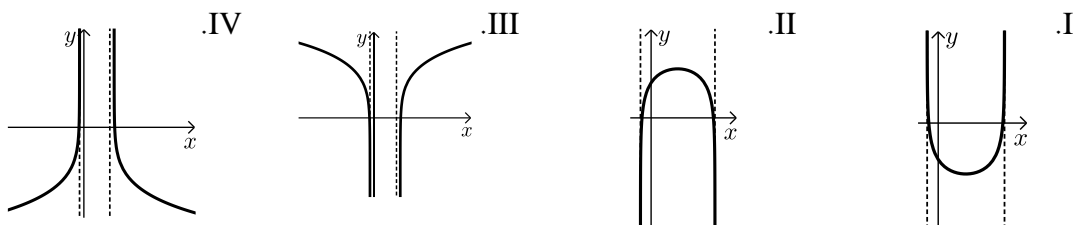
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \ln x$ .
- מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$ . ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור  $x$ ,  $(x_A = x_B)$ .
- מצא את שיעור ה- $x$  של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

**31** נתונה שתי הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ,  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.  
 נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
  - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור  $x$  זהה.
  - לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
  - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- ב. בחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- $x$  שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- $y$  של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

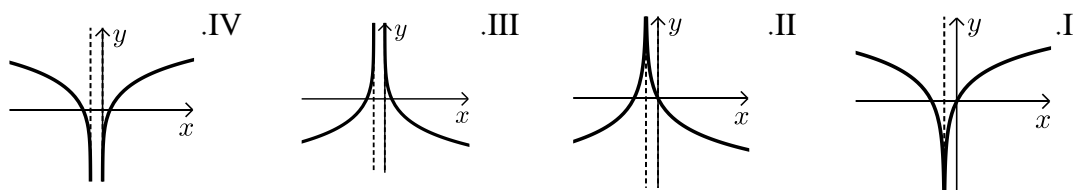
**32** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- $y$ ?  
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



**33** נתונה הפונקציה:  $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- $y$ ?  
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

34 לפניך הפונקציה הבאה :  $f(x) = \ln(1 - \ln x)$ .

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

35 נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$ .

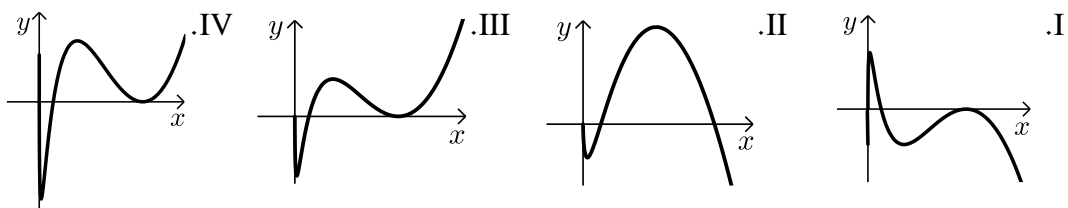
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

36 נתונה הפונקציה הבאה :  $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$ .

- הראה כי נגזרת הפונקציה היא :  $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$ .
- מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ענה על השאלות הבאות:

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה  $f(x)$  ונמק את בחירתך.



37 נתונה הפונקציה :  $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$ .

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הפונקציה  $g(x) = \ln x$ .

38) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה :  $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$

נתונה הפונקציה :  $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה :  $x = e$ .

39) נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$  , פרמטר חיובי,  $a \neq 1$

א. הבע באמצעות  $a$  את :

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת  $y' = 0$ .

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום :  $x > e - 2$ . מצא את  $a$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום  $x > -1$ .

ד. נתון הישר :  $y = k$ . מצא בסקיצה את תחום הערכים של  $k$  עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

40) נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \ln x + \frac{1}{x}$

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר  $y$  ?

אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

**תשובות סופיות:**

(11) א.  $x > 0$     ב.  $x \neq 0$     ג.  $x > 10$  או  $x < -2$     ד.  $x > \ln 4$

ה.  $0 < x \neq e$     ו.  $x > 0$  וגם  $x \neq e^3, e^{-1}$     ז.  $x \geq e$

(12)  $\max(1, -1)$

(13)  $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$

(14)  $\min(\sqrt{e}, 0)$  קצה,  $\max\left(e, \frac{1}{e}\right)$

(15)  $\min(4, -1)$

(16)  $a = 1, b = -1$

(17)  $a = 1, b = -1$

(18)  $x = 3$

(19) נקודת אי הגדרה  $(0, 0)$ ,  $y = 0, x = e$

(20) נקודת אי הגדרה  $(0, 2)$ ,  $y = 2, x = \frac{1}{e}$

(21) נקודת אי הגדרה  $\left(e^2, \frac{1}{4}\right)$ ,  $(0, 0)$ ;  $y = 0, x = \frac{1}{e^2}$

(22)  $x = 0, y = 0$

(23) נקודת אי הגדרה  $(0, 0)$

(24) נקודת אי הגדרה  $(0, 2)$

(25)  $\left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$

(26) א. i.  $x > 0$     iii.  $\max(1, -3.5), \min(3, \ln 27 - 7.5)$

iv. עולה:  $0 < x < 1, x > 3$  יורדת:  $1 < x < 3$     ב. i.  $x > 0$     ii.  $(1, 0)$

iii.  $\min(e^{-1}, -e^{-1})$     iv. עולה:  $x > e^{-1}$  יורדת:  $0 < x < e^{-1}$

ג. i.  $x > 0$     ii.  $(e, 0)$     iii.  $\min(1, -1)$     iv. עולה:  $x > 1$  יורדת:  $0 < x < 1$

ד. i.  $x > 0$     ii.  $(1, 0)$     iii.  $\min\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right)$     iv. עולה:  $x > e^{-2}$  יורדת:  $0 < x < e^{-2}$

ה. i.  $x > 0$  ii.  $(1, 0)$  iii.  $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$  iv. עולה:  $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$  יורדת:  $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל  $x$  ii.  $(0, 0)$  iii.  $\min(0, 0)$  iv. עולה:  $x > 0$  יורדת:  $x < 0$

(27) א.  $x > 0$  ב.  $\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right), \min(1, 0)$

ג. עלייה:  $x > 1$  או  $0 < x < \frac{1}{e^2}$ , ירידה:  $\frac{1}{e^2} < x < 1$  ד.  $(1, 0)$ .

(28) א.  $0 < x \neq e$  ב.  $\min(e^2, e^2)$  ג. עלייה:  $x > e^2$ , ירידה:  $0 < x < e^2$

ו.  $k > e^2$  ד. אין.

(29) א.  $x > 0$  ב.  $\min(4, -1)$  ג. עלייה:  $x > 4$ , ירידה:  $0 < x < 4$

ד.  $(1, 0), (16, 0)$ .

(30) א.  $x \geq 1$  ב. מתקבל:  $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$  ג.  $(1, 0), (e, 1)$

ד.  $x = \sqrt[4]{e}$ .

(31) א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של  $f(x)$  הוא:  $x > 0, x \neq 1$  ותחום ההגדרה של  $g(x)$  הוא:  $x > 0$ .

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה  $x = e$  אך עבור  $f(x)$  מדובר במינימום ועבור  $g(x)$  מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור  $f(x)$ : עולה:  $x > e$  יורדת:  $0 < x < e, x \neq 1$ .

ועבור  $g(x)$ : עולה:  $0 < x < e$  יורדת:  $x > e$  iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- $y$  שלה הוא:  $y = \frac{x}{\ln x}$  ו- $y = \frac{\ln x}{x}$ .

נכפול:  $y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$ .

(32) א.  $x < -1, x > 7$  ב.  $x = -1, 7$  ג. עולה:  $x > 7$  יורדת:  $x < -1$ .

ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום. באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

(33) א.  $x \neq -1$  ב.  $x = -1$  ג. עולה:  $x > -1$  יורדת:  $x < -1$ .

ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה.  $x \neq -1, -2 < x < 0$ .

34 א.  $0 < x < e$ . (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם:  $1 - \ln x > 0$  וגם  $x > 0$ ).

ב.  $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0$ . ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.

ג.  $(1, 0)$ .

35 א.  $x < -\frac{1}{2}, x > 1$ . ב.  $x = -\frac{1}{2}, 1$ . ג.  $(-2, 0)$ .

ד. מתקבל:  $y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$ .

36 ב.  $x > 1, e^{-4} < x < e^{-1}$ .

ג. i. 2 נקודות והן:  $(e^{-2}, 0)$ ,  $(1, 0)$ . הנקודה שבה:  $x = 0$  לא קיימת עקב ת.ה.

ii.  $x \neq 1, x > e^{-2}$ . ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.

שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

37 א.  $x > 0$ . ב.  $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(e^{\sqrt{3}}, 0)$ . ג.  $\min(e, -2)$ ,  $\max(e^{-1}, 2)$ .

ה.  $(1, 0)$ ,  $(e^2, 2)$ ,  $(e^{-2}, -2)$ .

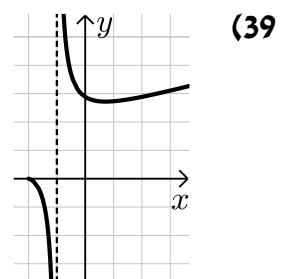
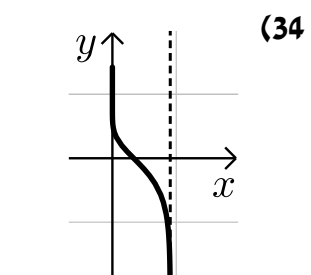
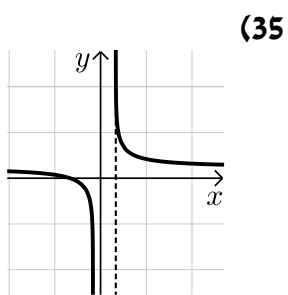
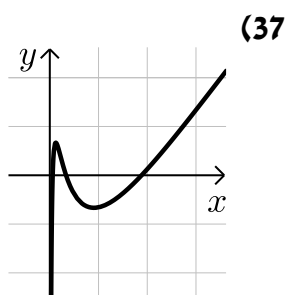
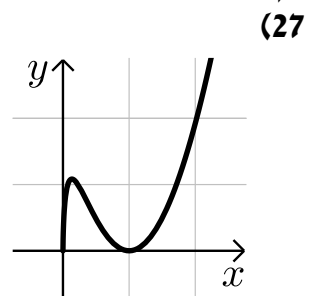
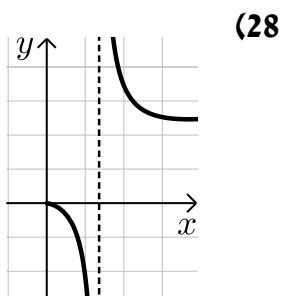
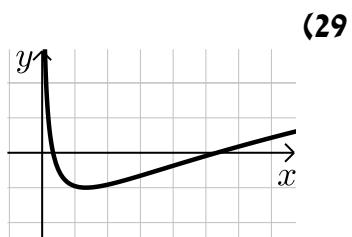
38 א.  $x = e$ . ב. מתקבל:  $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$ . ג.  $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$ .

39 א. i.  $x > -a, x \neq 1 - a$ . ii.  $(e - a, e)$ . iii.  $(0, \frac{a}{\ln a})$ .

iv.  $x = 1 - a$ . ב.  $a = 2$ . ד.  $k < e$ .

40 א. i.  $x > 0$ . ii.  $x = 0$ . ב.  $\min(1, 1)$ . ג. עולה:  $x > 1$ , יורדת:  $0 < x < 1$ .

## סקיצות לשאלות:



## מתמטיקה ב

### פרק 6 - חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון

#### תוכן העניינים

69	1. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים
71	2. בעיות קיצון בהנדסת המישור
75	3. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים
79	4. בעיות קיצון בהנדסת המרחב
81	5. בעיות קיצון עם תשובה נתונה
82	6. בעיות קיצון שונות בהנדסת המישור
86	7. בעיות קיצון שונות בהנדסת המרחב
88	8. בעיות קיצון שונות בפונקציות וגרפים

## בעיות קיצון יסודיות עם מספרים:

### סיכום כללי:

#### שלבי עבודה:

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- $x$ .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות  $x$ .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- $x$ .
- נוודא שערך ה- $x$  מהסעיף הקודם הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "  $y$  (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

### שאלות:

- (1) מבין כל זוגות המספרים שסכומם 14 מצא את הזוג שמכפלתו מקסימלית.
- (2) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצא מהם המספרים אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- (3) מצא את המספר החיובי שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- (4) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
  - א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
  - ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
  - ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- (5)  $x$  ו- $y$  הם שני מספרים המקיימים:  $x + 6y = 60$ .
  - א. הבע את  $y$  באמצעות  $x$ .
  - ב. מה צריכים להיות המספרים  $x$  ו- $y$  כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
  - ג. מהי המכפלה הנ"ל?

**תשובות סופיות:**

(1)  $.7, 7$

(2)  $.8, 8, 8$

(3)  $.1$

(4)  $12, 12, 12$  א. ב.  $8, 12, 16$  ג. מקרה א'.

(5) א.  $y = 10 - \frac{x}{6}$  ב.  $x = 30, y = 5$  ג.  $M = 22500$ .

## בעיות קיצון בהנדסת המישור:

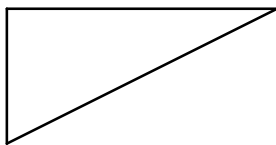
### שאלות:

6) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם  $a$ , מצא את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

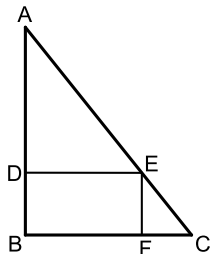
ב. הוכח: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.



8) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ. א. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי שטח המשולש יהיה מקסימלי?

ב. מהו השטח המקסימלי?

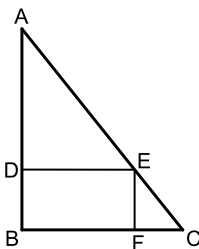
ג. מה יהיה אורך היתר במשולש במקרה זה?



9) במשולש ישר זווית ABC ( $\sphericalangle B = 90^\circ$ ) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.

נתון:  $AB = 20$  ס"מ,  $BC = 16$  ס"מ.

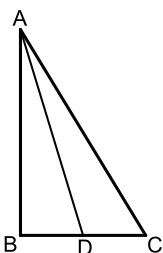
מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



10) במשולש ישר זווית ABC ( $\sphericalangle B = 90^\circ$ ) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.

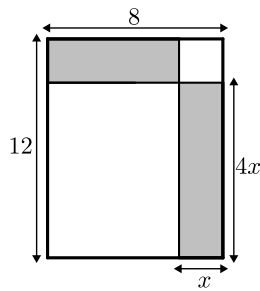
נתון:  $AB = a$ ,  $BC = b$ .

מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.

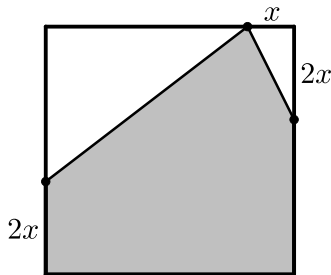


11) במשולש ישר הזווית ABC ( $\sphericalangle B = 90^\circ$ ), AD הוא תיכון לניצב BC ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ.

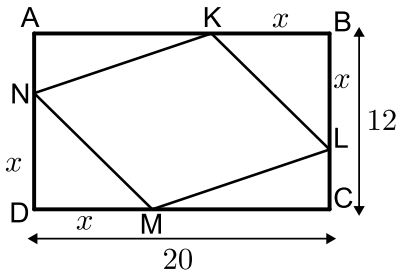
מצא מה צריכים להיות אורכי הניצבים עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



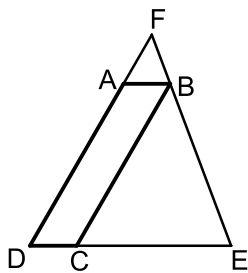
**12** נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ כמתואר באיור. מקצים קטעים באורכים של  $x$  ו- $4x$  על צלעות המלבן כך שנוצרים המלבנים המסומנים. מצא את  $x$  עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.



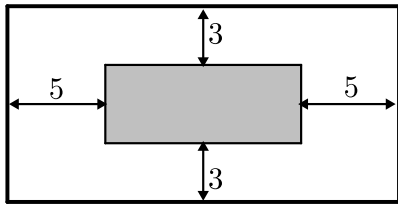
**13** נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ. מקצים קטע שאורכו  $x$  על הצלע העליונה ושני קטעים שאורכם  $2x$  על הצלעות הצדדיות כמתואר באיור כך שנוצר המחומש המסומן. מצא מה צריך להיות ערכו של  $x$  עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.



**14** הנקודות  $K, L, M, N$  מקצות קטעים שווים במלבן  $ABCD$  כך ש:  $BK = BL = DM = DN = x$ . צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.  
 א. הבע באמצעות  $x$  את סכום שטחי המשולשים:  $\triangle AKN + \triangle KBL + \triangle CLM + \triangle DNM$   
 ב. מצא מה צריך להיות  $x$  כדי ששטח המרובע  $LKNM$  יהיה מקסימלי.  
 ג. מה הוא השטח של המרובע  $LKNM$  במקרה זה?



**15** המרובע  $ABCD$  הוא מקבילית. מהקדקוד  $B$  מעבירים את הצלע  $EF$  הנפגשת עם המשכי הצלעות  $AD$  ו- $DC$ . ידוע כי מידות המקבילית הן:  $AB = 2$  ס"מ,  $AD = 8$  ס"מ. מסמנים את אורך הצלע  $DE$  ב- $x$ .  
 א. הבע באמצעות  $x$  את אורך הצלע  $DF$ .  
 ב. מצא את  $x$  עבורו סכום הצלעות  $DE$  ו- $DF$  הוא מינימלי.  
 ג. מה הוא הסכום המינימלי?



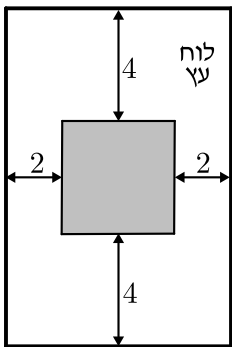
16) חיים הוא אחד מעובדי חברת "דפוס יהלום בע"מ". תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי כך שישארו רווחים של 3 ס"מ מקצוות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).

יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי ששאל אותו את השאלה הבאה: "יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.

מה הן המידות של גלויה אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?"

א. עזור לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראה דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

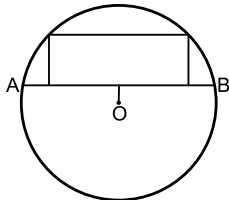


17) אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה: יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ ובקצוות העליון והתחתון - 4 ס"מ (ראה איור).

כדי לבחור את מידות לוח העץ, אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).

א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

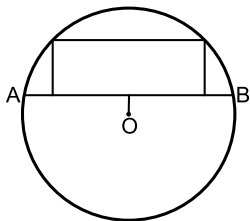


18) במעגל שמרכזו O ורדיוסו  $10\sqrt{5}$  ס"מ העבירו

מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



19) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB

שמרחקו ממרכז המעגל הוא a.

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



20) שני הולכי רגל יוצאים בו זמנית לדרכם, האחד

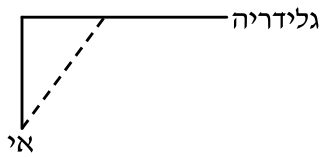
מעיר A מערבה לעיר B והשני מעיר B דרומה לעיר C.

המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.

מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש

כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי?

מצא גם את המרחק המינימלי.



- 21) אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק"מ מהחוף. על החוף, במרחק של 3 ק"מ מהנקודה הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה. האדם שוחה במהירות של 8 קמ"ש ורץ על החוף במהירות של 10 קמ"ש. לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?



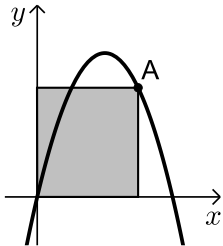
- 22) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

### תשובות סופיות:

- 6) 8 ס"מ.  
7) א.  $a/3$ . ב. הוכחה.  
8) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ. ב. 18 סמ"ר.  
9) 80 סמ"ר.  $S =$   
10)  $\frac{ab}{4}$  יחידות שטח.  
11) 4 ס"מ, 16 ס"מ.  
12)  $x = 2.75$   
13)  $x = 6$   
14) א.  $2x^2 - 32x + 240$ . ב.  $x = 8$   
15) א.  $DF = \frac{8x}{x-2}$ . ב.  $x = 6, L = \frac{x^2 + 6x}{x-2}$   
16) א. 6 ס"מ על 10 ס"מ. ב. 12 ס"מ על 20 ס"מ.  
17) א. 11 ס"מ על 22 ס"מ. ב.  $S = 98$   
18) 92 ס"מ.  
19)  $2\sqrt{5R} - 2a$  יחידות אורך.  
20) 4 שעות, המרחק:  $\sqrt{80}$  ק"מ.  
21)  $2\frac{1}{3}$  ק"מ.  
22) 4·6
- ג.  $6\sqrt{2} \approx 8.48$  ס"מ.  
ג. 128 סמ"ר.  $S =$   
ג.  $L = 18$

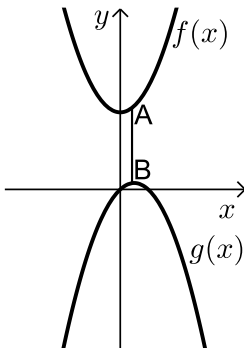
## בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:

### שאלות:



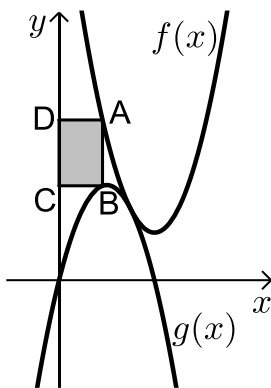
(23) נתונה הפונקציה  $f(x) = 6x - x^2$ .

מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



(24) נתונות הפונקציות:  $f(x) = x^2 + 12$  ו-  $g(x) = 2x - x^2 - 1$ .

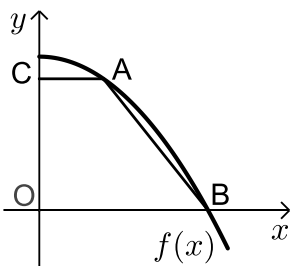
כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות:  $f(x)$  ו-  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה-  $y$ . מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



(25) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

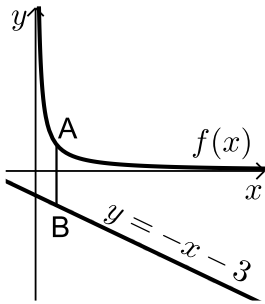
הפונקציות:  $f(x) = x^2 - 8x + 18$  ו-  $g(x) = -x^2 + 4x - 1$ .

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה-  $y$ . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה-  $y$  כך שנוצר מלבן (המסומן). נסמן את שיעור ה-  $x$  של הנקודה A ב-  $t$ .  
א. הבע באמצעות  $t$  את שטח המלבן המסומן.  
ב. מצא את ערכו של  $t$  עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.  
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



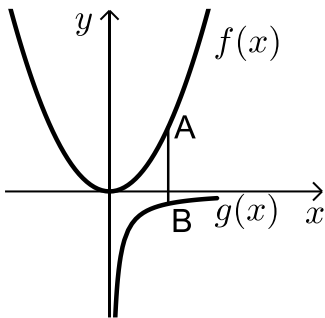
(26) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 36 - x^2$ .

על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר ה-  $x$  שחותך את ציר ה-  $y$  בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-  $x$  ו- O ראשית הצירים.  
א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?  
ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?



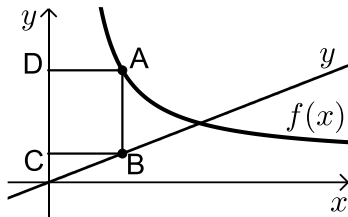
(27) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4}{x}$  ונתון הישר:  $y = -x - 3$ .

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הישר כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ . מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



(28) נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  ו- $g(x) = -\frac{1}{x}$ .

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה  $f(x)$  ונקודה B על גרף הפונקציה  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ . מצא את שיעורי הנקודות A ו-B עבור אורך הקטע AB מינימלי.



(29) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+8}{x-1}$  והישר:  $y = \frac{9x}{25}$ .

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .

מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- $y$  כך שנוצר המלבן ABCD. נסמן את שיעור ה- $x$  של הנקודה A ב- $t$ .

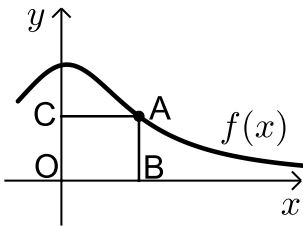
א. הבע באמצעות  $t$  את היקף המלבן ABCD.

ב. מצא את  $t$  עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

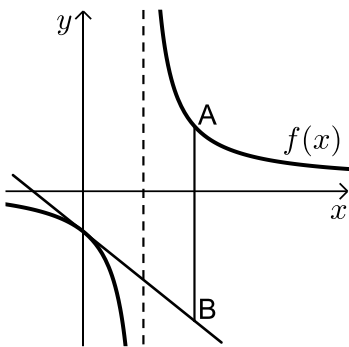
(30) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  והישר  $y = 2x$ .

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן. מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.



**31** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$  בתחום:  $x \geq 0$ .

- מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABCO כמתואר באיור.
- א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.
- ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.



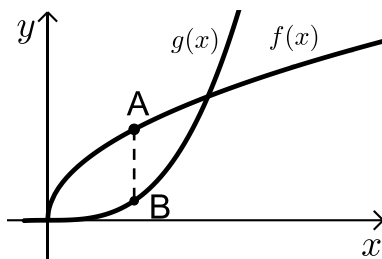
**32** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$ .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .
- א. מצא את משוואת המשיק.
- מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .

- ב. מצא את שיעורי הנקודה A עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.
- ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

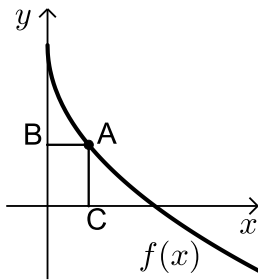
**33** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ .

- מצא שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.



**34** נתונות הפונקציות  $f(x) = 2\sqrt{x}$  ו-  $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$ .

- את הנקודה A שעל  $f(x)$  חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .
- מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



35 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = 6 - 3\sqrt{x}$ .

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון.

מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים

אותם בנקודות B ו-C כמתואר באיור.

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A ב-t.

א. הבע באמצעות t את סכום הקטעים AC+AB.

ב. מצא את ערכו של t עבורו סכום הקטעים הנ"ל

יהיה מינימלי.

36 נתונות הפונקציות:  $f(x) = 1 - x^2$  ו-  $g(x) = bx^2$  ( $b > 0$ ).

הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B.

מצא את ערכו של b שבעבורו הקטע AO מינימלי (O - ראשית הצירים).

### תשובות סופיות:

23 א.  $A(4,8)$

24 א.  $A(0.5, 12.25)$

25 א.  $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$

ג.  $S = 8$

ב.  $t = 1$

ב.  $S = 128$

26 א.  $A(2, 32)$

27 א.  $A(2, 2)$

28 א.  $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ , B(1, -1)

ג.  $P = 12.88$  ס"מ

ב.  $t = 4\frac{3}{4}$

29 א.  $P = \frac{1.28t^2 + 0.72t + 16}{t-1}$

30 1.2

ב.  $A(0, 4)$

31 א.  $A(2, 2)$

ג.  $AB = 24$

ב.  $A(4, 7)$

32 א.  $y = -3x - 5$

33 א.  $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

34 א.  $A(1, 2)$

ב.  $t = 2.25$

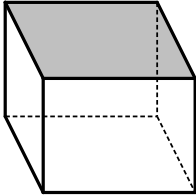
35 א.  $l = t + 6 - 3\sqrt{t}$

36 ב.  $b = 1$

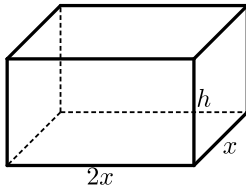
## בעיות קיצון בהנדסת המרחב:

### שאלות:

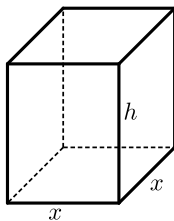
37) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר. מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.



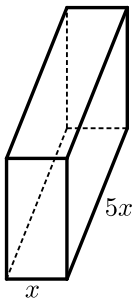
38) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח פניה (ללא המכסה) הוא 75 סמ"ר. מצא את אורך צלע הבסיס של התיבה שנפחה הוא מקסימלי.



39) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה כמתואר באיור. ידוע כי גובה התיבה  $h$  וצלע המלבן הקטנה  $x$  מקיימים:  $x+h=9$ . מצא מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה כדי שנפחה יהיה מקסימלי.



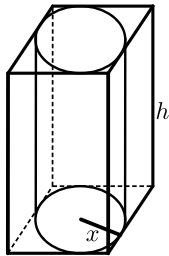
40) נתונה תיבה שגובהה הוא  $h$  ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו היא  $x$ . נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים:  $4x+h=63$ .  
 א. הבע את  $h$  באמצעות  $x$ .  
 ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות  $x$ .  
 ג. מה צריך להיות ערכו של  $x$  כדי ששטח הפנים יהיה מקסימלי?



41) ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק. יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5 מרוחבו כמתואר באיור הסמוך. כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת ולכן הוא רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח שעליו להשתמש בכדי להשיג את מבוקשו. מצאו את כמות הפח המינימלית.

42) לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה דרושים שני חומרים להם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון. מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

43) מכל הגלילים הישרים שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא  $k$  מצא את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.



44) באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- $x$  וגובהו ב- $h$ . ידוע כי הסכום של  $x$  ו- $h$  הוא 12 ס"מ.

א. הבע באמצעות  $x$  את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.  
ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע באמצעות  $x$  את נפח הגליל.

ii. הבע באמצעות  $x$  את נפח התיבה.

ג. מצא את  $x$  עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

45) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.

אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא  $k$  ושטח המעטפת שלה הוא  $S$ .

הוכח:  $S < 2k^2$ .

### תשובות סופיות:

37) 4·4·4 ס"מ.

38) 5 ס"מ.

39) בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.

40) א.  $h = 63 - 4x$  ב.  $p = -14x^2 + 252x$  ג.  $x = 9$ .

41) 3 ס"מ, 15 ס"מ ו-5 ס"מ.

42) 8·6·3 ס"מ.

43)  $V = \frac{k^3}{216\pi}$  יחידות נפח.

44) א.  $2x$  ב. i.  $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$  ii.  $V = 48x^2 - 4x^3$

ג.  $x = 8$ .

45) הוכחה.

## בעיות קיצון עם תשובה נתונה:

### שאלות:

#### בעיות קיצון בהנדסת המרחב:

(1) נתונים שני מספרים חיוביים  $p$  ו- $q$  שסכומם  $a$ .  
 הראה שכאשר מתקיים  $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$  ערך הביטוי  $p^n q^m$  ( $n$  ו- $m$  טבעיים) מקסימלי.

(2) הוכח שמכל החרוטים הישרים שנפחם  $\pi k$  סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו  $\sqrt[3]{6k}$  ס"מ.  
 (שטח מעטפת של חרוט הוא  $\pi Rl$ , כאשר  $l$  הוא הקו היוצר של החרוט).

#### בעיית קיצון עם תנועה:

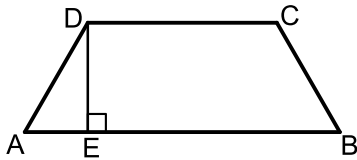
(3) מהירותו של רכב היא  $v$  קמ"ש ועליו לנסוע דרך של  $S$  ק"מ.  
 לרכב יש הוצאות נסיעה של  $\frac{v}{400}$  ש"ח לכל ק"מ נסיעה ו- $\frac{v^2}{200} + 48$  ש"ח לכל שעת נסיעה.  
 הראה שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

### תשובות סופיות:

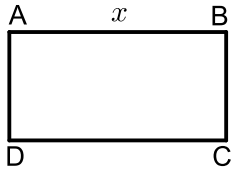
- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) הוכחה.

## בעיות קיצון שונות בהנדסת המישור:

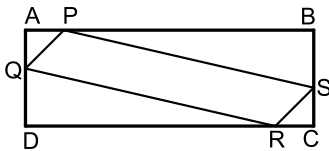
### שאלות:



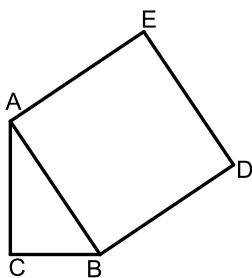
- (1) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ( $AB \parallel CD$ ) אורך השוק הוא 4 ס"מ ואורך הבסיס הקטן הוא 6 ס"מ. DE הוא הגובה מקדקוד D (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הקטע AE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?



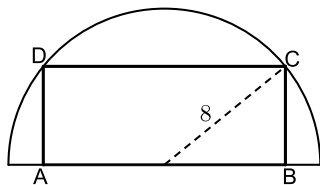
- (2) נתון מלבן ABCD .  
נסמן ב- $x$  את אחת מצלעות המלבן (ראה ציור). אם היקף המלבן הוא 60 ס"מ:  
א. בטא באמצעות  $x$  את שטח המלבן.  
ב. אם היקף המלבן הוא  $p$  מצא מה צריכות להיות אורכי צלעות המלבן כדי ששטחו יהיה מקסימלי. (הבע את אורכי הצלעות באמצעות  $p$ ).



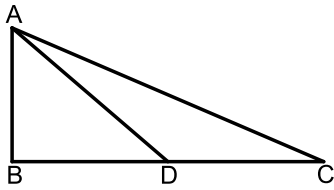
- (3) נתון מלבן ABCD כך ש- $AD = BC = 5$  ס"מ,  $AB = CD = 10$  ס"מ. על צלעות המלבן מקצים קטעים:  $AP = AQ = CS = CR = x$  (ראה ציור). מה צריך להיות ערכו של  $x$  כדי ששטח המקבילית PQRS יהיה מקסימלי?



- (4) במשולש ישר זווית  $\triangle ABC$  ( $\sphericalangle C = 90^\circ$ ) סכום אורכי הניצבים הוא 8 ס"מ. על היתר AB בונים ריבוע ABDE. מה צריכים להיות אורכי הניצבים כדי ששטח המחומש AEDBC יהיה מינימלי?



- (5) בחצי עיגול שרדיוסו 8 ס"מ חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB של המלבן מונחת על הקוטר, והקדקודים C ו-D מונחים על הקשת (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הצלע AB כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



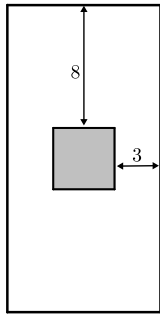
6) במשולש ישר-זווית  $\triangle ABC$  ( $\sphericalangle B = 90^\circ$ ),

סכום אורכי הניצבים הוא 30 ס"מ.

AD הוא תיכון לניצב BC.

חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים,

על מנת שריבוע אורך התיכון יהיה מינימלי.



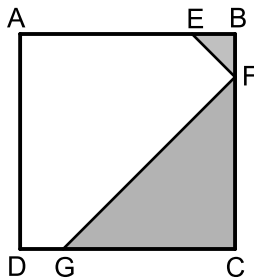
7) בחוברת פרסום, שטח כל עמוד הוא 600 סמ"ר.

רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו הוא 8 ס"מ,

ורוחב השוליים בצדדים הוא 3 ס"מ.

מצא מה צריך להיות האורך והרוחב של כל עמוד כדי שהשטח

המיועד לדפוס יהיה מקסימלי (השטח המסומן בצירור).



8) בריבוע ABCD הנקודות E, F, G נמצאות על

הצלעות AB, BC, DC בהתאמה, כך

ש-  $BE = BF$ ,  $CF = CG$  (ראה ציור).

נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ.

א. סמן ב- $x$  את BF ואת BE, והבע באמצעות  $x$

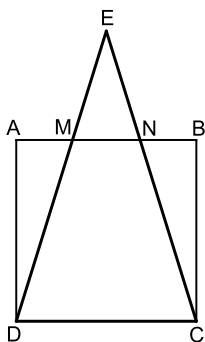
את הסכום של שטחי המשולשים EBF ו-FCG

(השטח המסומן בצירור)

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את  $x$  שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא מינימלי.

ii. חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים.



9) נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ.

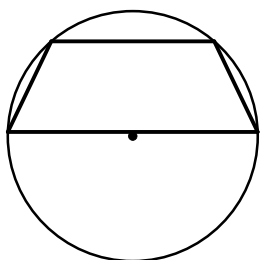
E היא נקודה כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC הוא

שווה שוקיים ( $ED = EC$ ).

שוקי המשולש חותכות את הצלע AB בנקודות M ו-N (ראה ציור).

מצא מה צריך להיות אורך הקטע AM כדי שהסכום של

שטחי המשולשים AMD, EMN, BNC יהיה מינימלי.



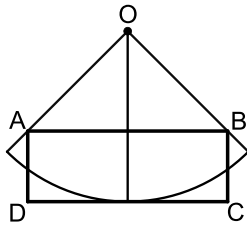
10) נתון מעגל שרדיוסו R. במעגל זה חסום טרפז שוו"ש,

כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר במעגל (ראה ציור).

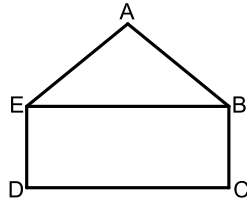
מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה,

הבע באמצעות R את אורך הבסיס הקטן בטרפז

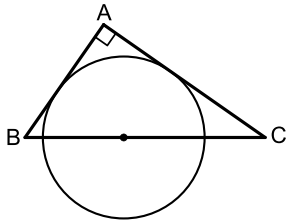
ששטחו מקסימלי.



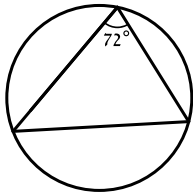
- 11** נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו  $O$  ורדיוסו  $10$  ס"מ. בונים מלבן  $ABCD$ , כך שרבע המעגל משיק לצלע  $DC$  בנקודת האמצע שלה, והקדקודים  $A$  ו- $B$  נמצאים על הרדיוסים התוחמים את הגזרה (ראה ציור). מבין כל האלכסונים של המלבנים  $ABCD$  שנוצרים באופן זה, מצא את אורך האלכסון הקצר ביותר.



- 12**  $ABCDE$  הוא מחומש המורכב ממשולש  $ABE$  וממלבן  $EBCD$  (ראה ציור). נתון:  $BC = 2$  ס"מ,  $AB = AE = 4$  ס"מ. מצא את השטח של המחומש ששטחו מקסימלי.



- 13** מתבוננים בכל המשולשים ישרי הזווית  $ABC$  החוסמים חצי מעגל שרדיוסו  $R$  כמתואר בציור. מהן זוויות המשולש שסכום הניצבים שלו הוא מינימלי?



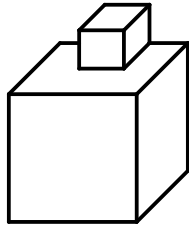
- 14** במעגל שרדיוסו  $R$  חסומים משולשים כך שהגודל של הזווית בכל אחד מהמשולשים הוא  $\frac{2\pi}{5}$ . מצא את הזוויות במשולש בעל ההיקף המקסימלי.

**תשובות סופיות:**

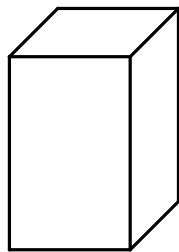
- (1)  $AE = 1.7$  ס"מ
- (2)  $x(30-x)$  א. ב. כל צלע שווה ל-  $0.25p$ .
- (3)  $x = 3.75$  ס"מ
- (4)  $AC = BC = 4$
- (5)  $AB = 2\sqrt{32}$
- (6)  $AB = 6$  ס"מ,  $BC = 24$  ס"מ
- (7) אורך: 40 ס"מ, רוחב: 15 ס"מ.
- (8) א.  $S = x^2 - 6x + 18$  ב. i.  $x = 3$  ב. ii. 9 סמ"ר.
- (9)  $AM = \frac{5}{\sqrt{2}}$
- (10)  $R =$  בסיס קטן
- (11)  $4\sqrt{5}$  ס"מ.
- (12)  $12\sqrt{3}$  סמ"ר.
- (13)  $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$
- (14)  $\frac{3}{10}\pi, \frac{3}{10}\pi, \frac{2}{5}\pi$

## בעיות קיצון שונות בהנדסת המרחב:

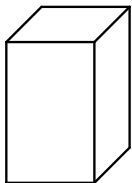
### שאלות:



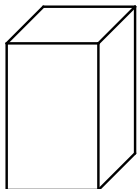
**15** גובהו של "מגדל" הבנוי משתי קוביות (לאו דווקא שוות) הוא 8 ס"מ.  
מה צריך להיות אורך המקצוע של הקובייה התחתונה כדי שנפח המגדל (סכום נפחי הקוביות) יהיה מינימלי?



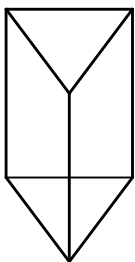
**16** בונים תיבה שגובהה  $y$  ס"מ, ובסיסה ריבוע, שאורך צלעו  $x$  ס"מ (ראה ציור), כך שההיקף של כל אחת מהדפנות הצדדיות שווה ל-12 ס"מ.  
מה צריך להיות אורך צלע הבסיס כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?



**17** יש לבנות תיבה פתוחה מלמעלה, שבסיסה ריבוע ושטח פניה הוא 75 סמ"ר (במקרה זה שטח הפנים מורכב מבסיס אחד ומארבע פאות צדדיות). מכל התיבות שאפשר לבנות, מצא את ממדי התיבה (צלע הבסיס וגובה) שנפחה מקסימלי.

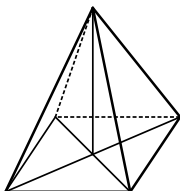


**18** יש להכין מחוט תיל "שלד" (מסגרת) של תיבה, שבסיסה ריבוע ונפחה 1000 סמ"ק.  
מהו האורך המינימלי של החוט הנחוץ ליצירת התיבה?

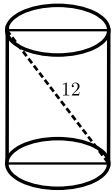


**19** מחוט שאורכו  $a$  ס"מ יש לבנות מנסרה משולשת ישרה, שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. מצא איזה חלק מאורך החוט יש להקצות לצלע הבסיס  $x$  ואיזה חלק לגובה  $y$  כדי שיתקיים (בטא ע"י  $a$ ):  
א. שטח המעטפת של המנסרה יהיה מקסימלי.  
ב. נפח המנסרה יהיה מקסימלי.

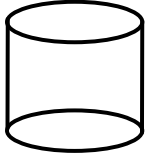
**20** מכל הפירמידות המרובעות, המשוכללות והישרות, שאורך המקצוע הצדדי שלהן הוא  $a$ , מצא את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.



**21** מכל הפירמידות הישרות, שבסיסן ריבוע ושטח הפנים שלהן הוא 200 סמ"ר, חשב את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.

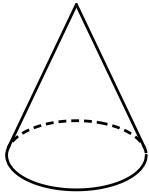


**(22)** אלכסון החתך הצירי של גליל ישר הוא 12 ס"מ (ראה ציור). מצא מה צריכים להיות גובה הגליל ורדיוס בסיסו כדי שנפחו יהיה מקסימלי.



**(23)** נתון מיכל גלילי פתוח מלמעלה שקיבולו 64 מ"ק. המיכל עשוי כולו מפח. הראה כי שטח הפח הוא מינימלי כאשר רדיוס הבסיס

$$\text{הוא } \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ מטר.}$$



**(24)** מבין כל החרוטים שאורך הקו היוצר שלהם הוא 10 ס"מ (ראה ציור), מהו נפח החרוט שנפחו מקסימלי?

### תשובות סופיות:

**(15)** 4 ס"מ.

**(16)** 4 ס"מ.

**(17)** צלע הבסיס: 5 ס"מ, גובה: 2.5 ס"מ.

**(18)** 120 ס"מ.

**(19)** א.  $x = \frac{1}{12}a$ ,  $y = \frac{1}{6}a$ . ב.  $x = y = \frac{1}{9}a$ .

**(20)**  $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$ .

**(21)**  $\frac{500}{3}$  סמ"ק.

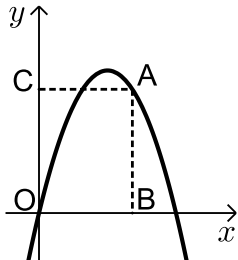
**(22)** גובה:  $\sqrt{48}$  ס"מ. רדיוס:  $\sqrt{24}$  ס"מ.

**(23)** הוכחה.

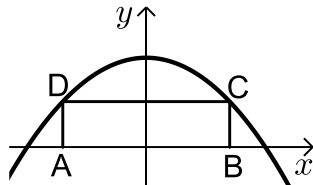
**(24)** 403.1 סמ"ק.

## בעיות קיצון שונות בפונקציות וגרפים:

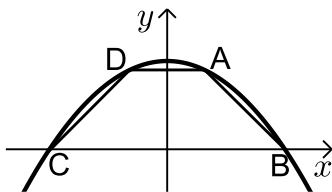
### שאלות:



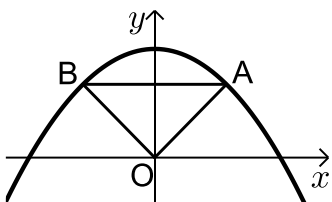
- (25)** מנקודה A, הנמצאת על גרף הפונקציה  $y = -x^2 + 5x$ , מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן ABOC (ראה ציור).  
 א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?  
 ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי?



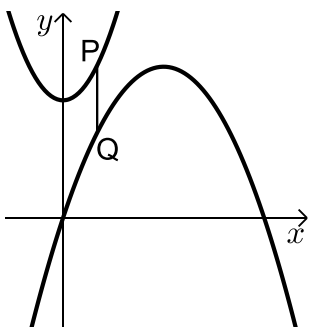
- (26)** בפרבולה  $y = 9 - x^2$  חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB מונחת על ציר ה-x (ראה ציור).  
 מה צריך להיות אורך הצלע CD כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



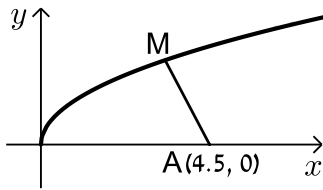
- (27)** טרפז ABCD חסום בין גרף הפרבולה  $y = 9 - x^2$  לבין ציר ה-x (ראה ציור).  
 א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABCD יהיה מקסימלי?  
 ב. חשב את השטח המקסימלי של טרפז ABCD.



- (28)** נתונה הפרבולה  $y = -x^2 + 12$ . ישר המקביל לציר ה-x חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B (ראה ציור).  
 מחברים את הנקודות A ו-B עם ראשית הצירים, O.  
 א. מה צריך להיות אורך הקטע AB כדי ששטח המשולש AOB יהיה מקסימלי?  
 ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB?

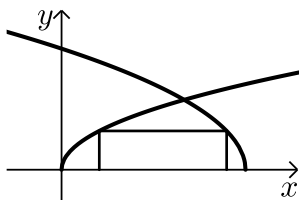


- (29)** נתונים הגרפים של שתי פרבולות:  $y = \frac{1}{2}x^2 + 7$  ו-  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 1$ .  
 קו מקביל לציר ה-y חותך את שתי הפרבולות בנקודות P ו-Q (ראה ציור). מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה, מצא את האורך המינימלי של הקטע PQ.

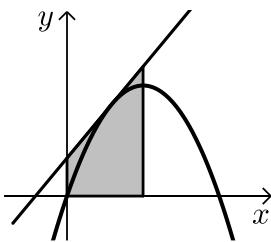


- 30** נתון גרף הפונקציה  $y = \sqrt{x}$ .  
על ציר ה- $x$  נתונה הנקודה  $A(4.5, 0)$  (ראה ציור).  
מצא על גרף הפונקציה נקודה  $M$ , כך שריבוע המרחק  $AM$  יהיה מינימלי.

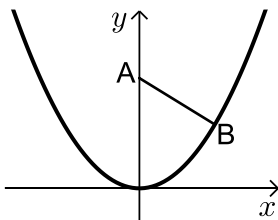
- 31** מצא על הישר  $y = 3x - 4$  את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה  $(0, 1)$ .



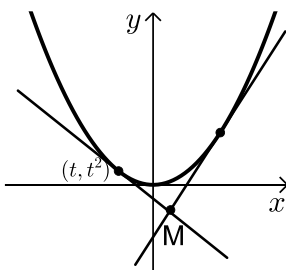
- 32** בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \sqrt{3x}$ ,  $g(x) = \sqrt{36-6x}$ .  
מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות ובין ציר ה- $x$ , כמתואר בציור.  
מצא את השטח הגדול ביותר האפשרי למלבן שחסום באופן זה.



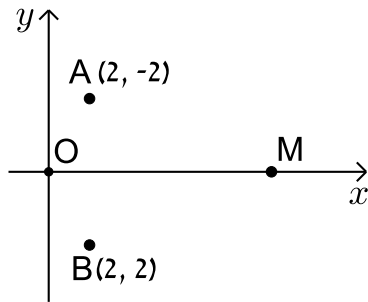
- 33** דרך איזו נקודה על הפרבולה  $y = -x^2 + 2x$  צריך להעביר משיק, כדי ששטח הטרפז, הנוצר על ידי המשיק והישרים:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  (השטח המסומן שבציור) יהיה מינימלי?



- 34** נקודה  $B$  נמצאת על גרף הפונקציה  $y = x^2$  ברביע הראשון.  $A$  היא הנקודה  $(0, a)$  כאשר ידוע כי  $a > 0.5$  (ראה ציור).  
א. בטא באמצעות  $a$  את שיעורי הנקודה  $B$ , שעבורה המרחק  $AB$  הוא מינימלי.  
ב. מצא עבור איזה ערך של  $a$  המרחק המינימלי הוא 2.



- 35** נתונה הפרבולה  $y = x^2$ , ונתון משיק לפרבולה שמשוואתו היא  $y = 6x - 9$ . בנקודה  $(t, t^2)$  שעל הפרבולה מעבירים משיק נוסף לפרבולה.  
המשיקים נחתכים בנקודה  $M$  (ראה ציור).  
א. הבע את משוואת המשיק הנוסף באמצעות  $t$ .  
ב. מצא את  $t$  שעבורו אורך הקטע, המחבר את הנקודה  $M$  עם קדקוד הפרבולה יהיה מינימלי.



**(36)** במערכת צירים נתונות הנקודות  $A(2, 2)$  ו-  $B(2, -2)$ . ראשית הצירים היא בנקודה  $O$ .  $M$  היא נקודה על ציר ה- $x$  בתחום  $x > 0$ . מה צריכים להיות שיעורי הנקודה  $M$ , כדי שהסכום:  $OM + MA + MB$  יהיה מינימלי?

### תשובות סופיות:

ב.  $A(0, 0)$  או  $A(5, 0)$ .

ב. 32.

ב.  $S_{\Delta AOB} = 16$ .

ב. 4.25.

ב.  $t = -\frac{3}{37}$ .

א.  $A(3, 6)$  (25)

א.  $CD = 2\sqrt{3}$  (26)

א.  $A(1, 8)$  (27)

א.  $AB = 4$  (28)

א.  $PQ = 4$  (29)

א.  $M(4, 2)$  (30)

א.  $(1.5, 0.5)$  (31)

8 (32)

א.  $(0.5, 0.75)$  (33)

א.  $B\left(\sqrt{\frac{2a-1}{2}}, \frac{2a-1}{2}\right)$  (34)

א.  $y = 2xt - t^2$  (35)

א.  $M(0.845, 0)$  (36)

# מתמטיקה ב

פרק 7 - נגזרת סתומה

תוכן העניינים

91 ..... 1. כללי

## נגזרת סתומה

## שאלות

- (1) גזור את הפונקציה הסתומה:  $x^2 + y^5 - y = 1$ .
- (2) גזור את הפונקציה הסתומה:  $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$ .
- (3) גזור את הפונקציה הסתומה:  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ .
- (4) מצא את משוואת המשיק למעגל:  $x^2 + y^2 = 25$ , בנקודה  $(3, 4)$ .
- (5) מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה:  $xy^2 + y - x = xy$  דרך הנקודה  $(1, 2)$  הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (6) מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה:  $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$  דרך הנקודה  $(1, 1)$  הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (7) מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה:  $\sqrt{xy+y} + x^2y = xy^2$  דרך הנקודה  $(1, 2)$  הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (8) מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה:  $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$  דרך הנקודה  $(0, 2)$  הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (9) נתונה הפונקציה הסתומה:  $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$ .  
 א. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה בהן  $y = 0$ .  
 ב. מצא את משוואות הישרים המשיקים של גרף הפונקציה בנקודות שמצאת בסעיף א.
- (10) גזור את הפונקציה הסתומה:  $x^y - xy = 10$ .
- (11) גזור את הפונקציה הסתומה:  $x^y - y^x = 1$ .
- (12) נתונה פונקציה סתומה:  $xy - y^3 + x^2 - x = 0$ . מצא את ערך "y" בנקודה בה  $y = 1$ .

## תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0 \text{ : בתנאי , } y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0 \text{ : בתנאי , } y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \sqrt{y} \neq 1 \text{ : בתנאי , } y' = \frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6} \quad (7)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (8)$$

$$(0,0), (1,0) \text{ א.} \quad (9)$$

ב. משוואת המשיק ב- $(0,0)$  :  $y = -x$  , משוואת המשיק ב- $(1,0)$  :  $y = x - 1$

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0 \text{ : בתנאי , } y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (10)$$

$$x^y \cdot \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0 \text{ : בתנאי , } y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \cdot \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (11)$$

$$y'' = -1 \quad (12)$$

## מתמטיקה ב

פרק 8 - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

תוכן העניינים

1. מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה..... 93
2. שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי..... 96
3. הוכחת אי שוויונים..... 97

## מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

---

### שאלות

בשאלות 1-7 מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות, בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

$$(-1 \leq x \leq 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2)$$

$$(-1 \leq x \leq 20) \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}(20 - x) \quad (3)$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right] \quad f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x < 1 \\ (x - 2)(x - 3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$(-5 \leq x \leq 1) \quad f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-5 < x < -1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x + 1} \quad (6)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = x^x \text{ בתחום } x > 0. \quad (8)$$

א. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. דני טוען שהפונקציה הפיכה בקטע  $(0, 0.5)$ . הוכיחו שדני טועה.

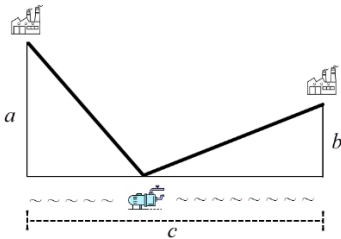
$$\text{מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה } f(x) = x^2 + |\ln x| \quad (9)$$

(10) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ , ב- $\mathbb{R}$ . הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.

**11** מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של  $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ ,

ב-  $\mathbb{R}$  וב-  $[1, 3]$ .

הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.



**12** לחברת מי עדן יש שני מפעלים.

האחד מרוחק  $a$  ק"מ מהמעיין.

השני מרוחק  $b$  ק"מ מהמעיין.

המרחק האופקי בין המפעלים הוא  $c$  ק"מ.

החברה מעוניינת להקים תחנת שאיבה במעיין

בין שני המפעלים. התחנה מחוברת למפעלים.

מהו האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך?

הראו שהאורך המינימלי מתקבל כאשר הזווית בין כל צינור למעיין שוות.

**13** גליל חסום בכדור.

הוכיחו, מבין כל הגלילים האפשריים הגדול ביותר בנפחו הוא זה שגובהו פי

$\sqrt{2}$  מרדיוס הבסיס שלו.

### תשובות סופיות

- (1)  $(-1, -7)$  מינימום מוחלט,  $(3, 9)$  מקסימום מוחלט.
- (2)  $(-1, 0)$  מינימום מוחלט,  $(5, 0)$  מינימום מוחלט,  $(2, 3)$  מקסימום מוחלט.
- (3)  $(0, 0)$  מינימום מוחלט,  $(20, 0)$  מינימום מוחלט,  $(8, 48)$  מקסימום מוחלט.
- (4)  $(2.5, -0.25)$  מינימום מוחלט,  $(1, 2)$  מקסימום מוחלט.
- (5)  $(-3, 1)$  מינימום מוחלט,  $(-5, 17)$  מקסימום מוחלט.
- (6)  $(-2, -4)$  מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.
- (7) אין מקסימום ואין מינימום מוחלטים.
- (8) א. אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט הוא  $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ . ב. שאלת הוכחה.
- (9) אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט  $0.5(1 + \ln 2)$ .
- (10) מקסימום מוחלט 1, מינימום מוחלט  $\frac{1}{2}$ .
- (11) ב-  $\mathbb{R}$ :  $(3, 0)$ ,  $(1, 0)$  מינימום מוחלט, מקסימום מוחלט לא קיים.
- ב-  $[1, 3]$ :  $(3, 0)$ ,  $(1, 0)$  מינימום מוחלט,  $(2, 1)$  מקסימום מוחלט.
- (12) האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך הוא  $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$ .
- (13) שאלת הוכחה.

## שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי

### שאלות

- (1) תהי  $f$  פונקציה רציפה ב- $[a, b]$  וגזירה ב- $(a, b)$ .  
 נניח שקיימת נקודה  $c \in (a, b)$ , כך ש- $(f(c) - f(a))(f(b) - f(c)) < 0$ .  
 הוכיחו כי קיימת נקודה  $d \in (a, b)$ , כך ש- $f'(d) = 0$ .
- (2) פונקציה  $f(x)$  גזירה פעמיים בקטע  $[a, b]$ .  
 וידוע כי  $f(x)$  מקיימת  $f(x) - f'(x) = f''(x)$  לכל  $x$ , וכן  $f(a) = f(b) = 0$ .  
 הוכיחו כי  $f(x) = 0$  לכל  $x$  בקטע.
- (3) הפונקציה  $f$  גזירה פעמיים ומקיימת  $f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$  עבור פונקציה  $g$  מסוימת.  
 הוכיחו: אם הפונקציה  $f$  מקבלת את הערך 0 בשתי נקודות, אז היא שווה אפס בכל הקטע בין הנקודות.
- (4) תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $[a, b]$  וגזירה פעמיים בקטע  $(a, b)$ , כך ש-  
 $f''(x) < 0$  בקטע זה.  
 נתון כי  $f(a) = f(b) = 0$ .  
 א. הוכיחו כי  $f(x) > 0$  בקטע  $(a, b)$ .  
 ב. האם סעיף אי' נשאר נכון אם מורידים את דרישת הרציפות? הוכיחו או הפריכו.

### תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.  
 (2) שאלת הוכחה.  
 (3) שאלת הוכחה.  
 (4) שאלת הוכחה.

## הוכחת אי שוויונים

---

### שאלות

בשאלות 1-3 הוכיחו את אי-השוויונים שמימין, לגבי התחום שבסוגריים משמאל:

$$(1) \quad x^3 e^{-x} \leq \frac{27}{e^3} \quad (x \text{ לכל } x)$$

$$(2) \quad x e^{-\sqrt{x}} \leq 1 \quad (x \geq 0)$$

$$(3) \quad 0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1 \quad (x \leq 1)$$

(4) יהיו  $a$  ו- $b$  מספרים חיוביים. הוכיחו שאי-השוויונים הבאים לא יכולים להתקיים בעת ובעונה אחת:

$$(1) \quad a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad (2) \quad b(1-a) > \frac{1}{4}$$

**הערת סימון:**  $[a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$  ;  $(a, b) \Leftrightarrow a < x < b$  ;  $[a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## מתמטיקה ב

פרק 9 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים - עקומות שוות ערך ונגזרות חלקיות

תוכן העניינים

- 98 ..... 1. פונקציות של שני משתנים - קווי גובה
- 102 ..... 2. נגזרות חלקיות

## פונקציות של שני משתנים – קווי גובה

### שאלות

- (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x, y) = \frac{y}{x}$ ?  
שרטט מפת קווי גובה.
- (2) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x, y) = \ln x + \ln y$ ?  
שרטט מפת קווי גובה.
- (3) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ?  
שרטט מפת קווי גובה.
- (4) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ?  
שרטט מפת קווי גובה.
- (5) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x, y) = \ln(x^2 - y)$ ?  
שרטט מפת קווי גובה.
- (6) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x, y) = x\sqrt{y}$ ?  
שרטט מפת קווי גובה.
- (7) תהי:  $u(x, y) = (x+p)(y+q)$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  פונקציית תועלת של פרט.  
הנקודות:  $(0, 14)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(1, 6)$  מונחות על אותה עקומת אדישות.  
א. מצא את  $p$  ו- $q$ . הצב אותם בפונקציית התועלת.  
ב. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות?  
עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.
- (8) שרטט לפונקציה:  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases}$   
את קו הגובה:  $f(x, y) = 1$

$$(9) \text{ נגדיר: } f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases} \text{ הנח כי: } x, y \geq 0$$

שרטט את העקומות שוות הערך:  $f(x, y) = 4, 12$  עבור הפונקציה הנתונה.

$$(10) \text{ שרטט את מפת העקומות שוות הערך של: } f: R_+^2 \rightarrow R_+, f(x, y) = \min \left\{ \frac{x}{3}, y \right\}$$

$$(11) \text{ שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: } f(x, y) = \min \{3x, y\}$$

$$(12) \text{ שרטט לפונקציה: } f(x, y) = \min \{y - x^2, x + y\}$$

$$\text{את קווי הגובה: } f(x, y) = 0, f(x, y) = 2$$

$$(13) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{א. שרטט את קו הגובה: } f(x, y) = 0$$

ב. לאילו ערכי  $C$  קו הגובה:  $f(x, y) = C$  יהיה קו רציף?  
צייר את קו הגובה במקרה זה.

(14) פונקציית התועלת של פרט הצורך את המוצרים  $x$  ו- $y$

$$u(x, y) = \begin{cases} y - x^2 + 4x & x \leq 4 \\ x - y & 4 < x \leq 6 \\ y - \ln x & 6 < x \end{cases} \text{ היא:}$$

$$\text{א. שרטט את קו הגובה: } u(x, y) = 3$$

ב. הסבר מהי המשמעות הכלכלית של קו הגובה שמצאת.

ג. ידוע כי הפרט צורך את הכמויות (4,8).

האם הפרט יהיה אדיש במעבר לצריכת הכמויות (7,9)?

$$(15) \text{ שרטט את מפת העקומות שוות הערך של: } f: R^2 \rightarrow R, f(x, y) = 100 - 5x - 2y$$

באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של  $f$ ?

(16) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה:  $f(x, y) = 3x - y + 3$ .

(17) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה:  $f(x, y) = x^3 - y$ .

(18) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה:  $f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2$ .

(19) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה:  $f(x, y) = e^{x-y}$ .

(20) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה:  $f(x, y) = 2 \ln x + \ln y$ .

(21) שרטט לפונקציה:  $f(x, y) = (x-y)^2$ ,

את קווי הגובה:  $f(x, y) = 0$ ,  $f(x, y) = 4$ .

## תשובות סופיות

- (1)  $x \neq 0$ , המישור ללא ציר ה- $y$ .
- (2)  $x > 0, y > 0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור.
- (4)  $x^2 + y^2 \leq 1$ , עיגול היחידה.
- (5)  $y < x^2$
- (6)  $y \geq 0$ , חצי המישור העליון.
- (7) א.  $u(x, y) = (x+1) \cdot (y+2)$ ,  $p=1, q=2$
- ב.  $y = \frac{16}{x+1} - 2$
- (8) ראה סרטון.
- (9) ראה סרטון.
- (10) ראה סרטון.
- (11) ראה סרטון.
- (12) ראה סרטון.
- (13) א. ראה סרטון.
- ב.  $C=1.5$
- (14) א. ראה סרטון.
- ב. ראה סרטון.
- ג. הפרט לא אדיש.
- (15) ראה סרטון.
- (16) ראה סרטון.
- (17) ראה סרטון.
- (18) ראה סרטון.
- (19) ראה סרטון.
- (20) ראה סרטון.
- (21) ראה סרטון.

## פונקציות של שני משתנים – נגזרות חלקיות

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה:  $f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y$ .  
 חשב את הנגזרת לפי  $x$  ואת הנגזרת לפי  $y$ .

(2) נתונה הפונקציה:  $f(x, y) = x^5 \cdot \ln y$ .  
 חשב את הנגזרת לפי  $x$  ואת הנגזרת לפי  $y$ .

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y}$ .  
 חשב את הנגזרת לפי  $x$ .

(4) נתונה הפונקציה:  $f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y)$ .  
 חשב את הנגזרת לפי  $x$  ואת הנגזרת לפי  $y$ .

(5) נתונה הפונקציה:  $f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2}$ .  
 חשב את הנגזרת החלקית לפי  $x$  ואת הנגזרת לפי  $y$ .

(6) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$ .

(7) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  
 $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1 - y)(x - y)$

(8) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = xy(x - y)$ .

(9) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  
 $f(x, y) = (x - 9)(2y - 6)(4x - 3y + 12)$

(10) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = e^{xy}(x + y)$ .

(11) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2)$

(12) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

(13) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

(14) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(15) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:  $f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2})$

(16) חשב:  $f'_{xy}(1,1)$  עבור:  $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$

(17) חשב:  $f'_{xy}(1,1)$  עבור:  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(18) חשב:  $f'_{xy}(1,1)$  עבור:  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(19) נתון:  $z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

הוכח כי:  $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$

(20) נתון:  $f(x, y, z) = e^x \cdot \left(y^2 - \frac{1}{z}\right)$

חשב:  $\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right), \frac{\partial f}{\partial z}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right)$

(21) נתון:  $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$

חשב:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, e), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, e), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, e)$

**(22)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y$$

**(23)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור :  $f(x, y) = x^4 \cdot \ln y$

**(24)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור :  $f(x, y, z) = xyz$

## תשובות סופיות

$$f_y(x, y) = -6x^2y + 3, \quad f_x(x, y) = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y(x, y) = \frac{x^5}{y}, \quad f_x(x, y) = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x(x, y) = \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \cdot 2x \quad (3)$$

$$f_y(x, y) = (2x + 3y) + 3(x^2 + y^2), \quad f_x(x, y) = 2x(2x + 3y) + 2(x^2 + y^3) \quad (4)$$

$$f_y(x, y) = \frac{-3x - 3y^2 - 2x^2y + 6y^2}{(x + y^2)^2}, \quad f_x(x, y) = \frac{2x(x + y^2) - 1(x^2 - 3y)}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

סדר ראשון: (6)

$$f_y(x, y) = 3y^2 - 6x, \quad f_x(x, y) = 3x^2 - 6y$$

סדר שני:

$$f_{yx} = -6, \quad f_{xy} = 0 - 6, \quad f_{yy} = 6y - 0, \quad f_{xx} = 6x - 0$$

סדר ראשון: (7)

$$f_y(x, y) = 3y^2 + 3 - 3x - 6y, \quad f_x(x, y) = 3x^2 + 3 - 3y$$

סדר שני:

$$f_{xy} = f_{yx} = -3, \quad f_{yy} = 6y - 6, \quad f_{xx} = 6x$$

סדר ראשון: (8)

$$f_y(x, y) = x^2 - 2xy, \quad f_x(x, y) = 2xy - y^2$$

סדר שני:

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y, \quad f_{yy} = -2x, \quad f_{xx} = 2y$$

סדר ראשון: (9)

$$f_x(x, y) = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0]$$

$$f_y(x, y) = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0]$$

סדר שני:

$$f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0], \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

סדר ראשון: (10)

$$f_y(x, y) = e^{xy}(x^2 + xy + 1), \quad f_x(x, y) = e^{xy}(xy + y^2 + 1)$$

סדר שני:

$$f_{yy} = e^{xy} \cdot x \cdot (x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy}, \quad f_{xx} = e^{xy} \cdot y \cdot (xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{xy} \cdot x \cdot (xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy}$$

**(11) סדר ראשון :**

$$f_y(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y), \quad f_x(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x)$$

**סדר שני :**

$$, f_{yy} = e^{x+y} \cdot (x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2) \cdot e^{x+y}, \quad f_{xx} = e^{x+y} \cdot (x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2) \cdot e^{x+y}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{x+y} \cdot (x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y}$$

**(12) סדר ראשון :**

$$f_y(x, y) = e^{-x^2-y^2} (4y - 2x^2y - 4y^3), \quad f_x(x, y) = e^{-x^2-y^2} (2x - 2x^3 - 4xy^2)$$

**סדר שני :**

$$, f_{xx} = e^{-x^2-y^2} (-2x) \cdot (2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$, f_{yy} = e^{-x^2-y^2} (-2y) \cdot (4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{-x^2-y^2} (-2y) \cdot (2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

**(13) סדר ראשון :**

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad f_x(x, y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

**סדר שני :**

$$, f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad f_{xx} = \frac{2x(1+x^2+y^2) + 2x \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{0 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

**(14) סדר ראשון :**

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

**סדר שני :**

$$, f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

**(15) ראה סרטון.**

$$f_{xy}(1,1) = -2 \quad \mathbf{(16)}$$

$$f_{xy}(1,1) = 1 \quad \mathbf{(17)}$$

$$f_{xy}(1,1) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \quad \mathbf{(18)}$$

**(19) הוכחה.**

$$f_z = 4, f_y = -2, f_x = -1 \quad (20)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{4e}, f_{yy} = \frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e}\right), f_{xx} = \frac{1}{4} \quad (21)$$

סדר ראשון: (22)

$$f_y(x, y) = -2x^2y + 10, f_x(x, y) = 8x - 2xy^2 + 4$$

סדר שני:

$$f_{xy} = f_{yx} = -4xy, f_{yy} = -2x^2, f_{xx} = 8 - 2y^2$$

סדר ראשון: (23)

$$f_y(x, y) = x^4 \cdot \frac{1}{y}, f_x(x, y) = 4x^3 \ln y$$

סדר שני:

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{4x^3}{y}, f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}, f_{xx} = 12x^2 \ln y$$

סדר ראשון: (24)

$$f_z(x, y, z) = xy \cdot 1, f_y(x, y) = xz \cdot 1, f_x(x, y, z) = yz \cdot 1$$

סדר שני:

$$f_{yz} = x \cdot 1, f_{xz} = y \cdot 1, f_{xy} = f_{yx} = z \cdot 1, f_{zz} = 0, f_{yy} = 0, f_{xx} = 0$$

## מתמטיקה ב

פרק 10 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים ..... 108

## קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

### שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-8, מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

(9) נתון משטח  $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$ . מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה (1, 2, 3) למישור  $-2x - 2y + z = 0$ , וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

- 12** יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק אומד את הביקוש  $Q_1$  למחשבון בארץ, ואת הביקוש  $Q_2$  למחשבון בסין, על ידי:  $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$ ,  $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$ . כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים,  $P_1$  ו-  $P_2$ , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

- 13** נתונה הפונקציה  $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$ .
- א. הוכיחו שהנקודה  $(0, 0)$  היא נקודה קריטית.
- ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של  $a$  הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכלף, או שלא ניתן לדעת.

**14** מצאו שני מספרים,  $b > a$ , כך ש-  $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$  יהיה מקסימלי.

### תשובות סופיות

- 1**  $(-0.5, 1)$  אוכלף;  $(1.5, -3)$  מינימום.
- 2**  $(1, 2)$  מינימום;  $(-1, -2)$  מקסימום;  $(-1, 2)$ ,  $(1, -2)$  אוכלף.
- 3**  $(0, 0)$  אוכלף;  $(1, 1)$  מינימום.
- 4**  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  מינימום;  $(1, 0)$  מקסימום;  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, 0)$  אוכלף.
- 5**  $(0, 2)$  מקסימום.
- 6**  $(4, 4)$  מקסימום.
- 7**  $(-0.5, 4)$  מקסימום.
- 8** אין נקודות קריטיות.
- 9**  $z = 4$ ,  $z = 3$
- 10** רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- 11** מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר  $(1/3, 4/3, 10/3)$ .
- 12**  $P_1 = 10\$$ ,  $P_2 = 12\$$  רווח מקסימלי \$288.
- 13** א. שאלת הוכחה. ב. עבור  $a = 2$ ,  $a = -2$ , לא ניתן לדעת;  $a > 2$ ,  $a < -2$  אוכלף;  $-2 < a < 2$  מינימום.
- 14**  $a = -6$ ,  $b = 4$

## מתמטיקה ב

פרק 11 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ.....110

## קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

### שאלות

בשאלות 1-4 מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{xy\} \text{ s.t. } x + 3y = 12 \text{ , כאשר } x, y > 0 \quad (5)$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{2x + y\} \text{ s.t. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \text{ , כאשר } x, y \geq 0 \quad (6)$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12 \quad (7)$$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$\text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \text{ , מצאו את הנקודות} \quad (8)$$

שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$\text{מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר } 3x - 6y + 4 = 0 \quad (9)$$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0.$$

$$\text{רמז: מרחק הנקודה } (x_0, y_0) \text{ מהישר } ax + by + c = 0 \text{ , הוא } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- 10** מוישליה קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל,  $(x, y)$ , נתונה על ידי  $u(x, y) = \ln x + \ln y$ . מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח. מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת  $\ln 16$ , והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסחו ופתרו את בעיית מוישליה.
- 11** דני קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל  $(x, y)$  נתונה על ידי  $u(x, y) = xy$ . מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח. לדני תקציב של 12 ש"ח. נסחו ופתרו את בעיית דני.
- 12** עקומת התמורה בין מנגו,  $(x)$ , ואננס,  $(y)$ , היא  $x^2 + y^2 = 13$ . לדני תועלת  $f(x, y) = 4x + 6y$ . דני מחפש את הסל (אננס, מנגו)  $(x, y)$  על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסחו ופתרו את הבעיה.
- 13** ליצרן פונקציית ייצור  $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$ . המחירים ליחידת  $K$  ו- $L$  הם  $P_K = 2, P_L = 1$ . היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף  $(K^*, L^*)$ , המביא למינימום את העלות. נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).
- 14** נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ  $\max\{u(x, y)\} \text{ s.t. } p_1x + p_2y = I$ . תהי  $(x^*, y^*)$  נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה. הוכיחו כי כופל לגראנז'  $\lambda$  מקיים  $\lambda = \frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I}$  בנקודת הפתרון של הבעיה.

## תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad (1)$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad (2)$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3)$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad (4)$$

$$\max(6, 2) \quad (5)$$

$$\max(9, 36) \quad (6)$$

$$(6, 2) \quad (7)$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad (8)$$

$$7 / \sqrt{45} \quad (9)$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad (10)$$

$$\max(6, 2) \quad (11)$$

$$\max(2, 3) \quad (12)$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (13)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (14)$$

## מתמטיקה ב

פרק 12 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות ..... 113
2. חקירת מערכת משוואות ליניאריות (עם פרמטר) ..... 118
3. פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות ..... 121
4. שימושים של מערכת משוואות ליניאריות ..... 124

## פתרון מערכת משוואות ליניאריות

## שאלות

(1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

$$\begin{array}{llll} 2x+y=4 & x-y=0 & x-4y=-7 & x+10y=11 \\ x+y=3 & 2x+y=3 & x-y=-1 & 2x-2y=0 \end{array} \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

(2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{llll} x=3 & 2x+y+z=3 & x-4y+z=-7 & x+10y=11 \\ 2x+y=4 & x-z=0 & x-y=-1 & 2x-2=0 \\ z+t=8 & & x+y+z=5 & x+y=3 \end{array} \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

בשאלות 3-5 בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{(4)} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \text{(3)} \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

(6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

$$\begin{array}{l} \text{א.} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{ב.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{ג.} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

בשאלות 7-15 הביאו את המטריצות הבאות לצורה מדורגת  
 (בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה מדורגת קנונית):

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (10) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (14) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$$

\* בשאלה 15 יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה  $\mathbb{C}$  ופעם מעל השדה  $\mathbb{R}$ .

בשאלות 16-27 פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= 20 \\ 3x + 6y &= 15 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 5x - 4y &= -3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 32 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 8x - 4y &= 10 \\ -6x + 3y &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 4x + 6y + 16z &= 8 \\ 3x + 2y + 17z &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -11 \\ 2x + 3y - z &= -5 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 4x - 7y &= 0 \\ 8x - 14y &= 2 \\ -16x + 28y &= 4 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 2x + y &= -1 \\ x - y &= -2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2t &= 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t &= 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t &= 8 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -9x + 6y &= -3 \\ 6x - 4y &= 2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ 2x + 8y + 12z &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

28) פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל השדה  $F$ :

$$z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 = 1 + 4i$$

$$iz_1 + z_2 + (1+i)z_3 = 2 + i$$

$$(-1+3i)z_1 + (3-i)z_2 + (2+4i)z_3 = 5 - i$$

א.  $F = \mathbb{R}$

ב.  $F = \mathbb{C}$

## תשובות סופיות

(1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ א.} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} (5) \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} (3)$$

 $R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1$  ג.     $R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1$  ב.     $R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2$  א. (6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (10)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$F=\mathbb{R}$                        $F=\mathbb{C}$

$$\phi \quad (18) \quad (x, y) = (5 - 2t, t) \quad (17) \quad (x, y) = (1, 2) \quad (16)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (20) \quad \phi \quad (19)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (22) \quad (x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (21)$$

$$(x, y) = \left( \frac{1+2t}{3}, t \right) \quad (24) \quad \phi \quad (23)$$

$$\phi \quad (26) \quad (x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (25)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (27)$$

$$(z_1, z_2, z_3) = ((-1+i)t + 1 + i, 3, t) \quad \text{ב} \quad (28) \quad (z_1, z_2, z_3) = (2, 3, -1) \quad \text{א} \quad (28)$$

$F=\mathbb{C}$                        $F=\mathbb{R}$

## חקירת מערכת משוואות ליניאריות (עם פרמטר)

### שאלות

בשאלות 1-6 מצאו לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \quad (2) \\ kx+y+z=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 5x-7y+(k^2+3)z=k^2+1 \quad (1) \\ 3x-y+(k+3)z=3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ x+2y-z=0 \quad (4) \\ 5x+(1-k)y+k^2z=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x+2ky+z=0 \\ 3x+y+kz=2 \quad (3) \\ x+9ky+5z=-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+ky+3z=2 \\ kx-y+z=4 \quad (6) \\ 3x+y+(2+k)z=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} kx-y=1 \\ (k-2)x+ky=-2 \quad (5) \\ (k^2-1)z=9 \end{array}$$

בשאלות 7-9 מצאו לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} 2x-3y+z=1 \\ 4x+(k^2-5k)y+2z=k \quad (8) \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x+ky=3 \\ (k+3)x+2y=k^2+5 \quad (7) \\ 6x+3ky=7k^2+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x+4y-z=2 \\ kx-2y+z=-1 \\ x+8y-3z=k \\ 2x+6y-2z=0.5k+1 \end{array} \quad (9)$$

בשאלות 10-12 מצאו לאילו ערכים של  $a$  ושל  $b$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x+y-z+t=1 \\ ax+y+z+t=b \quad (12) \\ 3x+2y+at=1+a \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x+4y+az=-1 \\ x+2y+4z=-4 \\ x+2y-4z=0 \\ x+2y+6z=-2b \end{array} \quad \begin{array}{l} x+2y-4z=b \\ 7x-10y+16z=7 \quad (10) \\ 2x-ay+3z=1 \end{array} \quad (11)$$

$$x + az = 1$$

$$y + 2z = 2 \quad (13) \text{ נתונה מערכת המשוואות:}$$

$$bx + cy + dz = 3$$

- א. מצאו תנאי עבור  $a, b, c, d$ , כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.  
 ב. מצאו תנאי עבור  $b, c, d$ , כך שלכל  $a$ , למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

$$(14) \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

- א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.  
 ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.  
 ג. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת:  
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.  
 ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.  
 ה. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון שבו  $z = 0$ .  
 ו. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון יחיד שבו  $z = 0$ .  
 ז. מצאו עבור איזה ערך של  $k$  פתרון של המשוואה השלישית הוא  $(1, 2, 3)$ .  
 האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.  
 ח. מצאו לאיזה ערך של  $k$ , הוא הפתרון היחיד של המערכת.

$$(15) \text{ נתונות המשוואות של 3 מישורים: } \begin{cases} 3x + my = 3 \\ mx + 2y - mz = 1 \\ -x + mz = -1 \end{cases}$$

- בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של  $m$  שלוש המישורים:  
 א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).  
 ב. לא נפגשים באף נקודה.  
 ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).  
 ד. האם קיים ערך של  $m$  עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?

## תשובות סופיות

(1) 1.  $k \neq 1, k \neq -2$  .2  $k = 1$  .3  $k = -2$

(2) 1.  $k \neq 1, k \neq -2$  .2  $k = -2$  .3  $k = 1$

(3) 1.  $k \neq -1, k \neq \frac{4}{7}$  .2  $k = \frac{4}{7}$  .3  $k = -1$

(4) 1.  $k \neq 1, k \neq -0.4$  .2  $k = 1, k = -0.4$

(5) 1.  $k \neq \pm 1, k \neq -2$  .2  $k = \pm 1, k = -2$

(6) 1.  $k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2$  .3  $k = -1, k = -3, k = 2$

(7) 1.  $k = -1$  .2  $k \neq \pm 1$  .3  $k = 1$

(8) 1.  $k = 3$  .2  $k \neq 3$  .3

(9) 1.  $k \neq 1$  .2  $k = 1$

(10) 1.  $a \neq 2$  .2  $a = 2, b \neq -3$  .3  $a = 2, b = -3$

(11) 1.  $a \neq -6$  או  $b \neq 2.5$  .2  $a = -6, b = 2.5$  .3

(12) 1.  $a = 2, b \neq 2$  .2  $a \neq 2$  או  $a = 2, b = 2$  .3

(13) א.  $ab + 2c \neq d$  .ב.  $b = 0, c = 1.5, d = 3$

(14) א.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix}$  .ב.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix}$

ג. 1.  $k \neq 2, k \neq -1$  .2  $k = -1$  .3  $k = 2$  .ד.  $(x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$

ה.  $k = \pm 2$  .ו.  $k = -2$  .ז.  $k = 2$ , לא. ח.  $k = -2$

(15) א.  $m \neq 0, -2, 3$  .ב.  $m = -2, 3$  .ג.  $m = 0$  .ד. לא.

## פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות

### שאלות

$$(1) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ 4x - 2y + 5z = 12 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(2) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(3) \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y - z = k \\ 2x + my + z = 3 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

- א. מצאו את ערכי  $m$ , עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.  
 ב. עבור ערך  $m$  שנמצא ב-א, מצאו את ערכי  $k$ , עבורם למערכת פתרון.  
 ג. עבור ערכי  $m, k$  שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

(4) נתון שהחמישייה  $(4t - 2s + 4, -t + s, 2, t, s)$  מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

- א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.  
 ב. החמישייה  $(4, 0, 2, 0, 0)$ , היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.  
 ג. החמישייה  $(4, 0, 2, 1, 1)$ , היא פתרון של המערכת הנתונה.  
 ד. לכל  $a$  ממשי, החמישייה  $(4a, 0, 2a, 0, 0)$  אינה פתרון של המערכת הנתונה.  
 ה. החמישייה  $(4t - 2s, -t + s, 0, t, s)$ , היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.  
 ו. החמישייה  $(0, 1, 0, 1, 2)$ , היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.  
 ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

$$(5) \quad \begin{cases} 3x + my = 0 \\ mx + 2y - mz = 0 \\ -x + mz = 0 \end{cases}$$

נתונה המערכת ההומוגנית

יהי  $W$  אוסף הפתרונות של המערכת.  
 עבור אילו ערכים של הקבוע  $m$  (אם בכלל)  $W$  הוא:  
 א. נקודה (מצאו נקודה זו).  
 ב. ישר (מצאו ישר זה).  
 ג. מישור (מצאו מישור זה).

$$(6) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$$

נסמן ב- $A'$  את הצורה המדורגת של  $A$ .  
 ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.  
 מצאו את  $A$ .

## תשובות סופיות

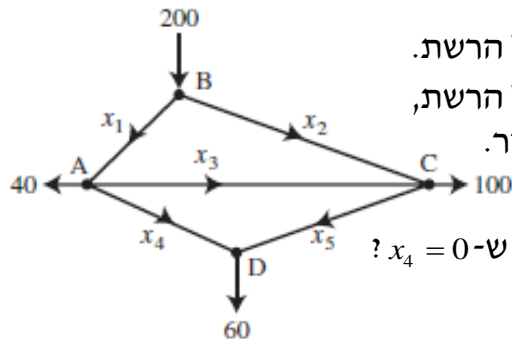
- (1) פתרון כללי של המערכת  $(4 - \frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t + 2, t)$ .
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא  $(-\frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t, t)$ .
- (2) למערכת פתרון יחיד  $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ .
- למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד  $(0, 0, 0)$ .
- (3) א.  $m = -3$     ב.  $k = -2$     ג. פתרון כללי של המערכת  $(x, y, z) = (t, t - 1, t)$ .
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא  $(t, t, t)$ .
- (4) א. הטענה לא נכונה.    ב. הטענה נכונה.    ג. הטענה לא נכונה.  
ד. הטענה לא נכונה.    ה. הטענה נכונה.    ו. הטענה לא נכונה.  
ז. הטענה לא נכונה.
- (5) א.  $m \neq 0, -2, 3$ . הנקודה היא  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .
- ב. אם  $m = 0$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(0, 0, 1)$ . אם  $m = 2$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(2, -1, 1)$ ,
- אם  $m = 3$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(3, -3, 1)$ .
- ג. אין ערכים של  $m$  עבורם נקבל מישור.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{pmatrix} \quad (6)$$

## שימושים של מערכת משוואות לינאריות

### שאלות

1) באיור שלהלן רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.



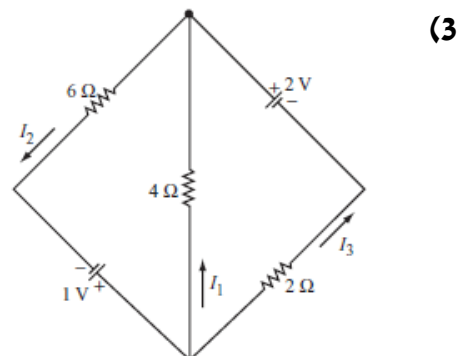
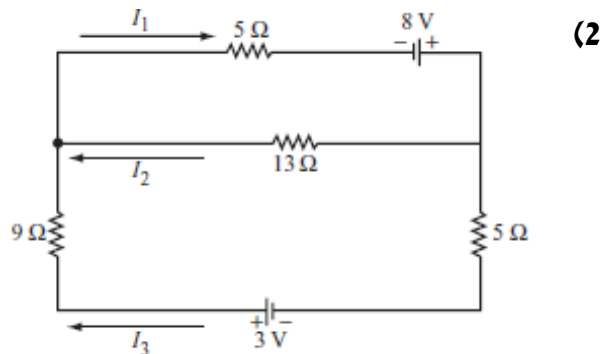
א. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

ב. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת,

אם ידוע שהכביש שהזרם שלו  $x_4$  סגור.

ג. מהו הערך המינימלי של  $x_1$ , אם ידוע ש- $x_4 = 0$ ?

בשאלות 2-3 מצאו את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):



\* בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות בנוגע מערכת משוואות לינאריות.

### תשובות סופיות

(1) א.  $x_3$  ו-  $x_5$  חופשיים.  $x_1 = 100 + x_3 - x_5$ ,  $x_2 = 100 - x_3 + x_5$ ,  $x_4 = 60 - x_5$ .

ב. חופשי.  $x_3$ .  $x_1 = 40 + x_3$ ,  $x_2 = 160 - x_3$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 60$ . ג. 40.

(2) א.  $I_1 = \frac{255}{317}$ ,  $I_2 = \frac{97}{317}$ ,  $I_3 = \frac{158}{317}$ .

(3)  $I_1 = -\frac{5}{22}$ ,  $I_2 = \frac{7}{22}$ ,  $I_3 = \frac{6}{11}$ .