

# מתמטיקה ב



## תוכן העניינים

1. פונקציה הממשית ..... (ללא ספר)
2. גבולות ..... (ללא ספר)
3. רציפות ..... (ללא ספר)
4. חישוב נגזרות ..... (ללא ספר)
5. נגזרת סתומה ..... 1
6. הכלל לופיטל ..... (ללא ספר)
7. חקירת פונקציה ..... (ללא ספר)
8. מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה ..... 3
9. בעיות מינימום מקסימום כלכליות ..... (ללא ספר)
10. האינטגרלים ..... (ללא ספר)
11. פונקציות של שני משתנים ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה ב

פרק 1 - פונקציה הממשית

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה ב

## פרק 2 - גבולות

### תוכן העניינים

1. הסבר כללי על חישוב גבול של פונקציה ..... (ללא ספר)
2. חישוב גבול של פונקציה בשיטת ההצבה ..... (ללא ספר)
3. חישוב גבול בשיטת הצמצום ..... (ללא ספר)
4. חישוב גבול בשיטת כפל בצמוד ..... (ללא ספר)
5. פונקציה השואפת לאינסוף ..... (ללא ספר)
6. איקס שואף לאינסוף ..... (ללא ספר)
7. הגבול של אויילר ..... (ללא ספר)
8. חישוב גבול של פונקציה לפי הגדרה ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה ב

פרק 3 - רציפות

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

## מתמטיקה ב

פרק 4 - חישוב נגזרות

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה ..... (ללא ספר)
2. נגזרת של פונקציה רציונלית ..... (ללא ספר)
3. נגזרת של פונקציה מעריכית ..... (ללא ספר)
4. נגזרת של פונקציה לוגריתמית ..... (ללא ספר)
5. נגזרת של פונקציה של  $X$  בחזקת פונקציה של  $X$  ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה ב

פרק 5 - נגזרת סתומה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## נגזרת סתומה

## שאלות

- (1) גזור את הפונקציה הסתומה:  $x^2 + y^5 - y = 1$ .
- (2) גזור את הפונקציה הסתומה:  $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$ .
- (3) גזור את הפונקציה הסתומה:  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ .
- (4) מצא את משוואת המשיק למעגל:  $x^2 + y^2 = 25$ , בנקודה  $(3, 4)$ .
- (5) מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה:  $xy^2 + y - x = xy$  דרך הנקודה  $(1, 2)$  הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (6) מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה:  $x^2 y + e^{y^2 - 4x} = \ln x + 1$  דרך הנקודה  $(1, 1)$  הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (7) מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה:  $\sqrt{xy + y} + x^2 y = xy^2$  דרך הנקודה  $(1, 2)$  הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (8) מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה:  $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$  דרך הנקודה  $(0, 2)$  הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (9) נתונה הפונקציה הסתומה:  $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$ .  
א. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה בהן  $y = 0$ .  
ב. מצא את משוואות הישרים המשיקים של גרף הפונקציה בנקודות שמצאת בסעיף א.
- (10) גזור את הפונקציה הסתומה:  $x^y - xy = 10$ .
- (11) גזור את הפונקציה הסתומה:  $x^y - y^x = 1$ .
- (12) נתונה פונקציה סתומה:  $xy - y^3 + x^2 - x = 0$ . מצא את ערך "y" בנקודה בה  $y = 1$ .

## תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0 \text{ : בתנאי , } y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0 \text{ : בתנאי , } y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \sqrt{y} \neq 1 \text{ : בתנאי , } y' = \frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6} \quad (7)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (8)$$

$$(0,0), (1,0) \text{ א.} \quad (9)$$

ב. משוואת המשיק ב- $(0,0)$  :  $y = -x$  , משוואת המשיק ב- $(1,0)$  :  $y = x - 1$

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0 \text{ : בתנאי , } y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (10)$$

$$x^y \cdot \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0 \text{ : בתנאי , } y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \cdot \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (11)$$

$$y'' = -1 \quad (12)$$

## מתמטיקה ב

פרק 6 - הכלל לופיטל

תוכן העניינים

1. כלל לופיטל - אפס חלקי אפס ..... (ללא ספר)
2. כלל לופיטל - אינסוף כפול אפס ..... (ללא ספר)
3. כלל לופיטל - משהו בחזקת משהו ..... (ללא ספר)
4. כלל לופיטל - אינסוף פחות אינסוף ..... (ללא ספר)

## מתמטיקה ב

### פרק 7 - חקירת פונקציה

#### תוכן העניינים

1. חקירת פונקציה ..... (ללא ספר)
2. חקירת פולינום ..... (ללא ספר)
3. חקירת פונקציה רציונלית ..... (ללא ספר)
4. חקירת פונקציה מעריכית ..... (ללא ספר)
5. חקירת פונקציה לוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. חקירת פונקציה עם שורשים ..... (ללא ספר)

## מתמטיקה ב

פרק 8 - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

תוכן העניינים

1. מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה.....3

## מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

---

### שאלות

בשאלות 7-1 מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות, בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

$$(-1 \leq x \leq 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2)$$

$$(-1 \leq x \leq 20) \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}(20 - x) \quad (3)$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right] \quad f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x < 1 \\ (x - 2)(x - 3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$(-5 \leq x \leq 1) \quad f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-5 < x < -1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x + 1} \quad (6)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = x^x \text{ בתחום } x > 0. \quad (8)$$

א. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. דני טוען שהפונקציה הפיכה בקטע  $(0, 0.5)$ . הוכיחו שדני טועה.

$$\text{מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה } f(x) = x^2 + |\ln x| \quad (9)$$

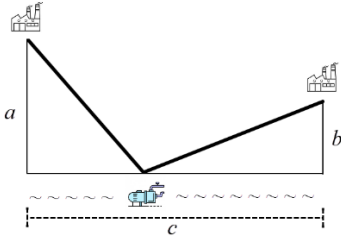
$$\text{מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של } f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x \text{ ב-} \mathbb{R}. \quad (10)$$

הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.

**(11)** מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של  $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ ,

ב-  $\mathbb{R}$  וב-  $[1, 3]$ .

הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.



**(12)** לחברת מי עדן יש שני מפעלים.

האחד מרוחק  $a$  ק"מ מהמעיין.

השני מרוחק  $b$  ק"מ מהמעיין.

המרחק האופקי בין המפעלים הוא  $c$  ק"מ.

החברה מעוניינת להקים תחנת שאיבה במעיין

בין שני המפעלים. התחנה מחוברת למפעלים.

מהו האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך?

הראו שהאורך המינימלי מתקבל כאשר הזווית בין כל צינור למעיין שוות.

**(13)** גליל חסום בכדור.

הוכיחו, מבין כל הגלילים האפשריים הגדול ביותר בנפחו הוא זה שגובהו פי

$\sqrt{2}$  מרדיוס הבסיס שלו.

## תשובות סופיות

- (1)  $(-1, -7)$  מינימום מוחלט,  $(3, 9)$  מקסימום מוחלט.
- (2)  $(-1, 0)$  מינימום מוחלט,  $(5, 0)$  מינימום מוחלט,  $(2, 3)$  מקסימום מוחלט.
- (3)  $(0, 0)$  מינימום מוחלט,  $(20, 0)$  מינימום מוחלט,  $(8, 48)$  מקסימום מוחלט.
- (4)  $(2.5, -0.25)$  מינימום מוחלט,  $(1, 2)$  מקסימום מוחלט.
- (5)  $(-3, 1)$  מינימום מוחלט,  $(-5, 17)$  מקסימום מוחלט.
- (6)  $(-2, -4)$  מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.
- (7) אין מקסימום ואין מינימום מוחלטים.
- (8) א. אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט הוא  $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ . ב. שאלת הוכחה.
- (9) אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט  $0.5(1 + \ln 2)$ .
- (10) מקסימום מוחלט 1, מינימום מוחלט  $\frac{1}{2}$ .
- (11) ב-  $\mathbb{R}$ :  $(3, 0)$ ,  $(1, 0)$  מינימום מוחלט, מקסימום מוחלט לא קיים.
- ב-  $[1, 3]$ :  $(3, 0)$ ,  $(1, 0)$  מינימום מוחלט,  $(2, 1)$  מקסימום מוחלט.
- (12) האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך הוא  $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$ .
- (13) שאלת הוכחה.

## מתמטיקה ב

פרק 9 - בעיות מינימום מקסימום כלכליות

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)
2. בעיות מינימום ומקסימום כלכליות במשתנה יחיד ..... (ללא ספר)

## מתמטיקה ב

### פרק 10 - האינטגרלים

#### תוכן העניינים

1. אינטגרלים לא מסויימים ..... (ללא ספר)
2. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... (ללא ספר)
3. אינטגרלים של פונקציות רציונליות ..... (ללא ספר)
4. האינטגרל המסויים ..... (ללא ספר)
5. חישוב שטחים ..... (ללא ספר)
6. אינטגרציה בחלקים ..... (ללא ספר)

## מתמטיקה ב

פרק 11 - פונקציות של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים ..... (ללא ספר)
2. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגרנג'י) ..... (ללא ספר)
3. קיצון של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה ..... (ללא ספר)
4. פונקציות הומוגניות ..... (ללא ספר)