מתמטיקה ב

תוכן העניינים

מתמטיקה ב

פרק 1 - פונקציות של שני משתנים

תוכן העניינים

מבוא לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D.

1) $f(x,y)=\sqrt{5-x^2-y^2}+\ln(4y-x^2)$

2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

3) $f(x,y)=\sqrt{-x^2+y^2+1}+\frac{x+y}{x-y}$

4) $g(x,y)=\sqrt{x+4y}+\sqrt{x-4y}$

5) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+4y}}+\frac{1}{\sqrt{x-4y}}$

6) $h(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y+4}}$

7) $f(x,y)=e^{xy}\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-4}$

8) $z(x,y)=\frac{4}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$

9) $z(x,y)=\ln\left(\frac{x-4y}{x+4y}\right)$

10) $f(x,y)=\ln\left[x\ln(y-4x)\right]$

11) $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$ (ענו על סעיף א בלבד)

תשובות סופיות

1) $D=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{1}{4}x^2\le y\le\sqrt{5-x^2}\right\}$

2) $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\ ,\ x>0\}$

3) $D=\{(x,y)\,|\,x^2-y^2\le 1\ ,\ y\ne x\}$

4) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x\le y\le\frac{1}{4}x\right\}$

5) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\right\}$

6) $D=\{(x,y)\,|\ -4\le y\le x^2-4\ ,\ x\ge 0\}$

7) $D=\{(x,y)\,|\ x^2+y^2=4\}$

8) $D=\{(x,y)\,|\ |x|+|y|<1\}$

9) $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{4}x<y<-\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\right\}$

10) $D=\{(x,y)\,|\,[x<0 \text{ and } 4x<y<4x+1] \text{ or } [x>0 \text{ and } y>4x+1]\}$

11) $D=\{(x,y,z)\,|\,x>-4, y>1, z>0\}$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות **1-6**, מצאו תחום הגדרה, ושרטטו אותו ואת מפת קווי הגובה/רמה.

1) $f(x,y)=\frac{y}{x}$

2) $f(x,y)=\ln x+\ln y$

3) $f(x,y)=x^2+y^2$

4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

5) $f(x,y)=\ln(x^2-y)$

6) $f(x,y)=x\sqrt{y}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **7-10** שרטטו מפת קווי גובה:

7) $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$

8) $f(x,y)=e^{x-y}$

9) $f(x,y)=2\ln x+\ln y$

10) $f(x,y)=\min\{3x,y\}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **11-13**, שרטטו את קו הגובה k:

11) $f(x,y)=(x-y)^2$ $\quad(k=0,4)$

12) $f(x,y)=\min\left\{y-x^2,x+y\right\}$ $\quad(k=0,2)$

13) $f(x,y)=\begin{cases}x^2+3x-y-3 & x^2\ge y\\ -x^2+3x+y-3 & x^2<y\end{cases}$ $\quad(k=1)$

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} x^2-y & x\le 1 \\ 2x+y & x>1 \end{cases}$.

א. שרטטו את קו הגובה $f(x,y)=0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x,y)=C$ הוא קו רציף?
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שווה ערך.

תשובות סופיות

1) $x\neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .

2) $x>0, y>0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

3) כל המישור.

4) $x^2+y^2\le 1$, עיגול היחידה.

5) $y<x^2$

6) $y\ge 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר GooL.co.il

משטחים מפורסמים

שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות **1-3**:

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$

2) $z=5x^2+1.25y^2$

3) $20x^2+45y^2=180+36z^2$

4) זהו ושרטטו את המשטחים הבאים:

א. $z=4x^2+y^2+1$

ב. $z=3-x^2-y^2$

5) זהו כל אחד מהמשטחים הבאים:

א. $25x^2+100y^2+4z^2=100$

ב. $25x^2+4y^2-50x-16y-100z+41=0$

ג. $x^2+4y^2-4z^2+80z-404=0$

6) מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2+y^2+z^2=169$ לבין המשטח $z=12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. זהו את המשטח $2x^2+2y^2+2z^2-16x-4y+40z+206=0$.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח הנ"ל עם הישר
$\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+14}{2}$.

8) מצאו את החיתוך בין שני המשטחים $x^2+y^2+(z-10)^2=24$,
ו- $x^2+y^2+z^2=64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

9) ענו על הסעיפים הבאים:

א. זהו את המשטח $36z^2+4x^2-9y^2=36$ ושרטטו אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח מסעיף א'.

- **להלן נספח עם סיכום של כל המשטחים הנפוצים.**

תשובות סופיות

1) אליפסואיד.

2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.

3) היפרבולואיד חד יריעתי.

4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.

5) א. אליפסואיד.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.

ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.

6) החיתוך הוא מעגל $x^2+y^2=25$ שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.

7) א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.

נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12),\ B(\frac{59}{5},-\frac{2}{9},-\frac{112}{9})$.

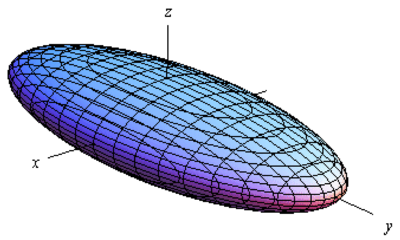
8) החיתוך הוא המעגל $x^2+y^2=15$ שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.

9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה-y.

ב. $\ell_1:(x,y,z)=(3t,2t,1)\quad \ell_2:\ (x,y,z)=(3,2t,t)$

נספח – משטחים ממעלה שנייה

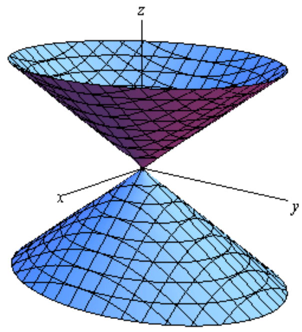
אליפסואיד



<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

<u>תיאור</u>: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ״ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

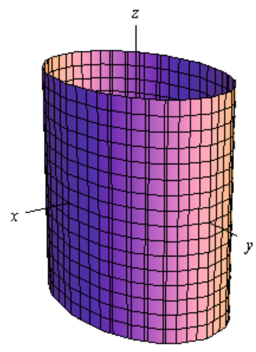


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

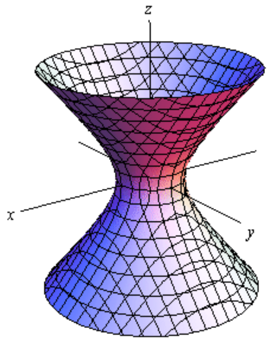


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ״ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואה בלבד

היפרבולואיד חד-יריעתי

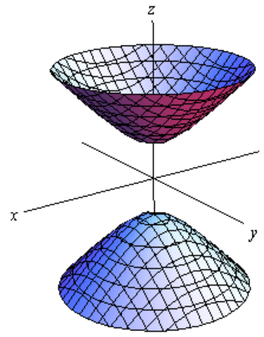


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא אליפסה ; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים

היפרבולואיד דו-יריעתי

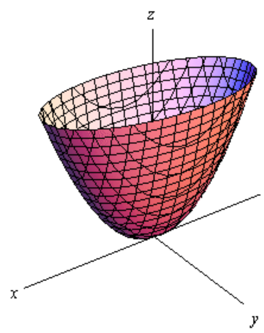


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

<u>תיאור</u>: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים

פרבולואיד אליפטי



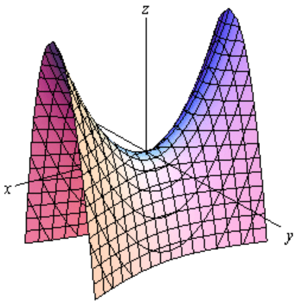
<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית) ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$

פרבולואיד היפרבולי



<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

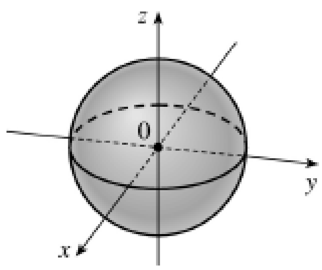
<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x.

החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

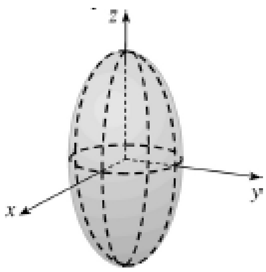
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$

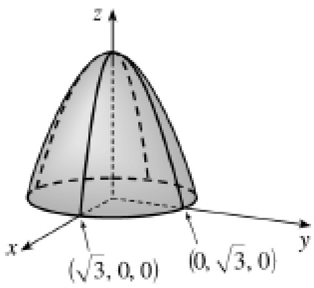
דוגמאות שונות



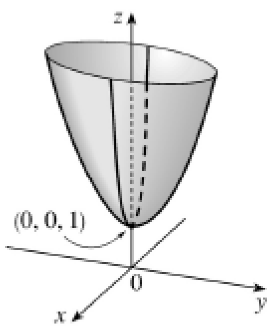
$x^2+y^2+z^2=1$



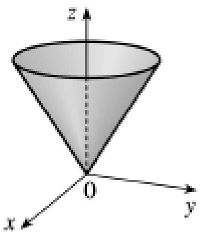
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



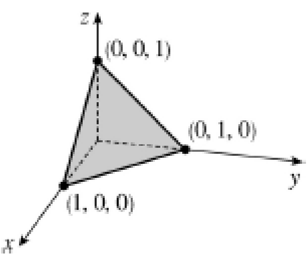
$z=3-x^2-y^2$



$z=4x^2+y^2+1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$x+y+z=1$

נוסחאות – גבולות

	$x \to -\infty$	$x \to 0$	$x \to \infty$
$y=\frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty}=0$	$\frac{1}{0^+}=\infty,\ \frac{1}{0^-}=-\infty$	$\frac{1}{\infty}=0$
$y=e^x$	$e^{-\infty}=0$	$e^0=1$	$e^\infty=\infty$
$y=\ln x$	$---$	$\ln(0^+)=-\infty$	$\ln(\infty)=\infty$
$y=a^x, a>1$	$a^{-\infty}=0$	$a^0=1$	$a^\infty=\infty$
$y=a^x, 0<a<1$	$a^{-\infty}=\infty$	$a^0=1$	$a^\infty=0$
$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$---$	e	1
$y=\sqrt{x}$	$---$	$\sqrt{0^+}=0$	$\sqrt{\infty}=\infty$
$y=\sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0}=0$	$\sqrt[3]{\infty}=\infty$

Defined Limits:

$\infty\cdot\infty=\infty$, $\infty(-\infty)=-\infty$, $\infty+\infty=\infty$, $\infty\pm a=\infty$, $\infty\cdot(\pm a)=\pm\infty$, $\infty/(\pm a)=\pm\infty$

Undefined Limits:

$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$

מתמטיקה ב

פרק 2 - נגזרות חלקיות

תוכן העניינים

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות **1-6** חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה:

1) $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

2) $f(x,y)=x^5\ln y$

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ (רק f_x).

4) $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot(2x+3y)$

5) $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

6) $f(x,y,z)=xy^2z^3$

7) נתון: $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכיחו כי $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$.

8) נתון: $f(x,y,z)=e^x\left(y^2-\dfrac{1}{z}\right)$.

חשבו: $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

הערת סימון

$$\boxed{f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\ \ ;\ \ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2}$$

תשובות סופיות

1) $f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2$ $\quad f_y = -6x^2y + 3$

2) $f_x = 5x^4 \ln y$ $\quad f_y = \dfrac{x^5}{y}$

3) $f_x = 2x\dfrac{y^4\left(\sqrt{y} + 5\ln y\right)}{y^2 + 5y + y^y}$

4) $f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3$ $\quad f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2$

5) $f_x = \dfrac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{\left(x + y^2\right)^2}$ $\quad f_y = \dfrac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{\left(x + y^2\right)^2}$

6) $f_x = y^2z^3$ $\quad f_y = 2xyz^3$ $\quad f_z = 3xy^2z^2$

7) שאלת הוכחה.

8) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0, -1, \dfrac{1}{2}\right) = -1, \ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0, -1, \dfrac{1}{2}\right) = -2, \ \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0, -1, \dfrac{1}{2}\right) = 4$

הערת סימון

$$f = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{array}$$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות **1-13** חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

1) $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

2) $f(x,y)=x^4\ln y$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

4) $f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x+y)$

5) $f(x,y)=xy(x-y)$

6) $f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

7) $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$

8) $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$

9) $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

10) $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

11) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

12) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

13) $f(x,y,z)=xyz$

14) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$.

15) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

16) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

17) נתון: $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\ln y+x}$.

חשבו: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.

הערת סימון

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2 \\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22} \\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21} \end{array}$$

תשובות סופיות

1) $f_x = 8x - 2xy^2 + 4$, $f_{xx} = 8 - 2y^2$, $f_y = -2x^2y + 10$

$f_{yy} = -2x^2$, $f_{xy} = -4xy$, $f_{yx} = -4xy$

2) $f_x = 4x^3 \ln y$, $f_{xx} = 12x^2 \ln y$, $f_y = \dfrac{x^4}{y}$

$f_{yy} = -\dfrac{x^4}{y^2}$, $f_{xy} = \dfrac{4x^3}{y}$, $f_{yx} = \dfrac{4x^3}{y}$

3) $f_x = 3x^2 - 6y$, $f_{xx} = 6x$, $f_y = 3y^2 - 6x$

$f_{yy} = 6y$, $f_{xy} = 6$, $f_{yx} = -6$

4) $f_x = 3x^2 + 3 - 3y$, $f_{xx} = 6x$, $f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y$

$f_{yy} = 6y - 6$, $f_{xy} = -3$

5) $f_x = 2xy - y^2$, $f_{xx} = 2y$, $f_y = x^2 - 2xy$

$f_{yy} = -2x$, $f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y$

6) $f_x = 2\left[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0\right]$

$f_y = 2\left[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0\right]$

$f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$, $f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0]$

$f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$

7) $f_x = e^{xy}\left(xy + y^2 + 1\right)$, $f_y = e^{xy}\left(x^2 + xy + 1\right)$

$f_{xx} = e^{xy} \cdot y\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(y + 0 + 0\right) \cdot e^{xy}$

$f_{yy} = e^{xy} \cdot x\left(x^2 + xy + 1\right) + \left(0 + x\right) \cdot e^{xy}$

$f_{xy} = e^{xy} \cdot x\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(x + 2y\right) \cdot e^{xy}$

8) $f_x = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right)$, $f_y = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right)$

$f_{xx} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + \left(2x + 2\right)e^{x+y}$

$f_{yy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right) + \left(2y + 2\right)e^{x+y}$

$f_{xy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + 2y \cdot e^{x+y}$

9) $f_x = e^{-x^2-y^2}\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right)$, $f_y = e^{-x^2-y^2}\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right)$

$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(-2x)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(2 - 6x^2 - 4y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right) + \left(4 - 2x^2 - 12y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(-4x \cdot 2y\right)e^{-x^2-y^2}$

(10 $f_x=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$ $\quad f_y=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$

$f_{xy}=\frac{2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$ $\quad f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)}$

(11 $f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}$ $\quad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$ $\quad f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ $\quad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

(12 $f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}$ $\quad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}$ $\quad f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$

$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$ $\quad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$

(13 $f_x=yz$ $\quad f_{xx}=0$ $\quad f_{xy}=z$ $\quad f_{xz}=y$ $\quad f_y=xz$

$f_{yx}=z$ $\quad f_{yy}=0$ $\quad f_{yz}=x$ $\quad f_z=xy$ $\quad f_{zx}=y$

$f_{zy}=x$ $\quad f_{zz}=0$

(14 -2

(15 -1

(16 $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(17 $\frac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16}$

מתמטיקה ב

פרק 3 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

1) נתון: $z=\ln(x^2-y^2)$, $x=2u-v,\ \ y=u^2+v^3$.
חשבו: $z_u\,,\ z_v$.

2) נתון: $z=e^{u-v}$, $v=4t+k\,,\ u=t^2+4m$.
חשבו: $z_t,\ z_m,\ z_k$.

3) נתון: $z=f(x^2-y^2)$.
הוכיחו: $y\cdot z_x+x\cdot z_y=0$.

4) נתון: $z=f(xy)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x-y\cdot z_y=0$.

5) נתון: $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x+y\cdot z_y=0$.

6) נתון: $z=f(x-y,y-x)$.
הוכיחו: $z_x+z_y=0$.

7) נתון: $w=f(x-y,y-z,z-x)$.
הוכיחו: $w_x+w_y+w_z=0$.

8) נתון: $z=y\cdot f(x^2-y^2)$.
הוכיחו: $\frac{1}{x}z_x+\frac{1}{y}z_y=\frac{z}{y^2}$.

9) נתון: $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

הוכיחו: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$.

תשובות סופיות

1) $z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2}(-2y) \cdot 2u$

2) $z_t = e^{u-v}(1) \cdot 2t + e^{u-v}(-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1}(1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v}(-1) \cdot 1$

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר: GooL.co.il

מתמטיקה ב

פרק 4 - פונקציות סתומות

תוכן העניינים

פונקציות סתומות

שאלות

1) מצאו את y', כאשר $x^2+y^5=xy+1$.
חשבו את $y'(0)$.

2) מצאו את $y'(1)$, כאשר $e^{xy}+x^2y^2=5x-4$.

3) מצאו את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x+\ln y=1$.

4) נתון $z^3-2xz+y=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$.
מצאו $z_{xx}(1,1)$.

5) נתונה משוואה $z^3-3xyz=4$ ונקודה $(2,1,-2)$.
מצאו:
א. $z_{xx}(2,1)$
ב. $z_{xy}(2,1)$
ג. $z_{yy}(2,1)$

תשובות סופיות

1) $y'(0)=\frac{1}{5}$

2) $y'(1)=5$

3) $y'(e)=-\frac{2}{e^2},\ y''(e)=\frac{6}{e^3}$

4) $z_x(1,1)=-16$

5) $z_{xx}(2,1)=z_{xy}(2,1)=1,\ z_{yy}(2,1)=4$

מתמטיקה ב

פרק 5 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-7**,
מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

1) $f(x,y)=8x^3+12xy+3y^2-18x$

2) $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

4) $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$

5) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

6) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

7) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-8x+y}{xy}$

8) נתון משטח $z=x^3+y^3-3xy+4$.
מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

9) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

10) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
עלות הייצור של מחשבון בארץ היא 6$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא 8$.
מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2
למחשבון בסין, על ידי: $Q_2=144+16P_1-24P_2$, $Q_1=116-30P_1+20P_2$.
כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2,
על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

11) נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2+axy$.

א. הוכיחו שהנקודה $(0,0)$, היא נקודה קריטית.

ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a ,
הנקודה מסעיף א׳ היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

תשובות סופיות

1) $(-0.5,1)$ אוכף; $(1.5,-3)$ מינימום.

2) $(1,\ 2)$ מינימום; $(-1,-2)$ מקסימום; $(-1,\ 2)$, $(1,-2)$ אוכף.

3) $(0,0)$אוכף; $(1,1)$ מינימום.

4) $(-1,\ -1)(-1,\ 1)$ מינימום; $(1,\ 0)$ מקסימום; $(1,\ -1),(1,1),(-1,\ 0)$ אוכף.

5) $(0,\ 2)$ מקסימום.

6) $(4,\ 4)$ מקסימום.

7) $(-0.5,\ 4)$ מקסימום.

8) $z=3,\quad z=4,$

9) רוחב 4 ס״מ , אורך 4 ס״מ , גובה 2 ס״מ.

10) $P_2=12\$$, $P_1=10\$$, רווח מקסימלי $288\$$.

11) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a=-2,\ a=2$, לא ניתן לדעת;
$a<-2,\ a>2$ אוכף; $-2<a<2$ מינימום.

מתמטיקה ב

פרק 6 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות בשאלות **1-4**, בכפוף לאילוץ הנתון:

(1 $2x^2+3xy=1-2y^2 \qquad f(x,y)=x^2+y^2;$

(2 $x^2+y^2=1 \qquad f(x,y)=x^2-y^2;$

(3 $x^2+y^2=13 \qquad f(x,y)=4x+6y;$

(4 $x^2+2y^2=6 \qquad f(x,y)=x^2y;$

(5 נתונה בעיית הקיצון $x+3y=12 \quad s.t. \quad \max\{xy\}$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

(6 נתונה בעיית הקיצון $\sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \quad s.t. \quad \max\{2x+y\}$, כאשר $x,y\geq 0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

(7 מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x+3y=12$,
מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8 מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2+3xy=1-2y^2$, מצאו את הנקודות
שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן
מראשית הצירים הוא מקסימלי.

(9 מוישל'ה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו-y ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל, (x,y), נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.
מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
מוישל'ה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
נסחו ופתרו את בעיית מוישל'ה.

10) דני קונה בשוק x ק״ג מלפפונים ו- y ק״ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל (x,y) נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.
מחיר ק״ג מלפפונים הוא 1 ש״ח, ומחיר ק״ג עגבניות 3 ש״ח.
לדני תקציב של 12 ש״ח.
נסחו ופתרו את בעיית דני.

11) עקומת התמורה בין מנגו, (x), ואננס, (y), היא $x^2+y^2=13$.
לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.
דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) = (x,y), על עקומת התמורה,
המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
נסחו ופתרו את הבעיה.

12) ליצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$.
המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K=2,\ P_L=1$.
היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף $\left(K^*,L^*\right)$,
המביא למינימום את העלות.
נסחו את בעיית היצרן (אל תפתרו).

תשובות סופיות

1) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max(\pm1,\mp1)$

2) $\min(\pm1,0)$ $\max(0,\pm1)$

3) $\min(-2,-3)$ $\max(2,3)$

4) $\min(\pm2,-1)$ $\max(\pm2,1)$

5) $\max(6,2)$

6) $\max(9,36)$

7) $(6,2)$

8) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max(\pm1,\mp1)$

9) $\min\left(\sqrt{32},\sqrt{8}\right)$

10) $\max(6,2)$

11) $\max(2,3)$

12) $\sqrt{K}+\sqrt{L}=100$; $\min\{2K+L\}$

מתמטיקה ב

פרק 7 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

שאלות

1) חשבן את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x,y)=3xy-6x-3y+7$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור בצורת משולש שקודקודיו הם $(0,5),(3,0),(0,0)$.

2) חשבן את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x,y)=x^2-3y^2-2x+6y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2,0),(2,2),(0,2),(0,0)$.

3) חשבן את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x,y)=x^2+2y^2-x$ בתחום R, כאשר R הוא העיגול $x^2+y^2\le 4$.

4) חשבן את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x+y\ge -3\,,\ x\le 0, y\le 0\}$.

5) חשבן את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ 3x\ge -y\}$.

תשובות סופיות

1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.

2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.

3) מקסימום מוחלט $33/4$. מינימום מוחלט $-1/4$.

4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.

5) מקסימום מוחלט $1+6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1-6\sqrt{10}$.

מתמטיקה ב

פרק 8 - פונקציות הומוגניות-משפט אוילר

תוכן העניינים

פונקציות הומוגניות

שאלות

בשאלות **1-3** בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאיזה סדר:

1) $f\left(x,y\right)=x^3\sqrt{y}+y^3\sqrt{x}$

2) $h\left(x,y\right)=\dfrac{\ln\left(e^{5x}\right)}{\sqrt[3]{ex^6-7y^6}}$

3) $f\left(x,y\right)=\ln\left(4^x\right)\cdot g\left[\dfrac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right]$

4) נתון כי $z(x,y)$ פונקציה הומוגנית מסדר 3.
בדקו האם הפונקציה $4-$ $f(x,y)=\dfrac{x}{y^4}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}}+\dfrac{1}{z(x,y)}$ הומוגנית.
במידה ואינה הומוגנית, השמיטו ממנה חלק, כך שתתקבל פונקציה הומוגנית.
מהו סדר ההומוגניות של הפונקציה במקרה זה?

5) מצאו עבור איזה ערך של הפרמטר α, כל אחת מהפונקציות הבאות הומוגניות.
כמו כן, מצאו את סדר ההומוגניות עבור ה- α שנמצאה.

א. $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^4y+xy^\alpha}{4x+10y}$

ב. $f\left(x,y\right)=\sqrt{\dfrac{y}{x}}\left(\ln\alpha x-\ln y\right)$

6) בתרגיל זה נדגים את התכונה הבאה של פונקציות הומוגניות:
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n, אז אם נחלק אותה ב- x^n,
נקבל פונקציה של $\frac{y}{x}$.

א. הדגימו את הטענה על הפונקציות הבאות:
1. $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$
2. $f(x,y)=\sqrt{x+y}$

ב. הוכיחו את הטענה לעיל.

הערה
ניסוח פורמלי של הטענה לעיל הוא:
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n, אז קיימת פונקציה $g(t)$, כך ש- $t=\frac{y}{x}$,
המקיימת $\frac{f(x,y)}{x^n}=g(t)$.

7) תהיינה f ו- g פונקציות ב- n משתנים, והומוגניות מסדר r_1 ו- r_2, בהתאמה.
קבעו, לכל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא הומוגנית ומאיזה דרגה:

א. $f\cdot g$ ב. $\frac{f}{g}$ ג. $\frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}}$ ד. $f+g$

8) נתון כי f פונקציה הומוגנית מסדר 4.
ידוע כי $f_x(1,2)=10$, $f(1,2)=4$.
חשבו את $f_x(1.5,3)$, $f_x(2,4)$, $f(0.5,1)$, $f(2,4)$.

9) נתונה פונקציה $f(x,y)=x^4+y^2z(x,y)$.
ידוע כי z פונקציה הומוגנית מסדר 2 וכי $f(4,10)=1$.
א. חשוב את $f(2,5)$.
ב. ידוע כי $f_x(1,1)=4$.
חשבו את $f_x(a,a)$, לכל קבוע a.

תשובות סופיות

1) הומוגנית מסדר 3.5.

2) הומוגנית מסדר -1.

3) הומוגנית מסדר 1.

4) הפונקציה לא הומוגנית. על ידי השמטת חלקים מהפונקציה אפשר לקבל:

$f(x,y)=\frac{x}{y^4}+\frac{1}{z(x,y)}$ הומוגנית מסדר -3.

$f(x,y)=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}}$ הומוגנית מסדר -2.

$f(x,y)=-4$ הומוגנית מסדר 0.

5) א. עבור $\alpha=4$ הפונקציה הומוגנית מסדר 4. ב. הומוגנית מסדר 0 לכל $\alpha>0$.

6) א.1. $g(t)=1-t+2t^2$ .2 $g(t)=\sqrt{1+t}$ ב. הוכחה.

7) א. הומוגנית מדרגה r_1+r_2. ב. הומוגנית מדרגה r_1-r_2.

ג. הומוגנית מדרגה $2r_1-\frac{r_2}{n}$.

ד. הומוגנית מדרגה r_1 רק אם $r_1=r_2$. אחרת לא הומוגנית.

8) $f(0.5,1)=\frac{1}{4},\ \ f(2,4)=64,$ $f_x(1.5,3)=33.75,\ \ f_x(2,4)=80,$

9) א. $f(2,5)=\frac{1}{16}$ ב. $f_x(a,a)=4a^3$

משפט אוילר

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$.

א. הוכיחו שהפונקציה הומוגנית ומצאו את דרגתה.

ב. הראו שמשפט אוילר מתקיים.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נניח ש- $f=f(x,y)$ הומוגנית מסדר 0.

הוכיחו כי $\frac{f_x}{f_y}=-\frac{y}{x}$.

ב. נתון כי $f(x,y)=\frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{(x-y)(\ln x-\ln y)}$.

הוכיחו כי $x\cdot f_x=-y\cdot f_y$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי פונקציית התועלת $u(x,y)=\left(\frac{1}{2}x^m+\frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית.

הניחו כי m קבוע חיובי.

ב. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a,a)=u_y(1,1)$.

ג. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2,2)+u_y(1,1)=1$.

4) תהי f פונקציה הומוגנית מסדר 2.

נגדיר $h(x,y)=x^2-y^2+f\left(\frac{x^2}{y},\frac{y^2}{x}\right)$.

א. הוכיחו כי h הומוגנית מסדר 2.

ב. נתון $h_x'(6,3)=9$, $f(8,1)=16$.

מצאו את $h(2,1)$ ואת $h_y'(2,1)$.

5) h ו- g הינן פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאמה. נגדיר:

$$f(x,y)=(x+y)h(x,y)+\frac{\sqrt{g(x,y)}}{x^2+y^2}$$

א. הוכיחו כי f הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון: $h(4,32)=16$, $f_y^{'}(1,8)=3$, $f_x^{'}(2,16)=12$.

מצאו את: $f(1,8)$ ואת $g(1,8)$.

6) f הומוגנית מסדר 4, g הומוגנית מסדר 2 ו- h הומוגנית מסדר 0.

מגדירים את הפונקציה: $p(x,y)=f(x,y)+g(x,y)-h(x,y)$.

נתון: $p(1,2)=\frac{7}{2}$, $h\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{5}{2}$, $f_y^{'}(-1,-2)=-4$, $f_x^{'}(2,4)=64$.

חשבו את $g\left(\frac{1}{2},1\right)$.

7) הפונקציה $f(x,y)$ הומוגנית מסדר 3, והנתונים בשרטוט.

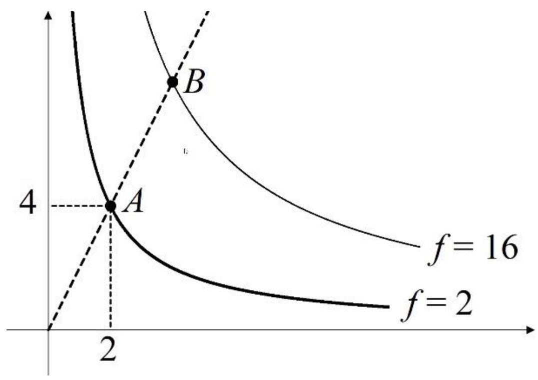
א. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ב. מצאו את ערך הסכום $f_x(4,8)+2f_y(4,8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x,y)$, על ידי $u(x,y)=\left(f(x,y)\right)^2$.

1. לפי כללי הגזירה, מתקיים $u_x(x,y)=2\cdot f(x,y)\cdot f_x(x,y)$.
הסבירו זאת בקצרה.

2. הוכיחו כי $x\cdot u_x(x,y)+y\cdot u_y(x,y)=6\left(f(x,y)\right)^2$.
היעזרו בתת-הסעיף הקודם ובנתונים על f.



8) תהי $f(x,y)$ פונקציה הומוגנית מסדר m,
המקיימת $f(6,3)=243$ ו- $f(2,1)=27$.

א. מצאו את סדר ההומוגניות m.

ב. בנקודה $(2,1)$ עוברת עש"ע של f.
העבירו משיק לעש"ע בנקודה הנ"ל.
המשיק הוא $2x+3y=7$.
מצאו את $f_x(1,0.5)$, $f_y(2,1)$, $f_x(2,1)$.

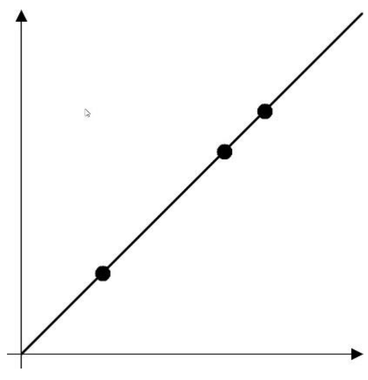
9) תהי $g(t)$ פונקציה של משתנה אחד.
על הפונקציה g ידוע, כי $g'(8)=2$, $g(1)=3$, $g(4)=5$.
המשתנה t תלוי במשתנים החיוביים (x,y), כך: $t=\frac{4y}{x}$.
נגדיר תועלת u כפונקציה של המשתנים (x,y), באופן הבא:
$u(x,y)=g(t)=g\left(\frac{4y}{x}\right)$.

א. באיור שלהלן קרן עם שיפוע 1.
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?

ב. הוכיחו כי הקרן $4y-x=0$ היא עקומת אדישות של התועלת.
ציירו את הקרן הזאת ורשמו באיור מה הערך של התועלת.

ג. הוכיחו כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכיחו כי $u_x(1,2)=-16$.



10) נניח ש- $f=f(x,y)$ הומוגנית מסדר 1.
הוכיחו כי $x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy}=0$.

11) מפעל מייצר x חולצות ו- y מכנסיים.
הרווח השולי, המתקבל מייצור כל אחד מהמוצרים, נתון על ידי:
$f_x(x,y)=4x+8y,\quad f_y(x,y)=8x+20y$ ₪ ליחידה.
מצאו את פונקציית הרווח של המפעל, אם ידוע שפונקציה זו הומוגנית.

12) לחברת 'מזון בריא' יש 300 מכונות:
x מכונות לייצור שוקולד ו- y מכונות לייצור גלידה.
ידוע כי התפוקה השולית, המתקבלת מייצור כל אחד מהמוצרים,
נתונה על ידי $f_x(x,y)=6x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}},\quad f_y(x,y)=3x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$.

א. מצאו את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.
ב. מצאו כמה מכונות מכל סוג על המפעל להחזיק, כדי לקבל את התפוקה הכוללת המקסימלית.

הערה: סעיף ב אינו קשור להומוגניות ועוסק בנושא "בעיות קיצון תחת אילוץ".

13) בחברת 'שוקולד פנדה' בדקו ומצאו, כי התפוקה השולית, המתקבלת משימוש ב- x טון סוכר ו- y טון קקאו, נתונה על ידי $f_x(x,y)=3x^2y^2,\quad f_y(x,y)=2x^3y$.
מחירי המוצרים הם 6,000 ₪ לטון סוכר ו- 4,000 ₪ לטון קקאו,
והתקציב לקניית המוצרים הוא 100,000 ₪.

א. מצאו את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.
ב. מצאו את כמות הסוכר והקקאו בהם מתקבלת תפוקה מקסימלית.
מהי התפוקה במקרה זה?
ג. כיצד תשתנה התשובה, אם מחירי הסוכר והקקאו יהיו שניהם 5,000 ₪ לטון?

הערה: סעיפים ב-ג אינם קשורים להומוגניות ועוסקים בנושא "בעיות קיצון תחת אילוץ".

14) הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f_x(x,y)$ הומוגנית מסדר 4, אז $f(x,y)$ הומוגנית מסדר 5.
ב. אם פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $f(2,4)=2^3f(1,2)$,
אז הפונקציה הומוגנית מסדר 3.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) א. שאלת הוכחה. ב. $h(2,1)=4 \quad h_y'(2,1)=8$
5) א. שאלת הוכחה. ב. $g(1,8)=0 \quad f(1,8)=9,$
6) $-\frac{3}{4}$
7) א. $\mathrm{B}(4,8)$ ב. 12 ג. הוכחה והסבר.
8) א. 2 ב. $f_x(1,0.5)=\frac{54}{7}, \quad f_y(2,1)=\frac{3\left(\frac{108}{7}\right)}{2}, \quad f_x(2,1)=\frac{108}{7},$
9) א. 5 ב-ד. שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) $f(x,y)=2x^2+8xy+10y^2$
12) א. $f(x,y)=9x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ ב. על המפעל להחזיק 200 מכונות לייצור שוקולד ו-100 מכונות לייצור גלידה, כדי לקבל תפוקה מקסימלית.
13) א. $f(x,y)=x^3y^2$
ב. אם המפעל ישתמש ב-10 טון סוכר ו-10 טון קקאו, הוא יקבל תפוקה מקסימלית השווה ל- $f(10,10)=10^3 10^2=100000$ חפיסות שוקולד.
ג. התשובה לא תשתנה.
14) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.

מתמטיקה ב

פרק 9 - אינטגרלים מיידיים ואינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

אינטגרלים מיידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-12**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$)

1) $\int 4dx$ **2)** $\int x^4 dx$ **3)** $\int \frac{1}{x^2} dx$

4) $\int \sqrt{x} dx$ **5)** $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ **6)** $\int 4x^{10} dx$

7) $\int (2x^2 - x + 1) dx$ **8)** $\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$ **9)** $\int (x^2+1)^2 dx$

10) $\int (x^2+1)(x+2) dx$ **11)** $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx$ **12)** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **13-20**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)} + c$)

13) $\int (4x+1)^{10} dx$ **14)** $\int (x^2-2x+1)^{10} dx$ **15)** $\int \frac{4}{(x-2)^5} dx$

16) $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$ **17)** $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$ **18)** $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$ **20)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$

חשבון את האינטגרלים בשאלות **26-21**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{\ln|ax+b|}{a}+c$)

21) $\int \frac{1}{4x}dx$

22) $\int \frac{1+x+x^2}{x}dx$

23) $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

24) $\int \frac{1}{4x-1}dx$

25) $\int \frac{x+3}{x+2}dx$

26) $\int \frac{4x+1}{x+2}dx$

חשבון את האינטגרלים בשאלות **29-27**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax+b}dx = \frac{e^{ax+b}}{a}+c$)

27) $\int \left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$

28) $\int \left(e^{x+1}\right)^2 dx$

29) $\int \left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

30) חשבון את האינטגרל: $\int \frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x}dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int a^{mx+n}dx = \frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+c$)

31) חשבון את האינטגרל: $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx$.

תשובות סופיות

1) $4x+c$

2) $\frac{x^5}{5}+c$

3) $-\frac{1}{x}+c$

4) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$

5) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$

6) $\frac{4x^{11}}{11}+c$

7) $\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

8) $-\frac{1}{x^3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+c$

9) $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$

10) $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$

11) $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$

12) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c$

13) $\frac{(4x+11)^{11}}{44}+c$

14) $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$

15) $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$

16) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$

17) $10\sqrt{2x+4}+c$

18) $-\frac{1}{2(x-2)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$

19) $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{3/2}+x^{3/2}\right)+c$

20) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$

21) $\frac{\ln|x|}{4}+c$

22) $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$

23) $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

24) $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$

25) $x+\ln|x+2|+c$

26) $4\left(x-1.75\ln|x+2|\right)+c$

27) $\frac{e^{4x}}{4}-e^{-x}+c$

28) $\frac{e^{2x+2}}{2}+c$

29) $8e^{\frac{x}{2}}-\frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4}+c$

30) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}+\frac{(200)^x}{\ln(200)}+c$

31) $-\left(x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)+c$

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

2) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

3) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

4) $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$

5) $\int e^{x^2}2xdx$

6) $\int e^{-2x^2}xdx$

7) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

8) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

9) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

10) $\int x^2\sqrt{x^3+4}dx$

11) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

תשובות סופיות

1) $\ln\left|x^2+1\right|+c$

2) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$

3) $\ln\left|\ln|x|\right|+c$

4) $e^2\ln\left|e^x+1\right|+c$

5) $e^{x^2}+c$

6) $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$

7) $\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$

8) $2\sqrt{x^2+1}+c$

9) $\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$

10) $\frac{2}{9}\left(x^3+4\right)^{\frac{3}{2}}+c$

11) $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+c$

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

1) נתונה הנגזרת $f'(x)=2x-\sqrt[3]{4x}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.
מצאו את הפונקציה.

2) נתונה הנגזרת $f'(x)=\sqrt[3]{5x+7}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=4$.
מצאו את הפונקציה.

3) נתונה הנגזרת $f'(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{x+1}}+(x-1)^2$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-6$.
מצאו את הפונקציה.

4) נתונה הנגזרת $f'(x)=2x-6$.
ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצאו את הפונקציה.

5) נתונה הנגזרת $f'(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}+2$.
שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y=5\frac{2}{3}$, הוא 3.
מצאו את הפונקציה.

6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה $f''(x)=6x+6$.
שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
מצאו את הפונקציה.

7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה $f''(x)=1+\frac{8}{x^3}$.
המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$.
מצאו את הפונקציה.

8) נתונה פונקציה $f:R\rightarrow R$ המקיימת $f(0)=0$ וכן לכל x_0 ממשי:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=|x_0|$$

א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.

ב. חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ או קבעו שהוא אינו קיים.

ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x.

ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.

ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.

חשבו את הנגזרת $\left(G(x)-f(x)\right)'$.

תשובות סופיות

1) $f(x)=x^2-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4}+2$

2) $f(x)=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}-12\frac{3}{20}$

3) $f(x)=12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4}+\frac{1}{3}(x-1)^3-18\frac{1}{6}$

4) $f(x)=x^2-6x+14$

5) $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2x-3$

6) $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$

7) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{x}+3x+2$

8) א. רציפה לכל x. ב. $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, ג. נקודת חיתוך אחת (0,0).

ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. 0

מתמטיקה ב

פרק 10 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-12**:

1) $\int xe^x dx$

2) $\int x^4 \ln x dx$

3) $\int \left(x^2+2x+3\right)\ln x dx$

4) $\int x^2 e^{-4x} dx$

5) $\int \ln x dx$

6) $\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

7) $\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx$

8) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

9) $\int \ln^2 x dx$

10) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

11) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

12) $\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx$

13) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$, באשר n טבעי.

14) חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

תשובות סופיות

1) $xe^x - e^x + c$

2) $\frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c$

3) $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

4) $-\frac{x^2}{4}e^{-4x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right) + c$

5) $x\ln x - x + c$

6) $-\frac{1}{3}(x\ln x - x) + c$

7) $\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x\ln|x-2|\right)\right) + c$

8) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$

9) $x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c$

10) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}(\ln x - 1) + c$

11) $\frac{e^x}{x+1} + c$

12) $\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c$

13) $x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$

14) $e^x\left(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24\right) + c$

מתמטיקה ב

פרק 11 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$

2) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^5 dx$

3) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

4) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$

5) $\int e^{x^2}x^3 dx$

6) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

7) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}dx$

8) $\int x^3(3x^2-1)^{14}dx$

9) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

10) $\int \ln^3 x dx$

11) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$

12) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$

13) $\int \frac{x^7}{(1-x^4)^2}dx$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

15) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}dx$

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{x^2+1}+c$

2) $\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5}-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x^3+4}\right)^3\right)+c$

3) $2\left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3}-\sqrt{x^2+1}\right)+c$

4) $-\frac{1}{3(\ln x)^3}+c$

5) $\frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}\right)+c$

6) $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+2\right)+c$

7) $\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+c$

8) $\frac{1}{18}\left(\frac{\left(3x^2-1\right)^{16}}{16}+\frac{\left(3x^2-1\right)^{15}}{15}\right)+c$

9) $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

10) $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)+c$

11) $\frac{(\ln x)^5}{5}+c$

12) $\ln\left|\ln(\ln x)\right|+c$

13) $-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x^4}-\ln\left|1-x^4\right|\right)+c$

14) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+c$

15) $\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^7}{7}-\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^4}{4}+c$

מתמטיקה ב

פרק 12 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{x+1}{(x-4)^2}dx$

2) $\int \frac{2x+5}{\left(x^2-2x+1\right)^4}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

4) $\int \frac{2-x}{x^2+5x}dx$

5) $\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx$

6) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx$

7) $\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6}dx$

8) $\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36}dx$

9) $\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)}dx$

10) $\int \frac{5-x}{x^3+x^2}dx$

11) $\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x}dx$

12) $\int \frac{dx}{\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2-4x+4\right)}$

תשובות סופיות

1) $\ln|x-4|-\frac{5}{x-4}+c$

2) $-\frac{1}{3(x-6)^6}-\frac{1}{(x-1)^7}+c$

3) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

4) $\frac{2}{5}\ln|x|-\frac{7}{5}|x+5|+c$

5) $3\ln|x+3|-2\ln|x+2|+c$

6) $\ln|x|+\frac{1}{2}|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c$

7) $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+3\ln|x-3|+c$

8) $\ln|x+3|+\ln|x-3|-\ln|x+2|-\ln|x-2|+c$

9) $\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}-\ln|x+2|+c$

10) $6\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{5}{x}+c$

11) $4\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+\frac{3}{x+3}+c$

12) $2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+c$

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1}dx$

2) $\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4}dx$

3) $\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1}dx$

4) $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2}dx$

5) $\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4}dx$

תשובות סופיות

1) x^3-x^2+2x+c

2) $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-x^2+c$

3) x^3-x^2+x+c

4) $\frac{x^3}{3}+\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$

5) $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\ln|x+2|+c$

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

3) $\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}}dx$

4) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

5) $\int \sqrt{1+e^x}dx$

תשובות סופיות

1) $-1.5\ln\left|1-\sqrt[3]{x}^2\right|+c$

2) $6\left(\frac{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^3}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}{2}+3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)-\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|\right)+c$

3) $4\left(\frac{\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^2}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^2}{2}+3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)-\ln\left|1+\sqrt[4]{x-1}\right|\right)+c$

4) $-\ln\left|1+e^x\right|+x+c$

5) $2\sqrt{1+e^x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+c$

מתמטיקה ב

פרק 13 - האינטגרל המסוים

תוכן העניינים

האינטגרל המסוים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-6**:

1) $\int_{1}^{4}\left(x^2-4x+1\right)dx$

2) $\int_{1}^{2}\frac{4x+1}{2x^2+x+5}dx$

3) $\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$

4) $\int_{1}^{e}\frac{\ln^4 x}{x}dx$

5) $\int_{0}^{4}f(x)dx$ כאשר $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<1\\ \frac{1}{x^2} & x\ge 1\end{cases}$

6) $\int_{-1}^{4}\sqrt{4+|x-1|}dx$

7) נתונה פונקציה רציפה f. הוכיחו:

א. אם f זוגית, אזי $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$.

ב. אם f אי-זוגית, אזי $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$.

תשובות סופיות

1) -6

2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

3) $-2e^{-1}+1$

4) $\frac{1}{5}$

5) $\frac{17}{12}$

6) $\frac{2}{3}\left(-16+6^{1.5}+7^{1.5}\right)$

7) שאלת הוכחה.

מתמטיקה ב

פרק 14 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

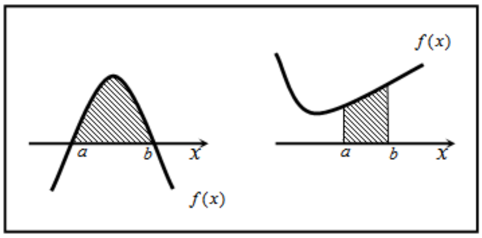
תוכן העניינים

חישוב שטחים

חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

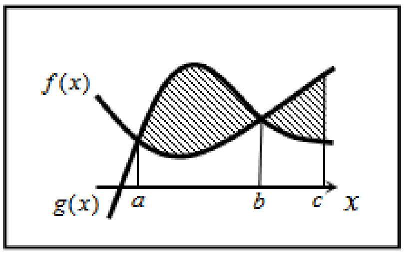


2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

$$S_1=\int_a^b \left(g(x)-f(x)\right)dx$$

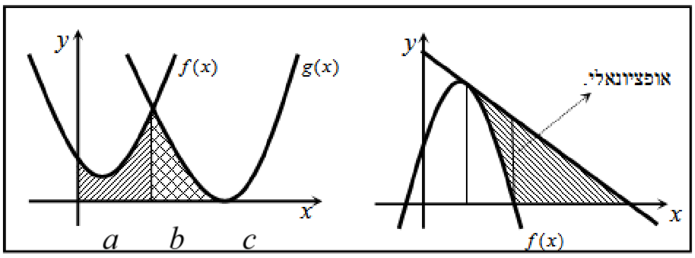
$$S_2=\int_b^c \left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$S=S_1+S_2$$

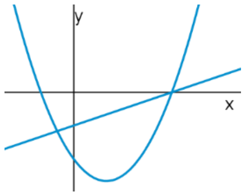


3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :

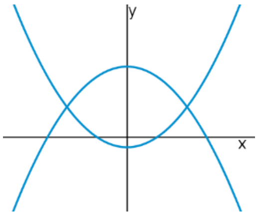
$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$



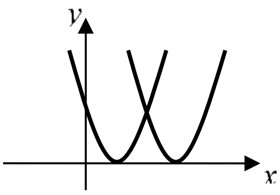
שאלות



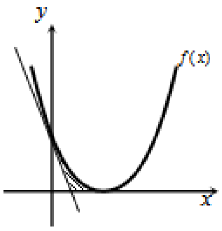
1) נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות.



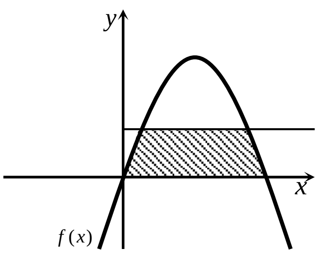
2) נתונות הפונקציות $g(x)=7-x^2$, $f(x)=x^2-1$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות.



3) נתונות הפונקציות $g(x)=x^2-6x+9$, $f(x)=x^2-2x+1$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x .

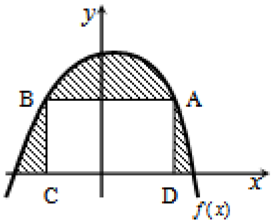


4) נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$.
מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y מעבירים משיק.
א. מצאו את משוואת המשיק.
ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).

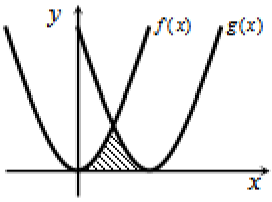


5) נתונה הפונקציה $f(x)=kx-x^2$.
הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות החיתוך הוא $x=9$.
א. מצאו את ערך הפרמטר k .
ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).

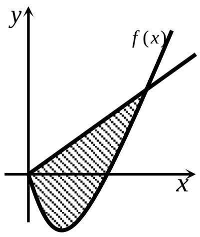
6) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיור שלהלן,
היא $f'(x)=3-2x$. ישר AB, שמשוואתו $y=6$,
חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה-x,
כך שנוצר מלבן ABCD.
ידוע ששיעור ה-x של הנקודה A הוא 4.
א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה-x.



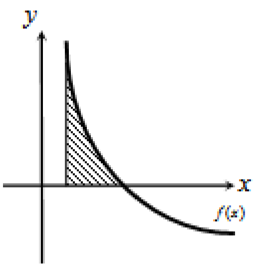
7) באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x)=x^2$,
את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x=2$.
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x)=2x-8$.
א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.
ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה-x (המסומן).



8) באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.
נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=2x-6$,
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה
בנקודה שבה ערך ה-y הוא 16.
א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצאו אותן.
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

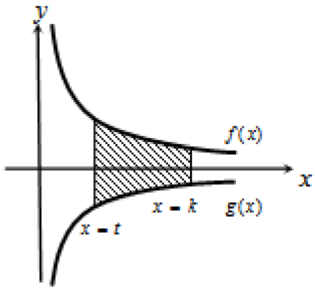


9) גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ (a קבוע)
חותך את ציר ה-x בנקודה $(6,0)$.
א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.
ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
ציר ה-x והישר $x=2$.



10) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות

$f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.



העבירו שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

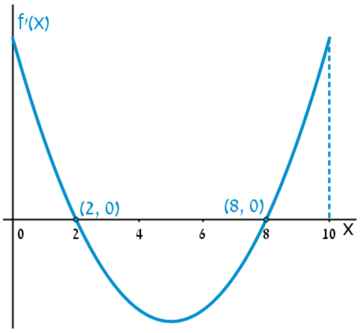
ידוע כי $AB=2CD$.

א. הראו כי $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S=12$.
מצאו את t.

11) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

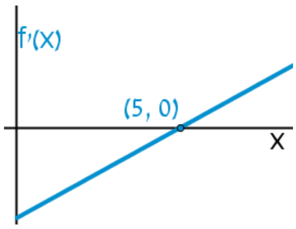


א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,
אם $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$
וכן $f(10)>0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י **גרף הנגזרת והצירים** ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x=2$.

12) להלן גרף הפונקציה $f'(x)$.

הגרף המתואר חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד והיא $(5,0)$.



א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y שלה הוא -2.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- y כאשר $y=8$.

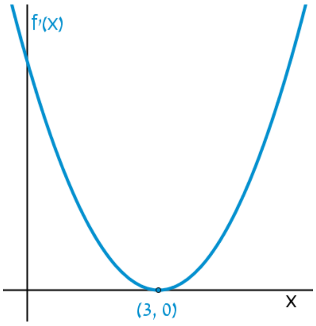
ה. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים.

13) הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור.

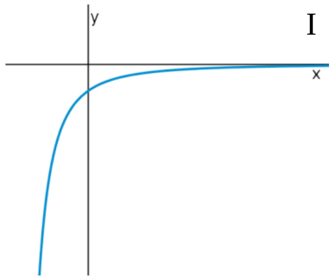
א. האם ל- $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

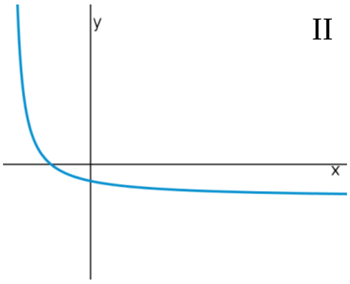
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,
אם ידוע כי $f(3)=4$ וכי היא חותכת את
ציר ה- y בנקודה שבה $y=-5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$
והצירים ברביע הראשון.



14) באיורים שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:

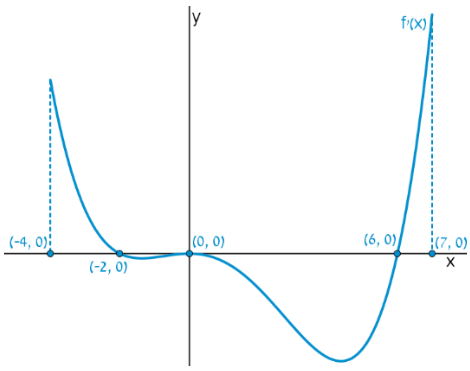




א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון כי $f(10)=-3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-2$.
מהו השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?

15) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:



א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$, בתחום $-4\le x\le 7$,
לפי הנתונים $f(0)=-2$, $f(-2)=7.6$ ו- $f(6)=-606.8$.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- x ברביע השלישי.

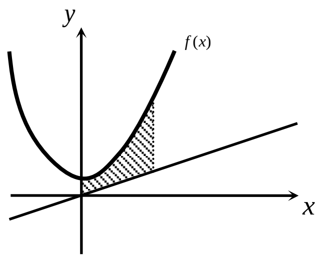
ג. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- x ברביע הרביעי.

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

אינטגרלים של פונקציות מורכבות	אינטגרלים יסודיים
$\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln a}+c$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$
$\int e^{mx+n}dx=\frac{e^{mx+n}}{m}+c$	$\int e^x dx=e^x+c$

16) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$.

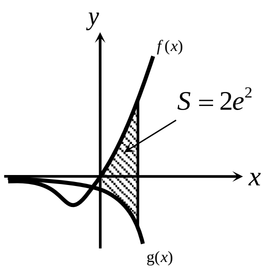


ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.

א. מצאו את a וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$,
והישר $y=0.1x$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- y
והאנך $x=2$.

17) ענו על הסעיפים הבאים:



א. גזרו את הפונקציה $y=e^x(x-1)$.

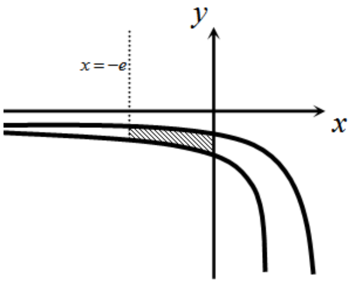
ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של
הפונקציות $f(x)=xe^x$, $g(x)=-e^x$.
העבירו ישר $x=a$, $(a>0)$ החותך את
הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את
השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר.
ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.
מצאו את a.

פונקציות לוגריתמיות

אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות

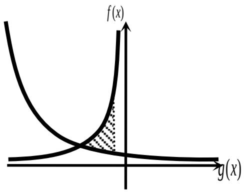
אינטגרל של פונקציה מורכבת	אינטגרל יסודי
$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$

18) באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{a}{x-1}$
ו- $g(x)=\frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x<0$.
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.



א. מצאו את a וכתבו את שתי הפונקציות.
ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x=-e$.

19) נתונות הפונקציות $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו- $g(x)=\frac{k}{2x+5}$.
גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה $y=0.4$.



א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.
ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.
ג. חשבו את השטח המוגבל על ידי שני הגרפים והישר $x=-1$.

פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

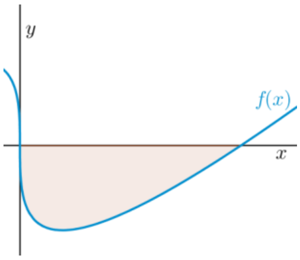
אינטגרל של פונקציה מורכבת	אינטגרל יסודי
$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx=\int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)}+c$	$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx=\int x^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+c$

תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n}\neq -1$.

20) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.

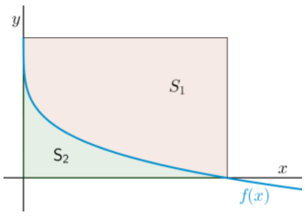
א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



21) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.
העבירו אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.
מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- S_1 ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2.

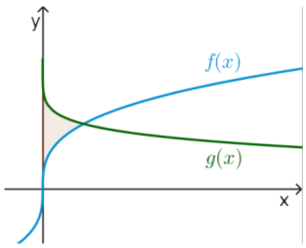
מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.



22) באיור שלהלן נתונים הגרפים של הפונקציות
$f(x)=\sqrt[3]{x}$ ו- $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y.



תשובות סופיות

1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש. 2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש. 3) $\frac{2}{3}$ יח"ש.

4) א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

5) א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

6) א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

7) א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

8) א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

9) א. $a=36$, $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

10) א. הוכחה ב. $t=1$

11) ב. 10 יח"ש.

12) א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$
ג. $\min(5,-2)$ ד. הוכחה ה. 10 יח"ש.

13) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. הוכחה ג. 9 יח"ש.

14) א. $f'(x):\text{I}$, $f(x):\text{II}$ ב. 1 יח"ש.

15) א. הוכחה ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

16) א. $a=-2$, $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

17) א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

18) א. $a=2$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$, $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ב. $S=1.76$ יח"ש.

19) א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$ יח"ש.

20) א. $(8,0)$, $(0,0)$ ב. $S=16$ יח"ש.

21) $\frac{S_1}{S_2}=4$

22) א. $(1,1)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש.

חישוב שטחים ביחס לציר ה-y

שאלות

1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$.

2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$.

תשובות סופיות

1) $20\frac{5}{6}$

2) $20\frac{5}{6}$

אורך קשת

שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון :

1) $y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}\ ,\ \left(1\le x\le 2\right)$

2) $y=x^{2/3}\ ,\ \left(1\le x\le 8\right)$

3) $y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}\ ,\ \left(1\le x\le 2\right)$

4) $y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\ ,\ \left(0\le x\le 3\right)$

5) $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}\left(3-x\right)\ ,\ \left(0\le x\le 3\right)$

6) $x^{2/3}+y^{2/3}=4\ ,\ \left(1\le x\le 8\right)$

7) $x=3y^{3/2}-1\ ,\ \left(0\le y\le 4\right)$

8) $y=\ln x\ ,\ \left(1\le x\le 2\right)$

תשובות סופיות

1) $\frac{33}{16}$

2) $\frac{1}{9}\left\{\frac{40^{1.5}}{3}-\frac{13^{1.5}}{3}\right\}$

3) $\frac{1097}{480}$

4) 21

5) $\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3}+\frac{2}{3}3^{1.5}\right\}$

6) 9

7) $\frac{8}{243}\left\{82^{1.5}-1\right\}$

8) $\left\{\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|\right\}-\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right\}$

מתמטיקה ב

פרק 15 - וקטורים

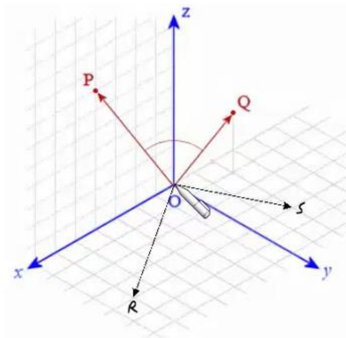
תוכן העניינים

וקטורים

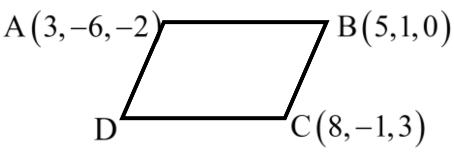
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם : $\mathbf{u}$, $\vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

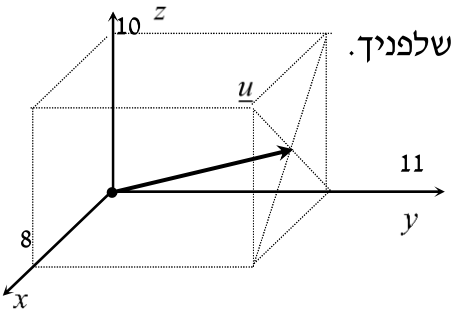
1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



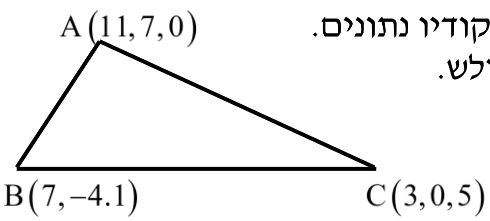
2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
רמז : היעזרו בנוסחת אמצע קטע.



3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

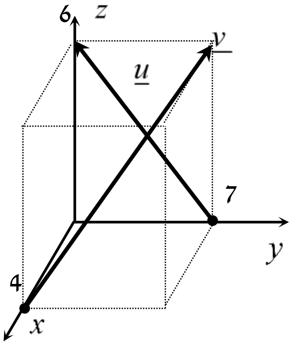


5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



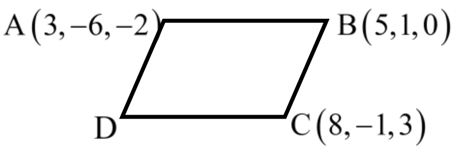
7) מצאו את x, y ו- z, אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

8) נתונות הנקודות הבאות:
$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראו כי $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמקו.

9) בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזרו בפתרון בנוסחת אמצע קטע.



בשאלות **16-10** נתונים הווקטורים $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$ ו- $\underline{w}=(2,6,-5)$.

* בשאלות **13**, **14**, ו-**16** הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

10) חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

11) חשבו:

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

12) $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) $\underline{u}/|\underline{u}|$

14) $d(\underline{u},\underline{v})$

15) $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

16) $\text{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **19-17** נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$,
ויש למצוא את הווקטורים:

17) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

18) $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

19) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$.
הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

23) מצאו את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם:

$A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

24) נתונים הווקטורים $\underline{u}=(2,-1,0)$, $\underline{v}=(5,0,3)$.

מצאו וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0,

אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו- $(1,-1,2)$,

ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

26) ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $u\perp v \Leftrightarrow |u+v|=|u-v|$.

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $u\perp v \Leftrightarrow |u+v|^2=|u|^2+|v|^2$.

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

27) הוכיחו:

א. $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$

ב. $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$

ג. $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$

ד. $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$

28) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם α היא הזווית בין a ל- b, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

29) יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1.
מהו המרחק של v מ- w_1?

30) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

1) $\vec{P}=(4,0,7),\quad \vec{Q}=(-2,1,3),\quad \vec{R}=(6,4,0),\quad \vec{S}=(-2,4,0)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{u}=(0,-7,6),\quad \underline{v}=(-4,7,6)$

7) א. $x=5,\quad y=-2,\quad z=6$

8) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}^*$

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) שאלת הוכחה.

21) א. שאלת הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277°$ ב. $\alpha=90°$ ג. $\alpha=180°$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח"ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ or\ v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

(29 $\frac{5}{4}k$

(30 שאלת הוכחה.

מתמטיקה ב

פרק 16 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות

1) תהי $f(x,y)=x^2+y^2$.

א. חשבון את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3,4)$.
מהי משמעות התוצאה?

ב. הראו שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f , העובר דרך $(3,4)$.

2) תהי $f(x,y)=3x^2y$.
חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$.

3) תהי $f(x,y)=x-\sin(xy)$.
חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

4) תהי $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$.
חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היחידה,
היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר ה- x .

5) תהי $f(x,y)=xy^2$.
חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,3)$ בכיוון לנקודה $(4,5)$.

6) תהי $f(x,y,z)=x^2y^2z$.
חשבו את הנגזרת המכוונת של f , בנקודה $(2,1,4)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=1\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{j}+2\cdot\mathbf{k}$.

7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x,y) , נתון על ידי $V=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,
מצאו את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3,4)$ בכיוון לנקודה $(2,6)$.

8) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$
בנקודה $(0,0)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

9) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)=2x^3y-3y^2z$,
בנקודה $(1,2,-1)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x,y,z)=3x^2-5y^2+2z^2$, ואני נמצא
בנקודה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

11) נתונה הפונקציה $f(x,y)=4x^2y$.

א. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$,
בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$,
בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הכיוון החיובי של ציר ה- y .

ג. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1,2)$,
בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=x^2yz^4$.
מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2,-1)$,
בכיוון וקטור היוצר זווית של 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x ,
ו- 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- z .
הניחו שהזווית עם ציר ה- y חדה.

13) נתונה הפונקציה $f(x,y)=xy^2-x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1,1)$.

א. חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה Q ,
בכיוון וקטור שיוצר זווית 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצאו וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=0$.

ג. האם קיים וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=6$?

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+4y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ג. חשבו את $\nabla f(0,0)$.

ד. בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ה. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0,0)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=(1,-1)$.

ו. הסבירו מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

15) הפונקציה $f(x,y,z)=2x^2+4y^2+z^2$, מתארת טמפרטורה בנקודה (x,y,z) .

א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2,4,1)$?

ב. אוסף הנקודות (x,y,z) , בהן הטמפרטורה שווה $20°$,
מהווה משטח מפורסם. מהו?

ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2,4,1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר.
באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?

ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$),
בנקודה $(2,4,1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר,
אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן.
באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

16) גֻּלָּה מוחזקת בנקודה $(2,1,14)$, שעל המשטח $z=20-x^2-2y^2$.
שחררו את הגֻּלָּה והיא התחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.

א. מהו המשטח הנתון?

ב. מצאו את הווקטור $\vec{u}=(a,b,c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֻּלָּה.

17) תהי $f=f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:

1. $f(x,x^2)=\dfrac{x^2}{2}+x^4$ לכל x .

2. הנגזרת המכוונת של $f(x,y)$, בנקודה $(1,1)$, בכוון הווקטור $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$,
שווה 1.

חשבו את הגרדיאנט של f בנקודה $(1,1)$.

18) נתונה $f=f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת $f\left(x,y,x^2+y^2\right)=2x+y$.
נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,2,4)=-\frac{5}{3}$, כאשר $\vec{u}=(-2,1,2)$.
חשבו את $\nabla f(0,2,4)$.

19) נתונה הפונקציה $f(x,y)=12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.
א. חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8,1)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=(3,4)$.
ב. בדקו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.
ג. חשבו $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, בכיוון וקטור $\vec{v}$, היוצר זווית α
עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
ד. באיזה כיוון α , הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ תהיה מקסימלית?
מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

20) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}+20x+21y & x\neq 0 \\ 21y & x=0 \end{cases}$.
א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)<m$, לכל וקטור יחידה $\hat{u}$?
ב. מצאו וקטור יחידה $\hat{u}$, המקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)=0$.

הערות סימון

1) במישור $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{j}=(0,1)$, $\mathbf{i}=(1,0)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:
$\vec{u}=(x,y)$ **או** $\vec{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$.
למשל: $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j} \Leftrightarrow \vec{u}=(3,4)$.
במרחב $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{k}=(0,0,1)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{i}=(1,0,0)$,
ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v}=(x,y,z)$, **או** $\vec{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.
למשל: $\vec{u}=3\cdot\mathbf{i}+4\cdot\mathbf{j}+5\cdot\mathbf{k} \Leftrightarrow \vec{u}=(3,4,5)$.

2) יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם $\underline{u}$ או $\mathbf{u}$.

3) וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

תשובות סופיות

1) א. הגרדיאנט $(6,8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.

2) $\frac{48}{5}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $7.5\sqrt{2}$

5) $3\sqrt{13}$ 6) $\frac{88}{3}$ 7) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1,1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.

9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור (12,14,-12) ושווה ל-22.

10) בכיוון הווקטור $(-2,2,-2)$.

11) א. $8\sqrt{3}+2$ ב. $8+2\sqrt{3}$ ג. $\ell:\ (1,2,4)+t\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},8+2\sqrt{3}\right)$

12) $\frac{1}{\sqrt{2}}-2$

13) א. $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ב. $\vec{u}=(5,1)$ (יש עוד). ג. לא.

14) א. הוכחה. ב. $f_x=1,\ f_y=0$ ג. $\nabla f(0,0)=(1,0)$

ד. לא דיפרנציאבילית. ה. 0

15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור $(8,32,2)$.

ד. בכיוון הווקטור $(8,32)$.

16) א. פרבולואיד. ב. $\vec{u}=(4,4,-32)$

17) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

18) $\nabla f(0,2,4)=(2,-3,1)$

19) א. $\frac{67}{5}$ ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12\left(\cos\alpha-\cos^3\alpha\right)^{\frac{1}{3}}$

ד. $\alpha=54.73^\circ$, $Max\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(0,0)=12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

20) א. $m>29$ ב. $\hat{u}=(21/29,-20,29)$ (יש אחרים).