מתמטיקה בדידה

תוכן העניינים

מתמטיקה בדידה

פרק 1 - לוגיקה

תוכן העניינים

מבוא

שאלות

1) קבעו בכל אחד מהסעיפים האם נכון או לא נכון:

א. הביטוי "בני ישראל הלכו במדבר ארבעים שנה" הוא פסוק.

ב. הביטוי "ארבעים שנה" הוא פסוק.

ג. שלילת הפסוק "האריה טרף את הצבי" היא "הצבי טרף את האריה".

ד. הפסוק "$2=1+1$ או $3=2$" הוא פסוק אמת.

ה. הפסוק "$2=1+1$ וגם $3=2$" הוא פסוק אמת.

ו. הפסוק "אם $1+1=2$ אז $2=3$" הוא פסוק אמת.

ז. הפסוק "אם $2=3$ אז $1+1=2$" הוא פסוק אמת.

ח. הפסוק "אם $2=3$ אז $1+1\neq 2$" הוא פסוק אמת.

ט. שלילת הפסוק "$a\neq 4$ וגם $b\neq 3$" היא "$a+b=7$ או $ab=12$".

י. שלילת הפסוק "$a\neq 4$ או $b\neq 3$" היא "$a+b=7$ וגם $ab=12$".

יא. שלילת הפסוק "$a\notin\{3,4\}$ או $b\notin\{3,4\}$" היא "$a+b=7$ וגם $ab=12$".

2) רשמו את טבלאות האמת של הפסוקים הבאים:

א. $(p\wedge q)\vee\neg r$

ב. $\neg(p\wedge q)\rightarrow(\neg r)$

ג. $(p\wedge\neg q)\vee r$

ד. $(p\vee q)\rightarrow(q\rightarrow r)$

3) בטאו את שלילת הפסוקים הבאים (בלי קשר לנכונותם):

א. דוד יפה או ראובן מכוער.

ב. האוכל חם וטעים.

ג. לכל x קיים y, שהוא השורש הריבועי של x.

ד. כל תרנגולת כחולה עוזבת את הלול כדי להטיל ביצים.

ה. כל פנתר שהוא ורוד משחק בסרטים מצוירים.

ו. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי או שהוא משחק בסרטים מצוירים.

ז. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי וגם הוא משחק בסרטים מצוירים.

ח. לכל נגר קיים אדם שכל רהיטיו יוצרו בידי נגר זה.

ט. אם יהיה יום יפה וגם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

י. אם יהיה יום יפה אז אם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

טאוטולוגיה, סתירה ומושגים נוספים

שאלות

1) בדקו אילו מזוגות הפסוקים הבאים שקולים לוגית. במקרה שהתשובה חיובית, הראו זאת הן בעזרת טבלת אמת והן בעזרת עץ שקר.

א. $\neg(p \to q)$ $p \wedge (\neg q)$

ב. $(\neg p) \to q$ $p \vee (\neg q)$

ג. $p \to (\neg q)$ $\neg(p \wedge q)$

ד. $(p \vee q) \wedge (\neg q)$ $p \wedge (\neg q)$

ה. $p \leftrightarrow q$ $(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$

ו. $(s \to (p \wedge (\neg r))) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s)$ $p \vee u$

ז. הראו כי $\neg(r \wedge (p \vee q)) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$, בעזרת זהויות יסוד.

2) יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ הפסוקים:

$\alpha_1 : (A \vee B) \to (D \to C)$

$\alpha_2 : B \to \neg(C \wedge A)$

$\alpha_3 : C \leftrightarrow (A \wedge D)$

$\beta : D \vee (B \wedge C)$

בדקו אלו מהטענות הבאות נכונות והוכיחו:

א. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \Rightarrow \beta$

ב. β אינה נובעת טאוטולוגית מהפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, אך מתיישבת אתם.

ג. β אינה מתיישבת עם הפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, כלומר סותרת אתם.

3) הוכיחו כי הפסוקים הבאים הינם טאוטולוגיות, ללא שימוש בטבלת אמת:

א. $p \vee (\neg p)$

ב. $p \vee (p \to q)$

ג. $(p \to q) \vee (q \to r)$

ד. $(p \wedge (p \to q)) \to q$

ה. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$

ו. $((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r)$

ז. $(q \vee p \vee r) \to ((\neg p) \to ((q \vee r) \wedge (\neg p)))$

ח. $((B \to (C \wedge (\sim A))) \wedge (((\sim B) \vee C) \to D) \wedge (E \to (\sim D))) \to (A \to \sim E)$

ט. הוכיחו בעזרת טבלת אמת ש- $(u \to v) \leftrightarrow ((\neg v) \to (\neg u))$ טאוטולוגיה.

י. הוכיחו כי הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה (מותר להסתמך על סעיף ט):

$$((u \to v) \leftrightarrow ((\neg v) \to (\neg u))) \to (((p \to r) \wedge ((\neg q) \to p) \wedge (\neg r)) \to q)$$

4) בארץ חלם מתקיימת שביתת רופאים במטרה להגדיל את תקציב הבריאות.
להלן ניתוח המצב:

* אם הרופאים לא יסיימו את השביתה אז הנהלות בתי החולים יתערבו.
* אם לא תיפגע בריאותם של החולים אז הממשלה לא תגדיל את הקציב.
* אם הנהלות בתי החולים יתערבו אז לא תפגע בריאותם של החולים או שבית המשפט יתערב.
* בית המשפט לא יתערב וגם הממשלה לא תגדיל את התקציב.

מסקנה: הרופאים יסיימו את השביתה.

נסמן: D – הרופאים יסיימו את השביתה, H – הנהלות בתי החולים יתערבו, P – בית המשפט יתערב, C – לא תפגע בריאותם של החולים, M – הממשלה תגדיל את התקציב.

א. הצרינו את הטיעון לשפת תחשיב הפסוקים בעזרת המשתנים המוצעים.

ב. בדקו, ללא שימוש בטבלת אמת, אם הטיעון תקף.

5) בארץ חלם מתקיימות בחירות.
זרובבל, כתבנו לענייני מפלגות, מנתח את המצב:
* אם אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב את דני יפרוש.
* אם שמעון יציע לדני תפקיד אז דני יפרוש.
* אם בני ייבחר לראשות מפלגת פיתה אז שמעון יציע לדני תפקיד או שאבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב.
* בני יבחר לראשות מפלגת פיתה.
לכן, כתבנו מסיק שדני יפרוש.
נסמן: A – אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב, B – בני יבחר לראשות מפלגת פיתה, C – שמעון יציע לדני תפקיד, D – דני יפרוש.
הצרינו את הטענה לשפת תחשיב הפסוקים והוכיחו כי המסקנה תקפה.

6) בפרס העתיקה מחליט היזם וייזתא לבנות תיאטרון.
אם נרצה שהתיאטרון נגיש לתושבים אז נצטרך להקימו בלב העיר.
אם נרצה שהתיאטרון יהיה רווחי, אז הוא יצטרך להיות גדול ומרווח כדי שיכיל הרבה אנשים. אבל אם התיאטרון יהיה גדול ומרווח ויבנה בלב העיר, אז הוא יעלה 10 מיליון זוזים פרסיים.
אבל לוייזתא היזם אין 10 מיליון זוזים פרסיים.
לכן, וייזתא היזם מסיק כי התיאטרון יוקם במקום לא נגיש לתושבים או שלא יהיה גדול ומרווח.

א. תרגמו את ניתוח המצב לשפת הפסוקים, תוך שימוש בסימונים הבאים:
N – נגיש לתושבים, L – בלב העיר, Y – יכיל הרבה אנשים,
G גדול ומרווח, M – מחירו יעלה על..., R – רווחי.

ב. הצרינו את ההנחות והמסקנה לשפת הפסוקים ובדקו האם המסקנה תקפה, ללא שימוש בטבלת אמת.

7) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות (כאשר p,q,r פסוקים אטומיים):

א. $(p\vee q)\Rightarrow p$

ב. $(p\vee q)\Rightarrow q$

ג. $(p\to q)\Rightarrow q$

ד. $p,p\to q\Rightarrow q$

ה. $(p\to q)\wedge(p\to r)\wedge p\Rightarrow r$

ו. $r\Rightarrow(p\to q)\wedge(p\to r)\wedge p$

ז. $A\to B,C\to B,D\to(A\vee C),D\Rightarrow B$

ח. $(A\vee B\to D),D\to(C\vee P),P\to Q,(\neg C)\wedge(\neg Q)\Rightarrow\neg A$

ט. $(B\to(C\wedge(\sim A)))\ ,\ (((\sim B)\vee C)\to D)\ ,\ (E\to(\sim D))\models(A\to\sim E)$

8) נתון כי α,β,γ פסוקים לאו דווקא אטומים.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם α סתירה וגם $\alpha \Rightarrow \beta\vee\gamma$, אז $\beta \Rightarrow \neg\gamma$.

ב. אם α טאוטולוגיה וגם $\alpha \Rightarrow \beta\vee\gamma$, אז $\neg\beta \Rightarrow \gamma$.

ג. אם $\alpha \Rightarrow \beta\vee\gamma$, אז $((\alpha\Rightarrow\beta)\vee(\alpha\Rightarrow\gamma))$.

ד. אם $((\alpha\Rightarrow\beta)\vee(\alpha\Rightarrow\gamma))$, אז $\alpha \Rightarrow \beta\vee\gamma$.

ה. אם $\alpha \Rightarrow \beta\wedge\gamma$, אז $((\alpha\Rightarrow\beta)\wedge(\alpha\Rightarrow\gamma))$.

ו. אם $((\alpha\Rightarrow\beta)\wedge(\alpha\Rightarrow\gamma))$, אז $\alpha \Rightarrow \beta\wedge\gamma$.

ז. אם $\alpha\Rightarrow(\beta\to\gamma)$, אז $(\alpha\to\beta)\Rightarrow\gamma$.

ח. אם $(\alpha\to\beta)\Rightarrow\gamma$, אז $\alpha\Rightarrow(\beta\to\gamma)$.

ט. אם $\alpha\vee\beta\Rightarrow\gamma$, אז $(\alpha\Rightarrow\gamma)\vee(\beta\Rightarrow\gamma)$.

י. אם $(\alpha\Rightarrow\gamma)\vee(\beta\Rightarrow\gamma)$, אז $\alpha\vee\beta\Rightarrow\gamma$.

יא.אם $\alpha|=\beta\to\gamma$, אז $\alpha,\beta|=\gamma$.

יב. אם $\alpha|=\beta\to\gamma$, אז $\alpha\vee\beta|=\gamma$.

9) עבור α, פסוק אטומי או מורכב, נגדיר את הקבוצה $F_\alpha=\{\gamma|\alpha\Rightarrow\gamma\}$.
כלומר, F_α היא קבוצת כל הפסוקים שנובעים טאוטולוגית מהפסוק α.
הוכיחו כי $\alpha\equiv\beta$ אם ורק אם $F_\alpha=F_\beta$.

10) הוכיחו כי ההנחה A גוררת טאוטולוגית את המסקנה $\neg(\neg A)$,
בעזרת כללי ההיסק הבאים:

1. $\Rightarrow p\to p$
2. $p\Rightarrow q\to p$
3. $p\to q\ ,\ p\to(\neg q)\Rightarrow\neg p$

11) הוכיחו שההנחות הבאות גוררות טאוטולוגית את המסקנה A

$B \vee D$

$C \rightarrow B$

$D \rightarrow (A \vee C)$

$\neg B$

מותר להשתמש רק בכללי ההיסק הבאים:

$P \Rightarrow Q \vee P$

$P \wedge Q \Rightarrow P$

$P \wedge Q \Rightarrow Q$

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$

$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$

$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$

$P \Rightarrow \neg\neg P$

$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$

קבוצת קשרים שלמה

שאלות

1) הביעו את הקשרים הבאים:

א. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ב. קשר ה- $\vee$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ג. קשר ה- $\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ד. קשר ה- $\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ה. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ו. הקשר $\wedge$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ז. קשר ה- $\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ח. קשר ה- $\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ט. הוכיחו כי הקבוצה $\{\downarrow\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

י. נתון f קשר טרינארי המוגדר כך: $f(x,y,z)=x\rightarrow\neg(y\rightarrow z)$.
הוכיחו כי $\{f\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

יא. הביעו את הקשר $f(x,y,z)=x\rightarrow\neg(y\rightarrow z)$ באמצעות $\downarrow$ בלבד.

יב. הביעו את הקשר $\downarrow$ באמצעות $f(x,y,z)=x\rightarrow\neg(y\rightarrow z)$ בלבד.

צורות נורמליות

שאלות

1) בסעיפים הבאים רשמו צורה דיסיונקטיבית-נורמלית (DNF) וצורה קוניונקטיבית-נורמלית (CNF) של הפסוקים:

א. $p \to q$

ב. $(p \vee q) \wedge \neg r$

ג. $(p \to q) \to (r \to \neg q)$

תחשיב הפרדיקטים

שאלות

1) לכל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה ורשמו את שלילתה ללא שימוש בקשר השלילה. במקרה שהטענה נכונה נמקו זאת, ובמקרה שהטענה אינה נכונה הביאו דוגמה נגדית.

א. $\forall x\in\mathbb{N}\left(\exists y\in\mathbb{N}\left(x<y\right)\right)$

ב. $\forall x\in\mathbb{N}\left(\exists y\in\mathbb{N}\left(x>y\right)\right)$

ג. $\forall x,y\in\mathbb{R}\left(x>y\right)\rightarrow\exists z\in\mathbb{R}\left(x>y+z\right)$

ד. $\forall x\in\mathbb{R}\left(x>0\right)\rightarrow\left(\exists n\in\mathbb{N}\left(x>\tfrac{1}{n}\right)\right)$

ה. $\forall x\in\mathbb{R}\left(x\neq 0\rightarrow\forall y\in\mathbb{Z}\exists z\in\mathbb{R}\left(xz=y\right)\right)$

ו. $\forall x\in\mathbb{N}\left(x\geq 1\rightarrow\forall y\in\mathbb{N}\exists z\in\mathbb{N}\left(xz=y\right)\right)$

ז. $\forall x\in\mathbb{R}\left(x>0\rightarrow\exists y\in\mathbb{N}\left(xy>1\right)\right)$

ח. $\forall x\in\mathbb{R}\forall y\in\mathbb{R}\left(xy=x\wedge x+y<5\right)\rightarrow y<4\tfrac{1}{2}$

ט. $\forall x\in\mathbb{R}\left(\left(x>0\right)\rightarrow\forall y\in\mathbb{R}\left(\exists n\in\mathbb{N}\left(nx>y\right)\right)\right)$

2) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות, ורשמו את השלילה של כל טענה, כאשר הקשר $\neg$ מופיע רק לצד פרדיקטים. במקרה של הפרכה הדגימו עולם דיון מתאים עבורו הטענה לא מתקיימת, והסבירו מדוע הטענה לא מתקיימת.

א. $\forall x\,P(x)\rightarrow\exists x\,P(x)$

ב. $\exists x\,P(x)\rightarrow\forall x\,P(x)$

ג. $\left(\forall x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\rightarrow\left(\forall x\,P(x)\wedge\forall x\,Q(x)\right)$

ד. $\left(\forall x\,P(x)\wedge\forall x\,Q(x)\right)\rightarrow\left(\forall x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)$

ה. $\left(\forall x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)\rightarrow\left(\forall x\,P(x)\vee\forall x\,Q(x)\right)$

ו. $\left(\forall x\,P(x)\vee\forall x\,Q(x)\right)\rightarrow\left(\forall x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)$

ז. $\left(\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\rightarrow\left(\exists x\,P(x)\wedge\exists x\,Q(x)\right)$

ח. $\left(\exists x\,P(x)\wedge\exists x\,Q(x)\right)\rightarrow\left(\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)$

ט. $\left(\exists x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)\rightarrow\left(\exists x\,P(x)\vee\exists x\,Q(x)\right)$

י. $\left(\exists x\,P(x)\vee\exists x\,Q(x)\right)\rightarrow\left(\exists x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)$

3) בעולם הדיון $\mathbb{Z}$, נסמן

$P(x): x^2-8x+15=0$

$Q(x): x \text{ is odd}$

$R(x): x>0$

$L(x): x^2+2x+2=0$

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $\forall x\left[P(x)\to Q(x)\right]$

ב. $\forall x\left[Q(x)\to P(x)\right]$

ג. $\exists x\left[P(x)\to Q(x)\right]$

ד. $\exists x\left[Q(x)\to P(x)\right]$

ה. $\forall x\left[L(x)\to Q(x)\right]$

ו. $\exists x\left[L(x)\to Q(x)\right]$

ז. $\exists x\left[R(x)\to P(x)\right]$

ח. $\forall x\left(\neg Q(x)\to \neg P(x)\right)$

ט. $\forall x\left[\left(P(x)\vee Q(x)\right)\to R(x)\right]$

י. $\exists x\left[P(x)\to\left(Q(x)\wedge R(x)\right)\right]$

יא. $\forall x\left[P(x)\to\left(Q(x)\wedge R(x)\right)\right]$

נפנה עתה למספר שאלות בהצרנות. מותר להשתמש בסימני המשתנים x,y,z, סימני הקבוצה $A,B,C,\cdots,\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$, סוגריים, קשרים, כמתים, הפרדיקטים $(,)\subseteq,\in,=,\neq,\exists,\forall,\vee,\wedge,\rightarrow,\leftrightarrow,<,>$, וכן סימנים נוספים הנתונים בגוף השאלה.

שימו לב: <u>אסור להשתמש בקשר השלילה</u> ואין להשתמש בסימן $\notin$.

4) הצרינו כל אחת מהטענות הבאות:

א. לכל מספר ממשי אין עוקב מידי (כלומר, שאין מספר ראשון מיד אחריו).

ב. אין קבוצה שמכילה את כל הקבוצות (מותר להשתמש בסימן $\notin$).

ג. לכל מספר שאינו ראשוני יש לפחות שני מחלקים שונים.
(מותר להשתמש ב- P עבור קבוצת המספרים הראשוניים וב- $\notin$)

ד. למספר הטבעי הכי גדול אין מחלקים (ברור שאין, אבל צריך להצרין).

ה. לא כל מספר טבעי הוא ראשוני.

ו. כל קבוצה אינה שקולה לקבוצת החזקה שלה.

ז. לכל שני מספרים טבעיים שונים יש מחלק משותף.

ח. בכל קבוצה בת לפחות שלושה איברים שונים אין איבר מקסימלי.

ט. לא בכל תת קבוצה של ממשיים יש איבר מינימלי.

י. תהי פונקציה $f:X\rightarrow Y$.
נגדיר את הפונקציה $G:P(X)\rightarrow P(Y)$ כך: $G(B)=\{x\in X|f(x)\in B\}$.
הצרינו את הטענה: אם f על אז G ח.ח.ע.
השתמשו רק בסימנים הבאים:
סימני המשתנים x,y,B,C, סימני הקבוצות X,Y, סימן הפונקציה f, סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים.
שימו לב: <u>אסור להשתמש</u> בסימנים G ו- P. יש להשתמש בהגדרותיהם כדי להחליפם בסימנים אחרים.

יא. לכל מספר ממשי יש לכל היותר שני מספרים ממשיים שונים זה מזה שריבועם שווה לו.

יב. הצרינו את הטענה: לכל פונקציה $f:A\rightarrow B$ ולכל פונקציה $g:B\rightarrow A$, אם $g\circ f=Id_A$, אז f היא על.
מותר להשתמש בסימנים הבאים ורק בהם: סימני המשתנים $x_1,x_2,\cdots$, קשרים $\rightarrow,\leftrightarrow,\wedge,\vee$, והסימנים f,g, A^B,B^A, $\in,(,),\forall,\exists$.
למען הסר ספק: אסור להשתמש ב- d_A וב- $\circ$.

יג. מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מאחד שמחלקיו היחידים הם הוא עצמו ו-1. הצרינו את הטענה הבאה:
לכל מספר טבעי, בתחום שבין המספר עצמו לפעמיים המספר (כולל קצוות) יש לפחות מספר ראשוני אחד.
מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים $x_1,x_2,\cdots$,

הקשרים $\vee,\wedge,\leftrightarrow,\leftrightarrow$ והסימנים $|,=,\cdots,1,2,3,\le,\mathbb{N},\in,(,),\forall,\exists$.
הסימן | פירושו מחלק.

יד. הצרינו את הטענה הבאה: בקבוצה A יש לכל היותר שני מספרים טבעיים.
השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x,y,z, סימני הקבוצות $\mathbb{N}$, A וכן סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים.

טו. הצרינו את הטענה: לא תמיד נכון שאם $A\subseteq B$ אז $A\sim B$.
מותר להשתמש רק בסימנים הבאים: סימני הקבוצות A,B (מותר לצרף אותם לקבוצה בחזקת קבוצה), סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים.
אין להשתמש בקשר השלילה.

טז. הצרינו את הטענה הבאה: קבוצת הפונקציות החח"ע מהממשיים לטבעיים אינה ריקה.
השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x,y, סימני הקבוצות $\mathbb{R},\mathbb{N}$ (וצירופי חזקות שלהן), סימני הפונקציות f,g, סוגריים, קשרים, וכמתים: $=,\neq,\in,\{,\},(,),\leftrightarrow,\rightarrow,\vee,\wedge,\forall,\exists$.

יז. הצרינו את כלל הכפל של אי-שוויון ממשי (קטן או שווה) במספר ממשי שונה מאפס.
מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים $x_1,x_2,\cdots$,
הקשרים $\vee,\wedge,\leftrightarrow,\leftrightarrow$ והסימנים $0,\le,\mathbb{R},\in,(,),\forall$.
דוגמה לכלל הזה היא: מאי השוויון $3.14\le\pi$ (על ידי כפל במינוס חצי) לקבל את אי השוויון $-0.5\pi\le-1.57$.

5) נתונה הקבוצה $\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\forall y\left[\left(y\in\{t\in\mathbb{N}|t>3\}\rightarrow(y>x)\right)\right]\right\}$.
כתבו אותה בצורה $\{x\in\mathbb{R}|.....\}$, כך שבאגף ימין לא יופיע אף משתנה חוץ מ- x.

6) תארו במדויק את הקבוצה:
$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\exists y\in\mathbb{N}\ \left(x=y^2\right)\rightarrow(x>2)\right\}-\left\{x\in\mathbb{R}\middle||x|>1\right\}.$$

תרגול בשיטות ההוכחה השונות

שאלות

1) הוכיחו:

א. אם $m,n \in \mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז $m+n$ אי-זוגי.

ב. אם $m,n \in \mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז mn זוגי.

ג. אם $m,n \in \mathbb{Z}$ מספרים אי-זוגיים, אז $m+n$ זוגי.

ד. אם $n \in \mathbb{N}$ אי-זוגי, אז קיימים $m,k \in \mathbb{N}$, כך ש- $m^2 - k^2 = n$.
רמז: חפשו $m,k \in \mathbb{N}$ עוקבים.

ה. אם $a,b,c \in \mathbb{N}$ וגם $a\,|\,b$ וגם $a\,|\,c$, אז $a\,|\,b+c$.

2) הוכיחו:

א. קיימים אינסוף מספרים ראשוניים (נסו בצורה ישירה ועל דרך השלילה).

ב. קיימים $x,y \notin \mathbb{Q}$, כך ש- $x^y \in \mathbb{Q}$.

ג. יש אינסוף שלשות פיתגוריות.
כלומר, יש אינסוף פתרונות בשלמים למשוואה $x^2 + y^2 = z^2$.

ד. לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים רצף של n מספרים טבעיים עוקבים, שאף אחד מהם אינו ראשוני.

3) הוכיחו בדרך השלילה:

א. שלא קיים טבעי הכי גדול.

ב. שלכל מספר טבעי קיים מספר טבעי גדול ממנו.

ג. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

ד. שלא קיימים $p,t \in \mathbb{Q}$, כך ש- $p-t \notin \mathbb{Q}$.

ה. שלא קיימים $p \in \mathbb{Q},\ r \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, כך ש- $p+r \in \mathbb{Q}$.

ו. שלא קיים $q \in \{x \,|\, 0<x\in\mathbb{Q}\}$, כך ש- $q = \min\{x \,|\, 0<x\in\mathbb{Q}\}$.

ז. שלכל $q \in \{x \,|\, 0<x\in\mathbb{Q}\}$ מתקיים $q \neq \min\{x \,|\, 0<x\in\mathbb{Q}\}$.

4) הוכיחו בקונטרה-פוזיציה:

א. אם $n\in\mathbb{N}$, כך ש- n^2 זוגי, אז n זוגי.

ב. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים, כך ש- m זוגי, אז n זוגי או m זוגי.

ג. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים, כך ש- m אי-זוגי, אז n אי-זוגי וגם m אי-זוגי.

ד. אם $x,y\in\mathbb{R}$, כך ש- $x+y$ אי-רציונלי, אז לפחות אחד מהמספרים x,y הו אי-רציונלי.

ה. אם A,B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x\notin A\cap B$, אז $x\notin A$ או $x\notin B$.

ו. אם A,B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x\notin A\cup B$, אז $x\notin A$ וגם $x\notin B$.

ז. אם A,B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x\notin A$, אז $x\notin A\cap B$.

ח. אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$, אז $A\cap C=\varnothing$.

ט. אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$, אז $A(-C)\cap B=\varnothing$.

י. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$, אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו, תוך הפרדה למקרים, שאם $z\in\mathbb{Z}$, כך ש- z לא מתחלק ב- 3, אז $z^2=1\bmod(3)$.

ב. הוכיחו או הפריכו:

אם $z\in\mathbb{Z}$, כך ש- z לא מתחלק ב- 4, אז z^2 לא מתחלק ב- 4.

6) הוכיחו בדרך השלילה:

א. אם $n\in\mathbb{N}$, כך ש- $n\bmod(3)=2$, אז n הוא לא ריבוע של אף מספר טבעי.

ב. אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$, אז $A\subseteq B$.

ג. אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$, אז $B\subseteq A$.

מתמטיקה בדידה

פרק 2 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) לגבי כל אחד והממדים הבאים רשמו ב- $\square$ את הסימן המתאים, $\not\subseteq,\subset,\subseteq,\notin,\in$.
שימו לב שתיתכן יותר מתשובה אחת. אם התשובה היא $\not\subseteq$, נמקו.

א. $1\square\{1,\{1\}\}$
ב. $\{1\}\square\{1,\{1\}\}$
ג. $\{8,\varnothing\} \square \{1,2,8\}$
ד. $\varnothing \square \{1,2\}$
ה. $\varnothing \square \{\varnothing,1,2\}$
ו. $\{2\}\square\{\{1,\{2\}\}\}$
ז. $\{2\} \square \{2,\{2,\{2\}\}\}$
ח. $\{2\} \square \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$
ט. $\{2\} \square \{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$
י. $\{\{2\},\varnothing\} \square \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$
יא. $\varnothing \square \{1,\{\varnothing\}\}$
יב. $\{\varnothing\} \square \{1,\{\varnothing\}\}$
יג. $\{1,2\} \square \{1,\{2\}\}$
יד. $1 \square \mathbb{N}$
טו. $\{1\} \square \mathbb{N}$
טז. $1 \square \{\mathbb{N}\}$
יז. $\{1\} \square \{\mathbb{N}\}$

תשובות סופיות

1) א. $\in$ ב. $\in,\subseteq,\subset$ ג. $\notin,\not\subseteq$ ד. $\notin,\subseteq,\subset$ ה. $\in,\subseteq,\subset$
ו. $\notin,\not\subseteq$ ז. $\notin,\subseteq,\subset$ ח. $\in,\subseteq,\subset$ ט. $\in,\subseteq,\subset$ י. $\notin,\not\subseteq$
יא. $\notin,\subseteq,\subset$ יב. $\in,\not\subseteq$ יג. $\notin,\not\subseteq$ יד. $\in,\notin$ טו. $\notin,\subseteq,\subset$
טז. $\notin$ יז. $\notin,\not\subseteq$

פעולות על קבוצות

שאלות

1) עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $(A\cup C)\setminus B$

ב. $(A\cap B)\cup C$

ג. $A\cap(B\cup C)$

ד. $P(A)$

ה. $C\setminus A$

2) עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$:

א. האם $B\subseteq C$?

ב. האם $\{1\}\subseteq B$?

ג. האם $\{1\}\subseteq A$?

ד. האם $\{1\}\in P(A)$?

ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$?

ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$?

ז. האם $\{\{1\},\varnothing\}\subseteq P(A)$?

3) עבור $A=\{1,\{3,*\},\varnothing\}, B=\{4,\varnothing\}$, חשבו:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $A-B$

ד. $B-A$

ה. $A\oplus B$

תשובות סופיות

1) א. $\{1,2,6\}$ ב. $\{1,3,4,6\}$ ג. $\{1,3\}$ ד. $2 \notin P(A)$

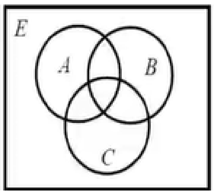
2) א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.
ה. לא. ו. כן. ז. כן.

3) א. $\{1,\{3,*\},\varnothing,4\}$ ב. $\{\varnothing\}$ ג. $\{1,\{3,*\}\}$ ד. $\{4\}$
ה. $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

דיאגרמת ון

שאלות

1) באיור שלהלן דיאגרמת ון.



קווקוו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:

א. $(A-B)-C$

ב. $A-(B-C)$

ג. $A\cap B^c$

ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$

ה. $(A\cap B)\cap C$

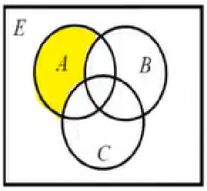
ו. $A\cap(B\cap C)$

ז. $(A\cup B)\cup C$

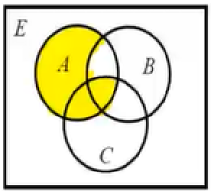
ח. $A\cup(B\cup C)$

תשובות סופיות

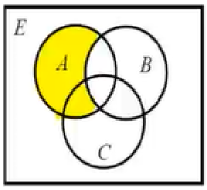
1) א.



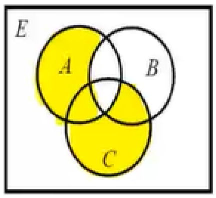
ב.



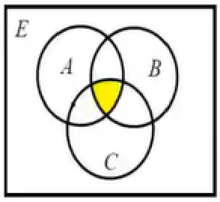
ג.



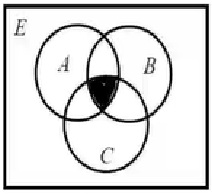
ד.



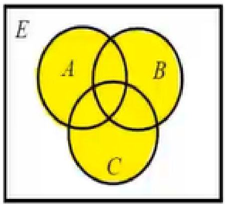
ה.



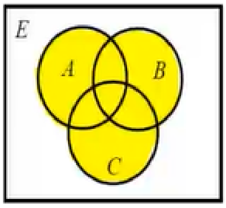
ו.



ז.



ח.



קריאת קבוצות

שאלות

1) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, רשמו בשתי דרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים, $\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,...\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי, $A=\{1,4,9,16,25,36,49,...\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי,
$B=\{2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17,18,...\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים,
$C=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},...\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2,
$D=\{2^1,2^2,2^3,...\}=\{2,4,8,16,32,...\}$.

2) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $C=\{3n-1 \mid n\in\mathbb{N}\}$

ב. $K=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\geq 2\rightarrow x^2>41\}$

ג. $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\geq 7\rightarrow x<20\}$

ד. $C=\{3n-1 \mid n\in\mathbb{N}\wedge\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}=\{3n-1 \mid \sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$

ה. $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\geq 8\rightarrow x^2<67\}$

תשובות סופיות

1) א. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\left|\frac{n+1}{2}\in\mathbb{N}\right.\right\}$, דרך 2: $\{2n-1|n\in\mathbb{N}\}$.

ב. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n^2|n\in\mathbb{N}\}$.

ג. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\notin\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n|n\in\mathbb{N}\wedge\forall k\in\mathbb{N}\ n\neq k^2\}$.

ד. דרך 2: $\{\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}\}$.

ה. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\exists k\in\mathbb{N}\ n=2^k\}$, דרך 2: $\{2^n|n\in\mathbb{N}\}$.

2) א. $C=\{2,5,8,11,14,17,20,...\}$

ב. $\mathbb{Z}-\{\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,...\}$

ג. $\mathbb{Z}-\{20,21,22,23,...\}$

ד. $\{2,11,26,74,107,146,...\}$

ה. $\mathbb{Z}-\{9,10,11,12,...\}$

שאלות הוכחה

שאלות

בכל אחת משאלות הפרק יש לפעול כפי שמתואר בשאלה 1.

1) תהיינה A,B קבוצות.
אם הטענה נכונה, ציינו זאת ותנו נימוק קצר מדוע.
אם הטענה אינה נכונה, ציינו זאת, ותנו דוגמה נגדית.
יש ערך רב יותר לדוגמה מינימלית; בדקו האם בדוגמה הנגדית יש פרטים מיותרים והסירו אותם.
אם טענות יב-כא נכונות, נסו להוכיחן, ובמיוחד את טענה יב, שבה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x \notin A$, אז $x \notin A \cup B$.

ב. אם $x \notin A \cup B$, אז $x \notin A$.

ג. אם $x \notin A$, אז $x \notin A \cap B$.

ד. אם $x \notin A \cap B$, אז $x \notin A$.

ה. אם $x \notin A$, אז $x \notin A - B$.

ו. אם $x \notin A - B$, אז $x \notin A$.

ז. אם $x \in B$, אז $x \notin A - B$.

ח. אם $x \notin A - B$, אז $x \in B$.

ט. $x \notin A - B \Leftrightarrow x \notin A$

י. $x \notin A - B \Leftrightarrow x \in B$

יא. השלימו: $x \notin A - B \Leftrightarrow$ ______.

יב. $A \subseteq B \cap C \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$

יג. $A \subseteq B \cup C \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$

יד. אם $A = A \cup B$, אז $A \subseteq B$.

טו. אם $A = A \cup B$, אז $B \subseteq A$.

טז. אם $A = A \cap B$, אז $A \subseteq B$.

יז. אם $A = A \cap B$, אז $B \subseteq A$.

יח. אם $A \subseteq B$, אז $A = A \cup B$.

יט. אם $B \subseteq A$, אז $A = A \cup B$.

כ. אם $A \subseteq B$, אז $A = A \cap B$.

כא. אם $B \subseteq A$, אז $A = A \cap B$.

2) תהיינה A,B,C קבוצות.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
א. אם $A=A-B$, אז $B=\varnothing$.
ב. אם $A=A-B$, אז $A\cap B=\varnothing$.
ג. אם $A=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.
ד. אם $B=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.
ה. אם $A\cap B=A$, אז $A=A\cup B$.
ו. אם $A\cap B=B$, אז $A=A\cup B$.
ז. אם $A\cup B=A\cup C$ וגם $A\cap B=A\cap C$ אז $B=C$.
ח. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$
ט. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$
י. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$
יא. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$
יב. $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$
יג. $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$
יד. להלן שתי טענות. הוכיחו את הנכונה והפריכו את השגויה:
1. $A\cap B\cap C\subseteq A\oplus B\oplus C$
2. $A\oplus B\oplus C\subseteq A\cap B\cap C$

תשובות סופיות

1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x\in B \ V \ x\notin A$ יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.

2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד. 1. נכונה. 2. לא נכונה.

דרך השלילה

שאלות

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם α, אז β, נוכיח אם $\neg\beta$, אז $\neg\alpha$.

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

1) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$, אז $A\cap C=\varnothing$
2) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$, אז $A\subseteq B$.
3) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$, אז $(A-C)\cap B=\varnothing$.
4) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$, אז $B\subseteq A$.
5) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$, אז $A\cap C=\varnothing$.
6) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C=B\oplus C$, אז $A\cap C=\varnothing$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

קבוצת חזקה

שאלות

1) עבור $A=\{3,\{\varnothing\}\}$, $B=\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}$, $C=\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}$
רשמו את הקבוצות הבאות:
א. את $P(C)$, $P(B)$ ואת $P(A)$.
ב. $P(A)\cap B$, $P(A)\cap A$, $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$.

2) עבור הקבוצות $B=\{1,\varnothing\}$, $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,
א. רשמו את $P(A)$ ואת $P(B)$.
ב. רשמו את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$.
ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$.

3) רשמו את $P(\varnothing)$, את $P(P(\varnothing))$ ואת $P(P(P(\varnothing)))$.

4) תהיינה A,B שתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:
א. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$
ב. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$
ג. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$
ד. $P(A)\cap A\neq\varnothing$
ה. $P(A)\cap A=\varnothing$
ו. תנו דוגמה לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$.
ז. אם $\{A\}\subseteq P(B)$, אז $P(A)\subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכיחו בדרך השלילה:
ח. אם $P(A)\subseteq P(A-B)$, אז $A\cap B=\varnothing$.
ט. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$, אז $(B\subseteq A)\vee(A\subseteq B)$ (שאלה קשה).

5) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן, ונתון $P(B)-P(A)=P(B)-\{\varnothing\}$.
הוכיחו כי $B-A=B$.

תשובות סופיות

1) א. $P(A)=\{\varnothing,\{3\},\{\{\varnothing\}\},\{3,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{\{3\}\},\{\{4,\varnothing\}\},\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}\}$,
$P(C)=\{\varnothing,\{3\},\{\{3\}\},\{\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\}\},\{3,\{\varnothing,3\}\},\{\{3\},\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}\}$.

ב. $P(A)\cap B=\{\{3\}\}$, $P(A)\cap A=\varnothing$, $P(C)\cap C=\{\{3\}\}$, $C-P(C)=\{3,\{\varnothing,3\}\}$.

2) א. $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\varnothing\},\{1,\varnothing\}\}$.

ב. $P(A)-P(B)=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)-P(A)=\{\{1\},\{1,\varnothing\}\}$.

ג. $P(A)-A=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(A)-\{A\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$.

3) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$, $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. ראו סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.

5) הוכחה.

מכפלה קרטזית

שאלות

1) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו:

א. $(A=B) \Leftrightarrow (A\times A=B\times B)$

ב. $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B)) \Leftrightarrow (A\times B=B\times A)$

ג. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים
$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

ד. אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$, אז
$(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$.

ה. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים
$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

2) הוכיחו או הפריכו:
תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$.
אז קיימות $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$, כך ש-$S=C\times D$.

3) הוכיחו או הפריכו:
קיימות שתי קבוצות A,B, כך ש-$|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$ (סימון $|\ |$ על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

4) הוכיחו או הפריכו:
לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$.

5) הדגימו שלוש קבוצות A,B,C, כך ש-$(A\times(B\times C))\cap((A\times B)\times C)\neq\varnothing$.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
2) לא נכונה.
3) לא נכונה.
4) נכונה.
5) ראו סרטון.

מתמטיקה בדידה

פרק 3 - פונקציות

תוכן העניינים

מבוא לפונקציות:

שאלות:

1) בכל אחד מהאיורים הבאים זהה את התחום ואת הטווח ובחר את האפשרות המתאימה:

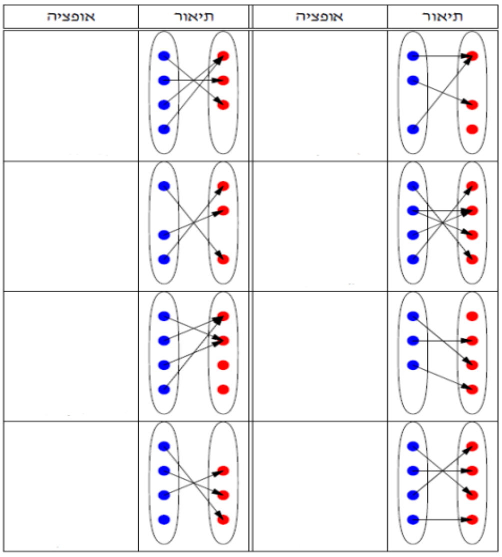
א. זו אינה פונקציה.

ב. זו פונקציה חח״ע שאינה על.

ג. זו פונקציה על שאינה חח״ע.

ה. זו פונקציה שאינה חח״ע ואינה על.

ו. זו פונקציה שהיא גם חח״ע וגם על.



2) עבור הפונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע״י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).

חשב את:

א. $g(\pi)\,,\,g(-\pi)$

ב. $\operatorname{Im}(g)$

ג. מצא מקור ל-7-.

ד. מצא את כל המקורות ל-7-.

ה. האם כל איבר בטווח הוא גם תמונה?

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבע האם היא חח״ע? האם על? הוכח טענותיך.

א. פונקציית הזהות $I_A:A\to A$ המוגדרת ע״י $I_A(x)=x$.

ב. $h_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע״י $h_1(x)=2x+1$.

ג. $h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע״י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).

ד. $h_3:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע״י $h_3(x,y)=x-y$.

ה. $h_4:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ מוגדרת ע״י $h_4(A,B)=A\cup B$ וחשב את $Im\,h_4$.

ו. $f_1:(0,\infty)\to(0,2)$ מוגדרת ע״י $f_1(x)=\dfrac{2x}{x+3}$.

ז. $f_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$ מוגדרת ע"י $f_2(x)=x+\frac{1}{x}$.

ח. $f_3:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_3(x)=x-\frac{1}{x}$.

ט. $f_4:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_4(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

י. $f_5:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{Z})$ מוגדרת ע"י $f_5(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

יא. $f_6:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_6(X)=X\Delta\mathbb{Z}$.

יב. $f_7:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_7(n)=\text{the sum of the digits of } n$.

יג. $f_8:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $f_8(\langle x,y\rangle)=3x+2y$.

יד. $f_9:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(\langle n,k\rangle)=2^{n-1}(2k-1)$.

טו. $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & else\end{cases}$.

4) בדוק אם הפונקציות הבאות חח"ע, על וחשב את תמונתן:

א. $f_9:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(x)=\begin{cases}\frac{n}{2} & 4|n\\ 2n+1 & else\end{cases}$ וחשב את $Im\, f_9$.

ב. $f_{10}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{10}(x)=\begin{cases}3x-1 & x<2\\ x-3 & x\geq 2\end{cases}$ וחשב את $Im\, f_{10}$.

ג. $f_{11}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{11}(x)=\begin{cases}x+1 & x\leq 1\\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & x>1\end{cases}$.

5) תהיינה $f,g:A\to A$ פונקציה. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f חח"ע.

ב. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f על.

ג. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f אינה קבועה.

ד. אם יש איבר ב-$Im(f)$ ללא מקור אז f על.

ה. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז f אינה על.

ו. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז g אינה על.

ז. אם $Im(f)=Im(g)$ אז $f=g$.

ח. לכל $D\subseteq A$, $D\neq\varnothing$ קיימת $f:A\to A$ כך ש-$Im(f)=D$.

6) נתונה $g:\mathbb{N}_{odd}\to\mathbb{N}$ פונקציה לא ידועה.

נגדיר $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא: $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ g(n) & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}$,

למשל: $h(34)=17$, $h(35)=g(35)$ שהוא מספר טבעי לא ידוע.

הוכח כי h אינה חח"ע.

מצא אינסוף מספרים טבעיים שונים $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $i\neq j$ מתקיים $h(x_i)=h(x_j)$.

7) נגדיר $F:(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times P(\mathbb{R}))\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $F((f,A))=\{x\in\mathbb{R}|\exists y\in A\ f(y)=x\}$.

א. עבור $A=\{2,3,4,5,17,18\}$, $g(x)=2x$, חשב: $F((g,A))$.

ב. בדוק האם f חח"ע והאם על.

ג. מצא את $\operatorname{Im}(F)$.

8) נגדיר $G:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $G(f)=\{\alpha\in\mathbb{N}|\exists\beta\in\mathbb{N}\quad f(\beta)=\alpha\}$.

א. חשב $G(f)$ עבור $f=I_{\mathbb{N}}$ פונקציית הזהות עבור $\mathbb{N}$

הפונקציה $f(n)\begin{cases}1 & n\in\mathbb{N}_{even}\\ 4 & else\end{cases}$ ועבור הפונקציה הקבועה 3.

ב. בדוק האם G חח"ע והאם על ומצא את $Im(G)$.

9) נגדיר פונקציה $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to P(\{0,1\}\times\{0,1\})$ באופן הבא:

$F(g)=\{(g(n),g(n+1))|n\in\mathbb{N}\}$. הוכח כי F אינה על.

10) נגדיר $F:\mathbb{N}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{R}|f(x)=1\}$.

הוכח כי F אינה חח"ע.

11) נגדיר פונקציה $F:\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{N}|f(n)=0\}$.

קבע האם F חח"ע ועל.

12) תהי $P_{even}(\mathbb{N})$ קבוצת כל תת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן זוגי.
ותהי $P_{odd}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן אי זוגי.
לדוגמה $\{1,3\}\in P_{even}(\mathbb{N}),\{1,3\}\notin P_{odd}(\mathbb{N})$ ולעומת זאת ,
$\{2,4,6\}\notin P_{even}(\mathbb{N}),\{2,4,6\}\in P_{odd}(\mathbb{N})$. לכל קבוצה A סופית של טבעיים נסמן
ב-$\max(A)$ את המספר הגדול ביותר ב-A וב-$\max(\varnothing)=0$.
הוכיחו כי הפונקציה $f:P_{even}(\mathbb{N})\to P_{odd}(\mathbb{N})$ המוגדרת על ידי $f(A)=A\cup\max(A)$
היא חח"ע אך אינה על.

13) נגדיר $H:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $H(\langle f,g\rangle)=\operatorname{Im} f\,\Delta \operatorname{Im} g$.
בדוק אם f חח"ע ועל.

פונקציות שחובה להכיר:

14) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא פונקציה כנדרש:

א. מצא $f:(0,1)\to(1,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.

ב. השתמש בפונקציה שמצאת בסעיף קודם כדי למצוא $f:(0,1)\to(0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.

ג. מצא $f:[2,5)\to[1,7)$ שהיא חח"ע ועל.

ד. עבור $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ מספרים נתונים מצא $f:[a,b]\to[c,d]$ שהיא חח"ע ועל.

ה. מצא $f:[1,3)\cup[4,8]\to[0,1]$ שהיא חח"ע ועל.

ו. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שהיא חח"ע ועל. מצא גם $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שמצאת.

ז. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.

ח. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע.

ט. מצא $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שהיא על. (רמז: סעיף קודם)

י. מצא פונקציה $f:\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{7}\to\mathbb{N}$ (כלומר $f:\mathbb{N}^7\to\mathbb{N}$) שהיא חח"ע.

יא. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times[0,1)\to[0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
מצא גם $g:[0,\infty)\to\mathbb{N}\times[0,1)$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

יב. מצא פונקציה $f:(0,1]\to(0,1)$ שהיא חח"ע ועל.

יג. מצא $F:[0,1)\times[0,1)\to[0,1)$ חח"ע ועל.

יד. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\{0,1\}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.
מצא גם $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\{0,1\}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

טו.מצא $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ שהיא חח״ע ועל.

טז.מצא $F:\{0,1\}^A\to P(A)$ חח״ע ועל. הוכח כי הפונקציה שמצאת היא אכן חח״ע ועל.

יז. מצא $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח״ע ועל.

יח.מצא $F:\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^2\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ כלומר $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח״ע ועל והוכח שהיא חח״ע ועל.

תמונה של קבוצה:

רקע:

צפה בשיעורים בנושא תמונה ותמונה הפוכה של קבוצה בטרם תענה על השאלות שבנושא זה.

x) $t\in f(D) \Leftarrow$ קיים $\alpha\in D$ כך ש- $f(\alpha)=t$

y) $f(\alpha)\in f(D) \Leftarrow \alpha\in D$

z) $\alpha\in f^{-1}(E) \Leftrightarrow F(\alpha)\in E$

שאלות:

1) נגדיר $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $g(n)=2n$ $K=\{1,8,17\}$.

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $g(K)$

ב. $g^{-1}(K)$

ג. $g(\mathbb{N})$

ד. $g(\mathbb{N}_{evev})$

ה. $g(\mathbb{N}_{odd})$

ו. $g^{-1}(\mathbb{N}_{evev})$

ז. $g^{-1}(\mathbb{N}_{odd})$

2) נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $f(x)=x^2-5x+4$ $M=\{0,4\}$.

נגדיר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $f(n)=\begin{cases}2n & n\in\mathbb{N}_{even}\\ 1 & else\end{cases}$ ותהי $E=\{1,5,6,8\}$.

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $f^{-1}(f(M))$

ב. $f(f^{-1}(M))$

ג. $f(f^{-1}(\{-3,4\}))$

ד. $f(f^{-1}(\{-3\}))$

ה. $f(f^{-1}(E))$

3) תהי $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $E\subseteq B$, $D\subseteq A$ שתי קבוצות.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. $f(D)=D$
ב. $f(D)\neq D$
ג. $f^{-1}(E)=E$
ד. $f^{-1}(E)\neq E$
ה. $f(D)\subseteq f(A)$
ו. אם $D\subset A$ אז $f(D)\subset f(A)$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).
ז. $f^{-1}(E)\subseteq A$
ח. אם $E\subset B$ אז $f^{-1}(E)\subset A$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).
ט. f על אם״ם לכל $y\in B$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing$.
י. f חח״ע אם״ם לכל $y\in A$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\})$ ריקה או בעלת איבר אחד.

4) בשאלה זו נבחן את השוויון: $f(D_1\cup D_2)=f(D_1)\cup f(D_2)$.
א. אשר את השוויון עבור $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע״י: $f(x)=x^2$.
$D_1=\{2,5\}\quad D_2=\{-2,4\}$
ב. הוכח כי שוויון זה מתקיים תמיד.
כלומר: תהי $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D_1\ ,\ D_2\subseteq A$.
הוכח כי: $f(D_1\cup D_2)=f(D_1)\cup f(D_2)$.

5) $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D_1\ ,\ D_2\subseteq A$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. $f(D_1\cap D_2)\subseteq f(D_1)\cap f(D_2)$
ב. $f(D_1\cap D_2)\supseteq f(D_1)\cap f(D_2)$
ג. אם f חח״ע אז $f(D_1\cap D_2)=f(D_1)\cap f(D_2)$.
ד. אם f על אז $f(D_1\cap D_2)=f(D_1)\cap f(D_2)$.
ה. אם $f(D_1\cap D_2)\neq f(D_1)\cap f(D_2)$ אז f אינה חח״ע.

6) $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $E_1\ ,\ E_2\subseteq B$.
הוכח כל אחת מהטענות הבאות:
א. $f^{-1}(E_1\cap E_2)=f^{-1}(E_1)\cap f^{-1}(E_2)$
ב. $f^{-1}(E_1\cup E_2)=f^{-1}(E_1)\cup f^{-1}(E_2)$

7) $f:A\to B$ פונקציה ותהי $D\subseteq A$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\subseteq D$

ב. $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\supseteq D$

ג. אם f חח"ע אז $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$.

ד. אם f לא חח"ע אז $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$.

ה. אם f על אז $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$.

ו. אם לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$ אז f על.

ז. אם $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$ אז f חח"ע.

ח. אם לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$ אז f חח"ע.

ט. אם $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$ אז f אינה חח"ע.

י. אם f על אז לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$.

יא. אם f לא על אז קיימת $D\subseteq A$ עבורה $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$.

יב. אם f לא חח"ע אז קיימת $D\subseteq A$ עבורה $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$.

8) $f:A\to B$ פונקציה ותהי $E\subseteq B$ הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\subseteq E$

ב. $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\supseteq E$

ג. $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\subseteq E$ או $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\supseteq E$.

ד. אם f חח"ע אז $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$.

ה. אם f על אז $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$.

ו. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f חח"ע.

ז. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f על.

ח. אם לא לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f לא על.

ט. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f היא פונקציית הזהות.

י. אם קיימת $E\subseteq B$ כך ש- $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\neq E$ אז קיים $\alpha\in A$ כך שלכל $\beta\in A$ מתקיים: $f\left(\beta\right)\neq\alpha$.

9) נתונות פונקציה $f:A\to B$ וקבוצות $C,D\subseteq A$.

א. הוכח כי: $f(C\cap D)\subseteq f(C)\cap f(D)$.

ב. הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית אז $f(C\cap D)=f(C)\cap f(D)$.

ג. הדגם קבוצות $C,D\subseteq \mathbb{N}$ ופונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש- f על וגם $f(C\cap D)\subset f(C)\cap f(D)$.

ד. הוכח כי: $f(C\cup D)=f(C)\cup f(D)$.

תשובות סופיות:

1) א. $\{2,16,18\}$ ב. $\{4\}$ ג. $\{4n \mid n\in \mathbb{N}\}$ ד. ראה סרטון.
ה. $\{4n+2 \mid n\in \mathbb{N}\}$ ו. $\mathbb{N}$ ז. $\varnothing$

2) א. $\{0,1,4,5\}$ ב. $\{0,4\}$ ג. $\{0,4\}$ ד. $\varnothing$ ה. $\{1,8\}$

3) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. לא נכון. ט. נכון. י. נכון.

4) הוכחה.

5) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.

6) הוכחה.

7) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.
ו. לא נכון. ז. לא נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. לא נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון.

8) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. לא נכון. י. נכון.

9) הוכחה.

הרכבת פונקציות

שאלות

1) חשבו את ההרכבה $f\circ g$ ו- $g\circ f$ במקרה שהן מוגדרות עבור הפונקציות הנתונות.

א. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=3x+7 \quad f(x)=2^{x^2-1}$

ב. $f,g:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ $\quad g(A)=\bar{A} \quad f(A)=A\cap\mathbb{N}$

ג. $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $\quad \mathrm{g}(n)=10n \quad f(n)=\text{The sum of } n\text{'s digits}$

ד. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\begin{cases}5 & x\ge 1\\ 2 & x<1\end{cases} \quad f(x)=\begin{cases}7 & x<3\\ 8 & x\ge 3\end{cases}$

ה. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 3\\ x & x>3\end{cases} \quad f(x)=2x-1$

2) חשבו את ההרכבה הבאה :

א. נגדיר $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ באופן הבא :

$g(x)=\begin{cases}3 & x\ge 1\\ 2 & x<1\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}4x+3 & x<5\\ 2x & x\ge 5\end{cases}$.

חשבו $g\circ f$.

ב. עבור $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$g(x)=\begin{cases}x+3 & x<2\\ 2x-1 & x\ge 2\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\ge 1\\ 4-3x & x<1\end{cases}$.

חשבו $f\circ g$.

3) בדקו את השוויון $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$ עבור הפונקציות הבאות :

א. $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=2x+3\ ,\ g(x)=2x+3\ ,\ h(x)=2x+3$

ב. $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=3^{x^2-7}\ ,\ g(x)=x^3+1\ ,\ h(x)=\dfrac{2}{\sqrt{|x|+3}}$

ג. $f,g,h:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ $\quad f(A)=A\cap\mathbb{N}\ ,\ g(A)=\bar{A}\ ,\ h(A)=A\triangle\mathbb{Z}$

שאלת חזרה

יהיו f ו- g פונקציות מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$ המוגדרות כך: $f(n)=\begin{cases}\frac{n+1}{2} & n \text{ odd}\\ n-1 & n \text{ even}\end{cases}$,

וכן לכל $n\in \mathrm{N}$, $g(n)=2n-1$.

הוכיחו או הפריכו:

א. f היא חח"ע.

ב. g חח"ע.

ג. f על $\mathbb{N}$.

ד. g על $\mathbb{N}$.

ה. $f\circ g$ היא פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

ו. $g\circ f$ היא פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

4) תהי $f:A\to B$ פונקציה הוכיחו כי $I_B\circ f=f$, $f\circ I_A=f$.
הסיקו כי לכל $f:A\to A$ מתקיים $f\circ I_A=I_A\circ f=f$ זה מראה כי פונקציית הזהות מתנהגת כמו 1 בכפל.

5) תהיינה $h:A\to B$, $g:B\to C$, $f:C\to D$ שלוש פונקציות.
הוכיחו כי $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.
המשמעות של תכונה זו היא שאפשר למקם סוגרים כרצוננו בדיוק כמו בכפל וחיבור רגילים.

6) תהי $f:A\to A$.
הוכיחו את הזהויות הבאות.
הערה: בשני הסעיפים האחרונים נתון כי f הפיכה.

א. $f^m\circ f^k=f^{m+k}$

ב. $f^2\circ f^{-5}=f^{2-5}=f^{-3}$ $\qquad$ $f^5\circ f^{-2}=f^{5-2}=f^3$

ג. הסק מסעיף קודם כי $f^m\circ f^{-k}=f^{m-k}$ והסק כי $f^0=I$

ד. $\left(f^m\right)^k=\left(f^m\right)^k=f^{mk}$

ה. $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$

ו. $\left(f^{-1}\right)^n=\left(f^n\right)^{-1}$

7) תהיינה $f,g:A\to A$.
הוכיחו כי $\operatorname{Im} f\circ g\subseteq \operatorname{Im} f$ ותנו דוגמה לפונקציות עבורן ההכלה היא הכלה ממש.

8) הוכיחו או הפריכו:
א. אם g היא פונקציה על אז $\operatorname{Im} f\circ g=\operatorname{Im} f$.
ב. אם $\operatorname{Im} f\circ g=\operatorname{Im} f$ אז g היא פונקציה על.

9) תהי $\mathbb{N}$ הטבעיים ותהי $B\subseteq\mathbb{N}$ תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה.
נגדיר $f:P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $f(X)=\begin{cases}X\cap B^C & X\cap B\neq\varnothing\\ X\cup B & X\cap B=\varnothing\end{cases}$.
לדוגמה, עבור $B=\{1,2\}$ מתקיים: $f(\{2,3\})=\{3\},\ f(\{3,4\})=\{1,2,3,4\}$.
א. הוכיחו כי אם $X\cap B=\varnothing$ אז $f(f(X))=X$.
ב. הוכיחו כי אם $B\subseteq X$ אז $f(f(X))=X$.
ג. הוכיחו כי אם X שייכת לתמונה של הפונקציה אז $f(f(X))=X$.
ד. האם הפונקציה חח"ע?
ה. האם הפונקציה על?

10) תהי A קבוצה ו-B תת קבוצה החלקית **ממש** ל-A. נתונות הפונקציות
$f,g:P(A)\to P(A)$ המוגדרות באופן הבא: $\begin{matrix} g(X)=X\cap B \\ f(X)=A-X \end{matrix}$.
הוכיחו או הפריכו: $f\circ g$ על.

11) הוכיחו או הפריכו:
הפונקציה $f;\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, המוגדרת על-ידי $f((x,y))=(3x+4y,4x+5y)$,
היא פונקציה הפיכה.

12) נגדיר פונקציה $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ כך: $h(x)=2x$
הוכיחו כי $\{f\circ h \mid f\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\}=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

13) מצאו $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שאינה פונקציה קבועה ואינה זהות כך ש- $f\circ f=f$.

14) נתונות שלוש פונקציות $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
הוכיחו כי אם $f\circ g$ חח״ע וגם $g\circ h$ חח״ע וגם $h\circ g\circ f$ על,
אז f,g,h שלושתן הפיכות.

15) תהיינה $g:A\to B,\ f:B\to C$ שתי פונקציות (בתנאים אלו $f\circ g:A\to C$).
הוכיחו או הפריכו (במקרה של הפרכה בחרו $A=B=C=\mathbb{N}$):
א. אם f חח״ע וגם g חח״ע אז $f\circ g$ חח״ע.
ב. אם $f\circ g$ חח״ע אז f חח״ע.
ג. אם $f\circ g$ חח״ע אז g חח״ע
ד. אם f על וגם g על אז $f\circ g$ על.
ה. אם $f\circ g$ על אז f על.
ו. אם $f\circ g$ על אז g על.
ז. אם $f\circ g$ חח״ע וגם g על אז f חח״ע.
ח. אם $f\circ g$ על וגם f חח״ע אז g על.
ט. אם f לא חח״ע וגם g לא על אז $f\circ g$ לא חח״ע או $f\circ g$ לא על.

16) תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה $f,g,h:A\to A$.
הוכיחו או הפריכו :
א. אם $g\circ f=h\circ f$ אז $g=h$.
ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f על אז $g=h$.
ג. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח״ע אז $g=h$.
ד. אם $f\circ g=f\circ h$ אז $g=h$.
ה. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f חח״ע אז $g=h$.
ו. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על אז $g=h$.

17) תהי A קבוצה ותהי $f:A\to A]$ פונקציה.
הוכיחו או הפריכו :
א. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$.
ב. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$ או ש- f היא פונקציה קבועה.
ג. אם $f\circ f=f$ וגם f חח״ע אז $f=I$.
ד. אם $f\circ f=f$ וגם f על אז $f=I$.

18) יהיו $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ הפריכו (שאלה קשה מאוד) :
א. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על וגם g,h חח״ע וגם אז $g=h$.
ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח״ע וגם g,h על אז $g=h$.
ג. אם $f\circ f\circ f=I$ אז $f\circ f=I$.
ד. אם $f\circ f\circ f=f\circ f$ אז $f\circ f=f$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה, ראו תשובות מפורטות באתר.

מתמטיקה בדידה

פרק 4 - יחסים

תוכן העניינים

יחסים – מושגי יסוד

שאלות

1) רשמו במפורש את היחסים כקבוצה של זוגות סדורים.
היחס R המוגדר מעל A להיות $aRb \Leftrightarrow b>a+3$, כאשר:

א. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

ב. $A=\{3,5,19,103\}$

ג. $A=\{5,6,7\}$

2) עבור $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, רשמו את היחסים הבאים כקבוצה מפורשת של זוגות:

א. $R_1=\{\langle x,y\rangle \mid x^2+y^2<5\}$

ב. $R_2=\{\langle x,y\rangle \mid x^2+y^2>5\}$

ג. $R_3=\{\langle x,y\rangle \mid x<y+2\}$

ד. $R_4=\{\langle x,y\rangle \mid x\cdot y>8\}$

3) עבור כל אחת מהקבוצות הבאות קבעו האם היא יחס, ובמידה וכן, מצאו קבוצה קטנה ביותר A, כך ש-R יחס מעל A.

א. $R=\{2,5,(7,8)\}$

ב. $R=\{(1,3),(3,7),(2,5)\}$

ג. $R=\{((1,2),(3,4)),((1,3),(2,4))\}$

4) עבור הקבוצות משאלה **1**, בכל מקרה בו הקבוצה היא יחס רשמו את $\mathrm{dom}(R)$ ואת $\mathrm{range}(R)$, ורשמו את היחס במטריצה.

5) נגדיר יחס R מעל הקבוצה $A\{1,2,3,4,5\}$, כך: $\langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow |y-x|>2$.

א. רשמו את R במפורש בעזרת $\langle\ldots\rangle$ ובעזרת דיגרף.

ב. חשבו את היחס R^{-1} ואת כל החזקות השונות של R.

ג. מצאו אם היחס R מקיים את התכונות הבאות ומה נובע מכך:

$R\cap R^{-1}\subseteq I_A,\ \ R=R^{-1},\ \ I_A\subseteq R,\ \ R^2\subseteq R$

6) תהי $A\{1,2,3,4\}$ ויהי R יחס מעל A.

איזו טענה נכונה:

א. ה- Domain של $R=\{(1,1),(2,2),(1,3)\}$ הוא $\{1,2\}$.

ב. ה- Range של $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ הוא $\{2,3,1\}$.

ג. ה- Domain של היחס $R=\{(1,1),(2,2),(1,3)\}$ שווה ל- Range של R^{-1}.

7) תהי $A\{1,2,5\}$ ויהי R יחס מעל A.

איזו טענה נכונה:

א. אם R הוא יחס הזהות $(R=I_A)$, אז $R=\{(1,1),(2,2),(5,5)\}$.

ב. אם R הוא היחס המלא, אז
$R=\{(1,1),(1,2),(1,5)(2,1),(2,2),(2,5),(5,1),(5,2),(5,5)\}$.

ג. אם R הוא יחס הזהות, אז $R=\left(\left(IR\right)^{-1}\right)^{-1}$.

8) תהיינה $C=\{5,6\}$, $B=\{a,b\}$, $A=\{1,2\}$, יהי R יחס כך ש- $R\subseteq A\times B$,
ויהי S יחס כך ש- $S\subseteq B\times C$.

איזו טענה נכונה:

א. $SR=\varnothing$

ב. אם R ו- S יחסים מלאים, אז ב- RS יש ארבעה איברים.

ג. אם R הוא היחס הריק ו- S הוא היחס המלא, אז $RS=S$.

ד. ה- Domain שווה ל- Range של $S^{-1}R^{-1}$.

9) תהי $A=\{1,2,5\}$ ויהי $R=\{(1,1),(1,2),(2,5),(5,5)\}$ יחס מעל A.

א. הביעו את R בצורה של גרף.

ב. הביעו את R^{-1} בצורה של גרף.

ג. הביעו את יחס הזהות מעל A בצורה של גרף.

ד. הביעו את היחס המלא מעל A בצורה של גרף.

ה. הביעו את יחס הזהות מעל A בצורה של מטריצת סמיכויות.

ו. הביעו את היחס הריק בצורה של מטריצת סמיכויות.

ז. הביעו את RR^{-1} בצורה של גרף.

ח. הביעו את $R\cup R^{-1}$ בצורה של גרף.

הדרכה: יש למצוא תחילה את הזוגות.

ט. הביעו את $\left(R^{-1}R\right)\cap\left(RR^{-1}\right)$ בצורה של מטריצת סמיכויות.

י. הביעו את $\left(R^{-1}R\right)\setminus\left(RR^{-1}\right)$ בצורה של גרף.

יא. הביעו את $\left(R^{-1}R\right)\Delta\left(RR^{-1}\right)$ בצורה של גרף.

יחס רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי, אנטי-יחס, סגור

שאלות

1) עבור $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ נגדיר יחס T באופן הבא: $\langle x,y\rangle\in T\Leftrightarrow x\cdot y\le 23$
רשום מדגם בן שלושה זוגות של איברים ביחס ובדוק האם T רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי (חלש) טרנזיטיבי.

2) נתון היחס T הבא מעל $A=\{1,2,3,4\}$

$$T=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

האם T רפלקסיבי? אם לא רפלקסיבי אז הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי שהתשובה תהיה חיובית.
האם T סימטרי? אם לא אז סימטרי הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי שהתשובה תהיה חיובית.
האם T טרנזיטיבי? אם לא טרנזיטיבי אז הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי שהתשובה תהיה חיובית.
הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי ש- T יהיה גם רפלקסיבי, גם סימטרי, וגם טרנזיטיבי.

3) נגדיר יחס T מעל $\mathbb{Z}$ באופן הבא: $T=\{|\langle a,b\rangle|\,a\cdot b\in\mathbb{Z}_{even}\}$

א. רשום שלוש זוגות ביחס ושלושה זוגות שאינם ביחס.
ב. בדוק האם T רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי.

4) נתון יחס S מעל $\mathbb{Z}$ המוגדר באופן הבא: (יש ל- x,y אותה הזוגיות) $\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in S$ (כלומר שניהם זוגיים או שניהם אי זוגיים)
הוכח כי S רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

5) נתון יחס R מעל קבוצה A.
הוכיחו כי $R^2\subseteq R$ אמ"ם R טרנזיטיבי.

6) נתון יחס S מעל $\mathbb{Z}$ המוגדר באופן הבא: $\langle x,y\rangle\in S\Leftrightarrow 3|x-y$
הוכח כי S רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

7) נתונים היחסים הבאים מעל $A=\{1,2,3\}$,

$R_1=\{(1,2),(2,1),(2,3)\}$ $\qquad$ $R_2\{(1,2),(2,2),(2,3)(2,1)\}$

עבור כל אחד מארבעת היחסים $R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2$, R_2 , R_1,
קבעו האם הוא רפלקסיבי, סימטרי או טרנזיטיבי.
(במקרה של הפרכה הביאו דוגמה מתאימה)

8) עבור $A\{1,2,3,4,5,6\}$, נגדיר S מעל A כך:

$S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 6,3\rangle\}$

א. בדקו אם S רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי חלש, חזק וטרנזיטיבי.
ב. רשמו את היחסים I_A ו-S^{-1}.
ג. רשמו את כל החזקות השונות של S.
ד. רשמו את היחס $R=\{1,3,6\}^2\cup\{2,4\}^2\cup\{5\}^2$, כקבוצה של זוגות.
ה. היחס R הוא יחס שקילות.
רשמו את מחלקות השקילות השונות ואת קבוצת המנה.

9) לגבי כל אחד מהיחסים הבאים, רשמו שלושה זוגות שנמצאים ביחס, ונמקו מדוע הם ביחס. כתבו שלושה זוגות שאינם ביחס, ונמקו מדוע אינם ביחס. כמו כן, קבעו האם היחס הוא רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, א-סימטרי חלש, חזק, וטרנזיטיבי.
א. יחס $@$ מעל $\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in @ \Leftrightarrow |x-y|\le 100$.
ב. יחס $\clubsuit$ מעל $\mathbb{Z}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in\clubsuit \Leftrightarrow 3|x-y$.
ג. היחס $\subseteq$ מעל $P(\mathbb{N})$, המוגדר באופן הבא: $(A,B)\in\subseteq \Leftrightarrow A\subseteq B$.
ד. היחס שרגא מעל $\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in$ שרגא $\Leftrightarrow x+y\ge x\cdot y$.
ה. יחס T מעל $\mathbb{Z}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in T \Leftrightarrow x^2+y\ge 1$.

10) תהי $\mathbb{N}_+$ הקבוצה $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, ונגדיר עליה יחס R כך: $aRb\Leftrightarrow\left[a=b^b\vee b=a^a\right]$.
א. האם $1R1$? האם R רפלקסיבי?
ב. האם R סימטרי?
ג. האם R אנטי-סימטרי?
ד. האם R טרנזיטיבי?

11) נגדיר יחס R על הקבוצה $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, על ידי $\langle f,g\rangle\in R$ אם ורק אם קיימת $A\subseteq\mathbb{N}$ אינסופית, כך ש-$f(n)=g(n)$ לכל $n\in A$.

א. האם R רפלקסיבי?
ב. האם R אנטי-סימטרי?
ג. האם R טרנזיטיבי?

12) בדקו האם היחס הוא רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי:

א. נגדיר יחס T מעל $\mathbb{R}$, כך: $aTb \Leftrightarrow a<b+1$.
ב. נגדיר יחס P מעל $P(\mathbb{N})$, כך: $\left(A=B\vee A\cup\{1,2\}=b\right) \Leftrightarrow APB$.

13) מצאו אלו מהתכונות: רפלקסיביות, אנטי-רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות חלשה, אנטי סימטריות חזקה וטרנזיטיביות, מקיים כל אחד מהיחסים הבאים, מעל הקבוצות $A=\{3,5,7,9\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.

א. $xRy \Leftrightarrow \exists m\in\mathbb{Z}_{odd}\ \ x=my$
ב. $xsy \Leftrightarrow \exists m\in\mathbb{Z}_{evevn}\ \ x=my$
ג. $xRy \Leftrightarrow \exists m\in\mathbb{Z}_{odd}\ \left(x=my\vee y=mx\right)$

14) תהי $A\{1,2,3,4\}$ ויהי R יחס מעל A.

איזו טענה נכונה:

א. $R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ הוא יחס הזהות מעל A.
ב. $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$ הוא היחס המלא מעל A.
ג. אם R הוא היחס המלא מעל A, אז R^{-1} הוא היחס המלא מעל A.
ד. אם R הוא יחס הזהות מעל A, אז R^{-1} הוא יחס הזהות מעל A.
ה. יהי R יחס מעל $A=\{1,2\}$.
האם יתכן כי R אינו טרנזיטיבי? נמקו.

15) יהי R יחס מעל A. הוכיחו:

א. אם $R\subseteq I_A$, אז R רפלקסיבי.
ב. אם $R=R^{-1}$, אז R סימטרי.
ג. אם $R^2\subseteq R$, אז R טרנזיטיבי.
ד. אם $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$, אז R אנטי-סימטרי.

16) תהי $A=\{1,2,3,4\}$ ויהי $R=\{(1,2),(2,1),(1,3)\}$ יחס מעל A.
א. רשמו את הסגור הרפלקסיבי של R.
ב. רשמו את הסגור הסימטרי של R.
ג. רשמו את הסגור הטרנזיטיבי של R.

17) תהי A קבוצה ו-R יחס מעל A הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות.
בכל מקרי ההפרכה תנו דוגמה נגדית מינימלית. בדקו האם יש בדוגמתך פרטים מיותרים והסר אותם.
א. אם R סימטרי, אז R טרנזיטיבי.
ב. אם R אנטי סימטרי חלש, אז R טרנזיטיבי.
ג. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז R טרנזיטיבי.
ד. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז $R=\varnothing$.
ה. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חזק, אז $R=\varnothing$.
ו. אם R טרנזיטיבי וסימטרי, אז R רפלקסיבי.
ז. אם R טרנזיטיבי ואנטי רפלקסיבי, אז R אנטי סימטרי חזק.
ח. אם R טרנזיטיבי ולא סימטרי, אז R אנטי סימטרי חלש.

18) יהי R יחס סימטרי וטרנזיטיבי מעל A, כך ש- $\forall a\in A\exists b\in A \quad aRb$.
הוכיחו כי R רפלקסיבי.

19) הוכיחו או הפריכו: לכל קבוצה A ולכל יחס רפלקסיבי R מעל A קיימות קבוצות $B,C\subseteq A$, כך ש- $R=B\times C$.

20) יהי S יחס אנטי רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל קבוצה A, ונניח שקיים $y\in A$, עבורו $\forall x\in A(x,y)\in S$.
הוכיחו כי לכל $z\in A$ מתקיים $(y,z)\notin S$.

21) נתון כי R יחס על A וכן $R\cap I_A=\varnothing$ (אנטי-רפלקסיבי),
וכן $a,b\in A$, לא בהכרח שונים זה מזה, המקיימים $(a,b)\in R^2$ וגם $(b,a)\in R^2$.
הוכיחו שקיימים $c,d\in A$ (לא בהכרח שונים זה מזה), שאף אחד מהם אינו שווה ל- a ואינו שווה ל- b, המקיימים $(c,d)\in R^2$ וגם $(d,c)\in R^2$.

יחס שקילות, קבוצת מנה, מחלקת שקילות

שאלות

(1 עבור $A=\{1,2,3,4,5\}$ נגדיר יחס S על A כך: $x\cdot y\geq 2 \iff xSy$.

א. האם $S^2 \setminus S=\varnothing$?

ב. האם S יחס שקילות על A?

(2 עבור $A\{1,2,3\}$ נגדיר יחסים R,S מעל A כך:

$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,2\rangle\},\qquad S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

א. חשבו את היחסים RS ו- SR, ובדקו האם הם יחסי שקילות.

ב. האם היחסים S ו- S^2 אנטי-סימטריים? נמקו.

(3 תהי S קבוצה שאיבריה הן קבוצות, ונגדיר יחס בינארי E מעל S באופן הבא:
$AEB \iff (A\subseteq B\wedge B\subseteq A)$.

הוכיחו או הפריכו: E יחס שקילות.

(4 נגדיר יחס בינארי E מעל $\mathbb{Z}-\{0,1\}$ (קבוצת השלמים ללא 0 ו-1) באופן הבא:
$aEb \iff ab\geq -1$.

הוכיחו כי E יחס שקילות ותנו תיאור מפורש של מחלקות השקילות שלו.

(5 תהי $A=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ קבוצת כל הזוגות הסדורים של המספרים הטבעיים,
ויהי $R\subseteq A^2$ יחס המוגדר על ידי $(m_1,n_1)R(m_2,n_2) \iff m_1-m_2=n_1-n_2$.

א. הוכיחו כי R הינו יחס שקילות ב-A.

ב. תארו באופן גרפי את מחלקות השקילות $[(2,1)]_R$, $[(1,2)]_R$, $[(1,1)]_R$.

(6 נתון היחס R מעל $\mathbb{N}$.

$xRy \leftrightarrow (6\,|\,x-y)\vee(3\nmid x\cdot y)$ (אין צורך להוכיח כי R יחס שקילות)

מצאו את מחלקות השקילות ואת קבוצת המנה.

7) נגדיר יחס שקילות S מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xSy \Leftrightarrow (x=y=0)\vee(xy>0)$
ונגדיר יחס שקילות T מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xTy \Leftrightarrow (x^2-9)S(y^2-9)$.
(אין צורך להוכיח כי מדובר ביחסי שקילות)
כתבו במפורש את קבוצת המנה $\mathbb{R}/T$, ונמקו בקצרה.

8) יהי R יחס שקילות על A.
נאמר כי R אוקלידי, אם עבור כל $a,b,c\in A$ מתקיים התנאי:
$[(a,b)\in R\wedge(a,c)\in R]\Rightarrow(b,c)\in R$.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם R יחס שקילות, אז הוא אוקלידי.
ב. אם R רפלקסיבי ואוקלידי, אז הוא יחס שקילות.

9) נתון כי R יחס שקילות על A, וכן $A\in P(B)\setminus\{B\}$.
האם מהנתון נובע כי R יחס שקילות על B, או שאינו יחס שקילות על B?

10) תהי A קבוצה ויהיו R,S יחסים מעל A.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (הפרכה = דוגמה מינימלית):
א. אם R,S רפלקסיביים, אז $R\cap S$ רפלקסיבי.
ב. אם R,S רפלקסיביים, אז $R\cup S$ רפלקסיבי.
ג. אם R,S סימטריים, אז $R\cap S$ סימטרי.
ד. אם R,S סימטריים, אז $R\cup S$ סימטרי.
ה. אם R,S טרנזיטיביים, אז $R\cap S$ טרנזיטיבי.
ו. אם R,S טרנזיטיביים, אז $R\cup S$ טרנזיטיבי.
ז. אם R,S יחסי שקילות, אז $R\cap S$ יחס שקילות.
ח. אם R,S יחסי שקילות, אז $R\cup S$ יחס שקילות.
ט. אם R,S אנטי סימטריים חלש, אז $R\cap S$ אנטי סימטרי חלש.
י. אם R,S אנטי סימטריים חלש, אז $R\cup S$ אנטי סימטרי חלש.

11) רשמו במפורש את כל יחסי השקילות E מעל $S=\{a,b,c,d\}$
המקיימים $\left|S/E\right|=2$ וכל מחלקות השקילות הן שוות עוצמה.
הערה: יש להציג כל יחס כתת קבוצה מפורשת של $S\times S$.

12) יהי S יחס המוגדר מעל $P(\mathbb{N})$ קבוצת החזקה של $\mathbb{N}$ באופן הבא:
$ASB \Leftrightarrow \min A = \min B$, כאשר $\min A$ הוא המספר הקטן ביותר ב-A.
א. הוכיחו כי S הינו יחס שקילות.
ב. נסמן ב-K את קבוצת מחלקות השקילות של היחס S.
בנו פונקציה $F: K \to \mathbb{N}$ חח"ע ועל.

13) יהיו R,S יחסי שקילות מעל A.
הוכיחו כי $R\Delta S$ לא יחס שקילות מעל A.

14) יחס R מעל A נקרא סוגר משולשים, אם מתקיים $(aRb \wedge bRc) \to cRa$
לכל $a,b,c \in A$.
א. הוכיחו כי יחס רפלקסיבי וסוגר משולשים הוא יחס שקילות.
ב. הוכיחו כי אם R סימטרי, סוגר משולשים ואינו ריק,
אז R אינו אנטי רפלקסיבי.

15) יחס השקילות S על $P(N)$ מוגדר כך: $S\{\langle A,B\rangle \mid A\cap\{1,2,3\} = B\cap\{1,2,3\}\}$.
א. מהי העוצמה של מחלקת השקילות $[\{4,7,9\}]_S$?
ב. כמה מחלקות שקילות יש?

יחסי סדר

שאלות

1) הוכיחו כי היחס R, המוגדר מעל הקבוצה $A=\{2^k | k\in\mathbb{N}\}$, על ידי $aRb \Leftrightarrow a|b$, הוא יחס סדר מלא.

2) נגדיר יחס בינארי D מעל הקבוצה $\mathbb{R}^2=\{(a,b)|a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\}$,
באופן הבא: $(a_1,b_1)D(a_2,b_2)\Leftrightarrow(a_1\ge a_2)\wedge(a_1+b_1\ge a_2+b_2)$.
הוכיחו כי D יחס סדר חלש שאינו מלא.

3) נגדיר יחס R מעל הקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ באופן הבא:
$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow(a\le c\wedge b\le d)$.

א. הוכיחו כי R יחס סדר חלש שאינו מלא.

ב. מצאו תת קבוצה אינסופית של $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, שעליה היחס R הוא מלא.

4) נגדיר יחס סדר (חלש) S מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xSy\Leftrightarrow\neg((\lfloor x\rfloor=\lfloor y\rfloor\to y<x))$
(אין צורך להוכיח שמדובר ביחס סדר).
כתבו במפורש את כל האיברים המינימליים של S.
תזכורת: $x\in A$ נקרא מינימלי ביחס סדר R, אם $\forall y\in A((y\ne x)\to\neg(yRx))$.

5) יהי R יחס סדר חלש מעל A, ויהי S יחס סדר חלש מעל B.
הוכיחו כי אם $A\cap B=\varnothing$, אז $R\cup S$ יחס סדר חלש מעל $A\cup B$.

6) תהי A קבוצה לא-ריקה ותהי K קבוצת כל יחסי השקילות מעל A (סדורה חלקית ביחס להכלה).

א. הראו שיש ב-K איבר קטן ביותר וגדול ביותר, והוכיחו שהם שייכים ל-K ואכן מקיימים את הנדרש.

ב. תהי $A=\{1,2,3,4\}$.
נסלק מ-K את האיבר הקטן ביותר והגדול ביותר שנמצאו בסעיף א,
ונסמן את הקבוצה החדשה שהתקבלה ב-L (שאף היא סדורה חלקית ביחס להכלה).
תנו דוגמה לשני איברים מינימליים ב-L והוכיחו שהם מינימליים,
ותנו דוגמה לשני איברים מקסימליים ב-L והוכיחו שהם מקסימליים.

ג. הוכיחו שאין ב-L איבר קטן ביותר וגדול ביותר.

שאלות שמשלבות יחסים ופונקציות

שאלות

1) יחס T מעל $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מוגדר באופן הבא: $fTg \leftrightarrow f\circ g=g\circ f$.
הוכיחו או הפריכו: T יחס שקילות.

2) תהיינה A,B שתי קבוצות לא ריקות ויהיו $<_A,<_B$ יחסי סדר חזקים ומלאים (משווים) מעל A,B בהתאמה.
תהי $f:A\to B$ פונקציה המקיימת אם $a_1<_A a_2$, אז $f(a_1)<_B f(a_2)$.
הוכיחו כי f חח"ע אך אינה בהכרח על.

3) יהי T יחס המוגדר מעל הקבוצה $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ באופן הבא:
$fTg \Leftrightarrow$ קיים $x\in\mathbb{R}$, כך ש-$f(x)=g(x)$.
האם T יחס שקילות?

4) תהי $F:A\to A$ פונקציה, ונגדיר יחס R מעל A כך: $aRb\Leftrightarrow f(a)=b$.
נתון ש-R סימטרי וטרנזיטיבי.
הוכיחו כי F היא פונקציית הזהות.

5) נגדיר יחס S על הקבוצה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ כך: $(x_1,x_2)S(y_1,y_2)\Leftrightarrow x_1^2-x_2=y_1^2-y_2$.
S יחס שקילות (אין צורך להוכיח).
הוכיחו כי קבוצת המנה $S\setminus\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ שוות עוצמה לקבוצה $\mathbb{R}$.

6) תהי A קבוצה לא ריקה ותהי A^A קבוצת כל הפונקציות מ-A ל-A.
נגדיר יחס E מעל A^A באופן הבא: לכל $f,g\in A^A$, fEg אם ורק אם קיימת $h\in A^A$ הפיכה, כך ש-$f=h\circ g$.

א. הוכיחו כי E יחס שקילות.

ב. יהי $c\in A$ כלשהו, ותהי $f_c:A\to A$ הפונקציה הקבועה המוגדרת על ידי $f_c(x)=c \quad \forall x\in A$.
תארו את מחלקת השקילות של f_c ביחס ל-E (תנו תיאור מפורש ככל הניתן) ונמקו.

7) תהי J קבוצת כל היחסים מעל A, ו- E קבוצת כל יחסי השקילות מעל A.
נגדיר פונקציה $F: J \times E \to J$ באופן הבא: $F(R,S) = R \cap S$.
הוכיחו כי F על.

8) תהי A קבוצה סופית ותהי B תת קבוצה של A.
נסמן ב- F את קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- $\{0,1\}$.
נגדיר יחס E מעל F באופן הבא: $F = \{(f,g) \mid B \subseteq \{x \mid f(x)g(x)\}\}$.

א. בהינתן $A = \{1,2,3\}$ ו- $B = \{1,2\}$, תנו דוגמה ל- $f,g,h \in F$ שונים, כך ש- $(f,g) \in E, (f,h) \notin E$.
ב. הוכיחו כי E יחס שקילות.
ג. מה עוצמת קבוצת המנה F/E? נמקו.

9) תהי $A = \{1,2,3\}$ ותהי M קבוצת כל היחסים מעל A,
נגדיר פונקציה $t: M \to M$, המתאימה לכל יחס את הסגור הטרנזיטיבי שלו.

א. t חח"ע.
ב. t על.
ג. לכל $R \in M$ מתקיים $t(R^2) = (t(R^2))^2$.
ד. לכל $R \in M$ מתקיים $t(t(R)) = t(R)$.

מתמטיקה בדידה

פרק 5 - עוצמות

תוכן העניינים

עוצמות

שאלות

1) ללא שימוש בפונקציית שקילות:

א. הוכיחו כי $\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,\dots\}$ ו- $\mathbb{N}_{even}=\{0,2,4,\dots\}$ שוות עוצמה.

ב. הוכיחו כי $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ ו- $\mathbb{N}_{even}=\{0,2,4,\dots\}$ שוות עוצמה.

ג. הוכיחו כי $\mathbb{N}^2=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שקולה ל- $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$.

ד. הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$.

ה. הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}^+$, כאשר $\mathbb{Q}^+$ היא קבוצת הרציונליים החיוביים.

ו. הוכיחו כי $[0,3]\sim[0,1]$.

ז. הוכיחו כי $[3,4]\sim[0,1]$.

ח. הוכיחו כי $[3,5]\sim[0,1]$.

ט. הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A,B, מתקיים $A\times B\sim B\times A$.

2) הוכיחו את השקילויות הבאות באמצעות פונקציות חח"ע ועל בין הקבוצות (פונקציית שקילות):

א. $(0,2010)\sim(0,\infty)$

ב. $[1,3)\cup[4,8]\sim[0,1]$

ג. $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\sim\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$

ד. $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$

ה. $\mathbb{N}\times\{0,1\}\sim\mathbb{N}$

ו. $(-1,1)\sim\mathbb{R}$

ז. $\mathbb{N}\times[0,1)\sim[0,\infty)$

ח. $(0,1]\sim(0,1)$

ט. $[0,1)\times[0,1)\sim[0,1)$

י. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}$

יא. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

יב. $\{0,1\}^A\sim P(A)$

<u>הגדרה</u>: קבוצה A היא אינסופית אם קיימת קבוצה שחלקית לה ממש ושקולה לה.

היעזרו בהגדרה זו לפתרון שאלות **3-4**.

3) תהיינה A,B קבוצות. הוכיחו:

א. אם A אינסופית, אז $A\cup B$ אינסופית.

ב. אם A אינסופית וגם $A\subseteq B$, אז B אינסופית.

4) תהיינה A,B קבוצות, ונתון כי $A\cap B$ שקולה ל-A.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $A\cup B\neq B$, אז A אינסופית.

ב. אם $A\cup B\neq A$, אז B אינסופית.

ג. אם A סופית, אז $A\subseteq B$.

5) נגדיר יחס $\sim$ בין קבוצות באופן הבא: $(A,B)\in\sim \;\Leftrightarrow\; A,B$ שוות עוצמה.

הוכיחו כי $\sim$ הוא יחס שקילות.

6) הוכיחו:

א. $\aleph_0+n=\aleph_0$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

ב. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

ג. $3\cdot\aleph_0\cdot2\cdot\aleph_0=\aleph_0$

ד. $n\cdot\aleph_0=\aleph_0$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

ה. $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$

ו. $\aleph_0^n=\aleph_0$ (היעזרו במשפט קב"ש)

ז. אם $\aleph_0\leq\alpha$, אז $\alpha=\alpha+3$.

ח. $2^{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0}$

ט. $\aleph^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$

י. $\aleph_0^{\aleph}>2^{\aleph_0}$ (הדרכה: הסיקו מהסעיף הקודם כי $\aleph_0^{\aleph}>\aleph^{\aleph_0}$)

7) גדירות היטב של אריתמטיקה של עוצמות.

א. תהיינה k_1,k_2 עוצמות ויהיו A,B קבוצות, כך ש- $|A|=k_1,|B|=k_2$.
נגדיר פעולת הפרש בין עוצמות באופן הבא: $k_1-k_2=|A-B|$.
פעולה זו אינה מוגדרת היטב, כלומר התוצאות של ההפרש משתנות בהתאם לקבוצה ולא בהתאם למחלקה.
הציגו 2 דוגמאות לקבוצות שעוצמתן $\aleph_0$, אך עוצמת ההפרש שונה בכל אחת מהדוגמאות.

ב. הוכיחו כי אם מתקיים $A\sim B \wedge C\sim D \wedge A\cap C=\varnothing \wedge B\cap D=\varnothing$, אז $(A\cup C)\sim(B\cup D)$.

ג. הוכיחו כי אם $A\sim B \wedge C\sim D$, אז $A\times C\sim B\times D$.

8) הוכיחו כי לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים:

א. $A\times(B\times C)\sim(A\times B)\times C$

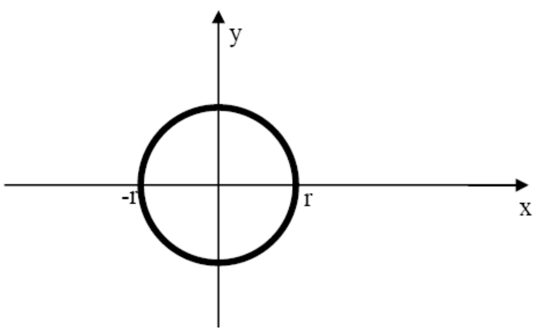
ב. אם $B\cap C=\varnothing$, אז $A^B\times A^C\sim A^{(B\cup C)}$, והראו כי $B\cap C=\varnothing$ הכרחית.

ג. $(A\times B)^C=A^C\times B^C$

ד. $\left(A^B\right)^C\sim A^{B\times C}$

9) הוכיחו כי הקבוצה $A=\mathbb{Q}$, קבוצת המספרי הרציונליים,
ו- $B=\{f(x)=ax^2+bx+c : a,b,c\in\mathbb{Q}\}$ שוות עוצמה.

10) מעגל במישור ברדיוס r (כאשר $r>0$ ממשי), שמרכזו בראשית הצירים, הוא קבוצת כל הנקודות (x,y) במישור המקיימות את המשוואה $x^2+y^2=r^2$, כמודגם בציור שלהלן.
הוכיחו שלכל $r>0$, עוצמת מעגל ברדיוס r שמרכזו בראשית הצירים היא א.



11) הוכיחו או הפריכו:
תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן. אם $A\oplus B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ וגם $A\cap B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$, אז $A\cup B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$.

12) נגדיר $P_2(\mathbb{N})=\{A\subseteq\mathbb{N}\,\|A|=2\}$. כלומר, $P_2(\mathbb{N})$ היא קבוצת כל תתי-הקבוצות בנות שני אברים של הטבעיים.
מהי עוצמת $P_2(\mathbb{N})$? הוכיחו.

13) נסמן ע״י $\mathbb{N}$ את קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ וב- $\mathbb{R}^+$ את הממשיים החיוביים.

א. מה העוצמה של הקבוצה $A_4=\left(a\in\mathbb{R}\,\middle|\,a^4\in\mathbb{N}\right)$?
למשל, $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7}\in A_4$.

ב. מה העוצמה של $A=\left(a\in\mathbb{R}^+\,\middle|\,\exists k\in\mathbb{N},a^k\in\mathbb{N}\right)$?
למשל, $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7},\sqrt[100]{3},\sqrt[3]{\sqrt{4}}\in A$.

ג. הראו שקבוצה של מעגלים זרים במישור ניתנת לשידוך לקבוצה חלקית של טבעיים.

14) תהי $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\forall n\in\mathbb{N}\left(x<\frac{1}{n}\right)\wedge\exists n\in\mathbb{N}\left(x>-\frac{1}{n}\right)\right\}$.
מה עוצמת A ?

15) תהי $A=\{(a,b)\,|\,a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R},a<b\}$. כלומר, A היא קבוצת כל הקטעים הפתוחים ב- $\mathbb{R}$.
מהי עוצמת A ? הוכיחו.

16) נגדיר יחס S מעל $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ באופן הבא: $(x_1x_2)S(y_1y_2)\Leftrightarrow\lfloor x_1\rfloor=\lfloor y_1\rfloor$, כאשר S יחס שקילות (אין צורך להוכיח זאת).
הוכיחו כי קבוצת המנה ${(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}/{S}$ היא מעוצמה $\aleph_0$.

17) הוכיחו או הפריכו: לכל קבוצה A מתקיים $A\times\mathbb{N}\sim A\times(\mathbb{N}-\{1\})$.

18) הוכיחו כי עוצמת הקבוצה $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n,n+1)=(1,2)\cup(2,3)\cup(3,4)\cup\cdots$ היא $\aleph$.

19) תהי A קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ ויהי E יחס שקילות מעל A.
הוכיחו כי $|E|=\aleph_0$.

20) הוכיחו או הפריכו:
לכל זוג קבוצות A,B מתקיים $(A\times B)^C \sim (A^C\times B)\cup(A\times B^C)$.

21) פונקציית הסינוס $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור של 2π.
כלומר, $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.
עבור $0\le x\le 2\pi$ מתקיים $\sin x=0 \Leftrightarrow x\in\{0,\pi,2\pi\}$.
מצאו את עוצמת הקבוצה $O_{\sin}=\{x\in\mathbb{R}|\sin x=0\}$. הוכיחו.

22) האם קיימת קבוצה A, כך ש-$|P(A)|=\aleph_0$? הוכיחו.

23) הוכיחו כי קבוצה בת-מניה של ישרים לא יכולה לכסות את המישור $\mathbb{R}^2$.

24) קבעו האם לקבוצה אחת עוצמה גדולה יותר, או שהן שוות:
א. $\{0,1\}^{\mathbb{R}},\ \{0,1\}^{P(\mathbb{R})}$
ב. $P(\mathbb{R})^{\mathbb{N}},\ P(\mathbb{R})^{P(\mathbb{N})}$
ג. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$

25) חשבו את עוצמת הקבוצות הבאות:
א. קבוצת כל הסדרות האינסופיות של הטבעיים.
ב. קבוצת כל הסדרות האינסופיות העולות ממש של הטבעיים.
ג. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות.
ד. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 10.
ה. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 00.
ו. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 10 וגם את הרצף 00.
ז. קבוצת כל היחסים מעל $\mathbb{N}$.
ח. קבוצת כל היחסים הרפלקסיביים מעל $\mathbb{N}$.

לפתרונות מלאים בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה

פרק 6 - מבוא לקומבינטוריקה

תוכן העניינים

מתמטיקה בדידה

פרק 7 - הבינום של ניוטון

תוכן העניינים

הבינום של ניוטון

שאלות

1) הוכיחו אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=3^n$.

2) הוכיחו לכל $n\geq 0$ את הזהות $6^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{2n-k}$.

3) הוכיחו את השוויון

$$2^n=3^n-n3^{n-1}+\binom{n}{2}3^{n-2}-...+(-1)^k\binom{n}{k}3^{n-k}+...+(-1)^n\binom{n}{n}3^0$$

4) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=2^{2n}$.

5) הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\binom{m+n}{2}=\binom{n}{2}+\binom{m}{2}+mn$.

6) הוכיחו כי $\binom{2n}{n}$ זוגי לכל $n\in\mathbb{N}$.

7) הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}2^{k-1}=\frac{n}{3}\cdot 3^n$.

8) הוכיחו כי $\binom{x+y}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$, $\forall x,y,n\in\mathbb{N}^+$.

9) הוכיחו את השוויון $\sum_{k,j=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{j}\binom{n}{k+j}=\binom{3n}{n}$.

10) הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$.

11) הוכיחו שלכל $n\ge 0$ ולכל $0\le k\le n$ מתקיים $\binom{n+2}{k+2}=\binom{n}{k+2}+2\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$.

12) הוכיחו אלגברית וקומבינטורית את הזהות

$$(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1=\frac{\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2}}{n!}$$

13) הוכיחו את הזהות $6n^2\binom{5n-2}{n-2}=\sum_{k=1}^{n}k(n-k)\binom{2n}{k}\binom{3n}{n-k}$.

14) הוכיחו את השוויון $\binom{k+N}{N}=\sum_{n=0}^{N}\binom{k-1+n}{n}$.

15) הוכיחו כי אם $n>0$ זוגי, אז $2^n>\binom{n}{\frac{n}{2}}$.

16) כמה מבין המספרים בפיתוח הבינום $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{7}\right)^{80}$ שלמים?

17) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $n^n-(n-1)^n=\sum\binom{n}{i}(n-1)^{n-i}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה

פרק 8 - הכלה והדחה

תוכן העניינים

הכלה והדחה

שאלות

1) כמה מילים באורך n יש מעל הא"ב $\{A, B, C, D\}$, כך שהאותיות A, B חייבות להופיע?

2) לארוחת ערב הוזמנו חמישה אנשים, להם המארח קנה 10 מתנות שונות.
בכמה דרכים ניתן לחלק את המתנות בין האורחים, כך שכל אורח יקבל לפחות פרס אחד?

3) בקייטנת ההשקעות הלא-הגיוניות יש חמישה קורסים. בכל אחד מחמשת הקורסים רשומים בדיוק 55 ילדים. לכל זוג קורסים יש בדיוק 44 ילדים שרשומים לשניהם, לכל שלושה מהקורסים יש בדיוק 33 ילדים שרשומים לשלושתם, ולכל ארבעה מהקורסים יש בדיוק 22 ילדים שרשומים לארבעתם.
הוכיחו כי יש לפחות ילד אחד שרשום לכל חמשת הקורסים בו זמנית.

4) א. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 23 בדיוק?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק על פונקציות יוצרות)
ב. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 31 בדיוק?
ג. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 23 לכל היותר?

5) קובייה הוטלה 8 פעמים ורשמו את התוצאות כסדרה של 8 מספרים.
מה מספר האפשרויות לסדרות באורך 8 של הטלות, שבהן יופיעו כל ששת המספרים מ-1 עד 6 (כל מספר לפחות פעם אחת)?

6) במערכת שנה א של התוכנית למדעי המחשב באקדמיה המכללתית של תל-יפו-אביב יש חמישה קורסים. בכל אחד מחמשת הקורסים רשומים בדיוק 40 תלמידים. לכל זוג קורסים יש בדיוק 32 תלמידים שרשומים לשניהם, לכל שלושה מהקורסים יש בדיוק 24 תלמידים שרשומים לשלושתם, ולכל ארבעה מהקורסים יש בדיוק 16 תלמידים שרשומים לארבעתם.
הוכיחו שיש לפחות תלמיד אחד שרשום לכל חמשת הקורסים בו זמנית.
<u>הדרכה</u>: על סמך הנתונים כתבו ביטוי שמתאר כמה תלמידים יש בכל חמשת הקורסים יחד.

7) לארוחת ערב הוזמנו חמש נשים, להן המארחת קנתה 10 מתנות שונות.
בכמה דרכים ניתן לחלק את המתנות בין האורחות, כך שכל אורחת תקבל לפחות פרס אחד?

8) איש ציבור מושחת לוקח כל שנה שוחד בסך 2, 4 או 6 מיליון דולר (שלא כמו איש ציבור נורמטיבי, איש ציבור מושחת יכול לקחת שוחד של 6 מיליון דולר מספר שנים ברציפות). סדרת שוחד היא סדרת סכומים שקיבל איש ציבור מושחת במשך כמה שנים, למשל 2, 4, 2, 6, 6.
כמה סדרות שוחד יניבו עבור איש ציבור מושחת סך של 20 מיליון דולר במשך 6 שנים?

9) עבור $A=\{1,2,3.\cdots,10\}$, כמה פונקציות $f:A\to A$ חח"ע ועל יש, כך ש- $f(k)\neq k$ עבור $k=1,2,3$?

10) בכמה תמורות של המספרים $\{1,2,3,4,\cdots,18\}$, כל המספרים שמתחלקים ב-3 במקומות של מספרים שמתחלקים בשלוש ואף זוגי לא במקומו?

11) ברשותך שלושה כדורים לבנים זהים, שלושה כדורים שחורים זהים, ומאגר בלתי מוגבל של כדורים אדומים זהים. בכמה אופנים ניתן להרכיב מהם קבוצה (סדר הכדורים לא משנה) בת n כדורים?
פתרו בעזרת פונקציות יוצרות ובעזרת הכלה והדחה והשוו את התוצאות.

12) שבע משפחות בנות שלוש נפשות כל אחת (אבא, אמא וילדה) מגיעות למפגש חברתי.
בכמה אופנים ניתן לסדר אותם בשלשות, כך ש :
א. ללא הגבלה?
ב. כל שלשה תהיה מורכבת מאבא, אמא וילד אבל אף שלשה לא תרכיב משפחה שלמה?
ג. אף שלשה לא תרכיב משפחה שלמה (כלומר, יתכן שלשה המורכבת משלושה אבות או שני אבות וילד).

13) בכמה דרכים ניתן לחלק 40 כדורים לארבעה תאים, כך שאף תא לא יהיה ריק, כאשר
א. הכדורים זהים.
ב. הכדורים שונים.

14) ארבעה אנשים שונים (שנמספר 1, 2, 3, 4) אחראים יחד על ביצוע של 5 משימות שונות (שנקטלג א, ב, ג, ד, ה). לביצוע כל משימה נדרשים **בדיוק שני אנשים**, כאשר אין הבדל בין תפקידי שני האנשים בצוות המבצע משימה נתונה.

א. בכמה דרכים ניתן להקצות את 5 המשימות לצוותים של שני אנשים?
הנה כמה דוגמאות לדרכים **לגיטימיות** לעשות זאת:
דוגמה 1: הצוות $\{1,2\}$ יבצע את כל המשימות.
דוגמה 2: הצוות $\{1,2\}$ יבצע את משימות א ו-ב, הצוות $\{1,3\}$ את משימות ג ו-ד, והצוות $\{2,3\}$ את משימה ה.
דוגמה 3: הצוות $\{1,2\}$ יבצע את משימות א ו-ב, הצוות $\{3,4\}$ את משימות ג ו-ד, והצוות $\{2,3\}$ את משימה ה.

ב. בכמה דרכים ניתן להקצות את חמשת המשימות לצוותים של שני אנשים, אם אסור שמישהו יתחמק לגמרי מעבודה, כאשר כל אחד מ-4 האנשים חייב לקחת חלק במשימה אחת לפחות (דוגמאות 1 ו-2 בסעיף א אינן חוקיות כעת, אולם דוגמה 3 חוקית).

15) דנה, תלמידה בכיתה א', קראה בספר את המשפט המעניין: **דנה קמה דנה נמה**. אחרי שקראה בהצלחה את המשפט, עלו בדעתה של דנה כמה שאלות מעניינות לא פחות:

א. בכמה דרכים אפשר לסדר את כל 12 האותיות במשפט זה במחרוזת אחת ללא רווחים, כגון **דנהקמהדנהנמה**?

ב. בכמה מהדרכים הללו מופיע בתוך המחרוזת הרצף **דמקה**?

ג. מה מספר הדרכים לסדר את 12 האותיות, כך **שלא** תופיע בתוך המחרוזת **אף אחת** מארבע המחרוזות: **דמקה, קהה, ממד, נננהה**?

16) בבחינה מתמטיקה בדידה בקורס זה יש 11 שאלות בארבעה נושאים: 2 שאלות בקומבינטוריקה בסיסית, 3 שאלות בפונקציות יוצרות, 2 שאלות בגרפים ו-4 שאלות בהכלה והדחה, כאשר יש לענות על 6 שאלות לפחות (אפשר יותר) וחייבים לענות על לפחות שאלה אחת מכל נושא.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

17) בכמה דרכים ניתן להרכיב מילה מהמספרים $\{1,2,3,\ldots,n\}$, כך שכל מספר יופיע k פעמים, אבל אף מספר לא יופיע k פעמים ברצף?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה

פרק 9 - נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

תוכן העניינים

נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

שאלות

1) לכל n שלם אי-שלילי נגדיר את a_n להיות מספר הסדרות היורדות הלא ריקות, שמורכבות ממספרים טבעיים בין 1 ל- n, כך שההפרש בין כל שני מספרים עוקבים בסדרה הוא לפחות 3.
כתבו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל a_n.
דוגמאות:
- הסדרה (12,9,5,1) נספרת בחישוב של a_{14}, מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל-14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר.
- הסדרה (14) נספרת בחישוב של a_{14}, מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל-14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר (בגלל שאין ספרות עוקבות).
- הסדרה (12,9,7,1) אינה נספרת בחישוב של a_{14}, מכיוון שההפרש בין הספרה השנייה והשלישית בסדרה הוא 2.

2) א. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור מספר האפשרויות לחלק קבוצה בת n אנשים לזוגות ולבודדים.
ב. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר הדרכים לחלק קבוצה של n אנשים לזוגות ולשלשות, כאשר הסדר <u>בין</u> הזוגות והשלשות ו<u>בתוך</u> הזוגות והשלשות אינו משנה.

3) בחפיסת קלפי טאקי יש מספר לא מוגבל של קלפים בצבעים צהוב, אדום, כחול וירוק, ואיננו מבחינים בין קלפים שונים מאותו צבע.
יהי a_n מספר ערימות קלפי טאקי בגודל n, שבהם מעל קלף אדום או כחול אסור לשים קלף צהוב או ירוק.
מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל- a_n.

4) מצאו יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר המילים באורך n מעל $\{A,B,C\}$ ללא הרצף:

א. CC

ב. AB

ג. AA, AB

ד. AA, BA

ה. AA, AB, AC

ו. AB, BC (פתרו בשתי דרכים)

ז. BA, CA

ח. AA, BB

ט. AA, BB, CC

י. BC, CB

5) מצאו יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר הדרכים לרצף שביל באורך n במרצפות אדומות באורך 2, מרצפות צהובות באורך 2, מרצפות ירוקות באורך 2, ומרצפות שחורות ומרצפות לבנות באורך 1 כל אחת.
לאחר מכן פתרו את יחס הנסיגה שהתקבל, קבלו נוסחה מפורשת, וחשבו את ארבעת האיברים הראשונים בשתי דרכים: אחת לפי היחס הרקורסיבי ושנייה על ידי הצבה בנוסחה המפורשת שנמצאה.

6) עבור n טבעי, מהו מספר הסדרות הפלינדרומיות באורך n מעל קבוצת הספרות העשרוניות $\{0,1,2,...,9\}$?

(סדרה $x_1,...,x_n$ היא פלינדרומית, אם $x_i = x_{n-i+1}$ לכל $1 \le i \le n$.
ובעברית פשוטה: אם בקריאתה מהסוף להתחלה או מההתחלה לסוף מתקבלת אותה סדרה, למשל $1,7,2,2,2,7,1$).

7) נתבונן בסדרות סופיות של סימנים, הלקוחים מתוך 6 סימנים: הספרות 0 ו-1, וארבעה סימני פעולה $+,-,*,/$, ובכפוף לתנאים הבאים:

1. הסדרה נפתחת ומסתיימת בספרה.
2. אין הופעות צמודות של סימני פעולה.

דוגמאות של סדרות העונות על התנאים: $0100/101-11+1010$, 001.

דוגמאות של סדרות **<u>שאינן</u>** עונות על התנאים: -00, $+00+10$, $101+/00$.

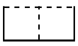
נסמן ב- a_n את מספר הסדרות הללו שבהן בדיוק n סימנים.

א. מצאו יחס נסיגה עבור a_n.

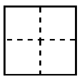
ב. מצאו באופן ישיר את a_0, a_1, a_2, a_3, ובדקו בעזרת הערכים שהתקבלו את יחס הנסיגה שרשמתם.

ג. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n. בדקו בעזרת הנוסחה את תוצאות סעיף ב.

8) בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×1

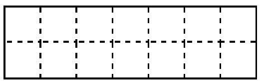


ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×2.



עלינו לרצף מלבן שממדיו $n\times2$ (בציור להלן $n=7$).

אסור לחרוג מגבולות המלבן.



בלוק של 2×1 אפשר להניח כרצוננו, 'שוכב' או 'עומד'.

יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

א. רשמו יחס נסיגה עבור a_n (הסבירו אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

ב. פתרו את יחס הנסיגה.

ג. חשבו את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א' ובאופן ישיר.

9) תנו ביטוי מפורש ל- a_n בנוסחאות הנסיגה הבאות וחשבו את a_5 , a_4 , a_3 בשתי דרכים: בעזרת יחס הנסיגה ובעזרת הנוסחה המפורשת.

א. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, כאשר $a_0 = 3$, $a_1 = 7$.

ב. $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1}$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

ג. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, כאשר $a_0 = -1$, $a_1 = 4$.

ד. $a_{n+1} = 7a_{n-1} + 6a_{n-2}$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 7$.

ה. $a_{n+1} = 4a_n - 5a_{n-1} + 2a_{n-2}$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 11$.

ו. $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + 16n$, כאשר $a_1 = 19$, $a_0 = 14$.

ז. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 9$.

ח. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3^n$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 9$.

ט. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 2^n$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 10$.

י. $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2} + 5^n$, כאשר $a_0 = -1$, $a_1 = 7\frac{1}{2}$.

יא. $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n + n$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

10) מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור הסידרה a_n המקיימת:
$a_n = 2^{2n+1} - 3^n(n-1) + 1$.

11) כתבו נוסחת נסיגה למספר הסדרות באורך n בספרות $0,1,2$ ללא 00 ו-12.

12) איש ציבור נורמטיבי לוקח שוחד כל שנה בסכום 2 מיליון דולר, 4 מיליון דולר או 6 מיליון דולר. כדי לא למשוך תשומת לב, הוא לא לוקח שוחד על סך 6 מיליון דולר שנתיים ברצף. נסמן ב- a_n את מספר סדרות השוחד השונות שיכול לצבור איש ציבור בשירות נורמטיבי בן n שנים.
דוגמה: במשך 4 שנים ניתן לצבור את סדרת השוחד 2,2,2,2 ; את סדרת השוחד 2,4,2,6 ; את סדרת השוחד 4,2,2,6 ; וכן הלאה (שימו לב ששתי הסדרות האחרונות נספרות כשתי סדרות שוחד שונות).
רשמו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל- a_n.

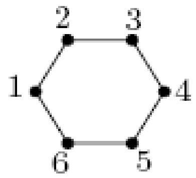
13) לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן על ידי a_n את מספר המילים מעל $\{A,B,C,D,E\}$ שלא מכילות אף אחד מהרצפים AA, BA, CA.
מצאו נוסחה מפורשת עבור a_n.

14) יהי a_n מספר הסדרות באורך n שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,3\ldots,8\}$ ומקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים זוגיים זה בסמוך לזה.

א. מצאו יחס נסיגה עבור a_n, ורשמו את a_1 ו-a_0.

ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n.

ג. חשבו את a_2 מנוסחת הרקורסיה ומהביטוי המפורש, ובדקו שהתקבל אותו ערך.



15) כמה טיולים באורך n, המתחילים בקודקוד 1 ומסתיימים בקודקוד 1 יש בגרף הבא?
לדוגמה: עבור $n=2$ יש שני טיולים כאלה והם $1,2,1$ ו-$1,6,1$.
לדוגמה: עבור $n=4$ יש שישה טיולים כאלה והם
$(1,2,1,6,1),(1,6,1,2,1),(1,6,1,6,1),(1,6,5,6,1),(1,2,1,2,1).(1,2,3,2,1)$

16) נתון כי n הוא חזקה טבעית של 4, $f(n)=16f\left(\frac{n}{4}\right)+n^2$ וכן $f(1)=3$.
פתרו בשיטת הצבה חוזרת.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה

פרק 10 - שובך היונים

תוכן העניינים

שובך היונים

שאלות

1) תהי $A=\{1,2,3,\cdots,49\}$.
הוכיחו כי לכל בחירה של קבוצה $B\subseteq A$, כך ש- $|B|=26$, יהיו ב- B לפחות שני איברים שסכומם 49.

2) תהי A קבוצה של שישה מספרים מתוך $\{1,\ldots 11\}$.
הוכיחו כי קיימות שתי תתי קבוצות של A שסכום אבריהן שווה.

3) מה הגודל המירבי של קבוצה של מספרים טבעיים, שבה אין שני מספרים שסכומם או הפרשם מתחלק ב- 3009? נמקו.

4) תהי A קבוצה של n מספרים טבעיים כלשהם.
הוכיחו שקיימת קבוצה חלקית לא-ריקה של A, **שסכום** איבריה מתחלק ב- n.

5) הוכיחו כי בכל צביעה של המישור בשני צבעים, כחול ואדום, יש שתי נקודות שמרחקן אחד והן צבועות באותו צבע.

6) יהי $n\in\mathbb{N}$.
הוכיחו כי קיים $k\in\mathbb{N}$, כך שבמספר הטבעי $k\cdot n$ מופיעות הספרות 7 ו- 0 בלבד.

7) הוכיחו כי מבין כל 12 מספרים דו-ספרתיים יש שניים שהפרשם בעל שתי ספרות זהות.

8) הוכיחו כי מבין כל בחירת 26 נקודות בתוך משולש שווה צלעות, שאורך צלעו הוא אחד, יש שתי נקודות שהמרחק ביניהן קטן מ- $\frac{1}{5}$.

9) הוכיחו כי בכל בחירה של $n+1$ מספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,3,\cdots,2n\}$, יש שני מספרים x,y כך ש:
א. x,y זרים (כלומר, המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1).
ב. x מתחלק ב- y ללא שארית.
ג. הראו כי החסם הנ"ל הדוק, כלומר אפשר לבחור n מספרים מבלי שיתקיימו תנאים א ו-ב.

10) נבחר 46 מספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,3,\cdots,81\}$.
הוכיחו כי יש שני מספרים שהפרש הוא בדיוק 9.
הוכיחו גם כי המספר הנ"ל הדוק (כלומר מצאו 45 מספרים מתוך $\{1,2,3,\cdots,81\}$, שאין בהם שניים שהפרשם הוא בדיוק 9).

11) תהי A קבוצה בת 20 מספרים מתוך הסדרה החשבונית $1,4,7,10,\cdots,100$.
הוכיחו כי יש שני מספרים שסכומם 104.

12) n אנשים נפגשו במסיבה ולחצו ידיים.
הוכיחו כי יש שני אנשים שלחצו בדיוק אותו מספר ידיים.

13) הוכיחו כי בכל צביעה של קשתות הגרף השלם K_6 בשני צבעים, יש משולש מונוכרומטי.

14) הוכיחו כי בכל גרף יש שני קודקודים בעלי אותה דרגה.

15) לפוליטיקאי נותרו 50 ימים עד לבחירות, והוא מתכנן נאומי בחירות: לפחות אחד ביום אך לא יותר מ-75 נאומים בסך הכל.
הוכיחו כי קיימת סדרת ימים שבהם הוא נואם 24 נאומים.

16) יהי $n\in\mathbb{N}$.
הוכיחו כי קיים $m\in\mathbb{N}$, כך ש-n מחלק את 2^m-1.
הדרכה: התבוננו בסדרה $2^1-1,2^2-1,2^3-1,\cdots 2^{n+1}-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה

פרק 11 - גרפים

תוכן העניינים