מתמטיקה בדידה 2

תוכן העניינים

מתמטיקה בדידה 2

פרק 1 - פונקציות

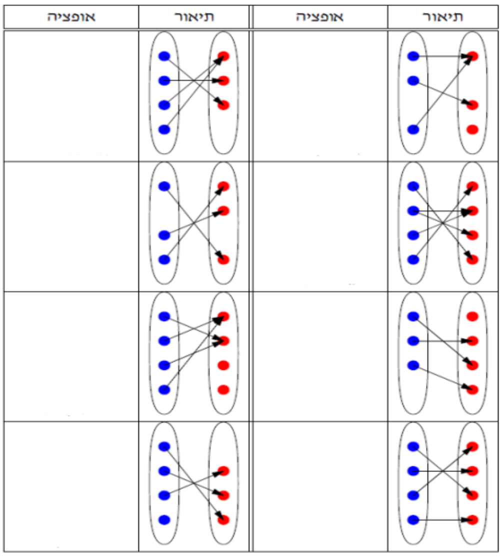
תוכן העניינים

מבוא לפונקציות:

שאלות:

1) בכל אחד מהאיורים הבאים זהה את התחום ואת הטווח ובחר את האפשרות המתאימה:

א. זו אינה פונקציה.
ב. זו פונקציה חח"ע שאינה על.
ג. זו פונקציה על שאינה חח"ע.
ה. זו פונקציה שאינה חח"ע ואינה על.
ו. זו פונקציה שהיא גם חח"ע וגם על.



2) עבור הפונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).
חשב את:

א. $g(\pi)$, $g(-\pi)$
ב. $\operatorname{Im}(g)$
ג. מצא מקור ל-7-.
ד. מצא את כל המקורות ל-7-.
ה. האם כל איבר בטווח הוא גם תמונה?

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבע האם היא חח"ע? האם על? הוכח טענותיך.

א. פונקציית הזהות $I_A:A\to A$ המוגדרת ע"י $I_A(x)=x$.
ב. $h_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $h_1(x)=2x+1$.
ג. $h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).
ד. $h_3:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $h_3(x,y)=x-y$.
ה. $h_4:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ מוגדרת ע"י $h_4(A,B)=A\cup B$ וחשב את $Im h_4$.
ו. $f_1:(0,\infty)\to(0,2)$ מוגדרת ע"י $f_1(x)=\dfrac{2x}{x+3}$.

ז. $f_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$ מוגדרת ע"י $f_2(x)=x+\frac{1}{x}$.

ח. $f_3:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_3(x)=x-\frac{1}{x}$.

ט. $f_4:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_4(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

י. $f_5:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{Z})$ מוגדרת ע"י $f_5(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

יא. $f_6:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_6(X)=X\Delta\mathbb{Z}$.

יב. $f_7:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_7(n)=\text{the sum of the digits of } n$.

יג. $f_8:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $f_8(\langle x,y\rangle)=3x+2y$.

יד. $f_9:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(\langle n,k\rangle)=2^{n-1}(2k-1)$.

טו. $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & else\end{cases}$.

4) בדוק אם הפונקציות הבאות חח"ע, על וחשב את תמונתן:

א. $f_9:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(x)=\begin{cases}\frac{n}{2} & 4|n\\ 2n+1 & else\end{cases}$ וחשב את $Im\, f_9$.

ב. $f_{10}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{10}(x)=\begin{cases}3x-1 & x<2\\ x-3 & x\geq 2\end{cases}$ וחשב את $Im\, f_{10}$.

ג. $f_{11}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{11}(x)=\begin{cases}x+1 & x\leq 1\\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & x>1\end{cases}$.

5) תהיינה $f,g:A\to A$ פונקציה. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f חח"ע.

ב. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f על.

ג. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f אינה קבועה.

ד. אם יש איבר ב-$Im(f)$ ללא מקור אז f על.

ה. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז f אינה על.

ו. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז g אינה על.

ז. אם $Im(f)=Im(g)$ אז $f=g$.

ח. לכל $D\subseteq A$, $D\neq\varnothing$ קיימת $f:A\to A$ כך ש-$Im(f)=D$.

6) נתונה $g:\mathbb{N}_{odd}\to\mathbb{N}$ פונקציה לא ידועה.

נגדיר $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא: $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ g(n) & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}$,

למשל: $h(34)=17$, $h(35)=g(35)$ שהוא מספר טבעי לא ידוע.

הוכח כי h אינה חח"ע.

מצא אינסוף מספרים טבעיים שונים $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $i\neq j$ מתקיים $h(x_i)=h(x_j)$.

7) נגדיר $F:(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times P(\mathbb{R}))\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $F((f,A))=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\exists y\in A\ f(y)=x\}$.

א. עבור $A=\{2,3,4,5,17,18\}$, $g(x)=2x$, חשב: $F((g,A))$.

ב. בדוק האם f חח"ע והאם על.

ג. מצא את $\operatorname{Im}(F)$.

8) נגדיר $G:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $G(f)=\{\alpha\in\mathbb{N}\,|\,\exists\beta\in\mathbb{N}\quad f(\beta)=\alpha\}$.

א. חשב $G(f)$ עבור $f=I_{\mathbb{N}}$ פונקציית הזהות עבור $\mathbb{N}$

הפונקציה $f(n)\begin{cases}1 & n\in\mathbb{N}_{even}\\ 4 & else\end{cases}$ ועבור הפונקציה הקבועה 3.

ב. בדוק האם G חח"ע והאם על ומצא את $Im(G)$.

9) נגדיר פונקציה $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to P(\{0,1\}\times\{0,1\})$ באופן הבא:

$F(g)=\{(g(n),g(n+1))\,|\,n\in\mathbb{N}\}$. הוכח כי F אינה על.

10) נגדיר $F:\mathbb{N}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{R}\,|\,f(x)=1\}$.

הוכח כי F אינה חח"ע.

11) נגדיר פונקציה $F:\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{N}\,|\,f(n)=0\}$.

קבע האם F חח"ע ועל.

12) תהי $P_{even}(\mathbb{N})$ קבוצת כל תת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן זוגי.
ותהי $P_{odd}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן אי זוגי.
לדוגמה $\{1,3\}\in P_{even}(\mathbb{N}),\{1,3\}\notin P_{odd}(\mathbb{N})$ ולעומת זאת ,
$\{2,4,6\}\notin P_{even}(\mathbb{N}),\{2,4,6\}\in P_{odd}(\mathbb{N})$. לכל קבוצה A סופית של טבעיים נסמן
ב- $\max(A)$ את המספר הגדול ביותר ב- A וב- $\max(\varnothing)=0$.
הוכיחו כי הפונקציה $f:P_{even}(\mathbb{N})\to P_{odd}(\mathbb{N})$ המוגדרת על ידי $f(A)=A\cup\max(A)$
היא חח"ע אך אינה על.

13) נגדיר $H:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $H(\langle f,g\rangle)=\operatorname{Im} f\,\Delta\operatorname{Im} g$.
בדוק אם f חח"ע ועל.

פונקציות שחובה להכיר:

14) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא פונקציה כנדרש:
א. מצא $f:(0,1)\to(1,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
ב. השתמש בפונקציה שמצאת בסעיף קודם כדי למצוא $f:(0,1)\to(0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
ג. מצא $f:[2,5)\to[1,7)$ שהיא חח"ע ועל.
ד. עבור $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ מספרים נתונים מצא $f:[a,b]\to[c,d]$ שהיא חח"ע ועל.
ה. מצא $f:[1,3)\cup[4,8]\to[0,1]$ שהיא חח"ע ועל.
ו. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שהיא חח"ע ועל. מצא גם $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שמצאת.
ז. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.
ח. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע.
ט. מצא $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שהיא על. (רמז: סעיף קודם)
י. מצא פונקציה $f:\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{7}\to\mathbb{N}$ (כלומר $f:\mathbb{N}^7\to\mathbb{N}$) שהיא חח"ע.
יא. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times[0,1)\to[0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
מצא גם $g:[0,\infty)\to\mathbb{N}\times[0,1)$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.
יב. מצא פונקציה $f:(0,1]\to(0,1)$ שהיא חח"ע ועל.
יג. מצא $F:[0,1)\times[0,1)\to[0,1)$ חח"ע ועל.
יד. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\{0,1\}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.
מצא גם $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\{0,1\}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

טו. מצא $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ שהיא חח"ע ועל.

טז. מצא $F:\{0,1\}^A\to P(A)$ חח"ע ועל. הוכח כי הפונקציה שמצאת היא אכן חח"ע ועל.

יז. מצא $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח"ע ועל.

יח. מצא $F:\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^2\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ כלומר $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח"ע ועל והוכח שהיא חח"ע ועל.

מתמטיקה בדידה 2

פרק 2 - עוצמות

תוכן העניינים

מתמטיקה בדידה

פרק 5 - עוצמות

תוכן העניינים

עוצמות

שאלות

1) ללא שימוש בפונקציית שקילות:

א. הוכיחו כי $\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,\ldots\}$ ו- $\mathbb{N}_{even}=\{0,2,4,\ldots\}$ שוות עוצמה.

ב. הוכיחו כי $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ ו- $\mathbb{N}_{even}=\{0,2,4,\ldots\}$ שוות עוצמה.

ג. הוכיחו כי $\mathbb{N}^2=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שקולה ל- $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

ד. הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$.

ה. הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}^+$, כאשר $\mathbb{Q}^+$ היא קבוצת הרציונליים החיוביים.

ו. הוכיחו כי $[0,3]\sim[0,1]$.

ז. הוכיחו כי $[3,4]\sim[0,1]$.

ח. הוכיחו כי $[3,5]\sim[0,1]$.

ט. הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A,B, מתקיים $A\times B\sim B\times A$.

2) הוכיחו את השקילויות הבאות באמצעות פונקציות חח״ע ועל בין הקבוצות (פונקציית שקילות):

א. $(0,2010)\sim(0,\infty)$

ב. $[1,3)\cup[4,8]\sim[0,1]$

ג. $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}\sim\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4\}$

ד. $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$

ה. $\mathbb{N}\times\{0,1\}\sim\mathbb{N}$

ו. $(-1,1)\sim\mathbb{R}$

ז. $\mathbb{N}\times[0,1)\sim[0,\infty)$

ח. $(0,1]\sim(0,1)$

ט. $[0,1)\times[0,1)\sim[0,1)$

י. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}$

יא. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

יב. $\{0,1\}^{A}\sim P(A)$

<u>הגדרה</u>: קבוצה A היא אינסופית אם קיימת קבוצה שחלקית לה ממש ושקולה לה.

היעזרו בהגדרה זו לפתרון שאלות **3-4**.

3) תהיינה A,B קבוצות. הוכיחו:

א. אם A אינסופית, אז $A\cup B$ אינסופית.

ב. אם A אינסופית וגם $A\subseteq B$, אז B אינסופית.

4) תהיינה A,B קבוצות, ונתון כי $A\cap B$ שקולה ל-A.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $A\cup B\neq B$, אז A אינסופית.

ב. אם $A\cup B\neq A$, אז B אינסופית.

ג. אם A סופית, אז $A\subseteq B$.

5) נגדיר יחס $\sim$ בין קבוצות באופן הבא: $(A,B)\in\sim \;\Leftrightarrow\; A,B$ שוות עוצמה.

הוכיחו כי $\sim$ הוא יחס שקילות.

6) הוכיחו:

א. $\aleph_0+n=\aleph_0$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

ב. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

ג. $3\cdot\aleph_0\cdot 2\cdot\aleph_0=\aleph_0$

ד. $n\cdot\aleph_0=\aleph_0$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

ה. $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$

ו. $\aleph_0^n=\aleph_0$ (היעזרו במשפט קב"ש)

ז. אם $\aleph_0\leq\alpha$, אז $\alpha=\alpha+3$.

ח. $2^{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0}$

ט. $\aleph^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$

י. $\aleph_0^{\aleph}>2^{\aleph_0}$ (הדרכה: הסיקו מהסעיף הקודם כי $\aleph_0^{\aleph}>\aleph^{\aleph_0}$)

7) גדירות היטב של אריתמטיקה של עוצמות.

א. תהיינה k_1,k_2 עוצמות ויהיו A,B קבוצות, כך ש- $|A|=k_1, |B|=k_2$.
נגדיר פעולת הפרש בין עוצמות באופן הבא: $k_1-k_2=|A-B|$.
פעולה זו אינה מוגדרת היטב, כלומר התוצאות של ההפרש משתנות בהתאם לקבוצה ולא בהתאם למחלקה.
הציגו 2 דוגמאות לקבוצות שעוצמתן $\aleph_0$, אך עוצמת ההפרש שונה בכל אחת מהדוגמאות.

ב. הוכיחו כי אם מתקיים $A\sim B \wedge C\sim D \wedge A\cap C=\varnothing \wedge B\cap D=\varnothing$, אז $(A\cup C)\sim(B\cup D)$.

ג. הוכיחו כי אם $A\sim B \wedge C\sim D$, אז $A\times C\sim B\times D$.

8) הוכיחו כי לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים:

א. $A\times(B\times C)\sim(A\times B)\times C$

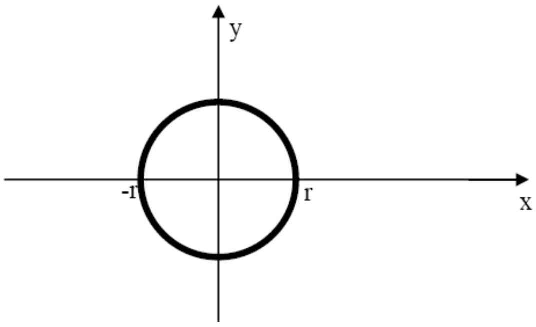
ב. אם $B\cap C=\varnothing$, אז $A^B\times A^C\sim A^{(B\cup C)}$, והראו כי $B\cap C=\varnothing$ הכרחית.

ג. $(A\times B)^C=A^C\times B^C$

ד. $\left(A^B\right)^C\sim A^{B\times C}$

9) הוכיחו כי הקבוצה $A=\mathbb{Q}$, קבוצת המספרי הרציונליים,
ו- $B=\left\{f(x)=ax^2+bx+c : a,b,c\in\mathbb{Q}\right\}$ שוות עוצמה.

10) מעגל במישור ברדיוס r (כאשר $r>0$ ממשי), שמרכזו בראשית הצירים,
הוא קבוצת כל הנקודות (x,y) במישור המקיימות את המשוואה $x^2+y^2=r^2$,
כמודגם בציור שלהלן.
הוכיחו שלכל $r>0$, עוצמת מעגל ברדיוס r שמרכזו בראשית הצירים היא א.



11) הוכיחו או הפריכו:
תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן. אם $A\oplus B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ וגם $A\cap B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$, אז $A\cup B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$.

12) נגדיר $P_2(\mathbb{N})=\{A\subseteq\mathbb{N}\,\|A|=2\}$. כלומר, $P_2(\mathbb{N})$ היא קבוצת כל תתי-הקבוצות בנות שני אברים של הטבעיים.
מהי עוצמת $P_2(\mathbb{N})$? הוכיחו.

13) נסמן ע"י $\mathbb{N}$ את קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ וב- $\mathbb{R}^+$ את הממשיים החיוביים.
א. מה העוצמה של הקבוצה $A_4=\left(a\in\mathbb{R}\,\middle|\,a^4\in\mathbb{N}\right)$?
למשל, $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7}\in A_4$.
ב. מה העוצמה של $A=\left(a\in\mathbb{R}^+\,\middle|\,\exists k\in\mathbb{N},a^k\in\mathbb{N}\right)$?
למשל, $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7},\sqrt[100]{3},\sqrt[3]{4}\in A$.
ג. הראו שקבוצה של מעגלים זרים במישור ניתנת לשידוך לקבוצה חלקית של טבעיים.

14) תהי $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\forall n\in\mathbb{N}\left(x<\frac{1}{n}\right)\wedge\exists n\in\mathbb{N}\left(x>-\frac{1}{n}\right)\right\}$.
מה עוצמת A?

15) תהי $A=\{(a,b)|a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R},a<b\}$. כלומר, A היא קבוצת כל הקטעים הפתוחים ב- $\mathbb{R}$.
מהי עוצמת A? הוכיחו.

16) נגדיר יחס S מעל $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ באופן הבא: $(x_1x_2)S(y_1y_2)\Leftrightarrow\lfloor x_1\rfloor=\lfloor y_1\rfloor$,
כאשר S יחס שקילות (אין צורך להוכיח זאת).
הוכיחו כי קבוצת המנה $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})/S$ היא מעוצמה $\aleph_0$.

17) הוכיחו או הפריכו: לכל קבוצה A מתקיים $A\times\mathbb{N}\sim A\times(\mathbb{N}-\{1\})$.

18) הוכיחו כי עוצמת הקבוצה $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n,n+1)=(1,2)\cup(2,3)\cup(3,4)\cup\cdots$ היא $\aleph$.

19) תהי A קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ ויהי E יחס שקילות מעל A.
הוכיחו כי $|E|=\aleph_0$.

20) הוכיחו או הפריכו:

לכל זוג קבוצות A,B מתקיים $(A\times B)^C \sim (A^C\times B)\cup(A\times B^C)$.

21) פונקציית הסינוס $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור של 2π.

כלומר, $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

עבור $0\le x\le 2\pi$ מתקיים $\sin x=0 \Leftrightarrow x\in\{0,\pi,2\pi\}$.

מצאו את עוצמת הקבוצה $O_{\sin}=\{x\in\mathbb{R} | \sin x=0\}$. הוכיחו.

22) האם קיימת קבוצה A, כך ש-$|P(A)|=\aleph_0$? הוכיחו.

23) הוכיחו כי קבוצה בת-מניה של ישרים לא יכולה לכסות את המישור $\mathbb{R}^2$.

24) קבעו האם לקבוצה אחת עוצמה גדולה יותר, או שהן שוות:

א. $\{0,1\}^{P(\mathbb{R})},\ \{0,1\}^{\mathbb{R}}$

ב. $P(\mathbb{R})^{P(\mathbb{N})},\ P(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$

ג. $\mathbb{N}^{\mathbb{R}},\ \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

25) חשבו את עוצמת הקבוצות הבאות:

א. קבוצת כל הסדרות האינסופיות של הטבעיים.

ב. קבוצת כל הסדרות האינסופיות העולות ממש של הטבעיים.

ג. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות.

ד. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 10.

ה. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 00.

ו. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 10 וגם את הרצף 00.

ז. קבוצת כל היחסים מעל $\mathbb{N}$.

ח. קבוצת כל היחסים הרפלקסיביים מעל $\mathbb{N}$.

לפתרונות מלאים בסרטוני ווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה 2

פרק 3 - קומבינטוריקה בסיסית

תוכן העניינים

מבוא לקומבינטוריקה בסיסית

שאלות

1) חשבו, ללא מחשבון:

א. $\frac{4!\cdot 7!}{0!\cdot 10!}$

ב. $\frac{14!\cdot 20!}{10!\cdot 17!}$

2) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2-n)=n!$

ב. $(n-1)!n^2+n!=(n+1)!$

ג. $\frac{n^2-2}{(n+1)!}+\frac{(n+2)^2}{(n+2)!}=\frac{1}{(n-1)!}$

3) חשבו ללא מחשבון:

א. $\binom{5}{3}$

ב. $\binom{4}{1}$

ג. $\binom{10}{0}$

ד. $\frac{1}{13}\binom{14}{11}$

4) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$

ב. $\frac{k}{n}\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}$

ג. $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

ד. $\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n-1}=\binom{2n+1}{n}$

5) ענו על הסעיפים הבאים:
א. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון? רשמו את כל התוצאות.
ב. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון ואחר כך מטבע? רשמו את כל התוצאות.
ג. עושים ניסוי ומטילים מטבע.
אם יצא עץ אז מטילים סביבון ואם יצא פלי אז מטילים שוב את המטבע ולאחר מכן סביבון.
כמה תוצאות אפשריות לניסוי?
למשל (פלי, פלי, גדול) ו-(עץ, היה) הן תוצאות אפשריות.
רשמו את כל התוצאות.

6) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מהאותיות ב, ג, ד, ה ניצור מילה בת שתי אותיות, לא בהכרח בעלת משמעות. רשמו את כל המילים האפשריות ואשרו עם עיקרון הכפל.
ב. מהאותיות א, ב, ג, ד, ה ניצור מילה בת שלוש אותיות, לא בהכרח בעלת משמעות. כמה מהמילים הנ"ל מתחילות באות א וגם א מופיעה פעם אחת בדיוק?
(רמז: סעיף קודם)

7) במסעדה מציעים ארוחה עסקית, המורכבת ממנה ראשונה, עיקרית ושתייה. המנה הראשונה יכולה להיות סלט ירקות, סלט פטריות, סלט כבד קצוץ או מרק עוף. המנה העיקרית יכולה להיות סטייק אנטרקוט, שניצל, כבד אווז, דג, לזניה טבעונית, או שניצל מהצומח, ולשתייה מוצע, קפה, תה, לימונדה או קולה.
א. כמה ארוחות אפשריות יש?
ב. כמה ארוחות אפשריות יש אם אין שתיה חמה?
ג. כמה ארוחות אפשרויות יש למסעדה להציע לסועדת טבעונית?

8) כמה תת קבוצות יש לקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,
א. בנות שלושה איברים? רשמו את כולן.
ב. בנות ארבעה איברים? השוו לסעיף א'.
ג. רשמו את כל התמורות של 0001111 והשוו לסעיפים קודמים.
ד. בכמה תמורות של המספרים 00112222222 כל 0 חייב להופיע ליד 1?

9) בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב זוג מתלמידי כיתות א', אם בכיתה א' 1 יש 20 בנים ובכיתה א' 2 יש 15 בנות, כך ש:
א. ללא הגבלה.
ב. זוג מעורב (בן ובת).
ג. זוג חד מיני (שני בנים, או שתי בנות).

10) בלוטו יש 45 מספרים וצריך לנחש 6 מספרים ואת המספר החזק מתוך הקבוצה $\{1,2,3,4,\cdots,10\}$.
כמה אפשרויות יש?

11) בכמה אופנים שונים ניתן לבחור מספר תלת ספרתי כך ש:
א. ללא הגבלה (זכרו שמספר לא יכול להתחיל באפס).
ב. כל ספרותיו שונות.
ג. כל ספרותיו שונות וסדר הספרות לא משנה?
(למשל 123 ו-321 נחשבים אותו דבר)
ד. כל ספרותיו שונות וגם בסדר יורד. כלומר, ספרת המאות גדולה או שווה מספרת העשרות גדולה או שווה מספרת היחידות.
ה. כל ספרותיו שונות וגם בסדר עולה. כלומר, ספרת המאות קטנה או שווה מספרת העשרות קטנה או שווה מספרת היחידות.

12) כמה מספרים מורכבים מהמספרים 1,2,3,4,5,6,7 יש, כך ש:
א. באורך 7?
ב. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לכל היותר?
ג. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לפחות?

13) בכמה אופנים שונים ניתן להושיב 5 זוגות נשואים על ספסל בן 10 מקומות (ענו גם לגבי שולחן עגול) כך ש:
א. ללא הגבלה.
ב. כל אישה תשב לצד בן-זוגה.
ג. גבר ישב רק ליד אישה.
ד. אף שתי נשים לא ישבו זו לצד זו ואף שני גברים לא ישבו זה לצד זה.

14) כמה מספרים שונים בני חמש ספרות ניתן להרכיב מהספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, כך ש:
א. ללא הגבלה.
ב. המספר מתחיל בספרה 2.
ג. המספר לא מתחיל בספרה 2.
ד. כל הספרות שונות.
ה. הספרות 1 וגם 2 לא מופיעות.
ו. בדיוק אחת מן הספרות 1 או 2 מופיעה.
ז. ספרות 1 וגם 2 מופיעות.
ח. חזרו על סעיפים ה-ז כאשר כל הספרות שונות.
ט. כל הספרות שונות והספרות 1,2 מופיעות צמודות.
י. כל הספרות שונות והספרות 1,2 מופיעות ולא צמודות.
יא. כל הספרות שונות והספרות 1,2,3 מופיעות וצמודות.
יב. כמו סעיף יא וגם הספרות 6,7 מופיעות וצמודות.
יג. כמו סעיף יא וגם הספרות 6,7 מופיעות ולא צמודות.

15) בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב קוד סודי המורכב מארבע ספרות מתוך הספרות $0,1,2,3,\cdots,9$, כך ש :

א. ללא הגבלה?
ב. הקוד מגדיר מספר זוגי?
ג. הקוד מגדיר מספר המתחלק בחמש?
ד. אין בקוד ספרות זהות?
ה. יש בקוד לפחות שתי ספרות זהות?
ו. יש בקוד בדיוק שתי ספרות זהות?
ז. אין בקוד את הספרה 5?
ח. הספרה 5 חייבת להופיע בקוד?
ט. יש בקוד לפחות אחד מהספרות 4,5?
י. אין בקוד לא את הספרה 4 ולא את הספרה 5?
יא. אם יש את הספרה 5 אז אין ספרה יותר גדולה מ-5?

הדרכה : רשמו שני מספרים המקיימים את התנאי ושניים שאינם מקיימים את התנאי וכתבו מהו המשלים של סעיף זה? נסחו זאת על דרך החיוב. כלומר, בלי להשתמש במילים 'אין' ו-'ילא'.

16) נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,\cdots,17\}$. כמה תת קבוצות יש ל- A כך ש :

א. ללא הגבלה?
ב. בנות 3 איברים?
ג. בעלות 3 איברים לפחות?
ד. מכילות רק מספרים זוגיים? רק אי זוגיים?
מכילים רק מספרים מאותה זוגיות?
ה. מכילות אי זוגי אחד לפחות?
מכילות זוגי אחד לפחות וגם אי זוגי אחד לפחות?
ו. אם הן מכילות את 1 אז מכילות גם את 2?
(סעיף קשה ; אפשר לנסות בעזרת משלים)
ז. מכילות ממש את $\{1,2,3\}$.

17) בכמה אופנים שונים ניתן להכניס 7 כדורים ל-13 תאים, כך ש :

א. הכדורים שונים ומותר יותר מכדור בתא?
ב. הכדורים זהים ומותר יותר מכדור בתא?
ג. הכדורים שונים ואסור יותר מכדור בתא?
ד. הכדורים זהים ואסור יותר מכדור בתא?
ה. הכדורים שונים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?
ו. הכדורים זהים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?

18) נתונים חמישה כדורים ונתונים שבעה צבעים שונים (למשל שחור, לבן, אפור, צהוב אדום כחול וסגול).
בכמה אופנים שונים ניתן לצבוע את הכדורים ולסדרם בשורה אם:
א. סדר הכדורים בשורה משנה.
ב. סדר הכדורים בשורה לא משנה.
כלומר, ארבעה כדורים שחורים ואחד לבן זה נחשב אותו דבר לא משנה היכן הלבן ממוקם.

19) עבור $B=\{x,y\}$ $A=\{1,2,3\}$, חשבו כמה פונקציות יש מ-A ל-B ומ-B ל-A, ואשרו עם עיקרון הכפל.

תשובות סופיות

1) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{1001}{285}$

2) הוכחה.

3) א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 28

4) הוכחה.

5) א. 24 ב. 48 ג. 12

6) א. 16 ב. 16

7) א. 96 ב. 48 ג. 16

8) א. 35 ב. 35 ג. 35 ד. 180

9) א. 595 ב. 300 ג. 295

10) 81,450,600

11) א. 900 ב. 648 ג. $\binom{10}{3}$ ד. $\binom{10}{3}$ ה. $\binom{9}{3}$

12) א. $\binom{7}{7}$ ב. אין ג. אין

13) א. ספסל: $10!$, מעגל: $9!$. ב. ספסל: $5!\cdot 2^5$, מעגל: $4!\cdot 2^5$.
ג. ספסל: $(5!)^2\cdot 2!$, מעגל: $4!\cdot 5!$. ד. ספסל: $(5!)^2\cdot 2!$, מעגל: $4!\cdot 5!$.

14) א. 7^5 ב. 7^4 ג. $6\cdot 7^4$ ד. $3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$ ה. 5^5
ו. $2\left(6^5-5^5\right)$ ז. $7^5-2\cdot 6^5+5^5$ ח. (ה) $5!$ ח. (ו) $10\cdot 5!$
ח. (ז) $10\cdot 5!$ ט. $4\cdot 5!$ י. $6\cdot 5!$ יא. 216 יב. 24 יג. 12

15) א. 10^4 ב. $5\cdot 10^3$ ג. $2\cdot 10^3$ ד. $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$
ה. $10^4-10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$ ו. $10\cdot 9\cdot 8\cdot \binom{4}{2}$ ז. 9^4
ח. 10^4-9^4 ט. 10^4-8^4 י. 8^4 יא. $9^4+6^4-5^4$

16) א. 2^{17} ב. 680 ג. 130,918
ד. זוגיים: 2^8, אי זוגיים: 2^9, אותה זוגיות: 768.
ה. לפחות אי זוגי אחד: 130,816, לא מאותה זוגיות: 130,304.
ו. 98,304 ז. 16,383

17) א. 13^7 ב. $\binom{19}{7}$ ג. $\binom{131}{61}$ ד $\binom{13}{7}$
ה. $13\binom{7}{2}\binom{12}{5}5!$ ו. $13\cdot\binom{16}{5}$

18) א. 7^5 ב. $\binom{11}{5}$

19) מ-A ל-B : 8, מ-B ל-A : 9.

קומבינטוריקה יותר לעומק

שאלות

1) בכמה אופנים ניתן לסדר 10 אנשים בשורה כך ש:
א. ללא הגבלה.
ב. אבי ובני סמוכים.
ג. אבי, בני וגדי סמוכים.
ד. אבי ובני לא סמוכים.
ה. אבי ובני סמוכים וגם גדי ודני סמוכים.
ו. אבי ובני סמוכים וגדי ודני לא סמוכים.

2) בכיתה בה יש 10 בנים ו-15 בנות יש להרכיב נבחרת כדורסל בה יש לפחות שני בנים ולפחות שתי בנות.
בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

3) בכמה אופנים שונים ניתן להניח 8 צריחים על לוח שחמט 8×8 מבלי שאף צריח יאיים
על חברו כך ש:
(צריח מאיים על חברו אם הוא נמצא באותה שורה או באותה עמודה של חברו)
א. כל הצריחים הם לבנים.
ב. שלושה צריחים הם לבנים וחמישה הם שחורים.
ג. הצריחים נלקחים מתוך שקית ובה מלאי בלתי מוגבל של צריחים לבנים ומלאי בלתי מוגבל של צריחים שחורים.

4) בכמה מספרים 6 ספרתיים מופיעה הספרה:
א. 0 פעם אחת בדיוק.
ב. 0 פעם אחת לפחות.
ג. 7 פעם אחת לפחות.
ד. 7 פעם אחת בדיוק.
יש לזכור שמספר לא יכול להתחיל בספרה 0.

5) ענו על הסעיפים הבאים:
א. יהי n טבעי.
בכמה תת קבוצות של $\{1,2,3,\ldots,2n\}$ יש אי זוגי אחד לפחות?
ב. בכמה תת קבוצות של $\{1,2,3,\ldots,2n\}$ יש לפחות $n+1$ איברים?

6) בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 10 לימונדות זהות, כוס קולה 1 וכוס קינלי 1 ל-4 תלמידים צמאים, כך שכל תלמיד מקבל לפחות משקה אחד והקולה והקינלי ניתנים לתלמידים שונים?

7) בכמה דרכים ניתן לחלק 400 כדורים זהים ל-3 תאים, כך ש:
א. יש תא ובו יותר מ-200 כדורים.
ב. בכל תא מספר זוגי של כדורים.
ג. בשני תאים מתוך השלוש מספר אי זוגי של כדורים ובתא אחד מספר זוגי של כדורים.

8) 7 אנשים נכנסים למעלית בבניין בן 13 קומות.
בכמה אופנים הם יכולים ללחוץ על כפתורי המעלית כך ש:
א. המעלית תעצור בקומה החמישית? (יתכן ותמשיך הלאה משם)
ב. המעלית תעצור בקומה החמישית לכל היותר.
ג. המעלית תגיע לפחות עד הקומה החמישית.
ד. המעלית תעצור בקומה החמישית (ולא תמשיך משם הלאה).

9) בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים לבנים זהים ו- n כדורים צבעוניים (שונים) ל- $2n$, כך שבכל תא יהיה:
א. לכל היותר כדור אחד.
ב. לכל היותר כדור לבן אחד ואין מגבלה על מספר הצבעוניים.
ג. לכל היותר כדור צבעוני אחד ואין הגבלה על מספר הלבנים.
ד. מספר שווה של לבנים וצבעוניים.

10) במלבן בן k שורות ו- m עמודות יש לסמן $\times$ או $\bigcirc$ בכל משבצת.
א. הראו כי יש $\left(2^m-1\right)^k$ דרכים לעשות זאת, כך שבכל שורה יופיע $\times$ אחד לפחות.
ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת, כך שיופיע $\bigcirc$ אחד לפחות בכל עמודה.
ג. הסיקו כי $2^{mk} \le \left(2^m-1\right)^k + \left(2^k-1\right)^m$.

11) ענו על הסעיפים הבאים:
א. כמה תמורות של $1,2,3,\cdots,n$ מספר 2 מופיע בין 1 ל-3? (לאו דווקא צמודים. למשל, עבור $n=7$ התמורה 4352981 חוקית, כי 2 נמצא בין 1 ל-3)
ב. בכמה תמורות של $1,2,3,\cdots 5$ מימין למספר 3 אין מספרים קטנים מ-3. (למשל 24135 חוקית ואילו 43152 לא חוקית)

12) ענו על הסעיפים הבאים :
א. בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 12 אנשים לשלושה זוגות ושתי שלשות?
ב. כמו סעיף א, אך בנוסף דני ודנה לא נמצאים באותה קבוצה.

13) כמה פתרונות בשלמים אי-שליליים יש לכל אחת מהמשוואות הבאות?
א. $x_1 + x_2 + \cdots x_7 = 20$
ב. $x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 14$
ג. $(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6) = 18$

14) בכמה דרכים ניתן לבחור ועדה בת n אנשים מתוך n זוגות נשואים, כך ש :
א. בוועדה לא ישתתף אף זוג נשוי.
ב. מספר הגברים יהיה שווה למספר הנשים.
ג. מספר הגברים יהיה קטן ממש ממספר הנשים.

15) מצאו כמה פונקציות $f:\{1,2,3,\ldots,3n-1,3n\} \to \{1,2,3,\ldots,n-1,n\}$ מקיימות את התנאי הבא : לכל איבר בתמונה יש בדיוק 3 מקורות.

16) מה מספר הדרכים לפזר 50 כדורים אדומים ו-20 כדורים כחולים ל-10 תאים, כך שבכל תא מספר הכדורים האדומים יהיה לפחות כמספר הכדורים הכחולים?

17) בכמה דרכים ניתן לחלק קבוצה בגודל $2n$ לקבוצה בגודל n ולזוגות? (ניתן להניח כי n זוגי)

18) בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה 8 פילים <u>שונים</u>, 2 שועלים <u>זהים</u> ושתי תרנגולות <u>זהות</u>, כך שהפילים מסודרים משמאל לימין על פי משקלם בסדר עולה, ואף שועל לא יהיה צמוד לתרנגולת?

19) בכמה דרכים ניתן לחלק 100 כדורים לבנים ו-100 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ל-250 תאים, כך שיתקיימו שני התנאים הבאים : יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור לבן אחד, ויהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד.

20) בכמה דרכים ניתן לסדר n גברים ו-n נשים במעגל כך שבני אותו מין לא ישבו זה לצד זה? כנ"ל לגבי שורה.

21) יש לבחור קבוצה של שישה ילדים מבין תלמידי כיתות א1 ו-א2, באופן ששלושה מהם יהיו מ-א1 ושלושה מ-א2. מספר הבנים בקבוצה צריך להיות שווה למספר הבנות בקבוצה (3 ו-3). ב-א1 יש 10 בנים ו-15 בנות וב-א2 יש 15 בנים ו-10 בנות. בכמה אופנים ניתן לבחור את הקבוצה?

22) בכמה קבוצות של n כדורים ב-10 צבעים יש לפחות כדור אחד מכל צבע?

23) כמה פונקציות $f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ (כאשר $n\geq 1$) מקיימות את התנאי $f(k)\neq f(k+1)$ לכל $1\leq k\leq n-1$?

24) כמה פונקציות $f:\{1,2,3,\cdots,n\}\to\{1,2,3,\cdots,n\}$ חח"ע ועל יש, המקיימות $f(k)-k$ זוגי לכל $k\in\{1,2,3,\cdots,n\}$?

25) בכמה דרכים ניתן לחלק 60 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ו-90 כדורים לבנים זהים ל-100 תאים, כך שיתקיימו שני התנאים הבאים גם יחד: יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד וכמו כן בכל תא יהיו לכל היותר 50 כדורים לבנים.

26) בכמה דרכים ניתן לחלק 4 בננות, 2 תפוזים, ו-4 תפוחים ל-10 אנשים, כך שכל אחד יקבל בדיוק פרי אחד? שימו לב שפירות מאותו סוג נחשבים זהים.

27) בכמה דרכים ניתן לבנות שורה מ-$k\geq 0$ כדורים לבנים זהים ו-$m\geq 0$ כדורים צבעוניים שונים (ושונים מלבן)?

28) כמה תת קבוצות בגודל 7 יש לקבוצה $A=\{1,2,3,...,12,13\}$, שיש בהם שני איברים עוקבים?

29) תהי $A_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$, כאשר $n\in\mathbb{N}_{odd}$, ותהי $a_1,a_2,\cdots a_n$ תמורה כלשהי של A_n. הוכיחו כי המכפלה $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ בהכרח זוגית (יש לפתור).

30) מטילים n קוביות. כמה תוצאות יש אם:
א. הקוביות שונות.
ב. הקוביות זהות.

31) נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,\cdots n\}$.

כמה זוגות של קבוצת (C,D), $C,D\subseteq A$ כך ש:

א. ללא הגבלה. עבור $A=\{1,2\}$, רשמו את כל הפתרונות.

ב. $C\cap D=\varnothing$. עבור $A=\{1,2\}$, רשמו את כל הפתרונות.

ג. $C\subseteq D$. עבור $A=\{1,2\}$, רשמו את כל הפתרונות.

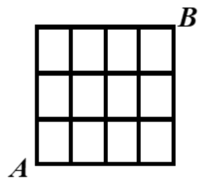
ד. $C\cup D=A$. עבור $A=\{1,2\}$, רשמו את כל הפתרונות.

ה. אם $2\in C$, אז $2\in D$ (עבור $A=\{1,2,3\}$, הדגימו זוג שמקיים את הדרישה וזוג שאינו מקיים את הדרישה).

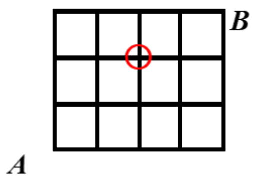
ו. אם יש מספר אי זוגי ב- C, אז יש כזה גם ב- D (שימו לב שלא נתון ש- n הוא זוגי).

32) חרגול נמצא בנקודה A בשריג המתואר להלן. בכל שלב יכול החרגול להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה.

א. בכמה אופנים שונים יכול החרגול להגיע מנקודה A לנקודה B?

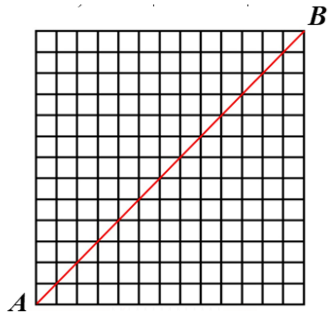


ב. בכמה אופנים הוא יכול לעשות זאת מבלי לעבור דרך הנקודה המסומנת להלן $(2,2)$?



(33 החרגול החביב מהשאלה הקודמת לא התעייף (מדובר בחרגול ספורט) ונמצא עכשיו בנקודה A בשריג $n\times n$ המתואר להלן (13×13 להמחשה).
תזכורת: בכל שלב יכול החרגול להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה.
בכמה דרכים יכול החרגול להגיע מנקודה A לנקודה B?
(שימו לב שהשריג בשאלה הוא $n\times n$)

א. ללא הגבלה.
ב. מבלי לעבור דרך אף אחד מהנקודות $(7,3),(5,9)$?
(מה המשלים של הסעיף?)
ג. מבלי לעבור דרך אף אחד מהנקודות $(5,3),(7,9)$?
ד. מבלי לגעת באלכסון האדום? (פרט לנקודת ההתחלה ונקודת הסיום)



(34 למורה צילה מאגר בלתי מוגבל של חרוזים בשלושה צבעים: אדום, צהוב וירוק (חרוזים מאותו צבע נחשבים זהים). בכיתה ג' 27 תלמידים. בשיעור מלאכה המורה צילה נותנת לכל ילד שקית והילד בוחר חמישה חרוזים ומכניס לשקית. בסוף השיעור המורה מכניסה את כל השקיות למחסן.
כמה תכולות מחסן אפשריות?

תשובות סופיות

1) א. $10!$ ב. $2!9!$ ג. $3!8!$ ד. $8!9!$ ה. $4!8!$ ו. $14!8!$

2) שתי דרכים.

3) א. $8!$ ב. $8!\cdot\binom{8}{3}$ ג. $8!\cdot 2^8$

4) א. $5\cdot 9^5$ ב. $9\cdot 10^5-9^6$. ג. $9\cdot 10^5-8\cdot 9^5$ ד. $9^5+5\cdot 8\cdot 9^4$

5) א. $2^{2n}-2^n$ ב. $|A|=\dfrac{2^{2n}-\binom{2n}{n}}{2}$

6) $4\cdot 3\cdot\binom{11}{3}$

7) א. $3\cdot\binom{201}{2}$ ב. $\binom{202}{2}$ ג. $3\cdot\binom{201}{2}$

8) א. 13^7-12^7 ב. 5^7 ג. 13^7-4^7. ד. 5^7-4^7

9) א. $\binom{2n}{n}n!$ ב. $\binom{2n}{n}\cdot(2n)^2$ ג. $\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot\binom{3n-1}{n}$ ד. $(2n)^2$

10) א. ראו בסרטון. ב. $\left(2^k-1\right)^m$ ג. שאלת הוכחה.

11) א. $\frac{1}{3}5!$ ב. $\frac{1}{3}5!$

12) א. $\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}$

ב. $\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}-\left(\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}+10\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{2}\cdot\frac{1}{3!}\right)$

13) א. $\binom{26}{20}\binom{26}{6}$ ב. $\binom{16}{2}+\binom{11}{2}+\binom{6}{2}$ ג. $2\left[3\cdot\binom{20}{2}+\binom{4}{2}\cdot\binom{11}{2}+\binom{5}{2}\cdot\binom{8}{2}\right]$

14) א. 2^n ב. $\binom{n}{\frac{n}{2}}^2$ ג. n זוגי: $\dfrac{\binom{2n}{n}-\binom{n}{\frac{n}{2}}^2}{2}$, n אי זוגי: $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2}$.

15) $\dfrac{(3n)!}{6^n}$

16) $\binom{29}{9}\binom{39}{9}$

17) $\dfrac{(2n)!}{n!\binom{n}{\frac{n}{2}}!2^{\frac{n}{2}}}$

18) 1638

19) $\left(\binom{349}{100}-\binom{250}{100}\right)\left(250^{50}-\frac{250!}{200!}\right)$

20) $2(n!)^2$

21) $\binom{10}{3}^2+\binom{10}{2}^2+\binom{15}{1}^2+\binom{10}{1}^2\binom{15}{2}^2+\binom{15}{3}^2$

22) $\binom{n-1}{9}$

23) $n(n-1)^{n-1}$

24) $\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil!\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor!$

25) $\left(100^{60}-\frac{100!}{40!}\right)\cdot\left(\binom{189}{90}-100\cdot\frac{138}{39}\right)$

26) $\frac{10!}{4!4!2!}$

27) $\frac{(m+k)!}{k!}$

28) $2^{13}-1$

29) שאלת הוכחה.

30) א. 6^n ב. $\binom{n+5}{5}$

31) א. 4^n ב. 3^n ג. 3^n ד. 3^n ה. $3\cdot 4^{n-1}$ ו. $4^n-\left(2^n-2^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\right)2^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}$

32) א. $\binom{7}{4}$ ב. 17

33) א. $\binom{2n}{n}$ ב. $\left|\bar{A}\cap\bar{B}\right|=\binom{2n}{n}-\left(\binom{10}{3}\binom{2n-10}{n-3}+\binom{14}{5}\binom{2n-14}{n-5}\right)$

ג. $\left|\bar{A}\cap\bar{B}\right|=\binom{2n}{n}-\left(\binom{8}{3}\binom{2n-8}{n-3}+\binom{16}{7}\binom{2n-16}{n-7}-\binom{8}{5}\binom{8}{2}\binom{2n-16}{7}\right)$

ד. $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

34) $\binom{47}{20}$

מתמטיקה בדידה 2

פרק 4 - הבינום של ניוטון

תוכן העניינים

הבינום של ניוטון

שאלות

1) הוכיחו אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=3^n$.

2) הוכיחו לכל $n\geq 0$ את הזהות $6^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{2n-k}$.

3) הוכיחו את השוויון

$$2^n=3^n-n3^{n-1}+\binom{n}{2}3^{n-2}-...+(-1)^k\binom{n}{k}3^{n-k}+...+(-1)^n\binom{n}{n}3^0$$

4) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=2^{2n}$.

5) הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\binom{m+n}{2}=\binom{n}{2}+\binom{m}{2}+mn$.

6) הוכיחו כי $\binom{2n}{n}$ זוגי לכל $n\in\mathbb{N}$.

7) הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}2^{k-1}=\frac{n}{3}\cdot 3^n$.

8) הוכיחו כי $\binom{x+y}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$, $\forall x,y,n\in\mathbb{N}^+$.

9) הוכיחו את השוויון $\binom{3n}{n}=\sum_{k,j=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{j}\binom{n}{k+j}$.

10) הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$.

11) הוכיחו שלכל $n\ge 0$ ולכל $0\le k\le n$ מתקיים $\binom{n}{k}+2\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}=\binom{n+2}{k+2}$.

12) הוכיחו אלגברית וקומבינטורית את הזהות

$$(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1=\frac{\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2}}{n!}$$

13) הוכיחו את הזהות $\sum_{k=1}^{n}k(n-k)\binom{2n}{k}\binom{3n}{n-k}=6n^2\binom{5n-2}{n-2}$.

14) הוכיחו את השוויון $\sum_{n=0}^{N}\binom{k-1+n}{n}=\binom{k+N}{N}$.

15) הוכיחו כי אם $n>0$ זוגי, אז $2^n>\binom{n}{\frac{n}{2}}$.

16) כמה מבין המספרים בפיתוח הבינום $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{7}\right)^{80}$ שלמים?

17) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $n^n-(n-1)^n=\sum\binom{n}{i}(n-1)^{n-i}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה 2

פרק 5 - הכלה והדחה

תוכן העניינים

הכלה והדחה

שאלות

1) כמה מילים באורך n יש מעל הא"ב $\{A,B,C,D\}$, כך שהאותיות A,B חייבות להופיע?

2) לארוחת ערב הוזמנו חמישה אנשים, להם המארח קנה 10 מתנות שונות.
בכמה דרכים ניתן לחלק את המתנות בין האורחים, כך שכל אורח יקבל לפחות פרס אחד?

3) בקייטנת ההשקעות הלא-הגיוניות יש חמישה קורסים. בכל אחד מחמשת הקורסים רשומים בדיוק 55 ילדים. לכל זוג קורסים יש בדיוק 44 ילדים שרשומים לשניהם, לכל שלושה מהקורסים יש בדיוק 33 ילדים שרשומים לשלושתם, ולכל ארבעה מהקורסים יש בדיוק 22 ילדים שרשומים לארבעתם.
הוכיחו כי יש לפחות ילד אחד שרשום לכל חמשת הקורסים בו זמנית.

4) א. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 23 בדיוק?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק על פונקציות יוצרות)
ב. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 31 בדיוק?
ג. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 23 לכל היותר?

5) קובייה הוטלה 8 פעמים ורשמו את התוצאות כסדרה של 8 מספרים.
מה מספר האפשרויות לסדרות באורך 8 של הטלות, שבהן יופיעו כל ששת המספרים מ-1 עד 6 (כל מספר לפחות פעם אחת)?

6) במערכת שנה א של התוכנית למדעי המחשב באקדמיה המכללתית של תל-יפו-אביב יש חמישה קורסים. בכל אחד מחמשת הקורסים רשומים בדיוק 40 תלמידים. לכל זוג קורסים יש בדיוק 32 תלמידים שרשומים לשניהם, לכל שלושה מהקורסים יש בדיוק 24 תלמידים שרשומים לשלושתם, ולכל ארבעה מהקורסים יש בדיוק 16 תלמידים שרשומים לארבעתם.
הוכיחו שיש לפחות תלמיד אחד שרשום לכל חמשת הקורסים בו זמנית.
<u>הדרכה</u>: על סמך הנתונים כתבו ביטוי שמתאר כמה תלמידים יש בכל חמשת הקורסים יחד.

7) לארוחת ערב הוזמנו חמש נשים, להן המארחת קנתה 10 מתנות שונות.
בכמה דרכים ניתן לחלק את המתנות בין האורחות, כך שכל אורחת תקבל לפחות פרס אחד?

8) איש ציבור מושחת לוקח כל שנה שוחד בסך 2, 4 או 6 מיליון דולר (שלא כמו איש ציבור נורמטיבי, איש ציבור מושחת יכול לקחת שוחד של 6 מיליון דולר מספר שנים ברציפות). סדרת שוחד היא סדרת סכומים שקיבל איש ציבור מושחת במשך כמה שנים, למשל 2, 4, 2, 6, 6.
כמה סדרות שוחד יניבו עבור איש ציבור מושחת סך של 20 מיליון דולר במשך 6 שנים?

9) עבור $A=\{1,2,3.\cdots,10\}$, כמה פונקציות $f:A\to A$ חח״ע ועל יש, כך ש- $f(k)\neq k$ עבור $k=1,2,3$?

10) בכמה תמורות של המספרים $\{1,2,3,4,\cdots,18\}$, כל המספרים שמתחלקים ב-3 במקומות של מספרים שמתחלקים בשלוש ואף זוגי לא במקומו?

11) ברשותך שלושה כדורים לבנים זהים, שלושה כדורים שחורים זהים, ומאגר בלתי מוגבל של כדורים אדומים זהים. בכמה אופנים ניתן להרכיב מהם קבוצה (סדר הכדורים לא משנה) בת n כדורים?
פתרו בעזרת פונקציות יוצרות ובעזרת הכלה והדחה והשוו את התוצאות.

12) שבע משפחות בנות שלוש נפשות כל אחת (אבא, אמא וילדה) מגיעות למפגש חברתי.
בכמה אופנים ניתן לסדר אותם בשלשות, כך ש:
א. ללא הגבלה?
ב. כל שלשה תהיה מורכבת מאבא, אמא וילד אבל אף שלשה לא תרכיב משפחה שלמה?
ג. אף שלשה לא תרכיב משפחה שלמה (כלומר, יתכן שלשה המורכבת משלושה אבות או שני אבות וילד).

13) בכמה דרכים ניתן לחלק 40 כדורים לארבעה תאים, כך שאף תא לא יהיה ריק, כאשר
א. הכדורים זהים.
ב. הכדורים שונים.

14) ארבעה אנשים שונים (שנמספר 1, 2, 3, 4) אחראים יחד על ביצוע של 5 משימות שונות (שנקטלג א, ב, ג, ד, ה). לביצוע כל משימה נדרשים **בדיוק שני אנשים**, כאשר אין הבדל בין תפקידי שני האנשים בצוות המבצע משימה נתונה.

א. בכמה דרכים ניתן להקצות את 5 המשימות לצוותים של שני אנשים? הנה כמה דוגמאות לדרכים **לגיטימיות** לעשות זאת:

דוגמה 1: הצוות $\{1,2\}$ יבצע את כל המשימות.

דוגמה 2: הצוות $\{1,2\}$ יבצע את משימות א ו-ב, הצוות $\{1,3\}$ את משימות ג ו-ד, והצוות $\{2,3\}$ את משימה ה.

דוגמה 3: הצוות $\{1,2\}$ יבצע את משימות א ו-ב, הצוות $\{3,4\}$ את משימות ג ו-ד, והצוות $\{2,3\}$ את משימה ה.

ב. בכמה דרכים ניתן להקצות את חמשת המשימות לצוותים של שני אנשים, אם אסור שמישהו יתחמק לגמרי מעבודה, כאשר כל אחד מ-4 האנשים חייב לקחת חלק במשימה אחת לפחות (דוגמאות 1 ו-2 בסעיף א אינן חוקיות כעת, אולם דוגמה 3 חוקית).

15) דנה, תלמידה בכיתה א', קראה בספר את המשפט המעניין: **דנה קמה דנה נמה**. אחרי שקראה בהצלחה את המשפט, עלו בדעתה של דנה כמה שאלות מעניינות לא פחות:

א. בכמה דרכים אפשר לסדר את כל 12 האותיות במשפט זה במחרוזת אחת ללא רווחים, כגון **דנהקמהדנהנמה**?

ב. בכמה מהדרכים הללו מופיע בתוך המחרוזת הרצף **דמקה**?

ג. מה מספר הדרכים לסדר את 12 האותיות, כך **שלא** תופיע בתוך המחרוזת **אף אחת** מארבע המחרוזות: **דמקה, קהה, ממד, ננהה**?

16) בבחינה מתמטיקה בדידה בקורס זה יש 11 שאלות בארבעה נושאים: 2 שאלות בקומבינטוריקה בסיסית, 3 שאלות בפונקציות יוצרות, 2 שאלות בגרפים ו-4 שאלות בהכלה והדחה, כאשר יש לענות על 6 שאלות לפחות (אפשר יותר) וחייבים לענות על לפחות שאלה אחת מכל נושא.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

17) בכמה דרכים ניתן להרכיב מילה מהמספרים $\{1,2,3,\dots,n\}$, כך שכל מספר יופיע k פעמים, אבל אף מספר לא יופיע k פעמים ברצף?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה 2

פרק 6 - פונקציות יוצרות

תוכן העניינים

פונקציות יוצרות

שאלות

1) מה המקדם של x^{10} בביטוי $\left(x^2-\frac{1}{2}x+2\right)^{30}$?

2) בנו פונקציה יוצרת למספר האפשרויות של דני לקנות בסופר 50 מוצרי חלב לבית מסוג שוקו, מוקה ובננה. כאשר: משקה בננה מגיע רק באריזות של שלוש, משקה שוקו בזוגות, ומשקה מוקה אפשר לקנות ביחידים, ואחותו של דני אוהבת רק מוקה.
(שימו לב שעליו לחזור הביתה עם משקאות לכל בני המשפחה)

3) איש ציבור מושחת לוקח כל שנה שוחד בסך 2, 4 או 6 מיליון דולר (שלא כמו איש ציבור נורמטיבי, איש ציבור מושחת יכול לקחת שוחד של 6 מיליון דולר מספר שנים ברציפות). סדרת שוחד היא סדרת סכומים שקיבל איש ציבור מושחת במשך כמה שנים, למשל 2, 4, 2, 6, 6.
כמה סדרות שוחד יניבו עבור איש ציבור מושחת סך של 20 מיליון דולר במשך 6 שנים?

4) יהי a_n המקדם של x^n בפיתוח של הפונקציה $\frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{(1-2x)^2}$,

ויהי b_n פתרון נוסחת הנסיגה $b_n=b_{n-1}+(n+1)2^n$ עם תנאי ההתחלה $b_0=1$.

הוכיחו כי $a_n=b_n$.

<u>שימו לב</u>: אפשר לפתור את השאלה ע"י חישוב מפורש של a_n ו- b_n, אבל ניתן גם למצוא קיצור דרך משמעותי בעזרת ביטוי מהצורה $\sum_{k=0}^{n}(\ldots)$.

5) יהי a_n מספר הדרכים לכתוב את n כסכום של מספר <u>אי-שלילי</u> של 2-ים, מספר <u>חיובי</u> של 3-ים, ו<u>לכל היותר שני</u> 1-ים, כאשר סדר המחוברים איננו משנה, ויהי b_n מספר הדרכים לפזר n כדורים זהים לשני תאים, כך שבתא הראשון לפחות שלושה כדורים, ובתא השני מספר זוגי של כדורים.
הוכיחו כי $a_n=b_n$.

6) א. רונית יוצאת לטייל בשכונה בלוויית n חיות מחמד, והיא מזמינה לטיול 3, 4 או 5 חתולים מפח האשפה (זה נקרא חתול פ"ז = פח זבל), מספר כלשהו של זוגות עורבים (עורבים באים בזוגות), וכמו כן, אם התחזית לאזרחים היסטריים לאורך המסלול רגועה, יתכן שרונית תזמין גם תנין מצרי.
נסמן ב- a_n את מספר האפשרויות לבחירת n חיות מחמד לטיול של רונית (חיות מאותו מין ביולוגי נחשבות זהות).

א. חשבו את הפונקציה היוצרת של a_n (תשובה סופית כמנה של פולינומים).

ב. גם נורית יוצאת לטיול עם n חיות מחמד משלה. מספר האפשרויות של נורית לבחור את החיות שלה הוא b_n, ונתון כי $\frac{x+x^2}{(1-x)^4}=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.
בכמה אופנים יכולה נורית לבחור לעצמה 23 חיות מחמד לטיול פסטורלי?

7) חשבו את a_{22} בסדרה הנוצרת על ידי $F(x)=\frac{6-10x}{1-7x+12x^2}$

8) בנו פונקציה יוצרת (ללא Σ) עבור מספר הדרכים לפזר n כדורים זהים ב-7 תאים, כך שמספרי הכדורים בתא הראשון ובתא השביעי שווים, בתא השני והשישי יש מספר שווה של כדורים, ובתא הרביעי מספר גדול מאשר בתא הראשון והשני יחד.

9) מצאו נוסחה סגורה לסכום $\sum_{k=0}^{n} k\cdot 5^k$.

10) נסמן ב- a_n את מספר הדרכים לפזר n כדורים זהים ב-5 תאים, כך שלכל $1\le k\le 5$ מספר הכדורים בתא ה- k שווה למספר הכדורים בתא ה- $5-k+1$, ומספר הכדורים בתא האמצעי גדול מסכום מספרי הכדורים בתא הראשון והשני יחד.
מצאו ביטוי אלגברי סגור (ללא Σ) לפונקציה היוצרת $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

11) ברשותך שלושה כדורים לבנים זהים, שלושה כדורים שחורים זהים, ומאגר בלתי מוגבל של כדורים אדומים וירוקים זהים.
בכמה אופנים ניתן להרכיב מהם קבוצה (סדר הכדורים לא משנה) בת n כדורים?
פתרו בעזרת פונקציות יוצרות ובעזרת הכלה והדחה והשוו את התוצאות.

12) א. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 23 בדיוק?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק על הכלה הדחה)
ב. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 31 בדיוק?
ג. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 23 לכל היותר?

13) הוכיחו כי מספר הפתרונות בשלמים אי-שליליים למשוואה $x+y+z=n$, כאשר y זוגי, $3\le x\le 5$ ו-$0\le z\le 1$, שווה למספר הפתרונות בשלמים אי-שליליים למשוואה $x+y=n$, כאשר $3\le x$ ו-$0\le y\le 2$.

14) נתונות סדרות $(a_n)_{n\ge 0},(b_n)_{n\ge 0}$ כלשהן, ונתון שאברי הסדרה $(c_n)_{n\ge 0}$ מקיימים $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$ לכל $n\ge 0$. נסמן ב-$(da)_n,(db)_n,(dc)_n$ את סדרות ההפרשים של הסדרות $(a_n)_{n\ge 0},(b_n)_{n\ge 0},(c_n)_{n\ge 0}$, בהתאמה.
הוכיחו **באמצעות פונקציות יוצרות** כי לכל $n\ge 0$ מתקיים:
$(dc)_n=\sum_{i=0}^{n}(da)_i b_{n-i}=\sum_{i=0}^{n}a_i(db)_{n-i}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il