מתמטיקה בדידה 2

תוכן העניינים

מתמטיקה בדידה 2

פרק 1 - אינדוקציה

תוכן העניינים

אינדוקציה

שאלות

הוכיחו באינדוקציה את הטענות הבאות:

1) $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$

2) $\sum_{k=1}^{n}(4k1)=n(2n+3)$

3) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$

5) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{n}{4n+1}$

6) $\sum_{k=1}^{n}2^k=2(2^n-1)$

7) $\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4^{k-1}}=4-\frac{1}{4^{n-1}}$

8) $\sum_{k=1}^{3n}k=1\frac{1}{2}n(3n+1)$

9) $\sum_{k=1}^{3n}(4k-1)=3n(6n+1)$

10) $\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\frac{n}{2}(3n+1)$

11) $\sum_{k=1}^{n}3^{n+k}=\frac{3^{n+1}(3^n-1)}{2}$

12) $13 \mid \left(4^{2n+1} + 3^{n+2}\right)$

13) $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} < \frac{2+3}{2}$

14) הוכיחו באינדוקציה על n שהנוסחה הנתונה היא אכן פתרון לנוסחה הרקורסיבית הנתונה:

לכל $n > 1$, $a_{n-1} \mid 2a_{n-1} \mid a_n = 0$, כאשר $a_0 = a_1 = 1$.

הוכיחו באינדוקציה כי: לכל $n \geq 0$, $a = (-1)^n (1-2n)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה 2

פרק 2 - אינדוקציה מתמטית

תוכן העניינים

שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

סיכום כללי:

מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:

בדיקה:

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור $n=1$ (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור $n=2,3$).

הנחת האינדוקציה:

נניח כי עבור $n=k$ (k טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

הוכחת האינדוקציה:

נוכיח כי עבור $n=k+1$ טענת האינדוקציה מתקיימת.

סיכום:

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

שאלות:

1) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 8^n-3^n מתחלק ב-5 ללא שארית לכל n טבעי.

2) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 11^n-4^n מתחלק ב-7 ללא שארית לכל n טבעי.

3) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $4^{n+2}+8\cdot 7^n$ מתחלק ב-24 ללא שארית לכל n טבעי.

4) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5^{n+1}-5\cdot 3^{2n}$ מתחלק ב-20 ללא שארית לכל n טבעי.

5) a_n הוא האיבר במקום ה-n בסדרה החשבונית: $1,3,5,7,\ldots$ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $4+2^{a_n}$ מתחלק ב-12 ללא שארית לכל n טבעי הגדול מ-1.

6) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^2+n מתחלק ב-2 ללא שארית לכל n טבעי.

7) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

8) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n-2n-1 מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.

9) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9\left(9^n-1\right)-40n$ מתחלק ב-32 ללא שארית לכל n טבעי.

10) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n+5^n-2^n\left(2^n+1\right)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

11) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n + 2^{2n}$ מתחלק ב-11 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.

12) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $a^n - b^n$ מתחלק ב-$(a+b)$ ללא שארית לכל n טבעי זוגי.

13) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^{n+2}+1$ מותיר שארית 2 בחלוקתו ב- 3 לכל n טבעי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

סדרות:

סיכום כללי:

תזכורת:

- סדרה היא אוסף מספרים: $a_1, a_2, ..., a_n$, כאשר n הוא מיקום האיבר בסדרה ו- a_n הוא ערך האיבר העומד במקום ה- n-י בסדרה.
  - סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.
  - סכום n האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- S_n
    והוא מקיים: $S_n = a_1 + ... + a_n$.

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 + d(n-1)$ כאשר d הפרש הסדרה.
  - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$.

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 q^{n-1}$ כאשר q היא מנת הסדרה.
  - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$.

שאלות:

14) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $1+2+3+4+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$.

15) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $4+7+10+13+...+(3n+1)=\frac{n}{2}(3n+5)$.

16) נתונה סדרה שבה: $a_n=n(n+2)$.
הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$.

17) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

18) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$\frac{6}{1\cdot3\cdot5}+\frac{6}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

19) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+...+n\cdot3^{n-1}=\frac{1}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right].$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

עצרת:

סיכום כללי:

תזכורת – מושג העצרת:

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.

מגדירים: $0!=1$ ותמיד מתקיימים השוויונות: $n!=n\cdot(n-1)!$, $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$.

שאלות:

20) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

21) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{4}+\frac{3\cdot 4!}{8}+\ldots+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$

22) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$p!+\frac{(p+1)!}{1!}+\frac{(p+2)!}{2!}+\ldots+\frac{(p+n-1)!}{(n-1)!}=\frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

23) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{n!}$$

24) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1\cdot 4}-\frac{11}{4\cdot 7}+\frac{17}{7\cdot 10}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(6n-1)}{(3n-2)(3n+1)}=1+\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

שאלות:

25) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+\ldots+2n=n(2n+1)$$

26) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

27) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+3n\cdot 2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

שאלות:

28) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\dots+(3n)=2n(2n+1)$$

29) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\dots+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

30) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

31) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$$

32) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

שאלות:

33) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{n}{n+1}$$

34) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}\le 2-\frac{1}{n}$$

35) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$$

36) נתונה סדרה שבה: $a_n=n^n$. נגדיר: $T_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $T_n\le n^{\frac{n}{2}(n+1)}$.

37) נתון אי-השוויון: $2^n>n^2$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

38) נתון אי-השוויון: $4^n>5n^2+1$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

39) נתון אי-השוויון: $n^3-n<5^{n-1}$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

40) נתון אי-השוויון: $3^n+4^n+5^n<6^n$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

41) נתון אי-השוויון: $n^n \ge n!$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי.

42) נתון אי-השוויון: $a^n + b^n < (a+b)^n$, $(a,b > 0)$.
הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-1.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות כוללות ומסכמות:

שאלות:

43) נתון השוויון: $4+7+10+13+...=\frac{n}{2}(3n+5)$.

א. מצא את האיבר במקום ה-n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג. חשב את הסכום: $37+40+43+...+85$.

44) נתון השוויון: $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+...=2-\frac{2n+2}{3^n}$. מצא את האיבר במקום ה-$n$.

45) נתון השוויון: $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots=\frac{n}{4n+1}$.

א. מצא את האיבר במקום ה-n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג. חשב את הסכום: $\frac{1}{25\cdot 29}+\frac{1}{29\cdot 33}+\frac{1}{33\cdot 37}+\cdots+\frac{1}{89\cdot 93}$.

46) נתון השוויון: $(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום: $26^2+27^2+28^2+...+48^2$.

47) נתון השוויון: $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $4^2+6^2+8^2+\cdots+(4n)^2$.

48) נתונים השוויונים הבאים:

א. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7}{3}(n^2+3n-1)$.

ב. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=n^2+11n-5$.

ג. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7n}{2}(n+1)$.

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל n טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

49) נתון השוויון: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=an(2n+b)$.

א. נתון כי השוויון נכון עבור $n=1$ ו- $n=2$. מצא את ערכי a ו- b.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

50) נתון אי-השוויון: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-2.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{18}>\frac{1}{2}$.

51) נתון אי-השוויון: $n^2<2^n$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-4.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $5^2\cdot 6^2\cdot 7^2\cdot 8^2\cdot ...\cdot 20^2<2^{200}$.

52) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום: $9+27+81+\cdots+3^{3n+1}$ מתחלק ב-117 ללא שארית לכל n טבעי.

53) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

ב. נתון כי $a+b$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
הוכח כי a^3+b^3 מתחלק ב-6 ללא שארית.

54) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח את הטענה: אם ל- n טבעי מסוים 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם $3^{n+2}+5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.

ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל n טבעי אי-זוגי?

ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n+5^n מתחלק ב-8 ללא שארית לכל n טבעי אי-זוגי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

מתמטיקה בדידה 2

פרק 3 - פונקציות

תוכן העניינים

מבוא לפונקציות:

שאלות:

1) בכל אחד מהאיורים הבאים זהה את התחום ואת הטווח ובחר את האפשרות המתאימה:

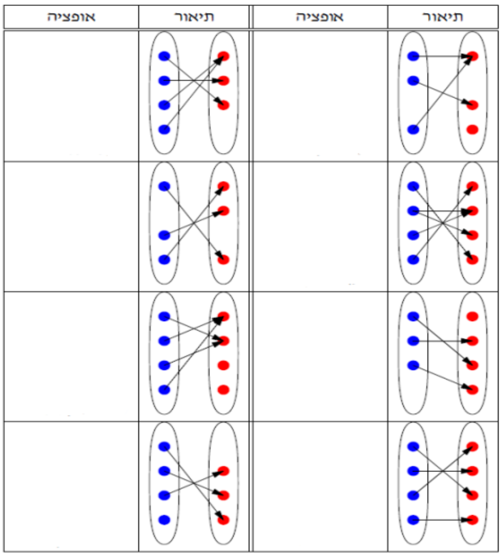
א. זו אינה פונקציה.

ב. זו פונקציה חח"ע שאינה על.

ג. זו פונקציה על שאינה חח"ע.

ה. זו פונקציה שאינה חח"ע ואינה על.

ו. זו פונקציה שהיא גם חח"ע וגם על.



2) עבור הפונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).

חשב את:

א. $g(\pi)\,,\,g(-\pi)$

ב. $\mathrm{Im}(g)$

ג. מצא מקור ל-7-.

ד. מצא את כל המקורות ל-7-.

ה. האם כל איבר בטווח הוא גם תמונה?

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבע האם היא חח"ע? האם על? הוכח טענותיך.

א. פונקציית הזהות $I_A:A\to A$ המוגדרת ע"י $I_A(x)=x$.

ב. $h_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $h_1(x)=2x+1$.

ג. $h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).

ד. $h_3:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $h_3(x,y)=x-y$.

ה. $h_4:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ מוגדרת ע"י $h_4(A,B)=A\cup B$ וחשב את $Im\,h_4$.

ו. $f_1:(0,\infty)\to(0,2)$ מוגדרת ע"י $f_1(x)=\dfrac{2x}{x+3}$.

ז. $f_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$ מוגדרת ע"י $f_2(x)=x+\frac{1}{x}$.

ח. $f_3:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_3(x)=x-\frac{1}{x}$.

ט. $f_4:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_4(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

י. $f_5:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{Z})$ מוגדרת ע"י $f_5(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

יא. $f_6:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_6(X)=X\Delta\mathbb{Z}$.

יב. $f_7:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_7(n)=\text{the sum of the digits of } n$.

יג. $f_8:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $f_8(\langle x,y\rangle)=3x+2y$.

יד. $f_9:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(\langle n,k\rangle)=2^{n-1}(2k-1)$.

טו. $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & else\end{cases}=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}$.

4) בדוק אם הפונקציות הבאות חח"ע, על וחשב את תמונתן:

א. $f_9:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(x)=\begin{cases}\frac{n}{2} & 4|n\\ 2n+1 & else\end{cases}$ וחשב את $Im\, f_9$.

ב. $f_{10}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{10}(x)=\begin{cases}3x-1 & x<2\\ x-3 & x\geq 2\end{cases}$ וחשב את $Im\, f_{10}$.

ג. $f_{11}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{11}(x)=\begin{cases}x+1 & x\leq 1\\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & x>1\end{cases}$.

5) תהיינה $f,g:A\to A$ פונקציה. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f חח"ע.

ב. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f על.

ג. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f אינה קבועה.

ד. אם יש איבר ב-$Im(f)$ ללא מקור אז f על.

ה. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז f אינה על.

ו. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז g אינה על.

ז. אם $Im(f)=Im(g)$ אז $f=g$.

ח. לכל $D\subseteq A$, $D\neq\varnothing$ קיימת $f:A\to A$ כך ש-$Im(f)=D$.

6) נתונה $g:\mathbb{N}_{odd}\to\mathbb{N}$ פונקציה לא ידועה.

נגדיר $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא: $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ g(n) & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}$,

למשל: $h(34)=17$, $h(35)=g(35)$ שהוא מספר טבעי לא ידוע.

הוכח כי h אינה חח"ע.

מצא אינסוף מספרים טבעיים שונים $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $i\neq j$ מתקיים $h(x_i)=h(x_j)$.

7) נגדיר $F:(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times P(\mathbb{R}))\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $F((f,A))=\{x\in\mathbb{R}|\exists y\in A\ f(y)=x\}$.

א. עבור $A=\{2,3,4,5,17,18\}$, $g(x)=2x$, חשב: $F((g,A))$.

ב. בדוק האם f חח"ע והאם על.

ג. מצא את $\operatorname{Im}(F)$.

8) נגדיר $G:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $G(f)=\{\alpha\in\mathbb{N}|\exists\beta\in\mathbb{N}\quad f(\beta)=\alpha\}$.

א. חשב $G(f)$ עבור $f=I_{\mathbb{N}}$ פונקציית הזהות עבור $\mathbb{N}$

הפונקציה $f(n)\begin{cases}1 & n\in\mathbb{N}_{even}\\ 4 & else\end{cases}$ ועבור הפונקציה הקבועה 3.

ב. בדוק האם G חח"ע והאם על ומצא את $Im(G)$.

9) נגדיר פונקציה $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to P(\{0,1\}\times\{0,1\})$ באופן הבא:

$F(g)=\{(g(n),g(n+1))|n\in\mathbb{N}\}$. הוכח כי F אינה על.

10) נגדיר $F:\mathbb{N}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{R}|f(x)=1\}$.

הוכח כי F אינה חח"ע.

11) נגדיר פונקציה $F:\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{N}|f(n)=0\}$.

קבע האם F חח"ע ועל.

12) תהי $P_{even}(\mathbb{N})$ קבוצת כל תת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן זוגי.
ותהי $P_{odd}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן אי זוגי.
לדוגמה $\{1,3\}\in P_{even}(\mathbb{N}),\{1,3\}\notin P_{odd}(\mathbb{N})$ ולעומת זאת ,
$\{2,4,6\}\notin P_{even}(\mathbb{N}),\{2,4,6\}\in P_{odd}(\mathbb{N})$. לכל קבוצה A סופית של טבעיים נסמן
ב-$\max(A)$ את המספר הגדול ביותר ב-A וב-$\max(\varnothing)=0$.
הוכיחו כי הפונקציה $f:P_{even}(\mathbb{N})\to P_{odd}(\mathbb{N})$ המוגדרת על ידי $f(A)=A\cup\max(A)$
היא חח״ע אך אינה על.

13) נגדיר $H:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $H(\langle f,g\rangle)=\operatorname{Im} f\,\Delta\operatorname{Im} g$.
בדוק אם f חח״ע ועל.

פונקציות שחובה להכיר:

14) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא פונקציה כנדרש:

א. מצא $f:(0,1)\to(1,\infty)$ שהיא חח״ע ועל.

ב. השתמש בפונקציה שמצאת בסעיף קודם כדי למצוא $f:(0,1)\to(0,\infty)$ שהיא חח״ע ועל.

ג. מצא $f:[2,5)\to[1,7)$ שהיא חח״ע ועל.

ד. עבור $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ מספרים נתונים מצא $f:[a,b]\to[c,d]$ שהיא חח״ע ועל.

ה. מצא $f:[1,3)\cup[4,8]\to[0,1]$ שהיא חח״ע ועל.

ו. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שהיא חח״ע ועל. מצא גם $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שמצאת.

ז. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח״ע ועל.

ח. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח״ע.

ט. מצא $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שהיא על. (רמז: סעיף קודם)

י. מצא פונקציה $f:\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{7}\to\mathbb{N}$ (כלומר $f:\mathbb{N}^7\to\mathbb{N}$) שהיא חח״ע.

יא. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times[0,1)\to[0,\infty)$ שהיא חח״ע ועל.
מצא גם $g:[0,\infty)\to\mathbb{N}\times[0,1)$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

יב. מצא פונקציה $f:(0,1]\to(0,1)$ שהיא חח״ע ועל.

יג. מצא $F:[0,1)\times[0,1)\to[0,1)$ חח״ע ועל.

יד. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\{0,1\}\to\mathbb{N}$ שהיא חח״ע ועל.
מצא גם $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\{0,1\}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

טו. מצא $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ שהיא חח״ע ועל.

טז. מצא $F:\{0,1\}^A\to P(A)$ חח״ע ועל. הוכח כי הפונקציה שמצאת היא אכן חח״ע ועל.

יז. מצא $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח״ע ועל.

יח. מצא $F:\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^2\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ כלומר $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח״ע ועל והוכח שהיא חח״ע ועל.

תמונה של קבוצה:

רקע:

צפה בשיעורים בנושא תמונה ותמונה הפוכה של קבוצה בטרם תענה על השאלות שבנושא זה.

x) $t\in f(D) \Leftarrow$ קיים $\alpha\in D$ כך ש- $f(\alpha)=t$

y) $f(\alpha)\in f(D) \Leftarrow \alpha\in D$

z) $\alpha\in f^{-1}(E) \Leftrightarrow F(\alpha)\in E$

שאלות:

1) נגדיר $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $g(n)=2n$ $K=\{1,8,17\}$.

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $g(K)$

ב. $g^{-1}(K)$

ג. $g(\mathbb{N})$

ד. $g(\mathbb{N}_{evev})$

ה. $g(\mathbb{N}_{odd})$

ו. $g^{-1}(\mathbb{N}_{evev})$

ז. $g^{-1}(\mathbb{N}_{odd})$

2) נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $f(x)=x^2-5x+4$ $M=\{0,4\}$.

נגדיר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $f(n)=\begin{cases}2n & n\in\mathbb{N}_{even}\\ 1 & else\end{cases}$ ותהי $E=\{1,5,6,8\}$.

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $f^{-1}(f(M))$

ב. $f(f^{-1}(M))$

ג. $f(f^{-1}(\{-3,4\}))$

ד. $f(f^{-1}(\{-3\}))$

ה. $f(f^{-1}(E))$

3) תהי $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D\subseteq A$, $E\subseteq B$ שתי קבוצות.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. $f(D)=D$
ב. $f(D)\neq D$
ג. $f^{-1}(E)=E$
ד. $f^{-1}(E)\neq E$
ה. $f(D)\subseteq f(A)$
ו. אם $D\subset A$ אז $f(D)\subset f(A)$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).
ז. $f^{-1}(E)\subseteq A$
ח. אם $E\subset B$ אז $f^{-1}(E)\subset A$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).
ט. f על אם"ם לכל $y\in B$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing$.
י. f חח"ע אם"ם לכל $y\in A$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\})$ ריקה או בעלת איבר אחד.

4) בשאלה זו נבחן את השוויון: $f(D_1\cup D_2)=f(D_1)\cup f(D_2)$.
א. אשר את השוויון עבור $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $f(x)=x^2$.
$D_1=\{2,5\}\quad D_2=\{-2,4\}$
ב. הוכח כי שוויון זה מתקיים תמיד.
כלומר: תהי $f:A\to B$ פונקציה ותהינה D_1 , $D_2\subseteq A$.
הוכח כי: $f(D_1\cup D_2)=f(D_1)\cup f(D_2)$.

5) $f:A\to B$ פונקציה ותהינה D_1 , $D_2\subseteq A$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. $f(D_1\cap D_2)\subseteq f(D_1)\cap f(D_2)$
ב. $f(D_1\cap D_2)\supseteq f(D_1)\cap f(D_2)$
ג. אם f חח"ע אז $f(D_1\cap D_2)=f(D_1)\cap f(D_2)$.
ד. אם f על אז $f(D_1\cap D_2)=f(D_1)\cap f(D_2)$.
ה. אם $f(D_1\cap D_2)\neq f(D_1)\cap f(D_2)$ אז f אינה חח"ע.

6) $f:A\to B$ פונקציה ותהינה E_1 , $E_2\subseteq B$.
הוכח כל אחת מהטענות הבאות:
א. $f^{-1}(E_1\cap E_2)=f^{-1}(E_1)\cap f^{-1}(E_2)$
ב. $f^{-1}(E_1\cup E_2)=f^{-1}(E_1)\cup f^{-1}(E_2)$

7) $f:A\to B$ פונקציה ותהי $D\subseteq A$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\subseteq D$

ב. $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\supseteq D$

ג. אם f חח״ע אז $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$.

ד. אם f לא חח״ע אז $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$.

ה. אם f על אז $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$.

ו. אם לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$ אז f על.

ז. אם $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$ אז f חח״ע.

ח. אם לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$ אז f חח״ע.

ט. אם $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$ אז f אינה חח״ע.

י. אם f על אז לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$.

יא. אם f לא על אז קיימת $D\subseteq A$ עבורה $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$.

יב. אם f לא חח״ע אז קיימת $D\subseteq A$ עבורה $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$.

8) $f:A\to B$ פונקציה ותהי $E\subseteq B$ הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\subseteq E$

ב. $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\supseteq E$

ג. $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\subseteq E$ או $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\supseteq E$.

ד. אם f חח״ע אז $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$.

ה. אם f על אז $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$.

ו. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f חח״ע.

ז. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f על.

ח. אם לא לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f לא על.

ט. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f היא פונקציית הזהות.

י. אם קיימת $E\subseteq B$ כך ש- $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\neq E$ אז קיים $\alpha\in A$ כך שלכל $\beta\in A$ מתקיים: $f\left(\beta\right)\neq\alpha$.

9) נתונות פונקציה $f:A\to B$ וקבוצות $C,D\subseteq A$.

א. הוכח כי: $f(C\cap D)\subseteq f(C)\cap f(D)$.

ב. הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית אז $f(C\cap D)=f(C)\cap f(D)$.

ג. הדגם קבוצות $C,D\subseteq \mathbb{N}$ ופונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש- f על וגם $f(C\cap D)\subset f(C)\cap f(D)$.

ד. הוכח כי: $f(C\cup D)=f(C)\cup f(D)$.

תשובות סופיות:

1) א. $\{2,16,18\}$ ב. $\{4\}$ ג. $\{4n|n\in N\}$ ד. ראה סרטון.
ה. $\{4n+2|n\in N\}$ ו. $\mathbb{N}$ ז. $\varnothing$

2) א. $\{0,1,4,5\}$ ב. $\{0,4\}$ ג. $\{0,4\}$ ד. $\varnothing$ ה. $\{1,8\}$

3) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. לא נכון. ט. נכון. י. נכון.

4) הוכחה.

5) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.

6) הוכחה.

7) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.
ו. לא נכון. ז. לא נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. לא נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון.

8) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. לא נכון. י. נכון.

9) הוכחה.

הרכבת פונקציות

שאלות

1) חשבו את ההרכבה $f\circ g$ ו- $g\circ f$ במקרה שהן מוגדרות עבור הפונקציות הנתונות.

א. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=3x+7 \quad f(x)=2^{x^2-1}$

ב. $f,g:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ $\quad g(A)=\bar{A} \quad f(A)=A\cap\mathbb{N}$

ג. $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $\quad \mathrm{g}(n)=10n \quad f(n)=\text{The sum of } n\text{'s digits}$

ד. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\begin{cases}5 & x\ge 1\\ 2 & x<1\end{cases} \quad f(x)=\begin{cases}7 & x<3\\ 8 & x\ge 3\end{cases}$

ה. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 3\\ x & x>3\end{cases} \quad f(x)=2x-1$

2) חשבו את ההרכבה הבאה:

א. נגדיר $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$g(x)=\begin{cases}3 & x\ge 1\\ 2 & x<1\end{cases},\ f(x)=\begin{cases}4x+3 & x<5\\ 2x & x\ge 5\end{cases}.$$

חשבו $g\circ f$.

ב. עבור $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases}x+3 & x<2\\ 2x-1 & x\ge 2\end{cases},\ f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\ge 1\\ 4-3x & x<1\end{cases}.$$

חשבו $f\circ g$.

3) בדקו את השוויון $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$ עבור הפונקציות הבאות:

א. $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=2x+3\ ,\ g(x)=2x+3\ ,\ h(x)=2x+3$

ב. $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=3^{x^2-7}\ ,\ g(x)=x^3+1\ ,\ h(x)=\dfrac{2}{\sqrt{|x|}+3}$

ג. $f,g,h:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ $\quad f(A)=A\cap\mathbb{N}\ ,\ g(A)=\bar{A}\ ,\ h(A)=A\vartriangle\mathbb{Z}$

שאלת חזרה

יהיו f ו- g פונקציות מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$ המוגדרות כך: $f(n)=\begin{cases}\frac{n+1}{2} & n \text{ odd}\\ n-1 & n \text{ even}\end{cases}$,

וכן לכל $n\in N$, $g(n)=2n-1$.

הוכיחו או הפריכו:

א. f היא חח"ע.

ב. g חח"ע.

ג. f על $\mathbb{N}$.

ד. g על $\mathbb{N}$.

ה. $f\circ g$ היא פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

ו. $g\circ f$ היא פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

4) תהי $f:A\to B$ פונקציה הוכיחו כי $I_B\circ f=f$, $f\circ I_A=f$.
הסיקו כי לכל $f:A\to A$ מתקיים $f\circ I_A=I_A\circ f=f$ זה מראה כי פונקציית הזהות מתנהגת כמו 1 בכפל.

5) תהיינה $h:A\to B$, $g:B\to C$, $f:C\to D$ שלוש פונקציות.
הוכיחו כי $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.
המשמעות של תכונה זו היא שאפשר למקם סוגרים כרצוננו בדיוק כמו בכפל וחיבור רגילים.

6) תהי $f:A\to A$.
הוכיחו את הזהויות הבאות.
הערה: בשני הסעיפים האחרונים נתון כי f הפיכה.

א. $f^m\circ f^k=f^{m+k}$

ב. $f^2\circ f^{-5}=f^{2-5}=f^{-3}$ $\quad$ $f^5\circ f^{-2}=f^{5-2}=f^3$

ג. הסק מסעיף קודם כי $f^m\circ f^{-k}=f^{m-k}$ והסק כי $f^0=I$

ד. $\left(f^m\right)^k=\left(f^m\right)^k=f^{mk}$

ה. $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$

ו. $\left(f^{-1}\right)^n=\left(f^n\right)^{-1}$

7) תהיינה $f,g:A\to A$.
הוכיחו כי $\operatorname{Im} f\circ g\subseteq \operatorname{Im} f$ ותנו דוגמה לפונקציות עבורן ההכלה היא הכלה ממש.

8) הוכיחו או הפריכו:

א. אם g היא פונקציה על אז $\operatorname{Im} f\circ g=\operatorname{Im} f$.

ב. אם $\operatorname{Im} f\circ g=\operatorname{Im} f$ אז g היא פונקציה על.

9) תהי $\mathbb{N}$ הטבעיים ותהי $B\subseteq\mathbb{N}$ תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה.
נגדיר $f:P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $f(X)=\begin{cases}X\cap B^C & X\cap B\neq\varnothing\\ X\cup B & X\cap B=\varnothing\end{cases}$.
לדוגמה, עבור $B=\{1,2\}$ מתקיים: $f(\{2,3\})=\{3\},\ f(\{3,4\})=\{1,2,3,4\}$.

א. הוכיחו כי אם $X\cap B=\varnothing$ אז $f(f(X))=X$.

ב. הוכיחו כי אם $B\subseteq X$ אז $f(f(X))=X$.

ג. הוכיחו כי אם X שייכת לתמונה של הפונקציה אז $f(f(X))=X$.

ד. האם הפונקציה חח״ע?

ה. האם הפונקציה על?

10) תהי A קבוצה ו-B תת קבוצה החלקית **<u>ממש</u>** ל-A. נתונות הפונקציות $f,g:P(A)\to P(A)$ המוגדרות באופן הבא: $\begin{matrix} g(X)=X\cap B \\ f(X)=A-X \end{matrix}$.

הוכיחו או הפריכו: $f\circ g$ על.

11) הוכיחו או הפריכו:

הפונקציה $f;\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, המוגדרת על-ידי $f((x,y))=(3x+4y,4x+5y)$, היא פונקציה הפיכה.

12) נגדיר פונקציה $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ כך: $h(x)=2x$

הוכיחו כי $\left\{f\circ h \middle| f\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\right\}=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

13) מצאו $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שאינה פונקציה קבועה ואינה זהות כך ש- $f\circ f=f$.

14) נתונות שלוש פונקציות $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

הוכיחו כי אם $f\circ g$ חח"ע וגם $g\circ h$ חח"ע וגם $h\circ g\circ f$ על, אז f,g,h שלושתן הפיכות.

15) תהיינה $g:A\to B,\ f:B\to C$ שתי פונקציות (בתנאים אלו $f\circ g:A\to C$).

הוכיחו או הפריכו (במקרה של הפרכה בחרו $A=B=C=\mathbb{N}$):

א. אם f חח"ע וגם g חח"ע אז $f\circ g$ חח"ע.

ב. אם $f\circ g$ חח"ע אז f חח"ע.

ג. אם $f\circ g$ חח"ע אז g חח"ע

ד. אם f על וגם g על אז $f\circ g$ על.

ה. אם $f\circ g$ על אז f על.

ו. אם $f\circ g$ על אז g על.

ז. אם $f\circ g$ חח"ע וגם g על אז f חח"ע.

ח. אם $f\circ g$ על וגם f חח"ע אז g על.

ט. אם f לא חח"ע וגם g לא על אז $f\circ g$ לא חח"ע או $f\circ g$ לא על.

16) תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה $f,g,h:A\to A$.
הוכיחו או הפריכו :
א. אם $g\circ f=h\circ f$ אז $g=h$.
ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f על אז $g=h$.
ג. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח"ע אז $g=h$.
ד. אם $f\circ g=f\circ h$ אז $g=h$.
ה. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f חח"ע אז $g=h$.
ו. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על אז $g=h$.

17) תהי A קבוצה ותהי $f:A\to A]$ פונקציה.
הוכיחו או הפריכו :
א. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$.
ב. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$ או ש- f היא פונקציה קבועה.
ג. אם $f\circ f=f$ וגם f חח"ע אז $f=I$.
ד. אם $f\circ f=f$ וגם f על אז $f=I$.

18) יהיו $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ הפריכו (שאלה קשה מאוד) :
א. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על וגם g,h חח"ע וגם אז $g=h$.
ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח"ע וגם g,h על אז $g=h$.
ג. אם $f\circ f\circ f=I$ אז $f\circ f=I$.
ד. אם $f\circ f\circ f=f\circ f$ אז $f\circ f=f$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה, ראו תשובות מפורטות באתר.

מתמטיקה בדידה 2

פרק 4 - עוצמות

תוכן העניינים

עוצמות

שאלות

1) ללא שימוש בפונקציית שקילות:

א. הוכיחו כי $\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,\dots\}$ ו- $\mathbb{N}_{even}=\{0,2,4,\dots\}$ שוות עוצמה.

ב. הוכיחו כי $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ ו- $\mathbb{N}_{even}=\{0,2,4,\dots\}$ שוות עוצמה.

ג. הוכיחו כי $\mathbb{N}^2=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שקולה ל- $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$.

ד. הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$.

ה. הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}^+$, כאשר $\mathbb{Q}^+$ היא קבוצת הרציונליים החיוביים.

ו. הוכיחו כי $[0,3]\sim[0,1]$.

ז. הוכיחו כי $[3,4]\sim[0,1]$.

ח. הוכיחו כי $[3,5]\sim[0,1]$.

ט. הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A,B, מתקיים $A\times B\sim B\times A$.

2) הוכיחו את השקילויות הבאות באמצעות פונקציות חח"ע ועל בין הקבוצות (פונקציית שקילות):

א. $(0,2010)\sim(0,\infty)$

ב. $[1,3)\cup[4,8]\sim[0,1]$

ג. $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\sim\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$

ד. $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$

ה. $\mathbb{N}\times\{0,1\}\sim\mathbb{N}$

ו. $(-1,1)\sim\mathbb{R}$

ז. $\mathbb{N}\times[0,1)\sim[0,\infty)$

ח. $(0,1]\sim(0,1)$

ט. $[0,1)\times[0,1)\sim[0,1)$

י. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}$

יא. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

יב. $\{0,1\}^{A}\sim P(A)$

<u>הגדרה</u>: קבוצה A היא אינסופית אם קיימת קבוצה שחלקית לה ממש ושקולה לה.

היעזרו בהגדרה זו לפתרון שאלות **4-3**.

3) תהיינה A,B קבוצות. הוכיחו:

א. אם A אינסופית, אז $A\cup B$ אינסופית.

ב. אם A אינסופית וגם $A\subseteq B$, אז B אינסופית.

4) תהיינה A,B קבוצות, ונתון כי $A\cap B$ שקולה ל-A.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $A\cup B\neq B$, אז A אינסופית.

ב. אם $A\cup B\neq A$, אז B אינסופית.

ג. אם A סופית, אז $A\subseteq B$.

5) נגדיר יחס $\sim$ בין קבוצות באופן הבא: $(A,B)\in\sim \;\Leftrightarrow\; A,B$ שוות עוצמה.

הוכיחו כי $\sim$ הוא יחס שקילות.

6) הוכיחו:

א. $\aleph_0+n=\aleph_0$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

ב. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

ג. $3\cdot\aleph_0\cdot 2\cdot\aleph_0=\aleph_0$

ד. $n\cdot\aleph_0=\aleph_0$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

ה. $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$

ו. $\aleph_0^n=\aleph_0$ (היעזרו במשפט קב"ש)

ז. אם $\aleph_0\leq\alpha$, אז $\alpha=\alpha+3$.

ח. $2^{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0}$

ט. $\aleph^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$

י. $\aleph_0^{\aleph}>2^{\aleph_0}$ (הדרכה: הסיקו מהסעיף הקודם כי $\aleph_0^{\aleph}>\aleph^{\aleph_0}$)

7) גדירות היטב של אריתמטיקה של עוצמות.

א. תהיינה k_1,k_2 עוצמות ויהיו A,B קבוצות, כך ש- $|A|=k_1, |B|=k_2$.

נגדיר פעולת הפרש בין עוצמות באופן הבא: $k_1-k_2=|A-B|$.

פעולה זו אינה מוגדרת היטב, כלומר התוצאות של ההפרש משתנות בהתאם לקבוצה ולא בהתאם למחלקה.

הציגו 2 דוגמאות לקבוצות שעוצמתן $\aleph_0$, אך עוצמת ההפרש שונה בכל אחת מהדוגמאות.

ב. הוכיחו כי אם מתקיים $A\sim B \wedge C\sim D \wedge A\cap C=\varnothing \wedge B\cap D=\varnothing$, אז $(A\cup C)\sim(B\cup D)$.

ג. הוכיחו כי אם $A\sim B \wedge C\sim D$, אז $A\times C\sim B\times D$.

8) הוכיחו כי לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים:

א. $A\times(B\times C)\sim(A\times B)\times C$

ב. אם $B\cap C=\varnothing$, אז $A^B\times A^C\sim A^{(B\cup C)}$, והראו כי $B\cap C=\varnothing$ הכרחית.

ג. $(A\times B)^C=A^C\times B^C$

ד. $\left(A^B\right)^C\sim A^{B\times C}$

9) הוכיחו כי הקבוצה $A=\mathbb{Q}$, קבוצת המספרי הרציונליים,

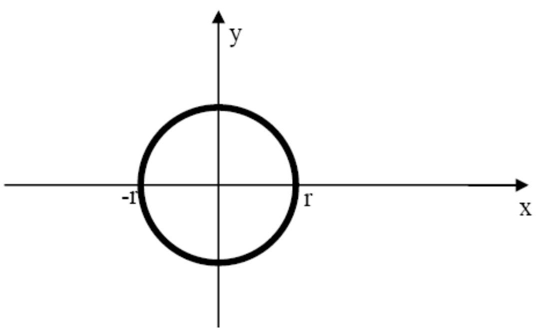
ו- $B=\{f(x)=ax^2+bx+c : a,b,c\in\mathbb{Q}\}$ שוות עוצמה.

10) מעגל במישור ברדיוס r (כאשר $r>0$ ממשי), שמרכזו בראשית הצירים,

הוא קבוצת כל הנקודות (x,y) במישור המקיימות את המשוואה $x^2+y^2=r^2$,

כמודגם בציור שלהלן.

הוכיחו שלכל $r>0$, עוצמת מעגל ברדיוס r שמרכזו בראשית הצירים היא א.



11) הוכיחו או הפריכו:

תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן. אם $A\oplus B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ וגם $A\cap B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$, אז $A\cup B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$.

12) נגדיר $P_2(\mathbb{N})=\{A\subseteq\mathbb{N}\,|\,|A|=2\}$. כלומר, $P_2(\mathbb{N})$ היא קבוצת כל תתי-הקבוצות בנות שני אברים של הטבעיים.
מהי עוצמת $P_2(\mathbb{N})$? הוכיחו.

13) נסמן ע"י $\mathbb{N}$ את קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ וב- $\mathbb{R}^+$ את הממשיים החיוביים.

א. מה העוצמה של הקבוצה $A_4=\left(a\in\mathbb{R}\,\middle|\,a^4\in\mathbb{N}\right)$?
למשל, $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7}\in A_4$.

ב. מה העוצמה של $A=\left(a\in\mathbb{R}^+\,\middle|\,\exists k\in\mathbb{N},a^k\in\mathbb{N}\right)$?
למשל, $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7},\sqrt[100]{3},\sqrt[3]{4}\in A$.

ג. הראו שקבוצה של מעגלים זרים במישור ניתנת לשידוך לקבוצה חלקית של טבעיים.

14) תהי $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\forall n\in\mathbb{N}\left(x<\frac{1}{n}\right)\wedge\exists n\in\mathbb{N}\left(x>-\frac{1}{n}\right)\right\}$.
מה עוצמת A?

15) תהי $A=\{(a,b)\,|\,a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R},a<b\}$. כלומר, A היא קבוצת כל הקטעים הפתוחים ב- $\mathbb{R}$.
מהי עוצמת A? הוכיחו.

16) נגדיר יחס S מעל $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ באופן הבא: $(x_1x_2)S(y_1y_2)\Leftrightarrow\lfloor x_1\rfloor=\lfloor y_1\rfloor$,
כאשר S יחס שקילות (אין צורך להוכיח זאת).
הוכיחו כי קבוצת המנה $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})/S$ היא מעוצמה $\aleph_0$.

17) הוכיחו או הפריכו: לכל קבוצה A מתקיים $A\times\mathbb{N}\sim A\times(\mathbb{N}-\{1\})$.

18) הוכיחו כי עוצמת הקבוצה $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n,n+1)=(1,2)\cup(2,3)\cup(3,4)\cup\cdots$ היא $\aleph$.

19) תהי A קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ ויהי E יחס שקילות מעל A.
הוכיחו כי $|E|=\aleph_0$.

20) הוכיחו או הפריכו:
לכל זוג קבוצות A,B מתקיים $(A\times B)^C \sim (A^C\times B)\cup(A\times B^C)$.

21) פונקציית הסינוס $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור של 2π.
כלומר, $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.
עבור $0\le x\le 2\pi$ מתקיים $\sin x=0 \Leftrightarrow x\in\{0,\pi,2\pi\}$.
מצאו את עוצמת הקבוצה $O_{\sin}=\{x\in\mathbb{R} \mid \sin x=0\}$. הוכיחו.

22) האם קיימת קבוצה A, כך ש-$|P(A)|=\aleph_0$? הוכיחו.

23) הוכיחו כי קבוצה בת-מניה של ישרים לא יכולה לכסות את המישור $\mathbb{R}^2$.

24) קבעו האם לקבוצה אחת עוצמה גדולה יותר, או שהן שוות:
א. $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$, $\{0,1\}^{P(\mathbb{R})}$
ב. $P(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, $P(\mathbb{R})^{P(\mathbb{N})}$
ג. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$

25) חשבו את עוצמת הקבוצות הבאות:
א. קבוצת כל הסדרות האינסופיות של הטבעיים.
ב. קבוצת כל הסדרות האינסופיות העולות ממש של הטבעיים.
ג. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות.
ד. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 10.
ה. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 00.
ו. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 10 וגם את הרצף 00.
ז. קבוצת כל היחסים מעל $\mathbb{N}$.
ח. קבוצת כל היחסים הרפלקסיביים מעל $\mathbb{N}$.

לפתרונות מלאים בסרטוני ווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה 2

פרק 5 - קומבינטוריקה בסיסית

תוכן העניינים

מבוא לקומבינטוריקה בסיסית

שאלות

1) חשבו, ללא מחשבון:

א. $\frac{4!\cdot 7!}{0!\cdot 10!}$

ב. $\frac{14!\cdot 20!}{10!\cdot 17!}$

2) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2-n)=n!$

ב. $(n-1)!n^2+n!=(n+1)!$

ג. $\frac{n^2-2}{(n+1)!}+\frac{(n+2)^2}{(n+2)!}=\frac{1}{(n-1)!}$

3) חשבו ללא מחשבון:

א. $\binom{5}{3}$

ב. $\binom{4}{1}$

ג. $\binom{10}{0}$

ד. $\frac{1}{13}\binom{14}{11}$

4) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $1=\binom{n}{0}=\binom{n}{n}$

ב. $\binom{n-1}{k-1}=\frac{k}{n}\binom{n}{k}$

ג. $\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$

ד. $\binom{2n+1}{n}=\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n}$

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון?
רשמו את כל התוצאות.

ב. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון ואחר כך מטבע? רשמו את כל התוצאות.

ג. עושים ניסוי ומטילים מטבע.
אם יצא עץ אז מטילים סביבון ואם יצא פלי אז מטילים שוב את המטבע ולאחר מכן סביבון.
כמה תוצאות אפשריות לניסוי?
למשל (פלי, פלי, גדול) ו-(עץ, היה) הן תוצאות אפשריות.
רשמו את כל התוצאות.

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מהאותיות ב, ג, ד, ה ניצור מילה בת שתי אותיות, לא בהכרח בעלת משמעות. רשמו את כל המילים האפשריות ואשרו עם עיקרון הכפל.

ב. מהאותיות א, ב, ג, ד, ה ניצור מילה בת שלוש אותיות, לא בהכרח בעלת משמעות. כמה מהמילים הנ"ל מתחילות באות א וגם א מופיעה פעם אחת בדיוק?
(רמז: סעיף קודם)

7) במסעדה מציעים ארוחה עסקית, המורכבת ממנה ראשונה, עיקרית ושתייה.
המנה הראשונה יכולה להיות סלט ירקות, סלט פטריות, סלט כבד קצוץ או מרק עוף. המנה העיקרית יכולה להיות סטייק אנטרקוט, שניצל, כבד אווז, דג, לזניה טבעונית, או שניצל מהצומח, ולשתייה מוצע, קפה, תה, לימונדה או קולה.

א. כמה ארוחות אפשריות יש?

ב. כמה ארוחות אפשריות יש אם אין שתיה חמה?

ג. כמה ארוחות אפשרויות יש למסעדה להציע לסועדת טבעונית?

8) כמה תת קבוצות יש לקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,

א. בנות שלושה איברים? רשמו את כולן.

ב. בנות ארבעה איברים? השוו לסעיף א'.

ג. רשמו את כל התמורות של 0001111 והשוו לסעיפים קודמים.

ד. בכמה תמורות של המספרים 00112222222 כל 0 חייב להופיע ליד 1?

9) בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב זוג מתלמידי כיתות א', אם בכיתה א' 1 יש 20 בנים ובכיתה א' 2 יש 15 בנות, כך ש:

א. ללא הגבלה.

ב. זוג מעורב (בן ובת).

ג. זוג חד מיני (שני בנים, או שתי בנות).

10) בלוטו יש 45 מספרים וצריך לנחש 6 מספרים ואת המספר החזק מתוך הקבוצה $\{1,2,3,4,\cdots,10\}$.
כמה אפשרויות יש?

11) בכמה אופנים שונים ניתן לבחור מספר תלת ספרתי כך ש:
א. ללא הגבלה (זכרו שמספר לא יכול להתחיל באפס).
ב. כל ספרותיו שונות.
ג. כל ספרותיו שונות וסדר הספרות לא משנה?
(למשל 123 ו-321 נחשבים אותו דבר)
ד. כל ספרותיו שונות וגם בסדר יורד. כלומר, ספרת המאות גדולה או שווה מספרת העשרות גדולה או שווה מספרת היחידות.
ה. כל ספרותיו שונות וגם בסדר עולה. כלומר, ספרת המאות קטנה או שווה מספרת העשרות קטנה או שווה מספרת היחידות.

12) כמה מספרים מורכבים מהמספרים 1,2,3,4,5,6,7 יש, כך ש:
א. באורך 7?
ב. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לכל היותר?
ג. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לפחות?

13) בכמה אופנים שונים ניתן להושיב 5 זוגות נשואים על ספסל בן 10 מקומות (ענו גם לגבי שולחן עגול) כך ש:
א. ללא הגבלה.
ב. כל אישה תשב לצד בן-זוגה.
ג. גבר ישב רק ליד אישה.
ד. אף שתי נשים לא ישבו זו לצד זו ואף שני גברים לא ישבו זה לצד זה.

14) כמה מספרים שונים בני חמש ספרות ניתן להרכיב מהספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, כך ש:
א. ללא הגבלה.
ב. המספר מתחיל בספרה 2.
ג. המספר לא מתחיל בספרה 2.
ד. כל הספרות שונות.
ה. הספרות 1 וגם 2 לא מופיעות.
ו. בדיוק אחת מן הספרות 1 או 2 מופיעה.
ז. ספרות 1 וגם 2 מופיעות.
ח. חזרו על סעיפים ה-ז כאשר כל הספרות שונות.
ט. כל הספרות שונות והספרות 1,2 מופיעות צמודות.
י. כל הספרות שונות והספרות 1,2 מופיעות ולא צמודות.
יא. כל הספרות שונות והספרות 1,2,3 מופיעות וצמודות.
יב. כמו סעיף יא וגם הספרות 6,7 מופיעות וצמודות.
יג. כמו סעיף יא וגם הספרות 6,7 מופיעות ולא צמודות.

15) בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב קוד סודי המורכב מארבע ספרות מתוך הספרות $0,1,2,3,\cdots,9$, כך ש :

א. ללא הגבלה?
ב. הקוד מגדיר מספר זוגי?
ג. הקוד מגדיר מספר המתחלק בחמש?
ד. אין בקוד ספרות זהות?
ה. יש בקוד לפחות שתי ספרות זהות?
ו. יש בקוד בדיוק שתי ספרות זהות?
ז. אין בקוד את הספרה 5?
ח. הספרה 5 חייבת להופיע בקוד?
ט. יש בקוד לפחות אחד מהספרות 4,5?
י. אין בקוד לא את הספרה 4 ולא את הספרה 5?
יא. אם יש את הספרה 5 אז אין ספרה יותר גדולה מ-5?

הדרכה : רשמו שני מספרים המקיימים את התנאי ושניים שאינם מקיימים את התנאי וכתבו מהו המשלים של סעיף זה? נסחו זאת על דרך החיוב. כלומר, בלי להשתמש במילים 'אין' ו-'לא'.

16) נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,\cdots,17\}$. כמה תת קבוצות יש ל- A כך ש :

א. ללא הגבלה?
ב. בנות 3 איברים?
ג. בעלות 3 איברים לפחות?
ד. מכילות רק מספרים זוגיים? רק אי זוגיים?
מכילים רק מספרים מאותה זוגיות?
ה. מכילות אי זוגי אחד לפחות?
מכילות זוגי אחד לפחות וגם אי זוגי אחד לפחות?
ו. אם הן מכילות את 1 אז מכילות גם את 2?
(סעיף קשה ; אפשר לנסות בעזרת משלים)
ז. מכילות ממש את $\{1,2,3\}$.

17) בכמה אופנים שונים ניתן להכניס 7 כדורים ל-13 תאים, כך ש :

א. הכדורים שונים ומותר יותר מכדור בתא?
ב. הכדורים זהים ומותר יותר מכדור בתא?
ג. הכדורים שונים ואסור יותר מכדור בתא?
ד. הכדורים זהים ואסור יותר מכדור בתא?
ה. הכדורים שונים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?
ו. הכדורים זהים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?

18) נתונים חמישה כדורים ונתונים שבעה צבעים שונים (למשל שחור, לבן, אפור, צהוב אדום כחול וסגול).
בכמה אופנים שונים ניתן לצבוע את הכדורים ולסדרם בשורה אם:
א. סדר הכדורים בשורה משנה.
ב. סדר הכדורים בשורה לא משנה.
כלומר, ארבעה כדורים שחורים ואחד לבן זה נחשבו אותו דבר לא משנה היכן הלבן ממוקם.

19) עבור $B=\{x,y\}$ $A=\{1,2,3\}$, חשבו כמה פונקציות יש מ- A ל- B ומ- B ל- A, ואשרו עם עיקרון הכפל.

תשובות סופיות

1) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{1001}{285}$

2) הוכחה.

3) א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 28

4) הוכחה.

5) א. 24 ב. 48 ג. 12

6) א. 16 ב. 16

7) א. 96 ב. 48 ג. 16

8) א. 35 ב. 35 ג. 35 ד. 180

9) א. 595 ב. 300 ג. 295

10) 81,450,600

11) א. 900 ב. 648 ג. $\binom{10}{3}$ ד. $\binom{10}{3}$ ה. $\binom{9}{3}$

12) א. $\binom{7}{7}$ ב. אין ג. אין

13) א. ספסל: $10!$, מעגל: $9!$. ב. ספסל: $5!\cdot 2^5$, מעגל: $4!\cdot 2^5$.
ג. ספסל: $(5!)^2\cdot 2!$, מעגל: $4!\cdot 5!$. ד. ספסל: $(5!)^2\cdot 2!$, מעגל: $4!\cdot 5!$.

14) א. 7^5 ב. 7^4 ג. $6\cdot 7^4$ ד. $3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$ ה. 5^5
ו. $2(6^5-5^5)$ ז. $7^5-2\cdot 6^5+5^5$ ח. (ה) $5!$ ח. (ו) $10\cdot 5!$
ח. (ז) $10\cdot 5!$ ט. $4\cdot 5!$ י. $6\cdot 5!$ יא. 216 יב. 24 יג. 12

15) א. 10^4 ב. $5\cdot 10^3$ ג. $2\cdot 10^3$ ד. $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$
ה. $10^4-10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$ ו. $\binom{4}{2}\cdot 10\cdot 9\cdot 8$ ז. 9^4
ח. 10^4-9^4 ט. 10^4-8^4 י. 8^4 יא. $9^4+6^4-5^4$

16) א. 2^{17} ב. 680 ג. 130,918
ד. זוגיים: 2^8, אי זוגיים: 2^9, אותה זוגיות: 768.
ה. לפחות אי זוגי אחד: 130,816, לא מאותה זוגיות: 130,304.
ו. 98,304 ז. 16,383

17) א. 13^7 ב. $\binom{19}{7}$ ג. $\binom{131}{61}$ ד $\binom{13}{7}$
ה. $13\binom{7}{2}\binom{12}{5}5!$ ו. $13\cdot\binom{16}{5}$

18) א. 7^5 ב. $\binom{11}{5}$

19) מ-A ל-B: 8, מ-B ל-A: 9.

קומבינטוריקה יותר לעומק

שאלות

1) בכמה אופנים ניתן לסדר 10 אנשים בשורה כך ש:
א. ללא הגבלה.
ב. אבי ובני סמוכים.
ג. אבי, בני וגדי סמוכים.
ד. אבי ובני לא סמוכים.
ה. אבי ובני סמוכים וגם גדי ודני סמוכים.
ו. אבי ובני סמוכים וגדי ודני לא סמוכים.

2) בכיתה בה יש 10 בנים ו-15 בנות יש להרכיב נבחרת כדורסל בה יש לפחות שני בנים ולפחות שתי בנות.
בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

3) בכמה אופנים שונים ניתן להניח 8 צריחים על לוח שחמט 8×8 מבלי שאף צריח יאיים
על חברו כך ש:
(צריח מאיים על חברו אם הוא נמצא באותה שורה או באותה עמודה של חברו)
א. כל הצריחים הם לבנים.
ב. שלושה צריחים הם לבנים וחמישה הם שחורים.
ג. הצריחים נלקחים מתוך שקית ובה מלאי בלתי מוגבל של צריחים לבנים ומלאי בלתי מוגבל של צריחים שחורים.

4) בכמה מספרים 6 ספרתיים מופיעה הספרה:
א. 0 פעם אחת בדיוק.
ב. 0 פעם אחת לפחות.
ג. 7 פעם אחת לפחות.
ד. 7 פעם אחת בדיוק.
יש לזכור שמספר לא יכול להתחיל בספרה 0.

5) ענו על הסעיפים הבאים:
א. יהי n טבעי.
בכמה תת קבוצות של $\{1,2,3,...,2n\}$ יש אי זוגי אחד לפחות?
ב. בכמה תת קבוצות של $\{1,2,3,...,2n\}$ יש לפחות $n+1$ איברים?

6) בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 10 לימונדות זהות, כוס קולה 1 וכוס קינלי 1 ל-4 תלמידים צמאים, כך שכל תלמיד מקבל לפחות משקה אחד והקולה והקינלי ניתנים לתלמידים שונים?

7) בכמה דרכים ניתן לחלק 400 כדורים זהים ל-3 תאים, כך ש:
א. יש תא ובו יותר מ-200 כדורים.
ב. בכל תא מספר זוגי של כדורים.
ג. בשני תאים מתוך השלוש מספר אי זוגי של כדורים ובתא אחד מספר זוגי של כדורים.

8) 7 אנשים נכנסים למעלית בבניין בן 13 קומות.
בכמה אופנים הם יכולים ללחוץ על כפתורי המעלית כך ש:
א. המעלית תעצור בקומה החמישית? (יתכן ותמשיך הלאה משם)
ב. המעלית תעצור בקומה החמישית לכל היותר.
ג. המעלית תגיע לפחות עד הקומה החמישית.
ד. המעלית תעצור בקומה החמישית (ולא תמשיך משם הלאה).

9) בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים לבנים זהים ו- n כדורים צבעוניים (שונים) ל- $2n$, כך שבכל תא יהיה:
א. לכל היותר כדור אחד.
ב. לכל היותר כדור לבן אחד ואין מגבלה על מספר הצבעוניים.
ג. לכל היותר כדור צבעוני אחד ואין הגבלה על מספר הלבנים.
ד. מספר שווה של לבנים וצבעוניים.

10) במלבן בן k שורות ו- m עמודות יש לסמן $\times$ או $\bigcirc$ בכל משבצת.
א. הראו כי יש $\left(2^m-1\right)^k$ דרכים לעשות זאת, כך שבכל שורה יופיע $\times$ אחד לפחות.
ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת, כך שיופיע $\bigcirc$ אחד לפחות בכל עמודה.
ג. הסיקו כי $2^{mk}\le\left(2^m-1\right)^k+\left(2^k-1\right)^m$.

11) ענו על הסעיפים הבאים:
א. כמה תמורות של $1,2,3,\cdots,n$ מספר 2 מופיע בין 1 ל-3? (לאו דווקא צמודים. למשל, עבור $n=7$ התמורה 4352981 חוקית, כי 2 נמצא בין 1 ל-3)
ב. בכמה תמורות של $1,2,3,\cdots5$ מימין למספר 3 אין מספרים קטנים מ-3. (למשל 24135 חוקית ואילו 43152 לא חוקית)

12) ענו על הסעיפים הבאים:
א. בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 12 אנשים לשלושה זוגות ושתי שלשות?
ב. כמו סעיף א, אך בנוסף דני ודנה לא נמצאים באותה קבוצה.

13) כמה פתרונות בשלמים אי-שליליים יש לכל אחת מהמשוואות הבאות?
א. $x_1+x_2+\cdots x_7=20$
ב. $x_1+x_2+5x_3+x_4=14$
ג. $(x_1+x_2+x_3)(x_4+x_5+x_6)=18$

14) בכמה דרכים ניתן לבחור ועדה בת n אנשים מתוך n זוגות נשואים, כך ש:
א. בוועדה לא ישתתף אף זוג נשוי.
ב. מספר הגברים יהיה שווה למספר הנשים.
ג. מספר הגברים יהיה קטן ממש ממספר הנשים.

15) מצאו כמה פונקציות $f:\{1,2,3,...,3n-1,3n\}\to\{1,2,3,...,n-1,n\}$ מקיימות את התנאי הבא: לכל איבר בתמונה יש בדיוק 3 מקורות.

16) מה מספר הדרכים לפזר 50 כדורים אדומים ו-20 כדורים כחולים ל-10 תאים, כך שבכל תא מספר הכדורים האדומים יהיה לפחות כמספר הכדורים הכחולים?

17) בכמה דרכים ניתן לחלק קבוצה בגודל $2n$ לקבוצה בגודל n ולזוגות? (ניתן להניח כי n זוגי)

18) בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה 8 פילים <u>שונים</u>, 2 שועלים <u>זהים</u> ושתי תרנגולות <u>זהות</u>, כך שהפילים מסודרים משמאל לימין על פי משקלם בסדר עולה, ואף שועל לא יהיה צמוד לתרנגולת?

19) בכמה דרכים ניתן לחלק 100 כדורים לבנים ו-100 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ל-250 תאים, כך שיתקיימו שני התנאים הבאים: יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור לבן אחד, ויהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד.

20) בכמה דרכים ניתן לסדר n גברים ו-n נשים במעגל כך שבני אותו מין לא ישבו זה לצד זה? כנ"ל לגבי שורה.

21) יש לבחור קבוצה של שישה ילדים מבין תלמידי כיתות א1 ו-א2, באופן ששלושה מהם יהיו מ-א1 ושלושה מ-א2. מספר הבנים בקבוצה צריך להיות שווה למספר הבנות בקבוצה (3 ו-3). ב-א1 יש 10 בנים ו-15 בנות וב-א2 יש 15 בנים ו-10 בנות. בכמה אופנים ניתן לבחור את הקבוצה?

22) בכמה קבוצות של n כדורים ב-10 צבעים יש לפחות כדור אחד מכל צבע?

23) כמה פונקציות $f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ (כאשר $n\geq 1$) מקיימות את התנאי $f(k)\neq f(k+1)$ לכל $1\leq k\leq n-1$?

24) כמה פונקציות $f:\{1,2,3,\cdots,n\}\to\{1,2,3,\cdots,n\}$ חח"ע ועל יש, המקיימות $f(k)-k$ זוגי לכל $k\in\{1,2,3,\cdots,n\}$?

25) בכמה דרכים ניתן לחלק 60 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ו-90 כדורים לבנים זהים ל-100 תאים, כך שיתקיימו שני התנאים הבאים גם יחד: יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד וכמו כן בכל תא יהיו לכל היותר 50 כדורים לבנים.

26) בכמה דרכים ניתן לחלק 4 בננות, 2 תפוזים, ו-4 תפוחים ל-10 אנשים, כך שכל אחד יקבל בדיוק פרי אחד? שימו לב שפירות מאותו סוג נחשבים זהים.

27) בכמה דרכים ניתן לבנות שורה מ-$k\geq 0$ כדורים לבנים זהים ו-$m\geq 0$ כדורים צבעוניים שונים (ושונים מלבן)?

28) כמה תת קבוצות בגודל 7 יש לקבוצה $A=\{1,2,3,...,12,13\}$, שיש בהם שני איברים עוקבים?

29) תהי $A_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$, כאשר $n\in\mathbb{N}_{odd}$, ותהי $a_1,a_2,\cdots a_n$ תמורה כלשהי של A_n. הוכיחו כי המכפלה $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ בהכרח זוגית (יש לפתור).

30) מטילים n קוביות. כמה תוצאות יש אם:
א. הקוביות שונות.
ב. הקוביות זהות.

31) נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,\cdots n\}$.

כמה זוגות של קבוצות (C,D), $C,D\subseteq A$ כך ש:

א. ללא הגבלה. עבור $A=\{1,2\}$, רשמו את כל הפתרונות.

ב. $C\cap D=\varnothing$. עבור $A=\{1,2\}$, רשמו את כל הפתרונות.

ג. $C\subseteq D$. עבור $A=\{1,2\}$, רשמו את כל הפתרונות.

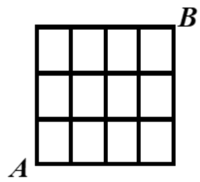
ד. $C\cup D=A$. עבור $A=\{1,2\}$, רשמו את כל הפתרונות.

ה. אם $2\in C$, אז $2\in D$ (עבור $A=\{1,2,3\}$, הדגימו זוג שמקיים את הדרישה וזוג שאינו מקיים את הדרישה).

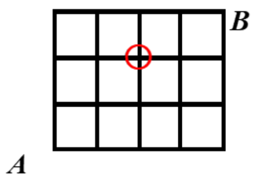
ו. אם יש מספר אי זוגי ב- C, אז יש כזה גם ב- D (שימו לב שלא נתון ש- n הוא זוגי).

32) חרגול נמצא בנקודה A בשריג המתואר להלן. בכל שלב יכול החרגול להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה.

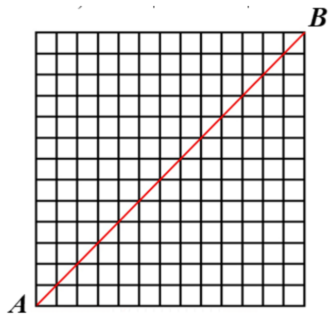
א. בכמה אופנים שונים יכול החרגול להגיע מנקודה A לנקודה B?



ב. בכמה אופנים הוא יכול לעשות זאת מבלי לעבור דרך הנקודה המסומנת להלן $(2,2)$?



33) החרגול החביב מהשאלה הקודמת לא התעייף (מדובר בחרגול ספורט) ונמצא עכשיו בנקודה A בשריג $n\times n$ המתואר להלן (13×13 להמחשה).
תזכורת: בכל שלב יכול החרגול להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה.
בכמה דרכים יכול החרגול להגיע מנקודה A לנקודה B?
(שימו לב שהשריג בשאלה הוא $n\times n$)
א. ללא הגבלה.
ב. מבלי לעבור דרך אף אחד מהנקודות $(5,9),(7,3)$?
(מה המשלים של הסעיף?)
ג. מבלי לעבור דרך אף אחד מהנקודות $(7,9),(5,3)$?
ד. מבלי לגעת באלכסון האדום? (פרט לנקודת ההתחלה ונקודת הסיום)



34) למורה צילה מאגר בלתי מוגבל של חרוזים בשלושה צבעים: אדום, צהוב וירוק (חרוזים מאותו צבע נחשבים זהים). בכיתה ג' 27 תלמידים. בשיעור מלאכה המורה צילה נותנת לכל ילד שקית והילד בוחר חמישה חרוזים ומכניס לשקית. בסוף השיעור המורה מכניסה את כל השקיות למחסן.
כמה תכולות מחסן אפשריות?

תשובות סופיות

1) א. $10!$ ב. $2!9!$ ג. $3!8!$ ד. $8!9!$ ה. $4!8!$ ו. $14!8!$

2) שתי דרכים.

3) א. $8!$ ב. $8!\cdot\binom{8}{3}$ ג. $8!\cdot 2^8$

4) א. $5\cdot 9^5$ ב. $9\cdot 10^5-9^6$. ג. $9\cdot 10^5-8\cdot 9^5$ ד. $9^5+5\cdot 8\cdot 9^4$

5) א. $2^{2n}-2^n$ ב. $|A|=\dfrac{2^{2n}-\binom{2n}{n}}{2}$

6) $4\cdot 3\cdot\binom{11}{3}$

7) א. $3\cdot\binom{201}{2}$ ב. $\binom{202}{2}$ ג. $3\cdot\binom{201}{2}$

8) א. 13^7-12^7 ב. 5^7 ג. 13^7-4^7. ד. 5^7-4^7

9) א. $\binom{2n}{n}n!$ ב. $\binom{2n}{n}\cdot(2n)^2$ ג. $\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot\binom{3n-1}{n}$ ד. $(2n)^2$

10) א. ראו בסרטון. ב. $\left(2^k-1\right)^m$ ג. שאלת הוכחה.

11) א. $\frac{1}{3}5!$ ב. $\frac{1}{3}5!$

12) א. $\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}$

ב. $\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}-\left(\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}+10\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{2}\cdot\frac{1}{3!}\right)$

13) א. $\binom{26}{20}\binom{26}{6}$ ב. $\binom{16}{2}+\binom{11}{2}+\binom{6}{2}$ ג. $2\left[3\cdot\binom{20}{2}+\binom{4}{2}\cdot\binom{11}{2}+\binom{5}{2}\cdot\binom{8}{2}\right]$

14) א. 2^n ב. $\binom{n}{\frac{n}{2}}^2$ ג. n זוגי: $\dfrac{\binom{2n}{n}-\binom{n}{\frac{n}{2}}^2}{2}$, n אי זוגי: $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2}$.

15) $\dfrac{(3n)!}{6^n}$

16) $\binom{29}{9}\binom{39}{9}$

17) $\dfrac{(2n)!}{n!\binom{n}{\frac{n}{2}}!2^{\frac{n}{2}}}$

18) 1638

19) $\left(\binom{349}{100}-\binom{250}{100}\right)\left(250^{50}-\frac{250!}{200!}\right)$

20) $2(n!)^2$

21) $\binom{15}{3}^2+\binom{15}{2}^2\binom{10}{1}^2+\binom{15}{1}^2+\binom{10}{2}^2+\binom{10}{3}^2$

22) $\binom{n-1}{9}$

23) $n(n-1)^{n-1}$

24) $\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil !\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor !$

25) $\left(100^{60}-\frac{100!}{40!}\right)\cdot\left(\binom{189}{90}-100\cdot\binom{138}{39}\right)$

26) $\frac{10!}{4!4!2!}$

27) $\frac{(m+k)!}{k!}$

28) $2^{13}-1$

29) שאלת הוכחה.

30) א. 6^n ב. $\binom{n+5}{5}$

31) א. 4^n ב. 3^n ג. 3^n ד. 3^n ה. $3\cdot 4^{n-1}$ ו. $4^n-\left(2^n-2^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\right)2^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}$

32) א. $\binom{7}{4}$ ב. 17

33) א. $\binom{2n}{n}$ ב. $\left|\bar{A}\cap\bar{B}\right|=\binom{2n}{n}-\left(\binom{10}{3}\binom{2n-10}{n-3}+\binom{14}{5}\binom{2n-14}{n-5}\right)$

ג. $\left|\bar{A}\cap\bar{B}\right|=\binom{2n}{n}-\left(\binom{8}{3}\binom{2n-8}{n-3}+\binom{16}{7}\binom{2n-16}{n-7}-\binom{8}{5}\binom{8}{2}\binom{2n-16}{7}\right)$

ד. $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

34) $\binom{47}{20}$

מתמטיקה בדידה 2

פרק 6 - הבינום של ניוטון

תוכן העניינים

הבינום של ניוטון

שאלות

1) הוכיחו אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=3^n$.

2) הוכיחו לכל $n\geq 0$ את הזהות $6^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{2n-k}$.

3) הוכיחו את השוויון

$$2^n=3^n-n3^{n-1}+\binom{n}{2}3^{n-2}-\dots+(-1)^k\binom{n}{k}3^{n-k}+\dots+(-1)^n\binom{n}{n}3^0$$

4) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=2^{2n}$.

5) הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\binom{m+n}{2}=\binom{n}{2}+\binom{m}{2}+mn$.

6) הוכיחו כי $\binom{2n}{n}$ זוגי לכל $n\in\mathbb{N}$.

7) הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}2^{k-1}=\frac{n}{3}\cdot 3^n$.

8) הוכיחו כי $\binom{x+y}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$, $\forall x,y,n\in\mathbb{N}^+$.

9) הוכיחו את השוויון $\binom{3n}{n}=\sum_{k,j=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{j}\binom{n}{k+j}$.

10) הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$.

11) הוכיחו שלכל $n\geq 0$ ולכל $0\leq k\leq n$ מתקיים $\binom{n}{k}+2\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}=\binom{n+2}{k+2}$.

12) הוכיחו אלגברית וקומבינטורית את הזהות

$$(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1=\frac{\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2}}{n!}$$

13) הוכיחו את הזהות $6n^2\binom{5n-2}{n-2}=\sum_{k=1}^{n}k(n-k)\binom{2n}{k}\binom{3n}{n-k}$.

14) הוכיחו את השוויון $\sum_{n=0}^{N}\binom{k-1+n}{n}=\binom{k+N}{N}$.

15) הוכיחו כי אם $n>0$ זוגי, אז $2^n>\binom{n}{\frac{n}{2}}$.

16) כמה מבין המספרים בפיתוח הבינום $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{7}\right)^{80}$ שלמים?

17) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $n^n-(n-1)^n=\sum\binom{n}{i}(n-1)^{n-i}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה 2

פרק 7 - נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

תוכן העניינים

נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

שאלות

1) לכל n שלם אי-שלילי נגדיר את a_n להיות מספר הסדרות היורדות הלא ריקות, שמורכבות ממספרים טבעיים בין 1 ל- n, כך שההפרש בין כל שני מספרים עוקבים בסדרה הוא לפחות 3.

כתבו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל a_n.

דוגמאות:

- הסדרה (12,9,5,1) נספרת בחישוב של a_{14}, מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל-14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר.
- הסדרה (14) נספרת בחישוב של a_{14}, מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל-14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר (בגלל שאין ספרות עוקבות).
- הסדרה (12,9,7,1) אינה נספרת בחישוב של a_{14}, מכיוון שההפרש בין הספרה השנייה והשלישית בסדרה הוא 2.

2) א. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור מספר האפשרויות לחלק קבוצה בת n אנשים לזוגות ולבודדים.

ב. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר הדרכים לחלק קבוצה של n אנשים לזוגות ולשלשות, כאשר הסדר <u>בין</u> הזוגות והשלשות ו<u>בתוך</u> הזוגות והשלשות אינו משנה.

3) בחפיסת קלפי טאקי יש מספר לא מוגבל של קלפים בצבעים צהוב, אדום, כחול וירוק, ואיננו מבחינים בין קלפים שונים מאותו צבע.

יהי a_n מספר ערימות קלפי טאקי בגודל n, שבהם מעל קלף אדום או כחול אסור לשים קלף צהוב או ירוק.

מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל- a_n.

4) מצאו יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר המילים באורך n מעל $\{A,B,C\}$ ללא הרצף:

א. CC
ב. AB
ג. AA, AB
ד. AA, BA
ה. AA, AB, AC
ו. AB, BC (פתרו בשתי דרכים)
ז. BA, CA
ח. AA, BB
ט. AA, BB, CC
י. BC, CB

5) מצאו יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר הדרכים לרצף שביל באורך n במרצפות אדומות באורך 2, מרצפות צהובות באורך 2, מרצפות ירוקות באורך 2, ומרצפות שחורות ומרצפות לבנות באורך 1 כל אחת.
לאחר מכן פתרו את יחס הנסיגה שהתקבל, קבלו נוסחה מפורשת, וחשבו את ארבעת האיברים הראשונים בשתי דרכים: אחת לפי היחס הרקורסיבי ושנייה על ידי הצבה בנוסחה המפורשת שנמצאה.

6) עבור n טבעי, מהו מספר הסדרות הפלינדרומיות באורך n מעל קבוצת הספרות העשרוניות $\{0,1,2,...,9\}$?
(סדרה $x_1,...,x_n$ היא פלינדרומית, אם $x_i = x_{n-i+1}$ לכל $1 \le i \le n$.
ובעברית פשוטה: אם בקריאתה מהסוף להתחלה או מההתחלה לסוף מתקבלת אותה סדרה, למשל $1,7,2,2,2,7,1$).

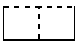
7) נתבונן בסדרות סופיות של סימנים, הלקוחים מתוך 6 סימנים: הספרות 0 ו-1,
וארבעה סימני פעולה $+,-,*,/$, ובכפוף לתנאים הבאים:
1. הסדרה נפתחת ומסתיימת בסִפרה.
2. אין הופעות צמודות של סימני פעולה.
דוגמאות של סדרות העונות על התנאים: $1010+11-101/0100$, 001.
דוגמאות של סדרות **<u>שאינן</u>** עונות על התנאים: -00 , $10+00+$, $00/+101$.
נסמן ב- a_n את מספר הסדרות הללו שבהן בדיוק n סימנים.

א. מצאו יחס נסיגה עבור a_n.

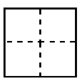
ב. מצאו באופן ישיר את a_0, a_1, a_2, a_3 , ובדקו בעזרת הערכים שהתקבלו את יחס הנסיגה שרשמתם.

ג. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n.
בדקו בעזרת הנוסחה את תוצאות סעיף ב.

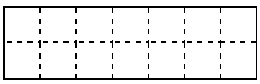
8) בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×1



ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×2.



עלינו לרצף מלבן שממדיו $2\times n$ (בציור להלן $n=7$).
אסור לחרוג מגבולות המלבן.



בלוק של 2×1 אפשר להניח כרצוננו, 'שוכב' או 'עומד'.
יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

א. רשמו יחס נסיגה עבור a_n (הסבירו אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

ב. פתרו את יחס הנסיגה.

ג. חשבו את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א' ובאופן ישיר.

9) תנו ביטוי מפורש ל- a_n בנוסחאות הנסיגה הבאות וחשבו את a_3 , a_4 , a_5 בשתי דרכים: בעזרת יחס הנסיגה ובעזרת הנוסחה המפורשת.

א. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, כאשר $a_0 = 3$, $a_1 = 7$.

ב. $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1}$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

ג. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, כאשר $a_0 = -1$, $a_1 = 4$.

ד. $a_{n+1} = 7a_{n-1} + 6a_{n-2}$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 7$.

ה. $a_{n+1} = 4a_n - 5a_{n-1} + 2a_{n-2}$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 11$.

ו. $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + 16n$, כאשר $a_1 = 19$, $a_0 = 14$.

ז. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 9$.

ח. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3^n$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 9$.

ט. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 2^n$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 10$.

י. $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2} + 5^n$, כאשר $a_0 = -1$, $a_1 = 7\frac{1}{2}$.

יא. $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n + n$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

10) מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור הסידרה a_n המקיימת:
$a_n = 2^{2n+1} - 3^n(n-1) + 1$.

11) כתבו נוסחת נסיגה למספר הסדרות באורך n בספרות $0,1,2$ ללא 00 ו-12.

12) איש ציבור נורמטיבי לוקח שוחד כל שנה בסכום 2 מיליון דולר, 4 מיליון דולר או 6 מיליון דולר. כדי לא למשוך תשומת לב, הוא לא לוקח שוחד על סך 6 מיליון דולר שנתיים ברצף. נסמן ב- a_n את מספר סדרות השוחד השונות שיכול לצבור איש ציבור בשירות נורמטיבי בן n שנים.
דוגמה: במשך 4 שנים ניתן לצבור את סדרת השוחד 2,2,2,2; את סדרת השוחד 2,4,2,6; את סדרת השוחד 4,2,2,6; וכן הלאה (שימו לב ששתי הסדרות האחרונות נספרות כשתי סדרות שוחד שונות).
רשמו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל- a_n.

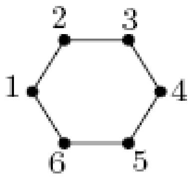
13) לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן על ידי a_n את מספר המילים מעל $\{A, B, C, D, E\}$ שלא מכילות אף אחד מהרצפים AA, BA, CA.
מצאו נוסחה מפורשת עבור a_n.

14) יהי a_n מספר הסדרות באורך n שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,3\ldots,8\}$ ומקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים זוגיים זה בסמוך לזה.

א. מצאו יחס נסיגה עבור a_n, ורשמו את a_1 ו- a_0.

ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n.

ג. חשבו את a_2 מנוסחת הרקורסיה ומהביטוי המפורש, ובדקו שהתקבל אותו ערך.



15) כמה טיולים באורך n, המתחילים בקודקוד 1 ומסתיימים בקודקוד 1 יש בגרף הבא?

לדוגמה: עבור $n=2$ יש שני טיולים כאלה והם $1,2,1$ ו- $1,6,1$.

לדוגמה: עבור $n=4$ יש שישה טיולים כאלה והם

$(1,2,1,6,1),(1,6,1,2,1),(1,6,1,6,1),(1,6,5,6,1),(1,2,1,2,1).(1,2,3,2,1)$

16) נתון כי n הוא חזקה טבעית של 4, $f(n)=16f\left(\frac{n}{4}\right)+n^2$ וכן $f(1)=3$.

פתרו בשיטת הצבה חוזרת.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה 2

פרק 8 - הכלה והדחה

תוכן העניינים

הכלה והדחה

שאלות

1) כמה מילים באורך n יש מעל הא"ב $\{A,B,C,D\}$, כך שהאותיות A,B חייבות להופיע?

2) לארוחת ערב הוזמנו חמישה אנשים, להם המארח קנה 10 מתנות שונות. בכמה דרכים ניתן לחלק את המתנות בין האורחים, כך שכל אורח יקבל לפחות פרס אחד?

3) בקייטנת ההשקעות הלא-הגיוניות יש חמישה קורסים. בכל אחד מחמשת הקורסים רשומים בדיוק 55 ילדים. לכל זוג קורסים יש בדיוק 44 ילדים שרשומים לשניהם, לכל שלושה מהקורסים יש בדיוק 33 ילדים שרשומים לשלושתם, ולכל ארבעה מהקורסים יש בדיוק 22 ילדים שרשומים לארבעתם. הוכיחו כי יש לפחות ילד אחד שרשום לכל חמשת הקורסים בו זמנית.

4) א. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 23 בדיוק?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק על פונקציות יוצרות)
ב. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 31 בדיוק?
ג. בכמה מספרים קטנים ממיליון סכום הספרות הוא 23 לכל היותר?

5) קובייה הוטלה 8 פעמים ורשמו את התוצאות כסדרה של 8 מספרים. מה מספר האפשרויות לסדרות באורך 8 של הטלות, שבהן יופיעו כל ששת המספרים מ-1 עד 6 (כל מספר לפחות פעם אחת)?

6) במערכת שנה א של התוכנית למדעי המחשב באקדמיה המכללתית של תל-יפו-אביב יש חמישה קורסים. בכל אחד מחמשת הקורסים רשומים בדיוק 40 תלמידים. לכל זוג קורסים יש בדיוק 32 תלמידים שרשומים לשניהם, לכל שלושה מהקורסים יש בדיוק 24 תלמידים שרשומים לשלושתם, ולכל ארבעה מהקורסים יש בדיוק 16 תלמידים שרשומים לארבעתם.
הוכיחו שיש לפחות תלמיד אחד שרשום לכל חמשת הקורסים בו זמנית.
<u>הדרכה</u>: על סמך הנתונים כתבו ביטוי שמתאר כמה תלמידים יש בכל חמשת הקורסים יחד.

7) לארוחת ערב הוזמנו חמש נשים, להן המארחת קנתה 10 מתנות שונות. בכמה דרכים ניתן לחלק את המתנות בין האורחות, כך שכל אורחת תקבל לפחות פרס אחד?

8) איש ציבור מושחת לוקח כל שנה שוחד בסך 2, 4 או 6 מיליון דולר (שלא כמו איש ציבור נורמטיבי, איש ציבור מושחת יכול לקחת שוחד של 6 מיליון דולר מספר שנים ברציפות). סדרת שוחד היא סדרת סכומים שקיבל איש ציבור מושחת במשך כמה שנים, למשל 2, 4, 2, 6, 6.
כמה סדרות שוחד יניבו עבור איש ציבור מושחת סך של 20 מיליון דולר במשך 6 שנים?

9) עבור $A=\{1,2,3.\cdots,10\}$, כמה פונקציות $f:A\to A$ חח"ע ועל יש, כך ש- $f(k)\neq k$ עבור $k=1,2,3$?

10) בכמה תמורות של המספרים $\{1,2,3,4,\cdots,18\}$, כל המספרים שמתחלקים ב-3 במקומות של מספרים שמתחלקים בשלוש ואף זוגי לא במקומו?

11) ברשותך שלושה כדורים לבנים זהים, שלושה כדורים שחורים זהים, ומאגר בלתי מוגבל של כדורים אדומים זהים. בכמה אופנים ניתן להרכיב מהם קבוצה (סדר הכדורים לא משנה) בת n כדורים?
פתרו בעזרת פונקציות יוצרות ובעזרת הכלה והדחה והשוו את התוצאות.

12) שבע משפחות בנות שלוש נפשות כל אחת (אבא, אמא וילדה) מגיעות למפגש חברתי.
בכמה אופנים ניתן לסדר אותם בשלשות, כך ש:
א. ללא הגבלה?
ב. כל שלשה תהיה מורכבת מאבא, אמא וילד אבל אף שלשה לא תרכיב משפחה שלמה?
ג. אף שלשה לא תרכיב משפחה שלמה (כלומר, יתכן שלשה המורכבת משלושה אבות או שני אבות וילד).

13) בכמה דרכים ניתן לחלק 40 כדורים לארבעה תאים, כך שאף תא לא יהיה ריק, כאשר
א. הכדורים זהים.
ב. הכדורים שונים.

14) ארבעה אנשים שונים (שנמספר 1, 2, 3, 4) אחראים יחד על ביצוע של 5 משימות שונות (שנקטלג א, ב, ג, ד, ה). לביצוע כל משימה נדרשים **בדיוק שני אנשים**, כאשר אין הבדל בין תפקידי שני האנשים בצוות המבצע משימה נתונה.

א. בכמה דרכים ניתן להקצות את 5 המשימות לצוותים של שני אנשים?
הנה כמה דוגמאות לדרכים **לגיטימיות** לעשות זאת:
דוגמה 1: הצוות $\{1,2\}$ יבצע את כל המשימות.
דוגמה 2: הצוות $\{1,2\}$ יבצע את משימות א ו-ב, הצוות $\{1,3\}$ את משימות ג ו-ד, והצוות $\{2,3\}$ את משימה ה.
דוגמה 3: הצוות $\{1,2\}$ יבצע את משימות א ו-ב, הצוות $\{3,4\}$ את משימות ג ו-ד, והצוות $\{2,3\}$ את משימה ה.

ב. בכמה דרכים ניתן להקצות את חמשת המשימות לצוותים של שני אנשים, אם אסור שמישהו יתחמק לגמרי מעבודה, כאשר כל אחד מ-4 האנשים חייב לקחת חלק במשימה אחת לפחות (דוגמאות 1 ו-2 בסעיף א אינן חוקיות כעת, אולם דוגמה 3 חוקית).

15) דנה, תלמידה בכיתה א', קראה בספר את המשפט המעניין: **דנה קמה דנה נמה**. אחרי שקראה בהצלחה את המשפט, עלו בדעתה של דנה כמה שאלות מעניינות לא פחות:

א. בכמה דרכים אפשר לסדר את כל 12 האותיות במשפט זה במחרוזת אחת ללא רווחים, כגון **דנהקמהדנהנמה**?

ב. בכמה מהדרכים הללו מופיע בתוך המחרוזת הרצף **דמקה**?

ג. מה מספר הדרכים לסדר את 12 האותיות, כך **שלא** תופיע בתוך המחרוזת **אף אחת** מארבע המחרוזות: **דמקה, קהה, ממד, ננהה**?

16) בבחינה מתמטיקה בדידה בקורס זה יש 11 שאלות בארבעה נושאים: 2 שאלות בקומבינטוריקה בסיסית, 3 שאלות בפונקציות יוצרות, 2 שאלות בגרפים ו-4 שאלות בהכלה והדחה, כאשר יש לענות על 6 שאלות לפחות (אפשר יותר) וחייבים לענות על לפחות שאלה אחת מכל נושא.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

17) בכמה דרכים ניתן להרכיב מילה מהמספרים $\{1,2,3,\dots,n\}$, כך שכל מספר יופיע k פעמים, אבל אף מספר לא יופיע k פעמים ברצף?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה 2

פרק 9 - שובך היונים

תוכן העניינים

שובך היונים

שאלות

1) תהי $A=\{1,2,3,\cdots,49\}$.
הוכיחו כי לכל בחירה של קבוצה $B\subseteq A$, כך ש- $|B|=26$, יהיו ב- B לפחות שני איברים שסכומם 49.

2) תהי A קבוצה של שישה מספרים מתוך $\{1,\ldots 11\}$.
הוכיחו כי קיימות שתי תתי קבוצות של A שסכום אבריהן שווה.

3) מה הגודל המירבי של קבוצה של מספרים טבעיים, שבה אין שני מספרים שסכומם או הפרשם מתחלק ב- 3009? נמקו.

4) תהי A קבוצה של n מספרים טבעיים כלשהם.
הוכיחו שקיימת קבוצה חלקית לא-ריקה של A, **שסכום** איבריה מתחלק ב- n.

5) הוכיחו כי בכל צביעה של המישור בשני צבעים, כחול ואדום, יש שתי נקודות שמרחקן אחד והן צבועות באותו צבע.

6) יהי $n\in\mathbb{N}$.
הוכיחו כי קיים $k\in\mathbb{N}$, כך שבמספר הטבעי $k\cdot n$ מופיעות הספרות 7 ו- 0 בלבד.

7) הוכיחו כי מבין כל 12 מספרים דו-ספרתיים יש שניים שהפרשם בעל שתי ספרות זהות.

8) הוכיחו כי מבין כל בחירת 26 נקודות בתוך משולש שווה צלעות, שאורך צלעו הוא אחד, יש שתי נקודות שהמרחק ביניהן קטן מ- $\frac{1}{5}$.

9) הוכיחו כי בכל בחירה של $n+1$ מספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,3,\cdots,2n\}$, יש שני מספרים x,y כך ש:
א. x,y זרים (כלומר, המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1).
ב. x מתחלק ב- y ללא שארית.
ג. הראו כי החסם הנ"ל הדוק, כלומר אפשר לבחור n מספרים מבלי שיתקיימו תנאים א ו-ב.

10) נבחר 46 מספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,3,\cdots,81\}$.
הוכיחו כי יש שני מספרים שהפרש הוא בדיוק 9.
הוכיחו גם כי המספר הנ"ל הדוק (כלומר מצאו 45 מספרים מתוך $\{1,2,3,\cdots,81\}$, שאין בהם שניים שהפרשם הוא בדיוק 9).

11) תהי A קבוצה בת 20 מספרים מתוך הסדרה החשבונית $1,4,7,10,\cdots,100$.
הוכיחו כי יש שני מספרים שסכומם 104.

12) n אנשים נפגשו במסיבה ולחצו ידיים.
הוכיחו כי יש שני אנשים שלחצו בדיוק אותו מספר ידיים.

13) הוכיחו כי בכל צביעה של קשתות הגרף השלם K_6 בשני צבעים, יש משולש מונוכרומטי.

14) הוכיחו כי בכל גרף יש שני קודקודים בעלי אותה דרגה.

15) לפוליטיקאי נותרו 50 ימים עד לבחירות, והוא מתכנן נאומי בחירות: לפחות אחד ביום אך לא יותר מ-75 נאומים בסך הכל.
הוכיחו כי קיימת סדרת ימים שבהם הוא נואם 24 נאומים.

16) יהי $n\in\mathbb{N}$.
הוכיחו כי קיים $m\in\mathbb{N}$, כך ש- n מחלק את 2^m-1.
הדרכה: התבוננו בסדרה $2^1-1,2^2-1,2^3-1,\cdots 2^{n+1}-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה 2

פרק 10 - תורת הגרפים

תוכן העניינים

מבוא לתורת הגרפים

שאלות

הערה: חלק קטן משאלות פרק זה מסתמכות על מושג העץ.
רצוי ללמוד את הפרק עצים שהוא פרק חשוב ביותר.

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהי $G=(V,E)$ גרף על 43 צמתים: 10 צמתים מדרגה 7, 17 צמתים מדרגה 6, 12 צמתים מדרגה 4 והיתר מדרגה 1.
כמה קשתות יש ב- G?

ב. הוכיחו כי בכל גרף מספר הצמתים מדרגה אי-זוגית הוא זוגי.

2) עבור $n\in\mathbb{N}$ נגדיר גרף פשוט G_n, כך שצמתיו הם 2^n הסדרות הבינאריות באורך n, ושני קודקודים מחוברים ביניהם בקשת אם ורק אם הם נבדלים בקואורדינטה אחת.
מה מספר הקשתות של G_5 ושל G_n? (גרף כזה נקרא גרף הקובייה)

3) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\} \,|\, |A|=3\}$
$E=\{\{A,B\} \,|\, |A\cap B|=1\}$, למשל $\{\{2,4,7\},\{1,4,6\}\}\in E$, כי בחיתוך יש איבר אחד.

א. מהו מספר הצמתים? מה דרגת כל קודקוד? מה מספר הקשתות?

ב. האם G דו"צ?

4) חזרו על שאלה קודמת עבור הגרף $G=(V,E)$ באופן הבא:
V כמו קודם ו- $E=\{\{A,B\} \,|\, A\cap B=\varnothing\}$.

5) יהי $G=(V,E)$ על 7 צמתים: 4 מהצמתים הם מדרגה 5 וכל יתר הדרגות קטנות מ-3.
מהן האפשרויות הנכונות?

א. יש גרף פשוט כזה, שהוא קשיר.

ב. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.

ג. יש גרף כזה, אבל הוא לא פשוט ולא קשיר.

ד. יש גרף כזה, והוא לא פשוט וקשיר.

6) נתונים שני גרפים G_2 , G_1 על 5 קודקודים. סדרת דרגותיו של G_1 היא 2,2,3,4,5,5,6 וסדרת דרגותיו של G_2 היא 1,2,3,4,4.
לגבי כל אחד משני הגרפים קבעו איזו מן הטענות הבאות נכונה:
א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.
ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא פשוט.
ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
ה. לא קיים גרף כזה.

7) ענו על הסעיפים הבאים:
א. יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים.
הוכיחו כי אם לכל שני קודקודים $x,y\in V$ מתקיים $d(x)+d(y)\geq n-1$,
אז G קשיר.
ב. הוכיחו באינדוקציה כי גרף על n קודקודים ופחות מ-$n-1$ קשתות אינו קשיר.

8) יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים.
הוכיחו כי אם: $|E|>\binom{n-1}{2}$ $(*)$ אז G קשיר, כאשר $|E|$ מספר הקשתות.
הראו גם כי חסם זה הדוק. כלומר, הראו גרף פשוט G, עבורו $|E|=\binom{n-1}{2}$,
כך ש-G אינו קשיר. זה מראה שלא ניתן לשפר את אי השוויון $(*)$.

9) יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט ויהיו $x,y\in V$ שני קודקודים לא שכנים.
הוכיחו כי אם $d(x)+d(y)\geq n$, אז יש ל-x ול-y לפחות שני שכנים משותפים.

10) יהי G גרף פשוט על $n\geq 2$ צמתים, ויהיו $u,v\in V$ קודקודים שאינם שכנים.
הוכיחו כי אם: $d(u),d(v)\geq\frac{n+1}{2}$ אז יש ל-u,v לפחות שלושה שכנים משותפים.

11) יהי $G=(V,E)$ גרף, כך ש-$(n\geq 2)$, $V=P_2(\{1,2,..,n\})$, $A\cap B=\phi \Leftrightarrow e\in E$,
כאשר $A,B\in V$.
א. חשבו את $|V|$.
ב. מהי דרגת כל צומת?
ג. הוכיחו כי אם $n\geq 5$ אזי G קשיר (רמז: דרך השלילה).

(12 יהי G גרף פשוט על 10 קודקודים שיש בו 41 קשתות.
הוכיחו:
א. יש לפחות שני קודקודים ב-G שדרגתם היא 9.
ב. G קשיר.

(13 יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט.
הוכיחו כי אם $|V|=|E|$, אז ב- G יש מעגל, ואם G קשיר, אז המעגל יחיד.

(14 יהי G גרף פשוט קשיר בן 7 קודקודים, שסדרת דרגותיו היא 3,2,2,2,1,1,1.
כמה מעגלים פשוטים יש בגרף?

(15 יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים.
הוכיחו כי אם לכל קודקוד $x\in V$ מתקיים $d(x)\geq\frac{n}{2}$, אז ב- G מעגל באורך 4.

(16 הוכיחו כי בכל גרף פשוט על 100 קודקודים, שבו כל הדרגות הן לפחות 10, יש מעגל באורך ≤ 4.

(17 יהי G גרף פשוט.
הוכיחו כי לפחות אחד מבין הגרפים $G,\bar{G}$ קשיר.
בניסוח שקול: הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_n בשני צבעים לפחות, אחד הגרפים החד צבעיים הוא קשיר.

(18 הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_6 בשני צבעים, יש משולש מונוכרומטי (משולש חד צבעי).

(19 הוכיחו כי בכל קבוצה של 9 אנשים יש בהכרח לפחות 4 המכירים זה את זה או לפחות 3 שאף שניים מהם אינם מכירים זה את זה.

(20 יהי G גרף שקודקודיו הם תתי קבוצות בנות 4 אברים של הקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$, (כאשר n גדול מ-6). שני קודקודים מחוברים בקשת בגרף אם בחיתוך שלהם יש שני אברים בדיוק. לדוגמה, הקודקוד $\{1,2,3,4\}$ שכן של $\{1,2,7,8\}$, אך לא של $\{1,2,3,7\}$.
כמה קודקודים בגרף הם שכנים של $\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,3,4\}$ או $\{1,2,4,5\}$?

21) הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_{17} ב-8 צבעים יש מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבע אחד (מעגל מונוכרומטי).

22) כמה מעגלים פשוטים באורך $3 \le k \le n$ יש בגרף השלם K_n על קבוצת הקודקודים $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$?
שני מעגלים המתקבלים אחד מהשני על ידי סיבוב נחשבים זהים.
למשל, עבור $n=5$, שני המעגלים $1,2,3,4,5,1$ ו- $3,4,5,1,2,3$ נחשבים זהים, ואילו המעגלים $1,2,3,1$ ו- $1,3,2,1$ אינם זהים.

23) נצבע ב- $n \ge 2$ צבעים את קשתות הגרף השלם K_n , כך שכל צבע מופיע לפחות פעם אחת.
הוכיחו כי קיים מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבעים שונים.

24) יהי G גרף קשיר על 13 קודקודים, שניתן לצבוע בשלושה צבעים (כלומר, אפשר לצבוע את הקודקודים בשלושה צבעים, כך שאין שני קודקודים מאותו צבע שמחוברים בקשת).
הוכיחו שיש בגרף אנטי קליקה בגודל 5 (כלומר, 5 קודקודים שאף אחד מהם לא מחובר לאף אחד אחר).

25) נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ ו- $G_3=(V,E_3)$. נגדיר $G=(V,E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ כאיחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל קודקוד ב- V דרגתו ב- G היא לפחות 6.
הוכיחו כי לפחות אחד מהגרפים G_1 , G_2 ו- G_3 <u>אינו</u> חסר-מעגלים.
שאלה זו מופיעה גם בפרק עצים.

26) יהי G_n גרף פשוט שקודקודיו הם כל תתי-הקבוצות של $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$, למעט $\varnothing$ ו- $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ עצמה. שני קודקודים הם שכנים אם ורק אם אף אחד אינו מוכל במשנהו.

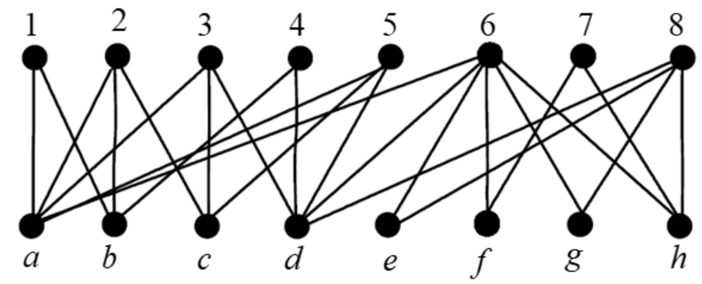
א. הוכיחו כי לכל $n \ge 2$, G_n קשיר.

ב. הוכיחו כי אם v תת קבוצה בת k איברים של $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$: אז דרגתה כקודקוד ב- G_n היא : $2^n-2^{n-k}-2^k+1$.

ג. הוכיחו כי לכל $n \ge 3$ קיים מעגל המילטון ב- G_n . מותר להסתמך על סעיפים קודמים ועל העובדה ש- $2^{n-k}+2^k \le 2^{n-1}+2$.

27) כמה זיווגים מושלמים יש,
(שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי)
א. בגרף המלא K_5 ?
ב. בגרף המלא K_6 ?
ג. בגרף הדו״צ המלא $K_{5,5}$?
(הגדרת גרף דו״צ בפרק גרף דו צדדי)
ד. בגרף הדו״צ המלא $K_{5,5}$, כאשר מחקנו שלוש קשתות שיש להן צומת משותף?

28) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו כי בגרף הבא אין זווג מושלם.
ב. מצאו זווג מקסימום.
ג. מהו המספר המינימלי של קשתות שיש להוסיף לגרף כך שיהיה זווג?



29) יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט, ונגדיר גרף חדש $H=(V,E')$ באופן הבא:
$E'=\{\{x,y\}|x,y\in V\wedge\exists z\in V:\{\{x,z\},\{y,z\}\}\subseteq E\}$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם G קשיר, אז H קשיר.
ב. אם G קשיר, אז H לא קשיר.
ג. אם H קשיר, אז G קשיר.
ד. אם H קשיר, אז G לא קשיר.

30) נתון גרף G.
הוכיחו כי אם $\bar{G}$ לא קשיר, אז לכל שני קודקודים x,y ב- G מתקיים
$d(x,y)\le 2$ (כאשר $d(x,y)$ הוא המרחק בין x ל- y).

31) נתונה קבוצה בת 5 קודקודים $V=\{v,u,t,s,r\}$.
כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים V מקיימים שדרגת כל קודקוד קטנה ממש מ-4?

32) יהי G גרף חסר מעגלים בעל 20 קודקודים ו-15 קשתות.
כמה רכיבי קשירות בגרף?

33) הוכיחו כי בכל צביעה של קשתות K_{2t+1} ב-t צבעים, נקבל מעגל חד צבעי.

גרף דו צדדי

שאלות

1) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\} \| |A|=3\}$
$E=\{\{A,B\} \| |A\cap B|=1\}$.
א. האם G דו צדדי?
ב. האם G דו קשיר?

2) יהי $G=(V,E)$ גרף, כאשר כל צומת של G היא סדרה בינארית באורך 6.
למשל, 000000 צומת של G. שני צמתים הם מחוברים אם הם נבדלים זה מזה בשני מקומות בדיוק. למשל, 010111 מחובר ל-011101, כי הם נבדלים במקומות השלישי והחמישי.
א. כמה קשתות יש ל- G?
ב. האם G קשיר? כמה רכיבי קשירות יש ל- G?
ג. האם G דו״צ?
ד. (למי שלמדו גרפים מישוריים, האם G מישורי?)

3) מחקו $n-1$ קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם $K_{2,n}$ (כאשר $n\geq 1$) והתקבל גרף G שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר, אין בו קודקודים שדרגתם אפס).
הוכיחו ש- G הוא עץ (שאלה זו מופיעה גם בפרק עצים).

4) מה הגרף המשלים של הגרפים הדו״צ $K_{4,4}, K_{5,5}$, ובאופן כללי $K_{n,n}$?

5) יהיו $G_1=(V_1,E_1)$ ו- $G_2=(V_2,E_2)$ שני גרפים, כאשר האיחוד שלהם מוגדר להיות $G_1\cup G_2=(V,E)$ כש- $V=V_1\cup V_2, E=E_1\cup E_2$.
הוכיחו או הפריכו:
א. איחוד של שני גרפים דו״צ הוא גרף דו״צ.
ב. איחוד של שני גרפים דו״צ על קבוצות צמתים זרות הוא גרף דו״צ.
ג. איחוד של n גרפים דו״צ על קבוצות צמתים זרות הוא גרף דו״צ.
ד. איחוד של n גרפים דו״צ על קבוצות צמתים זרות בזוגות הוא גרף דו״צ.

6) הציגו את K_{16} כאיחוד של 4 גרפים דו״צ.

7) הוכיחו או הפריכו:
אם $G=(V,E)$ גרף דו"צ k רגולרי שצדדיו הם A,B, אז $|A|=|B|$.

8) יהיו $G_1,G_2,G_3,\cdots,G_7$ שבעה גרפים דו"צ שונים על אותה קבוצות צמתים V.
לכל גרף צדדים A_i,B_i, כאשר $i=1,2,3,4,5,6,7$. כמובן שבסימונים אלה
מתקיים $A_i\cap B_i=\varnothing$, $A_i\cup B_i=V$ לכל $1\le i\le 7$.
יהי G איחוד כל הגרפים האלה, כאשר אם יש קשר המופיע בכמה גרפים ניקח
רק קשת אחת, כך שאין קשתות מרובות והגרף שהגדרנו הוא גרף פשוט.
לכל צומת ב- G נתאים סדרה בת שבע אותיות לפי הצדדים אליה הוא שייך
בגרפים $G_1,G_2,G_3,\cdots,G_7$, בהתאמה.
למשל, אם v שייך לקבוצות $A_1,A_2,B_3,B_4,B_5,A_6,A_7$, כלומר בשני הגרפים
הראשונים הוא בצד A, בשלושת הגרפים הבאים בצד B, ובשני הגרפים
האחרונים בצד A, אז נשמיט את האינדקסים ונתאים לו את המילה $AABBBAA$.
כלומר, ל- v שלנו תתאים המילה $AABBBAA$, ובאופן דומה, לכל צומת תתאים
מילה בת 7 אותיות.
הוכיחו כי אם לשני צמתים u,v מתאימה אותה מילה אז אין צומת ב- G בין u
לבין v.

9) יהי G גרף דו צדדי $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\varnothing$, ונתון כי G הוא d רגולרי, $d\ge 1$.
הוכיחו כי $|V_1|=|V_2|$.

10) הוכיחו או הפריכו:
א. אם לגרף יש שני רכיבי קשירות בדיוק, אז הגרף המשלים הוא דו צדדי.
ב. אם לגרף יש שני רכיבי קשירות בדיוק, אז הגרף המשלים אינו דו צדדי.

11) כמה זיווגים מושלמים יש,
(שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי)
א. בגרף המלא K_5?
ב. בגרף המלא K_6?
ג. בגרף הדו"צ המלא $K_{5,5}$?
(הגדרת גרף דו"צ בפרק גרף דו צדדי)
ד. בגרף הדו"צ המלא $K_{5,5}$ כאשר מחקנו שלוש קשתות שיש להן צומת משותף?

12) יהי $G=(V,E)$ גרף דו-צדדי פשוט., וכן $|V|=n$.
הוכיחו כי $|E|\le\frac{n^2}{4}$.

13) נגדיר גרף שצמתיו הם $P(\{1,2,3,\cdots n\})$ (יש 2^n צמתים), ושני צמתים מחוברים, אם אחד מהם מכיל את השני והם נבדלים באיבר אחד.
(למשל, $\{1,5,7\},\{1,2,5,7\}$ מחוברים)

א. הוכיחו כי G קשיר.
ב. הוכיחו כי G רגולרי.
ג. הוכיחו כי G הוא גרף דו"צ.

14) הוכיחו או הפריכו: אם $G=(V,E)$ אוילרי דו צדדי, אז: $|V|\in\mathbb{N}_{even}$.
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

עצים

שאלות

1) יהי T עץ שעל $n\geq 2$ קודקודים שלו בדיוק שני עלים.
מהן דרגות קודקודי T? רשמו אותן לכל $n\geq 2$, בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות) והוכיחו נכונות תשובתכם.

2) יהי $T=(V,E)$ עץ.
הוכיחו שאם כל דרגותיו אי-זוגיות, אזי גם $|E|$ הוא מספר אי-זוגי.

3) יהי T עץ על $n\geq 4$ קודקודים. אורך המסלול הפשוט הארוך ביותר ב-T הוא $n-2$ (יש מסלול פשוט באורך $n-2$ ואין מסלול ארוך יותר).
מהן דרגות קודקודי T? רשמו אותן בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות).

4) יהי T עץ. נוסיף ל-T קודקוד שנקרא לו v, וקשתות מ-v לחלק מקודקודי T.
מה צריכה להיות דרגת v כדי שבגרף המתקבל יהיה בדיוק מעגל פשוט אחד?
הוכיחו שאם דרגת v תהיה גדולה יותר, בגרף יהיה יותר ממעגל פשוט אחד.

5) G גרף עם 20 קודקודים ו-15 קשתות ללא מעגלים.
כמה רכיבי קשירות בגרף?

6) נתונה קבוצה של 10 קודקודים, ואוסף שקפים שעליהם מצוירים <u>עצים</u> על אותם עשרה קודקודים. גיורא מניח מספר כלשהו של שקפים זה על זה ומקפיד שאף קשת משקף אחד לא תכסה על אותה קשת בשקף אחר (כלומר, אין אף קשת משותפת לשני עצים שונים).
הוכיחו שהגרף שגיורא מקבל מאיחוד העצים שמצוירים על השקפים לא יכול להיות גרף שכל דרגותיו שוות ל-5.
רמז: חשבו את מספר הקשתות בגרף.

7) יהיו $T_2=(V,E_2)$, $T_1=(V,E_1)$ שני עצים על אותה קבוצת קודקודים, ונגדיר גרף G על אותה קבוצת קודקודים, שקשתותיו $E=E_1\cup E_2$.
הוכיחו כי קיים $x\in V$, כך ש-$d(x)\leq 3$ (דרגתו של x ב-G).

8) יהיו $T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $T_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ עצים, ונגדיר גרף G כך: $G = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle$.

א. נתון כי $V_1 \cap V_2 = \{v\}$.
האם G בהכרח עץ? נמקו.

ב. נתון כי $E_1 \cap E_2 = \{e\}$.
האם G בהכרח עץ? נמקו.

9) יהי T עץ על $n \geq 3$ קודקודים ויהי v קדקוד ב- T מדרגה 2.
יהי k מספר רכיבי הקשירות של $T - v$ (שהוא תת הגרף של T המתקבל ממחיקת v, והקשתות ש- v קצה שלהן).
מה הם הערכים האפשריים עבור k? הוכיחו.

10) יהי T עץ בעל n קודקודים, ונתון שדרגותיו הן 1,3,5 בלבד. יש 7 קודקודים מדרגה 3 ו-10 מדרגה 5.
כמה עלים יש בעץ?

11) יהי $T = (V, E)$ עץ, שבו $|V| = n$. דרגות צמתי T הן 1,3,5 בלבד. מספר הצמתים שלהם מדרגה 3 הוא 10 ומספר הצמתים שלהם מדרגה 5 הוא 12.
כמה עלים (צמתים מדרגה 1) יש לעץ?

12) הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_n בשני צבעים קיים עץ פורש מונוכרומטי.
הערה: עץ פורש הוא עץ שקודקודיו הם כל קודקודי G וקשתותיו הן חלק מקשתות G.

13) יהי $G = (V, E)$, $|V| = n$, גרף פשוט וחסר מעגלים, שבו k רכיבי קשירות.
הוכיחו כי $|E| = n - k$.

14) מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים $V = \{1,2,3,4,5,6\}$, <u>שאף</u> שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק איזומורפיזם)

15) מחקו $n-1$ קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם $K_{2,n}$ (כאשר $n \geq 1$), והתקבל גרף G שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר, אין בו קודקודים שדרגתם אפס).
הוכיחו ש- G הוא עץ (שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי).

16) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ ו- $G_3=(V,E_3)$.

נגדיר $G=(V,E_1\cup E_2\cup E_3)$ כאיחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל קודקוד ב- V דרגתו ב- G היא לפחות 6.

הוכיחו כי לפחות אחד מהגרפים G_1, G_2 ו- G_3 <u>אינו</u> חסר-מעגלים.

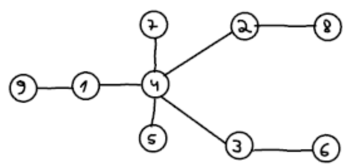
ב. יהיו $G_1=(V_1,E_1),G_2=(V_2,E_2),G_3=(V_3,E_3)$ שלושה עצים על אותה קבוצת צמתים V.

לכל צומת $v\in V$ נסמן ב- $d_i(v)$ את הדרגה של v ב- G_i, אשר $i=1,2,3$.

הוכיחו כי קיים צומת $v\in V$, שעבורו $\sum_{i=1}^{3}d_i(v)\le 5$.

17) מיהו העץ הממוספר המותאם למילה $(1,1,3,4,3,6,10,1)$?

18) מהי סדרת פרופר של העץ הבא?



19) בכמה עצים שונים על קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6\}$ אין שום צומת מדרגה זוגית?

20) בכמה עצים על קבוצת הקודקודים $\{1,2,3,4,\cdots,10\}$ כל העלים הם מספרים זוגיים?

21) כמה עצים שונים יש על הקודקודים $\{1,\ldots n\}$, שלהם בדיוק שני עלים?

22) T הוא עץ בעל 60 צמתים, מתוכם בדיוק 10 צמתים מדרגה 3 ואין בצמתים מדרגה גדולה מ-3.

א. הדגימו עץ כזה.

ב. מצאו את מספר העלים ללא שימוש בקוד פרופר.

ג. מצאו את מספר העלים בעזרת קוד פרופר.

23) בכמה עצים על הקודקודים $\{1,2,3,\cdots,10\}$ יש שלושה עלים והם (ורק הם): 8,9,10?

24) יהי G גרף פשוט על n קודקודים המכיל מעגל המילטון, ונתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבל תת גרף של G שהוא עץ.
האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף G? אם כן, מהו מספר הקשתות?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים)

25) מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה זו מופיעה בפרק איזומורפיזם)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מעגלים מיוחדים

הערה: חלק קטן משאלות פרק זה מסתמכות על מושג העץ.
רצוי ללמוד את הפרק עצים שהוא פרק חשוב ביותר.

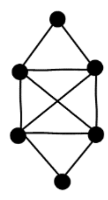
דוגמאות

1) צפו בסרטון על מעגלי המילטון והוכיחו כי:
א. תנאי אורה אינו תנאי הכרחי.
ב. החסם במשפט אורה הוא הדוק.

2) בשאלה זו נחקור את הקשר בין המושג מעגל אוילר לבין מעגל המילטון.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם G המילטוני, אז G אוילרי.
ב. אם G המילטוני, אז G לא אוילרי.
ג. אם G לא המילטוני, אז G אוילרי.
ד. אם G לא המילטוני, אז G לא אוילרי.
ה. לעניין הקשר בין המושגים, מה המסקנה המתבקשת מסעיפים א-ד?
ו. אם G הוא גם אוילרי וגם המילטוני, אז יש בו מסלול שהוא בעת ובעונה אחת גם מסלול אוילר וגם מסלול המילטון.
ז. אם G אוילרי וגם המילטוני, אז G הוא מעגל פשוט.
ח. אם יש ב- G מסלול שהוא בעת ובעונה אחת מעגל אוילר וגם מעגל המילטון, אז G הוא מעגל פשוט.

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצא מעגל אוילר, מעגל המילטון, ומסלול המילטון שאינו מעגל המילטון בגרף הבא:



ב. הוכיחו את הטענה הבאה, או תנו דוגמה נגדית והסבר שמראה שאכן מדובר בדוגמה נגדית: אם בגרף יש מעגל המילטון, אז יש בו מעגל אוילר.

2) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\} \| |A|=3\}$
$E=\{\{A,B\} \| |A\cap B|=1\}$. למשל, $\{\{2,4,7\},\{1,4,6\}\}\in E$.
א. מהו מספר הצמתים? מה דרגת כל קודקוד? מה מספר הקשתות?
ב. האם G דו״צ?
ג. האם G אוילרי?
ד. האם G המילטוני?

3) מהו האורך המירבי של מסלול ב- K_{2n+1} ? נמקו.

4) הוכיחו בכל גרף שכל דרגותיו 4 ניתן לצבוע את קשתותיו כך מכל קודקוד יצאו בדיוק שתי קשתות מכל צבע.

5) ענו על הסעיפים הבאים:
א. יהי G גרף שקודקודיו הן תתי קבוצות בנות 4 איברים של $\{1,2,3,\cdots,8\}$, כאשר שני קודקודים מחוברים אם ורק אם בקבוצות יש 2 איברים בדיוק. האם ב- G יש מעגל המילטון?
ב. יהי $K_{m,n}$ גרף דו צדדי שלם.
הוכיחו כי $K_{m,n}$ המילטוני $\Leftrightarrow m=n$.

6) יהיו $G_2=(V_2,E_2)$, $G_1=(V_1,E_1)$, $V_2\cap V_2=\varnothing$, $E_1\cap E_1=\varnothing$ שני גרפים אוילריים פשוטים. נגדיר $G=(V,E)$ באופן הבא: $E=E_1\cup E_2$, $V=V_1\cup V_2$,
ומלכדים צומת $u_1\in V_1$ עם צומת $u_2\in V_2$. האם G אוילרי?
אם נחבר את u_1 עם u_2 במקום ללכד אותם, האם כעת G אוילרי?

7) יהי $G=(V,E)$ גרף אוילריאני בעל מספר אי זוגי של צמתים.
הוכיחו כי יש ב- G לפחות שלושה צמתים בעלי אותה דרגה.
(שובך היונים, מספר הקודקודים $2n+1$ ויש n דרגות אפשריות כי כולן זוגיות)

8) יהי G גרף בעל שני רכיבי קשירות, T_1 ו- T_2, שכל אחד מהם עץ. נוסיף שתי קשתות חדשות ל- G (קבוצת הקודקודים נשארת ללא שינוי) ויתקבל גרף חדש $\tilde{G}$.
א. הוכיחו שב- $\tilde{G}$ בהכרח יש מעגל.
ב. בנו דוגמה שבה ב- $\tilde{G}$ יש מעגל המילטון.

9) יהי G גרף פשוט על $n\geq 3$ קודקודים.
נתון:
1. n מספר זוגי.
2. כל הדרגות ב-G שוות (כלומר G גרף רגולרי).
3. גם G וגם $\bar{G}$ קשירים.

הוכיחו שלפחות באחד מבין G ו-$\bar{G}$ יש מעגל המילטון.

10) הוכיחו או הפריכו: אם G אוילרי דו"צ, אז מספר הצמתים של G הוא זוגי.

11) עבור $A=\{1,2,3\}$, נגדיר $G=(V,E)$, כאשר $V=A\times A$ (9 צמתים), ואת E קבוצת הצמתים נגדיר באופן הבא: $\{(a,b),(c,d)\}\in E$ אם ורק אם $a+b\neq c+d$.
א. הוכיחו כי G קשיר.
ב. מה דרגת הצומת $(1,1)$ ומה דרגת הצומת $(2,3)$? כמה קשתות יש ב-G?
ג. הוכיחו כי אין ב-G מסלול אוילר.

12) יהי G גרף פשוט 3-רגולארי על $n\geq 4$ קודקודים. נתון שב-G יש מעגל המילטון. הוכיחו שתת הגרף של G, המתקבל ממחיקת כל הקשתות ששייכות למעגל המילטון, הוא בעל $\frac{n}{2}$ רכיבי קשירות (בפרט, יש להוכיח ש-n זוגי).

13) יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני גרפים על אותה קבוצת קודקודים V. נגדיר את הגרף $G=(V,E_1\oplus E_2)$, כאשר $E_1\oplus E_2$ הוא ההפרש הסימטרי של שתי קבוצות הקשתות (כל הקשתות שנמצאות ב-E_1 או ב-E_2 אבל לא בשתיהן).
הוכיחו כי אם ב-G_1,G_2 יש מעגל אוילר ו-G קשיר, אז גם בו יש מעגל אוילר.

14) יהי $G=(V,E)$ גרף על n צמתים.
א. הוכיחו כי אם $|E|>\binom{n-1}{2}+1$, אז G המילטוני.
ב. הוכיחו כי החסם הנ"ל הדוק. כלומר, כי הטענה:
אם $|E|\geq\binom{n-1}{2}+1$, אז G המילטוני – איננה נכונה.

15) נתון $G=(V,E)$ גרף אוילרי שיש בו שלוש קשתות $e_1,e_2,e_3\in E$, שלאחר הסרתן מהגרף, G נשאר אוילרי.
א. הדגימו גרף כזה.
ב. הוכיחו כי G לא דו"צ.

16) נתון G גרף אוילר, ונגדיר שיטה: נבחר קודקוד, נתחיל ממנו מסלול, ונמשיך אותו כרצוננו כל עוד אפשר בלי לחזור על קשת פעמיים.
א. הוכיחו כי בשיטה זו תמיד נקבל מעגל.
ב. האם בשיטה זו מתקבל תמיד מעגל אוילר?
ג. נתון כי G גם המילטוני.
האם בהכרח יש בו מסלול שהוא גם מעגל אוילר וגם מעגל המילטון?

17) יהי G גרף פשוט על n קודקודים, המכיל מעגל המילטון, ונתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבל תת גרף של G שהוא עץ.
האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף G? אם כן, מהו מספר הקשתות?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים)

18) יהי G גרף, לאו דווקא קשיר, שכל דרגותיו אי זוגיות. נבנה גרף H שקודקודיו הם קודקודי G ועוד קודקוד חדש v, שקשתותיו הם קשתות G וכל הקשתות האפשריות בין v לקודקודי G.
הוכיחו שב- H יש מעגל אוילר.

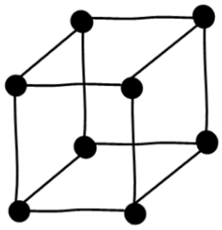
19) הוכיחו או הפריכו: אם $G=(V,E)$ אוילרי דו צדדי, אז: $|V|\in\mathbb{N}_{even}$.
(שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי)

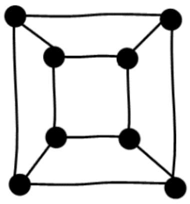
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

איזומורפיזם

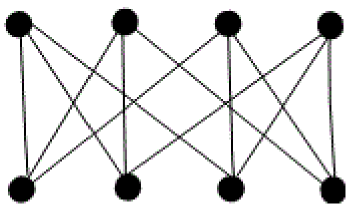
שאלות

1) הוכיחו כי הגרפים הבאים איזומורפיים זה לזה.
זה אומר שגרף הקובייה התלת מימדי הוא מישורי (כלומר, ניתן לשכן אותו במישור [למצוא גרף איזומורפי לו] מבלי שאף צלע חותכת צלע אחרת).



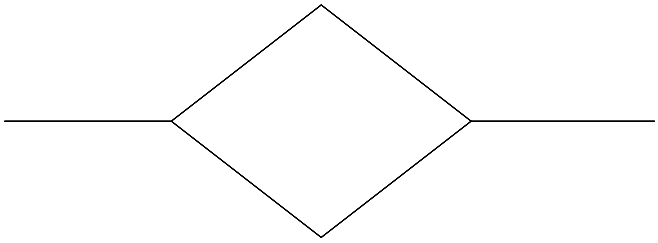


2) הוכיחו כי ניתן לשכן במישור את הגרף הבא.
כלומר, קיים גרף G איזומורפי לו, מבלי שאף צלע ב- G חותכת צלע אחרת.

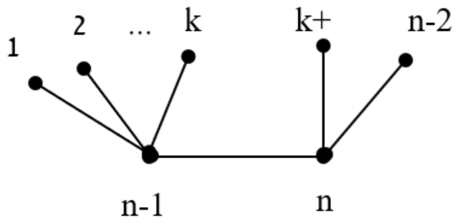


3) יהיו G_1, G_2 שני גרפים איזומורפיים.
הוכיחו כי G_1 חסר מעגלים $\Leftrightarrow$ G_2 חסר מעגלים, והסיקו כי G_1 עץ $\Leftrightarrow$ G_2 עץ.

4) כמה גרפים שונים זה מזה ואיזומורפיים לגרף שמצויר להלן אפשר לבנות על קבוצת הקודקודים $\{a,b,c,d,e,f\}$?

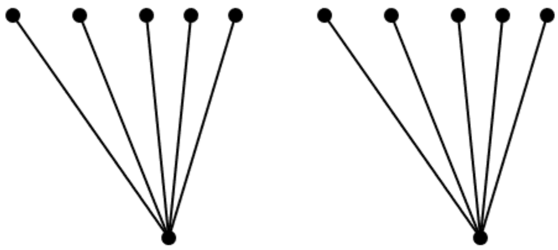


5) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,...,n\}$ איזומורפיים לגרף הבא:



תנו תשובה לכל k,n טבעיים המקיימים $2\le k\le n-3$.
הפרידו בין המקרים $n=2k+2$, $n\ne 2k+2$.

6) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים $V=\{v_1,v_2,...,v_{12}\}$ איזומורפים לגרף הבא:



7) הוכיחו או הפריכו:
אם לשני גרפים אותה רשימת דרגות (כלומר, אם נסדר את דרגות קודקודי כל אחד מהגרפים בסדר עולה, נקבל אותה סדרה), אז הגרפים איזומורפיים.

8) נגדיר C_n להיות מעגל על n קודקודים.
לאילו ערכים של n מתקיים ש- C_n איזומורפי ל- $\bar{C}_n$?
(כאשר $\bar{C}_n$ הוא הגרף המשלים)

9) יהי T עץ.
מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה מאתגרת)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il