

# מתמטיקה א



## תוכן העניינים

|     |                                                                      |     |
|-----|----------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.  | מבוא לאלגברה.....                                                    | 1   |
| 2.  | משוואות אלגבריות.....                                                | 47  |
| 3.  | אי שוויונים אלגבריים.....                                            | 64  |
| 4.  | חוקי החזקות והשורשים.....                                            | 78  |
| 5.  | משוואות ואי-שוויונים מעריכיים.....                                   | 88  |
| 6.  | חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים.....                 | 90  |
| 7.  | בעיות גדילה ודעיכה.....                                              | 93  |
| 8.  | סדרות.....                                                           | 106 |
| 9.  | הפונקציות האלמנטריות..... (ללא ספר)                                  |     |
| 10. | גבולות..... (ללא ספר)                                                |     |
| 11. | חישוב נגזרת של פונקציה.....                                          | 124 |
| 12. | חקירת פונקציה.....                                                   | 128 |
| 13. | גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר.....                                  | 129 |
| 14. | חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים.....                               | 154 |
| 15. | חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום.....                        | 169 |
| 16. | חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש.....                      | 182 |
| 17. | חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות.....                            | 216 |
| 18. | חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות.....                          | 232 |
| 19. | חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת..... (ללא ספר) |     |

# מתמטיקה א

## פרק 1 - מבוא לאלגברה

### תוכן העניינים

|    |                                           |
|----|-------------------------------------------|
| 1  | מספרים מכוונים                            |
| 5  | חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים           |
| 7  | סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים        |
| 8  | שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים            |
| 14 | כפל וחילוק שברים                          |
| 16 | חיבור וחסור שברים                         |
| 20 | בעיות יסודיות באחוזים                     |
| 22 | חזרה על תבניות מספר                       |
| 24 | כינוס איברים                              |
| 26 | פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים        |
| 28 | פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר |
| 30 | פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים          |
| 33 | פירוק הטרינום                             |
| 35 | שברים אלגברים                             |
| 39 | כפל וחילוק של שברים אלגברים               |
| 41 | חיבור וחסור של שברים אלגברים              |
| 45 | שברים כפולים                              |

## מספרים מכוונים:

### סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2-, ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

### כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שונים סימן - התוצאה תהיה שלילית.

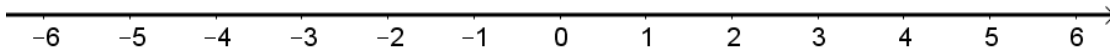
### הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

## שאלות:

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}, 4, 1\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}, -2$$



(2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $-3-2$

א.  $3+2$

ד.  $-3+2$

ג.  $3-2$

ו.  $7+10$

ה.  $-1-4$

ח.  $-7+3$

ז.  $-6+5$

(3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $5-8-12+17$

א.  $5+7-23+1$

ד.  $-4-11+2+9$

ג.  $3-14+2+6$

ו.  $-7-13+5-3$

ה.  $6-21+3-7$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $4 \cdot (-7)$

א.  $4 \cdot 9$

ד.  $(-5) \cdot (-3)$

ג.  $(-6) \cdot (-5)$

ו.  $(-8) \cdot 5$

ה.  $(-2) \cdot 8$

ח.  $2 \cdot 3 \cdot 3$

ז.  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$

י.  $(-2) \cdot (-3) \cdot 3$

ט.  $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$

יב.  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2)$

יא.  $2 \cdot 3 \cdot (-3)$

יד.  $1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

יג.  $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה :

א.  $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ב.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot (-5)$

ג.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ד.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב.  $(-30) : 3$

א.  $(-25) : (-5)$

ד.  $(-32) : (-4)$

ג.  $40 : (-10)$

ו.  $4 : (-16)$

ה.  $(-6) : 18$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב.  $\frac{42}{-6}$

א.  $\frac{-60}{12}$

ד.  $\frac{-12}{-3}$

ג.  $\frac{32}{-4}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות :

ב.  $(-2) \cdot 0$

א.  $0 : 5$

ד.  $6 : 0$

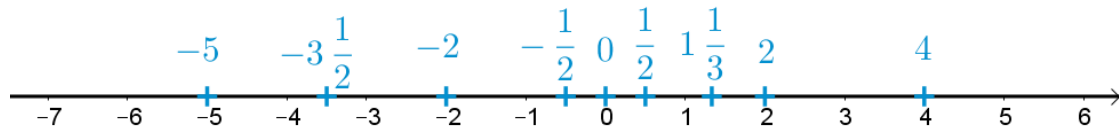
ג.  $0 \cdot (-3) \cdot 4$

ו.  $0 - 4$

ה.  $0 + 4$

## תשובות סופיות:

(1) להלן מערכת הצירים:



|                   |                   |             |         |        |            |
|-------------------|-------------------|-------------|---------|--------|------------|
|                   | ה. -5             | ד. -1       | ג. 1    | ב. -5  | א. 5 (2)   |
|                   |                   |             | ח. -4   | ז. -1  | ו. 17      |
| ו. -18            | ה. -19            | ד. -4       | ג. -3   | ב. 2   | א. -10 (3) |
|                   | ה. -16            | ד. 15       | ג. 30   | ב. -28 | א. 36 (4)  |
|                   | י. 18             | ט. 18       | ח. 18   | ז. -18 | ו. -40     |
|                   |                   | יד. 16      | יג. -16 | יב. 36 | יא. -18    |
|                   |                   | ד. -        | ג. -    | ב. +   | א. + (5)   |
| ו. $-\frac{1}{4}$ | ה. $-\frac{1}{3}$ | ד. 8        | ג. -4   | ב. -10 | א. 5 (6)   |
|                   |                   | ד. 4        | ג. -8   | ב. -7  | א. -5 (7)  |
| ו. -4             | ה. 4              | ד. לא מוגדר | ג. 0    | ב. 0   | א. 0 (8)   |

## חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

כאשר  $a$  נקרא הבסיס ו- $n$  נקראת החזקה.

#### הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

#### הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר  $a$  נקרא הבסיס ו- $n$  נקרא סדר השורש.

#### הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

## שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |              |               |
|--------------|---------------|
| א. $3^2$     | ב. $3^3$      |
| ג. $(-3)^3$  | ד. $(-2)^3$   |
| ה. $4^3$     | ו. $3^4$      |
| ז. $(-5)^3$  | ח. $10^4$     |
| ט. $-(-3)^4$ | י. $-5^4$     |
| יא. $-4^3$   | יב. $-(-2)^6$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| א. $\sqrt[3]{-27}$ | ב. $\sqrt[4]{625}$   |
| ג. $\sqrt[4]{-16}$ | ד. $\sqrt[5]{-32}$   |
| ה. $-\sqrt[4]{81}$ | ו. $-\sqrt[3]{1000}$ |

## תשובות סופיות:

- |           |          |             |         |         |         |
|-----------|----------|-------------|---------|---------|---------|
| (1) א. 9  | ב. 27    | ג. -27      | ד. -8   | ה. 64   | ו. 81   |
| ז. -125   | ח. 10000 | ט. -81      | י. -625 | יא. -64 | יב. -64 |
| (2) א. -3 | ב. 5     | ג. לא מוגדר | ד. -2   | ה. -3   | ו. -10  |

## סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

### סיכום כללי:

#### סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

### שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

|                                                                                                                  |                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $(-3)^2 : 9 - 2 \cdot (-4^2)$ (2)                                                                                | $\sqrt{81} + 3 \cdot 2^3 - 40 : 8$ (1)                |
| $3 + 4 \cdot [-3 + 4 \cdot (-2)] + \sqrt{10} + 6$ (4)                                                            | $\sqrt{144} - 20 : 4 + 3 \cdot (-2)^2$ (3)            |
| $-\sqrt{9} + 5^2 : (-4 - 1) - 24 : 12 \cdot 3$ (6)                                                               | $(-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3$ (5)                  |
| $\sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3$ (8)                                                                  | $-2^5 : (-8) + 4^2 - 3 \cdot 5$ (7)                   |
| $(8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt[5]{243})$ (10)                                                   | $[6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5$ (9) |
| $\frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\}$ (11) |                                                       |

### תשובות סופיות:

|         |         |          |         |
|---------|---------|----------|---------|
| -37 (4) | 19 (3)  | 33 (2)   | 28 (1)  |
| -21 (8) | 5 (7)   | -14 (6)  | 31 (5)  |
|         | 20 (11) | -44 (10) | -16 (9) |

## שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

### סיכום כללי:

### הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

### ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

### שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ... שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים שלמים}}.\underbrace{YYY}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

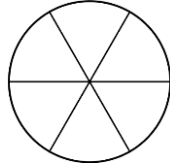
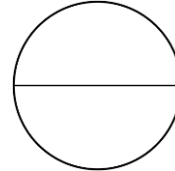
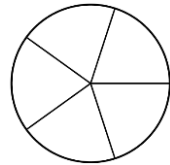
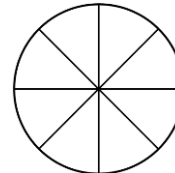
### אחוזים - הגדרה:

השבר  $\frac{1}{100}$  מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר  $\frac{45}{100}$  יכתב: 45%, והשבר  $\frac{145}{100}$  יכתב: 145%.

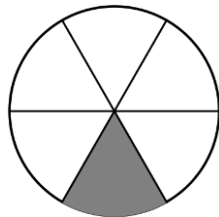
## שאלות:

(1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

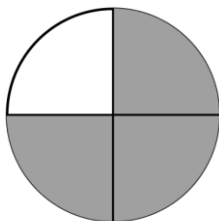
ב. צבע  $\frac{1}{6}$  מהעיגולא. צבע  $\frac{1}{2}$  מהעיגולד. צבע  $\frac{2}{5}$  מהעיגולג. צבע  $\frac{3}{8}$  מהעיגול

(2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

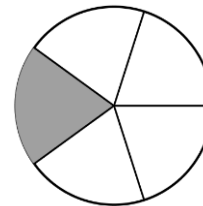
ב. שבר:



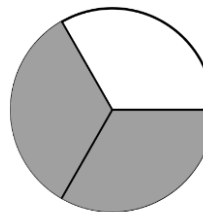
ד. שבר:



א. שבר:



ג. שבר:



(3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר  $\frac{1}{2}$  לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.ב. השבר  $\frac{3}{5}$  לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.ג. השבר  $\frac{5}{8}$  לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

(4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן :

|                    |                    |                    |                     |
|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| א. $\frac{25}{30}$ | ב. $\frac{10}{30}$ | ג. $\frac{6}{24}$  | ד. $\frac{4}{20}$   |
| ה. $\frac{35}{56}$ | ו. $\frac{24}{42}$ | ז. $\frac{36}{48}$ | ח. $\frac{33}{121}$ |

(5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים :

|                    |                    |                   |                   |
|--------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| א. $-\frac{20}{3}$ | ב. $\frac{19}{4}$  | ג. $\frac{12}{5}$ | ד. $\frac{22}{5}$ |
| ה. $-\frac{34}{6}$ | ו. $-\frac{50}{7}$ | ז. $\frac{47}{8}$ | ח. $\frac{60}{9}$ |

(6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים :

|                    |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| א. $1\frac{2}{3}$  | ב. $3\frac{5}{6}$  | ג. $4\frac{1}{2}$  | ד. $6\frac{1}{4}$  |
| ה. $11\frac{3}{4}$ | ו. $-2\frac{5}{8}$ | ז. $-6\frac{2}{7}$ | ח. $12\frac{7}{9}$ |

(7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים :

|                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| א. $\frac{4}{10}$ או $\frac{3}{10}$ | ב. $\frac{7}{6}$ או $\frac{7}{8}$   |
| ג. $\frac{5}{6}$ או $\frac{2}{3}$   | ד. $\frac{7}{12}$ או $\frac{5}{18}$ |

(8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים :

|          |         |          |           |
|----------|---------|----------|-----------|
| א. 0.7   | ב. 0.07 | ג. 0.007 | ד. 0.34   |
| ה. 0.304 | ו. 0.65 | ז. 1.2   | ח. 1.02   |
| ט. 1.42  | י. 3.5  | יא. 6.03 | יב. 5.125 |

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים :

|                     |                    |                     |                      |
|---------------------|--------------------|---------------------|----------------------|
| א. $\frac{3}{10}$   | ב. $\frac{3}{100}$ | ג. $\frac{3}{1000}$ | ד. $\frac{23}{1000}$ |
| ה. $\frac{1}{2}$    | ו. $\frac{3}{4}$   | ז. $\frac{2}{5}$    | ח. $\frac{4}{25}$    |
| ט. $\frac{7}{50}$   | י. $\frac{3}{20}$  | יא. $\frac{7}{8}$   | יב. $\frac{9}{16}$   |
| יג. $9\frac{1}{10}$ | יד. $3\frac{1}{5}$ | טו. $4\frac{7}{8}$  | טז. $-4\frac{1}{16}$ |

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית (היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית) :

|                  |                  |                  |                   |
|------------------|------------------|------------------|-------------------|
| א. $\frac{2}{3}$ | ב. $\frac{5}{6}$ | ג. $\frac{3}{7}$ | ד. $\frac{2}{11}$ |
|------------------|------------------|------------------|-------------------|

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים :

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| א. 25%  | ב. 32% | ג. 64%  | ד. 80%  |
| ה. 120% | ו. 5%  | ז. 300% | ח. 150% |

12) המר משברים פשוטים לאחוזים :

|                    |                     |                  |                   |
|--------------------|---------------------|------------------|-------------------|
| א. $\frac{3}{4}$   | ב. $\frac{1}{8}$    | ג. $\frac{4}{5}$ | ד. $\frac{7}{20}$ |
| ה. $\frac{11}{40}$ | ו. $\frac{70}{125}$ | ז. $\frac{5}{6}$ | ח. $\frac{4}{9}$  |

## תשובות סופיות:

(1) תשובה מודגמת בסרטון.

$$(2) \quad \text{א. } \frac{1}{5} \quad \text{ב. } \frac{1}{6} \quad \text{ג. } \frac{2}{3} \quad \text{ד. } \frac{3}{4}$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80} \quad \text{ב. } \frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300} \quad \text{ג. } \frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700}$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{5}{6} \quad \text{ב. } \frac{1}{3} \quad \text{ג. } \frac{1}{4} \quad \text{ד. } \frac{1}{5} \quad \text{ה. } \frac{5}{8} \quad \text{ו. } \frac{4}{7}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{4} \quad \text{ח. } \frac{3}{11}$$

$$(5) \quad \text{א. } -6\frac{2}{3} \quad \text{ב. } 4\frac{3}{4} \quad \text{ג. } 2\frac{2}{5} \quad \text{ד. } 4\frac{2}{5} \quad \text{ה. } -5\frac{4}{6} \quad \text{ו. } -7\frac{1}{7}$$

$$\text{ז. } 5\frac{7}{8} \quad \text{ח. } 6\frac{2}{3}$$

$$(6) \quad \text{א. } \frac{5}{3} \quad \text{ב. } \frac{23}{6} \quad \text{ג. } \frac{9}{2} \quad \text{ד. } \frac{25}{4} \quad \text{ה. } \frac{47}{4} \quad \text{ו. } -\frac{21}{8}$$

$$\text{ז. } -\frac{44}{7} \quad \text{ח. } \frac{115}{9}$$

$$(7) \quad \text{א. } \frac{4}{10} \quad \text{ב. } \frac{7}{6} \quad \text{ג. } \frac{5}{6} \quad \text{ד. } \frac{7}{12}$$

$$(8) \quad \text{א. } \frac{7}{10} \quad \text{ב. } \frac{7}{100} \quad \text{ג. } \frac{7}{1000} \quad \text{ד. } \frac{17}{50} \quad \text{ה. } \frac{38}{125} \quad \text{ו. } \frac{13}{20}$$

$$\text{ז. } 1\frac{1}{5} \quad \text{ח. } 1\frac{1}{50} \quad \text{ט. } 1\frac{21}{50} \quad \text{י. } 3\frac{1}{2} \quad \text{יא. } 6\frac{3}{100} \quad \text{יב. } 5\frac{1}{8}$$

$$(9) \quad \text{א. } 0.3 \quad \text{ב. } 0.03 \quad \text{ג. } 0.003 \quad \text{ד. } 0.023 \quad \text{ה. } 0.5 \quad \text{ו. } 0.75$$

$$\text{ז. } 0.4 \quad \text{ח. } 0.16 \quad \text{ט. } 0.14 \quad \text{י. } 0.15 \quad \text{יא. } 0.875$$

$$\text{יב. } 0.5625 \quad \text{יג. } 9.1 \quad \text{יד. } 3.2 \quad \text{טו. } 4.875 \quad \text{טז. } -4.0625$$

$$(10) \quad \text{א. } 0.\bar{6} \quad \text{ב. } 0.8\bar{3} \quad \text{ג. } 0.428 \quad \text{ד. } 0.1\bar{8}$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{4} \quad \text{ב. } \frac{8}{25} \quad \text{ג. } \frac{16}{25} \quad \text{ד. } \frac{4}{5} \quad \text{ה. } 1\frac{1}{5} \quad \text{ו. } \frac{1}{20}$$

$$\text{ז. } 3 \quad \text{ח. } 1\frac{1}{2}$$

12) א. 75%    ב. 12.5%    ג. 80%    ד. 35%    ה. 27.5%    ו. 56%

ז. 83.333%    ח. 44.444%

## כפל וחילוק שברים:

### סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

### שאלות:

#### (1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

|                                      |                                      |                                      |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| א. $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$   | ב. $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$   | ג. $\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10}$  |
| ד. $3 \cdot \frac{4}{5}$             | ה. $6 \cdot \frac{2}{3}$             | ו. $\frac{12}{25} \cdot 5$           |
| ז. $1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$ | ח. $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$ | ט. $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{2}{5}$ |
| י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$      | יא. $\frac{4}{5^3}$                  | יב. $\frac{4^3}{5}$                  |

#### (2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

|                                |                                  |                                   |
|--------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| א. $\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$ | ב. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$   | ג. $\frac{3}{25} : \frac{7}{10}$  |
| ד. $8 : \frac{2}{9}$           | ה. $10 : \frac{2}{3}$            | ו. $\frac{5}{6} : 3$              |
| ז. $\frac{2}{5} : 5$           | ח. $3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$ | ט. $2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{15}$ |

## תשובות סופיות:

|                   |                    |                    |                     |                     |                     |
|-------------------|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| א. $\frac{9}{20}$ | ב. $\frac{5}{21}$  | ג. $\frac{8}{45}$  | ד. $2\frac{2}{5}$   | ה. 4                | ו. $2\frac{2}{5}$   |
| ז. $3\frac{3}{5}$ | ח. $15\frac{2}{5}$ | ט. $8\frac{8}{35}$ | י. $\frac{64}{125}$ | יא. $\frac{4}{125}$ | יב. $12\frac{4}{5}$ |
| א. $\frac{9}{10}$ | ב. $1\frac{1}{2}$  | ג. $\frac{6}{35}$  | ד. 36               | ה. 15               | ו. $\frac{5}{18}$   |
| ז. $\frac{2}{25}$ | ח. $\frac{2}{3}$   | ט. 2               |                     |                     |                     |

## חיבור וחיסור שברים:

### סיכום כללי:

#### כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים  $a$  ו- $b$ , המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

#### הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

#### כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.  
 דוגמא:  $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = \frac{-1}{7}$ ,  $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$
- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.  
 דוגמא:  $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3-10}{12} = \frac{-7}{12}$ ,  $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$
- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.  
 דוגמא:  $3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$   
 חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.  
 דוגמא:  $3 - \frac{1}{4} = 2\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$   
 דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה:  $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

- חיבור וחסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

$$\text{דוגמא: } 3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} = \frac{17}{5} + \frac{13}{6} = \frac{17 \cdot 6}{30} + \frac{13 \cdot 5}{30} = \frac{102 + 65}{30} = \frac{167}{30} = 5\frac{17}{30}$$

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

$$\text{דוגמא: } 2\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3} = (2 - 5) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = -3 + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = -3 + \frac{5}{12} = -2\frac{7}{12}$$

## שאלות:

- (1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

|           |          |              |             |
|-----------|----------|--------------|-------------|
| א. 2 ו-3  | ב. 2 ו-4 | ג. 3 ו-5     | ד. 6 ו-10   |
| ה. 4 ו-10 | ו. 4 ו-6 | ז. 3, 5 ו-10 | ח. 2, 3 ו-8 |

- (2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

|                                              |                                                 |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| א. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$               | ב. $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$                  |
| ג. $\frac{4}{13} + \frac{9}{13}$             | ד. $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$                  |
| ה. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$               | ו. $\frac{8}{9} - \frac{7}{9}$                  |
| ז. $\frac{2}{12} - \frac{5}{12}$             | ח. $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}$                  |
| ט. $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$ | י. $\frac{7}{15} + \frac{8}{15} - \frac{6}{15}$ |

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$

ב.  $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$

ג.  $\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$

ד.  $\frac{3}{6} - \frac{5}{8}$

ה.  $\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$

ו.  $\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$

ז.  $\frac{4}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

ח.  $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{3}{5}$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $2 + \frac{5}{6}$

ב.  $2 - \frac{5}{6}$

ג.  $2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$

ד.  $2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$

ה.  $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$

ו.  $5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$

ז.  $2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$

ח.  $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 2\frac{1}{3}$

ב.  $\frac{3}{14} : \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - \frac{2}{5}$

ג.  $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4} - 6 : \frac{2}{5}$

ד.  $2\frac{4}{5} : \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{6}$

ה.  $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$

## תשובות סופיות:

|                     |                       |                      |                       |                      |                          |
|---------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|--------------------------|
| 12. ו.              | 20. ה.                | 30. ד.               | 15. ג.                | 4. ב.                | 6. א. (1                 |
|                     |                       |                      |                       | 24. ח.               | 30. ז.                   |
| $\frac{1}{9}$ . ו.  | $\frac{1}{2}$ . ה.    | $1\frac{3}{4}$ . ד.  | 1. ג.                 | $\frac{7}{9}$ . ב.   | $\frac{4}{5}$ . א. (2    |
|                     |                       | $\frac{3}{5}$ . י.   | $1\frac{5}{8}$ . ט.   | $-\frac{4}{5}$ . ח.  | $-\frac{1}{4}$ . ז.      |
| $3\frac{5}{6}$ . ו. | 5. ה.                 | $-\frac{1}{8}$ . ד.  | $\frac{7}{12}$ . ג.   | $\frac{7}{10}$ . ב.  | $1\frac{5}{6}$ . א. (3   |
|                     |                       |                      |                       | $-\frac{1}{10}$ . ח. | $\frac{19}{21}$ . ז.     |
| $-\frac{5}{8}$ . ו. | $7\frac{11}{12}$ . ה. | $1\frac{5}{12}$ . ד. | $3\frac{1}{12}$ . ג.  | $1\frac{1}{6}$ . ב.  | $2\frac{5}{6}$ . א. (4   |
|                     |                       |                      |                       | $-\frac{1}{20}$ . ח. | $2\frac{13}{18}$ . ז.    |
|                     | $3\frac{5}{18}$ . ה.  | $2\frac{5}{6}$ . ד.  | $-13\frac{3}{4}$ . ג. | $1\frac{1}{10}$ . ב. | $2\frac{11}{24}$ . א. (5 |

## בעיות יסודיות באחוזים:

### סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה:  $48 = 120 \cdot \frac{40}{100}$ , כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48.**

### שאלות:

- (1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
  - א. כמה בנות בכיתה?
  - ב. כמה בנים בכיתה?
- (2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
  - א. כמה תלמידים בכיתה?
  - ב. כמה בנים בכיתה?
- (3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
  - א. מהו מחירו בסוף העונה?
  - ב. מה גודל ההנחה?
- (4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
  - א. מה מחירו הסופי?
  - ב. מה גודל ההתייקרות?
- (5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
  - א. מה מחירו בסוף השנה?
  - ב. בפסח מועלה מחירו ב-7%.
- (6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
  - א. מה מחירו בסוף השנה?
  - ב. מה מחירו בתחילת השנה?

### 7) ענה על השאלות הבאות :

- א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.  
מה אחוז הבנים בקהל?
- ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.  
מה אחוז הבנות בכיתה?
- ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.  
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.  
בכמה אחוזים הוזל המוצר?
- ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.  
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.  
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

### תשובות סופיות:

- |                   |             |
|-------------------|-------------|
| 1) א. 18 בנות.    | ב. 12 בנים. |
| 2) א. 40 תלמידים. | ב. 12 בנים. |
| 3) א. 240 ₪       | ב. 60 ₪     |
| 4) א. 540 ₪       | ב. 40 ₪     |
| 5) 4.9755 ₪       |             |
| 6) 400 ₪          |             |
| 7) א. 88%         | ב. 60%      |
|                   | ג. 50%      |
|                   | ד. 33.33%   |
|                   | ה. 33.33%   |
|                   | ו. 25%      |

## חזרה על תבניות מספר:

### סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).

ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של  $x$  פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של  $3 \cdot x$  אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

### שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- $x$  הנתון:

- |                            |                           |
|----------------------------|---------------------------|
| א. $2x+5$ כאשר $x=3$       | ב. $x^2+3x$ כאשר $x=2$    |
| ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$  | ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$ |
| ה. $x^3+1$ כאשר $x=-2$     | ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$    |
| ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$ | ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- $x$  הנתון:

- א.  $27x^5-2x^3+x$  כאשר  $x=\frac{1}{3}$ .
- ב.  $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$  כאשר  $x=-\frac{2}{3}$ .

(3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר :

|                                  |                                                           |
|----------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| א. $a^2 + 2ab + b^2$             | עבור : $a = 3, b = -5$                                    |
| ב. $(x - 3)^2 + 3x^2b$           | עבור : $x = 5, b = -1$                                    |
| ג. $-x^3 - 2xy + y^4$            | עבור : $x = -2, y = -1$                                   |
| ד. $\frac{(a - 2c)^4}{a} - a^2$  | עבור : $a = 2, c = -2$                                    |
| ה. $\frac{4a^2 - 3b}{c}$         | עבור : $a = -1, b = 2, c = -4$                            |
| ו. $\sqrt{c - 3a}$               | עבור : $c = 13, a = -1$ ועבור : $c = 82, a = \frac{1}{3}$ |
| ז. $\frac{p^3 + 2\sqrt{q+1}}{m}$ | עבור : $p = -5, q = 48, m = 3$                            |

### תשובות סופיות:

|     |                                   |                     |        |        |                  |      |
|-----|-----------------------------------|---------------------|--------|--------|------------------|------|
| (1) | א. 11                             | ב. 10               | ג. -12 | ד. -65 | ה. -7            | ו. 5 |
|     | ז. -10                            | ח. 45               |        |        |                  |      |
| (2) | א. $\frac{10}{27}$                | ב. $5\frac{22}{27}$ |        |        |                  |      |
| (3) | א. 4                              | ב. -71              | ג. 5   | ד. 644 | ה. $\frac{1}{2}$ |      |
|     |                                   |                     |        | ז. -37 |                  |      |
|     | ו. הצבה ראשונה : 4, הצבה שניה : 9 |                     |        |        |                  |      |

## כינוס איברים:

### סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא:  $3x + 6x - 5x = (3 + 6 - 5)x = 4x$ .  
 איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.  
 כך:  $3x$  שונה מ- $4y$  ושונה מ- $2xy$ . באותו האופן, האיברים  $x$  ו- $x^2$  הם שונים.

### שאלות:

כנס איברים דומים:

- |                                                                                               |                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $9x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x^2$ (2)                                                               | $5x + 7x - 4x$ (1)                             |
| $x^2y - 3yx^2 + x^2y$ (4)                                                                     | $-10xy + 15xy + xy - 2yx$ (3)                  |
| $2x^2 - 3m^2 - x^2 + 3m^2$ (6)                                                                | $8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2$ (5)            |
| $mn^2 + 4m^2n + 6n^2m - 10nm^2 + mn^2$ (8)                                                    | $3xy + y - 30y + 6yx - 7y$ (7)                 |
| $y^2 + x^2 - 5x^2 + 5y^2 + 4x^2 - 6y^2$ (10)                                                  | $-6 + x^3 + 4 - 3x^3 + 17x^3 - 17$ (9)         |
| $5xy + 2x - 3yx - x + 1$ (12)                                                                 | $7x^2 - 3x - 4x + 2$ (11)                      |
| $x + xy + y - 6yx - 6y - 6x$ (14)                                                             | $3 - x - x^2 + 4x + 5x^2 - 12$ (13)            |
| $ab^2 + 6ba^2 - 6b + 16a^2b + 3b - 6b^2a$ (16)                                                | $mn + n - 5m + 5nm - 14n + 3m$ (15)            |
| $4x^2z + 6xz^2 - 6 - xz^2 + 12 + 10zx^2$ (18)                                                 | $z^3 - 4z^2 + 7 - z^3 - 8 + 8z^2$ (17)         |
| $x^3 - 3x - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$ (20)                                                | $2 - x^3 - 3 - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2$ (19) |
| $12x^2y^3 + 13a^2 - 20x^2y^3 + 2a^2$ (22)                                                     | $2a^2b + 3x^2y + 5a^2b + 10x^2y$ (21)          |
| $-2x^3y + 5x^2 - 4yx^3 - 6x^2$ (24)                                                           | $2y^2 - 4x^3y^2 - 10y^2 - x^3y^2$ (23)         |
| $5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2$ (26)                                                        | $2a^2b + 2b + 3a^2 + 5b$ (25)                  |
| $-12x^2 + 2y^2 + 3x^2y + 14xy^2 - 5xy^2 - 6y^2 + 2xy + 11x^2 + x^2y - 9xy$ (27)               |                                                |
| $21x^3y^3 + x^2y^2 - 3xy^3 + x^3y - 15x^2y^2 - 7x^3y + 12x^3y^3 - 4xy^3 + 4xy^3 - 6x^3y$ (28) |                                                |

## תשובות סופיות:

- |                           |                        |                                             |
|---------------------------|------------------------|---------------------------------------------|
| $4xy$ (3)                 | $2x^2$ (2)             | $8x$ (1)                                    |
| $x^2$ (6)                 | $4a^2 - a$ (5)         | $-x^2y$ (4)                                 |
| $15x^3 - 19$ (9)          | $8mn^2 - 6nm^2$ (8)    | $9xy - 36y$ (7)                             |
| $2xy + x + 1$ (12)        | $7x^2 - 7x + 2$ (11)   | $0$ (10)                                    |
| $-13n - 2m + 6mn$ (15)    | $-5x - 5y - 5xy$ (14)  | $4x^2 + 3x - 9$ (13)                        |
| $14x^2z + 5xz^2 + 6$ (18) | $4z^2 - 1$ (17)        | $-5ab^2 + 22a^2b - 3b$ (16)                 |
| $7a^2b + 13x^2y$ (21)     | $-3x^2 - x$ (20)       | $-3x^2 + 2x - 3$ (19)                       |
| $-6x^3y - x^2$ (24)       | $-8y^2 - 5x^3y^2$ (23) | $-8x^2y^3 + 15a^2$ (22)                     |
|                           | $25a^2b - 22ab^2$ (26) | $2a^2b + 3a^2 + 7b$ (25)                    |
|                           |                        | $-x^2 - 4y^2 + 4x^2y + 9xy^2 - 7xy$ (27)    |
|                           |                        | $33x^3y^3 - 14x^2y^2 - 3xy^3 - 12x^3y$ (28) |

## פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

### סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

$$\bullet a(b+c) = ab+ac$$

$$\bullet (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

|                      |                         |                                        |
|----------------------|-------------------------|----------------------------------------|
| א. $2x \cdot 3x$     | ב. $-4x \cdot (-7x)$    | ג. $-2x \cdot (-4x) \cdot (-3)$        |
| ד. $8m^2 \cdot 4m^3$ | ה. $3a^3 \cdot (-2a^2)$ | ו. $-b \cdot 4b^2 \cdot \frac{b^2}{2}$ |
| ז. $a \cdot 3b$      | ח. $4a^2 \cdot 7b^2$    | ט. $ab \cdot (-2a^2b)$                 |

(2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

|                     |                            |
|---------------------|----------------------------|
| א. $2(3x-4)$        | ב. $2(-3x^2+5x-1)$         |
| ג. $(7x-2)4$        | ד. $(1-2x)(-2)$            |
| ה. $a(3a-1)$        | ו. $b(b^2-3b+4)$           |
| ז. $2x(5x+3)$       | ח. $5x(x^2+2x-3)$          |
| ט. $3t^2(4t-t^2+6)$ | י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$ |

(3) פשט את הביטויים הבאים:

|                        |                            |
|------------------------|----------------------------|
| א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$ | ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$ |
| ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$   | ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$ |

$$\begin{aligned} & \text{ה. } (3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2 \\ & \text{ו. } 3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7 \end{aligned}$$

(4) פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{aligned} & \text{א. } (x-1)(x+2) \quad \text{ב. } (x+3)(x-7) \\ & \text{ג. } (3-x)(x+4) \quad \text{ד. } (3x+4)(5x+1) \\ & \text{ה. } 3(4x+1)(2x-3) \quad \text{ו. } -2(3x-1)(5-2x) \end{aligned}$$

(5) פשט את ערכי הביטויים הבאים :

$$\begin{aligned} & \text{א. } (x-1)(x+3)+2(3-x) \\ & \text{ב. } (a+4)(a-2)-(a+5)(a-3) \\ & \text{ג. } (2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6) \\ & \text{ד. } -x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2) \end{aligned}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{aligned} & \text{(1) א. } 6x^2 \quad \text{ב. } 28x^2 \quad \text{ג. } -24x^2 \quad \text{ד. } 32m^5 \quad \text{ה. } -6a^5 \quad \text{ו. } -2b^5 \\ & \quad \text{ז. } 3ab \quad \text{ח. } 28a^2b^2 \quad \text{ט. } -2a^3b^2 \\ & \text{(2) א. } 6x-8 \quad \text{ב. } -6x^2+10x-2 \quad \text{ג. } 28x-8 \quad \text{ד. } -2+4x \\ & \quad \text{ה. } 3a^2-a \quad \text{ו. } b^3-3b^2+4b \quad \text{ז. } 10x^2+6x \quad \text{ח. } 5x^3+10x^2-15x \\ & \quad \text{ט. } 12t^3-3t^4+18t^2 \quad \text{י. } 10d^5-7.5d^2 \\ & \text{(3) א. } 6x-6 \quad \text{ב. } 13x-6 \quad \text{ג. } -6x+11 \quad \text{ד. } x+9 \quad \text{ה. } -3x^2+33x-28 \\ & \quad \text{ו. } 10y^2+32y-27 \\ & \text{(4) א. } x^2+x-2 \quad \text{ב. } x^2-4x-21 \quad \text{ג. } -x^2-x+12 \\ & \quad \text{ד. } 15x^2+23x+4 \quad \text{ה. } 24x^2-30x-9 \quad \text{ו. } 12x^2-34x+10 \\ & \text{(5) א. } x^2+3 \quad \text{ב. } 7 \quad \text{ג. } 18m^2-6m-39 \quad \text{ד. } -3x^5y^3+3x^4y^2 \end{aligned}$$

## פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

### סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש:  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ .
- נוסחה להפרש ריבועים:  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ .

### שאלות:

#### (1) פשט את הביטויים הבאים:

- |                |                  |                    |
|----------------|------------------|--------------------|
| א. $(x+5)^2$   | ב. $(x+2)^2$     | ג. $(4x+5)^2$      |
| ד. $(6x+2)^2$  | ה. $(7x+y)^2$    | ו. $(5x+2y)^2$     |
| ז. $(x^2+7)^2$ | ח. $(x^2+y^2)^2$ | ט. $(x^3+2y^2x)^2$ |

#### (2) פשט את הביטויים הבאים:

- |                |                                      |                                    |
|----------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| א. $(x-6)^2$   | ב. $(x-2)^2$                         | ג. $(5-x)^2$                       |
| ד. $(6x-1)^2$  | ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$   | ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$ |
| ז. $(3m-2n)^2$ | ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ | ט. $(x^2y^2-7)^2$                  |

#### (3) פשט את הביטויים הבאים:

- |                                                             |                                                               |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| א. $(x-5)(x+5)$                                             | ב. $(3+x)(x-3)$                                               |
| ג. $(3x-1)(3x+1)$                                           | ד. $(5-7x)(7x+5)$                                             |
| ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ | ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$ |
| ז. $(x^2+y)(x^2-y)$                                         | ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$                                   |

(4) פשט את הביטויים הבאים :

א.  $(x+1)(x+2)-3x$       ב.  $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$   
 ג.  $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$       ד.  $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$   
 ה.  $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$   
 ו.  $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

## תשובות סופיות:

(1) א.  $x^2+10x+25$       ב.  $x^2+4x+4$       ג.  $16x^2+40x+25$   
 ד.  $36x^2+24x+4$       ה.  $49x^2+14xy+y^2$       ו.  $25x^2+20xy+4y^2$   
 ז.  $x^4+14x+49$       ח.  $x^4+2x^2y^2+y^4$       ט.  $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$   
 (2) א.  $x^2-12x+36$       ב.  $x^2-4x+4$       ג.  $25-10x+x^2$   
 ד.  $36x^2-12x+1$       ה.  $9x^2-3x+\frac{1}{4}$       ו.  $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$   
 ז.  $9m^2-12mn+4n^2$       ח.  $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$       ט.  $x^4y^4-14x^2y^2+49$   
 (3) א.  $x^2-25$       ב.  $x^2-9$       ג.  $9x^2-1$       ד.  $25-49x^2$   
 ה.  $\frac{1}{4}x^2-36$       ו.  $25y^2-\frac{1}{16}x^2$       ז.  $x^4-y^2$       ח.  $9a^4b^6-16$   
 (4) א.  $x^2+2$       ב.  $5x^2-24x+13$       ג.  $-4x^2-x$   
 ד.  $18x^2-6xy$       ה.  $-6x^2-39x-16$       ו.  $-10x^2+17x+321$

## פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

### סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:

○ הוצאת מספר משותף:  $2x - 8 = 2(x - 4)$

○ הוצאת אות משותפת:  $x^2 - 12x = x(x - 12)$

○ הוצאת מספר ואות יחד:  $3x^2 - 21x = 3x(x - 7)$

- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:

○ נוסחת הבינום של ניוטון:  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

○ נוסחה להפרש ריבועים:  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

### שאלות:

- (1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א.  $3x - 12$       ב.  $6y - 4$

ג.  $20 - 8a$       ד.  $4a^3 + 8b$

ה.  $75m^2 + 25m + 15$       ו.  $40a^2 - 8b^2 + 64c^2$

- (2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א.  $y^2 + 5y$       ב.  $3x - 11x^3$

ג.  $6y^2 + 5y^3 + 4y$       ד.  $\frac{1}{2}a^7 - \frac{1}{4}a^5 + a^3$

(3) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

- |                                |                           |
|--------------------------------|---------------------------|
| א. $2x^2 - 8x$                 | ב. $3t^2 + 12t$           |
| ג. $5n^3 - 20n^2 + 50n$        | ד. $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$   |
| ה. $4x^2y^2 + 16x^2y - 20xy^2$ | ו. $27mn - 3n^2m + 9n^3m$ |

(4) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

- |                      |                       |
|----------------------|-----------------------|
| א. $x^2 + 10x + 25$  | ב. $x^2 + 12x + 36$   |
| ג. $y^2 - 18y + 81$  | ד. $y^2 - 22y + 121$  |
| ה. $4x^2 + 4x + 1$   | ו. $16y^2 - 8y + 1$   |
| ז. $9x^2 - 24x + 16$ | ח. $25x^2 + 70x + 49$ |

(5) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

- |                 |                    |
|-----------------|--------------------|
| א. $r^2 - 25$   | ב. $x^2 - 81$      |
| ג. $25y^2 - 49$ | ד. $121x^2 - 1$    |
| ה. $x^2y^2 - 4$ | ו. $9y^4 - 169x^4$ |

(6) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר :

- |              |                              |
|--------------|------------------------------|
| א. $y - y^3$ | ב. $x^3 - 10x^2 + 25x$       |
| ג. $m^4 - 1$ | ד. $196x^4 - 140x^3 + 25x^2$ |

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $3(x-4)$       ב.  $2(3y-2)$       ג.  $4(5-2a)$
- ד.  $4(a^3+2b)$       ה.  $5(15m^2+5m+3)$       ו.  $8(5a^2-b^2+8c^2)$
- (2) א.  $y(y+5)$       ב.  $x(3-11x^2)$       ג.  $y(6y+5y^2+4)$
- ד.  $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$
- (3) א.  $2x(x-4)$       ב.  $3t(t+4)$       ג.  $5n(n^2-4n+10)$
- ד.  $2y^2(4+3y-y^2)$       ה.  $4xy(xy+4x-5y)$       ו.  $3mn(9-n-3n^2)$
- (4) א.  $(x+5)^2$       ב.  $(x+6)^2$       ג.  $(y-9)^2$       ד.  $(y-11)^2$
- ה.  $(2x+1)^2$       ו.  $(4y-1)^2$       ז.  $(3x-4)^2$       ח.  $(5x+7)^2$
- (5) א.  $(r+5)(r-5)$       ב.  $(x+9)(x-9)$       ג.  $(5y+7)(5y-7)$
- ד.  $(11x+1)(11x-1)$       ה.  $(xy+2)(xy-2)$       ו.  $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$
- (6) א.  $y(1+y)(1-y)$       ב.  $x(x-5)^2$       ג.  $(m^2+1)(m+1)(m-1)$
- ד.  $x^2(14x-5)^2$

## פירוק הטרינום:

### סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה:  $ax^2 + bx + c$  כאשר  $a, b$  ו- $c$  הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר  $bx$  לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים,  $m_1$  ו- $m_2$ , שמקיימים:  $m_1 \cdot m_2 = ac$  ו- $m_1 + m_2 = b$ .  
לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום:  $ax^2 + bx + c = ax^2 + m_1x + m_2x + c$ .  
השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג:  $\underline{ax^2 + m_1x} + \underline{m_2x + c}$ .

### הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים  $m_1$  ו- $m_2$  באופן

הבא:  $m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,  $m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום

כמכפלה:  $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)(x - m_2)$ . אם קיים פתרון (שורש) אחד  $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$  אז

נכתוב:  $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)^2$  ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

### שאלות:

(1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

- |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| א. $x^2 + 5x + 4$   | ב. $x^2 - 8x + 15$  | ג. $x^2 - 33x + 62$ |
| ד. $2x^2 + 7x - 15$ | ה. $3x^2 - 11x + 6$ | ו. $6x^2 + 5x + 1$  |
| ז. $2x^2 + x - 6$   | ח. $x^2 - 18x + 81$ | ט. $x^2 + 2x + 8$   |

(2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

- |                      |                    |
|----------------------|--------------------|
| א. $6x^2 + 5x + 1$   | ב. $x^2 + 5x + 4$  |
| ג. $4x^2 + 20x + 25$ | ד. $3x^2 - x + 20$ |

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $(x+1)(x+4)$     ב.  $(x-3)(x-5)$     ג.  $(x-2)(x-31)$
- ד.  $(2x-3)(x+5)$     ה.  $(3x-2)(x-3)$     ו.  $(3x+1)(2x+1)$
- ז.  $(x+2)(2x-3)$     ח.  $(x-9)^2$     ט. אין פירוק.
- (2) א.  $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$     ב.  $(x+1)(x+4)$     ג.  $(2x+5)^2$     ד. אין פירוק.

## שברים אלגברים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

$$\text{דוגמא לשברים אלגבריים: } \frac{x+1}{x+2}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{4}{x-x^3}$$

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את

$$\text{הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: } \frac{3x+5}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

#### תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

$$\text{דוגמא: השבר } \frac{1}{x+4} \text{ לא מוגדר כאשר } x = -4 \text{ מכיוון שמתקבל: } \frac{1}{0}$$

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא:  $x \neq -4$  ומשמעו היא ש- $x$  יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט -4, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

#### כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

$$\bullet \text{ צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: } \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: } \frac{3x-15}{x^2-10x+25} = \frac{3(x-5)}{(x-5)^2} = \frac{3 \cdot 1}{x-5} = \frac{3}{x-5}$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י פירוק טרינום: } \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

## שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים :

|                         |                                  |
|-------------------------|----------------------------------|
| א. $\frac{x+4}{x+3}$    | ב. $\frac{5}{x-6}$               |
| ג. $\frac{x+7}{2x-8}$   | ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$        |
| ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$ | ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$           |
| ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$  | ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$ |

(2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע) :

|                        |                             |
|------------------------|-----------------------------|
| א. $\frac{ax}{a}$      | ב. $\frac{a-x}{a}$          |
| ג. $\frac{a-ax}{a}$    | ד. $\frac{x+1}{y+1}$        |
| ה. $\frac{x}{x+y}$     | ו. $\frac{6x}{6y}$          |
| ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$ | ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$ |
| ט. $\frac{4x^2y}{xy}$  | י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$     |

(3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם :

|                             |                                   |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| א. $\frac{3x+12}{x+4}$      | ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$         |
| ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$   | ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$         |
| ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$ | ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$       |
| ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$    | ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$ |

(4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

|                                         |                                             |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------|
| א. $\frac{x^2 + 10x + 25}{2x + 10}$     | ב. $\frac{8n - n^2}{n^2 - 16n + 64}$        |
| ג. $\frac{z^3 - 4z^2}{2z^2 - 16z + 32}$ | ד. $\frac{4m^2 + 20m + 25}{4m^2 + 10m}$     |
| ה. $\frac{18y^2 - 24y + 8}{2y - 3y^2}$  | ו. $\frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2}{3ab + 6b^2}$ |

(5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

|                                                              |                                                           |
|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| א. $\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10}$                             | ב. $\frac{m^2 - 12m + 32}{m - 4}$                         |
| ג. $\frac{4y - 10}{2y^2 + y - 15}$                           | ד. $\frac{3z^2 + 26z + 16}{3z + 2}$                       |
| ה. $\frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 9x^2}$                        | ו. $\frac{9n^2 - 12n}{4 + 5n - 6n^2}$                     |
| ז. $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6}$                       | ח. $\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + x - 56}$                  |
| ט. $\frac{3a^2b - 10ab^2 + 3b^3}{-3a^3b + 11a^2b^2 - 6ab^3}$ | י. $\frac{m^3n - m^2n^2 - m^2 + mn}{2m^2n^3 + mn^2 - 3n}$ |

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x \neq -3 \quad \text{ב. } x \neq 6 \quad \text{ג. } x \neq 4 \quad \text{ד. } x \neq 0, x \neq 4$$

$$\text{ה. } x \neq -1 \quad \text{ו. } x \neq -2, x \neq 2 \quad \text{ז. } y \neq 0, y \neq -1, y \neq 1$$

$$\text{ח. } x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$$

$$(2) \quad \text{א. } x \quad \text{ב. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ג. } 1-x$$

$$\text{ד. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ה. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ו. } \frac{x}{y} \quad \text{ז. } \frac{x}{y}$$

$$\text{ח. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ט. } 4x \quad \text{י. לא ניתן לצמצם}$$

$$(3) \quad \text{א. } x \neq -4, 3 \quad \text{ב. } \frac{m}{4}, m \neq -4 \quad \text{ג. } \frac{2}{a}, a \neq 0, 6$$

$$\text{ד. } -\frac{x}{3}, x \neq 5 \quad \text{ה. } -3, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{ו. } \frac{2x^2}{3}, x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{y(y-3)}, y \neq 0, 3 \quad \text{ח. } \frac{3z^2 - 12z + 4}{z+5}, z \neq 0, -5$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{x+5}{2}, x \neq -5 \quad \text{ב. } \frac{n}{8-n}, n \neq 8 \quad \text{ג. } \frac{z^2}{2(z-4)}, z \neq 4$$

$$\text{ד. } \frac{2m+5}{2m}, m \neq 0, -\frac{5}{2} \quad \text{ה. } \frac{2(2-3y)}{y}, y \neq 0, \frac{2}{3} \quad \text{ו. } \frac{a(a+2b)}{3b}, b \neq 0, a \neq -2b$$

$$(5) \quad \text{א. } \frac{1}{x-5}, x \neq 5, -2 \quad \text{ב. } m-8, m \neq 4 \quad \text{ג. } \frac{2}{y+3}, x \neq -3, \frac{5}{2}$$

$$\text{ד. } z+8, z \neq -\frac{2}{3} \quad \text{ה. } \frac{x-4}{x^2}, x \neq 0, -9 \quad \text{ו. } \frac{-3n}{2n+1}, n \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$$

$$\text{ז. } \frac{x+2}{x+3}, x \neq -2, -3 \quad \text{ח. } \frac{x-7}{x+8}, x \neq 7, -8$$

$$\text{ט. } \frac{3a-b}{a(2b-3a)}, a \neq 0, b \neq 0, a \neq 3b, 2b \neq 3a \quad \text{י. } \frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}, mn \neq 1, -\frac{3}{2}, n \neq 0$$

## כפל וחילוק של שברים אלגבריים:

### סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.  
חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים:  $\frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3x+3} = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3(x+1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{3x}$
- דוגמא לחילוק שברים:  $\frac{4x}{y} : \frac{12}{y^2+y} = \frac{4x}{y} \cdot \frac{y^2+y}{12} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{12}_3} \cdot \frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_3} = \frac{x(y+1)}{3}$

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

- |                                                       |                                                                                   |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| א. $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8}$                    | ב. $\frac{x}{3} \cdot \frac{9}{x^2}$                                              |
| ג. $7y \cdot \frac{5}{y^2}$                           | ד. $6x^2 \cdot \frac{3}{40x}$                                                     |
| ה. $(x^2 + 3x) \cdot \frac{2}{3x+9}$                  | ו. $(a^2 - 25) \cdot \frac{20}{5a+25}$                                            |
| ז. $\frac{w^2-9}{w} \cdot \frac{w^2}{2w+6}$           | ח. $\frac{y+4}{y^2+16} \cdot \frac{y^2-16}{2y+8}$                                 |
| ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90} \cdot \frac{12}{2z-10}$ | י. $\frac{5n^2}{n^2-121} \cdot \frac{2n^2+44n+242}{n+2} \cdot \frac{n^2+4n+4}{n}$ |

(2) פשט את הביטויים הבאים:

|                                                         |                                                      |
|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| א. $\frac{x}{8} : \frac{x}{6}$                          | ב. $\frac{y}{25} : \frac{5}{y}$                      |
| ג. $a^2 : \frac{1}{6a}$                                 | ד. $\frac{5}{6a} : a^2$                              |
| ה. $(d^2 - 3d) : \frac{5d - 15}{5d}$                    | ו. $\frac{t}{t+4} : \frac{3t}{t+4}$                  |
| ז. $\frac{y^2 + 8y + 16}{8y^2} : \frac{y^2 - 16}{7y^2}$ | ח. $\frac{a^2 - 64}{a^2 - 36} : \frac{a + 8}{a + 6}$ |

תשובות סופיות:

|                            |                       |                                 |                       |                                  |                  |
|----------------------------|-----------------------|---------------------------------|-----------------------|----------------------------------|------------------|
| א. $\frac{x^2}{24}$        | ב. $\frac{3}{x}$      | ג. $\frac{35}{y}$               | ד. $\frac{9x}{20}$    | ה. $\frac{2x}{3}$                | (1)              |
| ו. $4(a-5)$                | ז. $\frac{w(w-3)}{2}$ | ח. $\frac{y^2 - 16}{2y^2 + 32}$ | ט. $\frac{z+15}{z-5}$ | י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$ |                  |
| א. $\frac{3}{4}$           | ב. $\frac{y^2}{125}$  | ג. $6a^3$                       | ד. $\frac{5}{6a^3}$   | ה. $d^2$                         | ו. $\frac{1}{3}$ |
| ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$ | ח. $\frac{a-8}{a-6}$  |                                 |                       |                                  |                  |

## חיבור וחיסור של שברים אלגבריים:

### סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים. נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים. כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף. לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת. דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{1+(x+1)}{x} = \frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2 + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = \frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-3x} = \frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

## שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{a}{6} + \frac{a-5}{6}$

ג.  $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3+4x}{x+1}$

ב.  $\frac{5}{x} + \frac{4x+3}{x}$

ד.  $\frac{7z}{2z-3} - \frac{4z}{2z-3} - \frac{z+3}{2z-3}$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{ab} - \frac{5}{bc}$

ג.  $\frac{c}{ab} - \frac{ad}{bc} + \frac{2b}{cd}$

ה.  $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{3}{y+1}$

ב.  $\frac{1}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xz}$

ד.  $-\frac{5}{x} + \frac{x+1}{xy^2}$

ו.  $\frac{3}{z(z-3)} - \frac{2}{z(z-2)}$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $1 - \frac{2}{x}$

ג.  $2 + \frac{2}{x+1}$

ה.  $\frac{a+1}{a^2} - \frac{3-a}{4a} - 3$

ב.  $1 + \frac{3}{y^2}$

ד.  $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

ו.  $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x}$

ג.  $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$

ב.  $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y}$

ד.  $\frac{1}{z+3} + \frac{2}{3z} - \frac{3}{z}$

(5) פשט את הביטויים הבאים :

$$\text{ב. } \frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{(x+4)^2}$$

$$\text{א. } \frac{24}{a^2-9} + \frac{4}{a+3}$$

$$\text{ד. } \frac{3z}{z^2+4z+3} - \frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$$

$$\text{ג. } \frac{y}{(y-2)^2} + \frac{3y}{4-y^2}$$

$$\text{ו. } \frac{2a+3}{2a^2+15a+7} + \frac{a+3}{a^2+14a+49}$$

$$\text{ה. } \frac{x-1}{x^2+3x-40} + \frac{2}{-x^2+8x-15}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{a-b} + \frac{2}{a+2b} - \frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$$

$$\text{ז. } \frac{x}{x-3} + \frac{9-x}{x^2-8x+15}$$

(6) פשט את הביטויים הבאים :

$$\text{ב. } \left(\frac{2}{x}+1\right) \cdot \frac{x^2}{7x+14}$$

$$\text{א. } \frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{8} + \frac{9}{x+1} \cdot \frac{x+1}{18}$$

$$\text{ד. } \left(3x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) : \frac{6x^3+2x-4}{x^2}$$

$$\text{ג. } \frac{7}{y^2} : \frac{6}{y^3} - \frac{y-4}{63} \cdot \frac{3y-4}{y^2-8y+16}$$

$$\text{ה. } \left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3} - \frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right) : \frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\frac{2a-5}{6}$  ב.  $\frac{4x+8}{x}$  ג.  $\frac{5x+1}{x+1}$  ד. 1
- (2) א.  $\frac{c-5a}{abc}$  ב.  $\frac{z+5x+4y}{xyz}$  ג.  $\frac{c^2d - a^2d^2 + 2ab^2}{abcd}$
- ד.  $\frac{-5y^2 + x + 1}{xy^2}$  ה.  $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$  ו.  $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$
- (3) א.  $\frac{x-2}{x}$  ב.  $\frac{y^2+3}{y^2}$  ג.  $\frac{2x+4}{x+1}$
- ד.  $\frac{9x-2}{3x}$  ה.  $\frac{-11a^2 + a + 4}{4a^2}$  ו.  $\frac{4x^2y + 12z^2 + 9y^2 - 3y^3 - 126xy^2z}{36xy^2z}$
- (4) א.  $\frac{4x+1}{x(x+1)}$  ב.  $\frac{y-6}{y(y+2)}$  ג.  $\frac{a^2 + 4a + 6}{a(a+2)}$
- ד.  $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$
- (5) א.  $\frac{4}{a-3}$  ב.  $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$  ג.  $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$
- ד.  $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$  ה.  $\frac{x^2 - 6x - 13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$  ו.  $\frac{4(a^2 + 6a + 6)}{(a+7)^2(2a+1)}$
- ז.  $\frac{x-3}{x-5}$  ח.  $\frac{3}{a+2b}$
- (6) א.  $\frac{x+1}{2}$  ב.  $\frac{x}{7}$  ג.  $\frac{147y^2 - 594y + 8}{126(y-4)}$  ד.  $\frac{1}{2}$  ה.  $\frac{1}{3(10x+1)}$

## שברים כפולים:

### סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא:  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$  כאשר מתקיים:  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ .  
 נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

### שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

$$\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5} \quad (2)$$

$$\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54} \quad (4)$$

$$\frac{\frac{4x}{x+1}}{8} \quad (6)$$

$$\frac{\frac{x^2+2x+1}{t^2-t-20}}{\frac{16t+8}{25-t^2}} \quad (8)$$

$$2t+1$$

$$\frac{\frac{4x}{12}}{x} \quad (1)$$

$$\frac{\frac{5}{t}}{30t^2} \quad (3)$$

$$\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{y^2} \quad (5)$$

$$\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{40} \quad (7)$$

$$\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{1-3x(x+1)} \quad (9)$$

$$5x+5$$

**תשובות סופיות:**

$$\frac{x^2}{3} \quad (1)$$

$$2.5 \quad (2)$$

$$\frac{1}{6t^3} \quad (3)$$

$$\frac{t-9}{54t^2} \quad (4)$$

$$\frac{(3y-1)(3-y)}{25} \quad (5)$$

$$\frac{x(x+1)}{2} \quad (6)$$

$$\frac{c}{c-4} \quad (7)$$

$$\frac{t+4}{-8(t+5)} \quad (8)$$

$$\frac{5}{x} \quad (9)$$

# מתמטיקה א

## פרק 2 - משוואות אלגבריות

### תוכן העניינים

|    |                                               |
|----|-----------------------------------------------|
| 47 | 1. משוואות ממעלה ראשונה                       |
| 49 | 2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה |
| 52 | 3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון       |
| 53 | 4. משוואה ממעלה שנייה                         |
| 55 | 5. משוואות דו-ריבועיות                        |
| 57 | 6. משוואות עם פרמטרים                         |
| 59 | 7. משוואות עם שורשים                          |
| 61 | 8. משוואות עם ערך מוחלט                       |
| 62 | 9. מערכת משוואות ממעלה שנייה                  |

## משוואה ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה:  $ax = b$  (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא  $x = \frac{b}{a}$  כאשר  $a \neq 0$ .

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

- |                             |                                       |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| א. $6x + 2 = 8$             | ב. $7 - 2x = 7$                       |
| ג. $2x + x = 24$            | ד. $2x + 6 = 8 + x$                   |
| ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$ | ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$     |
| ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$   | ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$ |

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

- |                              |                                     |
|------------------------------|-------------------------------------|
| א. $3(x - 1) - 4 = 2$        | ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$            |
| ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$ | ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$            |
| ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$ | ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$ |

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>א. <math>\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4</math></p> <p>ב. <math>\frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1</math></p> <p>ג. <math>\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15}</math></p> <p>ד. <math>\frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1</math></p> <p>ה. <math>\frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2</math></p> <p>ו. <math>5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1</math></p> | <p>א. <math>\frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0</math></p> <p>ב. <math>\frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0</math></p> <p>ג. <math>\frac{3}{x} = \frac{1}{x+2}</math></p> <p>ד. <math>\frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2}</math></p> <p>ה. <math>\frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}</math></p> <p>ו. <math>\frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}</math></p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

|                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>א. <math>\frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15}</math></p> <p>ב. <math>\frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0</math></p> <p>ג. <math>\frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0</math></p> <p>ד. <math>\frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12</math></p> | <p>א. <math>\frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0</math></p> <p>ב. <math>\frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0</math></p> <p>ג. <math>\frac{3}{x} = \frac{1}{x+2}</math></p> <p>ד. <math>\frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2}</math></p> <p>ה. <math>\frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}</math></p> <p>ו. <math>\frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}</math></p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### תשובות סופיות:

- |            |                    |                     |                    |            |                    |
|------------|--------------------|---------------------|--------------------|------------|--------------------|
| א. $x=1$   | ב. $x=0$           | ג. $x=8$            | ד. $x=2$           | ה. $x=2$   | ו. $x=-3$          |
| א. $x=3$   | ב. $x=\frac{1}{2}$ | ג. $x=2\frac{1}{4}$ | ד. $x=1$           | ה. $x=4$   | ו. $x=-1$          |
| א. $x=-18$ | ב. $x=-30$         | ג. $x=-1$           | ד. $x=1$           | ה. $x=-10$ | ו. $x=-21$         |
| א. $x=8$   | ב. $x=-1$          | ג. $x=-3$           | ד. $x=-2$          | ה. $x=2$   | ו. $x=\frac{1}{2}$ |
| א. $x=-6$  | ב. $x=-7$          | ג. $x=-7$           | ד. $x=6, x \neq 3$ |            |                    |

## מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר  $a_1, b_1, c_1$  ו-  $a_2, b_2, c_2$  הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x+3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

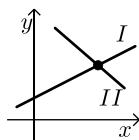
#### פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

#### הצגה גרפית של מערכת משוואות:

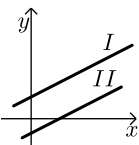
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



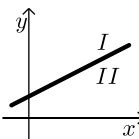
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

### פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:  
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.  
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבדוד נעלם באחת המשוואות.
- פתרון ע"י השוואת מקדמים:  
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.  
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.  
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

### הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

### שאלות:

#### (1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad \begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases} & \text{ב.} \quad \begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases} & \text{ג.} \quad \begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases} \\
 \text{ד.} \quad \begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases} & \text{ה.} \quad \begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases} & \text{ו.} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases}
 \end{array}$$

#### (2) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 \text{א.} \quad \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases} & \text{ב.} \quad \begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases} \\
 \text{ג.} \quad \begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases} & \text{ד.} \quad \begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases}
 \end{array}$$

#### (3) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 \text{א.} \quad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases} & \text{ב.} \quad \begin{cases} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{cases}
 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

(6) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

## תשובות סופיות:

(1) א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3).

(2) א.  $(4, \frac{1}{3})$  ב.  $(-\frac{4}{5}, 9)$  ג. (4,1.6) ד. (-2,7).

(3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

(4) א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2).

(5) א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1).

(6) א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4).

## משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

### סיכום כללי:

#### משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה:  $ax = b$  יתכן פתרון יחיד אם ורק אם  $a \neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב:  $x = \frac{b}{a}$ .

כאשר  $a = 0$  מתקבלת המשוואה  $0 \cdot x = b$  ויתכנו שני מצבים:

1. אם  $b = 0$  את המשוואה היא  $0x = 0$  ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם  $b \neq 0$  את המשוואה היא  $0x = b \neq 0$  ואין אף ערך של  $x$  המקיים אותה.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(1) \quad x + 4 = 6 + x \quad (2) \quad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2$$

$$(3) \quad 6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (4) \quad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

- א. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
- ב. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
- ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
- ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

### תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5) א. -8      ב. -1      ג.  $-7x - 1$       ד.  $-7x + k$  כאשר  $k$  הוא מספר כלשהו השונה מ-1.

## משוואה ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

משוואה מהצורה:  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ), נקראת משוואה ריבועית.  
פתרונות המשוואה יסומנו ב-  $x_1$  ו-  $x_2$  ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**  
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.  
דוגמא:  $x^2 + 5x - 4 = 0$ .
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**  
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.  
דוגמא:  $x^2 + 4x + 4 = 0$ .
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**  
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.  
דוגמא:  $x^2 + x + 4 = 0$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x^2 + 10x - 16 = 0$

א.  $x^2 + 3x - 10 = 0$

ד.  $2x^2 - 6x + 5 = 0$

ג.  $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

א.  $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ד.  $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

ג.  $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } x^2 - 36 = 0 & \text{ב. } 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג. } 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 & \text{ד. } (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } -7x^2 - 14x = 0 & \text{ב. } 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג. } 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 & \text{ד. } (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} & \text{ב. } \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג. } \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

## תשובות סופיות:

$$\begin{array}{llll} \text{(1) א. } x_1 = 2, x_2 = -5 & \text{ב. } x_1 = 2, x_2 = 8 & \text{ג. } x = \frac{2}{5} & \text{ד. אין פתרון.} \\ \text{(2) א. } x_1 = 2, x_2 = -1 & \text{ב. } x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4} & \text{ג. } x_1 = 1, x_2 = -10 & \text{ד. } x_1 = 0.6, x_2 = -2 \\ \text{(3) א. } x = \pm 6 & \text{ב. } x = \pm \frac{3}{4} & \text{ג. } x = \pm 3 & \text{ד. } x = \pm 1 \\ \text{(4) א. } x_1 = 0, x_2 = -2 & \text{ב. } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5} & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6} & \text{ד. } x_1 = 0, x_2 = -5 \\ \text{(5) א. } x_1 = 2, x_2 = -1.2 & \text{ב. } x = 5, x \neq -3 & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = -5 & \text{ד. } x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7} \end{array}$$

## משוואות דו-ריבועיות:

### סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  כאשר הנעלם הוא  $x$ .  
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר:  $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$  ומציאתו.  
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי  $x$ .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4  
כגון:  $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$  באמצעות פרמטר:  $t = x^2 - 1$   
ובכך לפתור משוואה:  $t^2 + 3t - 2 = 0$  ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת  $x$ .  
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- (1)  $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$
- (2)  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
- (3)  $13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
- (4)  $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$
- (5)  $x^6 + x^3 = 56$
- (6)  $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$
- (7)  $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$
- (8)  $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$
- (9)  $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$
- (10)  $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$
- (11)  $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$
- (12)  $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$
- (13)  $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$
- (14)  $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$
- (15)  $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$
- (16)  $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$
- (17)  $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$
- (18)  $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$
- (19)  $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$
- (20)  $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$

## תשובות סופיות:

(1)  $x = \pm 1$

(2)  $x = \pm 1, \pm \sqrt{2}$

(3)  $x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}$

(4)  $x = \pm 2, \pm 5$

(5)  $x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2$

(6)  $x = -2, \sqrt[3]{4}$

(7)  $x_1 = 4, x_2 = 49$

(8)  $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1$

(9)  $x = 5, -1$

(10)  $x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2}$

(11)  $x = -1$

(12)  $x_{1,2} = 1, 3$

(13)  $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06$

(14)  $x_1 = 0, x_2 = -2$

(15) אין פתרונות.

(16)  $x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}}$

(17)  $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3$

(18)  $x = -1, 2$

(19)  $x = 3, -1$

(20)  $x = \pm 1, 4, 6$

## משוואות עם פרמטרים:

### סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה:  $mx = 4$  (כאשר  $x$  הוא הנעלם ו- $m$  הוא פרמטר) הוא  $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר  $m$ .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא  $m \neq 0$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b+1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות :

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \text{ א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$(2) \text{ א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left( \frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left( m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$(3) \text{ א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

## משוואות עם שורשים:

### סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה:  $\sqrt{x} = a$  יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא:  $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$ .

### הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה  $\sqrt{x} = a$  שבה  $a < 0$  אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- |                                                |                                                     |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| (2) $\sqrt{x+2} = x$                           | (1) $\sqrt{2x+5} = 7$                               |
| (4) $\sqrt{2x+7} + 4 = x$                      | (3) $\sqrt{3x+1} + x = 13$                          |
| (6) $\sqrt{10x+6} + 9 = x$                     | (5) $\sqrt{x-1} + 3 = x$                            |
| (8) $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$                     | (7) $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$                           |
| (10) $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$                   | (9) $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$                          |
| (12) $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$      | (11) $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$                    |
| (14) $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$           | (13) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ |
| (16) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$            | (15) $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$               |
| (18) $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ | (17) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$        |
|                                                | (19) $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$      |

## תשובות סופיות:

- |                           |               |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2                | $x = 22$ (1   |
| $x = 9$ (4                | $x = 8$ (3    |
| $x = 25$ (6               | $x = 5$ (5    |
| $x = 3.75$ (8             | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10               | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12           | $x = 6$ (11   |
| $x = 5$ (14               | $x = 3$ (13   |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15  |
| $x = 1$ (18               | $x = 6$ (17   |
|                           | $x = 2$ (19   |

## משוואות עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא:  $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ .

### משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה:  $|x| = a$ .

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$|3x+14|=7 \quad (1) \qquad |3x-24|=x \quad (2)$$

$$|12-x|=3x \quad (3) \qquad 2x-|8-x|=10 \quad (4)$$

$$|4x-5|=|2x+13| \quad (5) \qquad |14-3x|=2|x+5| \quad (6)$$

$$|x|+7=|2x| \quad (7) \qquad |x+2|+6=|2x-4| \quad (8)$$

$$|x+2|+|2x-6|=|4x+8| \quad (9) \qquad |10-3x|-|x+4|=|2x-6| \quad (10)$$

### תשובות סופיות:

|                             |                 |                           |                            |
|-----------------------------|-----------------|---------------------------|----------------------------|
| $x = 6$ (4)                 | $x = 3$ (3)     | $x = 6, 12$ (2)           | $x = -\frac{7}{3}, -7$ (1) |
| $x = 12, -1\frac{1}{3}$ (8) | $x = \pm 7$ (7) | $x = 24, \frac{4}{5}$ (6) | $x = 9, -1\frac{1}{3}$ (5) |
|                             |                 | $x = 0$ (10)              | $x = 0, -12$ (9)           |

## מערכת משוואות ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12) \qquad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

## תשובות סופיות:

- (1)  $(2,4), (4,2)$
- (2)  $(\pm 4, -2)$
- (3)  $(\pm 2, \pm 1)$
- (4)  $(5, -2), (-5, 2)$
- (5)  $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$
- (6)  $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$
- (7)  $(7, 4)$
- (8)  $(5, -3)$
- (9)  $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$
- (10)  $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$
- (11)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
- (12)  $(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3)$
- (13)  $(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7)$
- (14)  $(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5)$

## מתמטיקה א

### פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

#### תוכן העניינים

|    |                                      |
|----|--------------------------------------|
| 64 | 1. אי שוויונים ממעלה ראשונה          |
| 66 | 2. אי שוויונים ממעלה שנייה           |
| 67 | 3. אי שוויונים ממעלה שלישית          |
| 68 | 4. אי שוויונים עם מנה                |
| 70 | 5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו |
| 71 | 6. שאלות מסכמות                      |
| 73 | 7. מציאת תחום הגדרה                  |
| 75 | 8. אי שוויונים עם ערך מוחלט          |

## אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

#### פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

#### פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$45x - 26 > 109 \quad (1) \qquad 6x > 2(3x - 1) \quad (2)$$

$$2(x - 5) \geq \frac{1}{2}(4x + 6) \quad (3) \qquad (x - 2)^2 + 4 < (x + 2)^2 + 20 \quad (4)$$

$$\frac{8x - 4}{2} < \frac{9(x + 1)}{3} \quad (5) \qquad 4(6x - 8) < 8(3x - 4) \quad (6)$$

$$\frac{x - 6}{3} - \frac{x - 4}{4} \geq 12 - x \quad (7) \qquad \frac{7 - x}{10} - \frac{3x - 1}{5} + \frac{x + 4}{3} < 7 \quad (8)$$

**תשובות סופיות:**

(1)  $x > 3$

(2) כל  $x$

(3) אף  $x$

(4)  $x > -2$

(5)  $x < 5$

(6) אף  $x$

(7)  $x \geq 12$

(8)  $x > -13$

## אי-שוויונים ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה:  $ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$  כאשר  $a \neq 0$ .

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                              |                                        |
|------------------------------|----------------------------------------|
| $x^2 - 12x > -32$ (2)        | $x^2 < 144$ (1)                        |
| $(x+2)(x+4) < 35$ (4)        | $(x+2)(x+5) < 0$ (3)                   |
| $(x-3)(x-7) \geq 8x-56$ (6)  | $-x^2 + 13x + 30 < 0$ (5)              |
| $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$ (8) | $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$ (7)            |
| $x^2 - 10x + 25 > 0$ (10)    | $-3x^2 + 12x > 0$ (9)                  |
| $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$ (12) | $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$ (11) |

### תשובות סופיות:

- |                           |                      |
|---------------------------|----------------------|
| $x < 4, x > 8$ (2)        | $-12 < x < 12$ (1)   |
| $-9 < x < 3$ (4)          | $-5 < x < -2$ (3)    |
| $x \leq 7, x \geq 11$ (6) | $x < -2, x > 15$ (5) |
| $-4 \leq x \leq 0$ (8)    | $-4 < x < 8$ (7)     |
| $x > 5, x < 5$ (10)       | $0 < x < 4$ (9)      |
| $x$ כל (12)               | $x < 3, x > 5$ (11)  |

## אי-שוויונים ממעלה שלישית:

### סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון:  $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 > 0$ ,  $x^4 + 2x^2 + 1 < 0$  וכו'. בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם. לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                                      |                                    |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| $x(x^2 + x + 1) > 0$ (2)             | $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ (1)          |
| $x^3 - 25x \geq 0$ (4)               | $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ (3) |
| $(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0$ (6) | $(x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0$ (5)    |
| $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ (8)         | $(x^2 - x - 6)(x - 1) < 0$ (7)     |
| $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ (10)           | $(x^2 + 6)(x+3) > 0$ (9)           |

### תשובות סופיות:

- |                                  |                                             |
|----------------------------------|---------------------------------------------|
| $x > 0$ (2)                      | $1 < x < 2, x > 3$ (1)                      |
| $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ (4) | $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ (3) |
| $x \leq 1\frac{2}{3}$ (6)        | $x > 2$ (5)                                 |
| $x \leq 0, x = 3$ (8)            | $x < -2, 1 < x < 3$ (7)                     |
| $x < 1, 2 < x < 4$ (10)          | $x > -3$ (9)                                |

## אי-שוויונים עם מנה:

### סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה:  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  או  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$  נקרא אי-שוויון עם מנה, בו  $f(x)$

ו- $g(x)$  הם פולינומים כלשהם.

למשל:  $\frac{2x+4}{x^2-3x+4} < 0$  בו:  $f(x) = 2x+4$  ו- $g(x) = x^2-3x+4$ .

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של  $f(x)$  ושל  $g(x)$  ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהיו את פתרון אי השוויון.

### הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנייל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

|                                   |                                         |
|-----------------------------------|-----------------------------------------|
| $\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (2)    | $\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (1)             |
| $\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (4) | $\frac{1}{x^2-16} > 0$ (3)              |
| $\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (6)       | $\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (5)           |
| $\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (8)      | $\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (7)            |
| $\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (10) | $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (9) |

**תשובות סופיות:**

$$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 3, x > 3 \quad (4)$$

$$x > 1 \quad (6)$$

$$2 < x < 3 \quad (8)$$

$$x < 2, x > 6 \quad (10)$$

$$-3 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$x < -4, x > 4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (5)$$

$$x > -2 \quad (7)$$

$$1 \leq x \leq 6 \quad (9)$$

## אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

### סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב:  $a < b$  וגם  $b < c$ , ניתן לכתוב:  $a < b < c$ . מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (2)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (1)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (4)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (3)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (6)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (5)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (8)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$x > -3\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 4 \quad (1)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$x > 0 \quad (3)$$

$$x \geq 10 \quad (6)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (5)$$

$$\emptyset \quad (8)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (7)$$

## שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (1)$$

$$\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \leq 0 \quad (3) \quad x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (5) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (4)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (7) \quad x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (6)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (9) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (11) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (13) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (12)$$

$$6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (15) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (14)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (17) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

$$(18) \text{ לאלו ערכי } x \text{ נמצאת הפונקציה } f(x) = \frac{x}{x-3} \text{ מעל הפונקציה } g(x) = \frac{x+1}{x+3} ?$$

## תשובות סופיות:

- |                                           |                                      |
|-------------------------------------------|--------------------------------------|
| $x \leq -4$ (2)                           | $-2 < x \leq -\frac{3}{4}$ (1)       |
| $x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5$ (4) | $-4 \leq x < 2, 3 \leq x$ (3)        |
| $x < -3, 0 < x < 2.5$ (6)                 | $-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12$ (5) |
| $2.5 \leq x < 8, x > 8$ (8)               | $x < -1, 2 < x < 6, x > 6$ (7)       |
| $x < -3, 0 < x < 1, x > 4$ (10)           | $x > 3$ (9)                          |
| $x > 7$ (12)                              | $-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3$ (11)  |
| $x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4$ (14)      | $x < -2, 2 < x < 4$ (13)             |
| $x \neq 1$ (16)                           | $x$ אף $x$ (15)                      |
| $-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3$ (18)       | $x \geq 7$ (17)                      |

## תחום הגדרה:

### שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{3x-4} \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{12x-x^2-x^3} \quad \text{ד. } f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$$

(3) תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{ax-x^2-4}$  הוא  $1 \leq x \leq 4$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

(4) תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$  הוא  $x \leq -2$ ,  $x > 2$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

(5) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$ ,  $a$  פרמטר חיובי.

א. הבע באמצעות  $a$  את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$ .

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר  $a$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x \geq 1\frac{1}{3}$     ב.  $x \leq -1, x \geq 6$     ג.  $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד.  $-5 \leq x < -2, x > 2$     ה.  $-2 \leq x < 2, x > 2$     ו.  $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א.  $x \geq 7$     ב.  $-6 \leq x \neq -2$     ג.  $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד.  $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3)  $a = 5$
- (4)  $a = 2$
- (5) א.  $x \geq a^2 - 6$     ב.  $0 < a \leq 1$

## אי שוויונים עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

| מקרה  | $ x  < a$    | $ x  > a$           |
|-------|--------------|---------------------|
| פתרון | $-a < x < a$ | $x < -a \cap x > a$ |

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

### שאלות:

(1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א.  $|x+2| < 3$       ב.  $|2x+1| > 7$
- ג.  $|6-2x| < x$       ד.  $|2x+1|-3x > 4$

(2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א.  $1 < |4-3x| < 7$       ב.  $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א.  $|x^2+6x-4| < 12$       ב.  $|x^2+x-10| > 3x-2$
- ג.  $|x^2-3x| < 4$       ד.  $|6x^2-7x-4| > 1$
- ה.  $x^2-6|x|+5 \leq 0$       ו.  $x^2-6|x+1|-1 > 0$

(4) פתור את אי-השוויונים הבאים :

ב.  $|x+8| < 11 - |1-3x|$

א.  $|x-3| + |2x+2| > 7$

ד.  $|2x-6| + |x+5| > 14 - |1-x|$

ג.  $|3-2x| - 11 > 4 - |6+x|$

ו.  $|x+3| + |x^2 - 5x + 4| < 19$

ה.  $|5+4x| - |3-x| + \left|4 - \frac{1}{2}x\right| \leq 22$

(5) פתור את אי-השוויונים הבאים :

ב.  $1 \leq \left|\frac{x+2}{x-2}\right| \leq 2$

א.  $\left|\frac{3x-1}{x-2}\right| \geq 3$

ד.  $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right| > 5$

ג.  $\frac{|x-6|+8x}{x-12} \leq 12$

(6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים) :

ב.  $2 - \sqrt{1-x} \leq |x+2| - 3$

א.  $\sqrt{x^2 - |x-12|} < x$

ד.  $\frac{|x+2| - |x|}{\sqrt{4-x^3}} > 0$

ג.  $\sqrt{|2x+1| - x - 1} \leq 4 - |3x|$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $-5 < x < 1$       ב.  $x < -4$  או  $3 < x$   
 ג.  $2 < x < 6$       ד.  $x < -1$
- (2) א.  $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$  או  $-1 < x < 1$       ב.  $-5\frac{1}{2} < x < -3$
- (3) א.  $-2 < x < 2$  או  $-8 < x < -4$       ב.  $x < 2$  או  $4 < x$   
 ג.  $-1 < x < 4$       ד.  $x < -\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$ ,  $x > \frac{5}{3}$   
 ה.  $-5 \leq x \leq -1$  או  $1 \leq x \leq 5$       ו.  $x < -5$ ,  $x > 7$
- (4) א.  $x < -2$  או  $2 < x$       ב.  $-1 < x < 1$   
 ג.  $x < -6$  או  $4 < x$       ד.  $x < -1$  או  $4 < x$   
 ה.  $-7\frac{3}{7} \leq x \leq 4$       ו.  $-2 < x < 6$
- (5) א.  $\frac{7}{6} \leq x < 2$ ,  $x > 2$       ב.  $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ ,  $x \geq 6$   
 ג.  $x < 12$ ,  $x \geq 46$       ד.  $\frac{1}{2} < x < 1$ ,  $1 < x < 2$ ,  $2 < x \leq 4$
- (6) א.  $x = -1$ ,  $x \geq 3$ ,  $x \neq 12$       ב.  $x \leq \frac{-15 + \sqrt{33}}{2}$   
 ג.  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$       ד.  $-1 < x < \sqrt[3]{4}$

# מתמטיקה א

## פרק 4 - חוקי החזקות והשורשים

### תוכן העניינים

|    |                               |
|----|-------------------------------|
| 78 | 1. חוקי החזקות.....           |
| 83 | 2. חוקי השורשים.....          |
| 87 | 3. כתיבה מדעית של מספרים..... |

## חוקי החזקות:

### סיכום כללי:

### סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad a^0 = 1 & 2. \quad a^1 = a & 3. \quad a^n \cdot a^m = a^{m+n} \\
 4. \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & 5. \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} & 6. \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \\
 7. \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & 8. \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} & 9. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m
 \end{array}$$

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ .

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad a^2 a^6 & \text{ב.} \quad t^3 t^5 t^7 & \text{ג.} \quad b^2 b^5 b^{12} b^3 \\
 \text{ד.} \quad \frac{k^8}{k^3} & \text{ה.} \quad \frac{n^{14}}{n^9} & \text{ו.} \quad \frac{c^6}{c^2} \\
 \text{ז.} \quad \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & \text{ח.} \quad \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & \text{ט.} \quad \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} \\
 \text{י.} \quad 3^2 3^3 3^4 & \text{יא.} \quad \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & \text{יב.} \quad \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8}
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ .

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & \text{ב.} \quad \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & \text{ג.} \quad \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4}
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא:  $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$ .

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין הביטוי  $243 \cdot 2^n$  לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים :

|                                                            |                                          |
|------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| א. $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$                   | ב. $\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$ |
| ג. $\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$ | ד. $2^3 + 2^5$                           |

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק :  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ .

|                                                   |                                                           |                                                 |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| א. $(a^2)^4$                                      | ב. $(c^3)^{10}$                                           | ג. $(x^3 x^{10})^2$                             |
| ד. $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$                      | ה. $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$                              | ו. $\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$      |
| ז. $\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$          | ח. $\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$               | ט. $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$       |
| י. $\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$ | יא. $\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$ | יב. $\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$ |

(6) לפניך הביטויים הבאים :  $\left((3^2)^3\right)^4$  ו-  $\left((3^6)^n\right)^2$ .

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

|                              |                                                  |                                          |
|------------------------------|--------------------------------------------------|------------------------------------------|
| א. $\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$ | ב. $\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$ | ג. $\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$ |
|------------------------------|--------------------------------------------------|------------------------------------------|

(8) פשט את הביטויים הבאים :

|                                         |                                      |                                                   |
|-----------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------------------|
| א. $3^2 9 \cdot 81^2$                   | ב. $64^2 2^3 8^2$                    | ג. $125 \cdot 25 \cdot 5^5$                       |
| ד. $\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$ | ה. $\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$ | ו. $\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$ |

9 פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \\ \text{ב.} & \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \\ \text{ג.} & \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} \end{array}$$

10 פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים :  $(ab)^n = a^n b^n$  ו-  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & (a^2b)^3 & \text{ב.} & (m^4n^3)^5 & \text{ג.} & (x^{12}y^3)^3 \\ \text{ד.} & \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 & \text{ה.} & \left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7 & \text{ו.} & \left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3 \\ \text{ז.} & \left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6 & \text{ח.} & \left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2 & \text{ט.} & \left(\frac{(b^{12}c)^2c^{14}}{c(c^3b^5)^4b^3}\right)^2 \end{array}$$

11 חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 & \text{ב.} & \left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2 & \text{ג.} & \left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^2 7)^5}\right)^3 \end{array}$$

12 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^6} & \text{ב.} & \frac{1}{5^3} & \text{ג.} & \frac{1}{2^{10}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{8} & \text{ה.} & \frac{1}{81} & \text{ו.} & \frac{1}{125} \end{array}$$

13 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^{-3}} & \text{ב.} & \frac{1}{3^{-2}} & \text{ג.} & \frac{1}{5^{-3}} \end{array}$$

(14) חשב את הביטויים הבאים :

ג.  $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב.  $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א.  $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו.  $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה.  $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד.  $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

(15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג.  $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב.  $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$

א.  $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

(16) פשט את הביטויים הבאים :

ג.  $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב.  $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א.  $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $a^8$  ב.  $t^{15}$  ג.  $b^{22}$  ד.  $k^5$  ה.  $n^5$  ו.  $c^4$   
 ז.  $a^7$  ח.  $x^3$  ט. 1 י.  $3^9$  יא.  $2^8$  יב.  $5^5$
- (2) א. 18 ב.  $ab$  ג.  $x^6 y^{10}$
- (3)  $n=16$
- (4) א. 2 ב.  $\frac{1}{3}$  ג.  $\frac{5}{8}$  ד. 40
- (5) א.  $a^8$  ב.  $c^{30}$  ג.  $x^{26}$  ד.  $b$  ה.  $n^3$  ו.  $d^{10}$   
 ז. 2 ח. 9 ט.  $8^{18}$  י.  $3^7$  יא. 3 יב.  $3^5$
- (6)  $n=2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א.  $3^{12}$  ב.  $2^{21}$  ג.  $5^{10}$  ד.  $2^{12}$  ה.  $2^7$  ו.  $3^{51}$
- (9) א.  $\frac{2b^3}{a}$  ב.  $k$  ג.  $3\frac{1}{5}$  ד.  $\frac{1}{x} + x$
- (10) א.  $a^6 b^3$  ב.  $m^{20} n^{15}$  ג.  $x^{36} y^9$  ד.  $\frac{a^{12}}{b^8}$  ה.  $\frac{i^{28}}{k^{21}}$  ו.  $a^{21} b^3$
- ז.  $x^{12} y^{18}$  ח.  $t^4 r^{12}$  ט.  $b^2 c^6$
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א.  $4^{-6}$  ב.  $5^{-3}$  ג.  $2^{-10}$  ד.  $2^{-3}$  ה.  $3^{-4}$  ו.  $5^{-3}$
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד.  $\frac{1}{9}$  ה. 1000 ו. 3
- (15) א.  $5^{24} \cdot 3^{12}$  ב.  $\frac{4^2}{3^{23}}$  ג.  $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א.  $a^{1-5n}$  ב.  $k$  ג.  $m^{2n+12}$

## חוקי השורשים:

### סיכום כללי:

### סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & 2. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} & 3. \quad \sqrt[n]{a^n} = a \\
 4. \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & 5. \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & 6. \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}
 \end{array}$$

### שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה:  $\sqrt[n]{a^m}$ .

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } 3^{\frac{1}{4}} & \text{ב. } 2^{\frac{3}{5}} & \text{ג. } 6^{\frac{5}{6}} \\
 \text{ד. } -12^{\frac{2}{7}} & \text{ה. } -(-4)^{\frac{1}{3}} & \text{ו. } -(-3)^{\frac{3}{4}} \\
 \text{ז. } 5^{-\frac{1}{4}} & \text{ח. } 27^{-\frac{1}{3}} & \text{ט. } 64^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \sqrt{49} & \text{ב. } -\sqrt{25} & \text{ג. } \sqrt[3]{8} \\
 \text{ד. } -\sqrt[3]{128} & \text{ה. } \sqrt[3]{(-2)^6} & \text{ו. } (\sqrt[5]{1024})^2 \\
 \text{ז. } (\sqrt[5]{-243})^3 & \text{ח. } \sqrt[4]{-16} & \text{ט. } \sqrt[4]{-25^2} \\
 \text{י. } \sqrt[4]{(-25)^2} & &
 \end{array}$$

(19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

- |                                               |                                                 |                                                                     |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| א. $8^{\frac{2}{3}}$                          | ב. $32^{\frac{3}{5}}$                           | ג. $128^{-\frac{2}{7}}$                                             |
| ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$         | ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$           | ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$                     |
| ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ | ח. $343^{-\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$ | ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$ |

(20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא:  $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

(21) פשט את הביטויים הבאים:

- |                                                         |                                                                            |                                                                |
|---------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$                            | ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$                                              | ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$                   |
| ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$                         | ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$                                      | ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$                          |
| ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ | ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$ | ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$ |

(22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

- |                   |                |                          |
|-------------------|----------------|--------------------------|
| א. $3\sqrt{2}$    | ב. $5\sqrt{3}$ | ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$ |
| ד. $2\sqrt[3]{3}$ | ה. $x\sqrt{x}$ |                          |

(23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

- |                          |                             |                                 |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| א. $2\sqrt{5}$           | ב. $4\sqrt[3]{2}$           | ג. $2\sqrt[5]{3}$               |
| ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ | ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$ |
| ז. $-5\sqrt[3]{2}$       | ח. $-5\sqrt[4]{2}$          | ט. $-5\sqrt[5]{-2}$             |

(24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א.  $\sqrt{12}$       ב.  $\sqrt{48}$       ג.  $\sqrt{63}$
- ד.  $\sqrt[3]{54}$       ה.  $\sqrt{x^5}$

(25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א.  $\sqrt{40}$       ב.  $\sqrt{50}$       ג.  $\sqrt{320}$
- ד.  $\sqrt[3]{108}$       ה.  $\sqrt[3]{56}$       ו.  $\sqrt[5]{160}$
- ז.  $\sqrt[4]{162}$       ח.  $\sqrt[5]{972}$       ט.  $\sqrt[6]{192}$

(26) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $\sqrt{18} - \sqrt{8}$       ב.  $\sqrt{7} + \sqrt{63}$       ג.  $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד.  $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$       ה.  $\frac{20}{\sqrt{5}}$       ו.  $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז.  $\frac{16}{\sqrt{2}}$       ח.  $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$       ט.  $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

(27) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$       ב.  $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$       ג.  $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד.  $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$       ה.  $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$       ו.  $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

## תשובות סופיות:

- (17) א.  $\sqrt[4]{3}$  ב.  $\sqrt[5]{2^3}$  ג.  $\sqrt[6]{6^5}$  ד.  $-\sqrt[7]{12^2}$  ה.  $-\sqrt[3]{-4}$  ו.  $\phi$
- ז.  $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$  ח.  $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$  או  $\frac{1}{3}$  ט.  $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$  או  $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16
- ז. -27 ח.  $\phi$  ט.  $\phi$  י. 5
- (19) א. 4 ב.  $\frac{1}{8}$  ג.  $\frac{1}{4}$  ד. 125 ה.  $\frac{32}{243}$  ו.  $\frac{49}{16}$
- ז.  $\frac{27}{4}$  ח.  $\frac{10}{49}$  ט.  $\frac{1}{2}$
- (20)  $\sqrt{2}$
- (21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2
- ז.  $\sqrt{2}$  ח.  $\sqrt{5}$  ט.  $\sqrt{2}$
- (22) א.  $\sqrt{18}$  ב.  $\sqrt{75}$  ג.  $\sqrt{9}$  ד.  $\sqrt[3]{24}$  ה.  $\sqrt{x^3}$
- (23) א.  $\sqrt{20}$  ב.  $\sqrt[3]{128}$  ג.  $\sqrt[5]{96}$  ד.  $\sqrt{6}$  ה.  $\sqrt[3]{3}$
- ו.  $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$  ז.  $\sqrt[3]{-250}$  ח.  $-\sqrt[4]{1250}$  ט.  $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א.  $2\sqrt{3}$  ב.  $4\sqrt{3}$  ג.  $3\sqrt{7}$  ד.  $3\sqrt[3]{2}$  ה.  $x^2\sqrt{x}$
- (25) א.  $2\sqrt{10}$  ב.  $5\sqrt{2}$  ג.  $8\sqrt{5}$  ד.  $3\sqrt[3]{4}$  ה.  $2\sqrt[3]{7}$  ו.  $2\sqrt[5]{5}$
- ז.  $3\sqrt[4]{2}$  ח.  $3\sqrt[5]{4}$  ט.  $2\sqrt[8]{3}$
- (26) א.  $\sqrt{2}$  ב.  $4\sqrt{7}$  ג.  $6\sqrt[3]{2}$  ד.  $\sqrt[4]{5}$  ה.  $4\sqrt{5}$  ו.  $\sqrt{2}$
- ז.  $8\sqrt{2}$  ח.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  או  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  ט.  $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$  או  $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א.  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$  ב.  $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$  ג.  $\sqrt[6]{5^{11}}$  ד. 27 ה.  $\frac{1}{7}$  ו.  $\sqrt[8]{2^5}$

## כתיבה מדעית של מספרים:

### שאלות:

(28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

|                    |                  |
|--------------------|------------------|
| א. 15,000,000      | ב. 1,500,000     |
| ג. 150,000,000,000 | ד. 23,400,000    |
| ה. 0.0003          | ו. 0.00000042    |
| ז. 0.000000042     | ח. 0.00000000042 |

(29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

|                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| א. $(3,000,000)^2$ | ב. $(2,000,000)^2$   |
| ג. $(5,000)^3$     | ד. $(50,000)^3$      |
| ה. $(0.0002)^4$    | ו. $(0.00004)^3$     |
| ז. $(0.000005)^3$  | ח. $(0.000000007)^3$ |

### תשובות סופיות:

|                           |                          |                          |                         |                         |
|---------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| (28) א. $1.5 \cdot 10^7$  | ב. $1.5 \cdot 10^6$      | ג. $1.5 \cdot 10^{11}$   | ד. $2.34 \cdot 10^7$    | ה. $3 \cdot 10^{-4}$    |
| ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$    | ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$   | ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$  |                         |                         |
| (29) א. $9 \cdot 10^{12}$ | ב. $4 \cdot 10^{12}$     | ג. $1.25 \cdot 10^{11}$  | ד. $1.25 \cdot 10^{14}$ | ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$ |
| ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$   | ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$ | ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$ |                         |                         |

# מתמטיקה א

## פרק 5 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

### תוכן העניינים

1. משוואות מעריכיות ..... (ללא ספר)
2. מערכת משוואות מעריכיות ..... 88
3. אי שוויונים מעריכיים ..... 89

## מערכת משוואות מעריכיות:

### שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

### תשובות סופיות:

|                   |            |                  |          |
|-------------------|------------|------------------|----------|
| (1,3) (4          | (1,2) (3   | (0,2) , (2,4) (2 | (2,9) (1 |
| (1,2) , (-1,0) (7 | (-1,-2) (6 | (3,2) (5         |          |

## אי שוויונים מעריכיים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $a^x > a^y$  הוא:  $x > y$  עבור:  $a > 1$  ו-  $x < y$  עבור:  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} & (2) \\ 3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} & (1) \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} & (4) \\ e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} & (3) \\ e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 & (6) \\ 25^x + 5 < 6 \cdot 5^x & (5) \end{array}$$

### הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ( $\ln$ ) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$\begin{array}{ll} e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 & (8) \\ e^x > 3 & (7) \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} & (2) \\ x < \frac{2}{3} & (1) \\ x \leq \frac{1}{8} & (4) \\ 0 \leq x < 1 & (3) \\ x = 0 & (6) \\ 0 < x < 1 & (5) \\ x < 0 \text{ או } x > \ln 4 & (8) \\ x > \ln 3 & (7) \end{array}$$

## מתמטיקה א

### פרק 6 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

#### תוכן העניינים

|                                                       |           |
|-------------------------------------------------------|-----------|
| 1. הגדרת הלוגריתם                                     | (ללא ספר) |
| 2. חוקי הלוגריתמים ישן                                | (ללא ספר) |
| 3. משוואות לוגריתמיות הנפתרות באמצעות הגדרת הלוג      | (ללא ספר) |
| 4. משוואות לוגריתמיות הנפתרות באמצעות חוקי הלוגריתמים | (ללא ספר) |
| 5. הוצאת לוג משני אגפי המשוואה                        | (ללא ספר) |
| 6. משוואות לוגריתמיות עם בסיסים שונים                 | (ללא ספר) |
| 7. מערכת משוואות לוגריתמיות                           | 90        |
| 8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות                 | 91        |
| 9. אי-שוויונים לוגריתמים                              | 92        |

## מערכת משוואות לוגריתמיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (8, -5) & (3) & (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) & (2) & (8, 3) & (1) \\ \left(16, \frac{1}{3}\right) & (6) & (25, 8) & (5) & (16, 7) & (4) \\ (4, 7) & (9) & (3, 9), (9, 3) & (8) & (25, 4), (625, 2) & (7) \end{array}$$

## מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2 (4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3 (9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4 (5 - 9^y) \\ \log_2 (2^x + 3) = \log_4 (29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2 (y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) & (3, 3) & (1, 1) \\ (1, 0) & (1, 1), (2, 3) & \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \end{array} \quad \begin{matrix} (3) & (2) & (1) \\ (6) & (5) & (4) \end{matrix}$$

## אי-שוויונים לוגריתמים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $\log_a x > \log_a y$  הוא:  $x > y$  עבור:  $a > 1$  ו-  $x < y$  עבור:  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                                                                 |                                  |
|-----------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| $\log_6(x^2 - 5x) < 1$ (2)                                      | $\log_2 x < \log_2(5x - 20)$ (1) |
| $\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x)$ (4) | $\log_3 x > \log_9(15 - 2x)$ (3) |
| $\ln x < 3$ (6)                                                 | $\ln x \geq \ln(x^2 - 12)$ (5)   |
| $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8)                | $\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7)      |

### תשובות סופיות:

- |                                                           |                             |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------|
| $-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2)                               | $x > 5$ (1)                 |
| $-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4)                          | $3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3)  |
| $0 < x < e^3$ (6)                                         | $2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5)  |
| $x \neq 1$ וגם $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8) | $\frac{1}{e} < x < e^7$ (7) |

# מתמטיקה א

## פרק 7 - בעיות גדילה ודעיכה

### תוכן העניינים

|     |                                              |
|-----|----------------------------------------------|
| 93  | 1. שאלות חימום                               |
| 97  | 2. שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית         |
| 98  | 3. שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית       |
| 99  | 4. שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה |
| 100 | 5. שאלות העוסקות במציאת הזמן                 |
| 101 | 6. שאלות שונות                               |

## שאלות חימום:

### סיכום כללי:

#### הגדרת בעיית גדילה ודעיכה מערכית:

הכמות לאחר פרק זמן  $t$ , המסומנת  $M_t$ , כאשר הכמות ההתחלתית היא  $M_0$  וקצב הגידול/דעיכה הוא  $q$  ניתנת ע"י הנוסחה הבאה:  $M_t = M_0 \cdot q^t$ .

כאשר הגדילה או הדעיכה נתונים באחוזים נמצא את הבסיס לפי:  $q = \frac{100 \pm p}{100}$ .

### שאלות:

(1) מצא את שיעור הגדילה/דעיכה מתוך אחוז הגדילה/דעיכה הנתון בבעיה.

- א. מחיר מוצר גדל ב-20% לשנה.
- ב. מחיר מוצר יורד ב-40% לשנה.
- ג. אוכלוסייה מתרבה ב-5% לשנה.
- ד. מחיר דירה עולה ב-15% לשנה.
- ה. כמות דבורים גדלה פי 2 כל יום.
- ו. מחירו של פסל גדל פי 3 כל שנה.
- ז. רכב מאבד רבע מערכו בכל שנה.
- ח. מנייה מאבדת מחצית מערכה כל חודש.

(2) מצא את אחוזי הגדילה/דעיכה מתוך הבסיסים הבאים:

- |               |               |
|---------------|---------------|
| א. $q = 1.2$  | ב. $q = 1.6$  |
| ג. $q = 0.85$ | ד. $q = 0.72$ |

(3) מצא את  $M_0$ :

- |                                |                              |
|--------------------------------|------------------------------|
| א. $107.2 = M_0 \cdot 1.05^6$  | ב. $70.8 = M_0 \cdot 1.12^4$ |
| ג. $2213.68 = M_0 \cdot 1.4^8$ |                              |

(4) מצא את  $q$  :

א.  $25 = 10 \cdot q^6$   
 ב.  $512.36 = 6 \cdot 10^7 \cdot q^{40}$   
 ג.  $10^3 = 2.4 \cdot 10^6 \cdot q^{25}$   
 ד.  $9.35 = 7 \cdot q^{10.5}$   
 ה.  $6.42 \cdot 10^4 = 10^7 \cdot q^{\frac{31}{3}}$   
 ו.  $13.25 = 9.2 \cdot q^{12.3}$

(5) מצא את  $t$  :

א.  $10 \cdot 1.05^t = 70$   
 ב.  $62.08^t = 39.68$   
 ג.  $7 \cdot 10^7 \cdot 0.82^t = 10^5$

(6) אוכלוסיית חיידקים מתרבה בכל דקה פי 2.  
 בשעה 10:30 בדקו במעבדה מדגם ובו 50 חיידקים.  
 א. כמה חיידקים יהיו כעבור דקה אחת?  
 ב. כמה חיידקים יהיו כעבור שתי דקות?  
 ג. כמה חיידקים יהיו בשעה 10:50?

(7) כמות של חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית בכל שבוע ב-2.8%.  
 במעבדה נשקלה כמות של 2000 גרם של החומר.  
 א. מה תהיה כמות החומר כעבור שבועיים?  
 ב. מה תהיה כמות החומר כעבור שלושה חודשים?  
 ג. האם תישאר כמות מסוימת מהחומר כעבור שנה בת 52 שבועות?

(8) מחירו של מוצר לאחר 3 שנים הוא 250 ₪. ערך המוצר יורד ב-25% מדי שנה.  
 מה היה מחירו ההתחלתי?

(9) שרון רצה בכל יום מרחק הגדול ב-10% מאשר ביום הקודם.  
 ידוע כי שרון רצה מרחק של 2.5 ק"מ ביום השביעי.  
 כמה ק"מ רצה שרון ביום הראשון?

(10) אוכלוסייה במדינה מסוימת מתרבה בצורה מעריכית ב-3.1% בשנה.  
 כיום יש במדינה זו 528,000 תושבים.  
 א. כמה תושבים יהיו במדינה זו בעוד 3 שנים?  
 ב. כמה תושבים היו במדינה זו לפני 4 שנים?

- 11** כמות אצות באגם מתרבה בצורה מעריכית. בכל שנה גדלה הכמות פי 4 מאשר בשנה שקדמה לה. כיום יש באגם  $2 \cdot 10^5$  ק"ג אצות.
- א. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים?  
 ב. מה הייתה כמות האצות לפני שנה?  
 ג. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים ושלושה חודשים?
- 12** מספר תושבים במדינה מסוימת גדל בשיעור קבוע. במשך 10 שנים גדלה האוכלוסייה במדינה מ-5.4 מיליון תושבים ל-7.2 מיליון תושבים.
- א. מה הוא קצב הריבוי בכל שנה במדינה?  
 ב. אם קצב הגידול של האוכלוסייה יישמר, מה יהיה מספר התושבים כעבור 10 שנים נוספות?
- 13** בגן חיות ספרו את מספר התוכים. בספירה הראשונה נספרו 1200 תוכים. בספירה השנייה, כעבור 6 חודשים, נספרו 1450 תוכים.
- א. מה הוא קצב הגידול החודשי של התוכים?  
 ב. מה יהיה מספרם של התוכים כעבור שנה וחצי מהספירה הראשונה?
- 14** כמות העצים ביער גדלה בצורה מעריכית. אם כמות העצים ביער בשנת 1950 הייתה  $5 \cdot 10^4$  טון עצים ובשנת 1990 הייתה  $10^7$  טון עצים, מה היה אחוז הגידול השנתי (בהנחה שהגידול היה קבוע)?
- 15** כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית. החומר נשקל שלוש פעמים ביום מסוים. בשעה 7:00 בבוקר היה משקל החומר 120 ק"ג. בשעה 10:30 בבוקר היה משקל החומר 95 ק"ג.
- א. מהו קצב התפרקות החומר הרדיואקטיבי לחצי שעה?  
 ב. מה תהיה כמות החומר בשעה 15:00 אחר הצהריים?
- 16** מכונית מאבדת  $\frac{5}{8}$  מערכה במשך 10 שנים.
- א. מהו קצב ירידת הערך של המכונית בכל שנה?  
 ב. איזה אחוז מערכה תאבד המכונית כעבור 15 שנה?
- 17** מספר התושבים במדינה מסוימת גדל פי 3.5 ב-40 שנים.
- א. מצא מהו אחוז הריבוי השנתי.  
 ב. מצא פי כמה יגדל מספר התושבים כעבור 58 שנים?

## תשובות סופיות:

- |                   |                      |                    |              |
|-------------------|----------------------|--------------------|--------------|
| א. 1.2            | ב. 0.6               | ג. 1.05            | ד. 1.15      |
| ה. 2              | ו. 3                 | ז. 0.75            | ח. 0.5       |
| א. 20% גדילה      | ב. 60% גדילה         | ג. 15% דעיכה       | ד. 28% דעיכה |
| א. 80             | ב. 45                | ג. 150             |              |
| א. 1.165          | ב. 0.7469            | ג. 0.732           | ד. 1.028     |
| ה. 0.22           | ו. 1.03              |                    |              |
| א. 39.88          | ב. 0.89              | ג. 33.01           |              |
| א. 100            | ב. 200               | ג. 52,428,800      |              |
| א. 1889.56 גרם    | ב. 1422.4 גרם        | ג. כן. 456.747 גרם |              |
| א. 592.6 ש        |                      |                    |              |
| א. 1.41 ק"מ       |                      |                    |              |
| א. 578,642 תושבים | ב. 467,304 תושבים    |                    |              |
| א. 3,200,000 ק"ג  | ב. 50,000 ק"ג        | ג. 4,525,483.4 ק"ג |              |
| א. 1.029          | ב. 9.6 מיליון תושבים |                    |              |
| א. 1.032          | ב. 2117 תוכים        |                    |              |
| א. 14.16%         |                      |                    |              |
| א. 0.9671         | ב. 70.35 גרם         |                    |              |
| א. 0.90657        | ב. 77.1%             |                    |              |
| א. 3.18%          | ב. 6.15              |                    |              |

## שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית:

### שאלות:

- (1) מספר החסידות המגיעות כל שנה לאגם החולה יורד בצורה מעריכית בקצב של 2.4% בשנה. אם מספר החסידות שהגיעו השנה היה 6,000, מה יהיה מספר החסידות שיגיעו עוד 7 שנים?
- (2) מספר התושבים בהרצליה בשנת 1990 היה 80,000. אחוז הגידול באוכלוסיית העיר הוא 3% בשנה. מה יהיה מספר התושבים בהרצליה בשנת 1998?

### תשובות סופיות:

- (1) 5,062 חסידות.
- (2) 101,342 תושבים.

## שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית:

---

### שאלות:

- (3) מספר הזברות בטנזניה גדל בצורה מעריכית בקצב של 1.6% בשנה. כיום יש בטנזניה 45,000 זברות. כמה זברות היו בטנזניה לפני 16 שנים?

### תשובות סופיות:

- (3) 34,907 זברות.

## שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה:

### שאלות:

- (4) מספר הלידות בבית החולים "איכילוב" גדל בצורה מעריכית. לפני 8 שנים היו ב"איכילוב" 500 לידות בחודש והשנה יש 600 לידות בחודש. מהו אחוז הגידול במספר הלידות החודשי משנה לשנה ב"איכילוב"?
- (5) מספר התושבים ביפן גדל פי 2 תוך 20 שנים. מה אחוז הגידול השנתי באוכלוסיית יפן?
- (6) מספר החיידקים במבחנה גדל בצורה מעריכית. אם לפני 6 שעות היו במבחנה 200 חיידקים ועכשיו יש בה 500 חיידקים, כמה חיידקים יהיו בה בעוד 4 שעות?

### תשובות סופיות:

- (4) 2.3%
- (5) 3.5%
- (6) 921 חיידקים.

## שאלות העוסקות במציאת הזמן:

### שאלות:

- (7) הריבית על תכנית חיסכון בבנק מסוים היא 2.4% בשנה. אדם הפקיד בתוכנית החיסכון 12,000 ₪. תוך כמה שנים יהיו ברשותו 15,000 ₪?
- (8) אוכלוסיית הדובים בקוטב הצפוני מכפילה את עצמה כל 18 שנה. אם היום יש בקוטב הצפוני 6,000 דובים, בעוד כמה שנים יהיו 8,000 דובים?
- (9) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 60% ממשקלו?
- (10) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 50% ממשקלו?
- (11) זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 16 ימים. תוך כמה ימים יאבד שליש ממשקלו?
- (12) בשעה 08:00 נלקחו שני חומרים רדיואקטיביים. מחומר א' נלקחו 150 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 10 שעות. מחומר ב' נלקחו 117.4 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 18 שעות. באיזו שעה משקל החומרים יהיה זהה?

### תשובות סופיות:

- (7) 9.41 שנים.  
 (8) 7.47 שנים.  
 (9) 16.43 שעות.  
 (10) 12.43 שעות.  
 (11) 9.43 ימים.  
 (12) 16:00

## שאלות שונות:

### שאלות:

(13) בנק א' נותן ריבית של 3% כל שנתיים בתוכנית חיסכון מסוימת. בנק ב' נותן ריבית של 4.5% כל 3 שנים בתוכנית חיסכון אחרת. אדם מתכוון להפקיד סכום כסף מסוים לתקופה של 18 שנה. באיזה בנק כדאי לו להשקיע את כספו?

(14) נתונות שתי תרבויות חיידקים, כל אחת גדלה בצורה מעריכית. בשעה מסוימת בתרבות א' היו 4,000 חיידקים ובתרבות ב' היו 500 חיידקים. נסמן:

$t_1$  - הזמן שחלף עד שבתרבות א' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבות ב'.

$t_2$  - הזמן שחלף עד שבתרבות ב' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבות א'.

חשב את היחס  $\frac{t_1}{t_2}$ .

(15) מספר החיידקים בתרבות גדל ב- $p\%$  בכל שעה. בשעה מסוימת מספר החיידקים היה  $m$ . כעבור  $t$  שעות הוציאו  $m$  חיידקים מהתרבות וכעבור עוד  $t$  שעות היו  $6m$  חיידקים בתרבות. הבע את  $t$  באמצעות  $p$ .

### הערה:

שאלות 16-17 עוסקות בפתרון בעיות קיצון מעריכיות.

(16) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 700 \cdot 1.08^x - 200x$ . מצא את ערך ה- $x$  של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

(17) נתונות שתי בריכות דגים. בבריכה א' קצב הריבוי של מספר הדגים הוא 10% בחודש ובבריכה ב' הוא 20% בחודש. כמות הדגים בבריכה א' גדולה פי 5 מכמות הדגים בבריכה ב'. בעוד כמה חודשים לערך ההפרש בין כמות הדגים בבריכה א' לכמות הדגים בבריכה ב' יהיה מקסימלי?

(18) כמות עצים ביער גדלה בצורה מעריכית לפי אחוז ריבוי של 15% לשנה. בשנת 1990 נספרו כמות עצים מסוימת ביער. בשנת 2000 כרתו 30,000 עצים ולאחר 5 שנים נוספות, בשנת 2005, נספרו ביער 753365 עצים. מצא כמה עצים היו ביער בשנת 1990.

- (19)** ערכה של דירה יורד מדי שנה באחוז קבוע של 6%. ידוע כי ערך הדירה לאחר 10 שנים מיום מכירתה נמוך ב-35,000 ₪ ממחירה המקורי.
- א. מצא את המחיר ההתחלתי של הדירה.
- ב. מצא לאחר כמה שנים ערך הדירה ירד מתחת ל-30,000 ₪.
- (20)** שני בנקים מציעים שתי תכניות חיסכון כלהלן:
- בנק א' מציע תכנית חיסכון ל-8 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-80%.
- בנק ב' מציע תכנית חיסכון ל-6 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-60%.
- א. באיזה בנק אחוז הריבית השנתית גבוה יותר?
- ב. דני משקיע סכום כסף  $k$  לפי תכנית חיסכון של בנק א' ובתום התוכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק ב'.
- רפי משקיע סכום כסף  $k$  לפי תכנית חיסכון של בנק ב' ובתום התכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק א'.
- למי יהיה סכום גדול יותר בתום שתי התכניות?
- נמק את תשובתך והראה חישוב מתאים.
- (21)** שווי שתי מכוניות המוצעות למכירה הוא:
- מכונית א' - 60,000 ₪ ומכונית ב' - 85,000 ₪.
- ידוע כי ערך מכונית ב' יורד ב-4% בכל שנה
- וערך מכונית א' יורד ב-2.5% בכל שנה.
- א. מצא בעוד כמה שנים יהיו המחירים של שתי המכוניות זהים.
- ב. סיגל רוצה לקנות מכונית ולרשותה עומד סכום של 40,000 ₪.
- איזו מכונית תוכל לקנות סיגל קודם ולאחר כמה שנים מיום הצעתן?
- (22)** כמות אצות בים מתרבה בצורה מעריכית. ידוע כי לאחר 40 שנים כמות אצות מכפילה את עצמה. כדי לצמצם את כמות האצות מבצעים עבודות ניקיון מדי שנה ובהן מנקים כ-200 ק"ג אצות. בחוף מסוים היו בשנת 1990 כ-1200 ק"ג אצות.
- א. מצא את קצב גידול האצות השנתי.
- ב. מצא כמה אצות יהיו בחוף המסוים בשנת 1993 לאחר הניקיון באותה שנה.
- (23)** נתונות שתי כמויות התחלתיות זהות, האחת גדלה בצורה מעריכית והשנייה קטנה בצורה מעריכית. לשתי הכמויות אחוז גדילה/דעיכה קבוע והוא 5%.
- א. האם הזמן שבו הכמות הראשונה תגדל לכמות הכפולה מהכמות ההתחלתית שלה שווה לזמן שבו תקטן הכמות השנייה למחצית מהכמות ההתחלתית שלה? נמק והראה חישוב מתאים.
- ב. ללא קשר לנתון הקודם, הראה כי כדי ששתי הכמויות יגיעו ליעדיהן באותו הזמן אז הבסיסים שלהן  $(q_1, q_2)$  צריכים להיות מספרים הופכיים.

- (24) כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית לפי אחוז קבוע  $p$  מדי שעה. ביום מסוים היו  $k$  גרם מהחומר. לאחר 3 שעות הוסיפו עוד  $k$  גרם לכמות שנותרה ולאחר 3 שעות נוספות מתברר שנשארו  $k$  גרם מהחומר. מצא את  $p$ .
- (25) ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית. ידוע כי בשנת 1980 הייתה המנייה שווה  $k$  שקלים. המנייה גדלה באחוז קבוע של 2% לשנה עד לשנת 1992 ומשם צנחה בקצב של 5% לשנה במשך 8 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה שנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא  $1.5k$ . מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר הצניחה שלה.
- (26) מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של 3% לשנה. בשנה מסוימת נספרו 2300 עופות בשמורה, לאחר 5 שנים הוסיפו לשמורת הטבע 1000 עופות נוספים. א. מצא כמה עופות יהיו בשמורה לאחר 5 שנים נוספות. ב. מצא תוך כמה שנים יהיה מספר העופות בשמורה זהה לזה שמצאת בסעיף א' אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים, אלא אם הייתה גדילה רציפה.
- (27) אדם מפקיד סכום של 120,000 ₪ לפי ריבית דריבית של 12% בשנה. כעבור  $t$  שנים הוא משך את כל הסכום שעמד לרשותו והפקיד אותו ל- $t$  שנים נוספות בתוכנית חיסכון חדשה לפי ריבית דריבית של 15%. בתום תקופה זו עמד לרשותו סכום של 330,252 ₪. א. מצא את  $t$ . לאחר תקופה זו הוא מפקיד את סכום הכסף הסופי בתכנית לפי ריבית דריבית מסוימת. לאחר 5 שנים עמד לרשותו סכום של 821,772 ₪. ב. מצא את אחוז הריבית החדש.
- (28) ערכן של שתי חלקות אדמה יורד בצורה מעריכית. ידוע כי בזמן שערכה של אדמה א' מגיע למחצית מערכה המקורי, ערכה של אדמה ב' מגיע ל-30% מערכה המקורי. לאחר 50 שנים אדמה א' מאבדת 60% מערכה. א. מצא את אחוז הדעיכה של אדמה ב'. ב. ידוע כי לאחר 100 שנים ערכן של שתי האדמות שווה. ערכה המקורי של אדמה ב' הוא 100,000 ₪. מצא את ערכה המקורי של אדמה א'.

- (29)** מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של  $p$  אחוזים לשנה. בשנה מסוימת נספרו 3000 עופות בשמורה, לאחר 4 שנים הוסיפו לשמורה 1000 עופות נוספים.
- א. מצא את אחוז הגידול השנתי  $p$  אם ידוע כי לאחר 4 שנים נוספות היו בשמורת 5647 עופות.
- ב. מצא לאחר כמה שנים יהיו 5647 עופות אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים.
- (30)** בכוורת דבורים ידוע כי בכל 10 שעות כמות הדבורים גדלה פי 1.5.
- א. מצא באיזה אחוז גדלה כמות הדבורים בכל שעה.
- ב. מוציאים לאחר 10 שעות 3000 דבורים וידוע כי נשארו 1500 דבורים. חשב כמה דבורים היו בתחילה בכוורת.
- (31)** אדם מפקיד  $k$  שקלים בתוכנית חיסכון לפי ריבית שנתית של  $p\%$ . לאחר 5 שנים הוא מושך מהחיסכון  $k$  שקלים ולאחר 5 שנים נוספות מתברר כי הצטבר בפיקדון שלו סך הכול  $2.5k$  ₪. מצא את  $p$ .
- (32)** ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית.
- ידוע כי בשנת 1995 הייתה המנייה שווה  $k$  שקלים.
- המנייה גדלה באחוז קבוע של 5% לשנה עד לשנת 2000 ושם צנחה בקצב של 8% לשנה במשך 6 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה בשנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא  $k$ . מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר צניחתה.

**תשובות סופיות:**

(13) בנק א'.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2} \quad (14)$$

$$t = \frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{100+P}{100}\right)} \quad (15)$$

(16)  $x = 17.04$ , מינימום.

(17) 11 חודשים.

(18) 100,000 עצים.

(19) א. 75,858.5 ₪ ב. לאחר 15 שנים.

(20) א. בנק ב' ב. לשניהם אותו הסכום.

(21) א. לאחר 22.46 שנים. ב. מכונית א' ולאחר 16 שנים.

(22) א. 1.017 ב. 653.48 ק"ג אצות.

(23) א. הכמות השנייה תגיע ליעדה לפני הראשונה.

(24) 14.82%

(25) ב-5.95%

(26) א. 4250 עופות. ב. 20.77 שנים.

(27) א.  $t = 4$  ב.  $p = 20\%$ 

(28) א. 3.13% ב. 25,909 ₪

(29) א. 5% ב. 12.96 שנים.

(30) א. ב-4.1% ב. 3000 דבורים.

(31) 16.63%

(32) ב-6.6%

# מתמטיקה א

פרק 8 - סדרות

תוכן העניינים

|                                |           |
|--------------------------------|-----------|
| 1. הקדמה כללית                 | (ללא ספר) |
| 2. סדרה חשבונית                | 106       |
| 3. סדרה הנדסית                 | 113       |
| 4. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת | 118       |

## סדרה חשבונית:

### סיכום כללי:

- נוסחת האיבר הכללי:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר  $a_1$  והפרשה הוא  $d$  נתונה ע"י:  $a_n = a_1 + d(n-1)$ , כאשר:  $n$  הוא מיקום האיבר שערכו  $a_n$  בסדרה.

- כלל נסיגה של סדרה חשבונית:

כלל נסיגה של סדרה חשבונית  $a_n$  שהפרשה הוא  $d$  ואיברה הראשון הוא  $a_1$  נתון ע"י:  $a_{n+1} - a_n = d$ .

- נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

סכום  $n$  האיברים הראשונים של סדרה חשבונית  $a_n$  שהפרשה הוא  $d$  ואיברה הראשון הוא  $a_1$  נתון ע"י:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$$

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים:

### שאלות:

- (1) נתונה הסדרה החשבונית:  $17, 11, 5, -1, -7, \dots$ . מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.
- (2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.
- (3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית:  $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, \dots, 49.5$ .

- (4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24. מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.
- (5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?
- (6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?
- (7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית:  $91, 88, 85, 82, \dots$ .
- (8) מצא את ערכו של  $x$  אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית:  $x-3, 3x-4, x^2-1$ .
- (9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: 
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.
- (10) בסדרה חשבונית  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים. א. הוכח:  $a_5 = 0$ . ב. נתון:  $a_3 - a_{11} = 24$ . מצא את  $a_1$  ואת  $d$ . ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה  $b_n$  המקיימת:  $b_n = 2a_n - 3$ . מצא את ערך האיבר השלישי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.
- (11) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית:  $-3, 2, 7, 12, \dots$ .

- (12) נתונה הסדרה החשבונית :  $5, -1, -7, -13, \dots$ . כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?
- (13) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?
- (14) נתונה הסדרה החשבונית :  $63, -67, -71, \dots$ . כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?
- (15) נתונה הסדרה החשבונית :  $4, 13, 22, 31, \dots$ . בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.
- (16) נתונה הסדרה החשבונית :  $4, 9, 14, 19, \dots, 599$ . מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.
- (17) סכום  $n$  האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת  $3n$  איברים גדול ב-1024 מסכום  $n$  האיברים הראשונים שבה.  
א. בטא את  $n$  באמצעות הפרש הסדרה,  $d$ .  
ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?
- (18) נתונה סדרה שבה  $S_n = 2n^2 + 4n$ .  
א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.  
ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.
- (19) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5, ה-7, וה-16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.  
א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.  
ב. מצא את האיבר השלישי הראשון בסדרה.  
ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

$$(20) \quad \begin{cases} 150, 144, 138, \dots \\ 90, 93, 96, \dots \end{cases} \text{ נתונים שני טורים חשבוניים:}$$

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

ב. מחברים את  $n$  האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם  $n$  האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את  $n$  אם ידוע שהוא קטן מ-20.

(21) נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות:  $a_n$  שהפרשה הוא  $d_1$  ו- $b_n$  שהפרשה

$$\text{הוא } d_2. \text{ ידוע כי: } d_1 = -2d_2.$$

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה  $a_n$  גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה  $b_n$ .

א. מצא את הפרש הסדרה  $a_n - d_1$ .

ב. ידוע כי האיבר  $a_{10}$  קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר  $b_{50}$ .

מצא את  $a_1$  ואת  $b_1$ .

(22) נתונה הסדרה החשבונית:  $-21, -17, -13, \dots$

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(23) בסדרה חשבונית שהפרשה  $d$  ובה  $2n$  איברים סכום האיברים במקומות

האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.

הוכח כי  $nd = 60$ .

(24) בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים,

גדול סכום כל איברי הסדרה פי  $1\frac{14}{15}$  מסכום איברי הסדרה הנמצאים

במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

**(25)** לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית:  $x-5$ ,  $x-16$ ,  $2x+23$ .

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את  $x$ .

ii. מצא את הפרש הסדרה.

ב. ידוע כי:  $a_{12} = 0$ . מצא את  $a_1$ .

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא:  $a_n = 308$ .

מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

**(26)** בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים

העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6.

האיבר הראשון אינו אפס.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i.  $a_1 = -4d$ .

ii.  $S_9 = 0$ .

ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.

מצא את  $a_1$  ואת  $d$ .

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים

במקומות הזוגיים הוא 504.

**(27)** בסדרה חשבונית שבה  $2n$  איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66

מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח כי  $nd = 66$ .

ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות  $a_1$  את סכום  $n$  האיברים

הראשונים.

ג. סכום  $n$  האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן

ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

**(28)** אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.

ההצעה הראשונה :

לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום

הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.

ההצעה השנייה :

לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום

הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.

ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים

שבהצעה הראשונה.

א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.

ב. מה מחיר הרכב?

## תשובות סופיות:

- (1)  $a_{43} = -235$
- (2)  $d = 4, a_1 = -5$
- (3) 20 איברים.
- (4) 48 איברים.
- (5) 15 קפיצות.
- (6) 58 מספרים.
- (7) 31 איברים חיוביים.
- (8)  $x = 4, x = 1$
- (9)  $a_{19} = 59$
- (10) א. הוכחה.
- (11)  $S_{14} = 413$
- (12) 21 איברים.
- (13) 16 דקות.
- (14) 37 איברים.
- (15) 3647
- (16) 23920
- (17) א.  $n = \sqrt{\frac{512}{d}}$  ב. 24 איברים.
- (18) א.  $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$  ב.  $d = 4$
- (19) א.  $a_1 = 50, d = -6$  ב.  $a_{10} = -4$  ג.  $n = 6$
- (20) א.  $n = 81$  ב.  $n = 16$
- (21) א.  $d_1 = 4$  ב.  $a_1 = -52, b_1 = 95$
- (22) אי-זוגיים:  $S = 99$  זוגיים:  $S = 135$
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) 29 איברים.
- (25) א. i.  $x = -50$  ii.  $d = 11$  ב.  $a_1 = -121$  ג.  $S = 2156$
- (26) א. הוכחה. ב.  $a_1 = -8, d = 2$  ג.  $n = 36$
- (27) א. הוכחה. ב.  $S = 22a_1 + 693$  ג.  $a_9 = 1$
- (28) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 נח.

## סדרה הנדסית:

### סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר  $a_1$  ומנתה היא  $q$  נתונה ע"י הנוסחה:  $a_n = a_1 q^{n-1}$ , כאשר:  $n$  הוא מיקום האיבר שערכו  $a_n$  בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה הנדסית:**

כלל נסיגה של סדרה הנדסית  $a_n$  שמנתה היא  $q$  ואיברה הראשון הוא  $a_1$  נתון ע"י הקשר הבא:  $a_{n+1} = a_n \cdot q$ .

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:**

סכום  $n$  האיברים הראשונים של סדרה הנדסית  $a_n$  שמנתה היא  $q$  ואיברה

$$\text{הראשון הוא } a_1 \text{ נתון ע"י: } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

### שאלות:

(1) נתונה הסדרה ההנדסית:  $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$ .

מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

(2) מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית:  $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{64}{81}$ .

(3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

(4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

- (5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
- (6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?
- (7) מצא את ערכו של  $x$  אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית:  $x-6, x+4, 4x+1$ . מצא גם את מנת הסדרה.
- (8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: 
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.
- (9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: 5, 10, 20, 40, ....
- (10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?
- (11) סכום  $n$  האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת  $3n$  איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום  $n$  האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?
- (12) בסדרה הנדסית עולה שבה  $n$  איברים, סכום  $n-3$  האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום  $n-3$  האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.
- (13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

**(14)** המספרים:  $2x-3$ ,  $x-9$ ,  $x-13$  הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

- א. מצא את  $x$ .
  - ב. ענה על הסעיפים הבאים:
    - i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.
    - ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.
    - ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא:  $a_n = 5^{11}$ .
- מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

**(15)** נתונה הסדרה ההנדסית הבאה:  $a_1, 4, 12, 36, \dots, a_{n+1}$ . מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה  $b_n$  באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6}, \quad b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6}, \quad b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6}, \quad \dots, \quad b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}$$

- א. הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.
- ב. הראה כי היחס בין סכום  $n$  האיברים הראשונים של הסדרה  $a_n$  ובין סכום  $n$  האיברים הראשונים של הסדרה  $b_n$  הוא  $\frac{2}{3}$ .
- ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה  $b_n$  שסכומם מהווה  $\frac{2}{9}$  מ- $a_8$ .

**(16)** נתונה הסדרה ההנדסית:  $7, 14, 28, \dots$ . בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

**(17)** בסדרה הנדסית ובה  $2n$  איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

**(18)** נתונה סדרה הנדסית שמנתה  $q$  ובה מספר זוגי של איברים. בטא באמצעות  $q$  את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

**(19)** בסדרה הנדסית שבה  $2n+1$  איברים, סכום  $n$  האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום  $n$  האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

**(20)** ענה על הסעיפים הבאים :

- א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה  $2n$  איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.
- בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.
- ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.
- ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

**(21)** בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

- ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8.
- מצא את האיבר הראשון בסדרה.
- ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

**(22)** באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה :

תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא : כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת, כנגד השנייה - שתי אבנים, כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...

המלך הסכים להצעה.

- א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?
- ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.
- ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא : תן עבור כל משבצת זוגית  $2^n$  אבנים, כאשר  $n$  הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

## תשובות סופיות:

(1)  $a_9 = 729$

(2)  $n = 7$

(3)  $a_1 = \pm \frac{1}{4}, q = \pm 2$

(4)  $a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3$

(5)  $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5$

(6) 5 דקות.

(7)  $x = -\frac{2}{3} \rightarrow q = -\frac{1}{2}, x = 11 \rightarrow q = 3$

(8)  $a_8 = 384$

(9)  $S_9 = 2555$

(10) 5 דקות.

(11)  $n = 4$ , יש 12 איברים בסדרה.

(12)  $q = 2$

(13)  $n = 6$

(14) א.  $x = 14$  ב. i.  $a_n = 5^{n-1}$  ב. ii.  $a_6, a_7$  ג.  $S_7^* = 61,034,375$

(15) א.  $q = 3$  ג.  $b_5, b_6$

(16) אי-זוגיים:  $S = 595$ , זוגיים:  $S = 1190$

(17)  $q = 4$

(18)  $\frac{q+1}{q}$

(19)  $a_1 = \frac{3}{8}$

(20) א.  $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$  ב.  $a_n = 3^{n-1}$  ג.  $a_5, a_6$

(21) א.  $q = 2$  ב.  $a_1 = 1$  ג.  $S_{6(p)} = 2730$

(22) א.  $a_{25} = 16,777,216$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו

לו 20,000,000 אבנים. ג.  $2^{24}, 4, 16, 64, \dots, 22,369,620$   $S_n =$

## סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

### סיכום כללי:

#### • הגדרה:

סדרה הנדסית  $a_n$  המקיימת:  $|q| < 1$ ,  $(q \neq 0)$  נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

#### • נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת  $a_n$  ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל:  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

$$S = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{מתקבל הכלל הבא:}$$

#### • סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

○ כאשר מתבקשים לחשב סכום של  $n$  איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה:  $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ .

○ כאשר מתבקשים לחשב סכום של  $n$  איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר  $a_k$  יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה

$$S_n = \frac{a_k(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{באופן הבא:}$$

## שאלות:

(1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה:  $12, 4, 1\frac{1}{3}, \dots$

(2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה  $\frac{1}{4}$  הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

(3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

(4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא  $9\frac{1}{3}$ . מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

\*הערה: שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.

(5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת  $a_n$  שמנתה  $q$ ,  $(q \neq 0, |q| < 1)$ , מגדירים שלוש סדרות חדשות:  $b_n$ ,  $c_n$  ו- $d_n$  באופן הבא:

| הסדרה: | $b_n$                                            | $c_n$                     | $d_n$             |
|--------|--------------------------------------------------|---------------------------|-------------------|
| הכלל:  | $b_1 = a_1$                                      | $c_1 = a_2^2 - a_1^2$     | $d_1 = S_a + a_1$ |
|        | $b_2 = a_1 + a_2$                                | $c_2 = a_3^2 - a_2^2$     | $d_2 = S_a + a_2$ |
|        | $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$                          | $c_3 = a_4^2 - a_3^2$     | $d_3 = S_a + a_3$ |
|        | $\vdots$                                         | $\vdots$                  | $\vdots$          |
|        | $b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_{a(n)}$ | $c_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$ | $d_n = S_a + a_n$ |

הסכום  $S_a$  הוא סכום הסדרה  $a_n$ , והסכום  $S_{a(n)}$  הוא סכום  $n$  האיברים הראשונים של הסדרה  $a_n$ .

- א. קבע אלו מבין הסדרות  $b_n$ ,  $c_n$  ו- $d_n$  הן הנדסיות והבע את מנתן ע"י  $q$ .
- ב. הבע באמצעות  $a_1$  בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.
- ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א' ב- $S_{(s)}$ . הוכח כי לא קיים ערך של  $q$  עבורו סכום ריבועי האיברים  $S_{(s)}$ , שווה לסכום הסדרה הנ"ל בריבוע.

(6) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת:  $a_n$  שמנתה  $q$ .

מגדירים סדרה חדשה  $b_n$  באופן הבא:

$$b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q}, b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q}, b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q}, \dots, b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q}, \dots$$

כאשר:  $S_n^*$  מייצג את סכום הסדרה  $a_n$  החל מהאיבר  $a_n$  (ועד אינסוף).

- א. הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות  $a_1$  ו- $q$ .
- ב. ידוע כי סכום הסדרה  $b_n$  הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$  גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה  $b_n$ . מצא את  $a_1$  ו- $q$ .
- ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים:  $b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = 42$ .
- ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה  $b_n$ .
- ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה  $b_n$ .
- ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה  $b_n$  כך שנוצרת הסדרה:  $b_n^*$ . חשב את סכום הסדרה  $b_n^*$ .
- ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה  $b_n$  כך שנוצרת הסדרה:  $b_n^{**}$ . חשב את סכום הסדרה  $b_n^{**}$ .
- ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה  $b_n$ . מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(s)}$  (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית  $b_n$  ב- $S_b$ . הראה כי:  $S_b^2 \neq S_{(s)}$ .
- ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה  $a_n$  וסכום איברי הסדרה  $b_n$  הוא  $\frac{2}{3}$ .

- (7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא:  $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$ .
- הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.
  - ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.
  - מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.
- (8) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת  $a_n$  ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי  $1\frac{2}{3}$  מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
- מצא את מנת הסדרה.
  - מחברים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה  $b_n$ .
  - הוכח כי הסדרה  $b_n$  גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.
  - הראה כי סכום הסדרה  $b_n$  שווה לסכום הסדרה  $a_n$ .
  - סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה  $a_n$ .
- (9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית  $a_1, a_2, a_3, \dots$  שמנתה היא  $q$ ,  $(0 < q < 1)$ .
- נגדיר את הסכומים הבאים:  $T = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10} + \dots$ ,  $V = a_3 + a_7 + a_{11} + \dots$ . נתון כי:  $T = 6V$ .
  - מצא את מנת הסדרה  $q$ .
  - פי כמה קטן  $V$  מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?
  - מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא  $1365\frac{1}{3}$ .
- (10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$  שמנתה היא  $q$ .
- בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא:  $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{2n}^2$ .
  - הוכח כי היחס בין סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.
  - בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
  - מצא את מנת הסדרה.
  - מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר  $a_n$  כלשהו.
  - ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר  $a_n$ .

- 11** נתונה סדרה הנדסית אינסופית  $a_1, a_2, a_3, \dots$  שמנתה היא  $q$ ,  $(q \neq 0, |q| < 1)$ .  
 נגדיר את הסכומים הבאים:  $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13} + \dots$ ,  $V = a_2 + a_7 + a_{12} + \dots$ .  
 נתון כי:  $V = 0.3T$ .  
 א. מצא את מנת הסדרה  $q$ .  
 מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.  
 ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.  
 ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

## תשובות סופיות:

$$S = 18 \quad (1)$$

$$a_1 = 24 \quad (2)$$

$$q = \frac{4}{5}, a_1 = 12 \frac{1}{2} \text{ או } q = \frac{1}{5}, a_1 = 50 \quad (3)$$

$$S = 18 \frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{q-1}}{\frac{a_n(q^n-1)}{q-1}} = \frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{a_n(q^n-1)} = q \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q^n-1} : b_n \text{ הסדרה } (5)$$

היות והיא תלויה ב- $n$  היא אינה הנדסית.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^4 - a_n^2 q^2}{a_n^2 q^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^2 (q^2 - 1)}{a_n^2 (q^2 - 1)} = q^2 : c_n \text{ הסדרה } c_n \text{ הנדסית}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S + a_{n+1}}{S + a_n} = \frac{\frac{a_1}{1-q} + a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q} + a_n} = \frac{a_1 + (1-q)a_{n+1}}{a_1 + (1-q)a_n} = \frac{a_1(1 + (1-q)q^n)}{a_1(1 + (1-q)q^{n-1})} = \frac{q^n - q^{n+1} + 1}{q^{n-1} - q^n + 1} : d_n \text{ הסדרה}$$

$$S_{(c_n)} = \frac{c_1}{1-q_c} = \frac{a_2^2 - a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^2(q^2-1)}{1-q^2} = -a_1^2. \text{ ב. } \text{היות והיא תלויה ב-} n \text{ היא אינה הנדסית.}$$

ג. מההשוואה:  $S_{(s)} = S^2$  מקבלים כי פתרון המשוואה הוא:  $q = 0, \pm 1$ .

כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה  $a_n$  היא שבר.

עבור  $|q| > 1$  הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של  $q$  עבורו השוויון יתקיים. מש"ל.

$$b_n = \frac{a_1}{1-q} q^{n-1} \quad \text{א.} \quad a_1 = 56, q = \frac{1}{3} \quad \text{ב.} \quad \text{ג. הוכחה.} \quad \text{ד. } 31.5 \quad (6)$$

$$\text{ה. } 94.5 \quad \text{ו. } -63 \quad \text{ז. } 63 \quad \text{ח. } 7938$$

$$S^2 : \text{משמעו: } (b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots)^2$$

$$S_{(s)} : \text{משמעו: } b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + \dots \text{ ברור כי הביטויים אינם שווים.}$$

$$q = \frac{1}{3}, a_1 = 16 \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה.} \quad (7)$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{a_{2n-1} + a_{2n}} = q^2 \quad \text{ב.} \quad q = 0.6 \quad \text{א.} \quad a_1 = 200 \quad \text{ז.} \quad (8)$$

$$q = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \text{ב. פי 5} \quad \text{ג. } a_1 = 1024 \quad (9)$$

$$a_5 = 20 \quad \text{ג.} \quad q = 0.5 \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה.} \quad (10)$$

$$S = 288 \quad \text{ג.} \quad a_1 = -16 \quad \text{ב.} \quad q = \frac{1}{3} \quad \text{א.} \quad (11)$$

# מתמטיקה א

## פרק 9 - הפונקציות האלמנטריות

### תוכן העניינים

1. מושג הפונקציה ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית והלוגריתמית ..... (ללא ספר)
5. פונקציות בסיסיות וההזזות (שיקופים) שלהן ..... (ללא ספר)
6. תרגול הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
7. תרגול הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)

## מתמטיקה א

### פרק 10 - גבולות

#### תוכן העניינים

1. הסבר כללי על חישוב גבול של פונקציה ..... (ללא ספר)
2. חישוב גבול של פונקציה בשיטת ההצבה ..... (ללא ספר)
3. חישוב גבול בשיטת הצמצום ..... (ללא ספר)
4. חישוב גבול בשיטת כפל בצמוד ..... (ללא ספר)
5. איקס שואף לאינסוף ..... (ללא ספר)
6. פונקציה השואפת לאינסוף ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה א

פרק 11 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. תרגול בכללי הגזירה ..... 124

## תרגול בכללי הגזירה

## שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 27-35 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 32 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$y = x^{\ln x} \quad (30) \quad f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

$$y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (33) \quad y = x^{\sqrt{x}} \quad (32) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (31)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (35) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (34)$$

**הערה:** בשאלות 28 ו-29 נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתייהן.

## תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[ \frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (20)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2\tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}} \cdot 2, \quad f''(x) = \frac{4(2x+3)}{(1-(2x+3)^2)^{1.5}} \quad (25)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (26)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left( \cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (27)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left( \frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (29)$$

$$y' = x^{\ln x} \left( \frac{2 \ln x}{x} \right) \quad (30)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (31)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left( \frac{\ln x}{2} + 1 \right) \quad (32)$$

$$y' = \left( \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \left( \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (33)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left( 1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x \right) \quad (34)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (35)$$

# מתמטיקה א

פרק 12 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד ..... 128

## הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים :
  - תחום הגדרה ורציפות.
  - נקודות חיתוך עם הצירים.
  - זוגיות ואי-זוגיות.
  - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
  - תחומי עלייה וירידה.
  - נקודות קיצון.
  - תחומי קמירות וקעירות.
  - נקודות פיתול.
  - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינוכית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

## מתמטיקה א

### פרק 13 - גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר

#### תוכן העניינים

|           |                                       |
|-----------|---------------------------------------|
| 129       | 1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית      |
| 133       | 2. משוואת הישר                        |
| 138       | 3. מצבים הדדיים בין ישרים             |
| 140       | 4. מציאת משוואות ישר                  |
| 141       | 5. שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר |
| (ללא ספר) | 6. נושאים מתקדמים עם משוואת הישר      |
| 147       | 7. חלוקת קטע ביחס נתון                |
| 148       | 8. מרחק נקודה מישר                    |
| 150       | 9. מיקום נקודה ביחס לישר              |
| 152       | 10. מרחק בין ישרים מקבילים            |

## מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

### סיכום כללי:

#### נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  יחושב לפי:  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .
- אמצע הקטע  $M$  שקצותיו הם:  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  הוא:  $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .

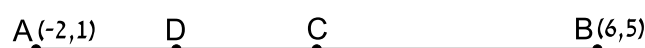
### שאלות:

#### שאלות העוסקות באמצע קטע:

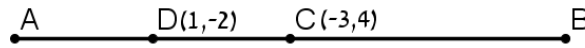
- (1) מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:
- א.  $A(1, 4), B(5, -8)$       ב.  $A(-3, 0), B(3, -2)$
- ג.  $A(4, 5), B(-4, -5)$       ד.  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), B\left(7\frac{1}{2}, -2\right)$
- ה.  $A(6, -1), B(-3, -1)$       ו.  $A(4, 7), B(4, -12)$

- (2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
- מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:
- א.  $A(4, -2), M(2, 1)$       ב.  $A(-6, -8), M(0, 0)$
- ג.  $A(13, -11), M(4, -7)$       ד.  $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right), M\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

- (3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
- ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם  $B(2, -4), C(6, 1)$ .
- מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.
- (4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
- ידוע כי:  $A(-2, 1), B(6, 5)$ . מצא את שיעורי הנקודה D.



- (5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC. ידוע כי:  $D(1, -2)$ ,  $C(-3, 4)$ . מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



- (6) הנקודות  $A(2, -7)$ ,  $B(-10, 4)$  ו- $C(6, 11)$  הן שלושה קדקודים של מקבילית ABCD. מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי, D.

### שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:

- (7) מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:
- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| א. $A(4, 7)$ , $B(-3, 7)$  | ב. $A(6, 2)$ , $B(1, 2)$   |
| ג. $A(-3, 10)$ , $B(0, 6)$ | ד. $A(6, -9)$ , $B(1, 3)$  |
| ה. $A(4, 7)$ , $B(13, -1)$ | ו. $A(6, 6)$ , $B(-9, -9)$ |
- (8) חשב את היקף המשולש ABC שקדקודיו הם:  $A(3, -2)$ ,  $B(4, 9)$ ,  $C(0, 14)$ .
- (9) נתונות נקודות  $A(14, 4)$ ,  $B(6, y)$  שמרחקן הוא 10 יחידות אורך. מצא את y.
- (10) נתונות נקודות  $A(x, -12)$ ,  $B(15, -2)$  שמרחקן הוא 26 יחידות אורך. מצא את x.

- (11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה-y שלה גדול פי 3 משיעור ה-x שלה ומרחקה מהנקודה  $A(-4, 1)$  הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

- (12) במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) ידוע כי אורכי השוקיים הוא  $\sqrt{45}$ . יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם  $(0, 4)$  ושיעורי ה-y של הקדקודים B ו-C הוא 2. מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

- (13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא  $d_{AC} = \sqrt{50}$ . מצא את היקף המלבן. ידוע כי:  $A(-3, -2)$ ,  $B(-4, 1)$ .

## שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:

14) מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

- |                         |                           |
|-------------------------|---------------------------|
| א. $A(5,2)$ , $B(4,1)$  | ב. $A(3,-2)$ , $B(-3,1)$  |
| ג. $A(7,8)$ , $B(6,15)$ | ד. $A(0,5)$ , $B(7,0)$    |
| ה. $A(6,9)$ , $B(6,-7)$ | ו. $A(4,-1)$ , $B(18,-1)$ |

15) מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו

הם:  $A(6,5)$  ,  $B(2,13)$  ,  $C(4,-7)$  מונחים עליהם.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $(3, -2)$  ב.  $(0, -1)$  ג.  $(0, 0)$
- ד.  $\left(4, -\frac{5}{8}\right)$  ה.  $(1.5, -1)$  ו.  $(4, -2.5)$
- (2) א.  $B(0, 4)$  ב.  $B(6, 8)$  ג.  $B(-5, -3)$  ד.  $B\left(1, \frac{2}{3}\right)$
- (3)  $D(4, -1.5)$
- (4)  $D(0, 2)$
- (5)  $A(5, -8)$ ,  $B(-11, 16)$
- (6)  $D(18, 0)$
- (7) א.  $d_{AB} = 7$  ב.  $d_{AB} = 5$  ג.  $d_{AB} = 5$  ד.  $d_{AB} = 13$
- ה.  $d_{AB} = \sqrt{145}$  ו.  $d_{AB} = 15\sqrt{2}$
- (8)  $P_{ABC} \approx 33.862$  יחידות אורך
- (9)  $y = -2$  או  $y = 10$
- (10)  $x = -9$  או  $x = 39$
- (11)  $B(-1, -3)$
- (12)  $B(3, -2)$ ,  $C(-3, -2)$
- (13)  $P_{ABCD} = 6\sqrt{10} \approx 18.97$  יחידות אורך
- (14) א.  $m_{AB} = 1$  ב.  $m_{AB} = -\frac{1}{2}$  ג.  $m_{AB} = -7$  ד.  $m_{AB} = -\frac{5}{7}$
- ה. שיפוע לא מוגדר. ו.  $m_{AB} = 0$
- (15)  $m_{AB} = -2$ ,  $m_{BC} = -10$ ,  $m_{AC} = 6$

## משוואת הישר:

### סיכום כללי:

#### נוסחאות כלליות:

- שיפוע ישר בין שתי נקודות  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  הוא:  $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ .

#### שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים:  $m_1 \cdot m_2 = -1$ .
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ :  $m = \tan \alpha$ .

#### משוואת הישר:

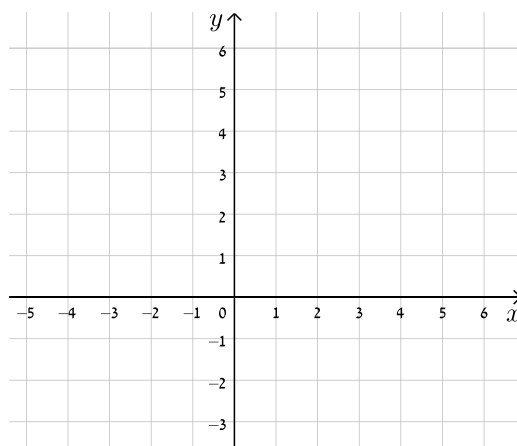
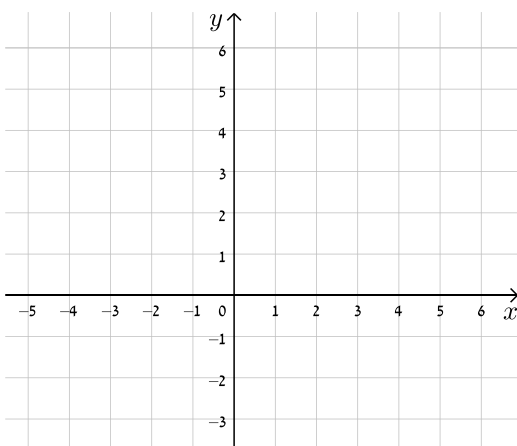
- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה:  $y = mx + n$ .
- כאשר:  $m$  הוא שיפוע הישר ו- $n$  הוא ערך ה- $y$  של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $y$ .
- נוסחה למציאת משוואת ישר:  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .

### שאלות:

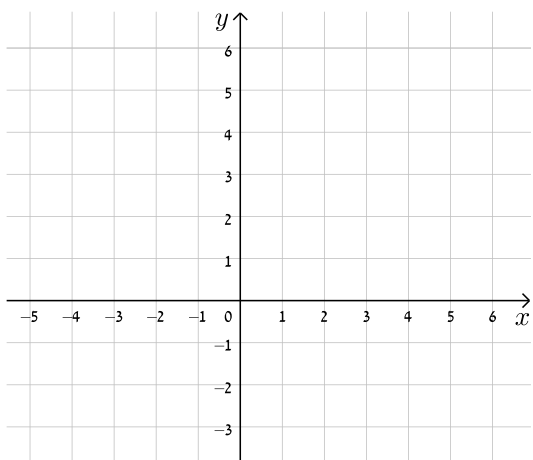
16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

ב.  $y = -x + 5$

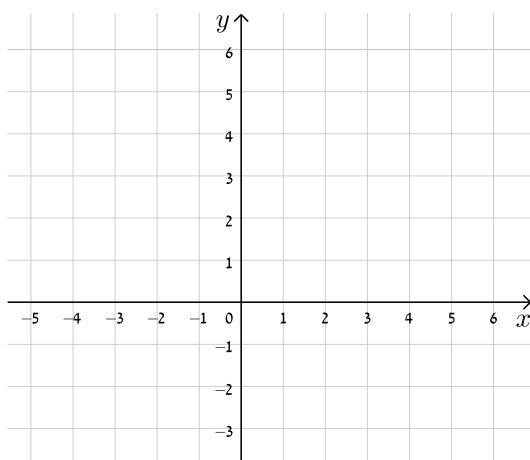
א.  $y = x + 4$



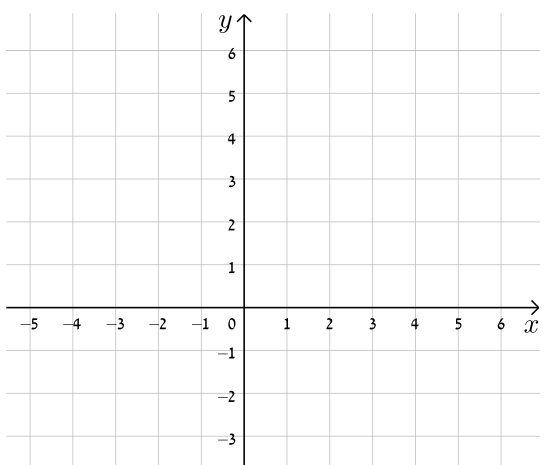
$$y = -3x + 5 \quad \text{ד.}$$



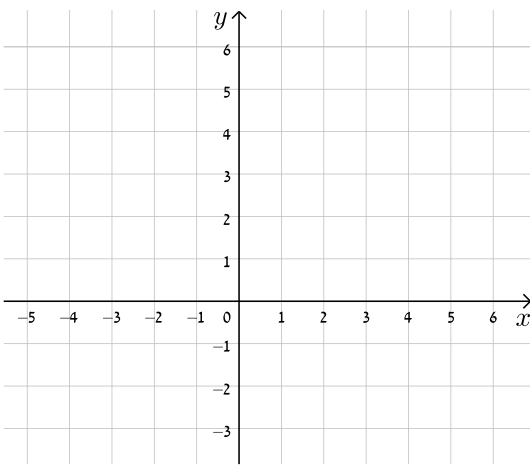
$$y = 2x - 3 \quad \text{ג.}$$



$$y = 8 - 4x \quad \text{ו.}$$

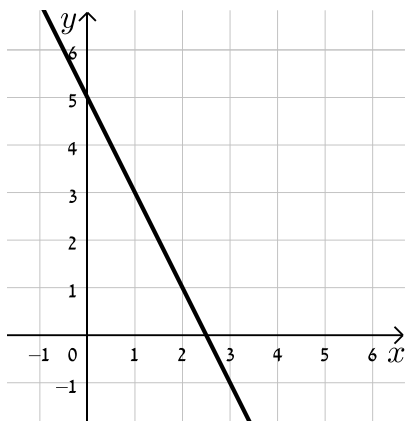


$$y = 3x - 1 \quad \text{ה.}$$

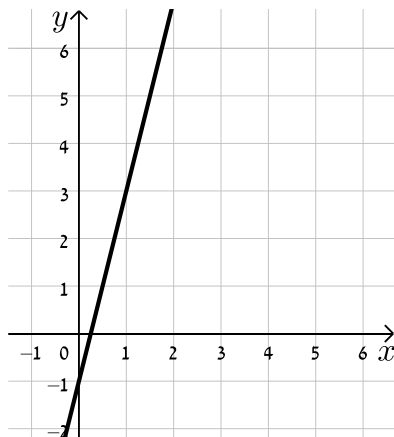


17) כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

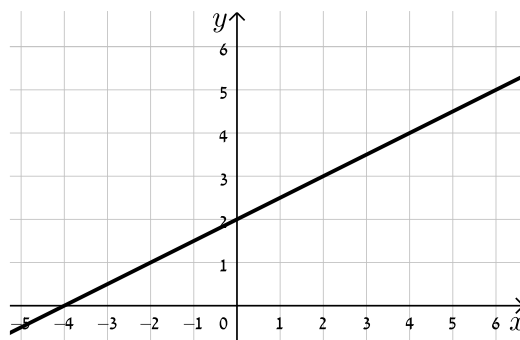
ב.



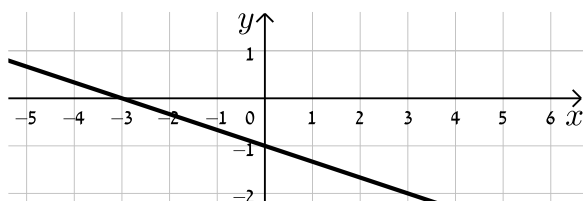
א.



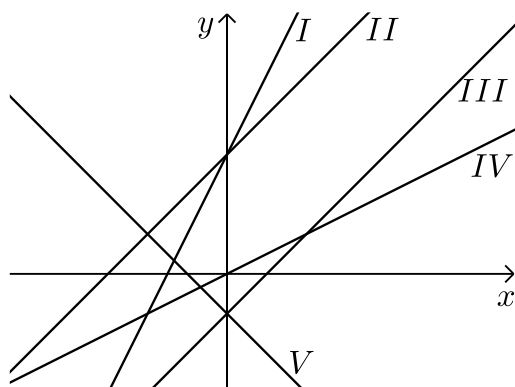
ג.



ד.



18) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט :



א.  $y = x + 3$

ב.  $y = -x - 1$

ג.  $y = 2x + 3$

ד.  $y = x - 1$

ה.  $y = \frac{1}{2}x$

19) נתונה משוואה הישר הבאה :  $y = 2x + 3$  . קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות

עליו :  $A(-1, 1)$  ,  $B(3, 3)$  ,  $C(0, 4)$  ,  $D(6, 15)$  .

20) נתונה משוואת הישר הבאה :  $y = mx - 2.5$  . ידוע כי הנקודה  $A(4, 2)$  נמצאת על

הישר. מצא את  $m$  וקבע האם גם הנקודה  $B(7, -2)$  נמצאת עליו.

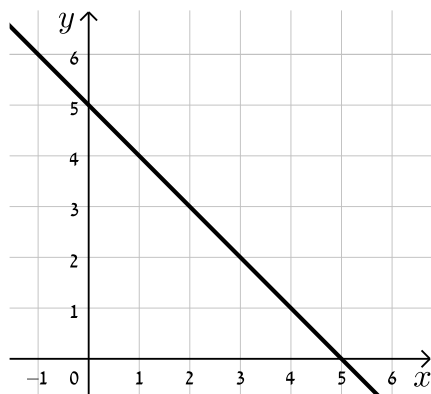
21) הנקודות  $A(5, -3)$  ,  $B(4, 1)$  נמצאות על ישר שמשוואתו היא :  $y = mx + n$  .

מצא את  $m$  ואת  $n$  .

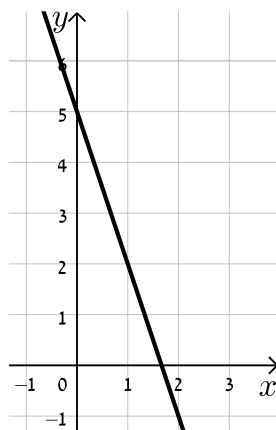
## תשובות סופיות:

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

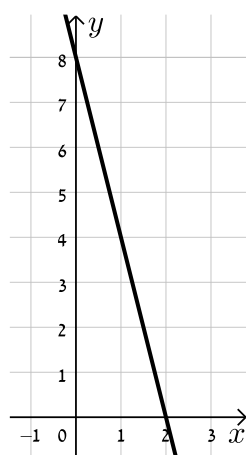
ב.



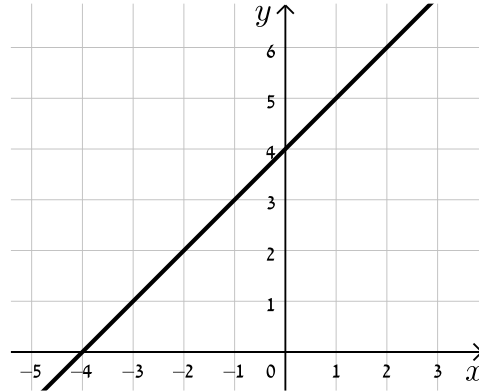
ד.



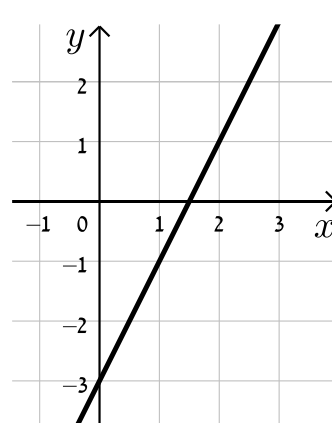
ו.



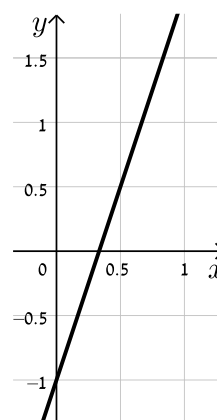
א.



ג.



ה.



- (17) א.  $y = 4x - 1$     ב.  $y = -2x + 5$     ג.  $y = \frac{1}{2}x + 2$     ד.  $y = -\frac{1}{3}x - 1$
- (18) א. II.    ב. V.    ג. I.    ד. III.    ה. IV.
- (19) נמצאות : A, D. לא נמצאות : B, C.
- (20)  $m = \frac{9}{8}$ , B לא נמצאת.
- (21)  $m = -4$ ,  $n = 17$ .

## מצבים הדדיים בין ישרים:

### סיכום כללי:

#### מצב הדדי בין שני ישרים:

- ישרים מקבילים מקיימים:  $m_1 = m_2$ ,  $n_1 \neq n_2$ .
- ישרים חותכים מקיימים:  $m_1 \neq m_2$ .
- ישרים מתלכדים מקיימים:  $m_1 = m_2$ ,  $n_1 = n_2$ .

### שאלות:

22) מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

|                                                          |                                                         |                                                        |
|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ | ב. $\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$ | ג. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$ |
|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|

23) קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

|                                                           |                                                       |
|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$   | ב. $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}$ |
| ג. $\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}$ | ד. $\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}$ |

24) קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

|                                                                    |                                                               |
|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| א. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$            | ב. $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$ |
| ג. $\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$ | ד. $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}$        |

**(25)** משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא  $y = 6x - 2$ .

- א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?  
 ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

**(26)** במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים:  $A(5, -1)$ ,  $B(3, 7)$ ,  $C(-5, 5)$ .  
 הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

### תשובות סופיות:

- (22)** א.  $(-1, 1)$       ב.  $(-6, -18)$       ג.  $(10, 16)$ .  
**(23)** א. נחתכים.      ב. מקבילים.      ג. נחתכים.      ד. מתלכדים.  
**(24)** מאונכים: ג', ד'.      לא מאונכים: א', ב'.  
**(25)** א.  $m_{AB} = m_{CD} = 6$ ,  $m_{BC} = m_{AD} = -\frac{1}{6}$ .  
 ב. הכל הפוך:  $m_{BC} = m_{AD} = 6$ ,  $m_{AB} = m_{CD} = -\frac{1}{6}$ .  
**(26)** שאלת הוכחה.

## מציאת משוואות ישר:

### שאלות:

(27) מצא את משוואות הישרים הבאים :

- א. ישר העובר דרך הנקודה  $A(1,3)$  ושיפועו  $m=2$ .
- ב. ישר העובר דרך הנקודה  $A(0,-4)$  ושיפועו  $m=\frac{1}{3}$ .
- ג. ישר העובר דרך הנקודה  $A(5,9)$  ושיפועו  $m=0$ .
- ד. ישר העובר דרך הנקודות  $A(5,-12)$  ו-  $B(6,-6)$ .
- ה. ישר העובר דרך הנקודה  $A(-6,4)$  ומקביל לישר :  $y=2x-3$ .
- ו. ישר העובר דרך הנקודה  $A(3,-5)$  ומקביל לציר ה-  $y$ .
- ז. ישר העובר דרך הנקודה  $A(-7,-3)$  ומאונך לישר :  $y=x+3$ .
- ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים :  $y=11x-4$  ו-  $y=3x-12$  ומקביל לישר :  $y=7x+5$ .

### תשובות סופיות:

- (27) א.  $y=2x+1$       ב.  $y=\frac{1}{3}x-4$       ג.  $y=9$       ד.  $y=6x-42$
- ה.  $y=2x+16$       ו.  $x=3$       ז.  $y=-x-10$       ח.  $y=7x-8$

## שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר:

### שאלות:

28) במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.

ידוע כי:  $A(3, -2)$ ,  $B(2, 4)$ ,  $D(-2, 2)$ .

א. כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.

ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.

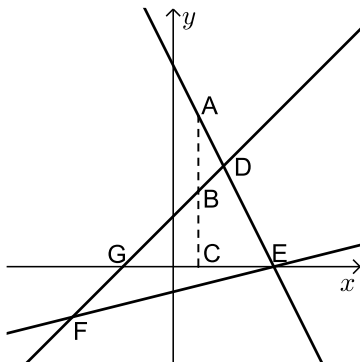
ג. כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

29) נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים  $A(-9, 1)$  ו-  $B(5, -7)$ .

משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא  $x + 3y + 6 = 0$ .

א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.

ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.



30) שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים

בשרטוט:  $2x + y - 8 = 0$ ,  $x - y + 2 = 0$ ,  $x - 4y - 4 = 0$ .

הקטע AC מקביל לציר ה-  $y$ .

א. חשב את שטח המשולש DEF.

ב. נתון:  $d_{BC} = 3$ .

חשב את אורך הקטע AB.

31) BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד  $A(-6, 1)$ .

משוואת התיכון BD היא  $x - y = 1$  ומשוואת הצלע BC היא  $3x + 5y = 67$ .

מצא את שיעורי הקדקוד C.

32) נתון טרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ) ובו משוואת השוק BC היא:  $x = 2$ .

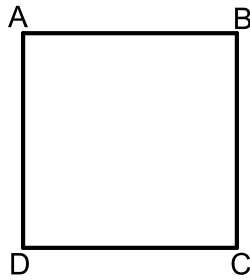
משוואת הבסיס CD היא  $2x + 3y = 7$  וידוע כי  $A(-4, 1)$ .

א. מצא את משוואת הבסיס AB.

ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו- C.

ג. מעבירים את האלכסון AC.

הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.



**33** במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3

ושיעורי הנקודה A הם: (1, 4).

א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?  
הראה חישוב מתאים.

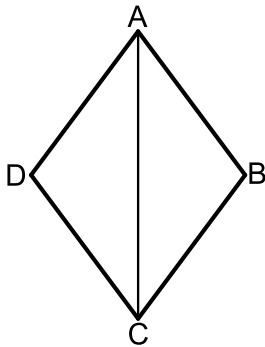
ב. נתון גם:  $D(4, 13)$ ,  $m_{CD} = -\frac{1}{3}$  ו-  $\sqrt{90}$  ס"מ  $BC =$ .

איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?  
הראה חישוב מתאים.

ג. נתון גם:  $B(-8, 7)$ .

איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?  
הראה חישוב מתאים.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.



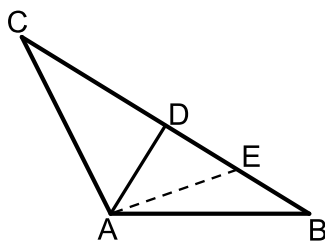
**34** המרובע ABCD הוא מעוין.

ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: (0, 6).

כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא:  $y = -1.5x + 6$  ואחת ממשוואות הצלעות היא:  $5y + x = 4$ .

א. מצא את משוואת האלכסון השני.

ב. מצא את שאר קדקודי המעוין.



**35** המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ).

ב- $\triangle ABC$  מעבירים את הגובה AD לבסיס BC

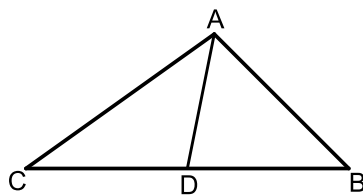
ומסמנים נקודה E כך שמתקיים:  $DE = BE$ .

קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון

כי:  $D(5, 7)$ ,  $E(8.5, 2.5)$ .

א. מצא את שיעורי שאר קדקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.



**36** נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC

של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו

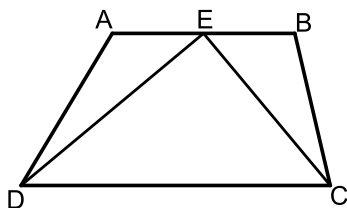
לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD.

הצלע BC מונחת על הישר:  $y = 4$  וידוע כי

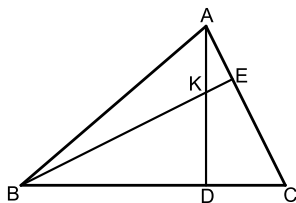
שיעור ה- $x$  של הנקודה C הוא:  $x_C = -1$ .

כמו כן נתון:  $A(7, 8)$ ,  $m_{AB} = -2$ .

- א. מצא את משוואת הצלע AB.  
 ב. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?  
 ii. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.  
 ג. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.  
 ii. איזה משולש הוא המשולש ABC?

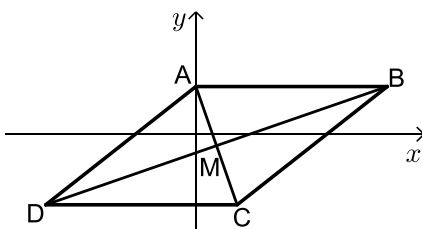


- 37** המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה- $x$ . שיעורי הנקודה B הם  $(3, 2)$  והצלע AD מונחת על הישר:  $x = -5$ . אורך הקטע DE הוא  $\sqrt{80}$ . כך ש- $\angle DEC = 90^\circ$ .  
 א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-D.  
 ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.  
 ג. מצא את שיעורי הנקודה C.  
 ד. חשב את שטח המשולש DEC.



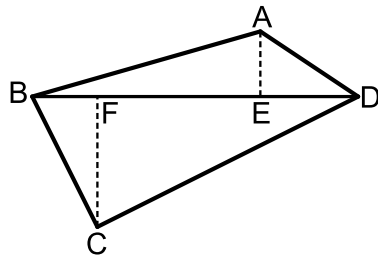
- 38** AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC.  
 ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם  $(1, 3)$ . שיעורי הנקודות D ו-E הם  $D(-2, 4)$  ,  $E(3, 5)$ .  
 א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.  
 ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.  
 ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.  
 ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.

- 39** נתון מעוין ABCD. ידוע כי הצלע CD מונחת על  $y = -7$ . אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים



- בנקודה:  $M(-0.5, -3)$ . שיפוע האלכסון AC הוא -4.  
 א. מצא את משוואת האלכסון AC.  
 ב. מצא את שיעורי הנקודה C.  
 ג. חשב את שטח המשולש BMC.

40 נתון מרובע ABCD שקודקודיו הם:  $A(3,13)$ ,  $B(-2,4)$ ,  $C(9,3)$ ,  $D(8,14)$ .



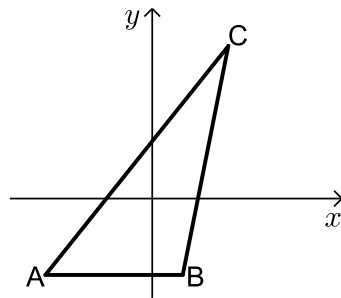
מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.

א. מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.



41 על הישר  $y = -5$  מסמנים את

הנקודות:  $A(-7,-5)$ ,  $B(2,-5)$ .

הנקודה C נמצאת על הישר:  $y = x - 5$ .

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה C ב-t.

א. הבע באמצעות t את שיעור ה-y של הנקודה C.

ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.

הבע באמצעות t את המרחקים של C מ-A ומ-B.

ג. מצא את t ואת אורך הצלע BC.

ד. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB.

ידוע כי D נמצאת ברביע השלישי.

מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח

המשולש DAC יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.

42 המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = BC$ )

ובו נתון:  $A(-4,12)$ ,  $B(x,6)$  ו-  $C(4,8)$ .

א. מצא את x.

ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת הצלע AC.

ii. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-y ב-D.

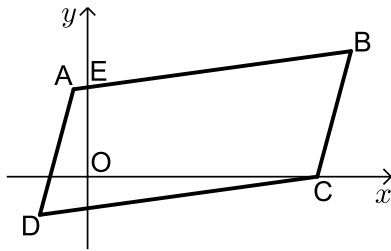
מצא את שיעורי הנקודה D.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא נקודה E ברביע הראשון ( $x_E < 5$ ) כך שהמשולש DCE יהיה גם

שווה שוקיים וישר זווית ( $\angle C = 90^\circ$ ).

ii. חשב את יחס השטחים בין המשולשים:  $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$ .



**(43)** באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.

ידועים קודקודי המקבילית הבאים:  $A(-1, y)$

ו-  $B(x, 4)$ .  $x$  ו-  $y$  נעלמים).

שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא:  $d_{CD} = \sqrt{104}$ .

א. מצא את  $x$  ו-  $y$  אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה-  $x$  בחלקו החיובי

וכי:  $d_{BC} = \sqrt{17}$ . מצא את שיעורי הקדקוד C (מצא שתי אפשרויות).

ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה-  $y$  ב- E.

שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש. מצא את האפשרות הנכונה עבור הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

## תשובות סופיות:

$$(28) \quad \text{א. } y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5} \quad \text{ב. } C(-6, 0) \quad \text{ג. } y = -\frac{2}{9}x - \frac{4}{3}$$

$$(29) \quad \text{א. } l_{BD}: y = 3x - 22 \quad \text{ב. } l_{BC}: y = -\frac{1}{8}x - 6\frac{3}{8}$$

$$(30) \quad \text{א. } 18 \text{ יח"ש } S_{EDF} \quad \text{ב. } 3 \text{ יחידות אורך } AB$$

$$(31) \quad C(14, 5)$$

$$(32) \quad \text{א. } y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \quad \text{ב. } B(2, -3), C(2, 1) \quad \text{ג. } 12 \text{ יחידות שטח } S_{ABC}$$

$$(33) \quad \text{א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.}$$

$$\text{ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.}$$

$$\text{ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות.} \quad \text{ד. } 90 \text{ יח"ש } S$$

$$(34) \quad \text{א. } y = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3} \quad \text{ב. } (5, 5), (4, 0), (-1, 1)$$

$$(35) \quad \text{א. } B(12, -2), C(-2, 16) \quad \text{ב. } y = -8x$$

$$(36) \quad \text{א. } y = -2x + 22 \quad \text{ב. i. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווי}$$

$$\text{שטח הוא תיכון.} \quad \text{ב. ii. } B(9, 4), D(4, 4)$$

$$\text{ג. ii. } AD = 5, BC = 10 \quad \text{ג. ii. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה}$$

$$\text{למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.}$$

$$(37) \quad \text{א. } D(-5, -8), A(-5, -2), E(-1, 0) \quad \text{ב. } CE: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, CD: y = \frac{1}{2}x - 5\frac{1}{2}$$

$$\text{ג. } C(5, -3) \quad \text{ד. } 30 \text{ יח"ש } S_{DEC}$$

$$(38) \quad \text{א. } AD: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}, AC: y = -x + 8 \quad \text{ב. } A(7, 1)$$

$$\text{ג. } BE: y = x + 2, BC: y = 3x + 10 \quad \text{ד. } B(-4, -2)$$

$$(39) \quad \text{א. } y = -4x - 5 \quad \text{ב. } C(0.5, -7) \quad \text{ג. } 34 \text{ סמ"ר } S_{BMC} = S_{DMC}$$

$$(40) \quad \text{א. } d_{BD} = \sqrt{200}, y = x + 6 \quad \text{ב. } E(5, 11), F(3, 9)$$

$$\text{ג. } d_{CF} = \sqrt{72}, d_{AE} = \sqrt{8} \quad \text{ד. } S_{ABCD} = 80$$

$$(41) \quad \text{א. } C(t, t-5) \quad \text{ב. i. } AC = \sqrt{2t^2 + 14t + 49}, BC = \sqrt{2t^2 - 4t + 4}$$

$$\text{ii. } 10 \text{ ס"מ } BC, t = 8 \quad \text{ג. } D(-20, -5)$$

$$(42) \quad \text{א. } x = -2 \quad \text{ג. i. } y = -0.5x + 10 \quad \text{ii. } D(0, 10) \quad \text{ד. i. } E(2, 4)$$

$$\text{ii. } \frac{S_{DCE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}$$

$$(43) \quad \text{א. } x = 9, y = 2 \quad \text{ב. } C(8, 0), C(10, 0) \quad \text{ג. } C(8, 0)$$

## חלוקת קטע ביחס נתון:

### סיכום כללי:

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  ביחס של  $k:l$  הם:  $x_p = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}, y_p = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}$  (בהצלבה).

### שאלות:

- (1) הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון:  $A(2, -5)$ ,  $B(-12, 16)$ .

מצא את ערכי הנקודה P, אם נתון כי:  $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5}$ .

- (2) קודקודי משולש ABC הם:  $A(-1, 3)$ ,  $B(6, 0)$ ,  $C(4, -12)$ .

מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.  
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

- (3) מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC

שקודקודיו הם:  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ .

- (4) קודקודי המשולש ABC הם:  $A(5, 1)$ ,  $B(7, -3)$ ,  $C(-1, 4)$ .

מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקודקוד A.

### תשובות סופיות:

(2)  $M(3, -3)$

(1)  $P(-2, 1)$

(4) 1.697 יחידות אורך.

(3)  $\left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$

## מרחק נקודה מישר:

### סיכום כללי:

#### הצגה כללית של ישר ומרחקים:

- הצגה כללית של ישר (צורה סתומה):  $Ax + By + C = 0$ .
- מרחק הנקודה  $A(x_1, y_1)$  מהישר  $Ax + By + C = 0$  הוא:  $d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$ .  
כאשר  $B > 0$ :

- אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
- אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

### שאלות:

#### (5) ענה על הסעיפים הבאים:

- מצא את מרחק הנקודה  $(-2, 4)$  מהישר  $4x + 3y + 11 = 0$ .
- מצא את מרחק הנקודה  $(4, 3)$  מהישר  $y = 3x - 1$ .
- מצא את מרחק הנקודה  $(3, -11)$  מהישר  $x - 5 = 0$ .

#### (6) מצא את המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון:

- $3x - 4y + 6 = 0$ ,  $A(-5, -1)$       ב.  $12x + 5y - 17 = 0$ ,  $A(-3, 8)$
- $2y + 7 = 0$ ,  $A(11, -2)$       ד.  $3x - 14 = 0$ ,  $A\left(6, -\frac{1}{2}\right)$

#### (7) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $x + y - 7 = 0$ שמרחקן

מהישר  $2x - y + 5 = 0$  הוא:  $\sqrt{20}$ .

#### (8) מצא את שטחה של מקבילית ששיעורי קודקודיה

הם:  $A(7, -1)$ ,  $B(-5, 4)$ ,  $C(-1, 7)$ ,  $D(11, 2)$ .

(9) מצא את שטחו של המשולש  $\triangle ABC$  שבו שיעורי קדקוד  $A$  הם  $A(5, -3)$  ושניים מתיכוני המשולש מונחים על הישרים  $x - 4 = 0$  ו-  $2x - y - 1 = 0$ .

(10) מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם:  $A(2, 2)$ ,  $B(-1, 1)$ ,  $C(-5, -2)$ .

(11) מצא את שיעורי הנקודות על הישר  $3x - 2y + 6 = 0$ , שמרחקן מהישר:  $2x - y - 14 = 0$  הוא  $3\sqrt{5}$ .

(12) מצא את שיעורי הנקודות על הישר  $4x + 3y - 20 = 0$ , שמרחקן מהישר:  $3x + 2y + 13 = 0$  הוא  $2\sqrt{13}$ .

### תשובות סופיות:

(6) א. 1 ב. 1 ג.  $1\frac{1}{2}$  ד.  $1\frac{1}{3}$

(8)  $S_{ABCD} = 56$  יח"ש

(10)  $S_{ABC} = 2.5$  יח"ש

(12)  $(-1, 8)$ ,  $(-157, 216)$

(5) א. 3 ב.  $\frac{8}{\sqrt{10}}$  ג. 2

(7)  $(4, 3)$ ,  $\left(-2\frac{2}{3}, 9\frac{2}{3}\right)$

(9)  $S_{ABC} = 18$  יח"ש

(11)  $(4, 9)$ ,  $(64, 99)$

## מיקום נקודה ביחס לישר:

### שאלות:

**13** מצא את שיעורי הנקודה על הישר  $3x - 2y + 6 = 0$ , שמרחקה מהישר:  $2x - y - 14 = 0$  הוא  $3\sqrt{5}$  והיא נמצאת מתחתיו.

**14** מצא את שיעורי הנקודה על הישר  $4x + 3y - 20 = 0$ , שמרחקה מהישר:  $3x + 2y + 13 = 0$  הוא  $2\sqrt{13}$  והיא נמצאת מעליו.

**15** נתון משולש ABC שבו נתונים הקודקודים:  $A(1,1)$ ,  $B(13,6)$ . הקדקוד C נמצא על הישר  $2x - y - 19 = 0$  ונמצא מתחת לצלע AB. מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.

**16** נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:  
 $I: x + 2y + 1 = 0$ ,  $II: x - 2y - 11 = 0$ ,  $III: 2x - y + 6 = 0$   
 מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ומרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.

**17** מצא את שיעורי מרכז המעגל, החסום במשולש, שצלעותיו מונחות על הישרים:  $I: 4x - 3y + 2 = 0$ ,  $II: 3x - 4y - 51 = 0$ ,  $III: 3x + 4y - 11 = 0$ .

**18** מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה  $G(7, -3)$  נמצאת מתחתיו ובמרחק  $2\sqrt{10}$  ממנו.

**19** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(-2, 6)$  ומרחקו מהנקודה  $B(2, 9)$  הוא  $\sqrt{5}$ .

**20** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(9, 10)$  ומרחקו מהנקודה  $B(8, -3)$  הוא  $5\sqrt{5}$ .

**21** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(3, 6)$  ומרחקו מהנקודה  $B(-9, 2)$  הוא 4.

- (22) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(1,2)$  ומרחקו מהנקודה  $B(-3,10)$  הוא 4.
- (23) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(10,8)$  ומרחקו מהנקודה  $B(7,-1)$  הוא 3.
- (24) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(-6,1)$  ומרחקו מהנקודה  $B(2,7)$  הוא 10.

### תשובות סופיות:

- |                                                                                  |                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| (-1,8) (14)                                                                      | (64,99) (13)                                             |
| (-1,-4) (16)                                                                     | $C(11,3)$ (15)                                           |
| $y = 3x - 4$ (18)                                                                | (2,-5) (17)                                              |
| $y = -\frac{22}{31}x + 16\frac{12}{31}$ , $y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$ (20) | $y = 2x + 10$ , $y = \frac{2}{11}x + 6\frac{4}{11}$ (19) |
| $x = 1$ או $y = -\frac{3}{4}x + 2\frac{3}{4}$ (22)                               | $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{3}{4}$ , $y = 6$ (21)         |
| $y = -\frac{4}{3}x - 7$ (24)                                                     | $x = 10$ או $y = 1\frac{1}{3}x - 5\frac{1}{3}$ (23)      |

## מרחק בין ישרים מקבילים:

### סיכום כללי:

- מרחק בין שני ישרים מקבילים:  $Ax + By + C_1 = 0$  ו-  $Ax + By + C_2 = 0$  כאשר:  $B > 0$

$$\text{הוא: } d = \left| \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \text{ ומתקיים בהעדר הערך המוחלט:}$$

- אם:  $C_1 > C_2$ ,  $(d > 0)$  אז הישר  $Ax + By + C_1 = 0$  מתחת ל-  $Ax + By + C_2 = 0$ .

- אם:  $C_1 < C_2$ ,  $(d < 0)$  אז הישר  $Ax + By + C_1 = 0$  מעל ל-  $Ax + By + C_2 = 0$ .

### שאלות:

(25) מצא משוואת ישר, המקביל לישר  $3x - 4y + 8 = 0$  ונמצא במרחק 4 ממנו.

(26) מצא את המרחק בין הישרים המקבילים:  $5x + 12y - 14 = 0$ ,  $5x + 12y + 25 = 0$ .

(27) נתונים הישרים:  $y = 6x + 5$ ,  $12x - 2y - 15 = 0$ .  
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

(28) נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן  $AB: 3x + y = 0$  ו-  $CD: 3x + y - 6 = 0$ . הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע AB ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

(29) צלע של ריבוע מונחת על הישר  $3x - 2y + 5 = 0$ .  
אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה  $B(1, -1)$ .  
מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

(30) נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי.  
מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות  $P(4, 1)$  ו-  $Q(7, 2)$ .  
וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא  $3\sqrt{10}$ .

**(31)** במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר  $x - y + 3 = 0$  והצלע BP מונחת על הישר  $x + 2y + 3 = 0$ . אורך הגובה לצלע BP הוא  $3\sqrt{5}$  ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

### תשובות סופיות:

$$(25) \quad 3x - 4y + 28 = 0, \quad 3x - 4y - 12 = 0 \quad (26) \quad 3$$

$$(27) \quad \frac{25}{\sqrt{148}} \quad (28) \quad 14.4 \text{ יח"ש} = S, \quad (2.1, -3.3)$$

$$(29) \quad 3x - 2y - 15 = 0, \quad y = -\frac{2}{3}x - 3\frac{2}{3}, \quad y = -\frac{2}{3}x + 3$$

$$(30) \quad y = 3x \quad (31) \quad P\left(2, -2\frac{1}{2}\right)$$

# מתמטיקה א

## פרק 14 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

### תוכן העניינים

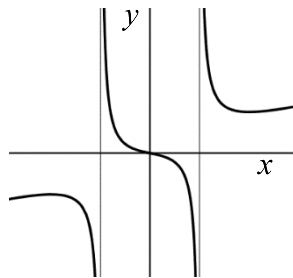
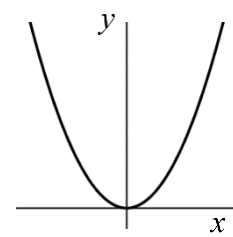
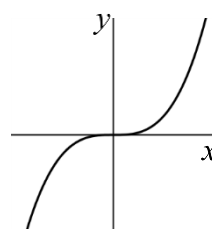
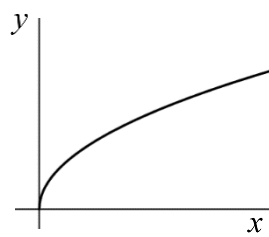
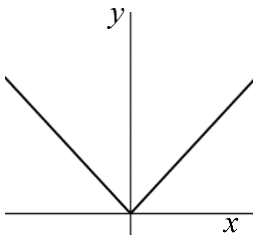
|     |                                                    |
|-----|----------------------------------------------------|
| 154 | 1. הקדמה כללית                                     |
| 155 | 2. גזירת פונקציות                                  |
| 161 | 3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה                 |
| 162 | 4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה                |
| 165 | 5. שאלות עם פרמטרים                                |
| 167 | 6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית |

## הקדמה כללית:

### סיכום כללי:

#### פונקציות נפוצות:

הפונקציה  $f(x) = x^2$  : הפונקציה  $f(x) = x^3$  : הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x}$  : הפונקציה  $f(x) = |x|$  :



פונקציה עם מכנה, למשל:  $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$  :

#### שיפוע של פונקציה:

- השיפוע  $m$  של פונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה  $A(x_1, y_1)$ , כלומר:  $m = f'(x_1)$ .
- השיפוע של המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה  $A(x_1, y_1)$ .
- משוואת המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר:  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .

#### הנגזרת:

לכל פונקציה  $f(x)$  קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת  $f'(x)$ , המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

## גזירת פונקציות:

### סיכום כללי:

#### כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1:  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע):  $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע):  $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש):  $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת):  $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של  $\frac{1}{x}$ ):  $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה):  $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- כלל גזירה מס' 8 (מנה):  $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- כלל גזירה מס' 9 (שורש):  $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

### שאלות:

#### 1) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$             | ב. $f(x) = x^7$             | ג. $f(x) = x^2$             |
| ד. $f(x) = x$               | ה. $f(x) = x^{-3}$          | ו. $f(x) = x^{-1}$          |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

#### 2) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                           |                              |                                       |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$          | ב. $f(x) = 3x^7$             | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$            |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x$               | ו. $f(x) = 3x^{-2}$                   |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$   | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = 12 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{7}{8}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$$

$$\text{ג. } f(x) = 7x^2 + 23x - 6 \quad \text{ד. } f(x) = 6x^2 + 8x + 4$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x^4}{8} + 67$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{ב. } f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ג. } f(x) = 3(x - x^2)^2$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$$

(6) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב. } f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{2}{3-x}$$

$$\text{ז. } f(x) = \frac{6}{x+5}$$

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{ב. } f(x) = (5x+1)^3(x-3)$$

$$\text{ג. } f(x) = x^3(6-x)^4 \quad \text{ד. } f(x) = 3x^2 \cdot x$$

$$\text{ה. } f(x) = x^2 \cdot x^3 \quad \text{ו. } f(x) = x(3x+7)$$

$$\text{ז. } f(x) = 3x^3(3x-1) \quad \text{ח. } f(x) = (x-2)(2x^2+3)$$

$$\text{ט. } f(x) = (3x-2)(x^2+10x) \quad \text{י. } f(x) = (3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$$

$$\text{יא. } f(x) = x(x-2)(3x-4)$$

(8) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = (x^2 - 4)^2 & \text{ב. } f(x) = 2x^3(3x + 5)^2 \\ \text{ג. } f(x) = (x^3 + 2)^2(x - 1)^3 & \text{ד. } f(x) = (x^2 + 1)^3(2x - 1)^2 \end{array}$$

(9) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f(x) = \frac{3x - 1}{1 + 2x} & \text{ב. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x - 12} & \text{ג. } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \\ \text{ד. } f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1} & \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x} & \text{ו. } f(x) = \frac{3}{x^3} \\ \text{ז. } f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x + 1} & \text{ח. } f(x) = \frac{(x^2 + 3)^2}{x^2 - 2} & \text{ט. } f(x) = \frac{x^3 - x^2}{2(1 - x)} \\ \text{י. } f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4} \end{array}$$

(10) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f(x) = \sqrt{x} & \text{ב. } f(x) = 4\sqrt{x + 1} & \text{ג. } f(x) = \sqrt{x^3 - 1} \\ \text{ד. } f(x) = (3x + 1)\sqrt{x} & \text{ה. } f(x) = x^2\sqrt{x + 3} & \text{ו. } f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x}} \end{array}$$

(11) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = \sqrt{x + 1} & \text{ב. } f(x) = \sqrt{2x} \\ \text{ג. } f(x) = \sqrt{3x^2 + 1} & \text{ד. } f(x) = \sqrt{10 - 3x} \\ \text{ה. } f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x} & \text{ו. } f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x} \\ \text{ז. } f(x) = x^2\sqrt{1 - 2x} & \text{ח. } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} \\ \text{ט. } f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 4}}{2} & \text{י. } f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \text{יא. } f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} & \text{יב. } f(x) = \sqrt{\frac{3 - x}{x}} \\ \text{יג. } f(x) = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x}} & \text{יד. } f(x) = \frac{x^2 + 7}{\sqrt{x^2 - 5}} \end{array}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \quad \text{טז.}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \quad \text{טו.}$$

**(12)** גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x-2a}{x-4a} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = ax^4 - bx \quad \text{א.}$$

$$f(x) = a\sqrt{bx^2 + c} \quad \text{ד.}$$

**(13)** גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^3 \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{ה.}$$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $3x^2$  ב.  $7x^6$  ג.  $2x$  ד. 1 ה.  $-\frac{3}{x^4}$  ו.  $-\frac{1}{x^2}$
- ז.  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  ח.  $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$  ט.  $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
- (2) א.  $6x^2$  ב.  $21x^6$  ג.  $2x^3$  ד.  $\frac{6x^5}{7}$  ה. 8
- ו.  $-\frac{6}{x^3}$  ז.  $-\frac{4}{x^2}$  ח.  $\frac{3}{\sqrt{x}}$  ט.  $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$
- (3) א. 0 ב. 0
- (4) א.  $3x^2 + 4x - 3$  ב.  $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$  ג.  $14x + 23$  ד.  $12x + 8$  ה.  $x - 3x^2$  ו.  $0.5x^3$
- (5) א.  $15(5x - 2)^2$  ב.  $15x^2(x^3 + 6)^4$  ג.  $6(x - x^2)(1 - 2x)$
- ד.  $-\frac{3}{4}(5 - x)^2$  ה.  $\frac{8(x + 1)^3}{3}$
- (6) א.  $-\frac{3}{x^2}$  ב.  $\frac{2}{x^2}$  ג.  $-\frac{2}{x^3}$  ד.  $-\frac{9}{x^4}$  ה.  $-\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}$
- ו.  $\frac{2}{(3 - x)^2}$  ז.  $-\frac{6}{(x + 5)^2}$
- (7) א.  $10x - 14$  ב.  $(5x + 1)^2(20x - 44)$  ג.  $x^2(6 - x)^3(18 - 7x)$
- ד.  $9x^2$  ה.  $5x^4$  ו.  $6x + 7$  ז.  $36x^3 - 9x^2$  ח.  $6x^2 - 8x + 3$
- ט.  $9x^2 + 56x - 20$  י.  $36x^5 + 75x^4 + 24x^3 - 24x^2 - 40x - 8$  יא.  $9x^2 - 20x + 8$
- (8) א.  $4x(x^2 - 4)$  ב.  $30x^2(x + 1)(3x + 5)$  ג.  $3(x - 1)^2(x^3 + 2)(3x^3 - 2x^2 + 2)$
- ד.  $2(2x - 1)(x^2 + 1)^2(8x^2 - 3x + 2)$
- (9) א.  $\frac{5}{(1 + 2x)^2}$  ב.  $\frac{5x^2 - 24x - 5}{(5x - 12)^2}$  ג.  $\frac{8x}{(x^2 + 3)^2}$  ד.  $\frac{(x - 4)(x + 2)}{(x - 1)^2}$
- ה.  $-\frac{1}{x^2}$  ו.  $-\frac{9}{x^4}$  ז.  $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$
- ח.  $\frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 7)}{(x^2 - 2)^2}$  ט.  $-x$  י.  $-\frac{1}{(x + 2)^2}$

$$(10) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ד. } \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ה. } \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$$

$$\text{ו. } \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \text{ב. } \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{ג. } \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} \quad \text{ד. } -\frac{3}{2\sqrt{10-3x}} \quad \text{ה. } \frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$$

$$\text{ו. } 6x - \frac{4}{\sqrt{x}} \quad \text{ז. } \frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}} \quad \text{ח. } -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad \text{ט. } \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}} \quad \text{י. } \frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$$

$$\text{יא. } 3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} \quad \text{יב. } -\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}} \quad \text{יג. } \frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{יד. } \frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}} \quad \text{טו. } -\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \quad \text{טז. } -\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$$

$$(12) \quad \text{א. } 4ax^3 - b \quad \text{ב. } \frac{2ax}{3} - \frac{1}{b} \quad \text{ג. } \frac{-2a}{(x-4a)^2} \quad \text{ד. } \frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$$

$$(13) \quad \text{א. } f'(x) = \frac{2x^2-8}{4x^2}, f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$\text{ב. } f'(x) = \frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}, f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3}$$

$$\text{ג. } f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$$

$$\text{ד. } f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

$$\text{ה. } f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

$$\text{ו. } f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, f''(x) = \frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$$

## מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

### שאלות:

(14) מצא את שיפוע הפונקציה  $f(x) = 2x^3 - 7x$  בנקודה  $(2, 2)$ .

(15) מצא את שיפוע הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$  בנקודה בה  $x = -2$ .

(16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = 4\sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 1$ .

### תשובות סופיות:

$$m = 17 \quad (14)$$

$$m = 4 \quad (15)$$

$$m = 2 \quad (16)$$

## מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

### שאלות:

(17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 2(4x+3)^3$  בנקודה בה  $x = -1$ .

(18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{8}{x+1}$  בנקודה בה  $y = 2$ .

(19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = x^2 - 2x - 8$  בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

(20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^4 - 2x$  ששיפועו 2.

(21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$  בנקודה שבה  $x = 1$ .

(22) נתון כי הישר  $2y - 3x = 3$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = 3\sqrt{x}$ . מצא את נקודת ההשקה.

(23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 1$ .

(24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 4$ .

(25) נתונה הפונקציה הבאה  $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר  $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

(26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$  ששיפועו -2.

(27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$  בנקודה שבה  $x=2$ .

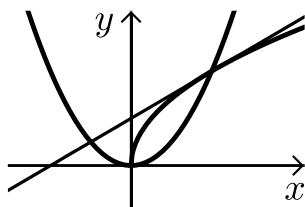
(28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3x^3}$  היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  זווית של  $135^\circ$ .

(29) מצא את משוואות המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות:  $y = x^2$ ,  $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$ .

(30) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$  ונתון הישר:  $y = 2x$ .

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

(31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = x^2$ .



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה  $g(x)$ .

## תשובות סופיות:

(17)  $y = 24x + 22$

(18)  $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

(19)  $y = 6x - 24, y = -6x - 12$

(20)  $y = 2x - 3$

(21)  $y = -12x + 9$

(22)  $(1, 3)$

(23)  $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

(24)  $y = 22x - 56$

(25) א.  $y = 3x - 1$  ב.  $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

(26)  $y = -2x + 8$

(27)  $y = \frac{11}{16}x - \frac{15}{8}$

(28)  $y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3}$

(29)  $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

(30) א.  $(1, 2)$  ב.  $y = -1.5x + 3.5$  ג.  $S = 4\frac{1}{12}$

(31) א.  $(0, 0), (1, 1)$  ב.  $y = 0.5x + 0.5$  ג.  $(-0.5, 0.25)$

## שאלות עם פרמטרים:

### שאלות:

(32) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = ax^2 - 4x$  בנקודה שבה  $x = 3$  הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

(33) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{ax}$ ,  $(a > 0)$ .

המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{1}{2}$  הוא בעל שיפוע 1. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

(34) נתונה הפונקציה:  $y = x^3 + a\sqrt{x}$  ( $a$  פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$  הוא 5. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

(35) נתונה הפונקציה:  $y = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$  ( $A$  פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$  הוא 2. מצא את ערך הפרמטר  $A$ .

(36) הישר  $y = 4x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ .

מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(37) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{2}{ax+3}$  בנקודה שבה  $y = 2$  הוא -4.

מצא את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

(38) הישר  $y = ax + \frac{1}{2}$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x) = \frac{2}{x+c}$  בנקודה  $x = 0$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $c$ .

(39) הישר  $y = 3x$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + b$ .

מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(40) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$  בנקודה (1, 6) הוא -6.

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת משוואת המשיק.

(41) לאילו ערכי  $k$  ישיק הישר  $y = -5x + 6$  לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$ ?  
לכל ערך כזה של  $k$  מצא את נקודת ההשקה.

(42) הפונקציות  $y = \frac{1}{x}$  ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$  משיקות זו לזו.  
מצא את  $k$  ואת נקודת ההשקה.

### תשובות סופיות:

$$a = 2, y = 8x - 18 \quad (32)$$

$$a = 2 \quad (33)$$

$$a = 4 \quad (34)$$

$$A = 1 \quad (35)$$

$$(-1, 5), y = 4x + 9 \quad (36)$$

$$a = 2, y = -4x - 2 \quad (37)$$

$$a = -\frac{1}{8}, c = 4 \quad (38)$$

$$b = 4, (4, 12) \quad (39)$$

$$b = 2, a = 6, y = -6x + 12 \quad (40)$$

$$k = \frac{158}{27} : \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right) \text{ או } k = 6 : (1, 1) \quad (41)$$

$$(1, 1), k = 1.5 \quad (42)$$

## שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

### שאלות:

(43) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. בטא באמצעות  $t$  את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^2 + 1$  בנקודה שבה  $x = t$ .
- ב. מצא את ערכיו של  $t$  אם נתון שהמשיק עובר בנקודה  $(-1, 1)$ .

(44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = 5x - x^2$  העוברים דרך הנקודה  $(3, 7)$ .

(45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = x^2 + 5x - 6$  העוברים דרך הנקודה  $(0, -10)$ .

(46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = 12x - x^3$  העוברים דרך הנקודה  $(2, 24)$ .

(47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  העובר בנקודה  $(3, 0)$ .

(48) מצא משוואת המשיק לפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

(49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$  העוברים דרך הנקודה  $(2, 3)$ .

## תשובות סופיות:

ב.  $t = 0, -2$ . (43)  $y = 2tx - t^2 + 1$  א.

(44)  $y = x + 4$ ,  $y = -3x + 16$

(45)  $y = 9x - 10$ ,  $y = x - 10$

(46)  $y = 12x$ ,  $y = -15x + 54$

(47)  $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

(48)  $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$

(49)  $y = -x + 5$

# מתמטיקה א

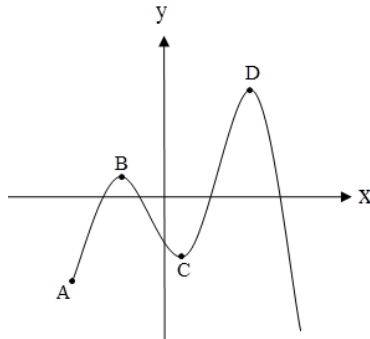
פרק 15 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים

|     |                             |
|-----|-----------------------------|
| 169 | 1. נקודות קיצון של פונקציות |
| 172 | 2. חקירת פונקציה פולינומית  |
| 176 | 3. פונקציה זוגית ואי-זוגית  |

## נקודות קיצון של פונקציות:

### סיכום כללי:



### נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B, C, D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

### נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית.
- נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

### שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- $x$  של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- $x$  מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- $y$ .
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

### שאלות:

(1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x) = 10x - x^2$ .

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 12x$ .

- מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

- (3) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ .  
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (4) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$ .  
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (5) לפונקציה  $f(x) = ax - x^3 - 5$  יש נקודת קיצון בנקודה שבה  $x = -1$ .  
 מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .
- (6) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ . ידוע שהנקודה  $x = 1$  נקודת קיצון.  
 מצא את הקבוע  $a$ .
- (7) לפונקציה  $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$  יש נקודת קיצון ששיעוריה:  $(2, 3)$ .  
 מצא את ערכי הפרמטרים  $A, B$ .
- (8) לפונקציה  $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$  יש נקודת קיצון ב- $x = -1$  ו- $x = 4$ .  
 מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- $y$  של שתי נקודות הקיצון.
- (9) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ . ידוע שהנקודה  $(1, 2)$  נקודת קיצון.  
 מצא את הפרמטרים  $a, b$ .
- (10) לפונקציה  $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$  יש נקודת קיצון ששיעוריה  $(2, 3)$ .  
 מצא את ערכי הפרמטרים  $a, b$ .

## תשובות סופיות:

(1)  $\max(5, 25)$ .

(2) א.  $\min(2, -16)$ ,  $\max(-2, 16)$  ב. עולה:  $x > 2$ ,  $x < -2$  יורדת:  $-2 < x < 2$ .

(3) א.  $\max(0, 9)$ ,  $\min(\sqrt{5}, -16)$ ,  $\min(-\sqrt{5}, -16)$

ב. עולה:  $-\sqrt{5} < x < 0$ ,  $x > \sqrt{5}$  יורדת:  $0 < x < \sqrt{5}$ ,  $x < -\sqrt{5}$ .

(4) א.  $\min(3, 5)$  ב. עולה:  $x > 3$  יורדת:  $x < 3$ .

(5)  $a = 3$ .

(6)  $a = -\frac{2}{3}$ .

(7)  $A = -1$ ,  $B = 3$ .

(8)  $A = \frac{1}{3}$ ,  $B = -\frac{3}{2}$ ,  $\left(-1, 2\frac{1}{6}\right)$ ,  $\left(4, -18\frac{2}{3}\right)$ .

(9)  $b = 6$ ,  $a = -4$ .

(10)  $a = 2$ ,  $b = -16$ .

## חקירת פונקציה פולינומית:

### שאלות:

(11) נתונה הפונקציה  $f(x) = 10x - x^2$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(12) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 12x$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(14) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$  חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

15 נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3$  חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

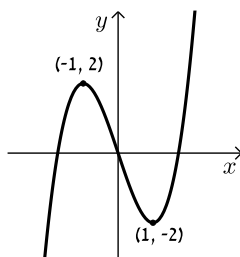
16 נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$ .

- לאילו ערכים של הפרמטר  $a$  עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?
- הצב בפונקציה  $a = 6$  וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:  
תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ , סרטוט.

17 נתונה הפונקציה:  $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$  ( $d$  פרמטר).

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = 2$ .

- מצא את  $d$ .
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



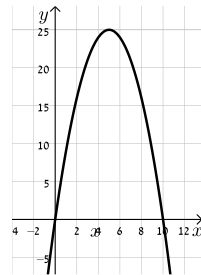
18 לפניך גרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 3x$ :

- מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 5$ ?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 2$ ?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 0.5$ ?
- עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק פתרון אחד?
- עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שני פתרונות?
- עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שלושה פתרונות?
- האם קיים ערך של  $k$  עבורו למשוואה  $f(x) = k$  אין פתרון?

## תשובות סופיות:

11) א. כל  $x$       ב.  $\max(5, 25)$       ג. עלייה:  $x < 5$ , ירידה:  $x > 5$

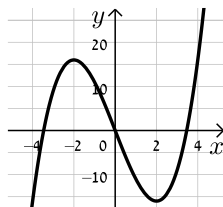
ד.  $(0, 0)$ ,  $(10, 0)$ .



12) א. כל  $x$       ב.  $\min(2, -16)$ ,  $\max(-2, 16)$

ג. עלייה:  $x > 2$ ,  $x < -2$ , ירידה:  $-2 < x < 2$

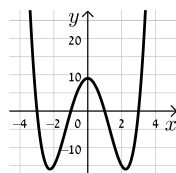
ד.  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{12}, 0)$ ,  $(-\sqrt{12}, 0)$ .



13) א. כל  $x$       ב.  $\max(0, 9)$ ,  $\min(\sqrt{5}, -16)$ ,  $\min(-\sqrt{5}, -16)$

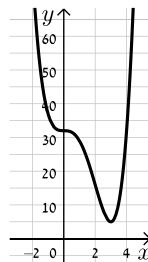
ג. עלייה:  $-\sqrt{5} < x < 0$ ,  $x > \sqrt{5}$ , ירידה:  $x < -\sqrt{5}$ ,  $0 < x < \sqrt{5}$

ד.  $(0, 9)$ ,  $(\pm 1, 0)$ ,  $(\pm 3, 0)$ .



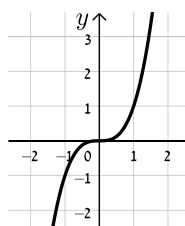
14) א. כל  $x$       ב.  $\min(3, 5)$       ג. תחומי עלייה:  $x > 3$ , תחומי ירידה:  $x < 3$

ד.  $(0, 32)$ .



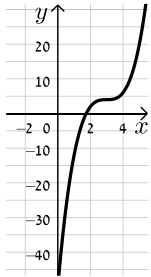
15) א. כל  $x$       ב. אין.      ג. עולה לכל  $x$

ד.  $(0, 0)$ .



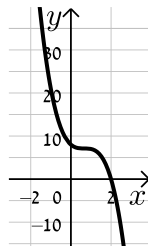
16) א.  $-6 < a < 6$  ב. תחום הגדרה: כל  $x$ , נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל  $x$ ,

תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים:  $(0, -50)$ , להלן גרף:



17) א.  $d = 8$  ב. לא. ג. יורדת בתחום  $x \neq \frac{2}{3}$

ד.  $(0, 8)$  ה. להלן גרף:



18) א. 1. ב. 2. ג. 3. ד.  $k > 2, k < -2$

ה.  $k = \pm 2$  ו.  $-2 < k < 2$  ז. לא.

## פונקציה זוגית ואי-זוגית:

### סיכום כללי:

#### הגדרות:

- פונקציה  $f(x)$  תיקרא זוגית אם לכל  $x$  בתחום הגדרתה מתקיים:  $f(x) = f(-x)$ .
- פונקציה  $f(x)$  תיקרא אי-זוגית אם לכל  $x$  בתחום הגדרתה מתקיים:  $f(-x) = -f(x)$ .

#### שאלות:

(1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א.  $f(x) = 3x - 5$

ב.  $f(x) = 3x^2$

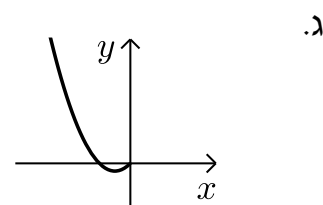
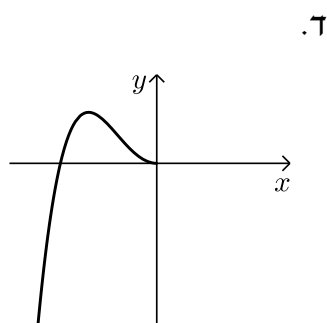
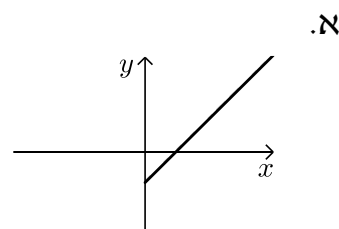
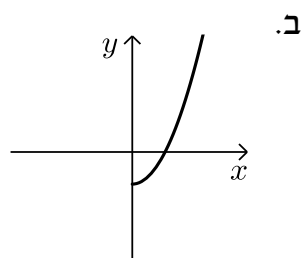
ג.  $f(x) = 2x^3$

ד.  $f(x) = x^3 - 2x^2$

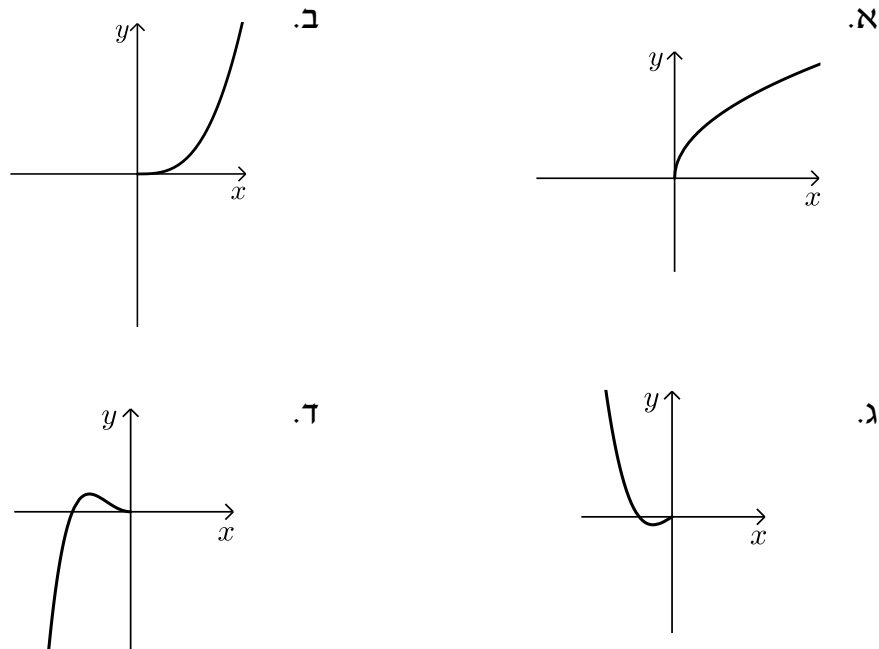
ה.  $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$

ו.  $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 1$

(2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:



(3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



- (4) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^4 - 4x^2$  בתחום:  $[0:3]$ .
- תחום הגדרה.
  - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
  - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
  - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
  - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית.
- ג. התבסס על ממצאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום:  $[-3:3]$  (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום  $[-3:0]$  לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

(5) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^6 - 3x^2 + 3$ .

- א. חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:4]$  לפי הסעיפים הבאים:  
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- $y$ , מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.
- ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?  
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום  $[-4:0]$ .
- ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל  $x$  בתחום הגדרתה.

(6) לפניך הפונקציה:  $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$ , פרמטר  $a$ .

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

- א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. חקור את הפונקציה בתחום:  $[-2:0]$  לפי הסעיפים הבאים:  
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?  
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום:  $[-2:2]$ .

(7) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = 3x^3 - 9x$ .

- א. חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:5]$  לפי הסעיפים הבאים:  
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.
- ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום:  $[-5:5]$  (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום  $[-5:0]$  לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

- (8) לפינך הפונקציה הבאה :  $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + b$  , פרמטר  $b$  .  
 ידוע כי הישר  $y = 2x$  עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות :  $f'(x) = 0$  .
- מצא את  $b$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$  .
  - חקור את הפונקציה בתחום :  $[0:2]$  לפי הסעיפים הבאים :
    - תחום הגדרה.
    - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
    - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
    - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
    - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.  
 נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.
  - הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום  $[-2:0]$  .

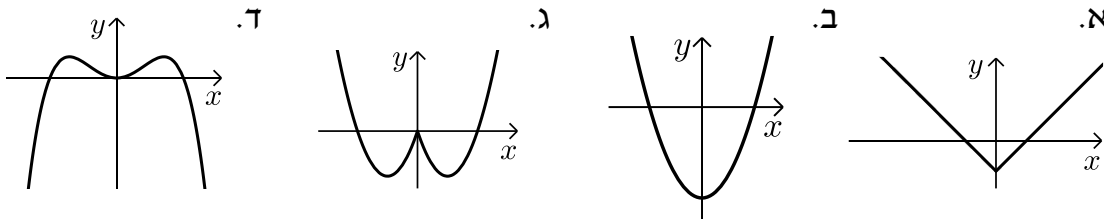
(9) נתונה הפונקציה :  $f(x) = \frac{x^7 - x}{3}$  .

- חקור את הפונקציה בתחום :  $[-4:0]$  לפי הסעיפים הבאים :
  - תחום הגדרה.
  - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
  - מציאת נקודות קיצון וסיווגן  
 (בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
  - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
  - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?  
 נמק ע"י חישוב מתאים.
- הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום  $[0:4]$  .

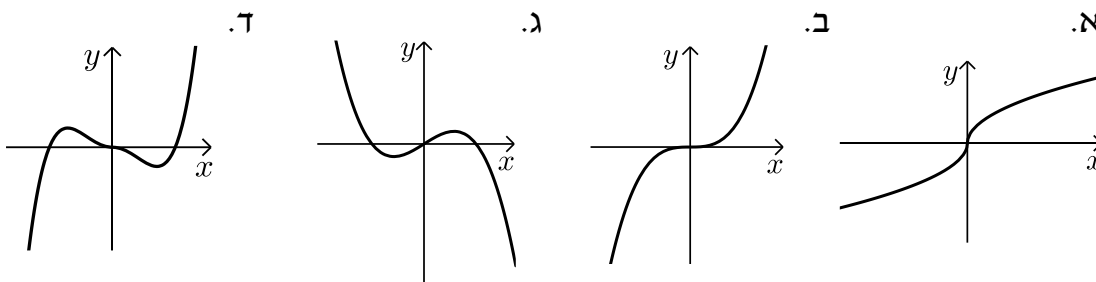
## תשובות סופיות:

(1) זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

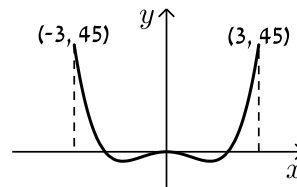
(2) להלן הגרפים:



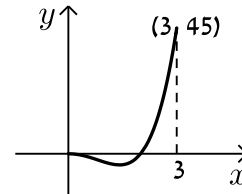
(3) להלן הגרפים:

(4) א. i.  $0 \leq x \leq 3$  ii.  $(0,0), (2,0)$  iii.  $\max(3,45)$  קצה,  $\min(\sqrt{2}, -4)$ .iv. עולה:  $\sqrt{2} < x < 3$ , יורדת:  $0 < x < \sqrt{2}$  ב. סעיף הוכחה.  $\max(0,0)$  קצה.

סרטוט עבור סעיף ג:

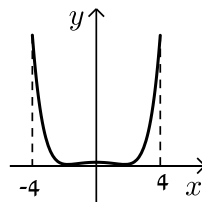


סרטוט עבור חלק v:

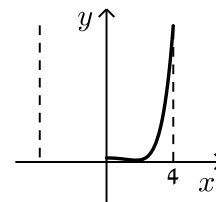
(5) א. תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq 4$ , חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $(0,3)$ ,נקודות קיצון:  $\max(4,4051)$  קצה,  $\min(1,1)$ ,  $\max(0,3)$  קצה,עולה:  $1 < x < 4$ , יורדת:  $0 < x < 1$  ב. זוגית.

ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

סרטוט עבור סעיף ג:



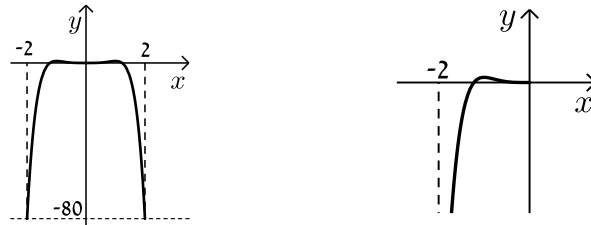
סרטוט עבור סעיף א:



6) א.  $a=0$  ב. תחום הגדרה:  $-2 \leq x \leq 0$ , חיתוך עם הצירים:  $(0,0)$ ,  $(-1.225,0)$ , נקודות קיצון:  $\min(-2, -80)$  קצה,  $\max(-1, 1)$  קצה,  $\min(0, 0)$  קצה,

עולה:  $-1 < x < -2$ , יורדת:  $-1 < x < 0$ . ג. זוגית.

סרטוט עבור סעיף א: סרטוט עבור סעיף ד:

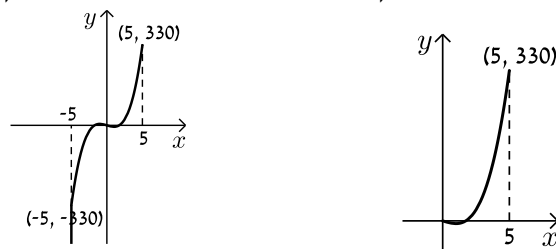


7) א. תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq 5$ , חיתוך עם הצירים:  $(0,0)$ ,  $(\sqrt{3}, 0)$ ,

נקודות קיצון:  $\max(5, 330)$  קצה,  $\min(1, -6)$  קצה,  $\max(0, 0)$  קצה,

עולה:  $1 < x < 5$ , יורדת:  $0 < x < 1$ . ב. אי-זוגית.

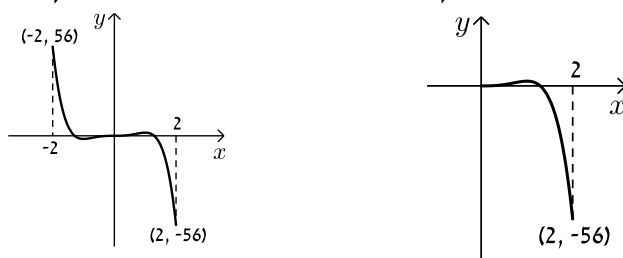
סרטוט עבור סעיף א: סרטוט עבור סעיף ג:



8) א.  $b=0$  ב.  $0 \leq x \leq 2$  i.  $(0,0)$ ,  $(1.29, 0)$  ii.  $\min(2, -56)$  קצה, iii.

iv. עולה:  $0 < x < 1$ , יורדת:  $1 < x < 2$ .  $\min(0, 0)$  קצה,  $\max(1, 2)$  קצה.

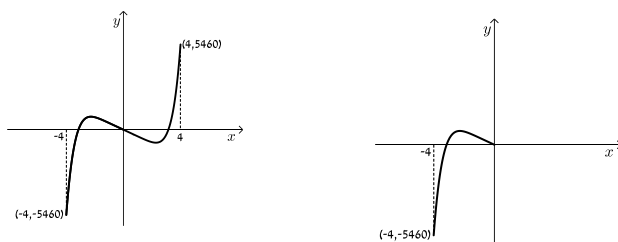
ג. אי-זוגית. סרטוט עבור חלק v: סרטוט עבור סעיף ד:



9) א.  $-4 \leq x \leq 0$  ii.  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$  iii.  $\min(0, 0)$  קצה,  $\max(-0.723, 0.207)$  קצה,

iv. עולה:  $-4 < x < -0.723$ .  $\min(-4, -5460)$  קצה.

יורדת:  $-0.723 < x < 0$ . ג. אי-זוגית. סרטוט עבור חלק v: סרטוט עבור סעיף ד:



## מתמטיקה א

### פרק 16 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש

#### תוכן העניינים

|     |                                           |
|-----|-------------------------------------------|
| 182 | 1. מציאת תחום הגדרה                       |
| 184 | 2. מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה |
| 185 | 3. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים       |
| 190 | 4. חקירת פונקצית מנה                      |
| 199 | 5. חקירת פונקצית שורש                     |
| 207 | 6. תחומי קעירות ונקודות פיתול             |
| 213 | 7. חקירת פונקציה עם פרמטר                 |

## מציאת תחום הגדרה:

### סיכום כללי:

- כל פולינום מוגדר לכל  $x$ .
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

### שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

|                                     |                                          |
|-------------------------------------|------------------------------------------|
| א. $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$      | ב. $f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1$ |
| ג. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$      | ד. $f(x) = \frac{2x}{x-3}$               |
| ה. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$       | ו. $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$    |
| ז. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$ | ח. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8}$ |
| ט. $f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$       | י. $f(x) = \frac{4x + 1}{x^2 + 1}$       |
| יא. $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$      | יב. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x}$        |

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

|                                                      |                                             |
|------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| א. $f(x) = \sqrt{x}$                                 | ב. $f(x) = 2\sqrt{x-3}$                     |
| ג. $f(x) = \sqrt{x-4}$                               | ד. $f(x) = 3x\sqrt{1-2x}$                   |
| ה. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$                     | ו. $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$              |
| ז. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$                    | ח. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x-1}$ |
| ט. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x + 9}}$ | י. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3 - 9x}}$     |
| יא. $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x+6}}$                | יב. $f(x) = \frac{x+1}{x - \sqrt{2-x}}$     |
| יג. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1- x }}$                  | יד. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2} - 3}$          |

## תשובות סופיות:

- (1) א. כל  $x$     ב. כל  $x$     ג. כל  $x$     ד.  $x \neq 3$     ה.  $x \neq \pm 2$     ו.  $x \neq \pm 1$   
 ז.  $x \neq -1, 2$     ח.  $x \neq 4, -2$     ט. כל  $x$     י. כל  $x$     יא.  $x \neq \pm 1, 0$     יב.  $x \neq \pm 2, 0$
- (2) א.  $x \geq 0$     ב.  $x \geq 3$     ג.  $x \geq 4$     ד.  $x \leq \frac{1}{2}$     ה.  $x \leq -5, x \geq 2$   
 ו.  $x \leq -2, x \geq 1$     ז.  $x > -4$     ח.  $x \leq -3, -2 \leq x < 1, x > 1$     ט.  $x \leq -1.5, x \geq 1$   
 י.  $-3 < x < 0, x > 3$     יא.  $-6 \leq x < -2, x > -2$     יב.  $x < 1, 1 < x \leq 2$   
 יג.  $-1 < x < 1$     יד.  $x \geq 7$

## מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

שאלות:

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 10x + 9}$ .

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

תשובות סופיות:

(3) א.  $\min\left(-3, -\frac{3}{8}\right), \max\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$ .

ב. עולה:  $-3 < x < 3$ ,  $x \neq 1$ , יורדת:  $3 < x \neq 9$ ,  $x < -3$ .

## מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

### סיכום כללי:

#### אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר:  $x = k$  הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה:  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים:  $g(k) = 0$  וגם:  $f(k) \neq 0$ . בצורה מתמטית: אם:  $\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

או:  $\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$  או שניהם אז הישר:  $x = k$  הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

### הסבר כללי:

בעבור ערכי  $x$  שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית. כאשר ערך  $x$  מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה (על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם. אם אחרי הצמצום אותו ערך של  $x$  עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית, אך אם ערך  $x$  זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

#### אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה:  $y = n$  הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה:  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים:  $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{f(x)}{g(x)} = n$  או:  $\lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{f(x)}{g(x)} = n$  או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$  (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם  $m > n$ , לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם  $m = n$ , לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה  $y = \frac{a}{b}$ .
- אם  $m < n$ , לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה  $y = 0$ .

### חוקי גבולות לאינסוף:

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר  $x$  שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף). עבור ערכי  $x$  שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום:  $x = \infty$  או  $x = -\infty$  בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת  $x$  לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$
- הגבול:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  ניתן לפיצול לשני מקרים:
  - אם:  $x \rightarrow 0^+$  (מתקרב ל-0 מהכיוון החיובי) אז:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
  - אם:  $x \rightarrow 0^-$  (מתקרב ל-0 מהכיוון השלילי) אז:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
- הגבול מהצורה  $\infty \cdot \infty$  (מכפלת שני ביטויים של  $x$  אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים:  $\infty \cdot \infty = \infty$
- הגבול מהצורה  $\infty + \infty$  (סכום שני ביטויים של  $x$  אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים:  $\infty + \infty = \infty$

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה:  $\frac{\infty}{\infty}$  (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת  $x$ ).
- הגבול מהצורה:  $\frac{0}{0}$  (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת  $x$ ).
- הגבול מהצורה:  $\infty - \infty$  (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת  $x$ ). במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

## שאלות:

(4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

(5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-9}$

(6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$

(7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-15}$

(8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$

(9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax+b}{x-b}$

(10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$   
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2}{2x^2-4x}$   
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

(13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$

14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$

16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$

17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$

18) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה

נפגשות בנקודה  $(-1, 2)$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

19) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה  $(16, 2)$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

### תשובות סופיות:

$$(4) \quad x = 2, y = 3$$

$$(5) \quad x = \pm 3, y = 5$$

$$(6) \quad y = \frac{2}{3}$$

$$(7) \quad x = -3, x = 5, y = 0$$

$$(8) \quad \text{אין.}$$

$$(9) \quad x = b, y = a$$

$$(10) \quad \text{נקודת אי-הגדרה: } (2, 4), x = 1, y = 1$$

$$(11) \quad \text{נקודת אי-הגדרה: } (0, 0), x = 2, y = \frac{1}{2}$$

$$(12) \quad x = 2, y = 0$$

$$(13) \quad x = 4$$

$$(14) \quad x = 1, y = -1$$

$$(15) \quad x = 1, y = 2$$

$$(16) \quad y = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = 3, y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = -3$$

$$(17) \quad x = 4, x = -4, y = 5, y = -5$$

$$(18) \quad b = -3, a = 2$$

$$(19) \quad b = 1, a = 2$$

## חקירת פונקצית מנה:

### שאלות:

(20) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 10x + 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(22) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(23)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 5x + 4}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(24)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(25)** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון.
- ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.
- ו. שרטוט סקיצה.

**(26)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(27) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax + 4}{x^2}$  יש נקודת קיצון שבה  $x = -8$ .

- מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(29) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x^2}{2x^2 - 8}$ .

- מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה:  $y = \frac{a^2x - 4}{2x^2 - 1}$ ,  $(a \text{ קבוע})$ .

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = 1$  הוא:  $m = 4$ .

- מצא את כל הערכים האפשריים עבור  $a$ .
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .

**(31)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = 1.5x - \frac{5x+1}{x+5}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון וסוגן.
- ג. תחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה.

**(32)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$ ,  $(a \neq 1)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. הבע באמצעות  $a$  את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  ועם ציר ה- $y$ .
- ד. ענה על הסעיפים הבאים:
  - i. מצא עבור אילו ערכים של  $a$  הפונקציה  $f(x)$  עולה לכל  $x$  בתחום ההגדרה.
  - ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x=a$  מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x=2$ . מצא את הערך של  $a$  אם נתון כי הפונקציה עולה לכל  $x$ .

**(33)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 + ax + 6}{x-2}$ ,  $(a \text{ פרמטר})$ .

- ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$ .
- א. מצא את הערך של  $a$ .
  - ב. הצב את הערך של  $a$  שמצאת בסעיף א' ומצא:
    - i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.
    - ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
    - iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
    - iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
  - ג. עבור אלו ערכי  $x$  הפונקציה שלילית?
  - ד. נתון הישר:  $y=k$ . עבור אלו ערכי  $k$  אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

(34) נתונה הפונקציה:  $y = \frac{x+3}{x-2} + A$ ,  $A$  (פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה  $(3A, A)$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $A$ .
  - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל  $x$ .
  - מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - נתון הישר:  $y = k$ .
- האם קיים ערך של  $k$  עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

(35) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax^2 - 20x + 28}{x^2 + 2a}$ .

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה  $(3, 0.5)$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $a$  וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של  $k$  הישר:  $y = k$  יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

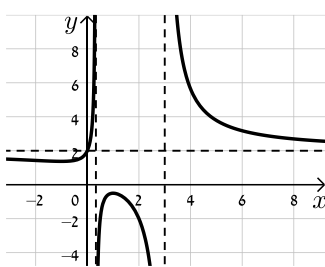
(36) ענה על הסעיפים הבאים:

- הוכח כי לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-k}$  יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- $y$ .
- הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$  אם ידוע כי שיעור ה- $y$  של נקודת הקיצון הוא 3.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר  $y = -1$ . נמק את תשובתך.

## תשובות סופיות:

(20) א.  $x \neq 3, x \neq \frac{1}{3}$  ב.  $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

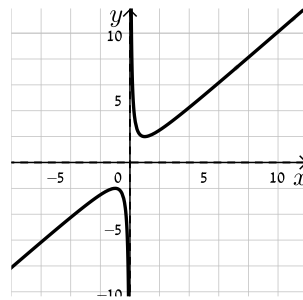
ג. תחומי עלייה:  $-1 < x < 1$  וגם  $x \neq \frac{1}{3}$ , תחומי ירידה:  $1 < x \neq 3$  או  $x < -1$ .



ד.  $(0, 2)$  ה.  $x = 3, x = \frac{1}{3}, y = 2$  ו. להלן סקיצה:

(21) א.  $x \neq 0$  ב.  $\min(1, 2), \max(-1, -2)$

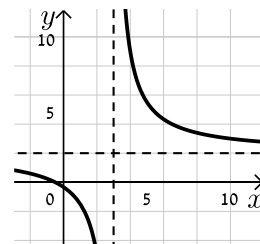
ג. עולה:  $x > 1$  או  $x < -1$ , יורדת:  $-1 < x < 1, x \neq 0$  ד. אין



ה. להלן סקיצה:

(22) א.  $x \neq 3$  ב. אין ג. הפונקציה יורדת בכל ת.

ד.  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{3}\right)$  ה.  $y = 2, x = 3$



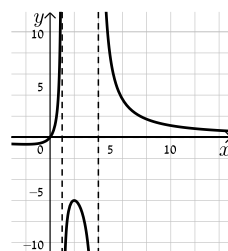
ו. להלן סקיצה:

(23) א.  $x \neq 1, x \neq 4$  ב.  $\min\left(-2, -\frac{2}{3}\right), \max(2, -6)$

ג. תחומי עלייה:  $-2 < x < 2, x \neq 1$ , תחומי ירידה:  $x < -2$  או  $x > 2, x \neq 4$

ד.  $(0, 0)$  (אסימפטוטות:  $x = 1, x = 4, y = 0$ ).

ה. להלן סקיצה:

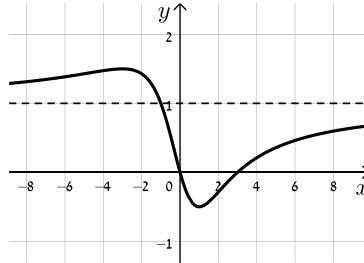


(24) א. כל  $x$  ב.  $\min\left(1, -\frac{1}{2}\right), \max\left(-3, 1\frac{1}{2}\right)$

ד.  $(0,0), (3,0)$  (אסימפטוטה:  $y=1$ ).

ג. עולה:  $x > 1$  או  $x < -3$ , יורדת:  $-3 < x < 1$

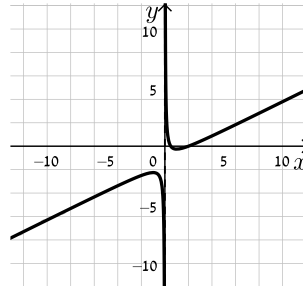
ה. להלן סקיצה:



(25) א.  $x \neq 0$  ב.  $\min(1, -0.25), \max(-1, -2.25)$

ג. עולה:  $x > 1, x < -1$ , יורדת:  $-1 < x < 1, x \neq 0$  ד.  $(0.5, 0), (2, 0)$  ה.  $x=0$

ו. להלן סקיצה:

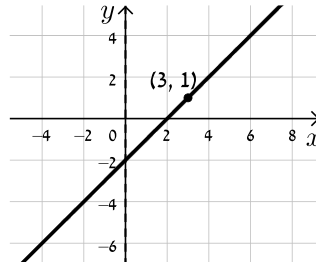


(26) א.  $x \neq 3$  ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה  $(3,1)$ .

ד.  $(0,-2), (2,0)$

ו. להלן סקיצה:

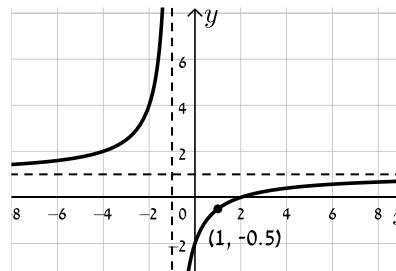


(27) א.  $x \neq \pm 1$  ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ה.  $y=1, x=-1$ , יש נקודת אי הגדרה:  $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ .

ד.  $(0,-2), (2,0)$

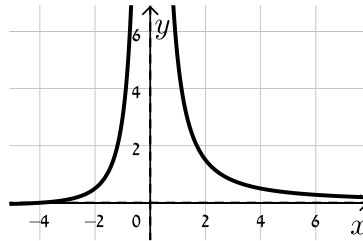
ו. להלן סקיצה:



28) א.  $f(x) = \frac{x+4}{x^2}$ ,  $a=1$  ב. עולה:  $-8 < x < 0$  יורדת:  $x < -8$ ,  $x > 0$

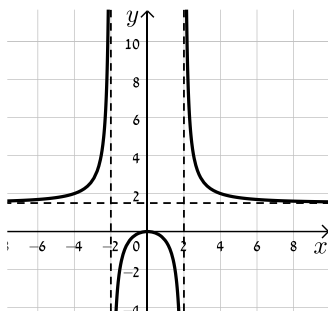
ג.  $(-4, 0)$  ד.  $x=0$ ,  $y=0$

ה. להלן סקיצה:



29) א.  $x \neq \pm 2$  ב.  $\max(0, 0)$  ג. יורדת:  $x > 0$ ,  $x \neq 2$  עולה:  $x < 0$ ,  $x \neq -2$

ד.  $(0, 0)$  ה.  $x = \pm 2$ ,  $y = 1.5$  ו. להלן סקיצה:



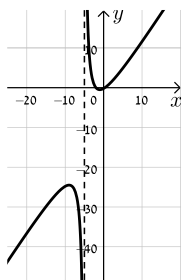
30) א.  $a = \pm 2$  ב.  $(1, 0)$ ,  $(0, 4)$

ג. המשיק:  $y = -4x + 4$  אשר עובר בנקודה  $(1, 0)$ . נקודת החיתוך:  $(1, 0)$ .

31) א.  $x \neq -5$  ב.  $\min(-1, -0.5)$ ,  $\max(-9, -24.5)$

ג. עולה:  $x > -1$ ,  $x < -9$  יורדת:  $-9 < x < -1$ ,  $x \neq -5$

ד.  $(-2, 0)$ ,  $(\frac{1}{3}, 0)$ ,  $(0, -0.2)$  ה.  $x = -5$  ו. להלן סקיצה:



32) א.  $x \neq 1$  ב.  $x=1$ ,  $y=1$  ג.  $(a, 0)$ ,  $(0, a)$  ד. i.  $a > 1$  ii.  $a=2$

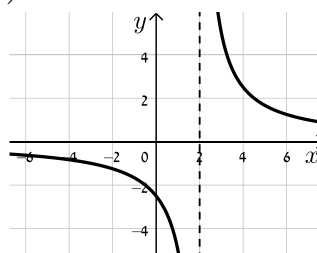
33) א.  $a = -3$  ב. i.  $x \neq 2$  ii.  $(0, -3)$  iii.  $\max(0, -3)$ ,  $\min(4, 5)$

iv.  $x=2$  ג.  $x < 2$  ד.  $-3 < k < 5$

34) א.  $A = -1$  ב.  $x \neq 2$  ד.  $(0, -2.5)$

ו. לא

ה. להלן סקיצה:



35 א.  $a = 3$ ,  $f(x) = \frac{3x^2 - 20x + 28}{x^2 + 6}$ , כל  $x$ .

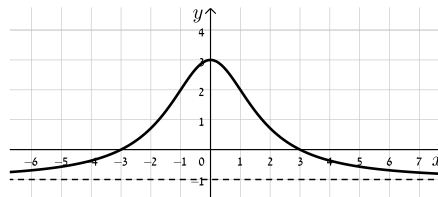
ב.  $\min\left(3, -\frac{1}{3}\right)$ ,  $\max(-2, 8)$ .

ד.  $(2, 0)$ ,  $\left(0, 4\frac{2}{3}\right)$ ,  $\left(4\frac{2}{3}, 0\right)$ .

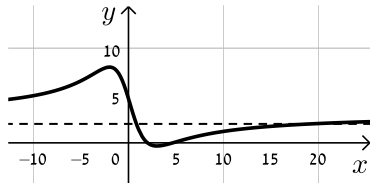
ו.  $k = 8$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $3$ .

36 ב.  $k = -3$  ג.  $(3, 0)$ ,  $(-3, 0)$  ד.  $y = -1$

ו. להלן סקיצה:



ג. עולה:  $x > 3$ ,  $x < -2$ , יורדת:  $-2 < x < 3$



ה. להלן סקיצה:

ה. באף נקודה.

## חקירת פונקצית שורש:

### שאלות:

(37) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{x-3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(38) נתונה הפונקציה:  $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(39) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x\sqrt{6-x}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(40)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2 + 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(41)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(42)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x^2}$ .

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(43)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$ .

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- $x$ ? נמק והראה חישוב מתאים.
- כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .
- חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

(44) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$ .

- מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- $x$ ? מצא אותן.
- כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

(45) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(46) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$ , פרמטר  $a$ .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .  
ידוע כי הוא מקביל לישר:  $3y - x = 0$ .
- מצא את ערך הפרמטר  $a$ .
  - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
  - כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(47) נתונות שתי הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$ ,  $g(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{x}$  ( $k$  פרמטר חיובי).

- ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה:  $x = 0.8$ .
- מצא את  $k$ .
  - האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה?  
אם כן מצא אותה.
  - מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה:  $x = 0.52$ .

(48) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$ , פרמטר חיובי.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות  $k$ ).
- ii. מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?
- ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של  $k$  בתחום הגדרתה.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ . (בטא באמצעות  $k$ ).
- ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה  $A$ . ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה- $x$  והאסימפטוטה הנ"ל הוא:  $S = 4$  יח"ש. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .

(49) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$ . מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .

- א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה  $g(x)$ .
- ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ . קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
  - i. לפונקציות תחום הגדרה זהה.
  - ii. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.
  - iii. שתי הפונקציות חותכות את ציר ה- $x$  באותה נקודה.
  - iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- $y$ . אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה: היות והפונקציה  $g(x)$  מוגדרת להיות:  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  אזי ניתן למצוא את שיעור ה- $y$  של כל נקודה שעל גרף הפונקציה  $f(x)$  ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה- $y$  של הנקודה בעלת אותו שיעור  $x$  על הגרף של  $g(x)$  ונעלה אותה בריבוע.
- ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

50) לפניך הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$ ,  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$ .

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר:  $y = x$ .

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.

מגדירים פונקציה נוספת והיא:  $h(x) = (g(x))^2$ .

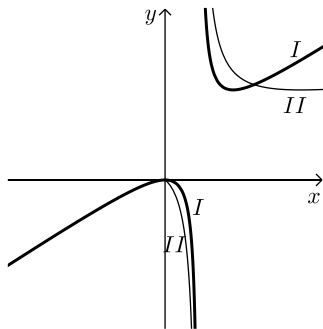
ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה:  $h(x)$ .

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה  $h(x)$  זהה לשל  $g(x)$ ?

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.

קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף

מתאר מבין הפונקציות:  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$ . נמק את בחירותיך.



51) לפניך שלוש פונקציות:  $f(x) = x^2 \sqrt{k-x^2}$ ,  $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$ ,  $h(x) = \frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$ . ( $k > 0$ ).

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של  $h(x)$ .

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה- $x$  כלל.

iii. הפונקציות:  $h(x)$  ו- $g(x)$  הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן (כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

iv. לפונקציה:  $f(x)$  יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה  $A(0, \sqrt{12})$  על ציר ה- $y$ . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך

של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  שאינה בראשית הוא:  $d = 6$ .

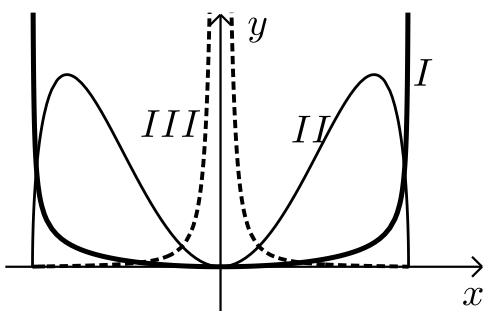
ב. מצא את  $k$ .

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף

הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוגן.

ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של שלושת הפונקציות.

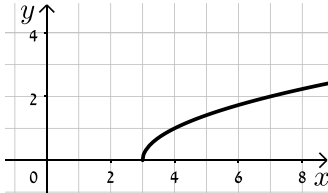
קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף שייך לכל פונקציה.



## תשובות סופיות:

(37) א.  $x \geq 3$     ב.  $\min(3,0)$  קצה    ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה.

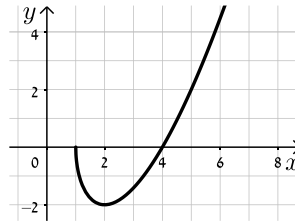
ד.  $(3,0)$     ה. אין.    ו. להלן סקיצה:



(38) א.  $x \geq 1$     ב.  $\max(1,0)$ ,  $\min(2,-2)$  קצה

ג. עולה:  $x > 2$ , יורדת:  $1 < x < 2$     ד.  $(1,0), (4,0)$     ה. אין.

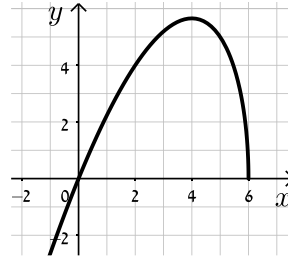
ו. להלן סקיצה:



(39) א.  $x \leq 6$     ב.  $\min(6,0)$ ,  $\max(4,4\sqrt{2})$  קצה

ג. עלייה:  $x < 4$ , ירידה:  $4 < x < 6$     ד.  $(6,0), (0,0)$

ה. להלן סקיצה:



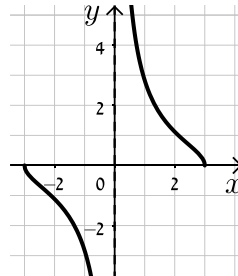
(40) א.  $x \geq 0$     ב.  $\min(0,0)$ ,  $\max(1,1)$  קצה

ג. עולה:  $0 < x < 1$ , יורדת:  $x > 1$     ד.  $(0,0)$     ה.  $y = 0$ .

ו. להלן סקיצה:

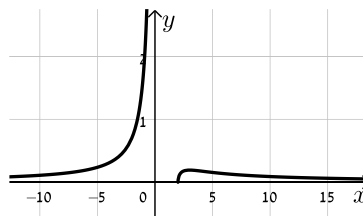


- (41) א.  $-3 \leq x \leq 3$  וגם  $x \neq 0$  ב.  $\max(-3, 0)$  קצה,  $\min(3, 0)$  קצה ג. עולה: אף  $x$ , יורדת:  $-3 \leq x \leq 3$ ,  $x \neq 0$  ד.  $(-3, 0), (3, 0)$

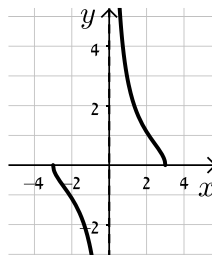


ה.  $x = 0$ . ו. להלן סקיצה:

- (42) א.  $x < 0$ ,  $x \geq 2$  ב.  $\min(2, 0)$ ,  $\max\left(3, \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$  ג.  $(2, 0)$  ד. להלן סקיצה:



- (43) א.  $(2, 0)$  ב. לא ג.  $y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$  ד.  $S = 4\sqrt{2}$
- (44) א.  $x \neq 1$ ,  $x \geq 0$  ב.  $(9, 6)$  ג.  $y = 6$
- (45) א.  $-3 \leq x \leq 3$  וגם  $x \neq 0$  ב.  $\max(-3, 0)$  קצה,  $\min(3, 0)$  קצה ג. עולה: אף  $x$ , יורדת:  $-3 \leq x \leq 3$ ,  $x \neq 0$  ד.  $(-3, 0), (3, 0)$



ה.  $x = 0$ . ו. להלן סקיצה:

- (46) א.  $a = 1$  ב.  $-3 < x < 3$  ג.  $(-1.5, \sqrt{3})$  ד. יורדת:  $-3 < x < -1.5$ , עולה:  $-1.5 < x < 3$

- (47) א.  $k = 0.48$  ב. כן,  $(0.6, 0.57)$  ג.  $y = 0.74x + 0.1352$

- (48) א. i.  $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$  ii.  $x = \pm\sqrt{k}$  ב.  $f'(x) = \frac{k^2}{(k-x^2)^{1.5}} > 0$

- ג.  $y = \sqrt{k}x$  ד.  $k = 4$

$$(49) \text{ א. } g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$$

ב. i. לא נכון ii. נכון

$$\text{ג. } f(x) : \left(0, \frac{1}{2}\right), g(x) : \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

iii. נכון iv. נכון

ד. אסף צודק.

$$\text{ב. } h(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

iii. נכון

(50) א. i. לא נכון ii. נכון

$$\text{ד. } I = h(x), II = f(x)$$

$$\text{ג. לא, } h(x) : x \neq 1$$

iv. נכון

iii. נכון

ii. לא נכון

(51) א. i. לא נכון

$$\text{ב. } k = 24 \quad \text{ג. } \min(0,0), \max(\pm 4, 32\sqrt{2})$$

$$\text{ד. } I = g(x), II = f(x), III = h(x)$$

## תחומי קעירות ונקודות פיתול:

### סיכום כללי:

#### תחומי קעירות – הגדרה:

- פונקציה  $f(x)$  קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום  $[x_0, x_1]$  אם לכל  $x$  בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.  
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו:  $f''(x) < 0$ .
- פונקציה  $f(x)$  קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום  $[x_0, x_1]$  אם לכל  $x$  בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.  
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו:  $f''(x) > 0$ .

#### נקודת פיתול – הגדרות:

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת:  $f''(x) = 0$  כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

### שאלות:

(52) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה:  $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$ .

(53) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$ .

(54) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$ .

(55) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה:  $f(x) = x(x-2)^3$ .

(56) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a}{x^2 + b}$ ,  $a, b$  פרמטרים.

הנקודה  $(-1, 1)$  היא נקודת פיתול של הפונקציה.  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a, b$ .

(57) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(58) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x}{x - \sqrt{x}}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(59) חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :**

- i. מציאת תחום הגדרה.
- ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
- iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
- vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.
- viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$\text{א. } f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$$

$$\text{ג. } f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

$$\text{ה. } f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$$

$$\text{ז. } f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad \text{ח. } f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1}$$

**הערה: בסעיפים ו-ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.**

### תשובות סופיות:

(52)  $(1,7), (2,16)$ , קעירות כלפי מעלה:  $x > 2$  או  $x < 1$ , קעירות כלפי מטה:  $1 < x < 2$ .

(53)  $(2,1)$ , קעירות כלפי מעלה:  $x > 2$ , קעירות כלפי מטה:  $0 \neq x < 2$ .

(54) קיצון:  $\min(2,4)$ , פיתול:  $\left(4, \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$ .

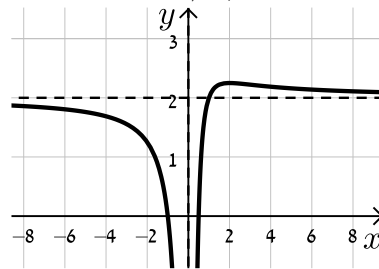
(55) קיצון:  $\min\left(\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)$ , פיתול:  $(1,-1), (2,0)$ .

(56)  $a = 4, b = 3$ .

(57) א.  $x \neq 0$  ב.  $\max\left(2, 2\frac{1}{4}\right)$  ג. עולה:  $0 < x < 2$  יורדת:  $x > 2, x < 0$

ד.  $\left(\frac{1}{2}, 0\right), (-1, 0)$  ה.  $x = 0, y = 2$  ו.  $\left(3, 2\frac{2}{9}\right)$  ז. קעירות כלפי מעלה:  $x > 3$ , קעירות כלפי מטה:  $0 \neq x < 3$ .

ח. להלן סקיצה:

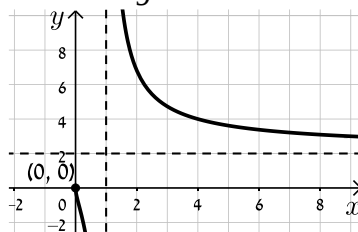


(58) א.  $x > 0, 1 \neq x$  ב. אין. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.

ד. אין. ה.  $x = 1, y = 2$  נקודת אי הגדרה:  $(0,0)$ . ו.  $\left(\frac{1}{9}, -1\right)$ .

ז. קעירות כלפי מעלה:  $x > 1$  או  $0 < x < \frac{1}{9}$ , קעירות כלפי מטה:  $\frac{1}{9} < x < 1$ .

ח. להלן סקיצה:



(59) א. i.  $x \neq 0$  ii.  $(1,0)$  iii.  $x = 0, y = 0$  iv.  $\max(2, 0.25)$

v. עולה:  $0 < x < 2$ , יורדת:  $x < 0, x > 2$  vi.  $\left(3, \frac{2}{9}\right)$

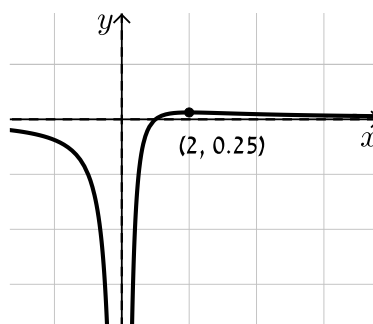
vii. קעורה כלפי מעלה:  $x > 3$ , קעורה כלפי מטה:  $0 < x < 3, x < 0$ .

ב. i.  $x \neq -1$  ii.  $(0,0)$  iii.  $x = -1, y = 2$  iv.  $\min(0,0)$

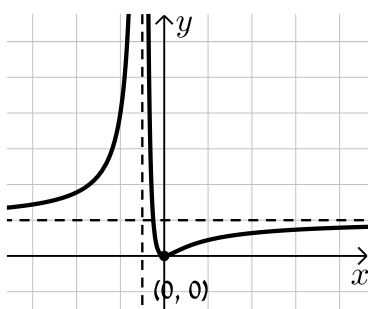
- v. עולה:  $x < -1$ ,  $x > 0$ , יורדת:  $-1 < x < 0$
- vi.  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $-1 < x < \frac{1}{2}$ , קעורה כלפי מטה:  $x < -1$ ,  $x > \frac{1}{2}$
- ג. i.  $x \neq \pm 2$  ii.  $(0, 0)$  iii.  $x = \pm 2$
- iv.  $\min(\sqrt{12}, 5.2)$ ,  $\max(-\sqrt{12}, -5.2)$
- v. עולה:  $x > \sqrt{12}$ ,  $x < -\sqrt{12}$ , יורדת:  $2 < x < \sqrt{12}$ ,  $-2 < x < -\sqrt{12}$
- vi.  $(0, 0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $x > 2$ ,  $-2 < x < 0$ , קעורה כלפי מטה:  $0 < x < 2$ ,  $x < -2$
- ד. i.  $x \neq -1$  ii.  $(0, 0)$  iii.  $x = -1$  iv.  $\max(-3, -6.75)$
- v. עולה:  $x > -1$ ,  $x < -3$ , יורדת:  $-3 < x < -1$
- vi.  $(0, 0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $x > 0$ , קעורה כלפי מטה:  $-1 < x < 0$ ,  $x < -1$
- ה. i.  $x \neq 1$  ii.  $(-1, 0), (0, -1)$  iii.  $x = 1, y = 1$  iv. אין.
- v. יורדת בכל ת.ה. vi.  $\left(-3, \frac{1}{8}\right), (-1, 0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $-3 < x < -1$ ,  $x > 1$ , קעורה כלפי מטה:  $-1 < x < 1$ ,  $x < -3$
- ו. i.  $x \neq 2, 5$  ii.  $(0, -0.1), (-1, 0), (1, 0)$  iii.  $x = 2, x = 5, y = 1$
- iv.  $\min(0.359, -0.11)$ ,  $\max(2.78, -3.89)$
- v. עולה:  $2 < x < 2.78$ ,  $0.359 < x < 2$ , יורדת:  $x > 5$ ,  $2.78 < x < 5$ ,  $x < 0.359$
- ז. i.  $x \neq \pm 2$  ii.  $(3, 0), (1, 0), (0, -0.75)$  iii.  $x = \pm 2, y = 1$
- iv. אין. v. יורדת בכל ת.ה.
- ח. i.  $x \neq \pm 1$  ii.  $(0, 0)$  iii.  $x = -1$  iv.  $\min(0, 0)$ ,  $\max(-2, -4)$
- v. עולה:  $x > 0$ ,  $x < -2$ ,  $x \neq 1$ , יורדת:  $-1 < x < 0$ ,  $-2 < x < -1$
- vi. אין. vii. קעורה כלפי מעלה:  $x > -1$ ,  $x \neq 1$ , קעורה כלפי מטה:  $x < -1$

## סקיצות:

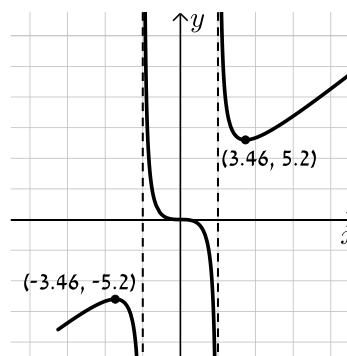
א.



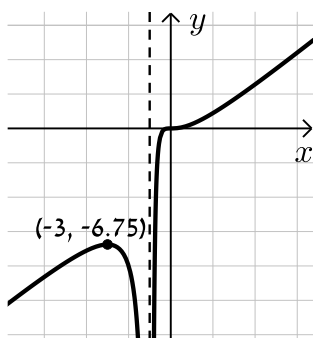
ב.



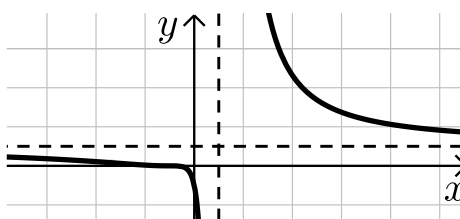
ג.



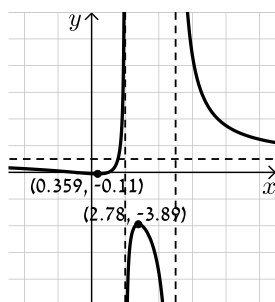
ד.



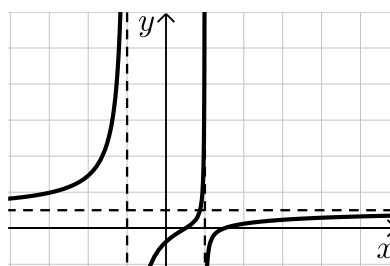
ה.



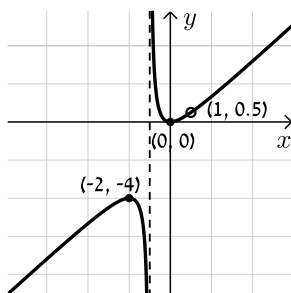
ו.



ז.



ח.



## חקירת פונקציה עם פרמטר:

### סיכום כללי:

סיווג נקודות קיצון באמצעות  $y''$  :

אם הנקודה  $A(x_1, y_1)$  היא נקודת קיצון אז :

- אם  $f''(x_1) > 0$  הנקודה  $A(x_1, y_1)$  היא נקודת מינימום.
- אם  $f''(x_1) < 0$  הנקודה  $A(x_1, y_1)$  היא נקודת מקסימום.

### שאלות:

(1) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה :  $f(x) = x^3 - 12x$  .

(2) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה :  $f(x) = x^2 - 6x - 16$  .

(3) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה :  $f(x) = x^3 - 3b^2x$  ,  $b > 0$  פרמטר. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה :  $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2}$  ,  $(a > 0)$  . חקור לפי הסעיפים הבאים :

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1-x^2}{(x-b)^2}$ ,  $(b > 1)$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x\sqrt{b^2 - x^2}$ ,  $(b > 0)$ .

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(7) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - m}{ax - 4}$ ,  $a, m$  פרמטרים קבועים כאשר:  $a > 0$ .

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$ .

- א. מצא את הערך של הפרמטר  $m$ .
- ב. הצב את הערך של  $m$  שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות  $a$  את:
  - i. תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
  - iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות  $a$  בסעיף הקודם.
- ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- $y$  נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר  $a$ .
- ה. נתון הישר:  $y = k$ . מצא עבור אילו ערכים של  $k$  אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

## תשובות סופיות:

(1)  $\min(2, -16), \max(-2, 16)$

(2)  $\min(3, -25)$

(3)  $\min(b, -2b^3), \max(-b, 2b^3)$

(4) א. כל  $x$  ב.  $\max\left(a, \frac{1}{a}\right), \min\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$

ג. עולה:  $-a < x < a$  יורדת:  $x < -a, x > a$ 

ד.  $(0, 0)$  ה. אסימפטוטה אופקית:  $y = 0$

(5) א.  $x \neq b$  ב.  $\max\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2-1}\right)$  ג. עולה:  $x > b, x < \frac{1}{b}$  יורדת:  $\frac{1}{b} < x < b$

ד.  $\left(0, \frac{1}{b^2}\right), (-1, 0), (1, 0)$  ה.  $x = b, y = -1$

(6) א.  $-b \leq x \leq b$  ב.  $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}, -2b^2\right), \max\left(\frac{b}{\sqrt{2}}, 2b^2\right), \min(-b, 0)$  קצה,

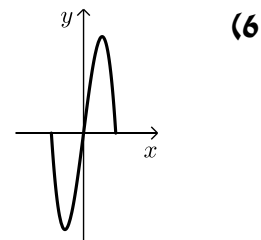
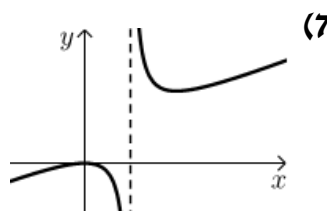
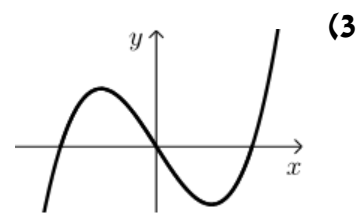
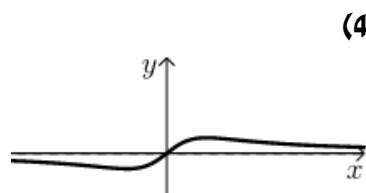
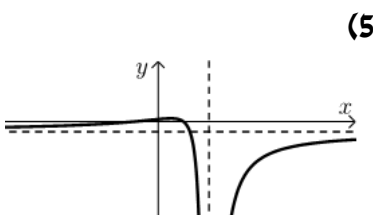
ג. עולה:  $-\frac{b}{\sqrt{2}} < x < \frac{b}{\sqrt{2}}$  יורדת:  $\frac{b}{\sqrt{2}} < x < b, -b < x < -\frac{b}{\sqrt{2}}$

ד.  $(b, 0), (-b, 0), (0, 0)$

(7) א.  $m = 0$  ב. i.  $x \neq \frac{4}{a}$  ii.  $\max(0, 0), \min\left(\frac{8}{a}, \frac{16}{a^2}\right)$

ב. iii.  $x = \frac{4}{a}$  ד.  $a = 2$  ה.  $0 < k < 4$

## סקיצות לשאלות:



# מתמטיקה א

פרק 17 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות

תוכן העניינים

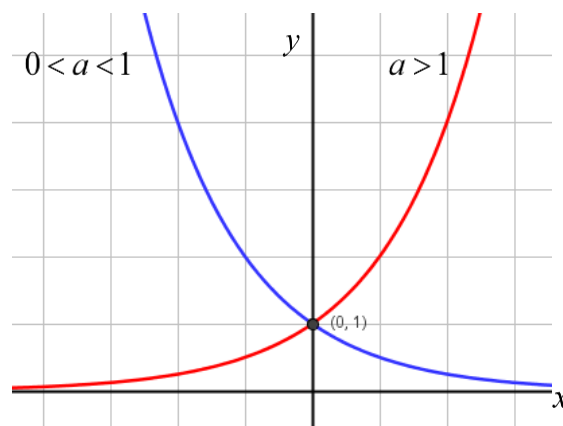
|     |                              |
|-----|------------------------------|
| 216 | 1. הנגזרת של פונקציה מעריכית |
| 220 | 2. שימושי הנגזרת             |
| 221 | 3. חקירה של פונקציה מעריכית  |

## הנגזרת של פונקציה מעריכית:

**סיכום כללי:**

**הגדרות כלליות:**

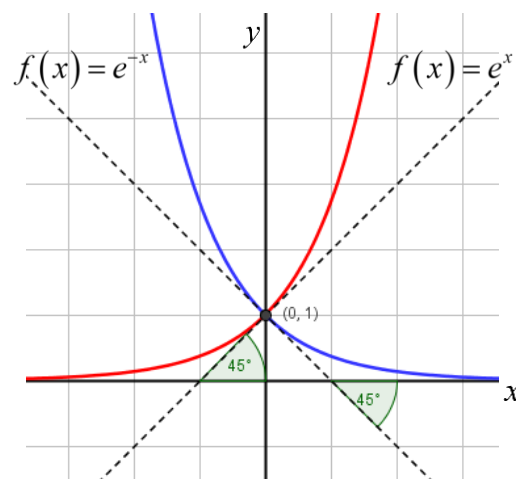
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה:  $f(x) = a^x$   
 עבור:  $a > 1$  ו-  $0 < a < 1$ :



**תכונות כלליות:**

1. הפונקציות מוגדרות לכל  $x$ .
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $y$  בנקודה:  $(0, 1)$ .
4. עבור:  $a > 1$  הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור:  $0 < a < 1$  הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות  $f(x) = e^x$  ו-  $f(x) = e^{-x}$  נקבל:



## תכונות נוספות:

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$  בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^{-x}$  בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  הוא -1.

## נגזרות של פונקציות מעריכיות:

| הפונקציה       | הנגזרת                                  |
|----------------|-----------------------------------------|
| $y = a^x$      | $y' = a^x \cdot \ln a$                  |
| $y = a^{f(x)}$ | $y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$ |
| $y = e^x$      | $y' = e^x$                              |
| $y = e^{f(x)}$ | $y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$             |

## תזכורת - כללי הגזירה:

| מספר כלל | הפונקציה                | תיאור          | הנגזרת                                                      |
|----------|-------------------------|----------------|-------------------------------------------------------------|
| 1.       | $y = a \cdot f(x)$      | מכפלה בקבוע    | $y' = a \cdot f'(x)$                                        |
| 2.       | $y = f(x) + g(x)$       | סכום פונקציות  | $y' = f'(x) + g'(x)$                                        |
| 3.       | $y = f(x) \cdot g(x)$   | מכפלת פונקציות | $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$                  |
| 4.       | $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ | מנת פונקציות   | $y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ |
| 5.       | $y = f(g(x))$           | פונקציה מורכבת | $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$                                 |

## שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1 & \text{ב. } f(x) = e^{x^2-3x} + ex \\ \text{ג. } f(x) = 2^{3x} & \text{ד. } f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x} \end{array}$$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = x \cdot e^x \quad \text{ב. } f(x) = x^2 \cdot e^{4x} \quad \text{ג. } f(x) = (x+1) \cdot 2^x$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

$$\text{א. } f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3 \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = e^{2x} & \text{ב. } f(x) = e^x + 1 \\ \text{ג. } f(x) = e^{\frac{1}{x}} & \text{ד. } f(x) = (x^2 + 1)e^x \\ \text{ה. } f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 1) & \text{ו. } f(x) = e^{3x-2} \\ \text{ז. } f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x} & \text{ח. } f(x) = x^3 e^{2x} \\ \text{ט. } f(x) = e^{-2x}(x+4) & \text{י. } f(x) = e^{2x+1}(1-x) \\ \text{יא. } f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} & \text{יב. } f(x) = \frac{x^3}{e^{3x}} \\ \text{יג. } f(x) = \frac{2+x^2}{e^{x^2}} & \text{יד. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \\ \text{טו. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{-x}} & \text{טז. } f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{x+1}} \end{array}$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2 \quad \text{ב. } (2x-3)e^{x^2-3x} + e \quad \text{ג. } 3\ln 2 \cdot 2^{3x} \quad \text{ד. } 2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$$

$$(2) \quad \text{א. } (1+x)e^x \quad \text{ב. } 2xe^{4x}(1+2x) \quad \text{ג. } 2^x(1+x\ln 2 + \ln 2)$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{x(2-x)}{e^x} \quad \text{ב. } \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$(4) \quad \text{א. } 30e^{2x}(e^{2x}-1)^2 \quad \text{ב. } \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}} \quad \text{ג. } \frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$$

$$(5) \quad \text{א. } 2e^{2x} \quad \text{ב. } e^x \quad \text{ג. } -\frac{e^{1/x}}{x^2} \quad \text{ד. } (x+1)^2 e^x$$

$$\text{ה. } e^{-x}(-x^2-2x+3) \quad \text{ו. } 3e^{3x-2}$$

$$\text{ז. } \frac{e^x(x-1)}{x^2} \quad \text{ח. } x^2 e^{2x}(3+2x) \quad \text{ט. } -e^{-2x}(2x+7)$$

$$\text{י. } e^{2x+1}(1-2x)$$

$$\text{יא. } \frac{e^{-1/x}}{x^2} \quad \text{יב. } \frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}} \quad \text{יג. } \frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$$

$$\text{יד. } \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} \quad \text{טו. } \frac{(x+1)^2}{e^{-x}} \quad \text{טז. } \frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2}$$

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

- (6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^x$  בנקודה  $A(1, e)$ .
- (7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$  בנקודה שבה  $x = 0$ .
- (8) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$  בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = e$ .
- (9) נתונה הפונקציה:  $y = e^{2x} + 3ex$ .  
 לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה:  $x = 2$ .  
 מצא את משוואת המשיק.
- (10) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$  בנקודה  $(1, 15)$  הוא  $21 \ln 3$ .  
 מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

### תשובות סופיות:

- (6)  $y = ex$
- (7)  $y = 3x + 1$
- (8)  $y = (-e^2 + e)x + e^2$ ,  $y = (e-1)x + e$
- (9)  $y = 2e^4x + 3ex - 3e^4$
- (10)  $b = -1$ ,  $a = 2$

## חקירה של פונקציה מעריכית:

### שאלות:

(11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } f(x) = \frac{2x-1}{e^x} & \text{ב. } f(x) = \frac{3}{e^x-1} & \text{ג. } f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \\
 \text{ד. } f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2} & \text{ה. } f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x} & \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2} \\
 \text{ז. } f(x) = \sqrt{e^{2x}-4e^x+3}
 \end{array}$$

(12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^2 e^x$ .

(13) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$ .

(14) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax^2+bx+9}{e^x}$ .

הפונקציה משיקה לציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x=1.5$ .  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$ . לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה  $(\log_2 3, -19)$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $p$  ו- $q$ .

(16) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^{2x} + e^x$ .

(17) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$ .

(18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x - 1}$ .

(19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$ .

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 5e^x + 6}$ .

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ .

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^x}$ .

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x-1}{e^{3x} - e}$ .

(25) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = (x-3)e^x$ .

(26) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ .

(27) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 + a}{be^x}$ . לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה  $(1, \frac{2}{e})$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.

**(28)** חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים :

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = (x-1)e^x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = e^{x^2-x} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{x+1}} \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{2}{e^{x^2} + 1} \quad \text{ה.}$$

**(29)** נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-3)e^x$  . חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(30)** נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$  . חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$  .
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(31)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{e^{0.5x^2}}$  . חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(32)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(33)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2x \cdot 3^x$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(34)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2e^{\frac{x}{x^2+1}}$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- לאילו ערכי  $m$  יש למשוואה  $f(x) = m$  בדיוק פתרון אחד?

**(35)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
- כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(36) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2 + 1}.$$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(37) \text{ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: } f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+k}} \text{ בנקודה שבה } x=1 \text{ הוא } -\frac{12}{e^{10}}.$$

- א. מצא את ערך הפרמטר  $k$  וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא:  $0 < \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}} \leq e^2$ .

$$(38) \text{ נתונה הפונקציה הבאה: } f(x) = e^{2x} + ae^x + b. \text{ גוזרים את הפונקציה פעמיים}$$

$$\text{וידוע כי כאשר } x = \ln \frac{2}{3} \text{ הנגזרות מקיימות: } f'(x) + f''(x) = 8.$$

- א. מצא את  $a$ .
- משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא:  $y = 16x + 7 - 16 \ln 2$ .
- ב. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.
- ג. מצא את  $b$ .
- ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

$$(39) \text{ נתונות הפונקציות הבאות: } f(x) = 6x - e^x \text{ ו- } g(x) = ae^x - e^{2x} + b.$$

ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור  $x$  וכי שתיהן נפגשות על ציר ה- $y$ .

- א. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- ב. הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

**(40)** לגרף הפונקציה:  $f(x) = ax^2 \cdot e^{-bx^2}$  יש נקודת קיצון:  $\left(2, \frac{4}{e}\right)$ ,  $a, b \neq 0$ .

- מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים ישר:  $y = k$ . באיזה תחום ערכים צריך להימצא  $k$  כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

**(41)** לפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{e^{ax-1}}$  יש קיצון בנקודה שבה:  $x = 1$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $a$ .
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(42)** הישר  $x = \sqrt{6}$  הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + m}$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $m$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(43)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$ .

- מצא את הנקודות המקיימות:  $f'(x) = 0$  וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- בכמה נקודות חותך הישר  $y = -0.01$  את גרף הפונקציה?

(44) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$ . גוזרים את הפונקציה פעמיים

וידוע כי כאשר  $x = \ln \frac{2}{3}$  הנגזרות מקיימות:  $f'(x) + f''(x) = 12$ .

א. מצא את  $a$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא:  $y = 22x + 28 - 22 \ln 2$ .

ב. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.

ג. מצא את  $b$ .

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ ? אם כן מצא את הנקודות.

(45) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x \cdot a^x$ ,  $(a > 0)$ .

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה:  $x = -\frac{1}{\ln 2}$ .

א. מצא את  $a$ .

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה  $x = 2$  היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$

עם גרף הפונקציה:  $g(x) = x^2 \cdot 2^x - kx \cdot 2^x$ .

ג. מצא את  $k$ .

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

(46) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{1-x}$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה

עם ציר ה- $y$ .

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- $x$ .

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

## תשובות סופיות:

$$(11) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } x \neq 0 \quad \text{ג. } x \neq \ln 5 \quad \text{ד. } x \neq \ln 2, x \neq 0 \quad \text{ה. כל } x$$

$$\text{ו. } 0 \leq x \neq \frac{2}{5} \quad \text{ז. } x \leq 0, x \geq \ln 3$$

$$(12) \quad \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$$

$$(13) \quad \min(3, e^3)$$

$$(14) \quad \min(1.5, 0), \max(3.5, 0.483), b = -12, a = 4$$

$$(15) \quad p = -27, q = 35$$

$$(16) \quad y = 0$$

$$(17) \quad y = 0$$

$$(18) \quad x = 0, y = -5, y = 1$$

$$(19) \quad x = \ln 5, y = -\frac{1}{5}$$

$$(20) \quad y = -1, y = 1$$

$$(21) \quad (\ln 2, -1) \text{ נקודת אי הגדרה: } x = \ln 3, y = -\frac{1}{3}, y = 0$$

$$(22) \quad x = 0, y = 0$$

$$(23) \quad y = 0$$

$$(24) \quad x = \frac{1}{3}, y = 0$$

$$(25) \quad y = 0$$

$$(26) \quad (0,0) \text{ נקודת אי הגדרה: } x = 0$$

$$(27) \quad \left(3, \frac{10}{e^3}\right), a = 1, b = 1$$

$$(28) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } (0, -1), (1, 0) \quad \text{ג. } \min(0, -1) \quad \text{ד. עולה: } x > 0 \text{ יורדת: } x < 0$$

$$\text{ב. כל } x \quad \text{ג. } (0, 1) \quad \text{ד. עולה: } x < -1, x > -1 \quad \text{ה. פיתול } \left(-1, \frac{2}{e}\right)$$

$$\text{ג. כל } x \quad \text{ד. } (0, 0) \quad \text{ה. } \max\left(2, \frac{4}{e}\right), \min(0, 0), \max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$$

$$\text{ד. עולה: } x < -2, 0 < x < 2 \text{ יורדת: } x > 2, -2 < x < 0$$

$$\text{ד. כל } x \quad \text{ה. } (0, 1) \quad \text{ו. } \min(0.5, e^{-0.25}) \quad \text{ז. עולה: } x > 0.5 \text{ יורדת: } x < 0.5$$

- ה.1. כל  $x$     2.  $(0,1)$     3.  $\max(0,1)$     4. עולה:  $x < 0$  יורדת:  $x > 0$
- ו.1. כל  $x$     2.  $(0, 2e^{-1})$     3.  $\min(0, 2e^{-1})$     4. עולה:  $x > 0$  יורדת:  $x < 0$
- (29) א. כל  $x$     ב.  $\min(2, -e^2)$     ג. תחומי עלייה:  $x > 2$  תחומי ירידה:  $x < 2$
- ד.  $(3,0)$ ,  $(0,-3)$
- (30) א. כל  $x$     ב.  $\max(0,3)$ ,  $\min(\ln 3, 1.59)$     ג. תחומי עלייה:  $x > \ln 3$  או  $x < 0$  תחומי ירידה:  $0 < x < \ln 3$     ד.  $(0,3)$
- (31) א. כל  $x$     ב.  $\min\left(-1, -\frac{4}{e^{0.5}}\right)$ ,  $\max\left(1, \frac{4}{e^{0.5}}\right)$     ג. תחומי עלייה:  $-1 < x < 1$  תחומי ירידה:  $x > 1$  או  $x < -1$     ד.  $(0,0)$
- (32) א. כל  $x$     ב.  $\max\left(3, \frac{27}{e^3}\right)$     ג. עולה:  $x < 3$ , יורדת:  $x > 3$     ד.  $(0,0)$
- (33) א. כל  $x$     ב.  $\min(-0.91, -0.67)$     ג. עולה:  $x > -0.91$  יורדת:  $x < -0.91$     ד.  $(0,0)$
- (34) א. כל  $x$     ב.  $\max(1, 2\sqrt{e})$ ,  $\min\left(-1, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$     ג. עולה:  $-1 < x < 1$  יורדת:  $x < -1$ ,  $x > 1$
- ז.  $m = 2$ ,  $m = 2\sqrt{e}$ ,  $m = \frac{2}{\sqrt{e}}$     ח.  $y = 2$     ד.  $(0,2)$     א.  $x \neq 0$     ב.  $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$     ג. עולה:  $x > \frac{1}{2}$ , יורדת:  $x < \frac{1}{2}$     ד. אין
- (35) א. כל  $x$     ב.  $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$ ,  $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$     ג. עולה:  $x > \frac{1}{2}$ ,  $x < \frac{1}{6}$  יורדת:  $x > \frac{1}{6}$ ,  $x < \frac{1}{2}$     ד. אין
- (36) א. כל  $x$     ב.  $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$ ,  $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$     ג. עולה:  $x > \frac{1}{2}$ ,  $x < \frac{1}{6}$  יורדת:  $x > \frac{1}{6}$ ,  $x < \frac{1}{2}$     ד.  $(0,1)$     א.  $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$
- (37) א.  $k=1$ ,  $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$     ב.  $(-1, e^2)$     ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה  $f(x)$  נמצא בתחום  $0 < f(x) \leq e^2$
- (38) א.  $a=4$     ב.  $x = \ln 2$     ג.  $b = -5$     ד.  $(0,0)$
- (39) א.  $a=12$ ,  $b=-12$     ב. עולות:  $x < \ln 6$  יורדות:  $x > \ln 6$

(40) א.  $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2}$ ,  $a=1$ ,  $b=0.25$  ב.  $\max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$ ,  $\min(0,0)$  ג.

ג.  $(0,0)$  ה.  $0 < k < \frac{4}{e}$

(41) א.  $a = \frac{1}{3}$  ב. כן:  $\left(11, \frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$  ג. עולה:  $1 < x < 11$  יורדת:  $x < 1, x > 11$

ד.  $(-1,0)$ ,  $(7,0)$ ,  $(0,-7e)$

(42) א.  $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 6}$ ,  $m = -6$  ב.  $\max\left(-2, -\frac{1}{2e^4}\right)$ ,  $\min\left(3, \frac{e^6}{3}\right)$  ג.  $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$

(43) א.  $x = 0, -1.5$ . נקודת הקיצון היא:  $\min\left(-1.5, -3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$  ב.  $y = 0$

ד. 2 נקודות.

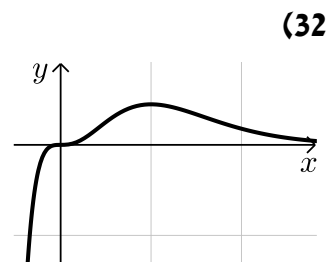
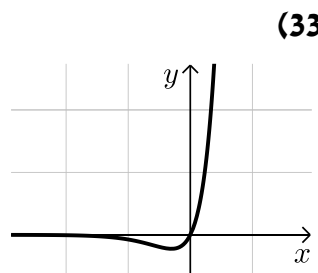
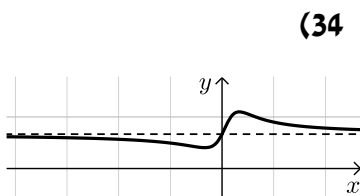
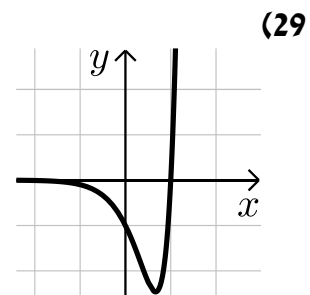
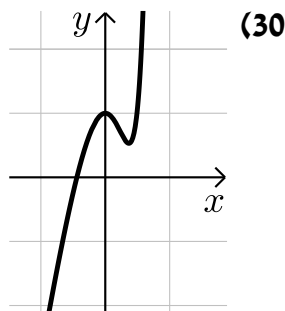
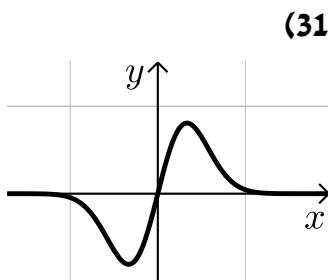
(44) א.  $a = 7$  ב.  $x = \ln 2$  ג.  $b = 10$  ד. לא.

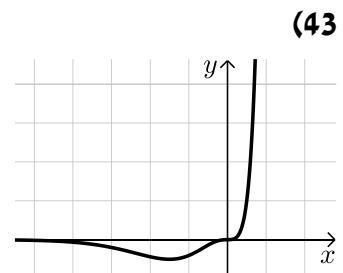
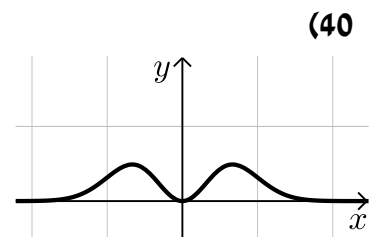
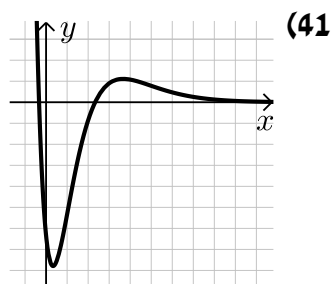
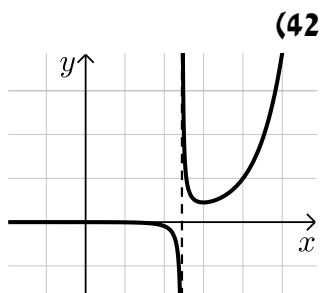
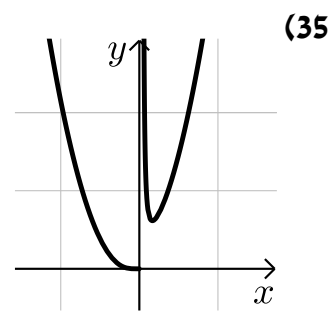
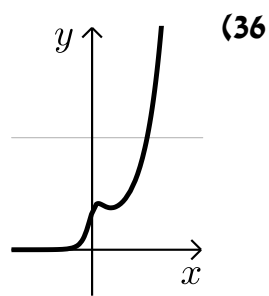
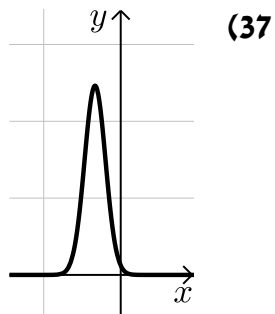
(45) א.  $a = 2$  ב. עולה:  $x > -\frac{1}{\ln 2}$  יורדת:  $x < -\frac{1}{\ln 2}$  ג.  $k = 1$

ד.  $(0,0)$

(46) א.  $y = -x \ln 81 + 7$  ג.  $\min\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{243}\right)$

סקיצות לשאלות החקירה:





# מתמטיקה א

פרק 18 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

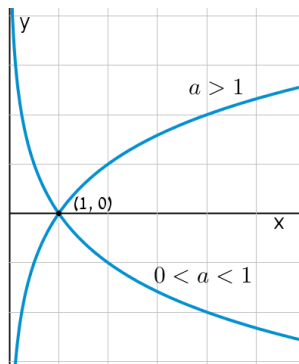
תוכן העניינים

- 1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית ..... 232
- 2. שימושי הנגזרת ..... 237
- 3. חקירה של פונקציה לוגריתמית ..... 238

## הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

### סיכום כללי:

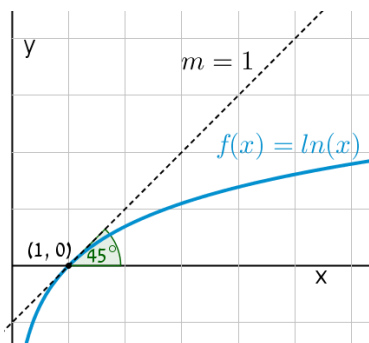
#### הגדרות כלליות:



להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה:  $f(x) = \log_a x$  עבור  $a > 1$  ו-  $0 < a < 1$ :

#### תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה  $x > 0$ .
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $x$  בנקודה  $(1, 0)$ .
- עבור  $a > 1$  הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור  $0 < a < 1$  הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות  $f(x) = \ln x = \log_e x$  נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  הוא 1:

#### תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה:  $y = \log(f(x))$  הוא:  $f(x) > 0$ .

## נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

| הפונקציה          | הנגזרת                          |
|-------------------|---------------------------------|
| $y = \log_a x$    | $y' = \frac{1}{x \ln a}$        |
| $y = \log_a f(x)$ | $y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$ |
| $y = \ln x$       | $y' = \frac{1}{x}$              |
| $y = \ln f(x)$    | $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$       |

## שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א.  $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$     ב.  $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג.  $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$     ד.  $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה.  $f(x) = \ln(\cos x)$     ו.  $f(x) = \log_2 x + 5 \log_3(2x-1)$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א.  $f(x) = x \ln x$     ב.  $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$     ג.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד.  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$     ה.  $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א.  $f(x) = \ln^3 x$     ב.  $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג.  $f(x) = x^2 \ln^2 x$     ד.  $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

ב.  $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3$

א.  $f(x) = \ln(x+2)$

ד.  $f(x) = x^3 \ln x$

ג.  $f(x) = x^2 \ln x$

ו.  $f(x) = e^x \ln x$

ה.  $f(x) = \ln e^{2x}$

ח.  $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$

ז.  $f(x) = e^{-x^2} \ln x$

י.  $f(x) = \ln(x^4)$

ט.  $f(x) = \ln(x^2)$

יב.  $f(x) = x \ln x - \ln x^2$

יא.  $f(x) = (\ln x)^4$

יד.  $f(x) = \ln \sqrt{x}$

יג.  $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$

טז.  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

טו.  $f(x) = \sqrt{\ln x}$

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

ב.  $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$

א.  $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$

ד.  $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$

ג.  $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$

ו.  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

ה.  $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$

ח.  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$

ז.  $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$

י.  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+5x}{1-5x}}$

ט.  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

יב.  $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$

יא.  $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$

יד.  $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$

יג.  $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$

טו.  $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$

## תשובות סופיות:

(1)  $f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1}$  א.  $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x}$  ב.  $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$  ג.

$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$  ד.  $f'(x) = -\tan x$  ה.  $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3}$  ו.

(2)  $f'(x) = \ln x + 1$  א.  $f'(x) = (3x+1) \left( 6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right)$  ב.  $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$  ג.

$f'(x) = \frac{4}{x(\ln x+2)^2}$  ד.  $f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}}$  ה.

(3)  $f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x}$  א.  $f'(x) = \frac{6 \ln x}{x}$  ב.  $f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1)$  ג.

$f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3}$  ד.

(4)  $\frac{1}{x+2}$  א.  $\frac{2 \ln x + 2}{x}$  ב.  $x(2 \ln x + 1)$  ג.

$x^2(3 \ln x + 1)$  ד.  $e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right)$  ה. 2.  $\frac{4}{x}$  ו.  $\frac{2}{x}$  ז.

$e^{-x^2} \left( \frac{1}{x} - 2x \ln x \right)$  ח.  $4x \ln x$  ט.  $\frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2}$  יג.

$\frac{4(\ln x)^3}{x}$  יא.  $\ln x + 1 - \frac{2}{x}$  יב.  $\frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$  יד.

$\frac{1}{2x}$  יז.  $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$  יט.  $\frac{6}{x^2-9}$  ג.

(5)  $-\frac{2}{x(x+2)}$  א.  $\frac{2}{x^2-1}$  ב.  $\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2}$  ג.

$\frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+1}$  ד.  $\frac{x}{x^2-1}$  ה.  $\frac{1}{x^2-1}$  ט.

$\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$  יז.  $\frac{1}{4-2x}$  ח.

$$\frac{3\ln^2 x - \ln^3 x}{x^2} \quad \text{י.ב.}$$

$$\frac{\ln x - 4}{\ln^5 x} \quad \text{ט.ו.}$$

$$\frac{1 - 3\ln \sqrt[3]{x}}{3x^2} \quad \text{י.א.}$$

$$\frac{2(\ln^4 x - 1)}{x \ln^3 x} \quad \text{י.ד.}$$

$$\frac{5}{1 - 25x^2} \quad \text{י.}$$

$$\frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)} \quad \text{י.ג.}$$

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $A(e, 1)$ .

(7) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$  בנקודה  $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$  הוא  $\frac{e}{3}$ .  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

(8) הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \ln x$  ו- $g(x) = 1 - f(x)$  נחתכים בנקודה  $A$  ברביע הראשון.  
בנקודה  $A$  העבירו משיק ל- $f(x)$ .  
מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

(9) לפונקציה  $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$  העבירו משיק בנקודה שבה  $x = e^2$ .  
מצא את משוואת המשיק.

(10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x \ln(x^2 + 1)$  בנקודה שבה  $x = 1$ .

### תשובות סופיות:

$$(6) \quad y = \frac{1}{e}x$$

$$(7) \quad a = 2, b = -2$$

$$(8) \quad y = \frac{1}{e}x$$

$$(9) \quad y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$$

$$(10) \quad y = \ln 2 \cdot x + x - 1$$

## חקירה של פונקציה לוגריתמית:

### שאלות:

11 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

- א.  $f(x) = \ln x$       ב.  $f(x) = \ln(x^2)$   
 ג.  $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$       ד.  $f(x) = \ln(e^x - 4)$   
 ה.  $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$       ו.  $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2\ln x - 3}$   
 ז.  $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

12 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = 2\ln x - x^2$ .

13 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^2 \ln x$ .

14 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sqrt{2\ln x - 1}}{x}$ .

15 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$ .

16 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$ . הנקודה  $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$  היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

17 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$ . הנקודה  $\left(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8}\right)$  היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

18 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \ln(x-3)$ .

19 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$ .

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{2\ln x - 1}{\ln x + 1}$ .

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$ .

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$ .

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x \ln x + 2$ .

(25) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

(26) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

- i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

|                                       |                         |
|---------------------------------------|-------------------------|
| א. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3\ln x$ | ב. $y = x \ln x$        |
| ג. $y = x \ln x - x$                  | ד. $y = \sqrt{x} \ln x$ |
| ה. $y = x^2 \ln x$                    | ו. $y = \ln(x^2 + 1)$   |

(27) נתונה הפונקציה  $f(x) = 2x \ln^2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא לאלו ערכי  $k$  הישר  $y = k$  חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

(29) נתונה הפונקציה  $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ .

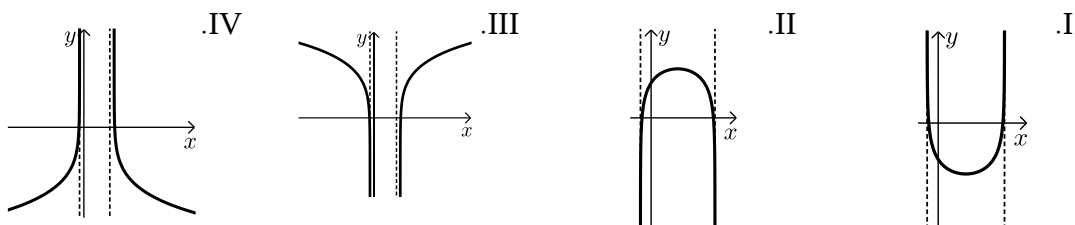
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \ln x$ .
- מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$ . ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור  $x$ ,  $(x_A = x_B)$ .
- מצא את שיעור ה- $x$  של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

**(31)** נתונה שתי הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ,  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.  
 נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
  - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור  $x$  זהה.
  - לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
  - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- $x$  שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- $y$  של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

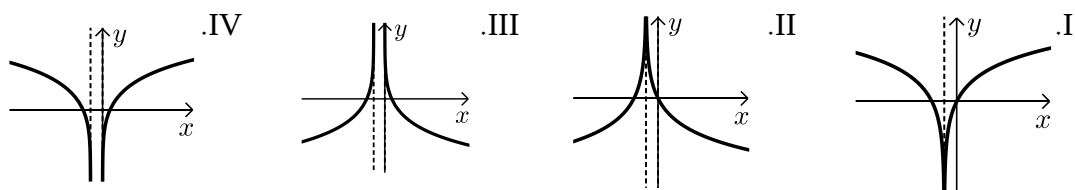
**(32)** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- $y$ ?  
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



**(33)** נתונה הפונקציה:  $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- $y$ ?  
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



- ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

34) לפניך הפונקציה הבאה :  $f(x) = \ln(1 - \ln x)$  .

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

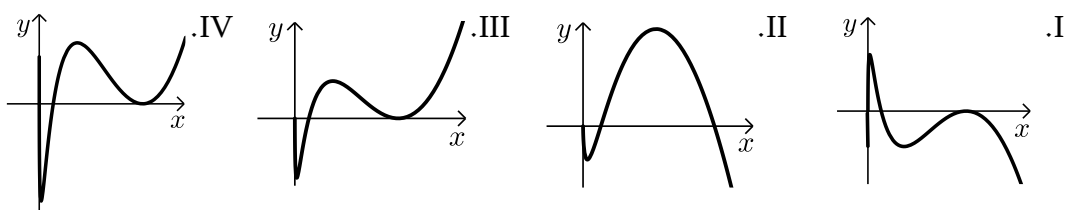
35) נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$  .

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  .
- הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

36) נתונה הפונקציה הבאה :  $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$  .

- הראה כי נגזרת הפונקציה היא :  $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$  .
- מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ענה על השאלות הבאות :
  - מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$  .
  - מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה  $f(x)$  ונמק את בחירתך.



37) נתונה הפונקציה :  $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$  .

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$  .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הפונקציה  $g(x) = \ln x$  .

(38) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה :  $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$

נתונה הפונקציה :  $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה :  $x=e$ .

(39) נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$  ,  $a$  פרמטר חיובי,  $a \neq 1$

א. הבע באמצעות  $a$  את :

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת  $y' = 0$ .

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום :  $x > e-2$ . מצא את  $a$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום  $x > -1$ .

ד. נתון הישר :  $y = k$ . מצא בסקיצה את תחום הערכים של  $k$  עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

(40) נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \ln x + \frac{1}{x}$

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר  $y$ ?

אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

## תשובות סופיות:

$$(11) \quad \text{א. } x > 0 \quad \text{ב. } x \neq 0 \quad \text{ג. } x > 10 \text{ או } x < -2 \quad \text{ד. } x > \ln 4$$

$$\text{ה. } 0 < x \neq e \quad \text{ו. } x > 0 \text{ וגם } x \neq e^3, e^{-1} \quad \text{ז. } x \geq e$$

$$(12) \quad \max(1, -1)$$

$$(13) \quad \min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$$

$$(14) \quad \min(\sqrt{e}, 0) \text{ קצה, } \max\left(e, \frac{1}{e}\right)$$

$$(15) \quad \min(4, -1)$$

$$(16) \quad a = 1, b = -1$$

$$(17) \quad a = 1, b = -1$$

$$(18) \quad x = 3$$

$$(19) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 0), x = e, y = 0$$

$$(20) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 2), x = \frac{1}{e}, y = 2$$

$$(21) \quad \text{נקודת אי הגדרה } \left(e^2, \frac{1}{4}\right), (0, 0); x = \frac{1}{e^2}, y = 0$$

$$(22) \quad x = 0, y = 0$$

$$(23) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 0)$$

$$(24) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 2)$$

$$(25) \quad \left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$$

$$(26) \quad \text{א. } x > 0 \quad \text{iii. } \max(1, -3.5), \min(3, \ln 27 - 7.5)$$

$$\text{iv. עולה: } 0 < x < 1, x > 3 \quad \text{יורדת: } 1 < x < 3 \quad \text{ב. } x > 0 \quad \text{ii. } (1, 0)$$

$$\text{iii. } \min(e^{-1}, -e^{-1}) \quad \text{iv. עולה: } x > e^{-1} \quad \text{יורדת: } 0 < x < e^{-1}$$

$$\text{ג. } x > 0 \quad \text{ii. } (e, 0) \quad \text{iii. } \min(1, -1) \quad \text{iv. עולה: } x > 1 \quad \text{יורדת: } 0 < x < 1$$

$$\text{ד. } x > 0 \quad \text{ii. } (1, 0) \quad \text{iii. } \min\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right) \quad \text{iv. עולה: } x > e^{-2} \quad \text{יורדת: } 0 < x < e^{-2}$$

ה. i.  $x > 0$  ii.  $(1, 0)$  iii.  $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$  iv. עולה:  $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$  יורדת:  $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל  $x$  ii.  $(0, 0)$  iii.  $\min(0, 0)$  iv. עולה:  $x > 0$  יורדת:  $x < 0$

(27) א.  $x > 0$  ב.  $\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right), \min(1, 0)$

ג. עלייה:  $x > 1$  או  $0 < x < \frac{1}{e^2}$ , ירידה:  $\frac{1}{e^2} < x < 1$  ד.  $(1, 0)$

(28) א.  $0 < x \neq e$  ב.  $\min(e^2, e^2)$  ג. עלייה:  $x > e^2$ , ירידה:  $0 < x < e^2$

ו.  $k > e^2$  ד. אין

(29) א.  $x > 0$  ב.  $\min(4, -1)$  ג. עלייה:  $x > 4$ , ירידה:  $0 < x < 4$

ד.  $(1, 0), (16, 0)$

(30) א.  $x \geq 1$  ב. מתקבל:  $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$  ג.  $(e, 1), (1, 0)$

ד.  $x = \sqrt[4]{e}$

(31) א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של  $f(x)$  הוא:  $x > 0, x \neq 1$  ותחום ההגדרה של  $g(x)$  הוא:  $x > 0$

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה  $x = e$  אך עבור  $f(x)$  מדובר במינימום ועבור  $g(x)$  מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור  $f(x)$ : עולה:  $x > e$  יורדת:  $0 < x < e, x \neq 1$

ועבור  $g(x)$ : עולה:  $0 < x < e$  יורדת:  $x > e$  iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- $y$  שלה הוא:  $y = \frac{x}{\ln x}$  ו- $y = \frac{\ln x}{x}$

נכפול:  $y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$

(32) א.  $x < -1, x > 7$  ב.  $x = -1, 7$  ג. עולה:  $x > 7$  יורדת:  $x < -1$

ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום. באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

(33) א.  $x \neq -1$  ב.  $x = -1$  ג. עולה:  $x > -1$  יורדת:  $x < -1$

ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה.  $x \neq -1, -2 < x < 0$

(34) א.  $0 < x < e$ . (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם:  $1 - \ln x > 0$  וגם  $x > 0$ ).

ב.  $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0$ . ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.  
ג.  $(1, 0)$ .

(35) א.  $x < -\frac{1}{2}, x > 1$ . ב.  $x = -\frac{1}{2}, 1$ . ג.  $(-2, 0)$ .

ד. מתקבל:  $y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$ .

(36) ב.  $x > 1, e^{-4} < x < e^{-1}$ .

ג. i. 2 נקודות והן:  $(e^{-2}, 0)$ ,  $(1, 0)$ . הנקודה שבה:  $x = 0$  לא קיימת עקב ת.ה.

ii.  $x \neq 1, x > e^{-2}$ . ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה. שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

(37) א.  $x > 0$ . ב.  $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$ ,  $(e^{\sqrt{3}}, 0)$ ,  $(1, 0)$ . ג.  $\min(e, -2)$ ,  $\max(e^{-1}, 2)$ .  
ה.  $(e^2, 2)$ ,  $(e^{-2}, -2)$ ,  $(1, 0)$ .

(38) א.  $x = e$ . ב. מתקבל:  $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$ . ג.  $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$ .

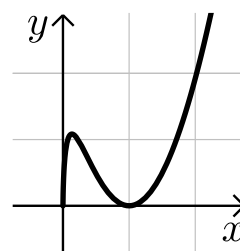
(39) א. i.  $x > -a, x \neq 1-a$ . ii.  $(e-a, e)$ . iii.  $\left(0, \frac{a}{\ln a}\right)$ .

iv.  $x = 1-a$ . ב.  $a = 2$ . ד.  $k < e$ .

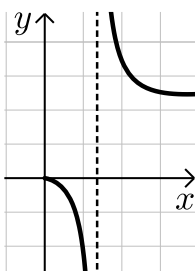
(40) א. i.  $x > 0$ . ii.  $x = 0$ . ב.  $\min(1, 1)$ . ג. עולה:  $x > 1$ , יורדת:  $0 < x < 1$ .

סקיצות לשאלות:

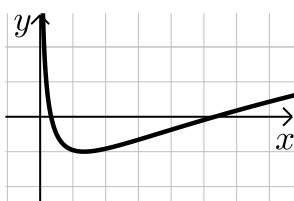
(27)



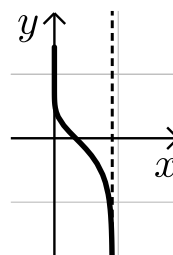
(28)



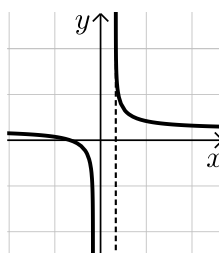
(29)



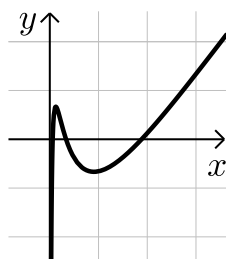
(34)



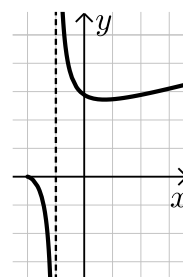
(35)



(37)



(39)



# מתמטיקה א

פרק 19 - חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)