

משוואות של פיסיקה מתמטית



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל 1
2. מד"ח מסדר ראשון ושיטת האופיינים (קרקרטיסטיקות) 6
3. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני (ללא ספר)
4. משוואת הגלים (ללא ספר)
5. משוואת החום (ללא ספר)
6. משוואת לפלס (ללא ספר)

משוואות של פסיקה מתמטית

פרק 1 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל.....1

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית

$$. (p(x)y'(x))' + (\lambda r(x) - q(x))y(x) = 0$$

א. $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda)y = 0$ (משוואת בסל)

2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y'' + e^{2x}y' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + 4y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y'' + 4y' + xy + \lambda e^x y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות 4-7:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y(0) - y'(0) = 0 \\ y(\pi) - y'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הבעיה הבאה:}$$

- א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
 ב. פתרו את הבעיה.

(9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \ell \\ y(0) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$$

$$ב. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 1 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

1. פתחו את הפונקציה $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

התחל את הטור מ- $n=1$.

2. מה סכום הטור ב- $x=0$?

האם הוא שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$?

$$ג. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 2 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

פתחו את הפונקציה $f(x) = x, 0 \leq x \leq 2$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

(10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

ב. פתחו את הפונקציה $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq \pi$

לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.

התחילו את הטור מ- $n=1$.

$$(11) \text{ נתונה הבעיה: } \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, & 0 < x < e \\ y(1) = 0 \\ y'(e) = 0 \end{cases}$$

- א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
 ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.
 ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את $f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e} \leq x \leq e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.

- הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.
 ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x = \sqrt{e}$, $x = 1.5$, $x = 2$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi n) = (-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi n) = 0$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (e^{-x^2} y')' + (\lambda e^{-x^2} - 0)y = 0 \quad \text{ב. } (xy')' + \left(\lambda \left(-\frac{1}{x} \right) - (-x) \right) y = 0$$

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(5) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = n \cos nx + \sin nx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ערכים עצמיים: $\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$; בנוסף, $\lambda = -1$ הוא עייע של הבעיה,

המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x) = e^x$.

$$(6) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \sin(\omega_n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(7) \quad \text{פונקציות עצמיות: } y_n(x) = \sin(\omega_n x) - \omega_n \cos(\omega_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

בנוסף, $\lambda_0 = 0$ הוא עייע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x) = x - 1$.

$$(8) \quad \text{א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = e^x \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(9) \quad \text{א. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ב. סכום הטור ב- $x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$.

$$\text{ג. כאשר } (0 < x < 2), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$$

$$(10) \quad \text{א. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2}x \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. כאשר } 0 < x < \pi, \quad e^x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} (-1)^{n+1} - 1}{1^2 + \left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$$

11 א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות : $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \ln x\right)$$

ערכים עצמיים : $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\lambda_n = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + n\right)^2$$

ג. שאלת הוכחה.

ד. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2 \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \ln x\right)$

ה. סכום הטור ב- $x = \sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x = 1.5$ הוא 1; וב- $x = 2$ הוא 0.

משוואות של פסיקה מתמטית

פרק 2 - מד"ח מסדר ראשון ושיטת האופייניים (קרקרטיסטיות)

תוכן העניינים

1. שיטת הקווים האופייניים 6
2. שיטת לגראנג' 7

שיטת הקווים האופייניים

שאלות

(1) פתרו את המשוואה עבור $\alpha \neq \frac{1}{2}$ קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = 0 \quad \gamma = \{y = \alpha x\} \quad u|_\gamma = x^2 + y^2$$

(2) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x - y$ $\gamma = \{y = x^2, x \geq 0\}$ $3u_x - 2u_y = 0$

(3) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x + \sin(xy)$ $\gamma = \{y = x^2, x \leq 0\}$ $u_x + 2u_y = 0$

$$u_x - u_y = -u \quad y \geq 0$$

$$u(x, 0) = x^2 - x^4$$

(4) פתרו את המשוואה

$$2u_x - 3u_y + 2u = 0$$

$$u(x, -x) = (x+1)e^{-x}$$

(5) פתרו את המשוואה

$$u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \quad y \geq e^{-x}$$

$$u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$$

(6) פתרו את המשוואה

(7) נתון כי $u(x, y)$ הוא פתרון של הבעיה

$$y^2 u_x + u_y = -u \quad 0 < x < \infty, \quad y > 0$$

$$u(0, y) = 0 \quad y > 0$$

$$u(x, 0) = 1 \quad x > 0$$

(8) פתרו את הבעיה כאשר a קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = -u \quad 0 < y < x$$

$$u(x, 0) = a \cdot \cos(x) + \sin(x) \quad x > 0$$

$$u(y, y) = 0 \quad y > 0$$

שיטת לגראנג

שאלות

(1) מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד"ח $xu_x + yuu_y = u$.

(2) מצאו פתרון כללי למשוואה $x^2u_x + y^2u_y = u^2$.

(3) מצאו פתרון כללי למשוואה $xu \cdot u_x + yu \cdot u_y = -xy$, כאשר $x, y, u > 0$.

(4) מצאו פתרון כללי למשוואה $(y^2 + u^2)u_x - xyu_y = xu$, כאשר $x, y, u > 0$.

רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, אז $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

(5) מצאו פתרון למשוואה
$$\begin{cases} xu_x + yu_y = 2xy & x, y > 0 \\ u(x, 1) = x & x > 0 \end{cases}$$

(6) פתרו את המשוואה
$$\begin{cases} e^y u_x - e^x u_y = -e^{x+y} u & u > 0 \\ u(x, 0) = 1 \end{cases}$$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{e^x \sqrt{y+1}} u_x + yu_y = y^2 u$,

בתחום $u, y > 0$.

ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

(8) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\cos(y)u_x + \sin(y)u_y = e^y \sin(y)u$,

בתחום שבו $0 < y < \pi$ ו- $u > 0$.

(9) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{y} u_x + \frac{1}{x} u_y = 2$.

(10) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+y)u_x + (y-x)u_y = x^2 - y^2$,

בתחום $x, y > 0$.

11 נתון כי $u(x, y) = \frac{e^y}{y+1} F\left(\frac{y+1}{x^2+1}\right)$ הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

א. מצאו את הפונקציות a, b, c .

ב. מצאו פתרון פרטי המקיים $u(0, y) = y^2$.

תשובות סופיות

$$F\left(\frac{x}{u}, \ln(y) - u\right) = 0 \quad (1)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{F\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$u = \sqrt{F\left(\ln \frac{x}{y}\right) - xy} \quad (3)$$

$$F\left(\frac{y}{u}, x^2 + y^2 + u^2\right) = 0 \quad (4)$$

$$u(x, y) = x \cdot y \quad (5)$$

$$u(x, y) = e^{e^y - 1} \quad (6)$$

$$u(x, y) = e^{\frac{1}{2}y^2 - F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}x}\right)} \quad (7) \quad \text{א. ב. שאלת הוכחה.}$$

$$u(x, y) = e^{e^y - F(e^{-x} \sin y)} \quad (8)$$

$$u(x, y) = xy - F\left(\frac{x}{y}\right) \quad (9)$$

$$u(x, y) = \frac{y^2 + 2xy - x^2 - F\left(\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4} \quad (10)$$

$$u(x, y) = \frac{e^y}{y+1} \cdot \frac{\left(\frac{y+1}{x^2+1} - 1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1} - 1}} \cdot \frac{y+1}{x^2+1} \quad \text{ב.} \quad \underbrace{(x^2+1)}_a u_x + \underbrace{2x(y+1)}_b u_y = \underbrace{2xyu}_c \quad \text{א. (11)}$$

משוואות של פסיקה מתמטית

פרק 3 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

1. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני (ללא ספר)

משוואות של פסיקה מתמטית

פרק 4 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית (ללא ספר)
3. משוואת המברקן (ללא ספר)
4. משולש הקביעה (ללא ספר)
5. עקרון דוהמל (ללא ספר)
6. קטע אינסופי (ללא ספר)
7. קטע חצי אינסופי (ללא ספר)

משוואות של פסיקה מתמטית

פרק 5 - משוואת החום

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים בקטע סופי (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית (ללא ספר)
3. נוסחת פואסון בקטע אינסופי (ללא ספר)
4. עקרון דוהמל (ללא ספר)
5. עקרון המקסימום והמינימום (ללא ספר)

משוואות של פסיקה מתמטית

פרק 6 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

1. משוואת לפלס בעיגול (ללא ספר)
2. משוואת לפלס במלבן (ללא ספר)
3. עקרון הממוצע (ללא ספר)
4. עקרון המקסימום והמינימום (ללא ספר)
5. משוואת לפלס בטבעת (ללא ספר)
6. משוואת לפלס בגזרה מעגלית (ללא ספר)
7. חזרה על אינטגרל קווי (ללא ספר)