משוואות של פיסיקה מתמטית

תוכן העניינים

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 1 - טורי חזקות

תוכן העניינים

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

בשאלות **24-1** מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן):

1) $f(x)=\sin 2x$ **2)** $f(x)=x^2e^{-4x}$ **3)** $f(x)=\sinh x$

4) $f(x)=\sin^2 x$ **5)** $f(x)=\cos^2 x$ **6)** $f(x)=2^x$

7) $f(x)=x\cos(4x^2)$ **8)** $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$ **9)** $f(x)=\arcsin x$

10) $f(x)=\frac{1}{1+x}$ **11)** $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$ **12)** $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$

13) $f(x)=\frac{1}{x-5}$ **14)** $f(x)=\frac{x}{4x+1}$ **15)** $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$

16) $f(x)=\frac{3}{x^2+x-2}$ **17)** $f(x)=\frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$ **18)** $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

19) $f(x)=\ln(1+x)$ **20)** $f(x)=\ln(1-x)$ **21)** $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

22) $f(x)=\ln(5-x)$ **23)** $f(x)=\frac{x^2}{(1-2x)^2}$ **24)** $f(x)=\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$

הערות: לפתרון שאלות **15** ו-**16**, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים **18**, **19**, **23** ו-**24** יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות **27-25** מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

25) $f(x)=e^{-x^2}\cos x$ **26)** $f(x)=\tan x$ **27)** $f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

5) $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

8) $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

9) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1<x<1)$

10) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(|x|<1)$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$ $(|x|<1)$

12) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ $(|x|<\frac{1}{3})$

13) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$ $(|x|<5)$

14) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$ $(|x|<\frac{1}{4})$

15) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $(|x|<3)$

16) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$ $(|x|<1)$

17) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$ $(|x|<\frac{1}{3})$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

19) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

20) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

21) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

22) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

23) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

24) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

25) $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

26) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

27) $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

1) $f(x) = \ln x$ $\quad (x_0 = 1)$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad (x_0 = 2)$

3) $f(x) = \sin x$ $\quad \left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right)$

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$
$(0 < x \le 2)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$
$(0 < x < 4)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$
$(-\infty < x < \infty)$

חישוב סכום של טור

שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

תשובות סופיות

1) e

2) e^{-2}

3) $\sqrt{e}$

4) $2e$

5) $\pi/4$

6) $\sin 1$

7) $\cos 1$

8) $\ln 2$

9) $\ln\frac{3}{2}$

חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את ערך הגבול:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

4) נתון כי $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=k$ כאשר k קבוע שונה מאפס.
מצאו את n ואת k.

5) חשבו את הגבול $\lim_{x\to 1^-}\left[\ln(1-\ln x)\right]^{x-1}$.

6) חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x^4 - x^4}{(x-\sin x)^4}$.

7) חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x^2)^3-(\sin x^3)^2}{\ln(1+x^{10})}$.

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{120}$

2) $\frac{1}{3}$

3) $\frac{1}{3}$

4) $k=1, n=3$

5) 1

6) 216

7) $-\frac{1}{2}$

חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

שאלות

בשאלות **1-3** חשבן בשגיאה הקטנה מ-0.001:

1) $\frac{1}{e}$ **2)** $\sin 3^{\circ}$ **3)** $\arctan 0.25$

בשאלות **4-6** חשבו בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

4) $(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}}$ **5)** $(n=1)\cos 4^{\circ}$ **6)** $(n=4)\ln 1.5$

7) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \le \frac{\pi}{6}$?

8) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x|<0.01$?

9) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \le 0.2$?

10) עבור אילו ערכי x, $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ-0.001?

11) עבור אילו ערכי x, $\arctan x \cong x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ-0.01?

תשובות סופיות

1) $\frac{53}{144}$

2) $\frac{\pi}{60}$

3) $\frac{47}{192}$

4) $\frac{5}{8}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{48}$.

5) 1, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{\pi \cdot \pi}{4050}$.

6) $\frac{77}{192}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{160}$.

7) $\frac{(\pi/6)^5}{5!}$

8) $\frac{(0.01)^2}{2}$

9) $\frac{(0.2)^6}{6!}$

10) $|x| < \sqrt[5]{3/25}$

11) $|x| < \sqrt[9]{9/100}$

חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε:

1) $\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx$ $\quad (\varepsilon = 0.0001)$

2) $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ $\quad (\varepsilon = 0.001)$

3) $\int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ $\quad (\varepsilon = 0.0001)$

תשובות סופיות

1) $\frac{449}{2250}$

2) $\frac{39}{400}$

3) $\frac{143}{576}$

חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt{x+4}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2<\sqrt{x+4}<2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{512}x^3$$
ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4}\cong 2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2$, עבור $|x|<0.1$?

2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2<\sqrt[3]{64+x}<4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{5308416}x^3$$

3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x)=\tan x$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $0<x<1$ מתקיים:
$$x<\tan x<x+4\sqrt{3}x^2$$

4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ סביב $x_0=16$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3}.

6) חשבו את $\sin 36^{\circ}$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:
א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=0$.
ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=\frac{\pi}{4}$.

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^{\circ}$? נמקו.

7) נתונה $f(x)=\sqrt{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $0\le x\le 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x\ge 0$ מתקיים $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{1}{2}x$.

8) נתונה $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3, עבור $0.1\le x\le 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{1+x}\cong 1-x+x^2-x^3$, עבור $0.1\le x\le 0.9$.

ג. הוכיחו כי עבור $-1<x$ מתקיים $\frac{1}{1+x}\ge 1-x+x^2-x^3$.

9) נתונה $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x|\le 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\cong 1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $|x|\le 0.5$.

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}<1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $-1<x$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\sqrt{e}$ ברמת דיוק של 10^{-4}.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$e^x\cong 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$, עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1,1)$, שעבורו $\left|e^x-p(x)\right|<10^{-5}$.

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=\ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4}.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:
$\ln(1+x)\cong x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $\left|\ln(1+x)-p(x)\right|<10^{-2}$.

ה. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים אי השוויון $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

12) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,
ונניח ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $|f''(x)|\le M$ לכל $0<x<1$.
הוכיחו כי $|f'(x)|\le\frac{M}{2}$ לכל $0\le x\le 1$.

13) תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1)=f(1)=0$.
כמו כן, נתון כי קיים M, כך ש- $|f''(x)|\le M$ בקטע.
הוכיחו שלכל $-1\le x\le 1$ מתקיים $|f(x)|\le\frac{M}{2}$.

14) תהי f פונקציה גזירה ב- $(0,\infty)$, ונניח כי $|f'(x)|\le M$ לכל $0<x$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

15) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)\ge 0$ לכל $x\in[a,b]$,
ונניח כי $x_0\in[a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y-\cos x\ge(x-y)\sin x$ לכל $x,y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

16) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים:
$M_0=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\ M_1=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|,\ M_2=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$.
הוכיחו כי $(M_1)^2\le 2M_0M_2$.

17) נניח ש- f גזירה פעמיים ב- $(0,\infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0,\infty)$ ו- $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
הוכח כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

18) הוכיחו כי e הוא מספר אי-רציונלי.

תשובות סופיות

1) א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x}=4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{81\cdot\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt[3]{66}=4+\frac{1}{24}-\frac{1}{2304}=\frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.

ב. שאלת הוכחה.   ג. $\frac{1}{480000}$

2) א. נוסחה: $\tan x=x+\frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1=\frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$.

ב. שאלת הוכחה.

3) א. נוסחה: $\sqrt{x+4}=2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2-\frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.

ב. שאלת הוכחה.

4) נוסחה: $\sqrt[4]{x}=2+\frac{1}{32}(x-16)-\frac{3}{4096}(x-16)^2+\frac{7}{128\cdot\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$,

חישוב: $\sqrt[4]{15}=2-\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}=\frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.

5) $\sqrt[3]{29}=3\frac{158}{2187}$

6) א. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}-\frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^5}{5!}-\frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^7}{7!}$ ב. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4}\right)^3$

7) א.   ב. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x$, בשגיאה הקטנה מ-0.25.

8) א. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$.

ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$.   ג. שאלת הוכחה.

9) א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{7}{27}$.

ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$.   ג. ראו בסרטון.

10) א. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^n$ ב. $\sqrt{e}=1.6487$

ג. $\frac{3}{(n+1)!}$ ד. $p(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}$

11) א. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}$

ב. $\ln(1.5)=0.5-\frac{0.5^2}{2}+\frac{0.5^3}{3}-\frac{0.5^4}{4}+\frac{0.5^5}{5}-\frac{0.5^6}{6}+\frac{0.5^7}{7}-\frac{0.5^8}{8}+\frac{0.5^9}{9}$

ג. $\frac{1}{n+1}$ ד. $p(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^{101}}{101}-\frac{x^{102}}{102}$ ה. שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

הערה לגבי קירובים

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא **מדויק ל-** n **ספרות אחרי הנקודה**,
אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n}.
למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,
שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-3}=0.0005$.
בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$	$-1<x\le 1$
$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$	$-1\le x\le 1$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\ldots$	$-1<x<1$
$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ $=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$	$-1\le x\le 1\ (m>0)$ $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ $-1<x<1\ (m\le -1)$ $m\ne 0,1,2,3,\ldots$

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 2 - פתרון מד"רים על ידי טורים

תוכן העניינים

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות לטורי מקלורן של פונקציות חשובות.

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-7** על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=0$.
במיוחד, רשמו נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי,
וציינו את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.

תזכורת: טור חזקות סביב $x=0$ שקול לטור טיילור סביב $x=0$ ושקול לטור מקלורן.

1) $y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2 \qquad y(0)=3,\quad y'(0)=12;$

2) $y''-xy=0 \quad ; \quad y(0)=1,\ y'(0)=2$

3) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

4) $(x^2+4)y''+xy=x+2$

5) $y''+(x-1)y'+(2x-3)y=0$

6) $y''+ty=e^{t+1} \qquad y(0)=a_0=1,\quad y'(0)=a_1=2;$

7) $y''+(t-1)y'+(2t-3)y=0$ (השתמש בפתרון בסימן Σ)

8) פתרו את המשוואה $y''(x)+(x-1)y(x)=e^x$; $y(1)=1$, $y'(1)=2$,
על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=1$.

9) פתרו את המשוואה $y''+xy'+(2x-1)y=0$; $y(-1)=2,\quad y'(-1)=-2$.
רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב $x=-1$.

תשובות סופיות

1) $y=3+12x+x^2-\frac{5}{3}x^3-\frac{23}{12}x^4+\ldots+a_nx^n\ldots$, $a_n=\frac{2n-10}{(n-1)n}a_{n-3}\ (n\geq 5)$

2) $y=1+2x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$, $a_n=\frac{1}{(n-1)n}a_{n-3}\ (n\geq 3)$.

3) $y=a_0+a_1x+-a_0x^2+0x^3-\frac{1}{3}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$, $a_n=\frac{n-3}{n-1}a_{n-2}\quad (n\geq 2)$

4)
$$y=a_0+a_1x+\frac{1}{4}x^2+\left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3+\left(\frac{-1}{48}a_1-\frac{1}{96}\right)x^4+\ldots+a_nx^n$$
$$a_n=\frac{-1}{4(n-1)n}a_{n-3}-\frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n}a_{n-2}\ ,\ (n\geq 4)$$

5)
$$y=a_0+a_1x+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)x^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)x^3+\frac{1}{6}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\geq 3)$$

6)
$$y(t)=1+2t+\frac{e}{2}t^2+\frac{e-1}{6}t^3+\frac{e-4}{24}t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{e}{n(n-1)(n-2)!}-\frac{a_{n-3}}{n(n-1)}\quad (n\geq 3)$$

7)
$$y=a_0+a_1t+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)t^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)t^3+\frac{1}{6}a_0t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\geq 3)$$

8)
$$y=1+2(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\frac{e-1}{6}(x-1)^3+\frac{e-4}{24}(x-1)^4+\ldots+a_n(x-1)^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{e-a_{n-3}(n-2)!}{n!}\quad (n\geq 3)$$

9)
$$y=2-2(x+1)+2(x+1)^2-\frac{2}{3}(x+1)^3+\frac{1}{3}(x+1)^4+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\geq 3)$$

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית

שאלות

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראו שהנקודה היא נקודה סינגולרית רגולרית, ופתרו את המשוואה על ידי פיתוח המשוואה לטור חזקות בסביבות הנקודה.

1) $3x^2y''+2xy'+x^2y=0$

2) $2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$

3) $2x^2y''-xy'+(x-5)y=0$

4) $3x^2y''-xy'+y=0$

5) $x^2y''+xy'+x^2y=0$

6) $x^2y''-xy'+y=0$

7) $x^2y''+x(x+2)y'-2y=0$

8) $x^2y''+x(x-2)y'+2y=0$

הערות

בשאלות **2-5**, הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרש אינו מספר שלם.
בשאלות **6** ו-**7** הפתרונות שווים, ובשאלות **8** ו-**9** הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

תשובות סופיות

1) $$y=k_1x^{1/3}\left(1-\frac{1}{14}x^2+\frac{1}{728}x^4+\dots\right)+k_2\left(1-\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{440}x^4+\dots\right)$$

2) $$y=k_1x^{1/2}\left(1-\frac{7}{18}x^1+\frac{147}{792}x^2+\dots\right)+k_2x^{-3}\left(1-\frac{21}{5}x^1+\frac{49}{5}x^2-\frac{343}{15}x^3\right)$$

3) $$y=k_1x^{-1}\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{30}x^2+\frac{1}{90}x^3+\dots\right)+k_2x^{2.5}\left(1-\frac{1}{9}x+\frac{1}{198}x^2-\frac{1}{7722}x^3+\dots\right)$$

4) $$y=k_1x+k_2x^{1/3}$$

5) $$y=k_1\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\dots\right)+$$
$$+k_2\left[\ln x\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\dots\right)+\left(\frac{2}{2^3}x^2+\frac{-12}{4^3\cdot 2^3}x^4+\dots\right)\right]$$

6) $$y(x)=k_1x+k_2x\ln x$$

7) $$y(x)=\frac{k_1}{x^2}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-e^{-x}\right)+\frac{k_2}{x^2}e^{-x}$$

8) $$y=-a_0x^2\ln x\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\dots\right)+a_0x\left(1-x^2-\frac{3}{4}x^3+\dots\right)$$

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

תחום התכנסות	טור מקלורן
$-\infty < x < \infty$	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
$-\infty < x < \infty$	$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$
$-\infty < x < \infty$	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$
$-1 < x \le 1$	$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$
$-1 \le x \le 1$	$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$
$-1 < x < 1$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots$
$-1 \le x \le 1\ (m>0)$ $-1 < x \le 1\ (-1<m<0)$ $-1 < x < 1\ (m \le -1)$ $m \ne 0,1,2,3,\ldots$	$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots$

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 3 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית
$\left(p(x)y'(x)\right)'+\left(\lambda r(x)-q(x)\right)y(x)=0$.

א. $y''-2xy'+\lambda y=0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda)y=0$ (משוואת בסל)

2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y''+e^{2x}y'+\lambda y=0 \;\;,\;\; 0<x<1 \\ y(0)+4y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y''+4y'+xy+\lambda e^{x}y=0 \;\;,\;\; 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות **7-4**:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

4)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<\pi \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(\pi)-y'(\pi)=0 \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

8) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0, & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. פתרו את הבעיה.

9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}$.

ב. נציב $\ell=1$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$.

1. פתחו את הפונקציה $f(x)=1 \, , \, 0\le x\le 1$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו. התחל את הטור מ-$n=1$.
2. מה סכום הטור ב-$x=0$? האם הוא שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$?

ג. נציב $\ell=2$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<2 \\ y(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases}$.

פתחו את הפונקציה $f(x)=x \, , \, 0\le x\le 2$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$.

ב. פתחו את הפונקציה $f(x)=e^x \, , 0\le x\le \pi$ לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א. התחילו את הטור מ-$n=1$.

11) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \;\;,\;\; 0<x<e \\ y(1)=0 \\ y'(e)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.

ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את $f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x\le \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e}\le x\le e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.

הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.

ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x=2$, $x=1.5$, $x=\sqrt{e}$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi n)=(-1)^n \\[2em] \sin\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi n)=0 \\[2em] n=0,1,2,\ldots \end{array}}$$

תשובות סופיות

1) א. $\left(e^{-x^2}y'\right)'+\left(\lambda e^{-x^2}-0\right)y=0$ ב. $(xy')'+\left(\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)-(-x)\right)y=0$

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$ $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x)$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

5) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$ $\phi_n(x)=n\cos nx+\sin nx$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$, $\lambda_n=n^2$; בנוסף, $\lambda=-1$ הוא ע"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=e^x$.

6) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$, $\varphi_n(x)=\sin(\omega_n x)$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2$.

7) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$ $y_n(x)=\sin(\omega_n x)-\omega_n\cos(\omega_n x)$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2$.

בנוסף, $\lambda_0=0$ הוא ע"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=x-1$.

8) א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$, $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x$.

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

9) א. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,...$ $\varphi_n(x)\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2$.

ב. סכום הטור ב- $x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$.

ג. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$, כאשר $(0<x<2)$.

10) א. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,...$ $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$.

ב. $e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1}-1}{1^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$, כאשר $0<x<\pi$.

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,...$ $\qquad$ $\varphi_n(x)=\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\ln x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,...$ $\qquad$ $\lambda_n=\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$.

ג. שאלת הוכחה.

ד. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-2\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\ln x\right)$.

ה. סכום הטור ב- $x=\sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x=1.5$ הוא 1; וב- $x=2$ הוא 0.

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 4 - משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר ראשון

תוכן העניינים

שיטת הקווים האופייניים

שאלות

1) פתרו את המשוואה עבור $\alpha \neq \frac{1}{2}$ קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = 0 \qquad \gamma = \{y = \alpha x\} \qquad u|_\gamma = x^2 + y^2$$

2) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x - y$ $\quad \gamma = \{y = x^2, x \geq 0\}$ $\quad 3u_x - 2u_y = 0$.

3) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x + \sin(xy)$ $\quad \gamma = \{y = x^2, x \leq 0\}$ $\quad u_x + 2u_y = 0$.

4) פתרו את המשוואה

$$y \geq 0 \qquad \begin{aligned} &u_x - u_y = -u \\ &u(x,0) = x^2 - x^4 \end{aligned}.$$

5) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &2u_x - 3u_y + 2u = 0 \\ &u(x,-x) = (x+1)e^{-x} \end{aligned}.$$

6) פתרו את המשוואה

$$y \geq e^{-x} \qquad \begin{aligned} &u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \\ &u(x,e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x} \end{aligned}.$$

7) נתון כי $u(x,y)$ הוא פתרון של הבעיה

$$\begin{aligned} &y^2 u_x + u_y = -u && 0 < x < \infty \ , \ y > 0 \\ &u(0,y) = 0 && y > 0 \\ &u(x,0) = 1 && x > 0 \end{aligned}$$

8) פתרו את הבעיה כאשר a קבוע ממשי.

$$\begin{aligned} &2u_x + u_y = -u && 0 < y < x \\ &u(x,0) = a \cdot \cos(x) + \sin(x) && x > 0 \\ &u(y,y) = 0 && y > 0 \end{aligned}$$

שיטת לגראנג

שאלות

1) מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד"ח $xu_x + yuu_y = u$.

2) מצאו פתרון כללי למשוואה $x^2u_x + y^2u_y = u^2$.

3) מצאו פתרון כללי למשוואה $xu \cdot u_x + yu \cdot u_y = -xy$, כאשר $x, y, u > 0$.

4) מצאו פתרון כללי למשוואה $(y^2 + u^2)u_x - xyu_y = xu$, כאשר $x, y, u > 0$.
רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, אז $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

5) מצאו פתרון למשוואה $\begin{cases} xu_x + yu_y = 2xy & x, y > 0 \\ u(x,1) = x & x > 0 \end{cases}$.

6) פתרו את המשוואה $\begin{matrix} e^y u_x - e^x u_y = -e^{x+y}u & u > 0 \\ u(x,0) = 1 & \end{matrix}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{e^x\sqrt{y+1}}u_x + yu_y = y^2u$, בתחום $u, y > 0$.
ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

8) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\cos(y)u_x + \sin(y)u_y = e^y \sin(y)u$, בתחום שבו $0 < y < \pi$ ו-$u > 0$.

9) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{y}u_x + \frac{1}{x}u_y = 2$.

10) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+y)u_x + (y-x)u_y = x^2 - y^2$, בתחום $x, y > 0$.

11) נתון כי $u(x,y)=\dfrac{e^y}{y+1}F\left(\dfrac{y+1}{x^2+1}\right)$ הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה $a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$.

א. מצאו את הפונקציות a,b,c.

ב. מצאו פתרון פרטי המקיים $u(0,y)=y^2$.

תשובות סופיות

1) $F\left(\dfrac{x}{u},\ln(y)-u\right)=0$

2) $u(x,y)=\dfrac{1}{F\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x}}$

3) $u=\sqrt{F\left(\ln\dfrac{x}{y}\right)-xy}$

4) $F\left(\dfrac{y}{u},x^2+y^2+u^2\right)=0$

5) $u(x,y)=x\cdot y$

6) $u(x,y)=e^{e^y-1}$

7) א. $u(x,y)=e^{\frac{1}{2}y^2-F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x}\right)}$ ב. שאלת הוכחה.

8) $u(x,y)=e^{e^y-F\left(e^{-x}\sin y\right)}$

9) $u(x,y)=xy-F\left(\dfrac{x}{y}\right)$

10) $u(x,y)=\dfrac{y^2+2xy-x^2-F\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)}{4}$

11) א. $\underbrace{(x^2+1)}_{a}u_x+\underbrace{2x(y+1)}_{b}u_y=\underbrace{2xyu}_{c}$ ב. $u(x,y)=\dfrac{e^y}{y+1}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{y+1}{x^2+1}-1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1}-1}}\cdot\dfrac{y+1}{x^2+1}$

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 5 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

משוואות של פיזיקה מתמטית

פרק 6 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 7 - משוואת החום

תוכן העניינים

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 8 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 9 - אינטגרל אנרגיה

תוכן העניינים