משוואות דפרנציאליות רגילות

תוכן העניינים

1. משוואות מסדר ראשון 1
2. טורי טיילור - מקלורן 21
3. סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות 28
4. מערכת משוואות לינאריות 37
5. פתרון משוואות ליניאריות באמצעות טורים 47

משוואות דפרנציאליות רגילות

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים 1
3. משוואה הומוגנית 3
4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$ 5
5. משוואה מדויקת 6
6. גורם אינטגרציה 8
7. משוואה לינארית מסדר ראשון 11
8. משוואת ברנולי 13
9. משוואת ריקטי 14
10. הצבות שונות ומשונות 15
11. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד 16
12. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון 19

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y} \quad (y\neq 0)$

2) $(1-x)y'=y^2$

3) $yy'\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$

4) $(x-1)\frac{dy}{dx}=4y \quad ; \quad y(2)=1$

5) $\frac{dy}{dx}=xy+3y-3x-9 \quad ; \quad y(1)=-1$

6) $\left(x^2y-2+2x^2-y\right)dx-\left(xy^2-4-4x+y^2\right)dy=0$

7) $dy=2t\left(y^2+4\right)dt$

8) $\frac{dx}{dt}=x^2-2x+2$

9) $y'+y^2\sin x=0 \quad ; \quad y(\pi)=1$

10) $\frac{dy}{dx}=y\sec^2 x \quad ; \quad y(0)=5 \quad (\cos x\neq 0)$

11) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad y(0)=1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+k}$

2 $y=\frac{1}{\ln|1-x|-c},\quad y=0$

3 $\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+c$

4 $\frac{1}{4}\ln|y|=\ln|x-1|$

5 $\ln|y-3|=\frac{x^2}{2}+3x+\ln 4-3.5$

6 $y=2\pm\sqrt{(x-1)^2+k}$

7 $y=2\tan\left(2t^2+k\right)$

8 $x=1+\tan\left(t+c\right)$

9 $y=-\frac{1}{\cos x}$

10 $\ln|y|=\tan x+\ln 5$

11 $\frac{1}{-2y^2}=\sqrt{1+x^2}-1.5$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה הומוגנית

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-8**:

1) $\left(y^3+x^3\right)dx+xy^2dy=0$

2) $y'=\frac{4y-3x}{2x-y}$

3) $y^2+x^2y'=xyy'$

4) $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$

5) $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$

6) $y'=\frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}$

7) $y(1)=0\ ;\ \left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$

8) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

9) נתונה המשוואה $\left(y^2+x^2\right)dx+xy^ndy=0$.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n, על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של n שנמצא בסעיף א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $-\ln|x|=\frac{1}{6}\ln\left|2(y/x)^3+1\right|+c\,,\qquad y=-\frac{x}{2^{1/3}}$

2 $\ln|x|=\frac{1}{4}\ln\left|(y/x)-1\right|-\frac{5}{4}\ln\left|(y/x)+3\right|+c\,,\quad y=x,\ y=-3x$

3 $-\ln|x|=\ln\left|(y/x)\right|-(y/x)+c,\quad y=0$

4 $-\ln|x|=\frac{1}{4}\ln\left|2(y/x)^2+4\right|+c,\quad y=0,\quad y=-2x$

5 $\ln|x|=-\sin(y/x)+c$

6 $\ln\left(1+e^{(x/y)^2}\right)=\ln|y|+c,\quad y=0$

7 $\ln x=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+c$

8 $\ln|t|=-\frac{1}{2}\ln\left|(x/t)-(x/t)^2\right|+c,\quad x(t)=0,\quad x(t)=t$

9 $n=1,\quad \ln|x|=-\frac{1}{4}\ln\left(1+2(y/x)^2\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1 $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+y+2}$

2 $(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0$

3 $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$

4 $\frac{dx}{dy}=\frac{3+x+2y}{1+x+y}$

5 $(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0$

תשובות סופיות

1 $x=\frac{1}{2}(x+y+1)+\frac{1}{4}\ln\left(2(x+y+1)+1\right)+\frac{1}{4}+c,\quad y=-x-1.5$

2 $\ln|x-1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right|+c\ ,y=x-3\ ,\quad y=-x-1$

3 $0=14y-(x+2y+3)^2+k$

4 $\ln|x-1|=\frac{1}{4}\left[-\left(2+\sqrt{2}\right)\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right|+\left(-2+\sqrt{2}\right)\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right]+c$

$y=\sqrt{0.5}x-2-\sqrt{0.5}\ ,\ y=-\sqrt{0.5}x-2+\sqrt{0.5}$

5 $\ln|x-2|=\frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2}+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה מדויקת

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-6**:

1) $\left(2x^3+3y\right)dx+\left(3x+y-1\right)dy=0$

2) $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

3) $\left(y\cos x+2xe^y\right)dx+\left(\sin x+x^2e^y-1\right)dy=0$

4) $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 xdy=0$

5) $\left(y^2-\frac{y}{x(x+y)}+2\right)dx+\left(\frac{1}{x+y}+2y(x+1)\right)dy=0$

6) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

7) נתונה המשוואה $\left(3x^2+ye^{xy}\right)dx+\left(2y^3+kxe^{xy}\right)dy=0$, כאשר k קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k, על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שנמצא בסעיף א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $0.5x^4+3yx+0.5y^2-y=c$

2) $e^{xy^2}+x^4-y^3=c$

3) $y\sin x+x^2e^y-y=c$

4) $x-\frac{y^2\cos 2x}{2}-\frac{y^2}{2}=c$

5) $\ln|x+y|+(x+1)y^2+2x-\ln|x|=c$

6) $x^2t^2-2x^3t+x^4=c$

7) $k=1,\ \ x^3+e^{xy}+\frac{y^4}{2}=c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גורם אינטגרציה

שאלות

1) הראו שהמשוואה $x^2y^3+x\left(1+y^2\right)y'=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

2) הראו שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0$
אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x.

3) הראו שהמשוואה $(x+2)\sin ydx+x\cos ydy=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x.

פתרו את המשוואות בשאלות **4-9**:

4) $\left(x^2+y^2+x\right)dx+\left(xy\right)dy=0$

5) $\left(x-x^2-y^2\right)dx+ydy=0$

6) $\left(2xy^3+y^4\right)dx+\left(xy^3-2\right)dy=0$

7) $\left(y^2-y\right)dx+xdy=0$

8) $\left(y-xy^2\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$

9) $y'=\frac{3yx^2}{x^3+2y^4}$; $y(1)=-1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונה מד"ר לא מדויקת $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{N}=f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{M}=g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $\left(y^4-4xy\right)dx+\left(2xy^3-3x^2\right)dy=0$.

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד.

כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

12) נתונה המשוואה $\left(5x^2+3y^3+2xy\right)dx+\left(3x^2+3xy^2+6y^3\right)dy=0$.

מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה

שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $\left(x^2y^3\right)dx+\left(x+xy^2\right)dy=0$.

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$.

כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu\left(x^\alpha y^\beta\right)$.

15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה $\left(y-xy^2\ln x\right)dx+xdy=0$.

16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה

שהוא פונקציה של $x+y$ בלבד.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $0.5x^2+\frac{y^{-2}}{-2}+\ln|y|=c$

2) $e^x\sin y+2y\cos x=c$

3) $\sin y\cdot e^x\cdot x^2=c$

4) $0.25x^4+0.5x^2y^2+\frac{x^3}{3}=c$

5) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-x=c$

6) $x^2+xy+\frac{1}{y^2}=c$

7) $x-\frac{x}{y}=c$

8) $-\ln x-\frac{1}{xy}+y=c$

9) $-\frac{x^3}{y}+\frac{2y^3}{3}=\frac{1}{3}$

10) שאלת הוכחה.

11) $\mu(xy)=(xy)^2$

12) $\mu(x+y)=(x+y)^2$

13) $\text{if: }\frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}=h\left(x/y\right)\quad\text{then: I.F.: }\mu=e^{\int\frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}}$

14) $\mu=\frac{1}{xy^3}$

15) א. $\text{if : }\frac{M_y-N_x}{yN-xM}=h(xy)\quad\text{then: I.F. : }\mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{yN-xM}}$ ב. $\mu=\frac{1}{x^2y^2}$

16) $\text{if : }\frac{M_y-N_x}{N-M}=h(x+y)\quad\text{then:I.F.: }\mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N-M}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$

2) $xy'=y+x^3+3x^2-2x$

3) $(x>2)\quad (x-2)y'=y+2(x-2)^3$

4) $(x>0)\quad x^3y'+(2-3x^2)y=x^3$

5) $y(0)=1\ ;\ \frac{dy}{dt}+y=2+2t$

6) $(\sin x>0)\quad \frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x}$

7) $(\sin x>0)\quad y'-2y\cot x=1$

8) $z(\pi)=0\ ;\ x^2z'+2xz=\cos x$

9) $ydx=(2x+y^3)dy$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = 2 + C \cdot e^{-x^2}$

2) $y = x\left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x + C\right]$

3) $y = (x-2)\left[x^2 - 4x + C\right]$

4) $y = \frac{1}{2}x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}}$

5) $y = 2t + e^{-t}$

6) $y = \frac{1}{\sin x}\left[-5e^{\cos x} + C\right]$

7) $y = \sin^2 x\left[-\cot x + C\right]$

8) $z = \frac{\sin x}{x^2}$

9) $x(y) = y^2(y + c)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת ברנולי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $x^2y'+2xy-y^3=0$

2) $\left(x^2+1\right)y'-2xy-y^2=0$

3) $x\frac{dy}{dx}-2y=x^2y^{1/2}$

4) $y'-\left(\frac{1}{x}+5x^4\right)y=-x^3y^2 \quad ; \quad y(1)=2.5$

5) $z'-\cot x\cdot z=\frac{1}{\sin x}z^3 \qquad \left(\sin x\neq 0\right)$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x}+c\cdot x^4}}$

2) $y=\frac{x^2+1}{-x+C}$

3) $y=x^2\left(\frac{x}{2}+C\right)^2$

4) $y=\frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5}+e}$

5) $z=\pm\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x+C}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת ריקטי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y'=e^{2x}+\left(1+\frac{5}{2}e^{x}\right)y+y^{2}$

2) $y'=1+\left(x-y\right)^{2}$

3) $y'=1+x+2x^{2}\cos x-\left(1+4x\cos x\right)y+2y^{2}\cos x$

תשובות סופיות

1) $y\left(x\right)=-0.5e^{x}+\frac{e^{x}}{-\frac{2}{3}+Ce^{-1.5x}}$

2) $y\left(x\right)=x+\frac{1}{-x+C}$

3) $y\left(x\right)=x+\frac{1}{\cos x-\sin x+Ce^{x}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצבות שונות ומשונות

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y'=\cos(y-x)$

2) $y'=\frac{2y}{x}+\cos\left(\frac{y}{x^2}\right);\ y(1)=0$

3) $y'-x^2y+y^2=x-\frac{x^4}{4},\ y(0)=1$

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{\sin z}+c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin z}{1-\sin z}\right)$

3) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x+1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

1) נתונה הבעיה $y'=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+y}$, $y(2)=-1$.

א. הוכיחו ש-$y_2(x)=-\frac{1}{4}x^2$, $y_1(x)=-x+1$ הם פתרונות לבעיה.
קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

2) נתונה הבעיה $y'=\sqrt[3]{y}+4$, $y(0)=0$.

א. הוכיחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכיחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכיחו שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

3) פתרו את הבעיה $y'=\left(x^2+y^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+x^2\sin y$, $y(4)=0$.

4) נתונה הבעיה $y'=(y-1)\left(x^2+y\right)^5$, $y(0)=4$.

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

5) נתונה המד"ר $ydx=\left(2x+y^3\right)dy$.

א. הראו שעבור $x=x(y)$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון,
ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,
מהן נקודות ההתחלה (x_0,y_0), כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,
העובר דרך (x_0,y_0).
צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.
מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0,y_0)?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתונה בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו 3 קירובי פיקארד לפתרון הבעיה.

ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכיחו באינדוקציה).

ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $n \to \infty$.

7) כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = \frac{1}{x}|\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases}$ $(x > 0)$?

8) נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

9) נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

10) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

11) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

12) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.

2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

3) $y(x)=0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.

ב. כל נקודת התחלה (x_0,y_0), שעבורה $y_0\neq 0$.

הקטע הארוך ביותר: $(0,\infty)$ או $(-\infty,0)$.

6) א. $y_0(x)=1,\quad y_1(x)=1+x^2,\quad y_2(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!},\quad y_3(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}$

ב. $y_n(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}$ ג. הוכחה.

7) אחד.

8) א. $[-0.08,0.08]$ ב. $[-0.1,0.1]$ ג. הוכחה.

9) א. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ ב. $[-0.5,0.5]$ ג. הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

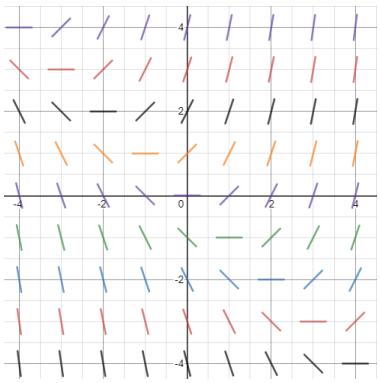
1) שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y'=2y-x$.

2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

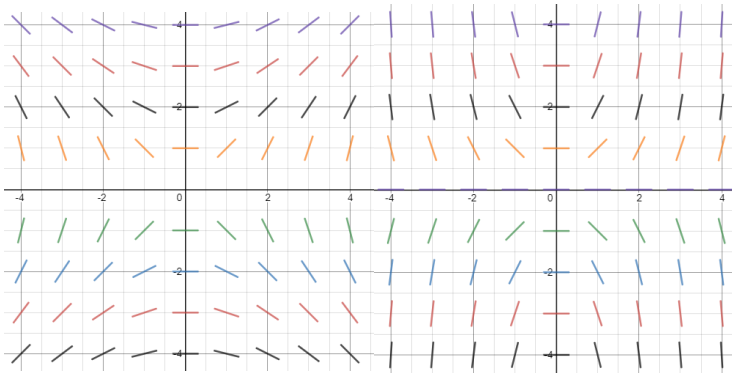
א. $y'=\frac{x}{y}$

ב. $y'=xy$

ג. $y'=x+y$



איור 1



איור 2

איור 3

3) נתונה המד"ר $y'=y-x$, $y(0)=2$.

מצאו בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.1$.

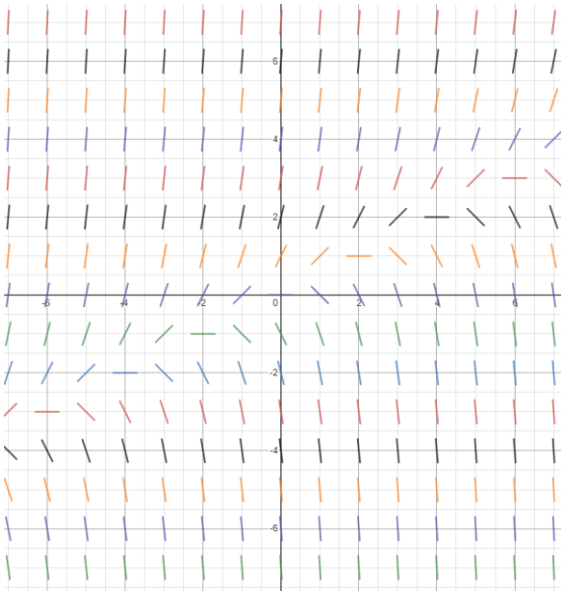
4) נתונה המד"ר $y'=x+y$, $y(1)=2$.

מצאו בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.2$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1)



2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

3) $y(1)=4.593$

4) $y(2)=6.95328$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דפרנציאליות רגילות

פרק 2 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

1. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'..... 21
2. נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות..... 27

חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt{x+4}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2<\sqrt{x+4}<2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{512}x^3$$
ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4}\cong 2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2$, עבור $|x|<0.1$?

2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2<\sqrt[3]{64+x}<4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{5308416}x^3$$

3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x)=\tan x$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $0<x<1$ מתקיים:
$$x<\tan x<x+4\sqrt{3}x^2$$

4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ סביב $x_0=16$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3}.

6) חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:
א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=0$.
ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=\frac{\pi}{4}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$? נמקו.

7) נתונה $f(x)=\sqrt{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $0\le x\le 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x\ge 0$ מתקיים $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{1}{2}x$.

8) נתונה $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3, עבור $0.1\le x\le 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{1+x}\cong 1-x+x^2-x^3$, עבור $0.1\le x\le 0.9$.

ג. הוכיחו כי עבור $-1<x$ מתקיים $\frac{1}{1+x}\ge 1-x+x^2-x^3$.

9) נתונה $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x|\le 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\cong 1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $|x|\le 0.5$.

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}<1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $-1<x$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\sqrt{e}$ ברמת דיוק של 10^{-4}.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$e^x\cong 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$, עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1,1)$, שעבורו $\left|e^x-p(x)\right|<10^{-5}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=\ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4}.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$\ln(1+x)\cong x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $\left|\ln(1+x)-p(x)\right|<10^{-2}$.

ה. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים אי השוויון $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

12) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,
וננית ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $\left|f''(x)\right|\le M$ לכל $0<x<1$.

הוכיחו כי $\left|f'(x)\right|\le\frac{M}{2}$ לכל $0\le x\le 1$.

13) תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1)=f(1)=0$.
כמו כן, נתון כי קיים M, כך ש- $|f''(x)|\le M$ בקטע.

הוכיחו שלכל $-1\le x\le 1$ מתקיים $\left|f(x)\right|\le\frac{M}{2}$.

14) תהי f פונקציה גזירה ב- $(0,\infty)$, וננית כי $\left|f'(x)\right|\le M$ לכל $0<x$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

15) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)\ge 0$ לכל $x\in[a,b]$,
וננית כי $x_0\in[a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y-\cos x\ge(x-y)\sin x$ לכל $x,y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

16) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים וננית כי קיימים:

$M_0=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\ M_1=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|,\ M_2=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$.

הוכיחו כי $(M_1)^2\le 2M_0M_2$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) נניח ש- f גזירה פעמיים ב- $(0,\infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0,\infty)$ ו- $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
הוכח כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

18) הוכיחו כי e הוא מספר אי-רציונלי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x}=4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{81\cdot\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt[3]{66}=4+\frac{1}{24}-\frac{1}{2304}=\frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.

ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{1}{480000}$

2) א. נוסחה: $\tan x=x+\frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1=\frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$.

ב. שאלת הוכחה.

3) א. נוסחה: $\sqrt{x+4}=2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2-\frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.

ב. שאלת הוכחה.

4) נוסחה: $\sqrt[4]{x}=2+\frac{1}{32}(x-16)-\frac{3}{4096}(x-16)^2+\frac{7}{128\cdot\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$,

חישוב: $\sqrt[4]{15}=2-\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}=\frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.

5) $\sqrt[3]{29}=3\frac{158}{2187}$

6) א. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}-\frac{\frac{\pi}{5}^3}{3!}+\frac{\frac{\pi}{5}^5}{5!}-\frac{\frac{\pi}{5}^7}{7!}$ ב. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^3$

7) א. ב. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x$, בשגיאה הקטנה מ-0.25.

8) א. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3$ בשגיאה הקטנה מ-$\frac{6561}{10000}$.

ב. שגיאה הקטנה מ-$\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.

9) א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$ בשגיאה הקטנה מ-$\frac{7}{27}$.

ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.

10) א. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^n$ ב. $\sqrt{e}=1.6487$

ג. $\frac{3}{(n+1)!}$ ד. $p(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) א. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}$

ב. $\ln(1.5)=0.5-\frac{0.5^2}{2}+\frac{0.5^3}{3}-\frac{0.5^4}{4}+\frac{0.5^5}{5}-\frac{0.5^6}{6}+\frac{0.5^7}{7}-\frac{0.5^8}{8}+\frac{0.5^9}{9}$

ג. $\frac{1}{n+1}$ ד. $p(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^{101}}{101}-\frac{x^{102}}{102}$ ה. שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

<u>הערה לגבי קירובים</u>

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא **מדויק ל-** n **ספרות אחרי הנקודה**,

אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n}.

למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,

שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-3}=0.0005$.

בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$	$-1<x\le 1$
$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$	$-1\le x\le 1$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\ldots$	$-1<x<1$
$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ $=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$	$-1\le x\le 1\ (m>0)$ $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ $-1<x<1\ (m\le -1)$ $m\ne 0,1,2,3,\ldots$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דפרנציאליות רגילות

פרק 3 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

1. סדרות פונקציות 28
2. טורי פונקציות 31
3. טורי חזקות 33
4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות 35

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות **1-11**:

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

1) $f_n(x)=x^n$ ב- $[0,0.5]$.

2) $f_n(x)=x^n$ ב- $(0,1)$.

3) $f_n(x)=\arctan(nx)$ ב- $(0,\infty)$.

4) $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$ ב- $[0,1]$.

5) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ ב- $[0,1]$.

6) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ ב- $[0.5,4]$.

7) $f_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n}$ ב- $\mathbb{R}$.

8) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$ ב- $\mathbb{R}$.

9) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{1+x^2+n^2}$ ב- $\mathbb{R}$.

10) $f_n(x)=n(1-x)x^n$ ב- $[0,1]$.

11) $f_n(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 1-\dfrac{1}{n}\\ n(x-1)+1 & 1-\dfrac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$ ב- $[0,1]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in[n,n+1] \\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0,4]$?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,4]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

13) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=nxe^{-n^2x^2}$.

א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0,\infty)$?

ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[0,\infty)$?

ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[1,\infty)$?

14) נתונה $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

15) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=[1-\chi_n(x)]\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1}+n^{\alpha}\cdot\chi_n(x)$,

כאשר $\chi_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left(n-\frac{1}{n^2},n+\frac{1}{n^2}\right) \\ 0 & else\end{cases}$.

א. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1,\infty)$?
אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1,\infty)$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\frac{\pi}{2}$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & 0<x\le 1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0.5\le x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 1 & 1<x\le 4\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2}$. ב. מתכנסת במידה שווה.

9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ד. אינה מתכנסת במידה שווה.

13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. לא במידה שווה. ג. כן.

14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

15) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1,\infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.

ב. רק אם $\alpha<0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

טורי פונקציות

שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-6**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!(x-5)^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\left[\ln(nx)\right]^4}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$

בדקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם:

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\left(-1\le x\le 1\right)$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}+x^2}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)$ $\left(\frac{1}{4}\le x\le 4\right)$

11) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ $\left(-a\le x\le a\right)$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x}{1+n^7x^2}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $x>0$
2) $x\neq 5$
3) $x<3\frac{9}{10}$ or $4\frac{1}{10}$
4) $0<x\neq\frac{1}{n}$
5) $x>0$
6) $x\neq 0,-1,-2,-3,\ldots$
7) מתכנס במידה שווה.
8) מתכנס במידה שווה.
9) מתכנס במידה שווה.
10) מתכנס במידה שווה.
11) מתכנס במידה שווה.
12) מתכנס במידה שווה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

טורי חזקות

שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-12**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin^2\frac{1}{n}$ **5)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$ **6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{(2n+1)}x^{2n}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{3^n}(x-1)^n$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2n-2)!}x^n$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^n}{n\cdot4^n}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n(x+5)^n$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^4\cdot100^n}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n+1}}{n\cdot2^{2n+1}}$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

13) $f(x)=\frac{1}{1+x}$ **14)** $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$ **15)** $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$

16) $f(x)=\frac{1}{x-5}$ **17)** $f(x)=\frac{x}{4x+1}$ **18)** $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$

19) $f(x)=\frac{3}{x^2+x-2}$ **20)** $f(x)=\frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$

<u>הערות חשובות</u>

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-1 \le x < 1\ ,\ R = 1$

2) $-\infty < x < \infty\ ,\ R = \infty$

3) $-0.2 \le x \le 0.2\ ,\ R = 0.2$

4) $-1 \le x \le 1\ ,\ R = 1$

5) $-3 < x \le -1\ ,\ R = 1$

6) $-1 < x < 1\ ,\ R = 1$

7) $x = 1\ ,\ R = 0$

8) $-\infty < x < \infty\ ,\ R = \infty$

9) $-5 < x \le 3\ ,\ R = 4$

10) $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}\ ,\ R = 4/3$

11) $-9 \le x \le 11\ ,\ R = 10$

12) $-7 < x < -3\ ,\ R = 2$

13) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

14) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$

15) $\left(|x|<\frac{1}{3}\right)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$

16) $(|x|<5)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$

17) $\left(|x|<\frac{1}{4}\right)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$

18) $(|x|<3)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$

19) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$

20) $\left(|x|<\frac{1}{3}\right)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות **1-7**:

1) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

2) $f(x)=\ln(1+x)$

3) $f(x)=\ln(1-x)$

4) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

5) $f(x)=\ln(5-x)$

6) $f(x)=\frac{x^2}{(1-2x)^2}$

7) $f(x)=\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$

8) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}$.

9) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+n\right)x^{n-1}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n-1)}$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$.

12) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$.

13) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

תשובות סופיות

1) $(|x|<1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$

2) $(-1<x\le 1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

3) $(-1\le x<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$

4) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$

5) $(-5\le x<5)\ \ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$

6) $(|x|<\frac{1}{2})\ \sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$

7) $(|x|\le 3)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$

8) $\frac{20}{27}$

9) $|x|<1\quad \frac{2}{(1-x)^3}$

10) א. $|x|<1\quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ ב. $\frac{1}{4}\ln 3$

11) א. $|x|<1\quad \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\arctan x$

ב. $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\ln 3+\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}\right)$

12) $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{4}\ln\frac{11}{9}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{10}\right)$

13) $|x|\le 1\quad \arctan x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דפרנציאליות רגילות

פרק 4 - מערכת משוואות לינאריות

תוכן העניינים

1. חזרה מאלגברה לינארית - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים 37

2. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת הלכסון 39

3. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת וריאציית הפרמטרים 44

4. מערכת משוואות כללית - שיטת ההצבה 46

חזרה מאלגברה לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

שאלות

בשאלות הבאות מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של A :

1) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}1&-1&4\\3&2&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}$

7) $A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-1\end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $x=0,\ x=1,\ x=2,\ v_{x=0}=(-1,0,1),\ v_{x=1}=(0,1,0),\ v_{x=2}=(1,0,1)$

2) $x=6,\ x=2,\ x=-4,\ v_{x=6}=(0,0,1),\ v_{x=2}(1,1,1),\ v_{x=-4}=(-1,1,0)$

3) $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=3,\ v_{x=2}=(1,1,1),\ v_{x=3}^{(1)}=(1,0,1)\ x_{x=3}^{(2)}=(1,1,0)$

4) $x=1,\ x=3,\ x=-2,\ v_{x=1}=(-1,4,1),\ v_{x=3}=(1,2,1),\ v_{x=-2}=(-1,1,1)$

5) $x=1,\ x=4,\ x=-1,\ v_{x=1}=(1,-2,1),\ v_{x=4}=(1,1,1),\ v_{x=-1}=(-1,0,1)$

6) $x=-1,\ x=3\quad v_{x=-1}=(-1,2),\ v_{x=3}=(1,2)$

7) $x_{1,2}=1\pm 2i,\ v_{x=1+2i}=(1+i,2),\ v_{x=1-2i}=(1-i,2)$

8) $x=1,\ x=1+\sqrt{3}i,\ x=1-\sqrt{3}i,\ v_{x=1}=(1,1,1)$,
$v_{x=1+\sqrt{3}i}=(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2),\ v_{x=1-\sqrt{3}i}=(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלכסון

שאלות

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות **1-2**:

1) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

2) $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

3) נתון $\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\\z'(t)\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$, כך ש- $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$.

הוכיחו כי $z(t)=y(t)$.

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות **4-5**:

4) $\begin{cases}x'=x-y+4z\\y'=3x+2y-z\\z'=2x+y-z\end{cases}$

5) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

6) נתון $\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$, כך ש- $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$.

חשבו: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)}+\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) פתרו את מערכת המשוואות: $\begin{cases} y_1'+5y_1-2y_2'=0 \\ 3y_2'-4y_1'-5y_2=0 \end{cases}$.

8) פתרו: $\vec{x}'(t)=A\cdot\vec{x}(t)$, כאשר $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

הערה: בשאלות **7** ו-**8** יש להגיע לפתרון המרוכב מהפתרון ממשי.

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות **9-14**:
(שימו לב שכל המערכות <u>אינן</u> ניתנות ללכסון)

9) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

10) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

11) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

12) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

13) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

14) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) דני פתר את המערכת $x'(t)=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&2&6\\-1&-1&-3\end{pmatrix}x(t)$,

וקיבל $x(t)=c_1e^{-1t}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2{}^{0t}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{0t}\left[t\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right]$.

נתון תנאי התחלה: $x(0)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

עבור אילו ערכים של הקבועים הממשיים, a,b,c, הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה הנתון יהיה חסום לכל t ממשי?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $$\underline{x}(t)=c_1e^{0t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{1t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

2) $$\underline{x}(t)=e^{6t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+3e^{-4t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

3) $$z(t)=y(t)$$

4) $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

5) $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

6) 0

7) $$\underline{x}(t)=c_1e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\sin 2t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]+c_2e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sin 2t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]$$

8) $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{t}\left[\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}-\sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\right]+$$
$$+c_3e^{t}\left[\sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\right]$$

9) $$\underline{x}(t)=c_1e^{0t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{t}\begin{pmatrix}t+1\\t+1\\t\end{pmatrix}$$

10) $$\underline{x}(t)=c_1e^{-5t}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-2t+1\\2t-1\\t\end{pmatrix}$$

11) $$\underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\t\end{pmatrix}+c_3e^{t}\begin{pmatrix}1\\t-1\\0.5t^2\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\underline{x}(t)=c_1e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}2t-1\\t\\t\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{bmatrix}t^2-t+2\\\frac{t^2}{2}+1\\\frac{t^2}{2}\end{bmatrix} \quad (12$$

$$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{1t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\t\end{pmatrix}+c_3e^{1t}\begin{pmatrix}0\\1\\t-1\\\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}+c_4e^{1t}\begin{pmatrix}1\\t-2\\\frac{t^2}{2}-t+1\\\frac{t^3}{6}\end{pmatrix} \quad (13$$

$$\underline{x}(t)=c_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{pmatrix}-2t+1\\-4t\\-2t\end{pmatrix} \quad (14$$

$$a=-c,\quad b=2a \quad (15$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים

שאלות

פתרו את מערכת המשוואות בשאלות **1-4**:

1) $\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + 2e^{-t} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 + 4e^{-t} \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + e^{at} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 - 2e^{at} \end{aligned}$ (a קבוע)

3) $\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{aligned} x' &= x + y + 2z + e^t \\ y' &= x + 2y + z \\ z' &= 2x + y + z + e^t \end{aligned}$

5) המירו את המשוואה $y''' + y'' - 2y = t^2$,
במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

6) פתרו את מערכת המשוואות: $\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 8t+3 \\ -3t+3 \\ t+3 \end{pmatrix}$.

7) נתונה המד"ר $e^{-x}y''''(x) - y''(x) + e^x x^2 y'(x) = 5e^{-x}$.
רשמו את המד"ר כמערכת משוואות ליניאריות מסדר ראשון,
בהצגה מטריציונית.

8) נתונה המד"ר $x^2 y''(x) + 10xy'(x) + (1+4x^2)y(x) = \ln x$.
רשמו את המד"ר כמערכת משוואות ליניאריות מסדר ראשון,
בהצגה מטריציונית.

הערה: בשאלות **7** ו-**8** המערכת המתקבלת היא לא עם מקדמים קבועים.
יחד עם זאת, הדרישה היא רק להציג את המערכת ולא לפתור אותה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix}$

2) עבור $a=-1$ נקבל: $\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}te^{-t}\\-2e^{-t}\end{pmatrix}$

עבור $a\neq 1$ נקבל: $\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{1+a}\begin{pmatrix}e^{at}\\-2e^{at}\end{pmatrix}$

3) $\underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+(3t+2)\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}-(3t+1)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+(-3t+1)\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

4) $\underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{3}te^{t}\right)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{2}{9}e^{t}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\t^2\end{pmatrix}$

6) $\underline{x}(t)=c_1\begin{pmatrix}-2e^{-5t}\\e^{-5t}\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2e^{-t}\\2e^{-t}\\e^{-t}\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}(-2t+1)e^{-t}\\(2t-1)e^{-t}\\te^{-t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\t\\t-1\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&-e^{2t}t^2&e^{t}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\5\end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-\left(\frac{1}{t^2}+4\right)&-\frac{10}{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{\ln t}{t^2}\end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מערכת משוואות כללית – שיטת ההצבה

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y''+2z'=e^{3x} \\ y'-z''+3z=x^2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y''+z'=e^{-2x} \\ y+z=\sin x \end{cases}$, בהינתן $z(0)=y(0)=y'(0)=0$.

3) $\begin{cases} x'=4x-2y+e^t \\ y'=6x-3y+e^{-t} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1'=x_1+x_2+\sin 2t \\ x_2'=x_1+x_2+\cos 2t \end{cases}$

5) $\begin{cases} z''-3z'+2z+y'-y=0 \\ z'-2z+y'+y=0 \end{cases}$

תשובות סופיות

1) $z=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}+\frac{1}{24}e^{3x}+x^2$, $y=\frac{1}{12}e^{3x}-\frac{2}{3}x^3-2c_2e^x+2c_3e^{-x}+kx+l$

2) $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^x-\frac{1}{6}e^{-2x}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$, $y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}e^x+\frac{1}{6}e^{-2x}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$

3) $x=c_1+c_2e^t+4te^t-e^{-t}$, $y=2c_1+\frac{3}{2}c_2e^t+6te^t-\frac{3}{2}e^t-\frac{5}{2}e^{-t}$

4) $x_1=c_1+c_2e^{2t}-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{4}\sin 2t$, $x_2=-c_1+c_2e^{2t}+\frac{1}{4}\sin 2t$

5) $z=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}$, $y=2c_1+\frac{1}{2}c_2e^x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דפרנציאליות רגילות

פרק 5 - פתרון משוואות ליניאריות באמצעות טורים

תוכן העניינים

1. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית 47
2. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית-סינגולרית 49
3. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות 51

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות לטורי מקלורן של פונקציות חשובות.

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-7** על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=0$.
במיוחד, רשמו נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי,
וציינו את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.

תזכורת: טור חזקות סביב $x=0$ שקול לטור טיילור סביב $x=0$ ושקול לטור מקלורן.

1) $y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2 \qquad y(0)=3,\quad y'(0)=12;$

2) $y''-xy=0 \quad ; \quad y(0)=1,\ y'(0)=2$

3) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

4) $(x^2+4)y''+xy=x+2$

5) $y''+(x-1)y'+(2x-3)y=0$

6) $y''+ty=e^{t+1} \qquad y(0)=a_0=1,\quad y'(0)=a_1=2;$

7) $y''+(t-1)y'+(2t-3)y=0$ (השתמש בפתרון בסימן $\sum$)

8) פתרו את המשוואה $y''(x)+(x-1)y(x)=e^x \ ; \ y'(1)=2\ , \ y(1)=1\ ,$
על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=1$.

9) פתרו את המשוואה $y''+xy'+(2x-1)y=0 \ ; \ y'(-1)=-2,\ y(-1)=2$.

רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב $x=-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $a_n=\frac{2n-10}{(n-1)n}a_{n-3}\ (n\geq 5)\quad,\quad y=3+12x+x^2-\frac{5}{3}x^3-\frac{23}{12}x^4+\ldots+a_nx^n\ldots$

2 $a_n=\frac{1}{(n-1)n}a_{n-3}\ (n\geq 3)\quad,\quad y=1+2x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$

3 $a_n=\frac{n-3}{n-1}a_{n-2}\quad (n\geq 2)\quad,\quad y=a_0+a_1x+-a_0x^2+0x^3-\frac{1}{3}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$

4
$$y=a_0+a_1x+\frac{1}{4}x^2+\left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3+\left(\frac{-1}{48}a_1-\frac{1}{96}\right)x^4+\ldots+a_nx^n$$
$$a_n=\frac{-1}{4(n-1)n}a_{n-3}-\frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n}a_{n-2}\ ,\ (n\geq 4)$$

5
$$y=a_0+a_1x+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)x^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)x^3+\frac{1}{6}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\geq 3)$$

6
$$y(t)=1+2t+\frac{e}{2}t^2+\frac{e-1}{6}t^3+\frac{e-4}{24}t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{e}{n(n-1)(n-2)!}-\frac{a_{n-3}}{n(n-1)}\quad (n\geq 3)$$

7
$$y=a_0+a_1t+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)t^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)t^3+\frac{1}{6}a_0t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\geq 3)$$

8
$$y=1+2(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\frac{e-1}{6}(x-1)^3+\frac{e-4}{24}(x-1)^4+\ldots+a_n(x-1)^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{e-a_{n-3}(n-2)!}{n!}\quad (n\geq 3)$$

9
$$y=2-2(x+1)+2(x+1)^2-\frac{2}{3}(x+1)^3+\frac{1}{3}(x+1)^4+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\geq 3)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית

שאלות

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראו שהנקודה היא נקודה סינגולרית רגולרית, ופתרו את המשוואה על ידי פיתוח המשוואה לטור חזקות בסביבות הנקודה.

1) $3x^2y''+2xy'+x^2y=0$

2) $2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$

3) $2x^2y''-xy'+(x-5)y=0$

4) $3x^2y''-xy'+y=0$

5) $x^2y''+xy'+x^2y=0$

6) $x^2y''-xy'+y=0$

7) $x^2y''+x(x+2)y'-2y=0$

8) $x^2y''+x(x-2)y'+2y=0$

הערות

בשאלות **2-5**, הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרש אינו מספר שלם.
בשאלות **6** ו-**7** הפתרונות שווים, ובשאלות **8** ו-**9** הפתרונות שונים והפרש מספר שלם.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y=k_1x^{1/3}\left(1-\frac{1}{14}x^2+\frac{1}{728}x^4+\ldots\right)+k_2\left(1-\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{440}x^4+\ldots\right)$

2) $y=k_1x^{1/2}\left(1-\frac{7}{18}x^1+\frac{147}{792}x^2+\ldots\right)+k_2x^{-3}\left(1-\frac{21}{5}x^1+\frac{49}{5}x^2-\frac{343}{15}x^3\right)$

3) $y=k_1x^{-1}\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{30}x^2+\frac{1}{90}x^3+\ldots\right)+k_2x^{2.5}\left(1-\frac{1}{9}x+\frac{1}{198}x^2-\frac{1}{7722}x^3+\ldots\right)$

4) $y=k_1x+k_2x^{1/3}$

5) $y=k_1\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\ldots\right)+$
$+k_2\left[\ln x\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\ldots\right)+\left(\frac{2}{2^3}x^2+\frac{-12}{4^3\cdot 2^3}x^4+\ldots\right)\right]$

6) $y(x)=k_1x+k_2x\ln x$

7) $y(x)=\frac{k_1}{x^2}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-e^{-x}\right)+\frac{k_2}{x^2}e^{-x}$

8) $y=-a_0x^2\ln x\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\ldots\right)+a_0x\left(1-x^2-\frac{3}{4}x^3+\ldots\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$	$-1<x\le 1$
$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$	$-1\le x\le 1$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\ldots$	$-1<x<1$
$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ $=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$	$-1\le x\le 1\ (m>0)$ $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ $-1<x<1\ (m\le -1)$ $m\ne 0,1,2,3,\ldots$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©