משוואות דפרנציאליות רגילות



תוכן העניינים

1. משוואות מסדר ראשון 1
2. משוואות ליניאריות מסדר שני 22
3. התמרת לפלס 37

משוואות דפרנציאליות רגילות

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים 1
3. משוואה הומוגנית 3
4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$ 5
5. משוואה מדויקת 6
6. גורם אינטגרציה 8
7. משוואה לינארית מסדר ראשון 11
8. משוואת ברנולי 13
9. משוואת ריקטי 14
10. משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה 15
11. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון 17
12. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד 19

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y} \quad (y\neq 0)$

2) $(1-x)y'=y^2$

3) $yy'\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$

4) $(x-1)\frac{dy}{dx}=4y \quad ; \quad y(2)=1$

5) $\frac{dy}{dx}=xy+3y-3x-9 \quad ; \quad y(1)=-1$

6) $\left(x^2y-2+2x^2-y\right)dx-\left(xy^2-4-4x+y^2\right)dy=0$

7) $dy=2t\left(y^2+4\right)dt$

8) $\frac{dx}{dt}=x^2-2x+2$

9) $y'+y^2\sin x=0 \quad ; \quad y(\pi)=1$

10) $\frac{dy}{dx}=y\sec^2 x \quad ; \quad y(0)=5 \quad (\cos x\neq 0)$

11) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad y(0)=1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+k}$

2 $y=\frac{1}{\ln|1-x|-c},\quad y=0$

3 $\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+c$

4 $\frac{1}{4}\ln|y|=\ln|x-1|$

5 $\ln|y-3|=\frac{x^2}{2}+3x+\ln 4-3.5$

6 $y=2\pm\sqrt{(x-1)^2+k}$

7 $y=2\tan\left(2t^2+k\right)$

8 $x=1+\tan\left(t+c\right)$

9 $y=-\frac{1}{\cos x}$

10 $\ln|y|=\tan x+\ln 5$

11 $\frac{1}{-2y^2}=\sqrt{1+x^2}-1.5$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה הומוגנית

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-8**:

1) $\left(y^3+x^3\right)dx+xy^2dy=0$

2) $y'=\frac{4y-3x}{2x-y}$

3) $y^2+x^2y'=xyy'$

4) $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$

5) $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$

6) $y'=\frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}$

7) $y(1)=0\ ;\ \left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$

8) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

9) נתונה המשוואה $\left(y^2+x^2\right)dx+xy^ndy=0$.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n, על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של n שנמצא בסעיף א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $-\ln|x|=\frac{1}{6}\ln\left|2(y/x)^3+1\right|+c\,,\qquad y=-\frac{x}{2^{1/3}}$

2 $\ln|x|=\frac{1}{4}\ln\left|(y/x)-1\right|-\frac{5}{4}\ln\left|(y/x)+3\right|+c\,,\quad y=x,\ y=-3x$

3 $-\ln|x|=\ln\left|(y/x)\right|-(y/x)+c,\quad y=0$

4 $-\ln|x|=\frac{1}{4}\ln\left|2(y/x)^2+4\right|+c,\quad y=0,\quad y=-2x$

5 $\ln|x|=-\sin(y/x)+c$

6 $\ln\left(1+e^{(x/y)^2}\right)=\ln|y|+c,\quad y=0$

7 $\ln x=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+c$

8 $\ln|t|=-\frac{1}{2}\ln\left|(x/t)-(x/t)^2\right|+c,\quad x(t)=0,\quad x(t)=t$

9 $n=1,\quad \ln|x|=-\frac{1}{4}\ln\left(1+2(y/x)^2\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+y+2}$

2) $(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0$

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$

4) $\frac{dx}{dy}=\frac{3+x+2y}{1+x+y}$

5) $(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0$

תשובות סופיות

1) $x=\frac{1}{2}(x+y+1)+\frac{1}{4}\ln\left(2(x+y+1)+1\right)+\frac{1}{4}+c,\quad y=-x-1.5$

2) $\ln|x-1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right|+c\ ,y=x-3\ ,\quad y=-x-1$

3) $0=14y-(x+2y+3)^2+k$

4) $\ln|x-1|=\frac{1}{4}\left[-\left(2+\sqrt{2}\right)\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right|+\left(-2+\sqrt{2}\right)\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right]+c$

$y=\sqrt{0.5}x-2-\sqrt{0.5}\ ,\ y=-\sqrt{0.5}x-2+\sqrt{0.5}$

5) $\ln|x-2|=\frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2}+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה מדויקת

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-6**:

1) $\left(2x^3+3y\right)dx+\left(3x+y-1\right)dy=0$

2) $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

3) $\left(y\cos x+2xe^y\right)dx+\left(\sin x+x^2e^y-1\right)dy=0$

4) $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 xdy=0$

5) $\left(y^2-\frac{y}{x(x+y)}+2\right)dx+\left(\frac{1}{x+y}+2y(x+1)\right)dy=0$

6) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

7) נתונה המשוואה $\left(3x^2+ye^{xy}\right)dx+\left(2y^3+kxe^{xy}\right)dy=0$, כאשר k קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k, על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שנמצא בסעיף א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $0.5x^4+3yx+0.5y^2-y=c$

2) $e^{xy^2}+x^4-y^3=c$

3) $y\sin x+x^2e^y-y=c$

4) $x-\frac{y^2\cos 2x}{2}-\frac{y^2}{2}=c$

5) $\ln|x+y|+(x+1)y^2+2x-\ln|x|=c$

6) $x^2t^2-2x^3t+x^4=c$

7) $k=1,\ \ x^3+e^{xy}+\frac{y^4}{2}=c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גורם אינטגרציה

שאלות

1) הראו שהמשוואה $x^2y^3+x\left(1+y^2\right)y'=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

2) הראו שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0$
אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x.

3) הראו שהמשוואה $\left(x+2\right)\sin ydx+x\cos ydy=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x.

פתרו את המשוואות בשאלות **4-9**:

4) $\left(x^2+y^2+x\right)dx+\left(xy\right)dy=0$

5) $\left(x-x^2-y^2\right)dx+ydy=0$

6) $\left(2xy^3+y^4\right)dx+\left(xy^3-2\right)dy=0$

7) $\left(y^2-y\right)dx+xdy=0$

8) $\left(y-xy^2\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$

9) $y'=\frac{3yx^2}{x^3+2y^4}$; $y\left(1\right)=-1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונה מד"ר לא מדויקת $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{N}=f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{M}=g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $\left(y^4-4xy\right)dx+\left(2xy^3-3x^2\right)dy=0$.

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד.

כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

12) נתונה המשוואה $\left(5x^2+3y^3+2xy\right)dx+\left(3x^2+3xy^2+6y^3\right)dy=0$.

מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה

שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $\left(x^2y^3\right)dx+\left(x+xy^2\right)dy=0$.

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$.

כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu\left(x^\alpha y^\beta\right)$.

15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה $\left(y-xy^2\ln x\right)dx+xdy=0$.

16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה

שהוא פונקציה של $x+y$ בלבד.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $0.5x^2+\frac{y^{-2}}{-2}+\ln|y|=c$

2) $e^x\sin y+2y\cos x=c$

3) $\sin y\cdot e^x\cdot x^2=c$

4) $0.25x^4+0.5x^2y^2+\frac{x^3}{3}=c$

5) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-x=c$

6) $x^2+xy+\frac{1}{y^2}=c$

7) $x-\frac{x}{y}=c$

8) $-\ln x-\frac{1}{xy}+y=c$

9) $-\frac{x^3}{y}+\frac{2y^3}{3}=\frac{1}{3}$

10) שאלת הוכחה.

11) $\mu(xy)=(xy)^2$

12) $\mu(x+y)=(x+y)^2$

13) $\text{if: }\frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}=h\left(x/y\right)\quad\text{then: I.F.: }\mu=e^{\int\frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}}$

14) $\mu=\frac{1}{xy^3}$

15) א. $\text{if : }\frac{M_y-N_x}{yN-xM}=h(xy)\quad\text{then: I.F. : }\mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{yN-xM}}$ ב. $\mu=\frac{1}{x^2y^2}$

16) $\text{if : }\frac{M_y-N_x}{N-M}=h(x+y)\quad\text{then:I.F.: }\mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N-M}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$

2) $xy'=y+x^3+3x^2-2x$

3) $(x>2)\quad (x-2)y'=y+2(x-2)^3$

4) $(x>0)\quad x^3y'+(2-3x^2)y=x^3$

5) $y(0)=1\ ;\ \frac{dy}{dt}+y=2+2t$

6) $(\sin x>0)\quad \frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x}$

7) $(\sin x>0)\quad y'-2y\cot x=1$

8) $z(\pi)=0\ ;\ x^2z'+2xz=\cos x$

9) $ydx=(2x+y^3)dy$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = 2 + C \cdot e^{-x^2}$

2) $y = x\left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x + C\right]$

3) $y = (x-2)\left[x^2 - 4x + C\right]$

4) $y = \frac{1}{2}x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}}$

5) $y = 2t + e^{-t}$

6) $y = \frac{1}{\sin x}\left[-5e^{\cos x} + C\right]$

7) $y = \sin^2 x\left[-\cot x + C\right]$

8) $z = \frac{\sin x}{x^2}$

9) $x(y) = y^2(y + c)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת ברנולי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $x^2y'+2xy-y^3=0$

2) $\left(x^2+1\right)y'-2xy-y^2=0$

3) $x\frac{dy}{dx}-2y=x^2y^{1/2}$

4) $y'-\left(\frac{1}{x}+5x^4\right)y=-x^3y^2 \quad ; \quad y(1)=2.5$

5) $z'-\cot x\cdot z=\frac{1}{\sin x}z^3 \qquad \left(\sin x\neq 0\right)$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x}+c\cdot x^4}}$

2) $y=\frac{x^2+1}{-x+C}$

3) $y=x^2\left(\frac{x}{2}+C\right)^2$

4) $y=\frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5}+e}$

5) $z=\pm\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x+C}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת ריקטי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y'=e^{2x}+\left(1+\frac{5}{2}e^{x}\right)y+y^{2}$

2) $y'=1+\left(x-y\right)^{2}$

3) $y'=1+x+2x^{2}\cos x-\left(1+4x\cos x\right)y+2y^{2}\cos x$

תשובות סופיות

1) $y\left(x\right)=-0.5e^{x}+\frac{e^{x}}{-\frac{2}{3}+Ce^{-1.5x}}$

2) $y\left(x\right)=x+\frac{1}{-x+C}$

3) $y\left(x\right)=x+\frac{1}{\cos x-\sin x+Ce^{x}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $4x^2p^2 - 4x^2p - 2xy - y^2 = 0$ $\quad (p = y')$

2) $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$ $\quad (p = y')$

3) $xyp^2 + \left(x^2 + xy + y^2\right)p + x^2 + xy = 0$ $\quad (p = y')$

4) $y = 2px + p^4x^2$ $\quad (p = y')$

5) $xp^2 - 2yp + 4x = 0$ $\quad (p = y')$

6) $6p^2y^2 + 3px - y = 0$ $\quad (y > 0)$ $\quad (p = y')$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\left(y-2x-\sqrt{x}\cdot c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+\frac{1}{2}\ln|x|-c_2\right)=0$

2) $\left(\ln|y|-2\ln|x|-c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+3\ln|x|-c_2\right)=0$

3) $\left(y+0.5x-\frac{c_1}{x}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-c_2\right)=0,\ \ x>0$

4) $y=\pm 2\sqrt{cx}+c^2$

5) $y=\frac{1}{2}cx^2+\frac{2}{c}$

6) $6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2y^2+3\left(\frac{c}{y^2}\right)x-y=0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

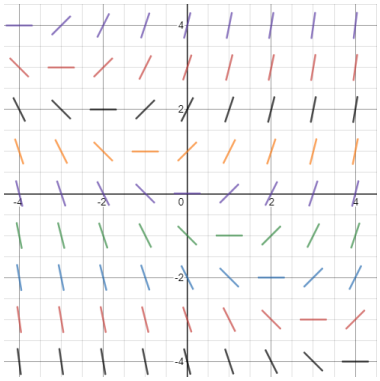
1) שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y'=2y-x$.

2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

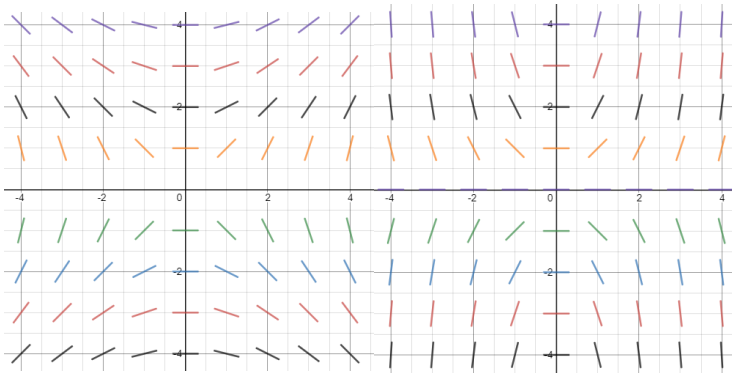
א. $y'=\frac{x}{y}$

ב. $y'=xy$

ג. $y'=x+y$



איור 1



איור 2

איור 3

3) נתונה המד"ר $y'=y-x$, $y(0)=2$.

מצאו בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.1$.

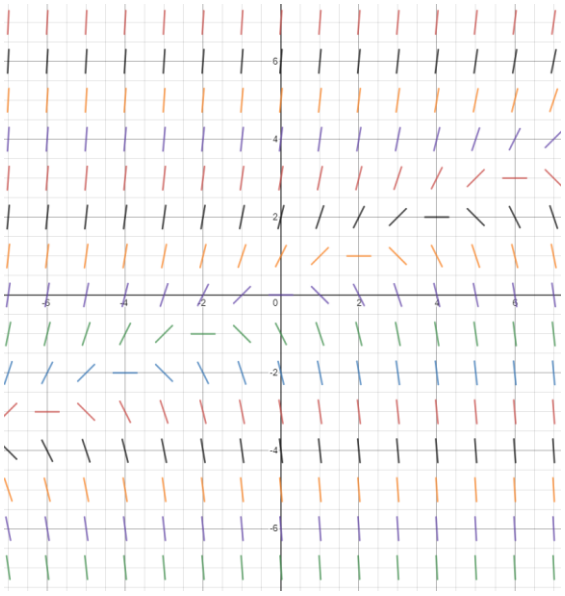
4) נתונה המד"ר $y'=x+y$, $y(1)=2$.

מצאו בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.2$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1)



2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

3) $y(1)=4.593$

4) $y(2)=6.95328$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

1) נתונה הבעיה $y'=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+y}$, $y(2)=-1$.

א. הוכיחו ש-$y_1(x)=-x+1,\quad y_2(x)=-\frac{1}{4}x^2$ הם פתרונות לבעיה.
קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

2) נתונה הבעיה $y'=\sqrt[3]{y}+4$, $y(0)=0$.

א. הוכיחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכיחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכיחו שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

3) פתרו את הבעיה $y'=\left(x^2+y^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+x^2\sin y$, $y(4)=0$.

4) נתונה הבעיה $y'=(y-1)\left(x^2+y\right)^5$, $y(0)=4$.

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

5) נתונה המד"ר $ydx=\left(2x+y^3\right)dy$.

א. הראו שעבור $x=x(y)$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון,
ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,
מהן נקודות ההתחלה (x_0,y_0), כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,
העובר דרך (x_0,y_0).
צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.
מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0,y_0)?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתונה בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו 3 קירובי פיקארד לפתרון הבעיה.

ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכיחו באינדוקציה).

ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $n \to \infty$.

7) כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = \frac{1}{x}|\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases}$ $(x > 0)$?

8) נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

9) נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

10) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

11) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

12) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.

2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

3) $y(x)=0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.

ב. כל נקודת התחלה (x_0,y_0), שעבורה $y_0\neq 0$.

הקטע הארוך ביותר: $(0,\infty)$ או $(-\infty,0)$.

6) א. $y_0(x)=1,\quad y_1(x)=1+x^2,\quad y_2(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!},\quad y_3(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}$

ב. $y_n(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}$ ג. הוכחה.

7) אחד.

8) א. $[-0.08,0.08]$ ב. $[-0.1,0.1]$ ג. הוכחה.

9) א. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ ב. $[-0.5,0.5]$ ג. הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דפרנציאליות רגילות

פרק 2 - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה 22
2. משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים 24
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל" 26
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם" 28
5. וריאציית פרמטרים 30
6. השיטה האופרטורית 31
7. משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משוואת אוילר ..... (ללא ספר)
8. משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל 33
9. הוורונסקיאן ושימושיו 34
10. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני 36

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $(x \neq 0)\ \ x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x}$

2) $(\cos x \neq 0)\ \ y'' \tan x - 1 = y'$

3) $2xy'y'' - (y')^2 + 1 = 0$

4) $y'' x \ln x = y'$

5) $xy'' = x^2 e^x + y'$

6) $yy'' + (y')^2 = 0$

7) $2y''y - (y')^2 = 1$

8) $(\cos y \neq 0)\ \ y'' \tan y = 2(y')^2$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y=\frac{1}{x}+C_1\cdot\ln x+C_2$

2) $y=-x+C_1\cdot\cos x+C_2$

3) $y=\pm\frac{2}{3C_1}\left(C_1x+1\right)^{3/2}+C_2;y=\pm x+C_3$

4) $y=C_1\left(x\ln x-x\right)+C_2;y=C_3$

5) $y=e^x\left(x-1\right)+C_1\frac{x^2}{2}+C_2$

6) $\frac{y^2}{2}=cx+k\ \ ;\ \ y=c$

7) $y=\frac{1}{c}\left[\frac{c^2\left(x+k\right)^1}{4}+1\right]$

8) $\cot y=-\left(cx+k\right)\ \ ;\ \ y=c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-11**:

1) $y''-100y=0$

2) $y''-4y'=0$

3) $y''-8y'+7y=0$

4) $z(0)=1\,,\ z'(0)=1,\ 4z''+z'-5z=0$

5) $y''-2y'+y=0$

6) $4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+4\frac{\partial x}{\partial t}+x(t)=0$

7) $y''+4y=0$

8) $y''+10y'+125y=0$

9) $y(0)=0,\ \ y'(0)=3\,;\ y''-2y'+10y=0$

10) $5y''+8y'+4y=0$

11)
$$\begin{cases} y''(x)-\frac{1}{a^2}y(x)=0 & (a>0) \\ y(0)=4 \\ y(\infty)=y(-\infty)=0 \end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) נתונה המד"ר $yy''+(y')^2=0$.

א. הראו כי $y_1=4$ ו- $y_2=\sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראו כי הפתרון $z(x)=y_1(x)+y_2(x)$, אינו פתרון של המד"ר.
האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{10x}+c_2e^{-10x}$

2) $y=c_1+c_2e^{4x}$

3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{7x}$

4) $z=e^{x}$

5) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$

6) $x(t)=c_1e^{\frac{-t}{2}}+c_2te^{\frac{-t}{2}}$

7) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

8) $y=e^{-5x}\left[c_1\cos 10x+c_2\sin 10x\right]$

9) $y=e^{2}\sin 3x$

10) $y=e^{\frac{-4x}{5}}\left[c_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+c_2\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\right]$

11) $y=4e^{-\frac{|x|}{a}}$

12) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ y'(0)=7;\quad y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''-3y'+2y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$

8) $y''+3y'=9x$

9) $y''-3y'+2y=e^x$

10) $y''-2y'=6x^2-2x$

11) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2$

2) $y = e^x + 4xe^x + e^{2x}$

3) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$

5) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + \frac{3}{10}e^{2x}\cos x + \frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x\cos x$

7) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x}$

8) $y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$

9) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} - xe^x$

10) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3$

11) $x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2}\cdot e^{-t} + te^{-2t}$

12) $y = e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ y'(0)=7;\quad y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''+3y'=9x$

8) $y''-3y'+2y=e^{x}$

9) $y''-2y'=6x^2-2x$

10) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

11) $y''-3y'+2y=2x^2+e^{x}+2xe^{x}+4e^{3x}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x} + x^2 + 2x - 2$

2) $y = e^x + 4xe^x + e^{2x}$

3) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y = c_1e^{-\sqrt{2}x} + c_2e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$

5) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{x} + \frac{3}{10}e^{2x}\cos x + \frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$

7) $y = c_1 + c_2e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$

8) $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} - xe^{x}$

9) $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x} - x^2 - x - x^3$

10) $x = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t} + \frac{1}{2}\cdot e^{-t} + te^{-2t}$

11) $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2e^{x} - 3xe^{x} + 2e^{3x}$

12) $y = e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

וריאציית פרמטרים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+y=\frac{1}{\sin x}$

2) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$

3) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$

4) $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}\quad ;\quad y(1)=0\,,\ y'(1)=0$

5) $y''-3y'+2y=\frac{1}{1+e^{-x}}$

6) $y''+4y=\sec 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\cdot x+\sin x\cdot\ln|\sin x|$

2) $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\frac{x^2}{2}\left[\ln x-\frac{1}{2}\right]+x^2e^{-2x}\left[\ln x-1\right]$

3) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-e^{-x}\left[\frac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^5}{5}-\frac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}\right]+xe^{-x}\left[2\left(x+1\right)^{3/2}\right]$

4) $y=e^x-xe^x+xe^x\ln x\quad (x>0)$

5) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+e^x\ln\left(1+e^{-x}\right)+e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(1+e^{-x}\right)\right]$

6) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\sin 2x\cdot x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

השיטה האופרטורית

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

בשאלות אלו הסימון הוא: $ay''+by'+cy=Q(x) \Leftrightarrow \left(aD^2+bD+c\right)y=Q(x)$.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1 $\left(D^2-D-2\right)y=4e^{-2x}+10e^{x}+11$

2 $\left(D^2-2D+1\right)y=10e^{4x}+e^{x}-1$

3 $\left(D^2+D-2\right)y=4e^{x}+e^{10x}+14$

4 $\left(D^2+4\right)y=\sin 5x$

5 $\left(D^2-4\right)y=\sin x\cos x\cos 2x$

6 $\left(D^2+D-2\right)y=\cos x-3\sin x$

7 $\left(D^2+2D-3\right)y=2\cos x\cos 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^{x} - 5.5$

2) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^{x} - 1$

3) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} - 4x e^{x} + \frac{1}{72} e^{10x} + 7$

4) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x$

5) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x$

6) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + \sin x$

7) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

שאלות

1) פתרו $y''+\tan x\cdot y'-(2\tan x+4)y=0$, כאשר ידוע $y_1(x)=e^{2x}$.

2) פתרו $(1-x^2)y''+2xy'-2y=0$.

3) הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$(1-x)y''+x\cdot y'-y=2(1-x)^2e^{-x},\quad (0<x<1),$$

כאשר ידוע ש- $y_1(x)=e^x$, פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}(\sin x-4\cos x)$

2) $y=c_1x+c_2(x^2+1)$

3) שאלת הדגמה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

1) האם ייתכן כי $y_1(x)=e^x,\ \ y_2(x)=\sin x$, הם שני פתרונות של המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, עם מקדמים רציפים בקטע $[0,\pi]$?

2) הראו כי הפונקציות $y_1(x)=\sin x^2,\ \ y_2(x)=\cos x^2$ הן פתרונות בת"ל של המשוואה $xy''-y'+4x^3y=0$, בקטע $(-4,\infty)$.
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x=0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?

3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x)=xe^x,\ \ y_2(x)=e^{-x}$,
הן פתרונות של המשוואה $y''-\frac{2}{1+2x}y'-\frac{2x+3}{1+2x}y=0$, בקטע $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?

4) נתונות שתי פונקציות $y_2=|x^3|$, $y_1=x^3$, בקטע $[-4,4]$.

א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.

ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.

ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?

ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר $xy''-2y'=0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I ,
וניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I .
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$ הם פתרונות שלה.

ב. רשמו משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x>0$,
שהפונקציות $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=x^4$ הן פתרונות שלה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתון כי $y_1(x),\ y_2(x)$, הם פתרונות של המד"ר $y''(x)+p(x)y'+q(x)=0$,
בקטע I , כאשר p,q רציפות בקטע I .
הראו כי אם קיימת נקודה c בקטע I , שעבורה $y_1(c)=y_2(c)=0$,
אז $\{y_1(x),y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

תשובות סופיות

1) לא.

2) $W=-2x$

3) כן.

4) א. $W=0$ ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.

5) א. שאלת הוכחה . ב. $y''-\frac{5}{x}y'+\frac{8}{x^2}y=0$

6) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

שאלות

1) נתונה המשוואה $y''-4y=12x$.

א. פתרו את המשוואה.

ב. מצאו פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=11 \end{cases}$.

ג. נסו למצוא פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=4 \\ y'(0)=2 \\ y''(0)=1 \end{cases}$.

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תנו דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0)=1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

2) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''-2xy'+2y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$.

הראו כי $y_1(x)=0$ ו- $y_2(x)=x^2$, הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x=0$, כך שהפונקציות $y=4x$ ו- $y=\sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות

1) א. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-3x$ ב. $y=4e^{2x}-3e^{-2x}-3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דפרנציאליות רגילות

פרק 3 - התמרת לפלס

תוכן העניינים

1. התמרת לפלס 37
2. התמרת לפלס ההפוכה 40
3. פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס 44
4. נוסחאות - התמרת לפלס 46

התמרת לפלס

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות להתמרת לפלס.

שאלות

חשבו את התמרות לפלס בשאלות **1-12** בעזרת טבלת התמרות לפלס:

1) $L\left(t^2+4t-2\right)$

2) $L\left(\frac{1}{2}t^4+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}+1\right)$

3) $L\left(e^{-4t}+10e^{2t}\right)$

4) $L\left(\cosh 4t\right)$

5) $L\left(\sinh 10t\right)$

6) $L\left(\sin 2t\cos 2t\right)$

7) $L\left(\sin 2t\cos 3t\right)$

8) $L\left(\sin^2 t\right)$

9) $L\left(\cos^2 4t\right)$

10) $L\left(t^2\sin 4t\right)$

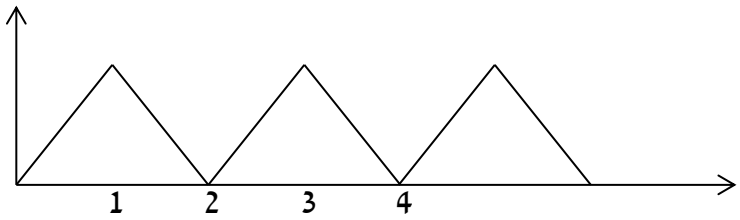
11) $L\left(t^4e^{2t}\right)$

12) $L\left(e^{2t}\sin 4t\right)$

13) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases}t & 0<t\le 1\\ 1 & t>1\end{cases}$.

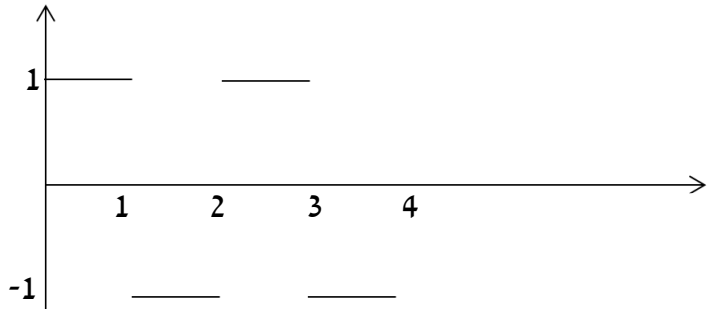
14) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases}t & 0<t\le 1\\ 2-t & 1<t\end{cases}$.

15) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:

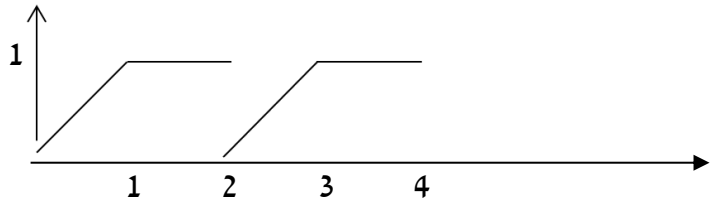


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



17) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



18) הגדירו ושרטט את פונקציית המדרגה $u(t)$ ואת ההזזה שלה $u(t-k)$.

19) שרטטו את הפונקציה $f(t)=u(t-2)-u(t-3)$, כאשר $u(t)$ פונקציית המדרגה.

20) רשמו את הפונקציה $f(t)=\begin{cases}0 & t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$, בעזרת פונקציית המדרגה.

21) רשמו את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה $u(t)$,
של הפונקציה $u(t-k)$, ושל הפונקציה $f(t-k)u(t-k)$.

22) חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ (t-4)^2 & t\ge 4\end{cases}$.

23) חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ t^2 & t\ge 4\end{cases}$.

24) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו ושרטטו את פונקציית הדלתא $\delta(t)$.

ב. מהי התמרת לפלס של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה $\delta(t-a)$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}-\frac{2}{s}$

2) $\frac{12}{s^5}+s^{-3/2}+\frac{1}{s}$

3) $\frac{1}{s+4}+10\frac{1}{s-2}$

4) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-4}+\frac{1}{s+4}\right]$

5) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-10}-\frac{1}{s+10}\right]$

6) $\frac{1}{2}\frac{4}{s^2+16}$

7) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{s^2+25}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}$

8) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}$

9) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+64}$

10) $\frac{8\left(3s^2-16\right)}{\left(s^2+16\right)^3}$

11) $\frac{24}{(s-2)^5}$

12) $\frac{4}{(s-2)^2+16}$

13) $\frac{1-e^{-s}}{s^2}$

14) $\frac{1-2e^{-s}}{s^2}$

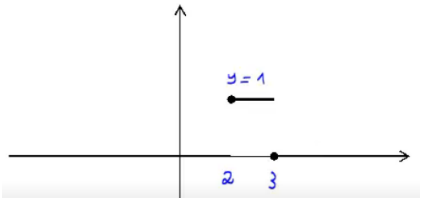
15) $\frac{1-2e^{-s}+e^{-2}}{s^2\left(1-e^{-2s}\right)}$

16) $\frac{1-e^{-s}}{s\left(1+e^{-s}\right)}$

17) $\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$

18) $u(t-k)=\begin{cases}0 & t<k\\ 1 & t\geq k\end{cases}$

19)



20) $f(t)=\begin{cases}0 & t\leq\\ 1 & t>4\end{cases}=u(t-4)$

21) $L=\left(u(t-k)\,f(t-k)\right)=e^{-ks}L\left(f(t)\right)$

22) א. $L\left((t-4)^2\cdot u(t-4)\right)=\frac{2e^{-4s}}{s^3}$

23) $e^{-4s}L\left(t^2\right)+8e^{-4t}L(t)+16\frac{e^{-4s}}{s}$

24) $L\left[\delta(t-2\pi)\right]=e^{-2\pi s}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

התמרת לפלס ההפוכה

שאלות

חשבו את ההתמרות בשאלות **1-29**:

1) $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

2) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right)$

3) $L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right)$

4) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$

5) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$

6) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right)$

7) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right)$

8) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right)$

9) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right)$

10) $L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$

11) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)$

12) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right)$

13) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right)$

14) $L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right)$

15) $L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right)$

16) $L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right)$

17) $L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right)$

18) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right)$

19) $L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right)$

20) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2-4s+4)}\right)$

21) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right)$

22) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)$

23) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right)$

24) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

25) $L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$

26) $L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right)$

27) $L^{-1}\left(\frac{3}{s}-\frac{4e^{-s}}{s^2}+\frac{4e^{-3s}}{s^2}\right)$

28) $L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1}+\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right)$

29) $L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right)$

*בשאלה **27** כתבו את התוצאה בצורה מפורטת ושרטטו אותה.

30) נתון $F(s)=\frac{e^{-s}+2}{s}$.

חשבו את $f(0)$ ו-$f(\infty)$, כאשר $f(t)=L^{-1}(F(s))$.

פתרו בשתי דרכים שונות.

הערה: $f(0)=\lim_{t\to 0} f(t)$, $f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)$.

31) הסבירו והדגימו את משפט הקונוולוציה.

השתמשו במשפט הקונוולוציה כדי לחשב את התרגילים הבאים:

32) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-1)}\right)$

33) $L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right)$

34) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right)$

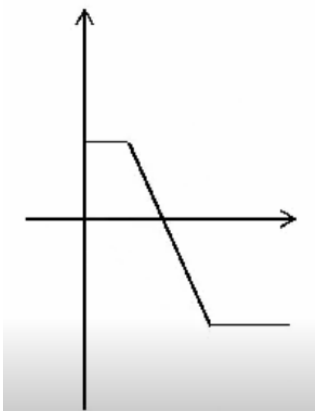
35) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 1
2) $\frac{t^3}{3!}$
3) e^{10t}
4) $\frac{1}{3}\sin 2t$
5) $\cos 2t$
6) $e^{10t}\frac{1}{2}\sin 2t$
7) $e^{2t}\left\{\cos 2t+2\frac{1}{2}\sin 2t\right\}$
8) $\frac{1}{4}t\sin 2t$
9) $\frac{1}{4}t\sin 2t$
10) $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}$
11) $\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$
12) $1-2e^{-5t}$
13) $3e^{-3t}-2e^{-2t}$
14) $1+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}$
15) $e^{-t}+2e^{-2t}+3e^{3t}$
16) $e^{-3t}+e^{3t}-e^{-2t}-e^{2t}$
17) $e^{2t}+4te^{2t}-e^{-2t}$
18) $-6+5t+6e^{-2t}$
19) $4-4e^{-3t}-3te^{-3t}$
20) $2e^{t}+te^{t}-2e^{2t}+te^{2t}$
21) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$
22) $\frac{1}{\sqrt{0.75}}e^{-0.5t}\sin\sqrt{0.75}t$
23) $\sin t+2e^{3t}$
24) $\cos t+e^{-2t}$
25) $\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t$
26) $e^{t}-\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+5t\sin 2t+\frac{5}{4}\left(\sin 2t-2t\cos 2t\right)$
27) א. $3-4u\left(t-1\right)\cdot\left(t-1\right)+4u\left(t-3\right)\cdot\left(t-3\right)$

ב. $\begin{cases}3 & t<1\\ 7-4t & 1<t<3\\ -5 & t\ge 3\end{cases}$; שרטוט:



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) $u(t-4)e^{-(t-4)}+u(t+2)\sin(t+2)$

29) $u(t-10)\left(e^{t-10}-e^{2(t-10)}\right)$

30) $f(0)=2 \quad f(\infty)=3$

31) שאלת הסבר.

32) $-\frac{1}{2}\left(t^2+2t+2\right)+e^t$

33) $0.5t-\frac{1}{4}\sin 2t$

34) $\frac{1}{4}e^{4t}(t-1)+\frac{1}{4}$

35) $\frac{1}{2}(-2\cos t+2-t\sin t)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס:

1) $y(0)=0\ ;\ y'+4y=e^{-3t}$

2) $y(0)=-1\ ,\ y'(0)=4\ ;\ y''+4y'+4y=10e^{-2t}$

3) $y(0)=-1,\ y'(0)=-4\ ;\ y''-4y'=16$

4) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+4y'=8t+2$

5) $y(0)=y'(0)=\frac{1}{4}\ ;\ 4y''-4y'=te^{t}+e^{t}$

6) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''-3y'+2y=u(t-4)$,

כאשר $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$ היא פונקציית המדרגה.

7) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+y'=f(t)$ כאשר $f(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2 & t\geq 1\end{cases}$.

8) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+5y'+6y=h(t)$ כאשר $h(t)=\begin{cases}1 & 0<t<2\\ 0 & t\geq 2\end{cases}$.

9) $y(0)=y'(0)=0, y''(0)=3\ ;\ y'''+4y''+5y'+2y=10\cos t$

10) $y(0)=0,\ y'(0)=0\ ;\ y''+2y'+2y=\delta(t-\pi)$

11) $y(0)=2,\ y'(0)=-3\ ;\ y''+3y'-10y=4\delta(t-2)$

12) $y(0)=0,\ y'(0)=0\ ;\ -y''+4y=\delta(t-2\pi)-\delta(t-\pi)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $y(t)=e^{-3t}-e^{-4t}$

2 $y(t)=e^{-2t}(5t^2+2t-1)$

3 $y(t)=-4t-1$

4 $y(t)=t^2$

5 $y(t)=\frac{1}{8}e^t(t^2+2)$

6 $y(t)=u(t-4)\left(0.5-e^{t-4}+e^{2(t-4)}\right)$

7 $y(t)=2u(t-1)\cdot\left(-1+(t-1)+e^{-(t-1)}\right)$

8 $y(t)=\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\right]-u(t-2)\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2(t-2)}+2e^{-3(t-2)}\right]$

9 $y(t)=-\cos t+2\sin t+2e^{-t}-2te^{-t}-e^{-2t}$

10 $y(t)=-u(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\sin(t)$

11 $y(t)=\frac{4}{7}u(t-2)\left[e^{2(t-2)}-e^{-5(t-2)}\right]+e^{2t}+e^{-5t}$

12 $y(t)=-\frac{1}{2}u(t-2\pi)\left[\sinh\left(2(t-2\pi)\right)\right]+\frac{1}{2}u(t-\pi)\left[\sinh\left(2(t-\pi)\right)\right]$

www.GooL.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחאות – התמרת לפלס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n \ \ (\text{for } n=1,2,3,\ldots)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \ \ (\text{for } n=1,2,3,\ldots)$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1}e^{at}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin(at)+at\cos(at))$
$\frac{a}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\sin at$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$e^{-bt}\cos at$	$\frac{s+b}{\left[\left(s+b\right)^2+a^2\right]}$
$t\sin at$	$\frac{2sa}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
te^{at}	$\frac{1}{\left(s-a\right)^2}$
$\frac{1}{2a^3}\left(\sin\left(at\right)-at\cos\left(at\right)\right)$	$\frac{1}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-\frac{3}{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}$
$u\left(t\right)$	$\frac{1}{s}$
$u\left(t-k\right)$	$\frac{e^{-ks}}{s}$
$u\left(t-k\right)f\left(t-k\right)$	$e^{-ks}\cdot F\left(s\right)$
$t^n g\left(t\right)$	$\left(-1\right)^n\left(F\left(s\right)\right)^{(n)}$

תוספות

- נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה $F\left(s\right)$, של פונקציה $f\left(t\right)$, ורוצים את $f\left(0\right)$ ו-$f\left(\infty\right)$.

אז במקום למצוא את $f\left(t\right)$ ולהציב, ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f\left(0\right)=\lim_{s\to\infty}s\cdot F\left(s\right)$$

$$f\left(\infty\right)=\lim_{s\to 0}s\cdot F\left(s\right)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

- קונוולציה:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$\boxed{L\left(f(t)*g(t)\right)=F(s)\cdot G(s)}$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx \qquad L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=f(t)*g(t)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©