משוואות דיפרנציאליות רגילות

תוכן העניינים

1. טורים עם איברים קבועים 1
2. סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות 15
3. טורי טיילור - מקלורן 24
4. משוואות מסדר ראשון 27
5. משוואות ליניאריות מסדר שני 49
6. משוואות ליניאריות מסדר n 64
7. מערכת משוואות לינאריות 73
8. פתרון משוואות ליניאריות באמצעות טורים 83
9. התמרת לפלס 88
10. שימושים של משוואות דיפרנציאליות 100
11. בעיות שטורם ליוביל 108
12. פרקי חזרה - אינטגרלים 113
13. מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים 135
14. טורי פורייה 152
15. התמרת פורייה 174
16. משוואת הגלים ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 1 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים 1
2. מבחן ההתבדרות של טורים 4
3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים 5
4. מבחני התכנסות לטורים כלליים 7
5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי 9
6. תרגילי תיאוריה 10

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-6**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(0.44)^n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{7^{n+1}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{4^{n+2}}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-5)^n}{7^n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-11**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

10) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))}$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

טור הרמוני מוכלל

12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/3}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n^4}}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$

תכונות אלגבריות של טורים

13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^{n+1}}+n^{-1.5}\right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.141414...+0.123123123...$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$.

2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$.

3) מתבדר.

4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$.

5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$.

6) מתכנס ל- 8.

7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$.

8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$.

9) מתבדר.

10) $S=\frac{1}{\ln 2}$

11) $\frac{1}{12}$

12) א. מתכנס.
ב. מתבדר.
ג. מתבדר.
ד. מתבדר.
ה. מתכנס.
ו. מתכנס.

13) א. מתכנס.
ב. מתבדר.
ג. מתבדר.

14) $\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$

15) $\frac{323}{1221}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+2}$ ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan n$ ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-5** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p>1)$ **5)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p\le 1)$

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}n^2e^{-n^3}$.

מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-15** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+10n+1}$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}}$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-2}{3^n+2n}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sin^2 n}{n!}$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ **14)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ **15)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן רַאבֶּה

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!\cdot3^n}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$

21) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1000}e^{-n}$

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(1+n^2)}{n!}$

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

25) $\sum\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}$

26) $\sum\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$

תשובות סופיות

1) מתבדר.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) א. מתכנס. ב. 0
7) מתכנס.
8) מתבדר.
9) מתכנס.
10) מתבדר.
11) מתכנס.
12) מתכנס.
13) מתבדר.
14) מתכנס.
15) מתכנס.
16) מתבדר.
17) מתכנס.
18) מתכנס.
19) מתכנס.
20) מתכנס.
21) מתכנס.
22) מתכנס.
23) מתכנס.
24) מתכנס.
25) מתבדר.
26) מתבדר.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-3**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$ **2)** $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

מבחן דיריכלה

בשאלות **4** ו-**5**, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר:

4) $1+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\frac{2}{16}+\ldots$

5) $\sum\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n+1}$

6) הוכיחו שהטורים $\sum\cos n\theta,\ \sum\sin n\theta$, כאשר $\theta\neq 2\pi k$, חסומים.

7) הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים:

$\sum\frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}},\quad \sum\frac{\cos n\theta}{n+1},\quad \sum\frac{\sin n\theta}{n}\ \left(\theta\neq 2\pi k\right)$.

8) בדקו התכנסות הטור $\sum\frac{\sin^2 n}{n}$.

9) הוכיחו שאם הסדרה b_n יורדת ושואפת לאפס, אז הטור $\sum b_n\sin n$ מתכנס.

10) ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(3-n)\pmod 7$ הוא טור חסום.

ב. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-n)\pmod 7}{\sqrt{n+1}}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחן אבל

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר:

11) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

12) $\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}}$

13) $\sum \frac{(-1)^n \ln\left(1+n^{-1}\right)}{n}$

14) $\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2}$

תשובות סופיות

1) מתכנס.
2) מתכנס.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתכנס.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) מתבדר.
9) הוכחה.
10) א. הוכחה.
ב. מתכנס.
11) מתכנס.
12) מתכנס.
13) מתכנס.
14) מתכנס.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n\ln n}{n^2}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

תשובות סופיות

1) מתבדר.
2) מתכנס בהחלט.
3) מתכנס בתנאי.
4) מתכנס בתנאי.
5) מתכנס בהחלט.
6) מתכנס בהחלט.
7) מתכנס בתנאי.
8) מתכנס בתנאי.
9) מתכנס בתנאי.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תרגילי תיאוריה

1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum\frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

3) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+(-1)^n\right)$ מתבדר.

4) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum\left(1-\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו ש- $\sum|a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum\frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n\geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ לכל n, אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

10) נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

11) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

12) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

13) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum b_n$ מתכנס בתנאי.

14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל n, אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל n, אז הטור מתבדר.

15) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

17) הוכיחו:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

18) הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

19) נתון $a_n \geq 0$ לכל n.

א. נתון כי $\lim_{n\to\infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

20) הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מוגדר כך: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$.

הוכיחו כי הטור מתכנס.

22) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$,

ונתון כי לכל n מתקיים $a_{n+1} \le a_n$.

הוכיחו כי $\sum n(a_n - a_{n+1})$ מתכנס.

23) נתון $\forall n \ge 1:\ 0 < a_n < 1$, $4a_n(1-a_{n+1}) > 1$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 - 1\right)$ מתכנס?

24) נניח כי (a_n) סדרה המקיימת $a_n > 0$, $a_n \le a_{2n} + a_{2n+1}$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי $\sum a_n$ מתבדר.

25) (a_n) היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

26) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

27) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n - a_{n-1}\right)$ מתכנס.

ב. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מתכנסת.

ג. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא **טורי מקלורן עם שארית לגראנז'**.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) פונקציה f מוגדרת לכל x, גזירה ב- 0 ומקיימת $f(0)=0$.
הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

29) נתון $p(x)$ פולינום.
$\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
הוכיחו כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $p(0)=0$.

30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים.
נתון כי:
(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. (2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל n טבעי.
הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 2 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

1. סדרות פונקציות 15
2. טורי פונקציות 18
3. טורי חזקות 20
4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות 22

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות **1-11**:

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

1) $f_n(x)=x^n$ ב- $[0,0.5]$.

2) $f_n(x)=x^n$ ב- $(0,1)$.

3) $f_n(x)=\arctan(nx)$ ב- $(0,\infty)$.

4) $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$ ב- $[0,1]$.

5) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ ב- $[0,1]$.

6) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ ב- $[0.5,4]$.

7) $f_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n}$ ב- $\mathbb{R}$.

8) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$ ב- $\mathbb{R}$.

9) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{1+x^2+n^2}$ ב- $\mathbb{R}$.

10) $f_n(x)=n(1-x)x^n$ ב- $[0,1]$.

11) $f_n(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 1-\dfrac{1}{n}\\ n(x-1)+1 & 1-\dfrac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$ ב- $[0,1]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in[n,n+1] \\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0,4]$?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,4]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

13) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=nxe^{-n^2x^2}$.

א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0,\infty)$?

ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[0,\infty)$?

ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[1,\infty)$?

14) נתונה $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

15) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=[1-\chi_n(x)]\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1}+n^{\alpha}\cdot\chi_n(x)$,

כאשר $\chi_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left(n-\frac{1}{n^2},n+\frac{1}{n^2}\right) \\ 0 & else\end{cases}$.

א. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1,\infty)$?
אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1,\infty)$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\frac{\pi}{2}$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & 0<x\le 1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0.5\le x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 1 & 1<x\le 4\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2}$. ב. מתכנסת במידה שווה.

9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ד. אינה מתכנסת במידה שווה.

13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. לא במידה שווה. ג. כן.

14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

15) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1,\infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.

ב. רק אם $\alpha<0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

טורי פונקציות

שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-6**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!(x-5)^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\left[\ln(nx)\right]^4}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$

בדקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם:

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\left(-1\le x\le 1\right)$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}+x^2}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)$ $\left(\frac{1}{4}\le x\le 4\right)$

11) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ $\left(-a\le x\le a\right)$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x}{1+n^7x^2}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $x>0$
2) $x\neq 5$
3) $x<3\frac{9}{10}$ or $4\frac{1}{10}$
4) $0<x\neq\frac{1}{n}$
5) $x>0$
6) $x\neq 0,-1,-2,-3,\ldots$
7) מתכנס במידה שווה.
8) מתכנס במידה שווה.
9) מתכנס במידה שווה.
10) מתכנס במידה שווה.
11) מתכנס במידה שווה.
12) מתכנס במידה שווה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

טורי חזקות

שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-12**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin^2\frac{1}{n}$ **5)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$ **6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{(2n+1)}x^{2n}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{3^n}(x-1)^n$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2n-2)!}x^n$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^n}{n\cdot4^n}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n(x+5)^n$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^4\cdot100^n}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n+1}}{n\cdot2^{2n+1}}$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

13) $f(x)=\frac{1}{1+x}$ **14)** $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$ **15)** $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$

16) $f(x)=\frac{1}{x-5}$ **17)** $f(x)=\frac{x}{4x+1}$ **18)** $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$

19) $f(x)=\frac{3}{x^2+x-2}$ **20)** $f(x)=\frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$

<u>הערות חשובות</u>

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-1 \le x < 1\ ,\ R = 1$

2) $-\infty < x < \infty\ ,\ R = \infty$

3) $-0.2 \le x \le 0.2\ ,\ R = 0.2$

4) $-1 \le x \le 1\ ,\ R = 1$

5) $-3 < x \le -1\ ,\ R = 1$

6) $-1 < x < 1\ ,\ R = 1$

7) $x = 1\ ,\ R = 0$

8) $-\infty < x < \infty\ ,\ R = \infty$

9) $-5 < x \le 3\ ,\ R = 4$

10) $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}\ ,\ R = 4/3$

11) $-9 \le x \le 11\ ,\ R = 10$

12) $-7 < x < -3\ ,\ R = 2$

13) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

14) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$

15) $\left(|x|<\frac{1}{3}\right)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$

16) $(|x|<5)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$

17) $\left(|x|<\frac{1}{4}\right)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$

18) $(|x|<3)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$

19) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$

20) $\left(|x|<\frac{1}{3}\right)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות **1-7**:

1) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

2) $f(x)=\ln(1+x)$

3) $f(x)=\ln(1-x)$

4) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

5) $f(x)=\ln(5-x)$

6) $f(x)=\frac{x^2}{(1-2x)^2}$

7) $f(x)=\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$

8) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}$.

9) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+n\right)x^{n-1}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n-1)}$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$.

12) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$.

13) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

תשובות סופיות

1) $(|x|<1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$

2) $(-1<x\le 1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

3) $(-1\le x<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$

4) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$

5) $(-5\le x<5)\ \ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$

6) $(|x|<\frac{1}{2})\ \sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$

7) $(|x|\le 3)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$

8) $\frac{20}{27}$

9) $|x|<1\quad \frac{2}{(1-x)^3}$

10) א. $|x|<1\quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ ב. $\frac{1}{4}\ln 3$

11) א. $|x|<1\quad \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\arctan x$

ב. $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\ln 3+\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}\right)$

12) $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{4}\ln\frac{11}{9}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{10}\right)$

13) $|x|\le 1\quad \arctan x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 3 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

1. טור טיילור וטור מקלורן 24
2. נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות 26

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

בשאלות **1-24** מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן):

1) $f(x)=\sin 2x$

2) $f(x)=x^2e^{-4x}$

3) $f(x)=\sinh x$

4) $f(x)=\sin^2 x$

5) $f(x)=\cos^2 x$

6) $f(x)=2^x$

7) $f(x)=x\cos(4x^2)$

8) $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$

9) $f(x)=\arcsin x$

10) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

11) $f(x)=\dfrac{3}{1-x^4}$

12) $f(x)=\dfrac{1}{1+9x^2}$

13) $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$

14) $f(x)=\dfrac{x}{4x+1}$

15) $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$

16) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x-2}$

17) $f(x)=\dfrac{7x-1}{3x^2+2x-1}$

18) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

19) $f(x)=\ln(1+x)$

20) $f(x)=\ln(1-x)$

21) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

22) $f(x)=\ln(5-x)$

23) $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$

24) $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

הערות: לפתרון שאלות **15** ו-**16**, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים **18**, **19**, **23** ו-**24** יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות **25-27** מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס,
בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

25) $f(x)=e^{-x^2}\cos x$

26) $f(x)=\tan x$

27) $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

2 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

3 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

4 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

5 $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

6 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

7 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

8 $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

9 $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1<x<1)$

10 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(|x|<1)$

11 $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$ $(|x|<1)$

12 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ $(|x|<\frac{1}{3})$

13 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$ $(|x|<5)$

14 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$ $(|x|<\frac{1}{4})$

15 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $(|x|<3)$

16 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$ $(|x|<1)$

17 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$ $(|x|<\frac{1}{3})$

18 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

19 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

20 $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

21 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

22 $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

23 $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

24 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

25 $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

26 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

27 $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$	$-1<x\le 1$
$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$	$-1\le x\le 1$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\ldots$	$-1<x<1$
$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ $=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$	$-1\le x\le 1\ (m>0)$ $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ $-1<x<1\ (m\le -1)$ $m\ne 0,1,2,3,\ldots$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 4 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים 27
3. משוואה הומוגנית 29
4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$ 31
5. משוואה מדויקת 32
6. גורם אינטגרציה 34
7. משוואה לינארית מסדר ראשון 37
8. משוואת ברנולי 39
9. משוואת ריקטי 40
10. הצבות שונות ומשונות 41
11. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד 42
12. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון 45
13. משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה 47

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y} \quad (y\neq 0)$

2) $(1-x)y'=y^2$

3) $yy'\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$

4) $(x-1)\frac{dy}{dx}=4y \quad ; \quad y(2)=1$

5) $\frac{dy}{dx}=xy+3y-3x-9 \quad ; \quad y(1)=-1$

6) $\left(x^2y-2+2x^2-y\right)dx-\left(xy^2-4-4x+y^2\right)dy=0$

7) $dy=2t\left(y^2+4\right)dt$

8) $\frac{dx}{dt}=x^2-2x+2$

9) $y'+y^2\sin x=0 \quad ; \quad y(\pi)=1$

10) $\frac{dy}{dx}=y\sec^2 x \quad ; \quad y(0)=5 \quad (\cos x\neq 0)$

11) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad y(0)=1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+k}$

2 $y=\frac{1}{\ln|1-x|-c},\quad y=0$

3 $\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+c$

4 $\frac{1}{4}\ln|y|=\ln|x-1|$

5 $\ln|y-3|=\frac{x^2}{2}+3x+\ln 4-3.5$

6 $y=2\pm\sqrt{(x-1)^2+k}$

7 $y=2\tan\left(2t^2+k\right)$

8 $x=1+\tan\left(t+c\right)$

9 $y=-\frac{1}{\cos x}$

10 $\ln|y|=\tan x+\ln 5$

11 $\frac{1}{-2y^2}=\sqrt{1+x^2}-1.5$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה הומוגנית

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-8**:

1) $\left(y^3+x^3\right)dx+xy^2dy=0$

2) $y'=\frac{4y-3x}{2x-y}$

3) $y^2+x^2y'=xyy'$

4) $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$

5) $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$

6) $y'=\frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}$

7) $y(1)=0\ ;\ \left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$

8) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

9) נתונה המשוואה $\left(y^2+x^2\right)dx+xy^ndy=0$.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n, על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של n שנמצא בסעיף א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $-\ln|x|=\frac{1}{6}\ln\left|2(y/x)^3+1\right|+c\,,\qquad y=-\frac{x}{2^{1/3}}$

2 $\ln|x|=\frac{1}{4}\ln\left|(y/x)-1\right|-\frac{5}{4}\ln\left|(y/x)+3\right|+c\,,\quad y=x,\ y=-3x$

3 $-\ln|x|=\ln\left|(y/x)\right|-(y/x)+c,\quad y=0$

4 $-\ln|x|=\frac{1}{4}\ln\left|2(y/x)^2+4\right|+c,\quad y=0,\quad y=-2x$

5 $\ln|x|=-\sin(y/x)+c$

6 $\ln\left(1+e^{(x/y)^2}\right)=\ln|y|+c,\quad y=0$

7 $\ln x=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+c$

8 $\ln|t|=-\frac{1}{2}\ln\left|(x/t)-(x/t)^2\right|+c,\quad x(t)=0,\quad x(t)=t$

9 $n=1,\quad \ln|x|=-\frac{1}{4}\ln\left(1+2(y/x)^2\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+y+2}$

2) $(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0$

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$

4) $\frac{dx}{dy}=\frac{3+x+2y}{1+x+y}$

5) $(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0$

תשובות סופיות

1) $x=\frac{1}{2}(x+y+1)+\frac{1}{4}\ln\left(2(x+y+1)+1\right)+\frac{1}{4}+c,\quad y=-x-1.5$

2) $\ln|x-1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right|+c\ ,y=x-3\ ,\quad y=-x-1$

3) $0=14y-(x+2y+3)^2+k$

4) $\ln|x-1|=\frac{1}{4}\left[-\left(2+\sqrt{2}\right)\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right|+\left(-2+\sqrt{2}\right)\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right]+c$

$y=\sqrt{0.5}x-2-\sqrt{0.5}\ ,\ y=-\sqrt{0.5}x-2+\sqrt{0.5}$

5) $\ln|x-2|=\frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2}+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה מדויקת

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-6**:

1) $\left(2x^3+3y\right)dx+\left(3x+y-1\right)dy=0$

2) $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

3) $\left(y\cos x+2xe^y\right)dx+\left(\sin x+x^2e^y-1\right)dy=0$

4) $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 xdy=0$

5) $\left(y^2-\frac{y}{x(x+y)}+2\right)dx+\left(\frac{1}{x+y}+2y(x+1)\right)dy=0$

6) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

7) נתונה המשוואה $\left(3x^2+ye^{xy}\right)dx+\left(2y^3+kxe^{xy}\right)dy=0$, כאשר k קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k, על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שנמצא בסעיף א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $0.5x^4+3yx+0.5y^2-y=c$

2) $e^{xy^2}+x^4-y^3=c$

3) $y\sin x+x^2e^y-y=c$

4) $x-\frac{y^2\cos 2x}{2}-\frac{y^2}{2}=c$

5) $\ln|x+y|+(x+1)y^2+2x-\ln|x|=c$

6) $x^2t^2-2x^3t+x^4=c$

7) $k=1,\ \ x^3+e^{xy}+\frac{y^4}{2}=c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גורם אינטגרציה

שאלות

1) הראו שהמשוואה $x^2y^3+x\left(1+y^2\right)y'=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

2) הראו שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0$
אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x.

3) הראו שהמשוואה $(x+2)\sin ydx+x\cos ydy=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x.

פתרו את המשוואות בשאלות **4-9**:

4) $\left(x^2+y^2+x\right)dx+\left(xy\right)dy=0$

5) $\left(x-x^2-y^2\right)dx+ydy=0$

6) $\left(2xy^3+y^4\right)dx+\left(xy^3-2\right)dy=0$

7) $\left(y^2-y\right)dx+xdy=0$

8) $\left(y-xy^2\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$

9) $y(1)=-1\ ;\quad y'=\frac{3yx^2}{x^3+2y^4}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונה מד"ר לא מדויקת $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{N}=f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{M}=g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $\left(y^4-4xy\right)dx+\left(2xy^3-3x^2\right)dy=0$.

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד.

כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

12) נתונה המשוואה $\left(5x^2+3y^3+2xy\right)dx+\left(3x^2+3xy^2+6y^3\right)dy=0$.

מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה

שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $\left(x^2y^3\right)dx+\left(x+xy^2\right)dy=0$.

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$.

כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu\left(x^\alpha y^\beta\right)$.

15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה $\left(y-xy^2\ln x\right)dx+xdy=0$.

16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה

שהוא פונקציה של $x+y$ בלבד.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $0.5x^2+\frac{y^{-2}}{-2}+\ln|y|=c$

2) $e^x\sin y+2y\cos x=c$

3) $\sin y\cdot e^x\cdot x^2=c$

4) $0.25x^4+0.5x^2y^2+\frac{x^3}{3}=c$

5) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-x=c$

6) $x^2+xy+\frac{1}{y^2}=c$

7) $x-\frac{x}{y}=c$

8) $-\ln x-\frac{1}{xy}+y=c$

9) $-\frac{x^3}{y}+\frac{2y^3}{3}=\frac{1}{3}$

10) שאלת הוכחה.

11) $\mu(xy)=(xy)^2$

12) $\mu(x+y)=(x+y)^2$

13) $\text{if: }\frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}=h\left(x/y\right)\quad\text{then: I.F.: }\mu=e^{\int\frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}}$

14) $\mu=\frac{1}{xy^3}$

15) א. $\text{if : }\frac{M_y-N_x}{yN-xM}=h(xy)\quad\text{then: I.F. : }\mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{yN-xM}}$ ב. $\mu=\frac{1}{x^2y^2}$

16) $\text{if : }\frac{M_y-N_x}{N-M}=h(x+y)\quad\text{then:I.F.: }\mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N-M}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1 $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$

2 $xy'=y+x^3+3x^2-2x$

3 $(x-2)y'=y+2(x-2)^3 \quad (x>2)$

4 $x^3y'+(2-3x^2)y=x^3 \quad (x>0)$

5 $\frac{dy}{dt}+y=2+2t \quad ; \quad y(0)=1$

6 $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x} \quad (\sin x>0)$

7 $y'-2y\cot x=1 \quad (\sin x>0)$

8 $x^2z'+2xz=\cos x \quad ; \quad z(\pi)=0$

9 $ydx=(2x+y^3)dy$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = 2 + C \cdot e^{-x^2}$

2) $y = x\left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x + C\right]$

3) $y = (x-2)\left[x^2 - 4x + C\right]$

4) $y = \frac{1}{2}x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}}$

5) $y = 2t + e^{-t}$

6) $y = \frac{1}{\sin x}\left[-5e^{\cos x} + C\right]$

7) $y = \sin^2 x\left[-\cot x + C\right]$

8) $z = \frac{\sin x}{x^2}$

9) $x(y) = y^2(y + c)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת ברנולי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $x^2y'+2xy-y^3=0$

2) $\left(x^2+1\right)y'-2xy-y^2=0$

3) $x\frac{dy}{dx}-2y=x^2y^{1/2}$

4) $y'-\left(\frac{1}{x}+5x^4\right)y=-x^3y^2 \quad ; \quad y(1)=2.5$

5) $z'-\cot x\cdot z=\frac{1}{\sin x}z^3 \qquad \left(\sin x\neq 0\right)$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x}+c\cdot x^4}}$

2) $y=\frac{x^2+1}{-x+C}$

3) $y=x^2\left(\frac{x}{2}+C\right)^2$

4) $y=\frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5}+e}$

5) $z=\pm\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x+C}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת ריקטי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y'=e^{2x}+\left(1+\frac{5}{2}e^{x}\right)y+y^{2}$

2) $y'=1+\left(x-y\right)^{2}$

3) $y'=1+x+2x^{2}\cos x-\left(1+4x\cos x\right)y+2y^{2}\cos x$

תשובות סופיות

1) $y\left(x\right)=-0.5e^{x}+\frac{e^{x}}{-\frac{2}{3}+Ce^{-1.5x}}$

2) $y\left(x\right)=x+\frac{1}{-x+C}$

3) $y\left(x\right)=x+\frac{1}{\cos x-\sin x+Ce^{x}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצבות שונות ומשונות

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y'=\cos(y-x)$

2) $y'=\frac{2y}{x}+\cos\left(\frac{y}{x^2}\right);\ y(1)=0$

3) $y'-x^2y+y^2=x-\frac{x^4}{4},\ y(0)=1$

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{\sin z}+c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin z}{1-\sin z}\right)$

3) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x+1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

1) נתונה הבעיה $y'=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+y}$, $y(2)=-1$.

א. הוכיחו ש-$y_2(x)=-\frac{1}{4}x^2$, $y_1(x)=-x+1$ הם פתרונות לבעיה.
קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

2) נתונה הבעיה $y'=\sqrt[3]{y}+4$, $y(0)=0$.

א. הוכיחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכיחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכיחו שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

3) פתרו את הבעיה $y'=\left(x^2+y^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+x^2\sin y$, $y(4)=0$.

4) נתונה הבעיה $y'=(y-1)\left(x^2+y\right)^5$, $y(0)=4$.

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

5) נתונה המד"ר $ydx=\left(2x+y^3\right)dy$.

א. הראו שעבור $x=x(y)$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון,
ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,
מהן נקודות ההתחלה (x_0,y_0), כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,
העובר דרך (x_0,y_0).
צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.
מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0,y_0)?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתונה בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו 3 קירובי פיקארד לפתרון הבעיה.

ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכיחו באינדוקציה).

ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $n \to \infty$.

7) כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = \frac{1}{x}|\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases}$ $(x > 0)$?

8) נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

9) נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

10) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

11) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

12) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.

2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

3) $y(x)=0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.

ב. כל נקודת התחלה (x_0,y_0), שעבורה $y_0\neq 0$.

הקטע הארוך ביותר: $(0,\infty)$ או $(-\infty,0)$.

6) א. $y_0(x)=1,\quad y_1(x)=1+x^2,\quad y_2(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!},\quad y_3(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}$

ב. $y_n(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}$ ג. הוכחה.

7) אחד.

8) א. $[-0.08,0.08]$ ב. $[-0.1,0.1]$ ג. הוכחה.

9) א. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ ב. $[-0.5,0.5]$ ג. הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

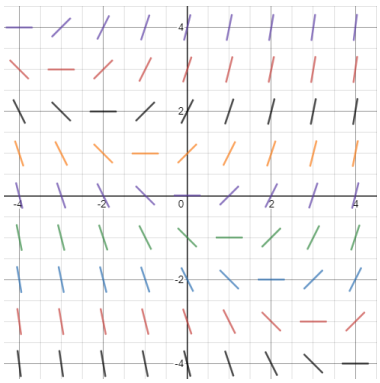
1) שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y'=2y-x$.

2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

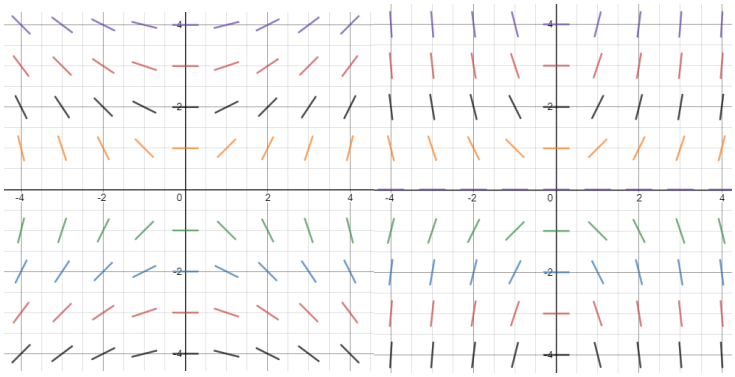
א. $y'=\frac{x}{y}$

ב. $y'=xy$

ג. $y'=x+y$



איור 1



איור 2

איור 3

3) נתונה המד"ר $y'=y-x$, $y(0)=2$.

מצאו בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.1$.

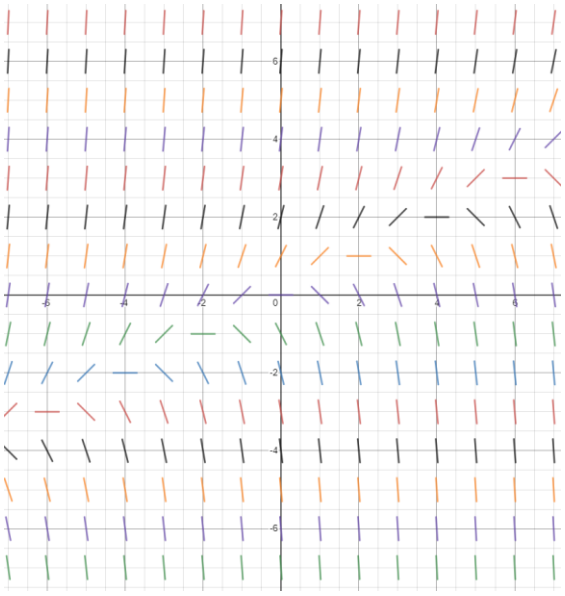
4) נתונה המד"ר $y'=x+y$, $y(1)=2$.

מצאו בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.2$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1)



2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

3) $y(1)=4.593$

4) $y(2)=6.95328$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $4x^2p^2 - 4x^2p - 2xy - y^2 = 0$ $\quad (p = y')$

2) $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$ $\quad (p = y')$

3) $xyp^2 + \left(x^2 + xy + y^2\right)p + x^2 + xy = 0$ $\quad (p = y')$

4) $y = 2px + p^4x^2$ $\quad (p = y')$

5) $xp^2 - 2yp + 4x = 0$ $\quad (p = y')$

6) $6p^2y^2 + 3px - y = 0$ $\quad (y > 0)$ $\quad (p = y')$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\left(y-2x-\sqrt{x}\cdot c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+\frac{1}{2}\ln|x|-c_2\right)=0$

2) $\left(\ln|y|-2\ln|x|-c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+3\ln|x|-c_2\right)=0$

3) $\left(y+0.5x-\frac{c_1}{x}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-c_2\right)=0,\ \ x>0$

4) $y=\pm 2\sqrt{cx}+c^2$

5) $y=\frac{1}{2}cx^2+\frac{2}{c}$

6) $6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2y^2+3\left(\frac{c}{y^2}\right)x-y=0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 5 - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה 49
2. משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים 51
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל" 53
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם" 55
5. וריאציית פרמטרים 57
6. משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משוואת אוילר ..... (ללא ספר)
7. משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל 58
8. הוורונסקיאן ושימושיו 59
9. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני 61
10. השיטה האופרטורית 62

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $(x \neq 0)\ \ x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x}$

2) $(\cos x \neq 0)\ \ y'' \tan x - 1 = y'$

3) $2xy'y'' - (y')^2 + 1 = 0$

4) $y'' x \ln x = y'$

5) $xy'' = x^2 e^x + y'$

6) $yy'' + (y')^2 = 0$

7) $2y''y - (y')^2 = 1$

8) $(\cos y \neq 0)\ \ y'' \tan y = 2(y')^2$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $y=\frac{1}{x}+C_1\cdot\ln x+C_2$

2 $y=-x+C_1\cdot\cos x+C_2$

3 $y=\pm\frac{2}{3C_1}\left(C_1x+1\right)^{3/2}+C_2;y=\pm x+C_3$

4 $y=C_1\left(x\ln x-x\right)+C_2;y=C_3$

5 $y=e^x\left(x-1\right)+C_1\frac{x^2}{2}+C_2$

6 $\frac{y^2}{2}=cx+k\ \ ;\ \ y=c$

7 $y=\frac{1}{c}\left[\frac{c^2\left(x+k\right)^1}{4}+1\right]$

8 $\cot y=-\left(cx+k\right)\ \ ;\ \ y=c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-11**:

1) $y''-100y=0$

2) $y''-4y'=0$

3) $y''-8y'+7y=0$

4) $z(0)=1\,,\ z'(0)=1,\ 4z''+z'-5z=0$

5) $y''-2y'+y=0$

6) $4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+4\frac{\partial x}{\partial t}+x(t)=0$

7) $y''+4y=0$

8) $y''+10y'+125y=0$

9) $y(0)=0,\ \ y'(0)=3\,;\ y''-2y'+10y=0$

10) $5y''+8y'+4y=0$

11)
$$\begin{cases} y''(x)-\frac{1}{a^2}y(x)=0 & (a>0) \\ y(0)=4 \\ y(\infty)=y(-\infty)=0 \end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) נתונה המד"ר $yy''+(y')^2=0$.

א. הראו כי $y_1=4$ ו- $y_2=\sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראו כי הפתרון $z(x)=y_1(x)+y_2(x)$, אינו פתרון של המד"ר.
האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{10x}+c_2e^{-10x}$

2) $y=c_1+c_2e^{4x}$

3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{7x}$

4) $z=e^{x}$

5) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$

6) $x(t)=c_1e^{\frac{-t}{2}}+c_2te^{\frac{-t}{2}}$

7) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

8) $y=e^{-5x}\left[c_1\cos 10x+c_2\sin 10x\right]$

9) $y=e^{2}\sin 3x$

10) $y=e^{\frac{-4x}{5}}\left[c_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+c_2\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\right]$

11) $y=4e^{-\frac{|x|}{a}}$

12) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ y'(0)=7;\quad y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''-3y'+2y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$

8) $y''+3y'=9x$

9) $y''-3y'+2y=e^x$

10) $y''-2y'=6x^2-2x$

11) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2$

2) $y = e^x + 4xe^x + e^{2x}$

3) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$

5) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + \frac{3}{10}e^{2x}\cos x + \frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x\cos x$

7) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x}$

8) $y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$

9) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} - xe^x$

10) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3$

11) $x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2}\cdot e^{-t} + te^{-2t}$

12) $y = e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ y'(0)=7;\quad y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''+3y'=9x$

8) $y''-3y'+2y=e^{x}$

9) $y''-2y'=6x^2-2x$

10) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

11) $y''-3y'+2y=2x^2+e^{x}+2xe^{x}+4e^{3x}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x} + x^2 + 2x - 2$

2 $y = e^x + 4xe^x + e^{2x}$

3 $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x$

4 $y = c_1e^{-\sqrt{2}x} + c_2e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$

5 $y = c_1e^{-x} + c_2e^{x} + \frac{3}{10}e^{2x}\cos x + \frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6 $z = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$

7 $y = c_1 + c_2e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$

8 $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} - xe^{x}$

9 $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x} - x^2 - x - x^3$

10 $x = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t} + \frac{1}{2}\cdot e^{-t} + te^{-2t}$

11 $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2e^{x} - 3xe^{x} + 2e^{3x}$

12 $y = e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

וריאציית פרמטרים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+y=\frac{1}{\sin x}$

2) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$

3) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$

4) $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}\quad ;\quad y(1)=0\,,\ y'(1)=0$

5) $y''-3y'+2y=\frac{1}{1+e^{-x}}$

6) $y''+4y=\sec 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\cdot x+\sin x\cdot\ln|\sin x|$

2) $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\frac{x^2}{2}\left[\ln x-\frac{1}{2}\right]+x^2e^{-2x}\left[\ln x-1\right]$

3) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-e^{-x}\left[\frac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^5}{5}-\frac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}\right]+xe^{-x}\left[2\left(x+1\right)^{3/2}\right]$

4) $y=e^x-xe^x+xe^x\ln x\quad (x>0)$

5) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+e^x\ln\left(1+e^{-x}\right)+e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(1+e^{-x}\right)\right]$

6) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\sin 2x\cdot x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

שאלות

1) פתרו $y''+\tan x\cdot y'-(2\tan x+4)y=0$, כאשר ידוע $y_1(x)=e^{2x}$.

2) פתרו $(1-x^2)y''+2xy'-2y=0$.

3) הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$(1-x)y''+x\cdot y'-y=2(1-x)^2e^{-x},\quad (0<x<1),$$

כאשר ידוע ש- $y_1(x)=e^x$, פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}(\sin x-4\cos x)$

2) $y=c_1x+c_2(x^2+1)$

3) שאלת הדגמה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

1) האם ייתכן כי $y_1(x)=e^x,\ \ y_2(x)=\sin x$, הם שני פתרונות של המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, עם מקדמים רציפים בקטע $[0,\pi]$?

2) הראו כי הפונקציות $y_1(x)=\sin x^2,\ \ y_2(x)=\cos x^2$ הן פתרונות בת"ל של המשוואה $xy''-y'+4x^3y=0$, בקטע $(-4,\infty)$.
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x=0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?

3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x)=xe^x,\ \ y_2(x)=e^{-x}$,
הן פתרונות של המשוואה $y''-\frac{2}{1+2x}y'-\frac{2x+3}{1+2x}y=0$, בקטע $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?

4) נתונות שתי פונקציות $y_1=x^3$, $y_2=\left|x^3\right|$, בקטע $[-4,4]$.

א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.

ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.

ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?

ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר $xy''-2y'=0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I ,
ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I .
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$ הם פתרונות שלה.

ב. רשמו משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x>0$,
שהפונקציות $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=x^4$ הן פתרונות שלה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתון כי $y_1(x),\ y_2(x)$, הם פתרונות של המד"ר $y''(x)+p(x)y'+q(x)=0$,
בקטע I , כאשר p,q רציפות בקטע I .
הראו כי אם קיימת נקודה c בקטע I , שעבורה $y_1(c)=y_2(c)=0$,
אז $\{y_1(x),y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

תשובות סופיות

1) לא.

2) $W=-2x$

3) כן.

4) א. $W=0$ ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.

5) א. שאלת הוכחה . ב. $y''-\frac{5}{x}y'+\frac{8}{x^2}y=0$

6) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

שאלות

1) נתונה המשוואה $y''-4y=12x$.

א. פתרו את המשוואה.

ב. מצאו פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=11 \end{cases}$.

ג. נסו למצוא פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=4 \\ y'(0)=2 \\ y''(0)=1 \end{cases}$.

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תנו דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0)=1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

2) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''-2xy'+2y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$.

הראו כי $y_1(x)=0$ ו- $y_2(x)=x^2$, הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x=0$, כך שהפונקציות $y=4x$ ו- $y=\sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות

1) א. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-3x$ ב. $y=4e^{2x}-3e^{-2x}-3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

השיטה האופרטורית

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

בשאלות אלו הסימון הוא: $ay''+by'+cy=Q(x) \Leftrightarrow \left(aD^2+bD+c\right)y=Q(x)$.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1 $\left(D^2-D-2\right)y=4e^{-2x}+10e^{x}+11$

2 $\left(D^2-2D+1\right)y=10e^{4x}+e^{x}-1$

3 $\left(D^2+D-2\right)y=4e^{x}+e^{10x}+14$

4 $\left(D^2+4\right)y=\sin 5x$

5 $\left(D^2-4\right)y=\sin x\cos x\cos 2x$

6 $\left(D^2+D-2\right)y=\cos x-3\sin x$

7 $\left(D^2+2D-3\right)y=2\cos x\cos 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^{x} - 5.5$

2) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^{x} - 1$

3) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} - 4x e^{x} + \frac{1}{72} e^{10x} + 7$

4) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x$

5) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x$

6) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + \sin x$

7) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 6 - משוואות ליניאריות מסדר n

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה מסדר שלישי 64
2. משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים 65
3. שיטת השוואת מקדמים 68
4. שיטת וריאציית הפרמטרים 70
5. משוואת אוילר מסדר שלישי ..... (ללא ספר)
6. הוורונסקיאן ושימושיו 71
7. השיטה האופרטורית 72

משוואה חסרה מסדר שלישי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y'y'''-(y'')^2-3y''(y')^2-4(y')^4=-16y(y')^3$,
עם תנאי ההתחלה $y(0)=0,\ y'(0)=-3,\ y''(0)=-12$.

2)
$$\begin{cases} y'''-\dfrac{(y'')^2}{y'}=y''y'-2(y')^2y \\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=2 \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} y'''-\dfrac{(y'')^2}{y'}=y''y'-2(y')^2y \\ y(0)=-1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=0 \end{cases}$$

4)
$$3y'''y-y'y''=0$$
$$y(1)=1,\ y'(1)=3,\ y''(1)=6$$

5)
$$\left(y'y'''-2(y'')^2\right)y^2=-(y')^4$$
$$y>0$$
$$y(1)=y'(1)=y''(1)=1$$

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}\ln\left|-3+4y\right|=x+\frac{1}{4}\ln 3$

2) $y=\frac{1}{1-x}-1$

3) $y=\tan x-1$

4) $y=x^3$

5) $y=e^{x-1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-15**:

1) $y'''-2y''-3y'=0$

2) $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=0$

3) $y'''-2y''-y'+2y=0$

4) $y^{(4)}-5y''+4y=0$

5) $y^{(4)}-y=0$

6) $\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+20y=0$

7) $y^{(4)}+y=0$

8) $y^{(6)}-y''=0$

9) $\left(D^5+3D^4+2D^3-2D^2-3D-1\right)y=0$

10) $y^{(8)}+8y^{(4)}+16y=0$

11) $z'''-6z''+12z'-8z=0$

12) $y^{(4)}-4y=0$

13) $x^{(6)}-3x^{(4)}+3x''-x=0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14)
$$\begin{cases} y'''-y''+y'-y=0 \\ y(0)=3 \\ y'(0)=4 \\ y''(0)=-1 \end{cases}$$

15)
$$\begin{cases} y''''-3y'''+6y''-12y'+8y=0 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=5 \\ y''(0)=-19 \\ y'''(0)=-47 \end{cases}$$

16) נתונה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6, אשר אחד הפתרונות שלה הוא $x^2e^x\cos 2x$.

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה.

ב. מצאו את המשוואה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}$

2) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x}$

3) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$

4) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$

5) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + e^{0x}\left[c_3 \cos x + c_4 \sin x\right]$

6) $y = c_1 e^{-4x} + e^{x}\left[c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x\right]$

7) $y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_3 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$

8) $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x} + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x$

9) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x}$

10) $y = e^{x}\left[c_1 \cos x + c_2 \sin x\right] + xe^{x}\left[c_3 \cos x + c_4 \sin x\right] + \\ + e^{-x}\left[c_5 \cos x + c_6 \sin x\right] + xe^{-x}\left[c_7 \cos x + c_8 \sin x\right]$

11) $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}$

12) $y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos\sqrt{2}x + c_4 \sin\sqrt{2}x$

13) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 x^2 e^{x} + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x}$

14) $y = e^{x} + 2\cos x + 3\sin x$

15) $y = e^{x} - 2e^{2x} + 3\cos 2x + 4\sin 2x$

16) א. $y = e^{x}\left[c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right] + xe^{x}\left[c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x\right] + \\ + x^2 e^{x}\left[c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x\right]$

ב. $y'''''' - 6y''''' + 27y'''' - 68y''' + 135y'' - 150y' + 125y = 0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שיטת השוואת מקדמים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y'''-2y''-3y'=2\sin x-4\cos x$

2) $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=-28e^{2x}$

3) $y'''-2y''-y'+2y=2x^3-3x^2-12x+14$

4) $y'''-3y'+2y=e^x$

5) $y'''-y''+y'-y=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

6) $\begin{cases} y'''-y'=4e^{-x}+3e^{2x} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=-1 \\ y''(0)=2 \end{cases}$

7) $y^{(4)}+y''=3x^2+4\sin x-2\cos x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x$

2) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x}$

3) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + x^3 + 4$

4) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^{x}$

5) $y = c_1 e^{x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x\left(\cos x - \sin x\right)$

6) $y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x}$

7) $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שיטת וריאציית הפרמטרים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y'''+y'=\frac{1}{\cos x}$

2) $y'''-3y''+2y'=\frac{e^x}{1+e^{-x}}$

3) $y'''-3y''+3y'-y=\frac{e^x}{x}$

תשובות סופיות

1) $y=c_1+c_2\cdot\cos x+c_3\cdot\sin x+\ln\left|\tan x+\frac{1}{\cos x}\right|-x\cos x+\sin x\ln\left|\cos x\right|$

2) $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}+$
$+\frac{1}{2}\left(e^x+1-\ln\left(e^x+1\right)\right)+e^x\left(-\ln\left(e^x+1\right)\right)+e^{2x}\left(-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)$

3) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x-\frac{3}{4}x^2e^x+\frac{1}{2}x^2e^x\ln\left|x\right|$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

1) האם קיימת מד"ר מהצורה $y'''+p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=0$,
בעלת מקדמים רציפים בקטע $[-1,1]$,
כך שהפונקציות $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x^2$, $y_3(x)=x^3$ הן פתרונות שלה?

2) נתונות הפונקציות $y_1(x)=4-x,\ y_2(x)=4+x,\ y_3(x)=20+x$.

א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות.

ב. קבעו האם הפונקציות תלויות בקטע $(-\infty,\infty)$.

ג. ענו שוב על סעיף ב', בידיעה ששלוש הפונקציות הן פתרון של המד"ר $y''=0$.

3) פתרו את הסעיפים הבאים:

א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ פונקציות גזירות ברציפות שלוש פעמים בקטע I, ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I.
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 3, בעלת מקדמים רציפים בקטע I, כך ש-$y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ הם פתרונות שלה.

ב. רשמו משוואה לינארית, הומוגנית, מסדר שלישי, עם מקדמים רציפים, שהפונקציות $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x^2$, $y_3(x)=x^3$ הן פתרונות שלה.

תשובות סופיות

1) לא. הפונקציות מתאפסות רק בנקודה אחת $x=0$.

2) א. $W=0$ ב. הפונקציות תלויות. ג. הפונקציות תלויות.

3) א. שאלת הוכחה. ב. $x\neq 0$, $y'''-\frac{3}{x}y''+\frac{6}{x^2}y'-\frac{6}{x^3}y=0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

השיטה האופרטורית

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1 $\left(D^3-2D^2-3D\right)y=4e^x-10e^{-2x}$

2 $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=10e^{4x}+2e^x-1$

3 $\left(D^4-6D^3+13D^2-12D+4\right)y=10e^x+4e^{2x}$

4 $\left(D^5-8D^4+22D^3-28D^2+17D-4\right)y=24e^x+81e^{4x}$

5 $\left(D^6+D^4+D^2\right)y=104\sin\left(2x+1\right)+\cos\left(x+10\right)$

6 $\left(D^5-8D^4+22D^3-28D^2+17D-4\right)y=-5\sin 2x$

7 $\left(D^4-3D^3+6D^2-12D+8\right)y=30\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+48\cos^2 x-16$

תשובות סופיות

1 $y=c_1e^{0x}+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}-e^x+e^{-2x}$

2 $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-5x}+\frac{5}{81}e^{4x}-\frac{1}{18}xe^x-\frac{1}{30}$

3 $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{2x}+c_4xe^{2x}+5x^2e^x+2x^2e^{2x}$

4 $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+c_4x^3e^x+c_5e^{4x}-\frac{1}{3}x^4e^x+xe^{4x}$

5 $y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}+c_5e^{3x}+c_6e^{-3x}-2\sin\left(2x+1\right)-\cos\left(x+10\right)$

6 $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+c_4x^3e^x+c_5e^{4x}+\frac{1}{500}\left[4\sin 2x-22\cos 2x\right]$

7 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x+\frac{5\sin x+25\cos x}{26}+\frac{-3\cos 2x-18\sin 2x}{37}+1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 7 - מערכת משוואות לינאריות

תוכן העניינים

1. חזרה מאלגברה לינארית - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים 73

2. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת הלכסון 75

3. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת וריאציית הפרמטרים 80

4. מערכת משוואות כללית - שיטת ההצבה 82

חזרה מאלגברה לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

שאלות

בשאלות הבאות מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של A :

1) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}1&-1&4\\3&2&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}$

7) $A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-1\end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $x=0,\ x=1,\ x=2,\ v_{x=0}=(-1,0,1),\ v_{x=1}=(0,1,0),\ v_{x=2}=(1,0,1)$

2) $x=6,\ x=2,\ x=-4,\ v_{x=6}=(0,0,1),\ v_{x=2}(1,1,1),\ v_{x=-4}=(-1,1,0)$

3) $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=3,\ v_{x=2}=(1,1,1),\ v_{x=3}^{(1)}=(1,0,1)\ x_{x=3}^{(2)}=(1,1,0)$

4) $x=1,\ x=3,\ x=-2,\ v_{x=1}=(-1,4,1),\ v_{x=3}=(1,2,1),\ v_{x=-2}=(-1,1,1)$

5) $x=1,\ x=4,\ x=-1,\ v_{x=1}=(1,-2,1),\ v_{x=4}=(1,1,1),\ v_{x=-1}=(-1,0,1)$

6) $x=-1,\ x=3\quad v_{x=-1}=(-1,2),\ v_{x=3}=(1,2)$

7) $x_{1,2}=1\pm 2i,\ v_{x=1+2i}=(1+i,2),\ v_{x=1-2i}=(1-i,2)$

8) $x=1,\ x=1+\sqrt{3}i,\ x=1-\sqrt{3}i,\ v_{x=1}=(1,1,1)$,
$v_{x=1+\sqrt{3}i}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right),\ v_{x=1-\sqrt{3}i}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלכסון

שאלות

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות **1-2**:

1) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

2) $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

3) נתון $\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\\z'(t)\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$, כך ש- $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$.

הוכיחו כי $z(t)=y(t)$.

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות **4-5**:

4) $\begin{cases}x'=x-y+4z\\y'=3x+2y-z\\z'=2x+y-z\end{cases}$

5) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

6) נתון $\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$, כך ש- $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$.

חשבו: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)}+\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) פתרו את מערכת המשוואות: $\begin{cases} y_1'+5y_1-2y_2'=0 \\ 3y_2'-4y_1'-5y_2=0 \end{cases}$.

8) פתרו: $\vec{x}'(t)=A\cdot\vec{x}(t)$, כאשר $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

הערה: בשאלות **7** ו-**8** יש להגיע לפתרון המרוכב מהפתרון ממשי.

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות **9-14**:
(שימו לב שכל המערכות <u>אינן</u> ניתנות ללכסון)

9) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

10) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

11) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

12) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

13) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

14) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) דני פתר את המערכת $x'(t)=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&2&6\\-1&-1&-3\end{pmatrix}x(t)$,

וקיבל $x(t)=c_1e^{-1t}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2{}^{0t}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{0t}\left[t\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right]$.

נתון תנאי התחלה: $x(0)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

עבור אילו ערכים של הקבועים הממשיים, a,b,c, הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה הנתון יהיה חסום לכל t ממשי?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $$\underline{x}(t)=c_1e^{0t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{1t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

2) $$\underline{x}(t)=e^{6t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+3e^{-4t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

3) $$z(t)=y(t)$$

4) $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

5) $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

6) 0

7) $$\underline{x}(t)=c_1e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\sin 2t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]+c_2e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sin 2t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]$$

8) $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{t}\left[\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}-\sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\right]+$$
$$+c_3e^{t}\left[\sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\right]$$

9) $$\underline{x}(t)=c_1e^{0t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{t}\begin{pmatrix}t+1\\t+1\\t\end{pmatrix}$$

10) $$\underline{x}(t)=c_1e^{-5t}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-2t+1\\2t-1\\t\end{pmatrix}$$

11) $$\underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\t\end{pmatrix}+c_3e^{t}\begin{pmatrix}1\\t-1\\0.5t^2\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\underline{x}(t)=c_1e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}2t-1\\t\\t\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{bmatrix}t^2-t+2\\\frac{t^2}{2}+1\\\frac{t^2}{2}\end{bmatrix} \quad (12$$

$$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{1t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\t\end{pmatrix}+c_3e^{1t}\begin{pmatrix}0\\1\\t-1\\\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}+c_4e^{1t}\begin{pmatrix}1\\t-2\\\frac{t^2}{2}-t+1\\\frac{t^3}{6}\end{pmatrix} \quad (13$$

$$\underline{x}(t)=c_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{pmatrix}-2t+1\\-4t\\-2t\end{pmatrix} \quad (14$$

$$a=-c,\quad b=2a \quad (15$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים

שאלות

פתרו את מערכת המשוואות בשאלות **1-4**:

1) $\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + 2e^{-t} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 + 4e^{-t} \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + e^{at} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 - 2e^{at} \end{aligned}$ (a קבוע)

3) $\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{aligned} x' &= x + y + 2z + e^t \\ y' &= x + 2y + z \\ z' &= 2x + y + z + e^t \end{aligned}$

5) המירו את המשוואה $y''' + y'' - 2y = t^2$,
במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

6) פתרו את מערכת המשוואות: $\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 8t+3 \\ -3t+3 \\ t+3 \end{pmatrix}$.

7) נתונה המד"ר $e^{-x} y''''(x) - y''(x) + e^x x^2 y'(x) = 5e^{-x}$.
רשמו את המד"ר כמערכת משוואות ליניאריות מסדר ראשון,
בהצגה מטריציונית.

8) נתונה המד"ר $x^2 y''(x) + 10xy'(x) + (1 + 4x^2) y(x) = \ln x$.
רשמו את המד"ר כמערכת משוואות ליניאריות מסדר ראשון,
בהצגה מטריציונית.

הערה: בשאלות **7** ו-**8** המערכת המתקבלת היא לא עם מקדמים קבועים.
יחד עם זאת, הדרישה היא רק להציג את המערכת ולא לפתור אותה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix}$

2) עבור $a=-1$ נקבל: $\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}te^{-t}\\-2e^{-t}\end{pmatrix}$

עבור $a\neq 1$ נקבל: $\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{1+a}\begin{pmatrix}e^{at}\\-2e^{at}\end{pmatrix}$

3) $\underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+(3t+2)\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}-(3t+1)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+(-3t+1)\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

4) $\underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{3}te^{t}\right)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{2}{9}e^{t}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\t^2\end{pmatrix}$

6) $\underline{x}(t)=c_1\begin{pmatrix}-2e^{-5t}\\e^{-5t}\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2e^{-t}\\2e^{-t}\\e^{-t}\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}(-2t+1)e^{-t}\\(2t-1)e^{-t}\\te^{-t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\t\\t-1\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&-e^{2t}t^2&e^{t}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\5\end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-\left(\frac{1}{t^2}+4\right)&-\frac{10}{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{\ln t}{t^2}\end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מערכת משוואות כללית – שיטת ההצבה

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y''+2z'=e^{3x} \\ y'-z''+3z=x^2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y''+z'=e^{-2x} \\ y+z=\sin x \end{cases}$, בהינתן $z(0)=y(0)=y'(0)=0$.

3) $\begin{cases} x'=4x-2y+e^t \\ y'=6x-3y+e^{-t} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1'=x_1+x_2+\sin 2t \\ x_2'=x_1+x_2+\cos 2t \end{cases}$

5) $\begin{cases} z''-3z'+2z+y'-y=0 \\ z'-2z+y'+y=0 \end{cases}$

תשובות סופיות

1) $z=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}+\frac{1}{24}e^{3x}+x^2$, $y=\frac{1}{12}e^{3x}-\frac{2}{3}x^3-2c_2e^x+2c_3e^{-x}+kx+l$

2) $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^x-\frac{1}{6}e^{-2x}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$, $y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}e^x+\frac{1}{6}e^{-2x}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$

3) $x=c_1+c_2e^t+4te^t-e^{-t}$, $y=2c_1+\frac{3}{2}c_2e^t+6te^t-\frac{3}{2}e^t-\frac{5}{2}e^{-t}$

4) $x_1=c_1+c_2e^{2t}-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{4}\sin 2t$, $x_2=-c_1+c_2e^{2t}+\frac{1}{4}\sin 2t$

5) $z=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}$, $y=2c_1+\frac{1}{2}c_2e^x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 8 - פתרון משוואות ליניאריות באמצעות טורים

תוכן העניינים

1. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית 83
2. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית-סינגולרית 85
3. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות 87

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות לטורי מקלורן של פונקציות חשובות.

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-7** על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=0$.
במיוחד, רשמו נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי,
וציינו את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.

תזכורת: טור חזקות סביב $x=0$ שקול לטור טיילור סביב $x=0$ ושקול לטור מקלורן.

1) $y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2 \qquad y(0)=3,\quad y'(0)=12;$

2) $y''-xy=0 \quad ; \quad y(0)=1,\ y'(0)=2$

3) $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0$

4) $\left(x^2+4\right)y''+xy=x+2$

5) $y''+\left(x-1\right)y'+\left(2x-3\right)y=0$

6) $y''+ty=e^{t+1} \qquad y(0)=a_0=1,\quad y'(0)=a_1=2;$

7) $y''+\left(t-1\right)y'+\left(2t-3\right)y=0$ (השתמש בפתרון בסימן $\sum$)

8) פתרו את המשוואה $y''(x)+(x-1)y(x)=e^x \quad ; \quad y(1)=1\,,\ y'(1)=2\,,$
על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=1$.

9) פתרו את המשוואה $y''+xy'+(2x-1)y=0 \quad ; \quad y(-1)=2,\quad y'(-1)=-2\,.$

רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב $x=-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $a_n=\frac{2n-10}{(n-1)n}a_{n-3}\ (n\geq 5)\quad,\quad y=3+12x+x^2-\frac{5}{3}x^3-\frac{23}{12}x^4+\ldots+a_nx^n\ldots$

2 $a_n=\frac{1}{(n-1)n}a_{n-3}\ (n\geq 3)\quad,\quad y=1+2x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$.

3 $a_n=\frac{n-3}{n-1}a_{n-2}\quad (n\geq 2)\quad,\quad y=a_0+a_1x+-a_0x^2+0x^3-\frac{1}{3}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$

4
$$y=a_0+a_1x+\frac{1}{4}x^2+\left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3+\left(\frac{-1}{48}a_1-\frac{1}{96}\right)x^4+\ldots+a_nx^n$$
$$a_n=\frac{-1}{4(n-1)n}a_{n-3}-\frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n}a_{n-2}\ ,\ (n\geq 4)$$

5
$$y=a_0+a_1x+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)x^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)x^3+\frac{1}{6}a_0x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\geq 3)$$

6
$$y(t)=1+2t+\frac{e}{2}t^2+\frac{e-1}{6}t^3+\frac{e-4}{24}t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{e}{n(n-1)(n-2)!}-\frac{a_{n-3}}{n(n-1)}\quad (n\geq 3)$$

7
$$y=a_0+a_1t+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_0\right)t^2+\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{6}a_0\right)t^3+\frac{1}{6}a_0t^4+\ldots+a_nt^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\geq 3)$$

8
$$y=1+2(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\frac{e-1}{6}(x-1)^3+\frac{e-4}{24}(x-1)^4+\ldots+a_n(x-1)^n+\ldots$$
$$a_n=\frac{e-a_{n-3}(n-2)!}{n!}\quad (n\geq 3)$$

9
$$y=2-2(x+1)+2(x+1)^2-\frac{2}{3}(x+1)^3+\frac{1}{3}(x+1)^4+\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2}-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-3}\quad (n\geq 3)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית

שאלות

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראו שהנקודה היא נקודה סינגולרית רגולרית, ופתרו את המשוואה על ידי פיתוח המשוואה לטור חזקות בסביבות הנקודה.

1) $3x^2y''+2xy'+x^2y=0$

2) $2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$

3) $2x^2y''-xy'+(x-5)y=0$

4) $3x^2y''-xy'+y=0$

5) $x^2y''+xy'+x^2y=0$

6) $x^2y''-xy'+y=0$

7) $x^2y''+x(x+2)y'-2y=0$

8) $x^2y''+x(x-2)y'+2y=0$

הערות

בשאלות **2-5**, הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרשם אינו מספר שלם.
בשאלות **6** ו-**7** הפתרונות שווים, ובשאלות **8** ו-**9** הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y=k_1x^{1/3}\left(1-\frac{1}{14}x^2+\frac{1}{728}x^4+\ldots\right)+k_2\left(1-\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{440}x^4+\ldots\right)$

2) $y=k_1x^{1/2}\left(1-\frac{7}{18}x^1+\frac{147}{792}x^2+\ldots\right)+k_2x^{-3}\left(1-\frac{21}{5}x^1+\frac{49}{5}x^2-\frac{343}{15}x^3\right)$

3) $y=k_1x^{-1}\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{30}x^2+\frac{1}{90}x^3+\ldots\right)+k_2x^{2.5}\left(1-\frac{1}{9}x+\frac{1}{198}x^2-\frac{1}{7722}x^3+\ldots\right)$

4) $y=k_1x+k_2x^{1/3}$

5) $y=k_1\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\ldots\right)+$
$+k_2\left[\ln x\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\ldots\right)+\left(\frac{2}{2^3}x^2+\frac{-12}{4^3\cdot 2^3}x^4+\ldots\right)\right]$

6) $y(x)=k_1x+k_2x\ln x$

7) $y(x)=\frac{k_1}{x^2}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-e^{-x}\right)+\frac{k_2}{x^2}e^{-x}$

8) $y=-a_0x^2\ln x\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\ldots\right)+a_0x\left(1-x^2-\frac{3}{4}x^3+\ldots\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$	$-1<x\le 1$
$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$	$-1\le x\le 1$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\ldots$	$-1<x<1$
$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ $=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$	$-1\le x\le 1\ (m>0)$ $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ $-1<x<1\ (m\le -1)$ $m\ne 0,1,2,3,\ldots$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 9 - התמרת לפלס

תוכן העניינים

1. התמרת לפלס 88
2. התמרת לפלס ההפוכה 91
3. פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס 95
4. נוסחאות - התמרת לפלס 97

התמרת לפלס

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות להתמרת לפלס.

שאלות

חשבו את התמרות לפלס בשאלות **1-12** בעזרת טבלת התמרות לפלס:

1) $L\left(t^2+4t-2\right)$

2) $L\left(\frac{1}{2}t^4+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}+1\right)$

3) $L\left(e^{-4t}+10e^{2t}\right)$

4) $L\left(\cosh 4t\right)$

5) $L\left(\sinh 10t\right)$

6) $L\left(\sin 2t\cos 2t\right)$

7) $L\left(\sin 2t\cos 3t\right)$

8) $L\left(\sin^2 t\right)$

9) $L\left(\cos^2 4t\right)$

10) $L\left(t^2\sin 4t\right)$

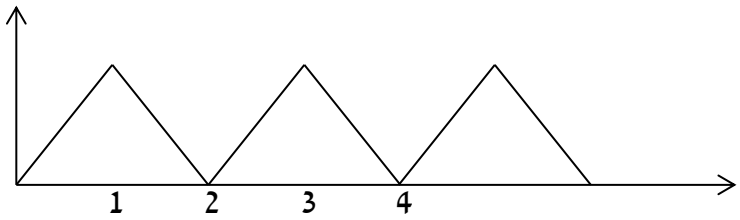
11) $L\left(t^4e^{2t}\right)$

12) $L\left(e^{2t}\sin 4t\right)$

13) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases}t & 0<t\le 1\\ 1 & t>1\end{cases}$.

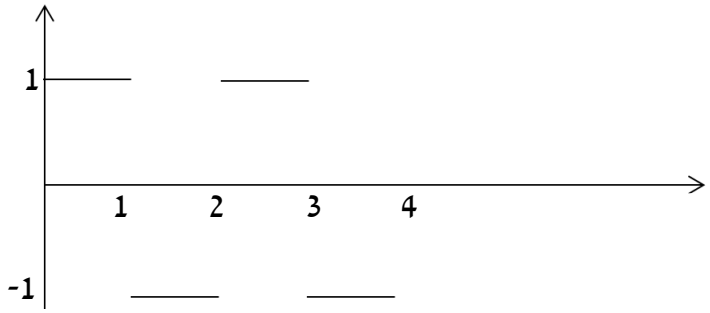
14) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases}t & 0<t\le 1\\ 2-t & 1<t\end{cases}$.

15) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:

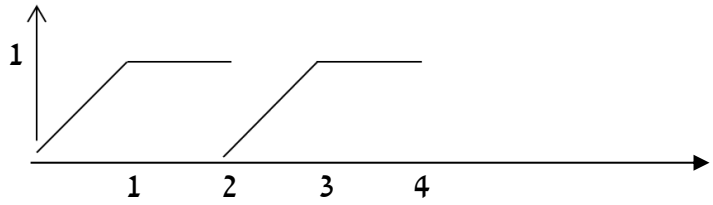


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



17) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



18) הגדירו ושרטט את פונקציית המדרגה $u(t)$ ואת ההזזה שלה $u(t-k)$.

19) שרטטו את הפונקציה $f(t)=u(t-2)-u(t-3)$, כאשר $u(t)$ פונקציית המדרגה.

20) רשמו את הפונקציה $f(t)=\begin{cases}0 & t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$, בעזרת פונקציית המדרגה.

21) רשמו את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה $u(t)$,
של הפונקציה $u(t-k)$, ושל הפונקציה $f(t-k)u(t-k)$.

22) חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ (t-4)^2 & t\ge 4\end{cases}$.

23) חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ t^2 & t\ge 4\end{cases}$.

24) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו ושרטטו את פונקציית הדלתא $\delta(t)$.

ב. מהי התמרת לפלס של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה $\delta(t-a)$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}-\frac{2}{s}$

2) $\frac{12}{s^5}+s^{-3/2}+\frac{1}{s}$

3) $\frac{1}{s+4}+10\frac{1}{s-2}$

4) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-4}+\frac{1}{s+4}\right]$

5) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-10}-\frac{1}{s+10}\right]$

6) $\frac{1}{2}\frac{4}{s^2+16}$

7) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{s^2+25}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}$

8) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}$

9) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+64}$

10) $\frac{8\left(3s^2-16\right)}{\left(s^2+16\right)^3}$

11) $\frac{24}{(s-2)^5}$

12) $\frac{4}{(s-2)^2+16}$

13) $\frac{1-e^{-s}}{s^2}$

14) $\frac{1-2e^{-s}}{s^2}$

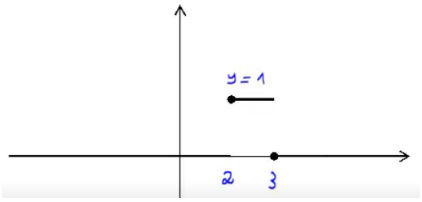
15) $\frac{1-2e^{-s}+e^{-2}}{s^2\left(1-e^{-2s}\right)}$

16) $\frac{1-e^{-s}}{s\left(1+e^{-s}\right)}$

17) $\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$

18) $u(t-k)=\begin{cases}0 & t<k\\ 1 & t\geq k\end{cases}$

19)



20) $f(t)=\begin{cases}0 & t\leq\\ 1 & t>4\end{cases}=u(t-4)$

21) $L=\left(u(t-k)\,f(t-k)\right)=e^{-ks}L\left(f(t)\right)$

22) א. $L\left((t-4)^2\cdot u(t-4)\right)=\frac{2e^{-4s}}{s^3}$

23) $e^{-4s}L\left(t^2\right)+8e^{-4t}L(t)+16\frac{e^{-4s}}{s}$

24) $L\left[\delta(t-2\pi)\right]=e^{-2\pi s}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

התמרת לפלס ההפוכה

שאלות

חשבו את ההתמרות בשאלות **1-29**:

1) $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

2) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right)$

3) $L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right)$

4) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$

5) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$

6) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right)$

7) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right)$

8) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right)$

9) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right)$

10) $L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$

11) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)$

12) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right)$

13) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right)$

14) $L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right)$

15) $L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right)$

16) $L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right)$

17) $L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right)$

18) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right)$

19) $L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right)$

20) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2-4s+4)}\right)$

21) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right)$

22) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)$

23) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right)$

24) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

25) $L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$

26) $L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right)$

27) $L^{-1}\left(\frac{3}{s}-\frac{4e^{-s}}{s^2}+\frac{4e^{-3s}}{s^2}\right)$

28) $L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1}+\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right)$

29) $L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right)$

*בשאלה **27** כתבו את התוצאה בצורה מפורטת ושרטטו אותה.

30) נתון $F(s)=\frac{e^{-s}+2}{s}$.

חשבו את $f(0)$ ו-$f(\infty)$, כאשר $f(t)=L^{-1}(F(s))$.

פתרו בשתי דרכים שונות.

הערה: $f(0)=\lim_{t\to 0} f(t)$, $f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)$.

31) הסבירו והדגימו את משפט הקונוולוציה.

השתמשו במשפט הקונוולוציה כדי לחשב את התרגילים הבאים:

32) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-1)}\right)$

33) $L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right)$

34) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right)$

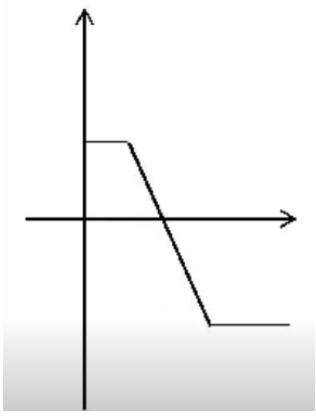
35) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 1
2) $\frac{t^3}{3!}$
3) e^{10t}
4) $\frac{1}{3}\sin 2t$
5) $\cos 2t$
6) $e^{10t}\frac{1}{2}\sin 2t$
7) $e^{2t}\left\{\cos 2t+2\frac{1}{2}\sin 2t\right\}$
8) $\frac{1}{4}t\sin 2t$
9) $\frac{1}{4}t\sin 2t$
10) $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}$
11) $\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$
12) $1-2e^{-5t}$
13) $3e^{-3t}-2e^{-2t}$
14) $1+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}$
15) $e^{-t}+2e^{-2t}+3e^{3t}$
16) $e^{-3t}+e^{3t}-e^{-2t}-e^{2t}$
17) $e^{2t}+4te^{2t}-e^{-2t}$
18) $-6+5t+6e^{-2t}$
19) $4-4e^{-3t}-3te^{-3t}$
20) $2e^{t}+te^{t}-2e^{2t}+te^{2t}$
21) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$
22) $\frac{1}{\sqrt{0.75}}e^{-0.5t}\sin\sqrt{0.75}t$
23) $\sin t+2e^{3t}$
24) $\cos t+e^{-2t}$
25) $\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t$
26) $e^{t}-\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+5t\sin 2t+\frac{5}{4}\left(\sin 2t-2t\cos 2t\right)$
27) א. $3-4u\left(t-1\right)\cdot\left(t-1\right)+4u\left(t-3\right)\cdot\left(t-3\right)$

ב. $\begin{cases}3 & t<1\\ 7-4t & 1<t<3\\ -5 & t\ge 3\end{cases}$; שרטוט:



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) $u(t-4)e^{-(t-4)}+u(t+2)\sin(t+2)$

29) $u(t-10)\left(e^{t-10}-e^{2(t-10)}\right)$

30) $f(0)=2 \quad f(\infty)=3$

31) שאלת הסבר.

32) $-\frac{1}{2}\left(t^2+2t+2\right)+e^t$

33) $0.5t-\frac{1}{4}\sin 2t$

34) $\frac{1}{4}e^{4t}(t-1)+\frac{1}{4}$

35) $\frac{1}{2}\left(-2\cos t+2-t\sin t\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס:

1) $y(0)=0\ ;\ y'+4y=e^{-3t}$

2) $y(0)=-1\ ,\ y'(0)=4\ ;\ y''+4y'+4y=10e^{-2t}$

3) $y(0)=-1,\ y'(0)=-4\ ;\ y''-4y'=16$

4) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+4y'=8t+2$

5) $y(0)=y'(0)=\frac{1}{4}\ ;\ 4y''-4y'=te^{t}+e^{t}$

6) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''-3y'+2y=u(t-4)$,

כאשר $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\ge 0\end{cases}$ היא פונקציית המדרגה.

7) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+y'=f(t)$ כאשר $f(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2 & t\ge 1\end{cases}$.

8) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+5y'+6y=h(t)$ כאשר $h(t)=\begin{cases}1 & 0<t<2\\ 0 & t\ge 2\end{cases}$.

9) $y(0)=y'(0)=0, y''(0)=3\ ;\ y'''+4y''+5y'+2y=10\cos t$

10) $y(0)=0,\ y'(0)=0\ ;\ y''+2y'+2y=\delta(t-\pi)$

11) $y(0)=2,\ y'(0)=-3\ ;\ y''+3y'-10y=4\delta(t-2)$

12) $y(0)=0,\ y'(0)=0\ ;\ -y''+4y=\delta(t-2\pi)-\delta(t-\pi)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $y(t)=e^{-3t}-e^{-4t}$

2 $y(t)=e^{-2t}(5t^2+2t-1)$

3 $y(t)=-4t-1$

4 $y(t)=t^2$

5 $y(t)=\frac{1}{8}e^t(t^2+2)$

6 $y(t)=u(t-4)\left(0.5-e^{t-4}+e^{2(t-4)}\right)$

7 $y(t)=2u(t-1)\cdot\left(-1+(t-1)+e^{-(t-1)}\right)$

8 $y(t)=\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\right]-u(t-2)\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2(t-2)}+2e^{-3(t-2)}\right]$

9 $y(t)=-\cos t+2\sin t+2e^{-t}-2te^{-t}-e^{-2t}$

10 $y(t)=-u(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\sin(t)$

11 $y(t)=\frac{4}{7}u(t-2)\left[e^{2(t-2)}-e^{-5(t-2)}\right]+e^{2t}+e^{-5t}$

12 $y(t)=-\frac{1}{2}u(t-2\pi)\left[\sinh\left(2(t-2\pi)\right)\right]+\frac{1}{2}u(t-\pi)\left[\sinh\left(2(t-\pi)\right)\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחאות – התמרת לפלס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n \ \ (\text{for } n=1,2,3,\ldots)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \ \ (\text{for } n=1,2,3,\ldots)$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1}e^{at}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin(at)+at\cos(at))$
$\frac{a}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\sin at$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$e^{-bt}\cos at$	$\frac{s+b}{\left[\left(s+b\right)^2+a^2\right]}$
$t\sin at$	$\frac{2sa}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
te^{at}	$\frac{1}{\left(s-a\right)^2}$
$\frac{1}{2a^3}\left(\sin\left(at\right)-at\cos\left(at\right)\right)$	$\frac{1}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-\frac{3}{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}$
$u\left(t\right)$	$\frac{1}{s}$
$u\left(t-k\right)$	$\frac{e^{-ks}}{s}$
$u\left(t-k\right)f\left(t-k\right)$	$e^{-ks}\cdot F\left(s\right)$
$t^n g\left(t\right)$	$\left(-1\right)^n\left(F\left(s\right)\right)^{(n)}$

תוספות

- נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה $F\left(s\right)$, של פונקציה $f\left(t\right)$, ורוצים את $f\left(0\right)$ ו-$f\left(\infty\right)$.

אז במקום למצוא את $f\left(t\right)$ ולהציב, ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f\left(0\right)=\lim_{s\to\infty}s\cdot F\left(s\right)$$

$$f\left(\infty\right)=\lim_{s\to 0}s\cdot F\left(s\right)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

- קונוולציה:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$\boxed{L\left(f(t)*g(t)\right)=F(s)\cdot G(s)}$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx \qquad L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=f(t)*g(t)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 10 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

תוכן העניינים

1. בעיות גדילה ודעיכה 100
2. בעיות בגיאומטריה אנליטית 102
3. עקומות אורתוגונליות 104
4. בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום 105
5. בעיות שונות 106

בעיות גדילה ודעיכה

שאלות

1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה.
ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.

א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?

ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?

ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?

*הניחו שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).

2) האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית.
בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים,
ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.

א. מצאו את אחוז הגידול השנתי.

ב. מצאו כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת),
היו בעיר 550 אלף תושבים.

3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%.
כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש״ח.

א. כמה כסף הפקיד האדם?

ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש״ח?

4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית.
בספירה הראשונית היו 1,000 חיות.
בספירה השנייה שנעשתה, כעבור 20 חודשים, היו 1,400 חיות בר.
מצאו אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה,
היו בשמורה 2,000 חיות בר.

5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים.
ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד,
פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.

א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1,000 שנים,
מכמות התחלתית של 100 גרם?

ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם,
מכמות התחלתית של 100 גרם?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע.
בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.

א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?

ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

תשובות סופיות

1) א. 7.28 מיליארד. ב. 3.54 מיליארד. ג. בשנת 2,106.

2) א. 2% ב. 15.92 שנים.

3) א. 4093.65 ₪. ב. 13.41 שנים.

4) 40.77 חודשים.

5) א. 88.69 גרם. ב. 19,188 שנים.

6) א. 3.04 שבועות. ב. 14.6 שבועות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות גיאומטריות

שאלות

1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה (x,y) על העקום, שווה ל- $-\frac{x}{y}$.
מצאו את משוואת העקום.

2) מצאו את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

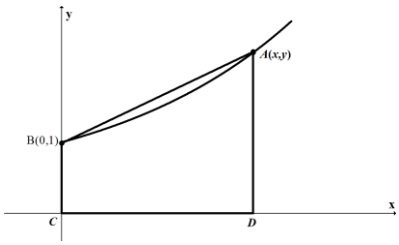
3) מצאו את משוואת העקום, ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

4) תרגמו את התיאור המילולי הבא למשוואה דיפרנציאלית ופתרו אותה:
נתון עקום ברביע הראשון, העובר בנקודה $(2,4)$.
נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה $A(x,y)$ שעליו,
ובין שיפוע הישר המחבר את A עם ראשית הצירים,
שווה לשיעור ה- y של הנקודה A.

5) מצאו את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה $(3,4)$, אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

6) קטע הנורמל לעקום בנקודה (x,y) שבין נקודה זו וציר ה- x, נחצה על ידי ציר ה- y.
מצאו את משוואת עקום זה.

7) נתון עקום העובר בנקודה $B(0,1)$.
בכל נקודה A שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז $ABCD$, הנראה בציור.
מהי משוואת העקום?



8) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(1,3)$,
ושיפוע המשיק אליו בנקודה (x,y) שווה ל- $-\left(1+\frac{y}{x}\right)$.
מצאו את משוואת העקום.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(1,2)$,
ושבכל נקודה (x,y) שעליו שיפוע הנורמל הוא $\frac{2xy}{y^2-x^2}$.

10) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(0,1)$, כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר ה-y, המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו $M(x,y)$ והקטע OM, מהראשית O ל-M, הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע MN
(כאשר N היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר ה-y).
ציירו ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

תשובות סופיות

1) $x^2+y^2=k$

2) $x^2+y^2=k$

3) $y^2=ax$

4) $y=2xe^{x-2}$

5) $y=4\pm\sqrt{25-(x-3)^2}$

6) $2x^2+y^2=k$

7) $y=2e^{x^2/4}-1$

8) $2xy+x^2=7$

9) $x^3-3y^2x=11$

10) $2=y+\sqrt{y^2+x^2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

עקומות אורתוגונליות

שאלות

מצאו את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות **1-4**:

1) $2\ln x+\ln y=c$

2) $xy=c$

3) א. $x^2+2y^2=c$

ב. מצאו את העקומה האורתוגונלית לעקומה $x^2+2y^2=9$,
בנקודה $(1,2)$ שעליה.

4) $x^2+y^2=cx$

5) מצאו את משפחת העקומות, היוצרות זווית של $45°$
עם משפחת המעגלים $x^2+y^2=c$.

תשובות סופיות

1) $2\ln x+\ln y=c$

2) $y^2-x^2=k$

3) $y=2x^2$, $y=ax^2$

4) $y=m(x-c)^2 \quad y>0$

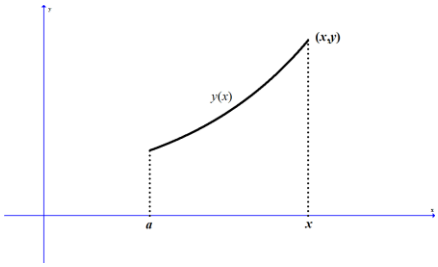
5) $\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right)=-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

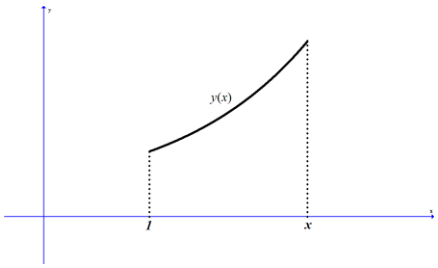
בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום

שאלות

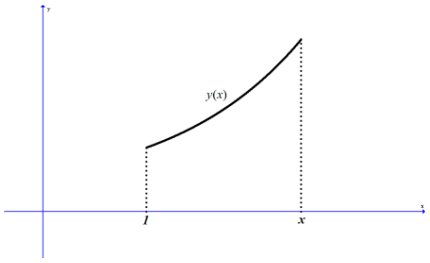
1) שטח S מוגבל על ידי עקום $y=y(x)$,
ציר ה-x, $x=a$, ו-x משתנה (ראו ציור).
ידוע כי השטח S פרופורציונלי לאורך הקשת
בין הנקודות $(a,y(a))$ ו-$(x,y(x))$.
מצאו את משוואת העקום.



2) שטח S מוגבל על ידי עקום $y=y(x)$,
ציר ה-x, $x=1$, ו-x משתנה (ראו ציור).
ידוע כי $y(1)=2$.
האם קיים עקום כזה,
כך ששטחו של S שווה ל-$2y(x)$?



3) שטח S מוגבל על ידי עקום $y=y(x)$,
ציר ה-x, $x=1$, ו-x משתנה (ראו ציור).
ידוע כי $y(1)=2$.
האם קיים עקום כזה,
כך שהשטח של S שווה ל-$y(x)-2$?



תשובות סופיות

1) $y=k\cosh\left(\pm\frac{1}{k}x+C\right)$

2) לא.

3) כן.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות שונות

שאלות

1) בזמן $t=0$, יש במיכל 4 ק״ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים.
נניח שמי מלח, בריכוז של 0.2 ק״ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב.

א. חשבו את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.

ב. תוך כמה זמן תהיה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?

2) סירה נגררת בקצב של 12 קמ״ש.
ברגע $t=0$, כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחתור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה.
משקל החותר והסירה הוא 500 ק״ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל- $2v$, כאשר v נמדדת במטר/שניה.

א. מצאו את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.

ב. מצאו כעבור כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.

ג. מצאו את המהירות הסופית.

3) חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה.
חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.

א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?

ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?

4) נתון מיכל בצורת גליל, שרדיוס בסיסו 1 ס״מ וגובהו 4 ס״מ. הגליל מלא במים.
ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונלי לשורש מגובהם.
נסמן ב-$h(t)$ את גובה פני המים, וב- k את קבוע הפרופורציה.

א. רשמו מד״ר עבור גובה פני המים, $h(t)$.
מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?

ב. ידוע כי $k=-2\pi$.
פתרו את המד״ר.
תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי 4 ס״מ, נמס, כך שהקצב שבו רדיוסו קטן – פרופורציונלי לשטח פניו.
לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס״מ.

א. רשמו נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t.

ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $\frac{1}{64}$ מנפחו ההתחלתי?

6) מבלון מלא אוויר, שרדיוסו R, מתחיל לצאת אוויר.
קצב יציאת האוויר הוא $3V(t)$, כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t.
הוכיחו כי כעבור $\ln 2$ שניות נפח הבלון יקטן לכדי שמינית מנפחו ההתחלתי.

הערה: בשאלות **5** ו-**6** נדרש ידע בהפרדת משתנים.

תשובות סופיות

1) א. 26.75 ק״ג. ב. 0.942 דקות.

2) א. 4.09 מטר/שניה. ב. 72 שניות. ג. 10 מטר/שניה.

3) א. $43\frac{1}{3}^\circ$ ב. 1.13 שעות.

4) א. $h(0)=4\ ;\ \pi h'(t)=k\sqrt{h(t)}$ ב. $h=(2-t)^2\ ;\ t=\sqrt{2}+2$

5) א. $R(t)=\frac{12}{2t+3}$ ב. 4.5 שעות.

6) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 11 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל 108

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית
$\left(p(x)y'(x)\right)'+\left(\lambda r(x)-q(x)\right)y(x)=0$.

א. $y''-2xy'+\lambda y=0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda)y=0$ (משוואת בסל)

2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y''+e^{2x}y'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)+4y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y''+4y'+xy+\lambda e^x y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות **4-7**:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

4) $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 0<x<\pi \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(\pi)-y'(\pi)=0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0, & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. פתרו את הבעיה.

9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , & 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}$.

ב. נציב $\ell=1$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$.

1. פתחו את הפונקציה $f(x)=1\ ,\ 0\le x\le 1$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

התחל את הטור מ-$n=1$.

2. מה סכום הטור ב-$x=0$?

האם הוא שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$?

ג. נציב $\ell=2$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , & 0<x<2 \\ y(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases}$.

פתחו את הפונקציה $f(x)=x\ ,\ 0\le x\le 2$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , & 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$.

ב. פתחו את הפונקציה $f(x)=e^x, 0\le x\le \pi$ לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.

התחילו את הטור מ-$n=1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<e \\ y(1)=0 \\ y'(e)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.

ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את $f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x\le \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e}\le x\le e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.

הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.

ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x=2$, $x=1.5$, $x=\sqrt{e}$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi n)=(-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi n)=0$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\left(e^{-x^2}y'\right)'+\left(\lambda e^{-x^2}-0\right)y=0$ ב. $\left(xy'\right)'+\left(\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)-\left(-x\right)\right)y=0$

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\quad n=1,2,3,\ldots$.

5) פונקציות עצמיות: $\phi_n(x)=n\cos nx+\sin nx\qquad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=n^2,\quad n=1,2,3,\ldots$; בנוסף, $\lambda=-1$ הוא ע"ע של הבעיה,

המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=e^x$.

6) פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\sin(\omega_n x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

7) פונקציות עצמיות: $y_n(x)=\sin(\omega_n x)-\omega_n\cos(\omega_n x)\qquad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

בנוסף, $\lambda_0=0$ הוא ע"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=x-1$.

8) א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x,\qquad n=1,2,3,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

9) א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)\sin\left(\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2l}x\right)\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2l}\right)^2\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ב. סכום הטור ב-$x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$.

ג. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{\pi^2\left(2n+1\right)^2}\sin\left(\left(2n+1\right)\frac{\pi}{4}x\right)$, כאשר $(0<x<2)$.

10) א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ב. $e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1}-1}{1^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$, כאשר $0<x<\pi$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,\ldots$ $\varphi_n(x)=\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\ln x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,\ldots$ $\lambda_n=\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$.

ג. שאלת הוכחה.

ד. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-2\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\ln x\right)$

ה. סכום הטור ב- $x=\sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x=1.5$ הוא 1; וב- $x=2$ הוא 0.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 12 - פרקי חזרה - אינטגרלים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מיידיים 113
2. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים 116
3. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים 118
4. אינטגרלים בשיטת ההצבה 122
5. אינטגרלים של פונקציות רציונליות 125
6. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות 129
7. נספח - זהויות בטריגו 134

אינטגרלים מיידיים

בסוף ספר הפרק יש נספח עם זהויות בטריגו.

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-12** (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

1) $\int 4dx$

2) $\int x^4 dx$

3) $\int \frac{1}{x^2} dx$

4) $\int \sqrt{x} dx$

5) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

6) $\int 4x^{10} dx$

7) $\int \left(2x^2 - x + 1\right) dx$

8) $\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$

9) $\int \left(x^2 + 1\right)^2 dx$

10) $\int \left(x^2 + 1\right)\left(x + 2\right) dx$

11) $\int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx$

12) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **13-20**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$)

13) $\int (4x+1)^{10} dx$

14) $\int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx$

15) $\int \frac{4}{(x-2)^5} dx$

16) $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$

17) $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$

18) $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}$

20) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **21-26**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

21) $\int \frac{1}{4x} dx$

22) $\int \frac{1 + x + x^2}{x} dx$

23) $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

24) $\int \frac{1}{4x-1} dx$

25) $\int \frac{x+3}{x+2} dx$

26) $\int \frac{4x+1}{x+2} dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **27-29**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$)

27) $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$ **28)** $\int\left(e^{x+1}\right)^2dx$

29) חשבו את האינטגרל: $\int\frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x}dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+c$)

30) חשבו את האינטגרל: $\int\left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+c$)

חשבו את האינטגרלים בשאלות **31-33**:

31) $\int\frac{1}{1+4x^2}dx$ **32)** $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ **33)** $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$

חשבו את האינטגרלים הבאים:

34) $\int\cos 4xdx$ **35)** $\int\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$ **36)** $\int 2\sin 4x+\cos xdx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $4x+c$
2) $\frac{x^5}{5}+c$
3) $-\frac{1}{x}+c$
4) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$
5) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$
6) $\frac{4x^{11}}{11}+c$
7) $\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$
8) $-\frac{1}{x^3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+c$
9) $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$
10) $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$
11) $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$
12) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c$
13) $\frac{(4x+11)^{11}}{44}+c$
14) $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$
15) $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$
16) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$
17) $10\sqrt{2x+4}+c$
18) $-\frac{1}{2(x-2)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$
19) $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{3/2}+x^{3/2}\right)+c$
20) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$
21) $\frac{\ln|x|}{4}+c$
22) $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$
23) $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$
24) $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$
25) $x+\ln|x+2|+c$
26) $4\left(x-1.75\ln|x+2|\right)+c$
27) $\frac{e^{4x}}{4}-e^{-x}+c$
28) $\frac{e^{2x+2}}{2}+c$
29) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}+\frac{(200)^x}{\ln(200)}+c$
30) $8e^{\frac{x}{2}}-\frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4}+c$
31) $\frac{1}{2}\arctan(2x)+c$
32) $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c$
33) $-\left(x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)+c$
34) $\frac{1}{4}\sin(4x)+c$
35) $-2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+c$
36) $-\frac{1}{2}\cos(4x)+\sin x+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ **2)** $\int \cot x dx$ **3)** $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

4) $\int \tan x dx$ **5)** $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ **6)** $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$

7) $\int e^{x^2}2xdx$ **8)** $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$ **9)** $\int e^{-2x^2}xdx$

10) $\int \cos\left(2x^2+1\right)\cdot 4xdx$ **11)** $\int \cos\left(\sin x\right)\cdot\cos x dx$ **12)** $\int \frac{\cos\left(\ln x\right)}{x}dx$

13) $\int \cos\left(10x^4+1\right)x^3dx$ **14)** $\int \sin\left(x^2+1\right)xdx$ **15)** $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

16) $\int \frac{\ln x}{x}dx$ **17)** $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ **18)** $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$

19) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ **20)** $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x}}dx$ **21)** $\int \sqrt{x^2+1}\cdot 2xdx$

22) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^2dx$ **23)** $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ **24)** $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\ln\left|x^2+1\right|+c$
2) $\ln\left|\sin x\right|+c$
3) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$
4) $-\ln\left|\cos x\right|+c$
5) $\ln\left|\ln\left|x\right|\right|+c$
6) $e^2\ln\left|e^x+1\right|+c$
7) $e^{x^2}+c$
8) $e^{\tan x}+c$
9) $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$
10) $\sin\left(2x^2+1\right)+c$
11) $\sin\left(\sin x\right)+c$
12) $\sin\left(\ln x\right)+c$
13) $\frac{1}{40}\sin\left(10x^4+1\right)+c$
14) $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+c$
15) $-2\cos\left(\sqrt{x}\right)+c$
16) $\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2+c$
17) $\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+c$
18) $\frac{1}{2}\left(\tan x\right)^2+c$
19) $2\sqrt{x^2+1}+c$
20) $\sqrt{2\sin x}+c$
21) $\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$
22) $\frac{2}{9}\left(x^3+4\right)^{\frac{3}{2}}+c$
23) $\frac{2}{3}\left(\ln x\right)^{\frac{3}{2}}+c$
24) $\frac{2}{3}\left(\arctan x\right)^{\frac{3}{2}}+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-23**:

1) $\int xe^x dx$

2) $\int x^4 \ln x dx$

3) $\int x\sin x dx$

4) $\int \left(x^2+2x+3\right)\ln x dx$

5) $\int x^2 \sin 4x dx$

6) $\int x^2 e^{-4x} dx$

7) $\int \ln x dx$

8) $\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

9) $\int \arctan x dx$

10) $\int \arcsin x dx$

11) $\int x\cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx$

12) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

13) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

14) $\int x\arctan x dx$

15) $\int x^2 \ln\left(x^2+1\right) dx$

16) $\int \ln^2 x dx$

17) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

18) $\int e^x \cos x dx$

19) $\int e^{2x} \sin 4x dx$

20) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

21) $\int \frac{xe^x}{\left(x+1\right)^2} dx$

22) $\int x\tan^2 x dx$

23) $\int \left(x+1\right)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx$

24) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ כאשר n טבעי.

25) חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

26) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ כאשר n טבעי.

27) חשבו את $\int \cos^4 x dx$.

28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ כאשר n טבעי.

29) חשבו את $\int \left(\sin x\right)^4 dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}dx$ כאשר n טבעי.

31) חשבו את $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^4}dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $xe^x - e^x + c$

2 $\frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c$

3 $x\cos x + \sin x + c$

4 $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

5 $-\frac{x^2}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\sin x + \frac{1}{16}\cos 4x\right) + c$

6 $-\frac{x^2}{4}e^{-4x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right) + c$

7 $x\ln x - x + c$

8 $-\frac{1}{3}(x\ln x - x) + c$

9 $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + c$

10 $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

11 $\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x\ln|x-2|\right)\right) + c$

12 $x\tan x + \ln|\cos x| + c$

13 $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$

14 $\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + c$

15 $\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right) + c$

16 $x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c$

17 $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}(\ln x - 1) + c$

18 $-e^x\cos x + \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + c$

19 $\frac{e^{2x}\left(-\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x\right)}{5} + c$

20 $\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

(21 $\frac{e^x}{x+1}+c$

(22 $x\left(\tan x-x\right)+\ln\left|\cos x\right|+\frac{x^2}{2}+c$

(23 $\frac{2}{9}\left(x+1\right)\left(x+2\right)^{\frac{9}{2}}-\frac{4}{99}\left(x+2\right)^{\frac{11}{2}}+c$

(24 $x^ne^x-n\int x^{n-1}e^xdx$

(25 $e^x\left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)+c$

(26 $\frac{1}{n}\left\{\left(\cos x\right)^{n-1}\sin x+(n-1)\int\left(\cos x\right)^{n-2}dx\right\}$

(27 $\frac{1}{4}\left(\cos^3 x\sin x+3\cdot5\left(\cos x\sin x+x\right)\right)+c$

(28 $\frac{1}{n}\left(-\left(\sin x\right)^{n-1}\cos x+\left(n-1\right)\int\left(\sin x\right)^{n-2}dx\right)$

(29 $\frac{1}{4}\left(-\sin^3 x\cos x+3\cdot5\left(x-\sin x\cos x\right)\right)+c$

(30 $\frac{1}{2n}\left(\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}+\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}\left(2n-1\right)\right)$

(31 $\frac{1}{6}\left\{\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}+\frac{1}{4}\left\{\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{1+x^2}+\arctan x\right\}\right\}\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

2) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^5 dx$

3) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

4) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$

6) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

7) $\int e^{x^2}x^3 dx$

8) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}dx$

10) $\int \cos\left(x^2+1\right)\cdot 2x^3 dx$

11) $\int x^3\left(3x^2-1\right)^{14}dx$

12) $\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x}dx$

13) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

14) $\int \ln^3 x dx$

15) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+2}$

16) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$

19) $\int \arctan\sqrt{x}dx$

20) $\int \frac{x^7}{\left(1-x^4\right)^2}dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

22) $\int \cos(\ln x)dx$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

24) $\int x^5\cdot\sqrt[3]{x^3+1}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{x^2+1}+c$

2) $\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5}-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x^3+4}\right)^3\right)+c$

3) $2\left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3}-\sqrt{x^2+1}\right)+c$

4) $\arctan\left(e^x\right)+c$

5) $-\frac{1}{3\left(\ln x\right)^3}+c$

6) $\arcsin\left(\ln x\right)+c$

7) $\frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}\right)+c$

8) $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+2\right)+c$

9) $\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+c$

10) $x^2\sin\left(x^2+1\right)+\cos\left(x^2+1\right)+c$

11) $\frac{1}{18}\left(\frac{\left(3x^2-1\right)^{16}}{16}+\frac{\left(3x^2-1\right)^{15}}{15}\right)+c$

12) $\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\sin\left(2\ln x\right)\right)+c$

13) $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

14) $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)+c$

15) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)+c$

16) $\frac{\left(\ln x\right)^5}{5}+c$

17) $\frac{\left(\arctan x\right)^3}{3}+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18 $\ln\left|\ln\left(\ln x\right)\right|+c$

19 $x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c$

20 $-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x^4}-\ln\left|1-x^4\right|\right)+c$

21 $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+c$

22 $\frac{x}{2}\left(\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right)+c$

23 $6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+c$

24 $\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^7}{7}-\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^4}{4}+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים של פונקציות רציונליות

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-19**:

1) $\int \frac{x+1}{(x-4)^2}dx$

2) $\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4}dx$

3) $\int \frac{1}{x^2-4}dx$

4) $\int \frac{2-x}{x^2+5x}dx$

5) $\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx$

6) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx$

7) $\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6}dx$

8) $\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36}dx$

9) $\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)}dx$

10) $\int \frac{5-x}{x^3+x^2}dx$

11) $\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x}dx$

12) $\int \frac{1}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)}dx$

13) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$

14) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

15) $\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)}dx$

16) $\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx$

17) $\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

18) $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx$

19) $\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

חשבו את האינטגרלים בשאלות **20-24**:

20) $\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1}dx$

21) $\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4}dx$

22) $\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1}dx$

23) $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2}dx$

24) $\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4}dx$

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

חשבו את האינטגרלים הבאים:

25) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x}$

26) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx$

27) $\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}}dx$

28) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}dx$

29) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

30) $\int \sqrt{1+e^x}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\ln|x-4|-\frac{5}{x-4}+c$

2) $-\frac{1}{3(x-6)^6}-\frac{1}{(x-1)^7}+c$

3) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

4) $\frac{2}{5}\ln|x|-\frac{7}{5}|x+5|+c$

5) $3\ln|x+3|-2\ln|x+2|+c$

6) $\ln|x|+\frac{1}{2}|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c$

7) $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+3\ln|x-3|+c$

8) $\ln|x+3|+\ln|x-3|-\ln|x+2|-\ln|x-2|+c$

9) $\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}-\ln|x+2|+c$

10) $6\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{5}{x}+c$

11) $4\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+\frac{3}{x+3}+c$

12) $2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+c$

13) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

14) $\frac{1}{\sqrt{3/4}}\arctan\left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}}\right)+c$

15) $\arctan x+2\ln|x-3|+c$

16) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\ln|x+2|+c$

17) $\arctan x-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$

18) $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2(x^2+1)}+c$

19) $\frac{1}{16}\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)+c$

20) x^3-x^2+2x+c

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

(21 $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-x^2+c$

(22 x^3-x^2+x+c

(23 $\frac{x^3}{3}+\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$

(24 $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\ln|x+2|+c$

(25 $-1.5\ln\left|1-\sqrt[3]{x^2}\right|+c$

(26 $6\left(\frac{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^3}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}{2}+3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)-\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|\right)+c$

(27 $4\left(\frac{\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^2}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^2}{2}+3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)-\ln\left|1+\sqrt[4]{x-1}\right|\right)+c$

(28 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}+\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[3]{x}-0.5\right)^2+0.75\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}}\right)+c$

(29 $-\ln\left|1+e^x\right|+x+c$

(30 $2\sqrt{1+e^x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

שאלות

פתרון על ידי זהויות

זכרו כי:

$$\int \cos x dx = \sin x + c \qquad \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \qquad \int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c \qquad \int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)|+c$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c \qquad \int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)|+c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-24**:

1) $\int\left(\sin 2x - 4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

2) $\int \frac{1}{\cos^2 4x}dx$

3) $\int \frac{1}{\sin^2 10x}dx$

4) $\int\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$

5) $\int\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)dx$

6) $\int\left(\sin x + \cos x\right)^2 dx$

7) $\int \sin x\cos x\cos 2x dx$

8) $\int \tan^2 x dx$

9) $\int \frac{1}{(\sin x\cos x)^2}dx$

10) $\int \sin 7x\cos 5x dx$

11) $\int\left(\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x\right)dx$

12) $\int\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)dx$

13) $\int \cos^2 x dx$

14) $\int \sin^2 4x dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) $\int \cos^3 x dx$

16) $\int \sin^3 4x dx$

17) $\int \cos^4 x dx$

18) $\int \sin^4 4x dx$

19) $\int \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} dx$

20) $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx$

21) $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx$

22) $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x} dx$

23) $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$

24) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

פתרון על ידי הצבות פשוטות

זכרו כי:

$$\int f(\sin x)\cdot \cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{matrix} \right| = \int f(t) dt$$

$$\int f(\cos x)\cdot \sin x dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{matrix} \right| = \int f(t)(-dt)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **25-36**:

25) $\int (\sin^2 x + \sin x + 2)\cos x dx$

26) $\int (\cos^3 x + \cos x - 2)\sin x dx$

27) $\int \cos^3 x dx$

28) $\int \sin^3 2x dx$

29) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$

30) $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$

31) $\int \cos^5 x dx$

32) $\int \tan^5 x dx$

33) $\int \frac{1}{\cos x} dx$

34) $\int \frac{dx}{\sin x}$

35) $\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx$

36) $\int \frac{2\sin x}{\cos 2x + 4\cos x + 7} dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

זכרו כי:

$$\int f(\sin x,\cos x)\,dx=\left|\begin{array}{c}t=\tan\frac{x}{2}\\(x=2\arctan t)\end{array}\right|=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **37-39**:

37) $\int\frac{1}{1+\sin x}dx$ **38)** $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ **39)** $\int\frac{\cos x}{2-\cos x}dx$

הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

זכרו כי:

$$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\left|\begin{array}{c}x=a\sin t\\(t=\arcsin\frac{x}{a})\end{array}\right|=\int f\left(a\cos t\right)\cdot\left(a\cos t dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx=\left|\begin{array}{c}x=a\tan t\\(t=\arctan\frac{x}{a})\end{array}\right|=\int f\left(\frac{a}{\cos t}\right)\cdot\left(\frac{a}{\cos^2 t}dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\left|\begin{array}{c}x=\frac{a}{\cos t}\\(t=\arccos\frac{a}{x})\end{array}\right|=\int f\left(a\tan t\right)\cdot\left(\frac{-a\sin t}{\cos^2 t}dt\right)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים:

40) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ **41)** $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$ **42)** $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$

2) $\frac{1}{4}\tan 4x+c$

3) $-10\cot 10x+c$

4) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

5) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

6) $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

7) $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$

8) $\tan x-x+c$

9) $\tan x-\cot x+c$

10) $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+c$

11) $\sin x+c$

12) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$

13) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$

14) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 8x}{16}+c$

15) $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+c$

16) $-\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 12x+c$

17) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

18) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$

19) $-\cot x-x+c$

20) $2\sin x+c$

21) $\ln\left|\cos x\right|+c$

22) $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

23) $3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x+c$

24) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{24}\sin 6x\right)+c$

25) $\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x+c$

26) $\frac{-\cos^4 x}{4}-\frac{\cos^2 x}{2}+2\cos x+c$

27) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$

28) $-\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\frac{\cos^3 2x}{3}\right)+c$

29) $\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+c$

30) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+c$

31) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+c$

32) $\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\ln\left|\cos x\right|+c$

33) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right|+c$

34) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$

35) $-2e^{\cos x}\left(\cos x-1\right)+c$

36) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

(37 $-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c$

(38 $\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

(39 $-x+2\left(\frac{2}{3\sqrt{\frac{1}{3}}}\arctan\left(\frac{\tan\left(x/2\right)}{\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)\right)+c$

(40 $-\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c$

(41 $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right|+c$

(42 $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)\end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 13 - מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים

תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים 135
2. התכנסויות של פונקציות במרחביים נורמיים 137
3. מערכות אורתונורמליות 141
4. משפט קירוב מיטבי 145
5. מערכת אורתונורמלית סגורה 148
6. מערכת האר 149
7. תרגילים מסכמים 151

מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים:

שאלות:

1) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\int_a^b|f(x)|dx$ מהווה נורמה במרחב זה.

2) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב זה.

3) יהי $V=R_{\le 2}[x]$ המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה / שווה מ-2 מעל הממשיים.

לכל שני פולינומים $p(x),q(x)$ ב- V נגדיר:

$\langle p(x),q(x)\rangle=p(-1)q(-1)+p(0)q(0)+p(1)q(1)$.

הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ הינה מכפלה פנימית.

4) נגדיר את המרחב $V=C^1[-1,1]$ (מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$).

נגדיר: $\langle f(x),g(x)\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}dx+\int_{-1}^{1}f'(x)\overline{g'(x)}dx$.

הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ הינה מכפלה פנימית.

5) הוכיחו כי בכל מרחב מכפלה פנימית E מתקיים לכל $f,g\in E$:

א. $\langle u,f+g\rangle=\langle u,f\rangle+\langle u,g\rangle$ $\forall u\in E$.

ב. $\mathrm{Re}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2\right)$.

ג. $\mathrm{Im}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+ig\|^2-\|f-ig\|^2\right)$.

ד. $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left\{\|f\|^2+\|g\|^2\right\}$ (שוויון המקבילית).

6) יהי V מרחב מכפלה פנימית.

נסמן $w=u+v$ וקטורים במרחב.

הוכיחו כי אם $\langle u,v\rangle=0$ אזי $\|w\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

7) נגדיר את המרחב V להיות מרחב הפונקציות $f(x)$ הממשיות הגזירות ברציפות פעמיים בקטע $[a,b]$ (כלומר $f''(x)$ רציפה ב-$[a,b]$).

בדקו האם $\langle f,g\rangle=\int_a^b f''(x)g''(x)dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

8) נגדיר את המרחב V להיות מרחב של פונקציות $f(x)$ ממשיות וגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$ (כלומר הנגזרת $f'(x)$ רציפה בקטע $[-1,1]$) כך ש- $f(-1)=0$.

נגדיר $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)dx$.

הוכיחו כי $\langle f,g\rangle$ מהווה מכפלה פנימית במרחב V.

9) יהי V מרחב הפונקציות הרציפות המרוכבות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\int_a^b|f(x)|dx+\max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב V.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) $f(x)=1$
8) הוכחה.
9) הוכחה.

התכנסויות במרחבים נורמיים:

שאלות:

1) הוכיחו:

א. הוכיחו כי לכל $f\in C[a,b]$ מתקיים $\left|\int_a^x f(t)\,dt\right|\le\sqrt{x-a}\cdot\|f\|_{L_2[a,b]}$.

תזכורות: $\|f\|_{L_2[a,b]}=\sqrt{\int_a^b|f(t)|^2\,dt}$ ו- $\langle f,g\rangle_{L_2[a,b]}=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$.

ב. הוכיחו כי אם $f_n\to f$ בנורמה $\|\cdot\|_{L_2[a,b]}$ במרחב $C[a,b]$

אזי גם $f_n\to f$ בנורמה $\|\cdot\|_{L_1[a,b]}$.

תזכורת: $\|f\|_{L_1[a,b]}=\int_a^b|f(t)|dt$.

ג. האם ההיפך נכון? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

2) יהי V מרחב נורמי.

א. הוכיחו כי לכל $u,v\in V$ מתקיים $\|u-v\|\ge\big|\|u\|-\|v\|\big|$ (אי שיוויון המשולש ההפוך).

ב. הוכיחו כי אם $f_n\xrightarrow{n\to\infty}f$ בנורמה של V אזי $\|f_n\|\xrightarrow{n\to\infty}\|f\|$.

3) נתונה סדרת הפונקציות הבאה:

$$f_n(x)=\begin{cases}n\sqrt{n}\cdot x & 0\le x\le\frac{1}{n}\\ 2\sqrt{n}-n\sqrt{n}\cdot x & \frac{1}{n}<x<\frac{2}{n}\\ 0 & \frac{2}{n}\le x\end{cases}$$

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב-$[0,10]$?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב-$[0,10]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת ב-$L^1[0,10]$?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת ב-$L^2[0,10]$?

4) נתונה סדרת פונקציות $f_n(x)=n(1-x)x^n$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב-$[0,1]$? אם כן, מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב-$[0,1]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1[0,1]$?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[0,1]$?

5) נתונה $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right] \\ 0 & else\end{cases}$

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1(-\infty,\infty)$?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2(-\infty,\infty)$?

6) יהי V מרחב וקטורי של פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות שם למעט מספר סופי של נקודות, כאשר הנגזרת רציפה למקוטעין עם מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle=f(a)g(a)+\int_a^b f'(x)g'(x)dx$.

א. לכל $x_0\in[a,b]$ נגדיר את הפונקציה $g_{x_0}(x)=\begin{cases}x-a+1 & a\le x\le x_0 \\ x_0-a+1 & x_0\le x\le b\end{cases}$

הוכיחו כי לכל $f\in V$ מתקיים $\langle f(x),g_{x_0}(x)\rangle=f(x_0)$.

ב. הוכיחו כי לכל $f\in V$ ולכל $x_0\in[a,b]$ מתקיים $|f(x_0)|\le\sqrt{b-a+1}\cdot\|f\|$.

ג. נניח כי $f_n(x)\in V$ סדרת פונקציות המתכנסת בנורמת V אל $f\in V$.
הוכיחו כי ההתכנסות היא במידה שווה.

7) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=\left[1-\chi_n(x)\right]\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1}+n^{\alpha}\cdot\chi_n(x)$

כאשר $\chi_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left(n-\frac{1}{n^2},n+\frac{1}{n^2}\right)\\ 0 & else\end{cases}$.

א. מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב-$[1,\infty)$?

אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב-$[1,\infty)$?

ג. מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ בנורמת $L^1[1,\infty)$?

8) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\cdot\chi_{\left[2^k,2^k+k\right]}(x)$

כאשר $\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

א. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1(-\infty,\infty)$?

ב. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2(-\infty,\infty)$?

9) נגדיר את סדרת הפונקציות הבאה במרחב $L^2[-\pi,\pi]$: $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kx)$.

א. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[-\pi,\pi]$ לפונקציה כלשהי?

ב. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$?

נגדיר $h_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt$.

ג. האם $h_n(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$?

ד. האם $h_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[-\pi,\pi]$?

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) א. $f(x)=0$ ב. $\sup_{[0,10]}|f_n(x)|\geq\sqrt{n}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$

ג. $\frac{1}{2\sqrt{n}}\xrightarrow{n\to\infty}0$ ד. $\frac{2}{\sqrt{3}}\not\xrightarrow{n\to\infty}0$

4) א. $f(x)=0$ ב. $\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{e}$

ג. $\frac{n}{(n+1)(n+2)}\xrightarrow{n\to\infty}0$ ד. $\frac{2n^2}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}\xrightarrow{n\to\infty}0$

5) א. $f(x)=0$ ב. $1\xrightarrow{n\to\infty}1$

ג. $\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ ד. $\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

6) הוכחה.

7) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית ב-$[1,\infty)$ והפונקציה הגבולית הינה $\frac{1}{x}$.

ב. $\max\left\{n^{\alpha}-\frac{1}{n+\frac{1}{n^2}}\ ,\ \frac{1}{n+1}\right\}$

ג. אין התכנסות בנורמה כיוון שסדרת הפונקציות כלל אינה שייכת למרחב הנורמי.

8) א. לא, סדרת הנורמות שואפת לאינסוף.

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}<\infty$

9) א. לא, סדרת הנורמות שואפת לאינסוף.

ב. לא, כי אם הייתה התכנסות במידה שווה אז הייתה התכנסות בנורמת $L^2[-\pi,\pi]$ (בקטע הקומפקטי).

ג. $\sup_{[-\pi,\pi]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1-\cos(kx)}{k^{1.5}}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2}{k^{1.5}}\xrightarrow{n\to\infty}0$

ד. כן, כי התכנסות במידה שווה (בקטע סופי) גוררת התכנסות בנורמת $L^2[-\pi,\pi]$ (בקטע סופי).

מערכות אורתונורמליות:

שאלות:

1) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x)=\cos(nx)$ במרחב $L^2[-\pi,\pi]$

עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

2) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x)=\sin(nx)$ במרחב $L^2[0,\pi]$

עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית .

3) יהי מרחב מכפלה פנימית V ותהי $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ מערכת של פולינומים כך ש-$\varphi_n(x)$ הינו פולינום ממעלה n.

נניח כי לכל n,m טבעיים כך ש- $m<n$ מתקיים $\langle\varphi_n(x),x^m\rangle=0$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

4) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $\left[e^{-\pi},e^{\pi}\right]$ עם המכפלה

הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}} f(x)\overline{g(x)}\frac{1}{x}dx$ נגדיר $\varphi_n(x)=\sin\left(n\ln(x)\right)$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

5) נניח כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2[a,b]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle_1=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$. יהיו $c>0$ ו- d ממשי כלשהוא.

הוכיחו כי המערכת $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $\psi_n(x)=\sqrt{c}\cdot\varphi_n(c\cdot x+d)$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2\left[\frac{a-d}{c},\frac{b-d}{c}\right]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle_2=\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(x)\overline{g(x)}dx$.

6) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ מערכת אורתונורמלית סופית.

הוכיחו כי לכל $v\in V$ מתקיים $\left\|\sum_{n=1}^{N}\langle v,e_n\rangle e_n\right\|^2=\sum_{n=1}^{N}\left|\langle v,e_n\rangle\right|^2$.

מערכת פולינומי צ'בישב:

7) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1,1)$

ונגדיר ב- K מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

הוכיחו כי אוסף הפונקציות $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $T_n(x)=\cos\left[n\cdot\arccos(x)\right]$ (הנקראת גם פולינומי צ'בישב) הינה מערכת אורתוגונלית ב- K ומצאו קבועים α_n כך שהמערכת $\{\alpha_n T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית.

מערכת פולינומי הרמיט:

8) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות למקוטעין ומקיימות את התנאי $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\cdot e^{-x^2}dx<\infty$.

נגדיר על K מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\cdot e^{-x^2}dx$.

הוכיחו כי פולינומי הרמיט, המוגדרים על ידי הנוסחה $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]$ (נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתוגונלית במרחב K ומצאו להם קבועי נרמול.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח כי לכל n,k טבעיים כך ש- $k<n$ מתקיים $\langle H_n, x^k\rangle = 0$. ניתן להיעזר בעובדה כי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

מערכת פולינומי לג'נדר:

9) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1,1)$ ונגדיר ב- K מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי פולינומי לג'נדר, הנתונים על ידי נוסחת רודריגז $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$ מהווים מערכת אורתוגונלית ב- K וכי $\langle P_n, P_n\rangle = \frac{2}{2n+1}$ לכל n טבעי.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n,k טבעיים כך ש- $k<n$ מתקיים $\langle P_n, x^k\rangle = 0$.

מערכת פולינומי לגר:

10) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות למקוטעין ומקיימות את התנאי $\int_0^{\infty} |f(x)|^2 \cdot e^{-x}dx < \infty$.

נגדיר על K מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle = \int_0^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x}dx$.

הוכיחו כי פולינומי לגר, המוגדרים על ידי הנוסחה $L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right]$ (נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתונורמלית במרחב K.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n,k טבעיים כך ש- $k<n$ מתקיים $\langle L_n, x^k\rangle = 0$.

ניתן להיעזר בנוסחה $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx = n!$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) מערכת פולינומי צ'בישב: הוכחה.
8) מערכת פולינומי הרמיט: הוכחה.
9) מערכת פולינומי לג'נדר: הוכחה.
10) מערכת פולינומי לגר: הוכחה.

קירוב מיטבי:

שאלות:

1) מצאו את נקודות המינימום של הפונקציה:

$$F(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\alpha-\beta\cos(x)-\gamma\cos(10x)\right|^2dx$$

א. כאשר $f(x)=\cos^2(x)$

ב. כאשר $f(x)=x^3$

ג. כאשר $f(x)=\sin(x)$

2) במרחב $C[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.

נגדיר תת מרחב $W=span\{1,\sin(x),\cos(x),x\}$ ופונקציה $f(x)=|x|$.

מצאו פונקציה $g\in W$ כך ש-$\|f-g\|$ מינימלי.

<u>הערה:</u>

שימו לב שהמערכת $\{1,\sin(x),\cos(x),x\}$ איננה אורתונורמלית.

3) נתבונן במרחב $C[-1,1]$ מעל $\mathbb{C}$.

א. הוכיחו כי $\langle f,g\rangle=f(-1)\overline{g(-1)}+\int_{-1}^{1}f'(x)\overline{g'(x)}dx$ מהווה מכפלה פנימית.

ב. מצאו את כל הערכים של $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$\left|-1-\alpha+\beta-\gamma\right|^2+\int_{-1}^{1}\left|3x^2-\beta-2\gamma x\right|^2dx$$

4) נתבונן במרחב $C[-1,1]$ מעל $\mathbb{C}$.

נתון כי $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}dx+\int_{-1}^{1}f'(x)\overline{g'(x)}dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

מצאו את כל הערכים של $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$\int_{-1}^{1}\left|x^3-\alpha-\beta x-\gamma x^2\right|^2dx+\int_{-1}^{1}\left|3x^2-\beta-2\gamma x\right|^2dx.$$

5) תהי V קבוצת הפונקציות הרציפות על הישר הממשי המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 e^{-x^2}dx<\infty$.

א. הוכיחו כי V עם הפעולות הרגילות של חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר,

מהווה מרחב מכפלה פנימית כאשר $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2}dx$.

ב. הוכיחו כי כל הפולינומים שייכים ל- V.

ג. מצאו את הקירוב המיטבי של x^3 על מרחב הפולינומים מדרגה 2 לכל היותר.

<u>הערה:</u>

ניתן להשתמש באינטגרלים הבאים:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\quad,\quad\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\quad,\quad\int_{-\infty}^{\infty}x^4e^{-x^2}dx=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

6) יהי L מרחב וקטורי של פונקציות ממשיות ורציפות למקוטעין על הקטע $[1,\infty)$ המקיימות $\int_{1}^{\infty}x|f(x)|^2dx<\infty$.

במרחב L מוגדרת המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{1}^{\infty}f(x)g(x)xdx$.

נגדיר $W=span\left\{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\right\}$.

מצאו את ההיטל האורתוגונלי $P_W\left(\frac{x}{e^{\sqrt{x}}}\right)$

7) תהי $f\in C[-1,1]$.

הוכיחו כי לכל פונקציה אי זוגית $g\in C[-1,1]$

מתקיים $\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}|f(x)+f(-x)|^2dx\le\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|^2dx$.

תשובות סופיות:

1) א. $\alpha=0.5\ ,\ \beta=\gamma=0$ ב. $\alpha=0\ ,\ \beta=0\ ,\ \gamma=0$ ג. $\alpha=0\ ,\ \beta=0\ ,\ \gamma=0$

2) $g(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos(x)$

3) א. הוכחה. ב. $\alpha=0\ ,\ \beta=1\ ,\ \gamma=0$

4) $\alpha=\gamma=0\ ,\ \beta=\frac{9}{10}$

5) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $P_W\left(x^3\right)=\frac{3}{2}x$

6) $\frac{28}{e}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{36}{e}x^{-\frac{5}{2}}$

7) הוכחה.

מערכת אורתונורמלית סגורה:

שאלות:

1) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית.

א. האם קיים $v\in V$ כך ש- $\langle u,e_n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n}}$?

ב. נניח כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה.

יהיו $u,v\in V$ כך ש- $\langle u,e_n\rangle=\frac{1}{n}$ ו- $\langle v,e_n\rangle=\frac{1}{n+1}$. חשבו את $\langle u,v\rangle$.

2) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית.

א. יהי $u\in V$ כך ש- $\langle u,e_n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$.

מצאו את הקירובים המיטביים u_1,u_2,u_3 ל- u בתת המרחבים $W_1=span\{e_1\}$, $W_2=span\{e_1,e_2\}$, $W_3=span\{e_1,e_2,e_3\}$ בהתאמה.

ב. נניח כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה.

חשבו $\|u-u_1\|$, $\|u-u_2\|$, $\|u-u_3\|$ כאשר u_1,u_2,u_3 הם הקירובים המיטביים מהסעיף הקודם.

3) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית סגורה ב- V.

נגדיר $g_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[f_{2n-1}-f_{2n}]$, $g_{2n-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[f_{2n-1}+f_{2n}]$.

א. הוכיחו כי המערכת $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית ב- V.

ב. הוכיחו כי המערכת $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה ב- V.

תשובות סופיות:

1) א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle u,e_n\rangle|^2\le\|u\|^2<\infty$ ב. $\langle u,v\rangle=1$

2) א. $u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot e_1$, $u_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot e_1+\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot e_2$, $u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot e_1+\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot e_2+\frac{1}{\sqrt{15}}\cdot e_3$

ב. $\|u-u_1\|=\sqrt{\frac{5}{12}}$, $\|u-u_2\|=\sqrt{\frac{7}{24}}$, $\|u-u_3\|=\sqrt{\frac{9}{40}}$

3) א. הוכחה. ב. הוכחה.

מערכת האר:

שאלות:

1) נתבונן במרחב $L^2_{PC}[0,1]$ ויהי N מספר טבעי. מצאו את הקירוב מיטבי לפונקציה $f(x)=x^N$ על תת המרחב הנפרש על ידי $\{\varphi_{0,-1}\}\cup\{\varphi_{n,k}\}_{n=0\ \ k=0}^{n=N\ \ k=2^n-1}$.

2) נתבונן במרחב $L^2_{PC}[0,1]$ ויהי N מספר טבעי. מצאו את הקירוב מיטבי לפונקציה $f(x)=e^{i\pi 2^{N+1}x}$ על תת המרחב הנפרש על ידי $\{\psi_{-1}\}\cup\{\psi_{n,k}\}_{n=0\ \ k=0}^{n=N-1\ \ k=2^n-1}$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מוכלל של $f(x)=e^x$ על ידי בסיס האר $\{\psi_{-1}\}\cup\{\psi_{n,k}\}_{n=0\ \ k=0}^{n=\infty\ \ k=2^n-1}$.

ב. הוכיחו כי $\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2^n}{1-e^{\frac{2}{2^n}}}\left(2e^{\frac{0.5}{2^n}}-1-e^{\frac{1}{2^n}}\right)^2=\frac{e^2-4e+3}{2\left(e^2-1\right)}$.

4) האם קיימת $f\in L^2_{PC}[0,1]$ המקיימת $\int_0^1 f(x)\psi_{n,k}(x)dx=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{(n+2)\ln(n+2)}}$ לכל $n\geq 0$ שלם ולכל $k=0,1,...2^n-1$.

5) נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{\frac{n}{2}}}\sum_{k=0}^{k=2^n-1}\psi_{n,k}(x)$ כאשר $\psi_{n,k}(x)$ פונקציות האר.

א. האם הטור מתכנס נקודתית בקטע $[0,1]$?

ב. האם הטור מתכנס בנורמת $L^2[0,1]$?

תשובות סופיות:

1) $$P_W f = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{n=N} \frac{1}{2^{n(N+0.5)}} \sum_{k=0}^{k=2^n-1} \left[2(k+0.5)^{N+1} - (k)^{N+1} - (k+1)^{N+1} \right] \varphi_{n,k}(x)$$

2) $$P_W f = 0$$

3) $$f \sim (e-1)\psi_{-1}(x) + \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{k=0}^{k=2^n-1} 2^{\frac{n}{2}} \left\{ 2e^{\frac{0.5}{2^n}} - 1 - e^{\frac{1}{2^n}} \right\} e^{\frac{k}{2^n}} \psi_{n,k}(x)$$ א.

ב. הוכחה.

4) $$\infty$$

5) א. $x = 0$ ב. $$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n \cdot 2^{\frac{n}{2}}} \sum_{k=0}^{k=2^n-1} \psi_{n,k}(x)$$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) יהי V מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$.

נגדיר על V מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\overline{g'(x)}dx$.

אין צורך להוכיח כי זאת מכפלה פנימית.

א. הוכיחו כי המערכת $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורתוגונלית במרחב V.

מצאו נורמה של e^{inx} המושרית מהמכפלה הפנימית הנ"ל.

ב. הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f\in V$ המקיימת:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-in\cdot f'(x)\right)e^{-inx}dx\right|^2}{1+n^2}=1$$

2) נגדיר $a_n=\min_{\alpha\in\mathbb{C}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sqrt{|\cos(x)|}-\alpha\cos(nx)\right|^2dx\right]$. חשבו $\lim_{n\to\infty}a_n$.

3) נגדיר $R_n=\min_{a,b\in\mathbb{C}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sqrt{|x|^3}-a\sin(nx)-b\sin\left([n+1]x\right)\right|^2dx\right]$. חשבו $\lim_{n\to\infty}R_n$.

4) נגדיר $g(a,b)=\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\min\{1,|x|\}-a-b\sin(nx)\right|^2dx\right]$.

א. מצאו את הערכים a,b עבורם $g(a,b)$ מינימלית.

ב. חשבו את $g(a,b)$ עבור a,b אלו.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

2) $\frac{4}{\pi}$

3) $\frac{\pi^3}{2}$

4) א. $a=1-\frac{1}{2\pi}$, $b=0$ ב. $g(a,b)=2-\frac{4}{3\pi}-2\left[1-\frac{1}{2\pi}\right]^2$

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 14 - טורי פורייה

תוכן העניינים

1. טור פורייה ממשי 152
2. טור פורייה מרוכב 153
3. משפט פרסבל 154
4. רימן לבג 157
5. משפט דיריכלה 158
6. המשכה זוגית ואי זוגית 160
7. גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה 161
8. התכנסות במידה שווה של טורי פורייה 164
9. טור פורייה בקטע כללי 165
10. משפט הקונבולוציה 167
11. גרעין דיריכלה 169
12. גרעין פוואסון 171
13. תרגילים מסכמים 172

טור פורייה ממשי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\sin(|x|)$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1 \\ 0 & else\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\sum_{n=1}^{20}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

2) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$

3) $\sin(|x|)\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}\cos(2kx)$

4) $f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 2x & 0\le x<\pi\end{cases}$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ \sin(x) & 0\le x<\pi\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$

2) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}-\frac{1}{2\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{in}+\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}e^{inx}$

3) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-3(-1)^n\frac{\pi}{in}\right]e^{inx}$

4) $f(x)\sim-\frac{1}{2}-\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{3}{\pi i(2k-1)}e^{i(2k-1)x}$

5) $f(x)\sim\frac{1}{4i}e^{ix}-\frac{1}{4i}e^{-ix}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}e^{i[2k]x}$

משפט פרסבל:

שאלות:

1) באמצעות טור הפורייה $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$, חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

2) נתון כי טור הפורייה הממשי של $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הינו $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin\left((2k-1)x\right)$. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le\pi\\ x+\pi & -\pi\le x<0\end{cases}$ ו- $g(x)=x$.

מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

4) מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x\le\pi\\ 0 & -\pi<x\le 0\end{cases}$ ובאמצעותו חשבו את הסכום $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

5) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le\pi\\ e^{x^2} & -\pi\le x<0\end{cases}$ ו- $g(x)=\begin{cases}0 & 1<x\le\pi\\ \frac{1}{x^2+1} & 0\le x\le 1\\ 0 & -\pi\le x<0\end{cases}$.

נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- $g\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}g_ne^{inx}$, $f\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_ne^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_n\cdot\overline{g_n}=\frac{1}{8}$.

6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π:

$$f(x)=\sinh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\quad,\quad -\pi\le x<\pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi<x<3\pi$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+n^2\right)^2}$.

7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi,\pi]$ על ידי הנוסחה: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}}e^{inx}$.

חשבו $\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x+\pi)-f(x)\right|^2dx$.

8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $p\neq 0$

כדי להוכיח את הזהות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$.

9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}h^2 & h\le x\le\pi\\ 0 & -\pi\le x\le h\end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$

כאשר $0\neq h\in[-\pi,\pi]$ ובשוויון פרסבל כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos(2n)}{n^2}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{32}$.

ג. הסיקו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi^2}{6}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) $\frac{\pi^2}{4}$

5) הוכחה.

6) א. ראו סרטון. ב. $\sinh(x)\sim-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}\frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi}\sin(nx)$

ג. ≈ 0.769

7) 8π

8) הוכחה.

9) $\frac{\pi^2-4}{4}$

10) א. $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi\left(1-4n^2\right)}e^{inx}$ ב. הוכחה.

ג. ראו סרטון.

רימן לבג:

שאלות:

1) חשבו $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x}\cos\left(\sqrt{|x|}\right)\sin(nx)\,dx$.

2) חשבו $\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2+1}e^{i\cdot n^2 t}\,dt$.

3) הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(n\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{x}\frac{se^{s^2}\,ds}{\sqrt{s^2+2017}}e^{inx}\,dx\right)=0$.

תשובות סופיות:

1) 0
2) 0
3) הוכחה.

משפט דיריכלה:

שאלות:

1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$ לטור פורייה ממשי $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$.

היעזרו בפיתוח זה כדי להוכיח $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$.

רמז: הציבו $x=\frac{\pi}{2}$.

2) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π: $f(x)=\begin{cases}2+\frac{2x}{\pi} & -\pi<x<0\\ 2 & 0<x<\pi\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) במרחב הפונקציות $L^2_{PC}[-\pi,\pi]$ נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$.

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $f(x)$.

ב. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

ד. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\cos(ax)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר a אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

א. $\frac{1}{\sin(\pi a)}=\frac{1}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{\pi a+\pi n}+\frac{1}{\pi a-\pi n}\right]$

ב. $\cot(\pi\alpha)=\frac{1}{\pi\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\alpha+\pi n}+\frac{1}{\pi\alpha-\pi n}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. ראו סרטון.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi n}\sin(nx)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)+\frac{3}{2}\sim f(x)$ ג. הוכחה.

3) א. $x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$ ב. $\frac{\pi^4}{90}$ ג. $\frac{\pi^2}{-12}$ ד. $\frac{\pi^2}{6}$

4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0<x<\pi$

מתקיים $x=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=1$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ והוכיחו כי:

א. לכל $0<x<\pi$ מתקיים $1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}=-\frac{\pi}{4}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$
ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח $f'(x)\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$).

נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ אזי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ מתכנס בהחלט.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x(\pi-x)$ בקטע $[0,\pi]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?
שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$.

ד. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x)=\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ בקטע $[0,\pi]$.

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$. רמז: הציבו $x=0$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x^2}$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

נסמן $f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}\left|c_ne^{inx}\right|$ פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|$ מתכנס?

ב. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|$ מתכנס?

ג. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$ מתכנס?

4) נתבונן בטור הפורייה $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{in(x+i)}$.

כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}$ בקטע $(0,2\pi)$.

ב. נסמן $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ באופן מפורש (ללא טור) בקטע $(0,2\pi)$.

6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi,\pi]$, גזירה ברציפות למקוטעין k פעמים כך שמתקיים $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$ לכל $j=0,1,...k-1$. נסמן $f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}(n^k c_n)=0$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f(x)\in L^2{}_{PC}[-\pi,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$ ו-$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$. הראו כי מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx\le\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx$.

ב. תהי $f(x)\in L^2{}_{PC}[0,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0)=f(\pi)=0$.

הראו כי מתקיים $\int_{0}^{\pi}|f(x)|^2dx\le\int_{0}^{\pi}|f'(x)|^2dx$.

8) נגדיר $f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}e^{in^2x}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

9) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}\sin(n^{2.5}x)$

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

10) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{1.4}}+\frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$.

א. האם f רציפה?

ב. האם f גזירה ברציפות?

11) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^4}$. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

12) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3.1}+i\cdot n^{2.2}}\cdot e^{inx}$. הוכיחו כי f גזירה ברציפות פעמיים.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. $[0,\pi]$ $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin([2k-1]x)$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

ה. $[0,\pi]$ $\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\sim\frac{\pi^3}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi(2k-1)^4}\cos([2k-1]x)$ ו. הוכחה.

3) א. $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\cdot nc_n\right|\le\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2<\infty$ ב. $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|<\infty$

ג. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$

4) ראו סרטון.

5) א. הוכחה. ב. $-\frac{\pi}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+\frac{\pi^2}{6}x$

6) הוכחה.

7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

10) א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{.4}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2.8}}<\infty$ ב. נניח בשלילה כי f גזירה ברציפות.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי הפונקציה $g(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ \pi-x & 0\le x<\pi\end{cases}$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $g(x)$.

ב. עבור $-\pi\le x\le\pi$ נגדיר את הפונקציה $h(x)=a\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\int_{-\pi}^{x}g(t)\,dt$

כאשר $g(x)$ מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של a מתכנס טור פורייה של $h(x)$ במידה שווה ל-$h(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) נגדיר פונקציה $f(x)=|\sin(x)|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב-$f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של f ושל f'.

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחישבתם?

שרטטו את הגרפים של פונקציות אלו בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f' במידה שווה?

תשובות סופיות:

1) א. $g(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(2k\cdot x)$ ב. $a=-\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $f(x)\sim\left(\frac{2}{\pi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{-4}{(2k+1)(2k-1)}\right]\cos(2k\cdot x)$,

$f'(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{8k}{(2k+1)(2k-1)}\right]\sin(2k\cdot x)$ ב. $f'(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$

ג. $f(x)$ פונקציה רציפה, מחזורית-2π, הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של $f'(x)$ יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו: $[\pi n+\delta,\pi(n+1)-\delta]$

לכל $0<\delta<\pi$ ולכל n שלם.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[0,2\pi]$.

2) תהי הפונקציה $f(x)=\min\{1,|x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2,2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0,2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2}$.

4) פתחו את $f(x)=|x|$ לטור פורייה בקטע $[-1,1]$.

5) פתחו את $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ 2-x & 1<x<2\end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0,2]$.

6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x)=f(x+2)$ ובנוסף $-1\le x<1$ $f(x)=2-|x|$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$.

ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1,1]$?

7) מצאו טור קוסינוסים $f(x)=x$ בקטע $[0,3]$.

8) פתחו את $f(x)=\cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0,\pi]$.

תשובות סופיות:

1) $0 \le x \le 2\pi$ $$x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx$$

2) א.
$$b_n = 0 \quad , \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & else \end{cases}$$

ב. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3) א. $$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1|\, 4n^2\pi^2} e^{in\pi x}$$ ב. ראו סרטון. ג. $\frac{3-e}{4(e-1)}$

4) $$|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\pi [2k-1] x\right)$$

5) $$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi [2k-1] x}{2}\right)$$

6) א. $$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos\left([2k-1]\pi x\right)$$ ב. $\frac{\pi^4}{96}$ ג. $\frac{\pi^2}{8}$

ד. אם f רציפה בקטע $[a,b]$, $f(a) = f(b)$ ו-f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל-f בקטע $[a,b]$.

7) $$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3} x\right)$$

8) $$\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4 - [2k-1]^2} \sin\left([2k-1]x\right)$$

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π אז $(f*g)_{(x)}$ מחזוריות- 2π.

2) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין, מחזוריות- 2π ופונקציות זוגיות אז $(f*g)_{(x)}$ זוגית.

3) נתונה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=\sqrt{2\pi}\cdot\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x)$.

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$.

הערה: $\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

4) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=x^2$, $g(x)=\cos(x)$.

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

5) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=x$, $g(x)=\chi_{[0,1]}(x)$.

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) $\pi - x$

4) לכל $-\pi \le x \le \pi$, $(f*g)_{(x)} = -2\cos(x)$

5) $$(f*g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(x^2 - (x-1)^2\right) & -\pi+1 \le x \le \pi \\ \frac{1}{4\pi}\left[x^2 - \left(x+(2\pi-1)\right)^2\right] & -\pi \le x \le -\pi+1 \end{cases}$$

גרעין דיריכלה:

שאלות:

1) נגדיר $D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}$ (גרעין דיריכלה).

א. הוכיחו כי $D_n(x)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$.

ב. הוכיחו כי $D_n(x)=\dfrac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ עבור $x\neq 2\pi m$.

2) חשבו לכל ערך של n שלם את ערכו של הביטוי $I(n)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\dfrac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin(100x)\,dx$.

3) הוכיחו כי $I=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\left[\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\right]}{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}dx=2(n+1)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

4) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$. נסמן $S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}$ טור פורייה חלקי.

הוכיחו כי $(f*D_n)_x=S_n(x)$.

5) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{arctg(x-1)\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{e^{(x-1)^2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}dx$.

6) נגדיר $S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{2001}{2}t}{\sin t}2\cos\frac{t}{2}\cos^{17}\left(e^{\sqrt{|x-t|}}\right)dt$.

יהיו a_n , b_n מקדמי פורייה הממשיים ו- c_n מקדמי פורייה המרוכבים, של הפונקציה $S(x)$.

חשבו את b_{500} , c_{1001}.

רמז: $S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)\,f(x-t)dt$ כאשר $D_N(t)$ גרעין דיריכלה מסדר N ו- S_N טור פורייה החלקי ה- N -י של f.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

2) 0

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) $-\frac{\pi^2}{2e}$

6) $b_{500}=0$, $c_{1001}=0$

גרעין פוואסון:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי לכל $0<r<1$ מתקיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{inx}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$.

ב. גרעין פוואסון נתון על ידי $P_r(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π וטור פורייה שלה נתון על ידי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הראו כי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}$.

ג. הוכיחו את התכונות הבאות של גרעין פוואסון:

i. $P_r(x)\geq 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to 1-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$ מתקיים.

ד. תהי $f(x)$ רציפה ומחזורית 2π ועם טור פורייה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}\xrightarrow{r\to 1-}f(x)$ במידה שווה.

הערה: ניתן להיעזר במשפט הבא: אם סדרת פונקציות $P_r(x)$ מקיימת את התכונות הבאות:

i. $P_r(x)\geq 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to 1-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$ מתקיים.

אזי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt\xrightarrow{r\to 1-}f(x)$ במידה שווה.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה $f(t)=e^{i\alpha t}$ בתחום $-\pi \le t \le \pi$ כאשר α הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\alpha}{\left[\alpha^2-n^2\right]}=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}-\frac{1}{\alpha}$.

ג. הראו שמתקיים $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{\left[\alpha-n\right]^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$.

ד. הראו שמתקיים $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left((2n+1)^2-\alpha^2\right)}=\frac{\pi}{4\alpha^2}\left(\frac{1}{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}-1\right)$.

2) נגדיר $f(x)=|x|$ במרחב $L^2_{PC}\left(\left[-\pi,\pi\right]\right)$ ונסמן ב-$f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של f.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום $(-\infty,\infty)$?

$$\sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{1}{7}\sin(7x)+\ldots$$

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$.

3) תהי $f\in L^2_{PC}\left(\left[-\pi,\pi\right]\right)$.

נסמן ב-c_n את מקדמי פורייה (המרוכבים) של f.

נסמן $d_n=\mathrm{Re}\{c_n\}$ ובנוסף נתון כי:

- f ממשית.
- f מתאפסת על הקטע $[-\pi,0]$.
- מתקיים השיוויון $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}d_n e^{inx}=x^2e^{|x|}\cos(x)$.

מצאו את f.

4) תהי f פונקציה זוגית בעלת מחזור 2π המקיימת $f(x)=\cos(2x)$ בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ ו-$f(x)=-1$ בתחום $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.

מצאו את טור פורייה הממשי של f וחשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$.

האם טור פורייה של f מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

5) נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית 2π.

נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_n e^{inx}$ ויהי $h>0$ פרמטר כלשהו.

מצאו את מקדמי פורייה של $h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(t+x)dt$ כתלות ב-f_n.

תשובות סופיות:

1) א. $e^{i\alpha t}\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\sin(\pi\alpha)}{[\alpha-n]\pi}\cdot e^{in\cdot t}$ ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

2) א. $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos([2k+1]x)$

ב. $\begin{cases}\frac{\pi}{4} & \pi k<x<\pi(k+1)\\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1)<x<\pi k\\ 0 & x=\pi k\end{cases}$, כאשר k מספר שלם. ג. $\frac{\pi^2}{8}$

3) $f(x)=\begin{cases}2x^2e^{|x|}\cos(x) & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x\le 0\end{cases}$

4) התכנסות במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$- אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ ו-$f'\in E[-\pi,\pi]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל-f בקטע $[-\pi,\pi]$.

5) f_0

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 15 - התמרת פורייה

תוכן העניינים

1. מבוא כללי 174
2. נוסחת כיווץ והזזה 176
3. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה 178
4. נוסחת התמרה כפולה ..... (ללא ספר)
5. נוסחת הנגזרת 180
6. נוסחת המומנט 181
7. נוסחת ההתמרה ההפוכה 183
8. משפט פלנשראל 184
9. משפט הקונבולוציה 185
10. תרגילים מסכמים 189

מבוא כללי:

שאלות:

1) חשבו את התמרת פורייה של $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$.

2) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$.

3) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & else\end{cases}$.

4) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 2 & 1<|x|<2\\ 0 & else\end{cases}$.

5) הוכיחו כי התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & x>0\\ e^{bx} & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים הינה
$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{b-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\right]$.

6) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

7) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 2 & 1\le x<2\\ 0 & else\end{cases}$.

8) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & 0\le x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

9) הוכיחו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{2ix} & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$ הינה $f(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$.

10) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

11) חשבו את התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}x & |x|<a\\ 0 & else\end{cases}$ עבור $a>0$.

12) האם קיימת $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\begin{cases}1-|\omega| & |\omega|\le\frac{1}{2}\\ 0 & |\omega|>\frac{1}{2}\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\frac{1-\cos(\omega)}{\pi\omega^2}$

3) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi(1+i\omega)}$

4) $f(\omega)=\frac{2\sin(2\omega)-\sin(\omega)}{\pi\omega}$

5) הוכחה.

6) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\omega)+i\left[\cos(\omega)-1\right]}{\omega}$

7) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{1+e^{-i\omega}-2e^{-i2\omega}}{i\omega}$

8) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1-i\omega}$

9) הוכחה.

10) $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sin([1-\omega])}{1\quad\omega}-\frac{\sin([1+\omega])}{1\,|\,\omega}\right\}$

11) $f(\omega)=-\frac{1}{\pi}i\frac{\sin(\omega a)-\omega a\cos(\omega a)}{\omega^2}$

12) לא. אינה רציפה בנקודות $\omega=\pm\frac{1}{2}$.

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-r,r]\\ 0 & else\end{cases}$ כאשר $r>0$.

2) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה

כי $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) נתונה פונקציה $g(x)\in G(R)$ בעלת התמרת פוריה $g(\omega)$.

מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב-$g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

4) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-ax^2}$ כאשר $a>0$.

רמז: $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\cos(4\pi\omega)\cdot\frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.

רמז: $F\left\{\chi_{[-1,1]}(x)\right\}=\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\frac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{16}}$

3) $f(x)=\frac{g(x+1)+g(x-1)}{2}$

4) $f(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}}$

5) $f(x)=\frac{\pi}{2}\begin{cases}1 & 4\pi-2\le x\le 4\pi+2 \ \ or \ \ -4\pi-2\le x\le -4\pi+2 \\ 0 & else\end{cases}$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

1) הוכיחו כי התמרת פורייה של $F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)}=\frac{1}{\pi i}\frac{2c\cdot\omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$.

2) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1}-\frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$.

3) הוכיחו כי התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases}\sin(ax)e^{-bx} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים,
הינה $g(\omega)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{bi-(\omega-a)}-\frac{1}{bi-(\omega+a)}\right]$.

4) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\cos(2x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה
כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\sin^2(3x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה
ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

6) נניח כי $f(x)\in G(R)$ ונגדיר $g(x)=f(3x-2)\cdot\cos(x)$. בטאו את $g(\omega)$ על ידי $f(\omega)$.

7) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=e^{3i\omega}\cdot e^{-|\omega-2|}$. רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

8) תהי $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$.
חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

א. $H(x)e^{-ax}$ כאשר $a>0$.

ב. $H(x)e^{-ax}\cos(bx)$ כאשר $a,b>0$.

ג. $H(x)e^{-ax}\sin(bx)$ כאשר $a,b>0$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $f(x)=2\pi i\cdot\chi_{[-1,1]}(x)\cdot\sin(x)$

3) הוכחה.

4) $$F\left\{e^{-|x|}\cos(2x)\right\}=\frac{1}{2\pi\left(1+\left[\omega+2\right]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+\left[\omega-2\right]^2\right)}$$

5) $$g(\omega)=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}-\left[\frac{1}{2\pi\left(1+\left[\omega+6\right]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+\left[\omega-6\right]^2\right)}\right]$$

6) $$g(\omega)=\frac{1}{6}\left[e^{-i\frac{2}{3}(\omega+1)}f\left(\frac{\omega+1}{3}\right)+e^{-i\frac{2}{3}(\omega-1)}f\left(\frac{\omega-1}{3}\right)\right]$$

7) $$F\left\{e^{2i[x+3]}\frac{2}{1+\left[x+3\right]^2}\right\}$$

8) א. $$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)}$$

ב. $$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a+i\left[\omega-b\right]}+\frac{1}{a+i\left[\omega+b\right]}\right)$$

ג. $$\frac{1}{4\pi i}\left(\frac{1}{a+i\left[\omega-b\right]}+\frac{1}{a+i\left[\omega+b\right]}\right)$$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

1) נניח כי $f(x)\in G$ גזירה, מקיימת $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$, $f'(x)\in G$ ו- $f(\omega)=\frac{\omega}{1+\omega^{30}}$.
מצאו התמרת פורייה של $f'(x)\cos(2x)$.

2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $F\left\{\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}\right\}_\omega=\left(-\frac{1}{2}\right)(i\omega)\frac{1}{2|a|}e^{-|\omega a|}$.

3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\omega^2e^{-|\omega|}$.
רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{i\cdot\frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}}+i\cdot\frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2}$

2) הוכחה.

3) $f(x)=(-2)\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$

נוסחת המומנט:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases}x & x\in(-1,1)\\ 0 & else\end{cases}$ על ידי שימוש בנוסחה $F\{x\cdot f(x)\}=i\frac{d}{d\omega}f(\omega)$.

2) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x^2e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x\cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}$.

4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x)=e^{-x^2}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=8x^3e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$.

6) תהי $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^5} & x\geq 1\\ 0 & x<1\end{cases}$.

הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

7) נתון כי התמרת פורייה של $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega)=\frac{1}{1+|\omega|}$.

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}|x\cdot f(x)|dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

1) $i\cdot\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\pi\omega^2}$

2) $F\left\{x^2e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{\omega^2}{2}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

3) $F\left\{x\cdot e^{-|x|}\right\}=-\frac{i}{\pi}\frac{2\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$

4) $f\left(\omega\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) $f\left(\omega\right)=\frac{1}{256}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\left(27i\omega^3+216\omega^2-792i\omega-1088\right)e^{i\omega-\frac{3\omega^2}{16}-\frac{5}{3}}$

6) הוכחה.

7) הוכחה.

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)}d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

2) חשבו $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{\sin(\omega)\cos(\omega x)}{\pi\omega}d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

1) ראו סרטון.

2)
$$\begin{cases}0 & |x|>1\\ 1 & |x|<1\\ \frac{1}{2} & x=1\ ,\ x=-1\end{cases}$$

משפט פלנשראל:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x)=\chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a>0$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\frac{\sin(bx)}{x}dx$ עבור $a,b>0$.

2) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

3) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)}dx=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})\cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=\frac{\sin(\omega a)}{\pi\omega}$ ב. $\pi\cdot\min\{a,b\}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)}$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & else \end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים.

2) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים $x > 0$ ו- $x \le 0$.

3) מצאו פונקציה $f \in G$ כך ש- $f(\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2$.

4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$

המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$.

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t) \in E$ מתקיים השוויון.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t) - f''(t)\right) g(x-t) dt = 2f(x)$$.

5) נגדיר $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.

תזכורת: $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$.

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|} + |x| e^{-|x|}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}dx=\frac{\pi}{3}$.

8) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[1,2]}(x)$.

9) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,2]}(x)$.

10) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}$.

11) חשבו את הקונבולוציה $\left(e^{-x^2}*e^{-x^2}\right)_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f(x-t)dt=e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$.

13) נניח כי $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy\equiv 0$ הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$.

תשובות סופיות:

1) $\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x\in[-2,0] \\ 2-x & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$

2) $\left(f * f\right)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x\in[-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$

4) $g(x) = e^{-|x|}$

5) $\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{x^2+9}$

6) א. $\frac{2}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$ ב. $f(x) = e^{-|x|}$

7) א. $\left(f * f\right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>2 \\ 2-x & 1<x<2 \\ x & 0<x<1 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ ב. הוכחה.

8) $\left(f * f\right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>4 \\ 4-x & 3<x<4 \\ x-2 & 2<x<3 \\ 0 & x<2 \end{cases}$

9) $$(f*f)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>4\\ 4-x & 2<x<4\\ x & 0<x<2\\ 0 & x<0\end{cases}$$

10) $$\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>3\\ 3-x & 2<x<3\\ x-1 & 1<x<2\\ 0 & x<1\end{cases}$$

11) א. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$

12) $$f(x)=\sqrt[4]{\frac{6}{\pi}}e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

13) הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $g(x)=\begin{cases}\cos(x) & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ג. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)\sin(x)}{(1-x^2)}dx$.

ד. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^2}\sin^2(\pi x)dx$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x)=x\cdot e^{-|x|}$.

ב. מצאו את כל הפונקציות $h(y)$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} h'(y)e^{-|x-y|}dy = x\cdot e^{-|x|}$.

3) יהי $A>0$ קבוע. נגדיר $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le A\\ 0 & else\end{cases}$.

ידוע כי ישנה פונקציה $g(x)\in G$ המקיימת $g(\omega)=f(\omega)f(-\omega)$.

מצאו במפורש את $g(x)$.

4) נניח כי $f(x)\in C^2(-\infty,\infty)$ כך ש-$f'(x), x\cdot f'(x), f''(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$

ומתקיים $f''(x)+x\cdot f'(x)+f(x)=0$ לכל x ממשי.

א. הוכיחו כי $f(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$.

ב. חשבו את $f(\omega)$ אם נתון כי $f(0)=1$.

ג. מצאו את $f(x)$.

5) תהי $f(x)=\begin{cases}2 & |x|\le 1\\ 4 & 1\le|x|\le 2\\ 0 & else\end{cases}$.

א. חשבו את $f(\omega)$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\left[2\sin(2t)-\sin(t)\right]^2}{t^2}dt$.

ג. חשבו את האינטגרל $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{2\sin(2t)-\sin(t)}{\pi t}\cos(t)\,dt$.

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x^2}{\pi^2} & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ב. חשבו את האינטגרלים: $\int_0^\infty\left(\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\right)^2dx$

ו- $\int_0^\infty\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\cos(x)\,dx$.

7) נגדיר $\phi(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. הוכיחו כי המערכת $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורותונורמלית ב- $L^2_{PC}(-\infty,\infty)$.

8) תהי $f\in G$ פונקציה כך ש- $f'\in G$ פונקציה רציפה. מצאו פונקציה $g\in G$ המקיימת את המשוואה $g(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{u-t}g(u)\,du+f'(t)$.

9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{1}{\left(1+\omega^2\right)^2}$.

10) פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+b^2}dt=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}$.

11) נגדיר $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(\omega-t)\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(t)e^{i\omega x}dtd\omega$.

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור $f(x)$.

תזכורת: $\chi_{[a,b]}(t)=\begin{cases}1 & t\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

12) השתמשו במשפט פלנשראל על מנת לחשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)\left(x^2+b^2\right)}dx$

כאשר $a,b>0$.

13) מצאו את התמרת הפורייה של $f(x)=e^{-\left(x^2+2x+5\right)}$.

14) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos(bx)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$ לכל $a,b>0$ קבועים.

15) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(x)\cos(x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8e}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$.

16) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\sin^3(x)xe^{-x}dx=\frac{9}{25}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\sin(\omega\pi)\cdot\frac{2}{1-\omega^2}$ ב. $g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\omega\sin(\omega\pi)}{1-\omega^2}$

ג. $\frac{\pi}{2}\sin(1)$ ד. $\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $-\frac{2i\omega}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$ ב. $h(y)=-e^{-|y|}$, $-h(y)=e^{-|y|}$

3)
$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(A+x)^3}{3}-\frac{(A+x)^2}{2}x\right) & -A<x<0\\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{A^3}{3}-\frac{A^2}{2}x+\frac{x^3}{6}\right) & 0<x<A\\ 0 & else\end{cases}$$

4) א. הוכחה. ב. $e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ ג. $\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

5) א. $\frac{4\cdot\sin(2\omega)-2\cdot\sin(\omega)}{\pi\omega}$ ב. $\frac{5\pi}{2}$ ג. $\frac{3\pi}{2}$

6) א. $2\frac{\sin(\pi\omega)-\pi\omega\cos(\pi\omega)}{\pi^3\omega^3}$ ב. $\frac{1}{15}$ ו- $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)$

7) הוכחה.

8) $g(t)=f(t)+f'(t)$

9)
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}e^{x}(1-x) & x<0\\ \frac{\pi}{2}e^{-x}(1+x) & x>0\end{cases}$$

10) $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{b}{a}\frac{(a-b)x}{\left(x^2+(a-b)^2\right)^2}$

11) $f(x)=4\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2}$

12) $\frac{\pi}{a+b}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\frac{\omega}{b^2+\omega^2}d\omega$

13) $f(\omega)=\frac{1}{e^4}\cdot e^{i\omega}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

14) הוכחה.

15) הוכחה.

16) הוכחה.

משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 16 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

1. קטע אינסופי ..... (ללא ספר)
2. קטע חצי אינסופי ..... (ללא ספר)
3. הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית ..... (ללא ספר)