

# משוואות דיפרנציאליות רגילות



## תוכן העניינים

|           |                                    |     |
|-----------|------------------------------------|-----|
| 1.        | משוואות מסדר ראשון                 | 1   |
| 23.       | משוואות ליניאריות מסדר שני         | 23  |
| 38.       | משוואות ליניאריות מסדר n           | 38  |
| 47.       | מערכת משוואות ליניאריות            | 47  |
| 57.       | שימושים של משוואות דיפרנציאליות    | 57  |
| 65.       | בעיות שטורם ליוביל                 | 65  |
| 70.       | פרקי חזרה - אינטגרלים              | 70  |
| 92.       | טורי פורייה                        | 92  |
| 116.      | מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים | 116 |
| (ללא ספר) | 10. משוואת הגלים                   |     |
| (ללא ספר) | 11. משוואת החום                    |     |
| (ללא ספר) | 12. משוואת לפלס                    |     |

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

### תוכן העניינים

|                                                |           |
|------------------------------------------------|-----------|
| 1. מבוא                                        | (ללא ספר) |
| 2. הפרדת משתנים                                | 1         |
| 3. משוואה הומוגנית                             | 3         |
| 4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$   | 5         |
| 5. משוואה מדויקת                               | 6         |
| 6. גורם אינטגרציה                              | 8         |
| 7. משוואה לינארית מסדר ראשון                   | 11        |
| 8. משוואת ברנולי                               | 13        |
| 9. משוואת ריקטי                                | 14        |
| 10. הצבות שונות ומשונות                        | 15        |
| 11. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד    | 16        |
| 12. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון | 19        |
| 13. משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה            | 21        |

## הפרדת משתנים

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2)=1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

## תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x| - c}, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

## משוואה הומוגנית

## שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-8 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2 y' = xy y' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xy e^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 \quad (9) \text{ נתונה המשוואה}$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $n$ , על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של  $n$  שנמצא בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

## משוואה מהצורה $(ax + by + c)dx + (dx + ey + f)dy = 0$

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y+2} \quad (1)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (4)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} - 1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} + 1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right| + (-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right] + c \quad (4)$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) + c \quad (5)$$



## משוואה מדויקת

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-6:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right)dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } (3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0, \text{ כאשר } k \text{ קבוע.}$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $k$ , על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של  $k$  שנמצא בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

## גורם אינטגרציה

### שאלות

(1) הראו שהמשוואה  $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$  אינה מדויקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $\frac{1}{xy^3}$ .

(2) הראו שהמשוואה  $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0$

אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $ye^x$ .

(3) הראו שהמשוואה  $(x+2)\sin y dx + x \cos y dy = 0$  אינה מדויקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $xe^x$ .

פתרו את המשוואות בשאלות 4-9:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0 \quad (5)$$

$$(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0 \quad (6)$$

$$(y^2 - y)dx + xdy = 0 \quad (7)$$

$$(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0 \quad (8)$$

$$y(1) = -1 ; \quad y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4} \quad (9)$$

$$(10) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \text{נתונה מד"ר לא מדויקת}$$

א. הוכיחו: אם  $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$ , אז  $e^{\int f(x)dx}$  הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכיחו: אם  $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$ , אז  $e^{-\int g(y)dy}$  הוא גורם אינטגרציה.

$$(11) \quad \text{נתונה המשוואה הדיפרנציאלית } (y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0$$

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של  $xy$  בלבד. כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה  $\mu(xy)$ .

$$(12) \quad \text{נתונה המשוואה } (5x^2 + 3y^3 + 2xy)dx + (3x^2 + 3xy^2 + 6y^3)dy = 0$$

מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה  $\mu(x+y)$ .

$$(13) \quad \text{נתונה המשוואה הדיפרנציאלית } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $\frac{x}{y}$  בלבד.

$$(14) \quad \text{נתונה המשוואה הדיפרנציאלית } (x^2y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0$$

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של  $x^\alpha y^\beta$ . כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה  $\mu(x^\alpha y^\beta)$ .

$$(15) \quad \text{נתונה המשוואה הדיפרנציאלית } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $xy$  בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה  $(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$ .

$$(16) \quad \text{נתונה המשוואה הדיפרנציאלית } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $x+y$  בלבד.

## תשובות סופיות

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (10)$$

$$\mu(xy) = (xy)^2 \quad (11)$$

$$\mu(x+y) = (x+y)^2 \quad (12)$$

$$\text{if: } \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} = h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM}} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{xy^3} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{ב.} \quad \text{if: } \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}} \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$\text{if: } \frac{M_y - N_x}{N - M} = h(x+y) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}} \quad (16)$$

## משוואות ליניאריות מסדר ראשון

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2 z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

## תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[ \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) \left[ x^2 - 4x + C \right] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} \left[ -5e^{\cos x} + C \right] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x \left[ -\cot x + C \right] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2 (y + c) \quad (9)$$

## משוואות ברנולי

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left( \frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left( \frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$



## משוואות ריקטי

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (1)$$

$$y' = 1 + (x - y)^2 \quad (2)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}} \quad (1)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x} \quad (3)$$

## הצבות שונות ומשוונות

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y' = \cos(y - x) \quad (1)$$

$$y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right); y(1) = 0 \quad (2)$$

$$y' - x^2 y + y^2 = x - \frac{x^4}{4}, y(0) = 1 \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{1}{\sin z} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}\right) \quad (2)$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} \quad (3)$$

## משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

### שאלות

(1) נתונה הבעיה  $y(2) = -1$ ,  $y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$ .

א. הוכיחו ש-  $y_1(x) = -x + 1$ ,  $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2$  הם פתרונות לבעיה.

קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

(2) נתונה הבעיה  $y(0) = 0$ ,  $y' = \sqrt[3]{y} + 4$ .

א. הוכיחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכיחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכיחו שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

(3) פתרו את הבעיה  $y(4) = 0$ ,  $y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$ .

(4) נתונה הבעיה  $y(0) = 4$ ,  $y' = (y-1)(x^2 + y)^5$ .

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

(5) נתונה המד"ר  $ydx = (2x + y^3)dy$ .

א. הראו שעבור  $x = x(y)$  המד"ר ליניארית מסדר ראשון,

ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,

מהן נקודות ההתחלה  $(x_0, y_0)$ , כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,

העובר דרך  $(x_0, y_0)$ .

צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.

מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך  $(x_0, y_0)$ ?

$$(6) \quad \begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו 3 קירובי פיקארד לפתרון הבעיה.  
 ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר  $n$  (הוכיחו באינדוקציה).  
 ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר  $n$  מתכנס לפתרון כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

$$(7) \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{x} |\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases} \quad \text{כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה} \quad (x > 0) ?$$

$$(8) \quad \begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.  
 ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.  
 ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(9) \quad \begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.  
 ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.  
 ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(10) \quad \begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(11) \quad \begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(12) \quad \begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

## תשובות סופיות

- (1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.
- (2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.
- (3)  $y(x) = 0$
- (4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- (5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.  
ב. כל נקודת התחלה  $(x_0, y_0)$ , שעבורה  $y_0 \neq 0$ .  
הקטע הארוך ביותר:  $(0, \infty)$  או  $(-\infty, 0)$ .
- (6) א.  $y_0(x) = 1, y_1(x) = 1 + x^2, y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}, y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$   
ב.  $y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$ . ג. הוכחה.
- (7) אחד.
- (8) א.  $[-0.08, 0.08]$  ב.  $[-0.1, 0.1]$  ג. הוכחה.
- (9) א.  $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$  ב.  $[-0.5, 0.5]$  ג. הוכחה.
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.

## פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

### שאלות

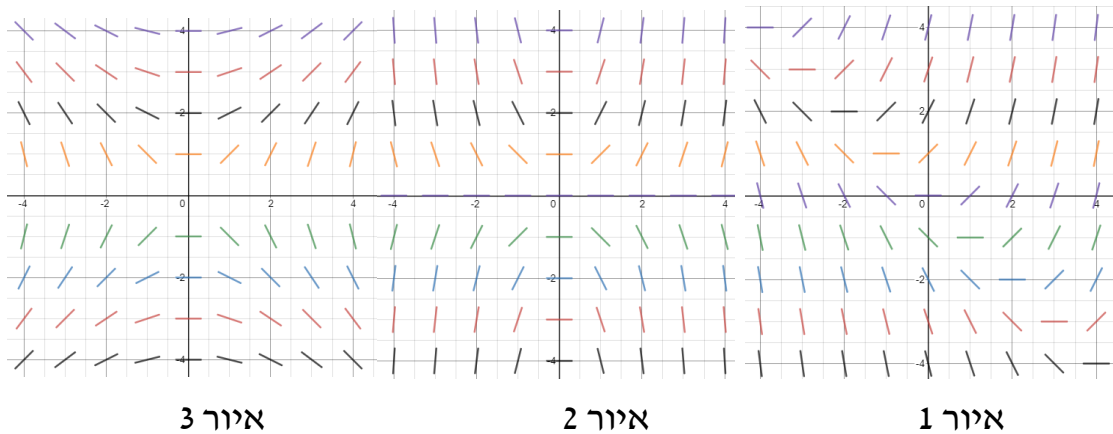
(1) שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית  $y' = 2y - x$ .

(2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

א.  $y' = \frac{x}{y}$

ב.  $y' = xy$

ג.  $y' = x + y$



(3) נתונה המד"ר  $y' = y - x$ ,  $y(0) = 2$ .

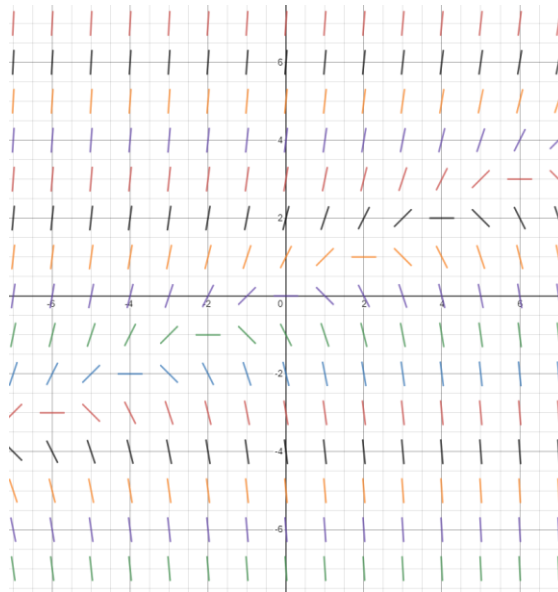
מצאו בקירוב את  $y(1)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.1$ .

(4) נתונה המד"ר  $y' = x + y$ ,  $y(1) = 2$ .

מצאו בקירוב את  $y(2)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.2$ .

## תשובות סופיות

(1)



(2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

(3)  $y(1) = 4.593$

(4)  $y(2) = 6.95328$

## משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן  $p = y' = \frac{dy}{dx}$ .

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$(p = y') \quad 4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$(p = y') \quad x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (2)$$

$$(p = y') \quad xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (3)$$

$$(p = y') \quad y = 2px + p^4 x^2 \quad (4)$$

$$(p = y') \quad xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (5)$$

$$(p = y') \quad (y > 0) \quad 6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (6)$$



## תשובות סופיות

$$(y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left( \ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (1)$$

$$(\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0 \quad (2)$$

$$\left( y + 0.5x - \frac{c_1}{x} \right) \cdot \left( \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2 \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (5)$$

$$6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0 \quad (6)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 2 - משוואות ליניאריות מסדר שני

### תוכן העניינים

1. משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה ..... 23
2. משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים ..... 25
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל" ..... 27
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם" ..... 29
5. וריאציית פרמטרים ..... 31
6. משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משוואת אוילר ..... (ללא ספר)
7. משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל ..... 32
8. הוורונסקיאן ושימושו ..... 33
9. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני ..... 35
10. השיטה האופרטורית ..... 36

## משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(x \neq 0) \quad x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y'' \tan x - 1 = y' \quad (2)$$

$$2xy'y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6)$$

$$2y''y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

$$(\cos y \neq 0) \quad y'' \tan y = 2(y')^2 \quad (8)$$

## תשובות סופיות

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1 (x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k; y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[ \frac{c^2 (x + k)^4}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = -(cx + k); y = c \quad (8)$$

## משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-11:

$$y'' - 100y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (3)$$

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = 1, \quad 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (4)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (5)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 10y' + 125y = 0 \quad (8)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3; \quad y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{a^2} y(x) = 0 & (a > 0) \\ y(0) = 4 \\ y(\infty) = y(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$(12) \quad y y'' + (y')^2 = 0 \quad \text{נתונה המד"ר}$$

א. הראו כי  $y_1 = 4$  ו-  $y_2 = \sqrt{x}$  הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראו כי הפתרון  $z(x) = y_1(x) + y_2(x)$ , אינו פתרון של המד"ר.

האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

### תשובות סופיות

$$(1) \quad y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x}$$

$$(2) \quad y = c_1 + c_2 e^{4x}$$

$$(3) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{7x}$$

$$(4) \quad z = e^x$$

$$(5) \quad y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$(6) \quad x(t) = c_1 e^{\frac{-t}{2}} + c_2 t e^{\frac{-t}{2}}$$

$$(7) \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$(8) \quad y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x]$$

$$(9) \quad y = e^2 \sin 3x$$

$$(10) \quad y = e^{\frac{-4x}{5}} \left[ c_1 \cos \left( \frac{2}{5} x \right) + c_2 \sin \left( \frac{2}{5} x \right) \right]$$

$$(11) \quad y = 4e^{-\frac{|x|}{a}}$$

(12) שאלת הוכחה.

## השוואות מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4\sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (8)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (9)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$



## השוואות מקדמים בשיטת "המרשם"

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (8)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (9)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (10)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (7)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (9)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (10)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## וריאציית פרמטרים

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 ; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (5)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[ \ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-2x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[ \frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} \left[ 2(x+1)^{3/2} \right] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1+e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1+e^{-x}) - (1+e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

## משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

### שאלות

(1) פתרו  $y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$ , כאשר ידוע  $y_1(x) = e^{2x}$ .

(2) פתרו  $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ .

(3) הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$(1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x}, \quad (0 < x < 1),$$

כאשר ידוע ש-  $y_1(x) = e^x$ , פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

### תשובות סופיות

(1)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$

(2)  $y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$

(3) שאלת הדגמה.

## הוורונסקיאן ושימושו

### שאלות

- (1) האם ייתכן כי  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = \sin x$  הם שני פתרונות של המשוואה  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  עם מקדמים רציפים בקטע  $[0, \pi]$ ?
- (2) הראו כי הפונקציות  $y_1(x) = \sin x^2$ ,  $y_2(x) = \cos x^2$  הן פתרונות בת"ל של המשוואה  $xy'' - y' + 4x^3y = 0$  בקטע  $(-4, \infty)$ .  
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור  $x = 0$ .  
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?
- (3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות  $y_1(x) = xe^x$ ,  $y_2(x) = e^{-x}$  הן פתרונות של המשוואה  $y'' - \frac{2}{1+2x}y' - \frac{2x+3}{1+2x}y = 0$  בקטע  $(-\frac{1}{2}, \infty)$ .  
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?
- (4) נתונות שתי פונקציות  $y_1 = x^3$ ,  $y_2 = |x^3|$  בקטע  $[-4, 4]$ .  
א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.  
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.  
ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?  
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר  $xy'' - 2y' = 0$ .  
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?
- (5) ענו על הסעיפים הבאים:  
א. יהיו  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  פונקציות גזירות פעמיים בקטע  $I$ , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- $I$ .  
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  הם פתרונות שלה.  
ב. רשמו משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע  $x > 0$ , שהפונקציות  $y_1(x) = x^2$ ,  $y_2(x) = x^4$  הן פתרונות שלה.

- (6) נתון כי  $y_1(x), y_2(x)$  הם פתרונות של המד"ר  $y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0$ ,  
 בקטע  $I$ , כאשר  $p, q$  רציפות בקטע  $I$ .  
 הראו כי אם קיימת נקודה  $c$  בקטע  $I$ , שעבורה  $y_1(c) = y_2(c) = 0$ ,  
 אז  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

### תשובות סופיות

- (1) לא.  
 (2)  $W = -2x$   
 (3) כן.  
 (4) א.  $W = 0$  ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.  
 (5) א. שאלת הוכחה. ב.  $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$   
 (6) שאלת הוכחה.

## משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

### שאלות

(1) נתונה המשוואה  $y'' - 4y = 12x$ .

א. פתרו את המשוואה.

ב. מצאו פתרון המקיים:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 11 \end{cases}$$

ג. נסו למצוא פתרון המקיים:

$$\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תנו דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים  $y(0) = 1$ .

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

(2) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

הראו כי  $y_1(x) = 0$  ו-  $y_2(x) = x^2$ , הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

(3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה  $x = 0$ , כך שהפונקציות  $y = 4x$  ו-  $y = \sin 4x$  הן פתרונותיה?

### תשובות סופיות

(1) א.  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 3x$  ב.  $y = 4e^{2x} - 3e^{-2x} - 3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

(2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

(3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

## השיטה האופרטורית

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

בשאלות אלו הסימון הוא:  $ay'' + by' + cy = Q(x) \Leftrightarrow (aD^2 + bD + c)y = Q(x)$ .

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (1)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (3)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (4)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (5)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x \quad (6)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2 \cos x \cos 2x \quad (7)$$



## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1 \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (3)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x \quad (7)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 3 - משוואות ליניאריות מסדר n

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה מסדר שלישי ..... 38
2. משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים ..... 39
3. שיטת השוואת מקדמים ..... 42
4. שיטת וריאציית הפרמטרים ..... 44
5. משוואת אוילר מסדר שלישי ..... (ללא ספר)
6. הוורונסקיאן ושימושיו ..... 45
7. השיטה האופרטורית ..... 46

## משוואה חסרה מסדר שלישי

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(1) \quad y'y''' - (y'')^2 - 3y''(y')^2 - 4(y')^4 = -16y(y')^3$$

עם תנאי ההתחלה  $y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = -12$ .

$$(2) \quad \begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y''y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y''y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = -1, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} 3y'''y - y'y'' &= 0 \\ y(1) &= 1, y'(1) = 3, y''(1) = 6 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} (y'y''' - 2(y'')^2)y^2 &= -(y')^4 \\ y &> 0 \\ y(1) &= y'(1) = y''(1) = 1 \end{aligned}$$

### תשובות סופיות

$$(1) \quad \frac{1}{4} \ln |-3 + 4y| = x + \frac{1}{4} \ln 3$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{1-x} - 1$$

$$(3) \quad y = \tan x - 1$$

$$(4) \quad y = x^3$$

$$(5) \quad y = e^{x-1}$$

## משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-15 :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0 \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 0 \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (3)$$

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \quad (4)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 20y = 0 \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y = 0 \quad (7)$$

$$y^{(6)} - y'' = 0 \quad (8)$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3 - 2D^2 - 3D - 1)y = 0 \quad (9)$$

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0 \quad (10)$$

$$z''' - 6z'' + 12z' - 8z = 0 \quad (11)$$

$$y^{(4)} - 4y = 0 \quad (12)$$

$$x^{(6)} - 3x^{(4)} + 3x'' - x = 0 \quad (13)$$

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \\ y''(0) = -1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} y'''' - 3y''' + 6y'' - 12y' + 8y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \\ y''(0) = -19 \\ y'''(0) = -47 \end{cases} \quad (15)$$

**16** נתונה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6,

אשר אחד הפתרונות שלה הוא  $x^2 e^x \cos 2x$ .

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה.

ב. מצאו את המשוואה.

## תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{0x} [c_3 \cos x + c_4 \sin x] \quad (5)$$

$$y = c_1 e^{-4x} + e^x [c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x] \quad (6)$$

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left( c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x} \quad (9)$$

$$y = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + x e^x [c_3 \cos x + c_4 \sin x] + e^{-x} [c_5 \cos x + c_6 \sin x] + x e^{-x} [c_7 \cos x + c_8 \sin x] \quad (10)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} \quad (11)$$

$$y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x \quad (12)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x} \quad (13)$$

$$y = e^x + 2 \cos x + 3 \sin x \quad (14)$$

$$y = e^x - 2e^{2x} + 3 \cos 2x + 4 \sin 2x \quad (15)$$

$$y = e^x [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x] + x e^x [c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x] + x^2 e^x [c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x] \quad (16)$$

$$y'''' - 6y''' + 27y'' - 68y' + 135y - 150y' + 125y = 0 \quad \text{ב.}$$

## שיטת השוואת מקדמים

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 2 \sin x - 4 \cos x \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = -28e^{2x} \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14 \quad (3)$$

$$y''' - 3y' + 2y = e^x \quad (4)$$

$$y''' - y'' + y' - y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 2 \end{cases} \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4 \sin x - 2 \cos x \quad (7)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x^3 + 4 \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x (\cos x - \sin x) \quad (5)$$

$$y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x} \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x \quad (7)$$



## שיטת וריאציית הפרמטרים

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}} \quad (2)$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x} \quad (3)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + \ln \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| - x \cos x + \sin x \ln |\cos x| \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{2} (e^x + 1 - \ln(e^x + 1)) + e^x (-\ln(e^x + 1)) + e^{2x} \left( -\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}) \right) \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln |x| \quad (3)$$

## הוורונסקיאן ושימושי

### שאלות

- (1) האם קיימת מד"ר מהצורה  $y'''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$ , בעלת מקדמים רציפים בקטע  $[-1,1]$ , כך שהפונקציות  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = x^2$ ,  $y_3(x) = x^3$  הן פתרונות שלה?
- (2) נתונות הפונקציות  $y_1(x) = 4 - x$ ,  $y_2(x) = 4 + x$ ,  $y_3(x) = 20 + x$ .  
 א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות.  
 ב. קבעו האם הפונקציות תלויות בקטע  $(-\infty, \infty)$ .  
 ג. ענו שוב על סעיף ב', בידיעה ששלוש הפונקציות הן פתרון של המד"ר  $y'' = 0$ .
- (3) פתרו את הסעיפים הבאים:  
 א. יהיו  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$  פונקציות גזירות ברציפות שלוש פעמים בקטע  $I$ , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב-  $I$ . הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 3, בעלת מקדמים רציפים בקטע  $I$ , כך ש-  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$  הם פתרונות שלה.  
 ב. רשמו משוואה לינארית, הומוגנית, מסדר שלישי, עם מקדמים רציפים, שהפונקציות  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = x^2$ ,  $y_3(x) = x^3$  הן פתרונות שלה.

### תשובות סופיות

- (1) לא. הפונקציות מתאפסות רק בנקודה אחת  $x = 0$ .  
 (2) א.  $W = 0$ . ב. הפונקציות תלויות. ג. הפונקציות תלויות.  
 (3) א. שאלת הוכחה. ב.  $x \neq 0$ ,  $y'''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$ .

## השיטה האופרטורית

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 4e^x - 10e^{-2x} \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 10e^{4x} + 2e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)y = 10e^x + 4e^{2x} \quad (3)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = 24e^x + 81e^{4x} \quad (4)$$

$$(D^6 + D^4 + D^2)y = 104\sin(2x+1) + \cos(x+10) \quad (5)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = -5\sin 2x \quad (6)$$

$$(D^4 - 3D^3 + 6D^2 - 12D + 8)y = 30\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 48\cos^2 x - 16 \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$y = c_1e^{0x} + c_2e^{-x} + c_3e^{3x} - e^x + e^{-2x} \quad (1)$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x} + c_4e^{-5x} + \frac{5}{81}e^{4x} - \frac{1}{18}xe^x - \frac{1}{30} \quad (2)$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{2x} + c_4xe^{2x} + 5x^2e^x + 2x^2e^{2x} \quad (3)$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4x^3e^x + c_5e^{4x} - \frac{1}{3}x^4e^x + xe^{4x} \quad (4)$$

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x} + c_5e^{3x} + c_6e^{-3x} - 2\sin(2x+1) - \cos(x+10) \quad (5)$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4x^3e^x + c_5e^{4x} + \frac{1}{500}[4\sin 2x - 22\cos 2x] \quad (6)$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x + \frac{5\sin x + 25\cos x}{26} + \frac{-3\cos 2x - 18\sin 2x}{37} + 1 \quad (7)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 4 - מערכת משוואות לינאריות

### תוכן העניינים

1. חזרה מאלגברה לינארית - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים ..... 47
2. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת הלכסון ..... 49
3. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת וריאציית הפרמטרים ..... 54
4. מערכת משוואות כללית - שיטת ההצבה ..... 56

## חזרה מאלגברה לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

### שאלות

בשאלות הבאות מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של  $A$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

## תשובות סופיות

$$x=0, x=1, x=2, v_{x=0}=(-1,0,1), v_{x=1}=(0,1,0), v_{x=2}=(1,0,1) \quad (1)$$

$$x=6, x=2, x=-4, v_{x=6}=(0,0,1), v_{x=2}=(1,1,1), v_{x=-4}=(-1,1,0) \quad (2)$$

$$x_1=2, x_2=3, x_3=3, v_{x=2}=(1,1,1), v_{x=3}^{(1)}=(1,0,1), x_{x=3}^{(2)}=(1,1,0) \quad (3)$$

$$x=1, x=3, x=-2, v_{x=1}=(-1,4,1), v_{x=3}=(1,2,1), v_{x=-2}=(-1,1,1) \quad (4)$$

$$x=1, x=4, x=-1, v_{x=1}=(1,-2,1), v_{x=4}=(1,1,1), v_{x=-1}=(-1,0,1) \quad (5)$$

$$x=-1, x=3, v_{x=-1}=(-1,2), v_{x=3}=(1,2) \quad (6)$$

$$x_{1,2}=1 \pm 2i, v_{x=1+2i}=(1+i,2), v_{x=1-2i}=(1-i,2) \quad (7)$$

$$x=1, x=1+\sqrt{3}i, x=1-\sqrt{3}i, v_{x=1}=(1,1,1),$$

$$v_{x=1+\sqrt{3}i}=(1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), v_{x=1-\sqrt{3}i}=(1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2) \quad (8)$$

## מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלכסון

### שאלות

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 1-2 :

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (1)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ , כך ש-} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (3) \text{ נתון}$$

הוכיחו כי  $z(t) = y(t)$ .

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 4-5 :

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z \\ y' = 3x + 2y - z \\ z' = 2x + y - z \end{cases} \quad (4)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (5)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ , כך ש-} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (6) \text{ נתון}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} + \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0 \quad \text{חשבו :}$$

$$(7) \quad \text{פתרו את מערכת המשוואות: } \begin{cases} y_1' + 5y_1 - 2y_2' = 0 \\ 3y_2' - 4y_1' - 5y_2 = 0 \end{cases}$$

$$(8) \quad \text{פתרו: } \vec{x}'(t) = A \cdot \vec{x}(t), \text{ כאשר } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: בשאלות 7 ו-8 יש להגיע לפתרון המרוכב מהפתרון ממשי.

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 9-14:  
(שימו לב שכל המערכות אינן ניתנות ללכסון)

$$(9) \quad \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

$$(10) \quad \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

$$(11) \quad \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

$$(12) \quad \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

$$(13) \quad \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

$$(14) \quad \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$



$$(15) \text{ דני פתר את המערכת } x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} x(t)$$

$$\text{וקיבל } x(t) = c_1 e^{-1t} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{0t} \left[ t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{נתון תנאי התחלה: } x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

עבור אילו ערכים של הקבועים הממשיים,  $a, b, c$ , הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה הנתון יהיה חסום לכל  $t$  ממשי?

## תשובות סופיות

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$z(t) = y(t) \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$0 \quad (6)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \left[ \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 e^t \left[ \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad (7)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left[ \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \quad (8)$$

$$+ c_3 e^t \left[ \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -2t+1 \\ 2t-1 \\ t \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 0.5t^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} t^2-t+2 \\ \frac{t^2}{2}+1 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t-1 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + c_4 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ t-2 \\ \frac{t^2}{2}-t+1 \\ \frac{t^3}{6} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -2t+1 \\ -4t \\ -2t \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$a = -c, \quad b = 2a \quad (15)$$

## מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים

### שאלות

פתרו את מערכת המשוואות בשאלות 1-4:

$$\begin{aligned} (1) \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + 2e^{-t} \\ x_2' = 4x_1 + x_2 + 4e^{-t} \end{cases} \\ (2) \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + e^{at} \\ x_2' = 4x_1 + x_2 - 2e^{at} \end{cases} \quad (a \text{ קבוע}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \begin{cases} x' = x + y + 2z + e^t \\ y' = x + 2y + z \\ z' = 2x + y + z + e^t \end{cases} \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4) \end{aligned}$$

(5) המירו את המשוואה  $y''' + y'' - 2y = t^2$ , במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

$$(6) \quad \text{פתרו את מערכת המשוואות: } \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 8t+3 \\ -3t+3 \\ t+3 \end{pmatrix}$$

(7) נתונה המד"ר  $e^{-x}y'''(x) - y''(x) + e^x x^2 y'(x) = 5e^{-x}$ . רשמו את המד"ר כמערכת משוואות לינאריות מסדר ראשון, בהצגה מטריצינית.

(8) נתונה המד"ר  $x^2 y''(x) + 10xy'(x) + (1 + 4x^2)y(x) = \ln x$ . רשמו את המד"ר כמערכת משוואות לינאריות מסדר ראשון, בהצגה מטריצינית.

הערה: בשאלות 7 ו-8 המערכת המתקבלת היא לא עם מקדמים קבועים. יחד עם זאת, הדרישה היא רק להציג את המערכת ולא לפתור אותה.

## תשובות סופיות

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} : \text{ עבור } a = -1 \text{ נקבל:} \quad (2)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} e^{at} \\ -2e^{at} \end{pmatrix} : \text{ עבור } a \neq 1 \text{ נקבל:}$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3t+2) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - (3t+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3t+1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left( \frac{1}{3} te^t \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left( -\frac{2}{9} e^t \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} \\ (2t-1)e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t-1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -e^{2t}t^2 & e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{1}{t^2} + 4\right) & -\frac{10}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\ln t}{t^2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

## מערכת משוואות כללית – שיטת ההצבה

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} y'' + 2z' = e^{3x} \\ y' - z'' + 3z = x^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$. z(0) = y(0) = y'(0) = 0 \text{ , בהינתן } \begin{cases} y'' + z' = e^{-2x} \\ y + z = \sin x \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + e^t \\ y' = 6x - 3y + e^{-t} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + \sin 2t \\ x_2' = x_1 + x_2 + \cos 2t \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} z'' - 3z' + 2z + y' - y = 0 \\ z' - 2z + y' + y = 0 \end{cases} \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{24} e^{3x} + x^2, \quad y = \frac{1}{12} e^{3x} - \frac{2}{3} x^3 - 2c_2 e^x + 2c_3 e^{-x} + kx + l \quad (1)$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} e^x - \frac{1}{6} e^{-2x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x, \quad y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{6} e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \quad (2)$$

$$x = c_1 + c_2 e^t + 4te^t - e^{-t}, \quad y = 2c_1 + \frac{3}{2} c_2 e^t + 6te^t - \frac{3}{2} e^t - \frac{5}{2} e^{-t} \quad (3)$$

$$x_1 = c_1 + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t, \quad x_2 = -c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{1}{4} \sin 2t \quad (4)$$

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}, \quad y = 2c_1 + \frac{1}{2} c_2 e^x \quad (5)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 5 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

תוכן העניינים

|    |                                       |
|----|---------------------------------------|
| 57 | 1. בעיות גדילה ודעיכה.....            |
| 59 | 2. בעיות בגיאומטריה אנליטית.....      |
| 61 | 3. עקומות אורתוגונליות.....           |
| 62 | 4. בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום..... |
| 63 | 5. בעיות שונות.....                   |

## בעיות גדילה ודעיכה

### שאלות

- (1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה. ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.
  - א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?
  - ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?
  - ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?
 \*הניחו שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).
- (2) האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית. בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים, ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.
  - א. מצאו את אחוז הגידול השנתי.
  - ב. מצאו כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת), היו בעיר 550 אלף תושבים.
- (3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%. כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש"ח.
  - א. כמה כסף הפקיד האדם?
  - ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש"ח?
- (4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית. בספירה הראשונית היו 1,000 חיות. בספירה השנייה שנעשתה, כעבור 20 חודשים, היו 1,400 חיות בר. מצאו אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה, היו בשמורה 2,000 חיות בר.
- (5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים. ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד, פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.
  - א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1,000 שנים, מכמות התחלתית של 100 גרם?
  - ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם, מכמות התחלתית של 100 גרם?



- 6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע.  
 בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.  
 א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?  
 ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

### תשובות סופיות

- |                     |                  |                |
|---------------------|------------------|----------------|
| 1) א. 7.28 מיליארד. | ב. 3.54 מיליארד. | ג. בשנת 2,106. |
| 2) א. 2%            | ב. 15.92 שנים.   |                |
| 3) א. 4093.65 ₪.    | ב. 13.41 שנים.   |                |
| 4) 40.77 חודשים.    |                  |                |
| 5) א. 88.69 גרם.    | ב. 19,188 שנים.  |                |
| 6) א. 3.04 שבועות.  | ב. 14.6 שבועות.  |                |

## בעיות גיאומטריות

### שאלות

(1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה  $(x, y)$  על העקום,

$$\text{שווה ל-} -\frac{x}{y}.$$

מצאו את משוואת העקום.

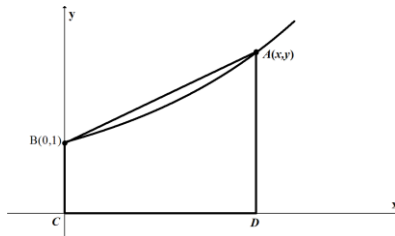
(2) מצאו את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

(3) מצאו את משוואת העקום, ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

(4) תרגמו את התיאור המילולי הבא למשוואה דיפרנציאלית ופתרו אותה:  
נתון עקום ברביע הראשון, העובר בנקודה  $(2, 4)$ .  
נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה  $A(x, y)$  שעליו, ובין שיפוע הישר המחבר את  $A$  עם ראשית הצירים, שווה לשיעור ה- $y$  של הנקודה  $A$ .

(5) מצאו את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה  $(3, 4)$ , אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

(6) קטע הנורמל לעקום בנקודה  $(x, y)$  שבין נקודה זו וציר ה- $x$ , נחצה על ידי ציר ה- $y$ .  
מצאו את משוואת עקום זה.



(7) נתון עקום העובר בנקודה  $B(0,1)$ .  
בכל נקודה  $A$  שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז  $ABCD$ , הנראה בציר. מהי משוואת העקום?

(8) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה  $(1, 3)$ , ושיפוע המשיק אליו בנקודה  $(x, y)$  שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$ .  
מצאו את משוואת העקום.

- (9) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה  $(1, 2)$ ,  
 ושכל נקודה  $(x, y)$  שעליו שיפוע הנורמל הוא  $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$ .

- (10) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה  $(0, 1)$ , כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר ה- $y$ , המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו  $M(x, y)$  והקטע  $OM$ , מהראשית  $O$  ל- $M$ , הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע  $MN$  (כאשר  $N$  היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר ה- $y$ ).  
 ציורו ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

### תשובות סופיות

- (1)  $x^2 + y^2 = k$   
 (2)  $x^2 + y^2 = k$   
 (3)  $y^2 = ax$   
 (4)  $y = 2xe^{x-2}$   
 (5)  $y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2}$   
 (6)  $2x^2 + y^2 = k$   
 (7)  $y = 2e^{x^2/4} - 1$   
 (8)  $2xy + x^2 = 7$   
 (9)  $x^3 - 3y^2x = 11$   
 (10)  $2 = y + \sqrt{y^2 + x^2}$

## עקומות אורתוגונליות

### שאלות

מצאו את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות 1-4 :

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$xy = c \quad (2)$$

$$x^2 + 2y^2 = c \quad \text{א.} \quad (3)$$

ב. מצאו את העקומה האורתוגונלית לעקומה  $x^2 + 2y^2 = 9$ ,  
בנקודה  $(1, 2)$  שעליה.

$$x^2 + y^2 = cx \quad (4)$$

(5) מצאו את משפחת העקומות, היוצרות זווית של  $45^\circ$   
עם משפחת המעגלים  $x^2 + y^2 = c$ .

### תשובות סופיות

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$y^2 - x^2 = k \quad (2)$$

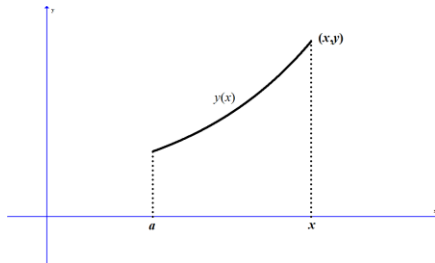
$$y = ax^2, \quad y = 2x^2 \quad (3)$$

$$y = m(x - c)^2 \quad y > 0 \quad (4)$$

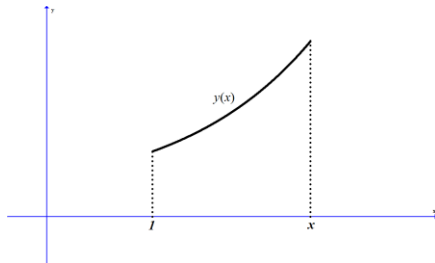
$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln \left( \left( \frac{y}{x} \right)^2 + 1 \right) = -\arctan \left( \frac{y}{x} \right) + c \quad (5)$$

## בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום

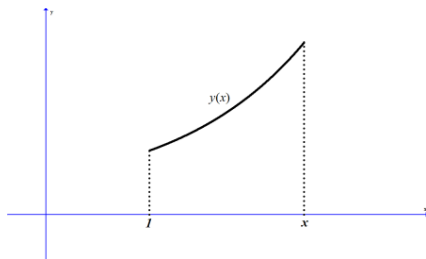
### שאלות



- (1) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = a$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי השטח  $S$  פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות  $(a, y(a))$  ו- $(x, y(x))$ . מצאו את משוואת העקום.



- (2) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי  $y(1) = 2$ . האם קיים עקום כזה, כך ששטחו של  $S$  שווה ל- $2y(x)$ ?



- (3) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי  $y(1) = 2$ . האם קיים עקום כזה, כך שהשטח של  $S$  שווה ל- $2 - y(x)$ ?

### תשובות סופיות

$$y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k} x + C\right) \quad (1)$$

(2) לא.

(3) כן.

## בעיות שונות

## שאלות

- (1) בזמן  $t = 0$ , יש במיכל 4 ק"ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים. נניח שמי מלח, בריכוז של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב.
- א. חשבו את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.  
ב. תוך כמה זמן תהיה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?
- (2) סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש. ברגע  $t = 0$ , כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחתור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה. משקל החותר והסירה הוא 500 ק"ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל- $2v$ , כאשר  $v$  נמדדת במטר/שניה.
- א. מצאו את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.  
ב. מצאו כעבור כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.  
ג. מצאו את המהירות הסופית.
- (3) חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.
- א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?  
ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?
- (4) נתון מיכל בצורת גליל, שרדיוס בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונלי לשורש מגובהם.
- נסמן ב- $h(t)$  את גובה פני המים, וב- $k$  את קבוע הפרופורציה.
- א. רשמו מד"ר עבור גובה פני המים,  $h(t)$ .  
מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?  
ב. ידוע כי  $k = -2\pi$ . פתרו את המד"ר.  
תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

- (5) כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ, נמס, כך שהקצב שבו רדיוסו קטן – פרופורציונלי לשטח פניו.  
לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס"מ.  
א. רשמו נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן  $t$ .  
ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג  $\frac{1}{64}$  מנפחו ההתחלתי?
- (6) מבלון מלא אוויר, שרדיוסו  $R$ , מתחיל לצאת אוויר.  
קצב יציאת האוויר הוא  $3V(t)$ , כאשר  $V(t)$  הוא נפח הבלון בזמן  $t$ .  
הוכיחו כי כעבור  $\ln 2$  שניות נפח הבלון יקטן לכדי שמינית מנפחו ההתחלתי.  
הערה: בשאלות 5 ו-6 נדרש ידע בהפרדת משתנים.

### תשובות סופיות

- (1) א. 26.75 ק"ג. ב. 0.942 דקות.
- (2) א. 4.09 מטר/שניה. ב. 72 שניות. ג. 10 מטר/שניה.
- (3) א.  $43\frac{1}{3}^{\circ}$ . ב. 1.13 שעות.
- (4) א.  $h(0) = 4$ ;  $\pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$ . ב.  $h = (2-t)^2$ ;  $t = \sqrt{2} + 2$ .
- (5) א.  $R(t) = \frac{12}{2t+3}$ . ב. 4.5 שעות.
- (6) שאלת הוכחה.

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 6 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל ..... 65



## בעיות שטורם-ליוביל

### שאלות

(1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית

$$\cdot (p(x)y'(x))' + (\lambda r(x) - q(x))y(x) = 0$$

(משוואת הרמיט)  $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$  א.

(משוואת בסל)  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda)y = 0$  ב.

(2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y'' + e^{2x}y' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + 4y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

(3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y'' + 4y' + xy + \lambda e^x y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות 4-7:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y(0) - y'(0) = 0 \\ y(\pi) - y'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הבעיה הבאה:}$$

- א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.  
ב. פתרו את הבעיה.

(9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \ell \\ y(0) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$$

$$ב. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 1 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

1. פתחו את הפונקציה  $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

התחל את הטור מ- $n=1$ .

2. מה סכום הטור ב- $x=0$ ?

האם הוא שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$ ?

$$ג. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 2 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

פתחו את הפונקציה  $f(x) = x, 0 \leq x \leq 2$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

(10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

ב. פתחו את הפונקציה  $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq \pi$

לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.

התחילו את הטור מ- $n=1$ .

$$(11) \text{ נתונה הבעיה: } \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, & 0 < x < e \\ y(1) = 0 \\ y'(e) = 0 \end{cases}$$

- א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.  
 ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.  
 ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את  $f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e} \leq x \leq e \end{cases}$  , לטור פונקציות עצמיות.

הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור  $x=1$  שונים.

ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור  $x = \sqrt{e}$ ,  $x = 1.5$ ,  $x = 2$ .

**זהויות שכדאי להכיר:**

$$\begin{aligned} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\pi n) = (-1)^n \\ \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin(\pi n) = 0 \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (e^{-x^2} y')' + (\lambda e^{-x^2} - 0)y = 0 \quad \text{ב. } (xy')' + \left( \lambda \left( -\frac{1}{x} \right) - (-x) \right) y = 0$$

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \text{פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(5) \quad \text{פונקציות עצמיות : } \phi_n(x) = n \cos nx + \sin nx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \text{ בנוסף, } \lambda = -1 \text{ הוא עי"ע של הבעיה,}$$

$$\text{המתאים לפונקציה העצמית } \varphi(x) = e^x.$$

$$(6) \quad \text{פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = \sin(\omega_n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(7) \quad \text{פונקציות עצמיות : } y_n(x) = \sin(\omega_n x) - \omega_n \cos(\omega_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{בנוסף, } \lambda_0 = 0 \text{ הוא עי"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית } \varphi(x) = x - 1.$$

$$(8) \quad \text{א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = e^x \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(9) \quad \text{א. פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. סכום הטור ב- } x=0 \text{ הוא } 0, \text{ והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- } x=0.$$

$$\text{ג. } (0 < x < 2) \text{ כאשר, } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right).$$

$$(10) \quad \text{א. פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2} x \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. } 0 < x < \pi \text{ כאשר, } e^x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)} (-1)^{n+1} - 1}{1^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right).$$

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות :  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \ln x\right)$$

ערכים עצמיים :  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\lambda_n = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + n\right)^2$$

ג. שאלת הוכחה.

ד. 
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2 \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \ln x\right)$$

ה. סכום הטור ב-  $x = \sqrt{e}$  הוא  $\frac{1}{2}$  ; ב-  $x = 1.5$  הוא 1 ; וב-  $x = 2$  הוא 0.

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 7 - פרקי חזרה - אינטגרלים

תוכן העניינים

|    |                                                 |
|----|-------------------------------------------------|
| 70 | 1. אינטגרלים מיידיים                            |
| 73 | 2. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים             |
| 75 | 3. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים             |
| 79 | 4. אינטגרלים בשיטת ההצבה                        |
| 82 | 5. אינטגרלים של פונקציות רציונליות              |
| 86 | 6. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות |
| 91 | 7. נספח - זהויות בטריגו                         |

## אינטגרלים מיידיים

בסוף ספר הפרק יש נספח עם זהויות בטריגו.

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ):

$$\int 4dx \quad (1) \quad \int x^4 dx \quad (2) \quad \int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4) \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \quad \int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7) \quad \int \left( \frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \quad \int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \quad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \quad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$ ):

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13) \quad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \quad \int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16) \quad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \quad \int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19) \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$ ):

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \quad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \quad \int \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \quad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \quad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

(פתירה על ידי הכלל :  $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$ )

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28) \qquad \int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

(29) חשבו את האינטגרל :  $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

(פתירה על ידי הכלל :  $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c$ )

(30) חשבו את האינטגרל :  $\int \left( 4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx$

(פתירה על ידי הכלל :  $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$ )

חשבו את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int 2 \sin 4x + \cos x dx \quad (36)$$

$$\int \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad (35)$$

$$\int \cos 4x dx \quad (34)$$



## תשובות סופיות

- $$\begin{aligned} & -\frac{1}{x} + c \quad (3) & \frac{x^5}{5} + c \quad (2) & 4x + c \quad (1) \\ & \frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) & -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) & \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4) \\ & \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) & -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8) & \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7) \\ & \frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) & -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) & \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10) \\ & -\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) & \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) & \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13) \\ & & 10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) & \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16) \\ & -\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19) & -\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18) \\ & \ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) & \frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21) & \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20) \\ & x + \ln|x+2| + c \quad (25) & \frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24) & x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23) \\ & \frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28) & \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27) & 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26) \\ & 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (30) & \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (29) \\ & -\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33) & \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32) & \frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31) \\ & -\frac{1}{2}\cos(4x) + \sin x + c \quad (36) & -2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + c \quad (35) & \frac{1}{4}\sin(4x) + c \quad (34) \end{aligned}$$

## אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24) \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^2 dx \quad (22)$$

## תשובות סופיות

(1)  $\ln|x^2+1|+c$

(2)  $\ln|\sin x|+c$

(3)  $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+c$

(4)  $-\ln|\cos x|+c$

(5)  $\ln|\ln|x||+c$

(6)  $e^2\ln|e^x+1|+c$

(7)  $e^{x^2}+c$

(8)  $e^{\tan x}+c$

(9)  $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$

(10)  $\sin(2x^2+1)+c$

(11)  $\sin(\sin x)+c$

(12)  $\sin(\ln x)+c$

(13)  $\frac{1}{40}\sin(10x^4+1)+c$

(14)  $-\frac{1}{2}\cos(x^2+1)+c$

(15)  $-2\cos(\sqrt{x})+c$

(16)  $\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$

(17)  $\frac{1}{2}(\arctan x)^2+c$

(18)  $\frac{1}{2}(\tan x)^2+c$

(19)  $2\sqrt{x^2+1}+c$

(20)  $\sqrt{2\sin x}+c$

(21)  $\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+c$

(22)  $\frac{2}{9}(x^3+4)^{\frac{3}{2}}+c$

(23)  $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+c$

(24)  $\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}}+c$

## אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \quad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \quad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \quad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \quad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \quad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \quad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \quad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \quad \int x \arctan x dx \quad (14) \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \quad \int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \quad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \quad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \quad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \quad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

$$(24) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int x^n e^x dx \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(25) \text{ חשבו את } \int x^4 e^x dx.$$

$$(26) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int \cos^n x dx \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(27) \text{ חשבו את } \int \cos^4 x dx.$$

$$(28) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int \sin^n x dx \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(29) \text{ חשבו את } \int (\sin x)^4 dx.$$

(30) מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$  כאשר  $n$  טבעי.

(31) חשבו את  $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$ .

## תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left( \ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left( \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln|x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left( \frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left( -\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left( -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left( \frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

## אינטגרלים בשיטת ההצבה

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int \cos(x^2+1) \cdot 2x^3 dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$



## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left( \frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left( \frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x}^2 - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left( x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left( \frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left( \ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln|\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{1-x^4} - \ln|1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

## אינטגרלים של פונקציות רציונליות

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-19:

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{x^2-4} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{1}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

**חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית**

חשבו את האינטגרלים בשאלות 20-24 :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (23)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (24)$$

**אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית**

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - x} \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt[4]{x-1}} dx \quad (27)$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx \quad (28)$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (29)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (30)$$

## תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left( \frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (20)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (21)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (22)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (23)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (24)$$

$$-1.5 \ln|1 - \sqrt[3]{x^2}| + c \quad (25)$$

$$6 \left( \frac{(1 + \sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[6]{x})}{2} + 3(1 + \sqrt[6]{x}) - \ln|1 + \sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (26)$$

$$4 \left( \frac{(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1 + \sqrt[4]{x-1}) - \ln|1 + \sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (27)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln|\sqrt[3]{x} + 1| - \frac{1}{2} \ln\left(\left(\sqrt[3]{x} - 0.5\right)^2 + 0.75\right) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{3}}\right) + c \quad (28)$$

$$-\ln|1 + e^x| + x + c \quad (29)$$

$$2\sqrt{1 + e^x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1}\right| + c \quad (30)$$

## אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

### שאלות

#### פתרון על ידי זהויות

זכרו כי :

|                                            |                                                                |
|--------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $\int \cos x dx = \sin x + c$              | $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$              |
| $\int \sin x dx = -\cos x + c$             | $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$             |
| $\int \tan x dx = -\ln  \cos x  + c$       | $\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln  \cos(ax+b)  + c$       |
| $\int \cot x dx = \ln  \sin x  + c$        | $\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln  \sin(ax+b)  + c$        |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$  | $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$  |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$ | $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$ |

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-24 :

$$\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx \quad (2)$$

$$\int \left( \sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx \quad (1)$$

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx \quad (3)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6)$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5)$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (8)$$

$$\int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx \quad (9)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12)$$

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11)$$

$$\int \sin^2 4x dx \quad (14)$$

$$\int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15)$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad (18)$$

$$\int \cos^4 x dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23)$$

### פתרון על ידי הצבות פשוטות

|                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \left  \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right  = \int f(t) dt$    |
| $\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \left  \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right  = \int f(t) (-dt)$ |

זכרו כי :

חשבו את האינטגרלים בשאלות 25-36 :

$$\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (26)$$

$$\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (25)$$

$$\int \sin^3 2x dx \quad (28)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (27)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (30)$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (29)$$

$$\int \tan^5 x dx \quad (32)$$

$$\int \cos^5 x dx \quad (31)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad (34)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (36)$$

$$\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (35)$$



## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad \text{זכרו כי:}$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 37-39:

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (39) \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (38) \quad \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \quad (37)$$

## הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\begin{aligned} \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt) \\ \int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right) \\ \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right) \end{aligned} \quad \text{זכרו כי:}$$

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad (42) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad (41) \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} \quad (40)$$

## תשובות סופיות

- $$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\cos 2x - 12\sin \frac{x}{3} + c \quad (1) \\ & -10\cot 10x + c \quad (3) \\ & \frac{1}{2}\sin 2x + c \quad (5) \\ & -\frac{1}{16}\cos 4x + c \quad (7) \\ & \tan x - \cot x + c \quad (9) \\ & \sin x + c \quad (11) \\ & \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13) \\ & \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + c \quad (15) \\ & \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c \quad (17) \\ & -\cot x - x + c \quad (19) \\ & \ln|\cos x| + c \quad (21) \\ & 3x + \frac{1}{2}\sin 2x - 2\sin x + c \quad (23) \\ & \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{24}\sin 6x\right) + c \quad (24) \\ & \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2\sin x + c \quad (25) \\ & \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c \quad (27) \\ & \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + c \quad (29) \\ & \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c \quad (31) \\ & \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| + c \quad (33) \\ & -2e^{\cos x}(\cos x - 1) + c \quad (35) \\ & \frac{1}{4}\tan 4x + c \quad (2) \\ & \frac{1}{2}\sin 2x + c \quad (4) \\ & x - \frac{1}{2}\cos 2x + c \quad (6) \\ & \tan x - x + c \quad (8) \\ & \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + c \quad (10) \\ & \frac{3}{4}x + \frac{1}{16}\sin 4x + c \quad (12) \\ & \frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14) \\ & -\frac{3}{16}\cos 4x + \frac{1}{48}\cos 12x + c \quad (16) \\ & \frac{3}{8}x - \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{128}\sin 16x + c \quad (18) \\ & 2\sin x + c \quad (20) \\ & -\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + c \quad (22) \\ & \frac{-\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2\cos x + c \quad (26) \\ & -\frac{1}{2}\left(\cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3}\right) + c \quad (28) \\ & -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x + c \quad (30) \\ & \frac{1}{4\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x| + c \quad (32) \\ & \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + c \quad (34) \\ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}}\right) + c \quad (36) \end{aligned}$$

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c \quad (37)$$

$$\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c \quad (38)$$

$$-x+2\left(\frac{2}{3\sqrt{1/3}}\arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}}\right)\right)+c \quad (39)$$

$$-\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c \quad (40)$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right|+c \quad (41)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c \quad (42)$$

## נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 8 - טורי פורייה

תוכן העניינים

|                                      |           |
|--------------------------------------|-----------|
| 1. הקדמה                             | (ללא ספר) |
| 2. טור פורייה ממשי                   | 92        |
| 3. טור פורייה מרוכב                  | 93        |
| 4. משפט פרסבל                        | 94        |
| 5. רימן לבג                          | 97        |
| 6. משפט דיריכלה                      | 98        |
| 7. המשכה זוגית ואי זוגית             | 100       |
| 8. גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה   | 101       |
| 9. התכנסות במידה שווה של טורי פורייה | 104       |
| 10. טור פורייה בקטע כללי             | 105       |
| 11. משפט הקונבולוציה                 | 107       |
| 12. גרעין דיריכלה                    | 109       |
| 13. גרעין פייר וממוצעי סזארו         | 111       |
| 14. גרעין פוואסון                    | 113       |
| 15. תרגילים מסכמים                   | 114       |

## טור פורייה ממשי:

### שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

(2) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$ .

(3) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \sin(|x|)$ .

(4) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .

### תשובות סופיות:

$$\sum_{n=1}^{20} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx) \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x) \quad (2)$$

$$\sin(|x|) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-(2k)^2} \cos(2kx) \quad (3)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n)}{n} \cos(nx) \quad (4)$$

## טור פורייה מרוכב:

### שאלות:

(1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

(2) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ .

(3) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ .

(4) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ -2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ .

(5) מצאו טור פורייה מרוכב של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin(x) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ .

### תשובות סופיות:

$$x \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \left\{ -\pi \frac{(-1)^n}{in} + \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right\} e^{inx} \quad (2)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} - 3(-1)^n \frac{\pi}{in} \right] e^{inx} \quad (3)$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{3}{\pi i (2k-1)} e^{i(2k-1)x} \quad (4)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{4i} e^{ix} - \frac{1}{4i} e^{-ix} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - (2k)^2} e^{i[2k]x} \quad (5)$$

## משפט פרסבל:

### שאלות:

$$(1) \quad \text{באמצעות טור הפורייה } x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx), \text{ חשבו את הסכום } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$(2) \quad \text{נתון כי טור הפורייה הממשי של } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases} \text{ בקטע } [-\pi, \pi]$$

$$\text{הינו } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ הוכיחו כי } \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

$$(3) \quad \text{נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ x + \pi & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = x$$

$$\text{מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$(4) \quad \text{מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases} \text{ ובאמצעותו}$$

$$\text{חשבו את הסכום } \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$(5) \quad \text{נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ e^{x^2} & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} 0 & 1 < x \leq \pi \\ \frac{1}{x^2+1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\text{נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- } f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}, \quad g \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_n e^{inx}$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \cdot \overline{g_n} = \frac{1}{8}$$



(6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור  $2\pi$  :

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad -\pi \leq x < \pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע  $-3\pi < x < 3\pi$ .

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$ .

(7) הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בקטע  $[-\pi, \pi]$  על ידי הנוסחה:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}} e^{inx}$ .

חשבו  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx$ .

(8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה  $f(x) = \sin\left(\frac{px}{2}\right)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $p \neq 0$

כדי להוכיח את הזהות  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

(9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} h^2 & h \leq x \leq \pi \\ 0 & -\pi \leq x \leq h \end{cases}$  בקטע  $[-\pi, \pi]$

כאשר  $0 \neq h \in [-\pi, \pi]$  ובשוויון פרסבל כדי לחשב  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n \cos(2n)}{n^2}$

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מרוכב של  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{32}$

ג. הסיקו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

## תשובות סופיות:

$$\frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

$$\frac{\pi^2}{4} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$\sinh(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} \sin(nx) \quad \text{ב.} \quad (6) \quad \text{א. ראו סרטון.}$$

ג.  $\approx 0.769$ 

$$8\pi \quad (7)$$

(8) הוכחה.

$$\frac{\pi^2 - 4}{4} \quad (9)$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx} \quad \text{א.} \quad (10) \quad \text{ב. הוכחה.}$$

ג. ראו סרטון.

## רימן לבג:

### שאלות:

(1) חשבו  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x} \cos(\sqrt{|x|}) \sin(nx) dx$

(2) חשבו  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2 + 1} e^{i \cdot n^2 t} dt$

(3) הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{se^{s^2}}{\sqrt{s^2 + 2017}} e^{inx} dx \right) = 0$

### תשובות סופיות:

(1) 0

(2) 0

(3) הוכחה.

## משפט דיריכלה:

### שאלות:

(1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  לטור פורייה

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{רמז: הציבו } x = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2x}{\pi} & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור } 2\pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום  $[-3\pi, 3\pi]$ .

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

$$\text{ג. הוכיחו כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(3) במרחב הפונקציות  $L^2_{PC}[-\pi, \pi]$  נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2$ .

א. חשבו את טור פורייה הממשי של  $f(x)$ .

$$\text{ב. חשבו את הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\text{ג. חשבו את הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\text{ד. חשבו את הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה  $f(x) = \cos(ax)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $a$

אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

$$\text{א. } \frac{1}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{\pi a + \pi n} + \frac{1}{\pi a - \pi n} \right]$$

$$\text{ב. } \cot(\pi a) = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi a + \pi n} + \frac{1}{\pi a - \pi n}$$

## תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. ראו סרטון.

ב.  $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$  ג. הוכחה.

(3) א.  $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$  ב.  $\frac{\pi^4}{90}$  ג.  $\frac{\pi^2}{-12}$  ד.  $\frac{\pi^2}{6}$

(4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

## המשכה זוגית ואי זוגית:

### שאלות:

(1) נתונה הפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[0, \pi]$ .

מצאו לה טור קוסינוסים:  $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$  והוכיחו כי לכל  $0 < x < \pi$

$$x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos([2k-1]x) \text{ מתקיים}$$

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = 1$  בקטע  $[0, \pi]$ .

מצאו לה טור סינוסים:  $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$  והוכיחו כי:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin([2k-1]x) \text{ מתקיים } 0 < x < \pi \text{ לכל א.}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} = -\frac{\pi}{4}$$

### תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

## גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

### שאלות:

(1) תהי  $f(x)$  פונקציה רציפה בקטע  $[-\pi, \pi]$  המקיימת  $f(-\pi) = f(\pi)$  ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח  $f'(x) \in L^2_{PC}[-\pi, \pi]$ ).

נסמן  $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$  אזי הטור מתכנס בהחלט.

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = x(\pi - x)$  בקטע  $[0, \pi]$ .

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?

שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$ .

ד. הוכיחו כי  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$ .

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של  $g(x) = \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$  בקטע  $[0, \pi]$ .

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ . רמז: הציבו  $x=0$ .

(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{x^2}$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

נסמן  $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| e^{inx}$  פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$  מתכנס?

ב. האם הטור  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n|$  מתכנס?

ג. האם הטור  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$  מתכנס?

(4) נתבונן בטור הפורייה  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(x+i)}$ .

כמה פעמים ניתן לגזור את  $f(x)$ ?

(5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}$  בקטע  $(0, 2\pi)$ .

ב. נסמן  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ . מצאו את  $g(x)$  באופן מפורש (ללא טור) בקטע  $(0, 2\pi)$ .

(6) תהי  $f(x)$  גזירה ברציפות  $k-1$  פעמים בקטע  $[-\pi, \pi]$ , גזירה ברציפות למקוטעין  $k$

פעמים כך שמתקיים  $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$  לכל  $j = 0, 1, \dots, k-1$ . נסמן  $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ .

הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k c_n) = 0$ .

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $f(x) \in L^2_{PC}[-\pi, \pi]$  פונקציה גזירה ברציפות המקיימת  $f(-\pi) = f(\pi)$

ו-  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ . הראו כי מתקיים  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$ .

ב. תהי  $f(x) \in L^2_{PC}[0, \pi]$  פונקציה גזירה ברציפות המקיימת  $f(0) = f(\pi) = 0$ .

הראו כי מתקיים  $\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx$ .

(8) נגדיר  $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} e^{in^2 x}$ .

א. הוכיחו כי  $f(x)$  רציפה.

ב. הוכיחו כי  $f(x)$  אינה גזירה ברציפות.

(9) נגדיר  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \sin(n^{2.5} x)$

א. הוכיחו כי  $f(x)$  רציפה.

ב. הוכיחו כי  $f(x)$  אינה גזירה ברציפות.

(10) נסמן  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{1.4}} + \frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$

א. האם  $f$  רציפה?

ב. האם  $f$  גזירה ברציפות?



(11) נגדיר  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$ . הוכיחו כי  $f(x)$  אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

(12) נסמן  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3.1} + i \cdot n^{2.2}} \cdot e^{inx}$ . הוכיחו כי  $f$  גזירה ברציפות פעמיים.

### תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$(2) \quad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin([2k-1]x) \quad [0, \pi] \quad \text{א.}$$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

$$\text{ה.} \quad [0, \pi] \quad \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \sim \frac{\pi^3}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi(2k-1)^4} \cos([2k-1]x) \quad \text{ו. הוכחה.}$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \cdot n c_n \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < \infty \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n| < \infty$$

$$\text{ג.} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$$

(4) ראו סרטון.

$$(5) \quad \text{א. הוכחה.} \quad \text{ב.} \quad -\frac{\pi}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{\pi^2}{6} x$$

(6) הוכחה.

(7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

$$(10) \quad \text{א.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2.8}} < \infty \quad \text{ב.} \quad \text{נניח בשלילה כי } f \text{ גזירה ברציפות.}$$

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

## התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

### שאלות:

$$(1) \quad \text{תהי הפונקציה} \quad g(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של  $g(x)$ .

$$\text{ב. עבור } -\pi \leq x \leq \pi \text{ נגדיר את הפונקציה } h(x) = a \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \int_{-\pi}^x g(t) dt$$

כאשר  $g(x)$  מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של  $a$  מתכנס טור פורייה של  $h(x)$  במידה שווה ל- $h(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

$$(2) \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x) = |\sin(x)| \text{ במרחב } L_{PC}^2([-\pi, \pi]) \text{ ונסמן ב-} f'(x) \text{ את הנגזרת שלה.}$$

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של  $f$  ושל  $f'$ .

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחישבתם?

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של  $f$  במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של  $f'$  במידה שווה?

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2k \cdot x) \quad \text{ב. } a = -\frac{\pi^2}{2}$$

$$(2) \quad \text{א. } f(x) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-4}{(2k+1)(2k-1)} \right] \cos(2k \cdot x)$$

$$\text{ב. } f'(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases} \quad f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{8k}{(2k+1)(2k-1)} \right] \sin(2k \cdot x)$$

ג.  $f(x)$  פונקציה רציפה, מחזורית- $2\pi$ , הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של  $f'(x)$  יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל

נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו:  $[\pi n + \delta, \pi(n+1) - \delta]$  לכל  $0 < \delta < \pi$  ולכל  $n$  שלם.

## טור פורייה בקטע כללי:

### שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה  $f(x) = x^2$  בקטע  $[0, 2\pi]$ .

(2) תהי הפונקציה  $f(x) = \min\{1, |x|\}$ .

א. חשבו את מקדמי פורייה  $a_n$  ו- $b_n$  של טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-2, 2]$ .

ב. חשבו את  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ .

(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$  בקטע  $[0, 2]$ .

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}$ .

(4) פתחו את  $f(x) = |x|$  לטור פורייה בקטע  $[-1, 1]$ .

(5) פתחו את  $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \end{cases}$  לטור סינוסים בקטע  $[0, 2]$ .

(6) נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f(x) = f(x+2)$  ובנוסף  $-1 \leq x < 1$   $f(x) = 2 - |x|$ .

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$ .

ג. חשבו את הסכום  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ .

ד. האם טור הפורייה של  $f(x)$  מתכנס במידה שווה בתחום  $[-1, 1]$ ?

(7) מצאו טור קוסינוסים  $f(x) = x$  בקטע  $[0, 3]$ .

(8) פתחו את  $f(x) = \cos(2x)$  לטור סינוסים בקטע  $[0, \pi]$ .

## תשובות סופיות:

$$x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (1)$$

$$b_n = 0, \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1|4n^2\pi^2} e^{in\pi x} \quad \text{א.} \quad (3)$$

ג.  $\frac{3-e}{4(e-1)}$  ב. ראו סרטון.

$$|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(\pi[2k-1]x) \quad (4)$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi[2k-1]x}{2}\right) \quad (5)$$

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos([2k-1]\pi x) \quad \text{א.} \quad (6)$$

ג.  $\frac{\pi^2}{8}$  ב.  $\frac{\pi^4}{96}$

ד. אם  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$ ,  $f(a) = f(b)$ , ו- $f'$  רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של  $f$  מתכנס במ"ש ל- $f$  בקטע  $[a, b]$ .

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right) \quad (7)$$

$$\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2} \sin([2k-1]x) \quad (8)$$

## משפט הקונבולוציה:

### שאלות:

- (1) הוכח את הטענה כי אם  $f(x)$ ,  $g(x)$  רציפות למקוטעין ומחזוריות- $2\pi$  אז  $(f * g)_{(x)}$  מחזוריות- $2\pi$ .
- (2) הוכח את הטענה כי אם  $f(x)$ ,  $g(x)$  רציפות למקוטעין, מחזוריות- $2\pi$  ופונקציות זוגיות אז  $(f * g)_{(x)}$  זוגית.
- (3) נתונה  $f(x)$  רציפה למקוטעין ומחזורית- $2\pi$  כך שלכל  $x \in [-\pi, \pi]$  מתקיים  $f(x) = \sqrt{2\pi} \cdot \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(x)$ .  
חשבו לכל  $x$  ממשי את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$ .  
הערה:  $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
- (4) נתונות  $f(x)$ ,  $g(x)$  רציפות למקוטעין ומחזוריות- $2\pi$  כך שלכל  $x \in [-\pi, \pi]$  מתקיים  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \cos(x)$ .  
חשבו לכל  $x$  ממשי את הקונבולוציה  $(f * g)_{(x)}$ .
- (5) נתונות  $f(x)$ ,  $g(x)$  רציפות למקוטעין ומחזוריות- $2\pi$  כך שלכל  $x \in [-\pi, \pi]$  מתקיים  $f(x) = x$ ,  $g(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ .  
חשבו לכל  $x$  ממשי את הקונבולוציה  $(f * g)_{(x)}$ .

## תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3)  $\pi - x$ (4) לכל  $x$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$   $(f * g)_{(x)} = -2 \cos(x)$ 

$$(f * g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} (x^2 - (x-1)^2) & -\pi+1 \leq x \leq \pi \\ \frac{1}{4\pi} [x^2 - (x+(2\pi-1))^2] & -\pi \leq x \leq -\pi+1 \end{cases} \quad (5)$$

## גרעין דיריכלה:

### שאלות:

(1) נגדיר  $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$  (גרעין דיריכלה).

א. הוכיחו כי  $D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)$ .

ב. הוכיחו כי  $D_n(x) = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$  עבור  $x \neq 2\pi m$ .

(2) חשבו לכל ערך של  $n$  שלם את ערכו של הביטוי  $I(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin(100x) dx$ .

(3) הוכיחו כי  $I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \left[\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]\right]}{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)} dx = 2(n+1)$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

(4) נניח כי  $f(x)$  רציפה למקוטעין בקטע  $[-\pi, \pi]$ . נסמן  $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$  טור פורייה חלקי.

הוכיחו כי  $(f * D_n)_x = S_n(x)$ .

(5) חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\arctg(x-1) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{e^{(x-1)^2} \sin\left(\frac{1}{2}x\right)} dx$ .

$$(6) \quad \text{נגדיר } S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{2001}{2} t}{\sin t} 2 \cos \frac{t}{2} \cos^{17} \left( e^{\sqrt{|x-t|}} \right) dt$$

יהיו  $a_n$ ,  $b_n$  מקדמי פורייה הממשיים ו- $c_n$  מקדמי פורייה המרוכבים, של הפונקציה  $S(x)$ .  
חשבו את  $b_{500}$ ,  $c_{1001}$ .

רמז:  $S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(x-t) dt$  כאשר  $D_N(t)$  גרעין דיריכלה מסדר  $N$  ו- $S_N$  טור פורייה החלקי ה- $N$  של  $f$ .

### תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(2) 0

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5)  $-\frac{\pi^2}{2e}$

(6)  $c_{1001} = 0$ ,  $b_{500} = 0$



## גרעין פייר וממוצעי סזארו:

### שאלות:

(1) נסמן  $D_n(x)$  גרעין דיריכלה. נגדיר את גרעין פייר כך:  $K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x)$ .

א. הראו כי לכל  $x \neq 2\pi m$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

ב. הראו כי  $K_n(x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}$

(2) הוכיחו כי  $K_n(x) \geq 0$  לכל  $x$  כאשר  $K_n(x)$  גרעין פייר.

(3) הוכיחו כי  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$

(4) הוכיחו כי לכל  $0 < \delta < \pi$  מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |x| < \pi} K_n(x) dx = 0$

(5) נניח כי  $f(x)$  רציפה למקוטעין, מחזורית- $2\pi$  וכי  $m \leq f(x) \leq M$  לכל  $x$  ממשי. הוכיחו כי  $m \leq \sigma_n(x) \leq M$  לכל  $n$  טבעי ולכל  $x$  ממשי כאשר  $\sigma_n(x)$  סדרת ממוצעי סזארו של הפונקציה  $f(x)$ .

(6) תהי  $\varphi(x)$  רציפה בקטע  $[-\pi, \pi]$  ונניח כי:

i.  $\varphi(x) \geq 0$

ii.  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = 1$

iii. קיים  $0 < \delta_0 < \pi$  כך שלכל  $|x| > \delta_0$  מתקיים  $\varphi(x) = 0$ .

נגדיר  $F_n(x) = n\varphi(nx)$  ונרחיב אותה באופן מחזורי.

הוכיחו כי  $F_n(x)$  מהווה גרעין חיובי.

**תשובות סופיות:**

- |   |           |           |
|---|-----------|-----------|
| 1 | א. הוכחה. | ב. הוכחה. |
| 2 | הוכחה.    |           |
| 3 | הוכחה.    |           |
| 4 | הוכחה.    |           |
| 5 | הוכחה.    |           |
| 6 | הוכחה.    |           |

## גרעין פוואסון:

### שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי לכל  $0 < r < 1$  מתקיים  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x)+r^2}$

ב. גרעין פוואסון נתון על ידי  $P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x)+r^2}$ . תהי  $f(x)$  פונקציה

רציפה למקוטעין ומחזורית  $2\pi$  וטור פורייה שלה נתון על ידי  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ .

הראו כי  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) P_r(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}$

ג. הוכיחו את התכונות הבאות של גרעין פוואסון:

i.  $P_r(x) \geq 0$  לכל  $x$  ממשי.

ii. לכל  $0 < \delta < \pi$  מתקיים  $P_r(x) \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$  במידה שווה לפי  $x$

בתחום  $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ .

iii. מתקיים  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = 1$ .

ד. תהי  $f(x)$  רציפה ומחזורית  $2\pi$  ועם טור פורייה  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ .

הוכיחו כי  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} f(x)$  במידה שווה.

**הערה: ניתן להיעזר במשפט הבא:** אם סדרת פונקציות  $P_r(x)$  מקיימת את

התכונות הבאות:

i.  $P_r(x) \geq 0$  לכל  $x$  ממשי.

ii. לכל  $0 < \delta < \pi$  מתקיים  $P_r(x) \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$  במידה שווה לפי  $x$  בתחום

$[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ .

iii. מתקיים  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = 1$ .

אזי  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) P_r(t) dt \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} f(x)$  במידה שווה.

### תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

## תרגילים מסכמים:

### שאלות:

(1) טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה  $f(t) = e^{iat}$  בתחום  $-\pi \leq t \leq \pi$  כאשר  $\alpha$  הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים 
$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} - \frac{1}{\alpha}$$

ג. הראו שמתקיים 
$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{[\alpha - n]^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$$

ד. הראו שמתקיים 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^2 - \alpha^2)} = \frac{\pi}{4\alpha^2} \left( \frac{1}{\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)} - 1 \right)$$

(2) נגדיר  $f(x) = |x|$  במרחב  $L_{PC}^2([-\pi, \pi])$  ונסמן ב- $f'(x)$  את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של  $f$ .

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום  $(-\infty, \infty)$ ?

$$\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots$$

ג. חשבו את הטור 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1} \right)^2$$

(3) תהי  $f \in L_{PC}^2([-\pi, \pi])$ .

נסמן ב- $c_n$  את מקדמי פורייה (המרוכבים) של  $f$ .

נסמן  $d_n = \operatorname{Re}\{c_n\}$  ובנוסף נתון כי:

•  $f$  ממשית.

•  $f$  מתאפסת על הקטע  $[-\pi, 0]$ .

• מתקיים השוויון  $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} d_n e^{inx} = x^2 e^{|x|} \cos(x)$

מצאו את  $f$ .

(4) תהי  $f$  פונקציה זוגית בעלת מחזור  $2\pi$  המקיימת  $f(x) = \cos(2x)$

בתחום  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  ו- $f(x) = -1$  בתחום  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ .

מצאו את טור פורייה הממשי של  $f$  וחשבו את הסכום  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$ .  
האם טור פורייה של  $f$  מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

(5) נתונה פונקציה  $f(x)$  רציפה למקוטעין ומחזורית  $2\pi$ .

נסמן  $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx}$  ויהי  $h > 0$  פרמטר כלשהו.

מצאו את מקדמי פורייה של  $h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(t+x) dt$  כתלות ב- $f_n$ .

### תשובות סופיות:

(1) א.  $e^{i\alpha t} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\pi\alpha)}{[\alpha-n]\pi} \cdot e^{in \cdot t}$  ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

(2) א.  $f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos([2k+1]x)$

ב.  $\begin{cases} \frac{\pi}{4} & \pi k < x < \pi(k+1) \\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1) < x < \pi k \\ 0 & x = \pi k \end{cases}$  , כאשר  $k$  מספר שלם. ג.  $\frac{\pi^2}{8}$

(3)  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 e^{|x|} \cos(x) & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$

(4) התכנסות במידה שווה בקטע  $[-\pi, \pi]$  אם  $f$  רציפה בקטע  $[-\pi, \pi]$ ,  $f(-\pi) = f(\pi)$

ו- $f' \in E[-\pi, \pi]$  אזי טור פורייה של  $f$  מתכנס במ"ש ל- $f$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

(5)  $f_0$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 9 - מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים

תוכן העניינים

- 1. מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים..... 116
- 2. מערכות אורתונורמליות..... 118

## מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים:

### שאלות:

- (1) יהי  $V$  מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע  $[a, b]$ .  
הוכיחו כי  $\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$  מהווה נורמה במרחב זה.
- (2) יהי  $V$  מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע  $[a, b]$ .  
הוכיחו כי  $\|f\| = \max_{[a, b]} |f(x)|$  מהווה נורמה במרחב זה.
- (3) יהי  $V = R_{\leq 2}[x]$  המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה / שווה מ-2 מעל הממשיים.  
לכל שני פולינומים  $p(x), q(x)$  ב- $V$  נגדיר:  
 $\langle p(x), q(x) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$   
 הוכיחו כי  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  הינה מכפלה פנימית.
- (4) נגדיר את המרחב  $V = C^1[-1, 1]$  (מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע  $[-1, 1]$ ).  
נגדיר:  $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx + \int_{-1}^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx$   
 הוכיחו כי  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  הינה מכפלה פנימית.
- (5) הוכיחו כי בכל מרחב מכפלה פנימית  $E$  מתקיים לכל  $f, g \in E$ :  
 א.  $\forall u \in E \quad \langle u, f+g \rangle = \langle u, f \rangle + \langle u, g \rangle$   
 ב.  $\operatorname{Re} \langle f, g \rangle = \frac{1}{4} (\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2)$   
 ג.  $\operatorname{Im} \langle f, g \rangle = \frac{1}{4} (\|f+ig\|^2 - \|f-ig\|^2)$   
 ד.  $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\{\|f\|^2 + \|g\|^2\}$  (שוויון המקבילית).
- (6) יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית.  
נסמן  $w = u + v$  וקטורים במרחב.  
הוכיחו כי אם  $\langle u, v \rangle = 0$  אזי  $\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ .

(7) נגדיר את המרחב  $V$  להיות מרחב הפונקציות  $f(x)$  הממשיות הגזירות ברציפות פעמיים בקטע  $[a, b]$  (כלומר  $f''(x)$  רציפה ב- $[a, b]$ ).

בדקו האם  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f''(x)g''(x)dx$  מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

(8) נגדיר את המרחב  $V$  להיות מרחב של פונקציות  $f(x)$  ממשיות וגזירות ברציפות בקטע  $[-1, 1]$  (כלומר הנגזרת  $f'(x)$  רציפה בקטע  $[-1, 1]$ ) כך ש-  $f(-1) = 0$ .

נגדיר  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)dx$ .

הוכיחו כי  $\langle f, g \rangle$  מהווה מכפלה פנימית במרחב  $V$ .

(9) יהי  $V$  מרחב הפונקציות הרציפות המרוכבות בקטע  $[a, b]$ .

הוכיחו כי  $\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx + \max_{[a,b]} |f(x)|$  מהווה נורמה במרחב  $V$ .

### תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7)  $f(x) = 1$

(8) הוכחה.

(9) הוכחה.



## מערכות אורתונורמליות:

### שאלות:

(1) נתבונן במערכת  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  כאשר  $\varphi_n(x) = \cos(nx)$  במרחב  $L^2[-\pi, \pi]$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

עם המכפלה הפנימית

הוכיחו כי המערכת  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  הינה מערכת אורתונורמלית.

(2) נתבונן במערכת  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  כאשר  $\varphi_n(x) = \sin(nx)$  במרחב  $L^2[0, \pi]$

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

עם המכפלה הפנימית

הוכיחו כי המערכת  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  הינה מערכת אורתונורמלית.

(3) יהי מרחב מכפלה פנימית  $V$  ותהי  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  מערכת של פולינומים כך

ש- $\varphi_n(x)$  הינו פולינום ממעלה  $n$ .

$$\langle \varphi_n(x), x^m \rangle = 0 \quad m < n$$

מתקיים

הוכיחו כי המערכת  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  אורתוגונלית במרחב זה.

(4) יהי  $V$  מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע  $[e^{-\pi}, e^{\pi}]$  עם המכפלה

$$\langle f, g \rangle = \int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}} f(x) \overline{g(x)} \frac{1}{x} dx$$

הפנימית

הוכיחו כי המערכת  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  אורתוגונלית במרחב זה.

(5) נניח כי המערכת  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב  $L^2[a, b]$  עם

המכפלה הפנימית  $\langle f, g \rangle_1 = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$ . יהיו  $c > 0$  ו- $d$  ממשי כלשהוא.

הוכיחו כי המערכת  $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  כאשר  $\psi_n(x) = \sqrt{c} \cdot \varphi_n(c \cdot x + d)$  הינה מערכת

אורתונורמלית סגורה במרחב  $L^2\left[\frac{a-d}{c}, \frac{b-d}{c}\right]$  עם המכפלה

הפנימית  $\langle f, g \rangle_2 = \int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(x) \overline{g(x)} dx$ .

(6) יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית ותהי  $\{e_n\}_{n=1}^N$  מערכת אורתונורמלית סופית.

הוכיחו כי לכל  $v \in V$  מתקיים  $\left\| \sum_{n=1}^N \langle v, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle v, e_n \rangle|^2$ .

#### מערכת פולינומי צ'בישב:

(7) יהי  $K$  מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע  $(-1, 1)$

ונגדיר ב- $K$  מכפלה פנימית:  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

הוכיחו כי אוסף הפונקציות  $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  כאשר  $T_n(x) = \cos[n \cdot \arccos(x)]$

(הנקראת גם פולינומי צ'בישב) הינה מערכת אורתונורמלית ב- $K$  ומצאו

קבועים  $\alpha_n$  כך שהמערכת  $\{\alpha_n T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  היא מערכת אורתונורמלית.

#### מערכת פולינומי הרמיט:

(8) יהי  $K$  מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות

למקוטעין ומקיימות את התנאי  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \cdot e^{-x^2} dx < \infty$ .

נגדיר על  $K$  מכפלה פנימית  $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \cdot e^{-x^2} dx$

הוכיחו כי פולינומי הרמיט, המוגדרים על ידי הנוסחה  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]$

(נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתונורמלית במרחב  $K$  ומצאו להם קבועי נרמול.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח כי לכל  $n, k$  טבעיים כך ש-  $k < n$

$$\text{מתקיים } \langle H_n, x^k \rangle = 0. \text{ ניתן להיעזר בעובדה כי } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

### מערכת פולינומי לג'נדר:

(9) יהי  $K$  מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע  $(-1, 1)$

$$\text{ונגדיר ב- } K \text{ מכפלה פנימית: } \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\text{הוכיחו כי פולינומי לג'נדר, הנתונים על ידי נוסחת רודריגז } P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

$$\text{מהווים מערכת אורתוגונלית ב- } K \text{ וכי } \langle P_n, P_n \rangle = \frac{2}{2n+1} \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל  $n, k$  טבעיים כך ש-  $k < n$  מתקיים.

$$\langle P_n, x^k \rangle = 0$$

### מערכת פולינומי לגר:

(10) יהי  $K$  מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות

$$\text{למקוטעין ומקיימות את התנאי } \int_0^{\infty} |f(x)|^2 \cdot e^{-x} dx < \infty$$

$$\text{נגדיר על } K \text{ מכפלה פנימית } \langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x} dx$$

$$\text{הוכיחו כי פולינומי לגר, המוגדרים על ידי הנוסחה } L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^n e^{-x}]$$

(נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתונורמלית במרחב  $K$ .

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל  $n, k$  טבעיים כך ש-  $k < n$  מתקיים.

$$\langle L_n, x^k \rangle = 0$$

$$\text{ניתן להיעזר בנוסחה } \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

### תשובות סופיות:

- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) הוכחה.
- (4) הוכחה.
- (5) הוכחה.
- (6) הוכחה.
- (7) מערכת פולינומי צ'בישב : הוכחה.
- (8) מערכת פולינומי הרמיט : הוכחה.
- (9) מערכת פולינומי לג'נדר : הוכחה.
- (10) מערכת פולינומי לגר : הוכחה.

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 10 - משוואות הגלים

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 11 - משוואת החום

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים בקטע סופי ..... (ללא ספר)
2. עקרון דוהמל ..... (ללא ספר)

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 12 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

1. חזרה על אינטגרל קווי ..... (ללא ספר)
2. משוואת לפלס בעיגול ..... (ללא ספר)
3. משוואת לפלס בטבעת ..... (ללא ספר)
4. משוואת לפלס בגזרה מעגלית ..... (ללא ספר)
5. משוואת לפלס במלבן ..... (ללא ספר)