

# משוואות דיפרנציאליות רגילות



## תוכן העניינים

|    |                                                 |    |
|----|-------------------------------------------------|----|
| 1. | משוואות מסדר ראשון .....                        | 1  |
| 2. | משוואות ליניאריות מסדר שני .....                | 23 |
| 3. | משוואות ליניאריות מסדר n .....                  | 38 |
| 4. | התמרת לפלס .....                                | 47 |
| 5. | טורים עם איברים קבועים .....                    | 59 |
| 6. | סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות ..... | 73 |
| 7. | פתרון משוואות ליניאריות באמצעות טורים .....     | 82 |
| 8. | שימושים של משוואות דיפרנציאליות .....           | 87 |
| 9. | פרקי חזרה - אינטגרלים .....                     | 95 |

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

### תוכן העניינים

|                                                      |           |
|------------------------------------------------------|-----------|
| 1. מבוא .....                                        | (ללא ספר) |
| 2. הפרדת משתנים .....                                | 1         |
| 3. משוואה הומוגנית .....                             | 3         |
| 4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$ .....   | 5         |
| 5. משוואה מדויקת .....                               | 6         |
| 6. גורם אינטגרציה .....                              | 8         |
| 7. משוואה לינארית מסדר ראשון .....                   | 11        |
| 8. משוואת ברנולי .....                               | 13        |
| 9. משוואת ריקטי .....                                | 14        |
| 10. הצבות שונות ומשונות .....                        | 15        |
| 11. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד .....    | 16        |
| 12. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון ..... | 19        |
| 13. משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה .....            | 21        |

## הפרדת משתנים

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2)=1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

## תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x| - c}, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

## משוואה הומוגנית

## שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-8 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xy y' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $n$ , על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של  $n$  שנמצא בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

## משוואה מהצורה $(ax + by + c)dx + (dx + ey + f)dy = 0$

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y+2} \quad (1)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (4)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} - 1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} + 1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right| + (-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right] + c \quad (4)$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) + c \quad (5)$$

## משוואה מדויקת

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-6:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right)dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

$$(3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0 \quad (7)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $k$ , על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של  $k$  שנמצא בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

## גורם אינטגרציה

### שאלות

(1) הראו שהמשוואה  $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$  אינה מדויקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $\frac{1}{xy^3}$ .

(2) הראו שהמשוואה  $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0$

אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $ye^x$ .

(3) הראו שהמשוואה  $(x+2)\sin y dx + x \cos y dy = 0$  אינה מדויקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $xe^x$ .

פתרו את המשוואות בשאלות 4-9:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0 \quad (5)$$

$$(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0 \quad (6)$$

$$(y^2 - y)dx + xdy = 0 \quad (7)$$

$$(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0 \quad (8)$$

$$y(1) = -1 ; \quad y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4} \quad (9)$$

$$(10) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \text{נתונה מד"ר לא מדויקת}$$

א. הוכיחו: אם  $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$ , אז  $e^{\int f(x)dx}$  הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכיחו: אם  $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$ , אז  $e^{-\int g(y)dy}$  הוא גורם אינטגרציה.

$$(11) \quad \text{נתונה המשוואה הדיפרנציאלית } (y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0$$

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של  $xy$  בלבד. כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה  $\mu(xy)$ .

$$(12) \quad \text{נתונה המשוואה } (5x^2 + 3y^3 + 2xy)dx + (3x^2 + 3xy^2 + 6y^3)dy = 0$$

מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה  $\mu(x+y)$ .

$$(13) \quad \text{נתונה המשוואה הדיפרנציאלית } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $\frac{x}{y}$  בלבד.

$$(14) \quad \text{נתונה המשוואה הדיפרנציאלית } (x^2y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0$$

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של  $x^\alpha y^\beta$ . כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה  $\mu(x^\alpha y^\beta)$ .

$$(15) \quad \text{נתונה המשוואה הדיפרנציאלית } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $xy$  בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה  $(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$ .

$$(16) \quad \text{נתונה המשוואה הדיפרנציאלית } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $x+y$  בלבד.

## תשובות סופיות

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (10)$$

$$\mu(xy) = (xy)^2 \quad (11)$$

$$\mu(x+y) = (x+y)^2 \quad (12)$$

$$\text{if: } \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} = h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM}} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{xy^3} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{ב.} \quad \text{if: } \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}} \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$\text{if: } \frac{M_y - N_x}{N - M} = h(x+y) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}} \quad (16)$$

## משוואות ליניאריות מסדר ראשון

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2 z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

## תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[ \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) \left[ x^2 - 4x + C \right] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} \left[ -5e^{\cos x} + C \right] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x \left[ -\cot x + C \right] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2 (y + c) \quad (9)$$

## משוואות ברנולי

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left( \frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left( \frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

## משוואות ריקטי

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (1)$$

$$y' = 1 + (x - y)^2 \quad (2)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}} \quad (1)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x} \quad (3)$$

## הצבות שונות ומשוונות

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y' = \cos(y - x) \quad (1)$$

$$y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right); y(1) = 0 \quad (2)$$

$$y' - x^2 y + y^2 = x - \frac{x^4}{4}, y(0) = 1 \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{1}{\sin z} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}\right) \quad (2)$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} \quad (3)$$

## משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

### שאלות

(1) נתונה הבעיה  $y(2) = -1$ ,  $y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$ .

א. הוכיחו ש-  $y_1(x) = -x + 1$ ,  $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2$  הם פתרונות לבעיה.

קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

(2) נתונה הבעיה  $y(0) = 0$ ,  $y' = \sqrt[3]{y} + 4$ .

א. הוכיחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכיחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכיחו שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

(3) פתרו את הבעיה  $y(4) = 0$ ,  $y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$ .

(4) נתונה הבעיה  $y(0) = 4$ ,  $y' = (y-1)(x^2 + y)^5$ .

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

(5) נתונה המד"ר  $ydx = (2x + y^3)dy$ .

א. הראו שעבור  $x = x(y)$  המד"ר ליניארית מסדר ראשון,

ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,

מהן נקודות ההתחלה  $(x_0, y_0)$ , כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,

העובר דרך  $(x_0, y_0)$ .

צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.

מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך  $(x_0, y_0)$ ?

$$(6) \quad \begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו 3 קירובי פיקארד לפתרון הבעיה.  
 ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר  $n$  (הוכיחו באינדוקציה).  
 ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר  $n$  מתכנס לפתרון כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

$$(7) \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{x} |\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases} \quad \text{כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה} \quad (x > 0) ?$$

$$(8) \quad \begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.  
 ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.  
 ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(9) \quad \begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.  
 ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.  
 ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(10) \quad \begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(11) \quad \begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(12) \quad \begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

## תשובות סופיות

- (1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.  
 (2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.  
 (3)  $y(x) = 0$   
 (4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.  
 (5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.  
 ב. כל נקודת התחלה  $(x_0, y_0)$ , שעבורה  $y_0 \neq 0$ .  
 הקטע הארוך ביותר:  $(0, \infty)$  או  $(-\infty, 0)$ .  
 (6) א.  $y_0(x) = 1, y_1(x) = 1 + x^2, y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}, y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$   
 ב.  $y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$ . ג. הוכחה.  
 (7) אחד.  
 (8) א.  $[-0.08, 0.08]$  ב.  $[-0.1, 0.1]$  ג. הוכחה.  
 (9) א.  $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$  ב.  $[-0.5, 0.5]$  ג. הוכחה.  
 (10) הוכחה.  
 (11) הוכחה.  
 (12) הוכחה.

## פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

### שאלות

(1) שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית  $y' = 2y - x$ .

(2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

א.  $y' = \frac{x}{y}$

ב.  $y' = xy$

ג.  $y' = x + y$



(3) נתונה המד"ר  $y' = y - x$ ,  $y(0) = 2$ .

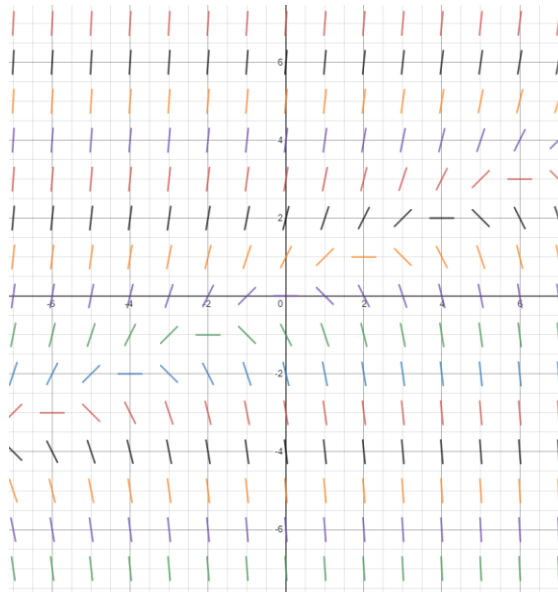
מצאו בקירוב את  $y(1)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.1$ .

(4) נתונה המד"ר  $y' = x + y$ ,  $y(1) = 2$ .

מצאו בקירוב את  $y(2)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.2$ .

## תשובות סופיות

(1)



(2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

(3)  $y(1) = 4.593$

(4)  $y(2) = 6.95328$

## משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן  $p = y' = \frac{dy}{dx}$ .

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$(p = y') \quad 4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$(p = y') \quad x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (2)$$

$$(p = y') \quad xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (3)$$

$$(p = y') \quad y = 2px + p^4 x^2 \quad (4)$$

$$(p = y') \quad xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (5)$$

$$(p = y') \quad (y > 0) \quad 6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (6)$$

## תשובות סופיות

$$(y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left( \ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (1)$$

$$(\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0 \quad (2)$$

$$\left( y + 0.5x - \frac{c_1}{x} \right) \cdot \left( \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2 \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (5)$$

$$6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0 \quad (6)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 2 - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה ..... 23
2. משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים ..... 25
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל" ..... 27
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם" ..... 29
5. וריאציית פרמטרים ..... 31
6. משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משוואת אוילר ..... (ללא ספר)
7. משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל ..... 32
8. הוורונסקיאן ושימושיו ..... 33
9. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני ..... 35
10. השיטה האופרטורית ..... 36

## משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(x \neq 0) \quad x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y'' \tan x - 1 = y' \quad (2)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

$$(\cos y \neq 0) \quad y'' \tan y = 2(y')^2 \quad (8)$$

## תשובות סופיות

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1 (x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k; y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[ \frac{c^2 (x + k)^4}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = -(cx + k); y = c \quad (8)$$

## משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-11:

$$y'' - 100y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (3)$$

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = 1, \quad 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (4)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (5)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 10y' + 125y = 0 \quad (8)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3; \quad y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{a^2} y(x) = 0 & (a > 0) \\ y(0) = 4 \\ y(\infty) = y(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$(12) \quad y y'' + (y')^2 = 0 \quad \text{נתונה המד"ר}$$

א. הראו כי  $y_1 = 4$  ו-  $y_2 = \sqrt{x}$  הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראו כי הפתרון  $z(x) = y_1(x) + y_2(x)$ , אינו פתרון של המד"ר.

האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

### תשובות סופיות

$$(1) \quad y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x}$$

$$(2) \quad y = c_1 + c_2 e^{4x}$$

$$(3) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{7x}$$

$$(4) \quad z = e^x$$

$$(5) \quad y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$(6) \quad x(t) = c_1 e^{\frac{-t}{2}} + c_2 t e^{\frac{-t}{2}}$$

$$(7) \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$(8) \quad y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x]$$

$$(9) \quad y = e^2 \sin 3x$$

$$(10) \quad y = e^{\frac{-4x}{5}} \left[ c_1 \cos \left( \frac{2}{5} x \right) + c_2 \sin \left( \frac{2}{5} x \right) \right]$$

$$(11) \quad y = 4e^{-\frac{|x|}{a}}$$

(12) שאלת הוכחה.

## השוואות מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4\sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (8)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (9)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## השוואות מקדמים בשיטת "המרשם"

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (8)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (9)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (10)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (7)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (9)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (10)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## וריאציית פרמטרים

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 ; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (5)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[ \ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-2x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[ \frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} \left[ 2(x+1)^{3/2} \right] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1+e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1+e^{-x}) - (1+e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

## משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

### שאלות

(1) פתרו  $y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$ , כאשר ידוע  $y_1(x) = e^{2x}$ .

(2) פתרו  $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ .

(3) הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$(1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x}, \quad (0 < x < 1),$$

כאשר ידוע ש-  $y_1(x) = e^x$ , פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

### תשובות סופיות

(1)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$

(2)  $y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$

(3) שאלת הדגמה.

## הוורונסקיאן ושימושו

### שאלות

- (1) האם ייתכן כי  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = \sin x$  הם שני פתרונות של המשוואה  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  עם מקדמים רציפים בקטע  $[0, \pi]$ ?
- (2) הראו כי הפונקציות  $y_1(x) = \sin x^2$ ,  $y_2(x) = \cos x^2$  הן פתרונות בת"ל של המשוואה  $xy'' - y' + 4x^3y = 0$  בקטע  $(-4, \infty)$ .  
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור  $x = 0$ .  
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?
- (3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות  $y_1(x) = xe^x$ ,  $y_2(x) = e^{-x}$  הן פתרונות של המשוואה  $y'' - \frac{2}{1+2x}y' - \frac{2x+3}{1+2x}y = 0$  בקטע  $(-\frac{1}{2}, \infty)$ .  
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?
- (4) נתונות שתי פונקציות  $y_1 = x^3$ ,  $y_2 = |x^3|$  בקטע  $[-4, 4]$ .  
א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.  
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.  
ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?  
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר  $xy'' - 2y' = 0$ .  
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?
- (5) ענו על הסעיפים הבאים:  
א. יהיו  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  פונקציות גזירות פעמיים בקטע  $I$ , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- $I$ .  
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  הם פתרונות שלה.  
ב. רשמו משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע  $x > 0$ , שהפונקציות  $y_1(x) = x^2$ ,  $y_2(x) = x^4$  הן פתרונות שלה.

- (6) נתון כי  $y_1(x), y_2(x)$  הם פתרונות של המד"ר  $y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0$ , כאשר  $p, q$  רציפות בקטע  $I$ .  
הראו כי אם קיימת נקודה  $c$  בקטע  $I$ , שעבורה  $y_1(c) = y_2(c) = 0$ , אז  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

### תשובות סופיות

- (1) לא.  
(2)  $W = -2x$   
(3) כן.  
(4) א.  $W = 0$       ב. שאלת בדיקה.      ג. לא.      ד. לא.  
(5) א. שאלת הוכחה.      ב.  $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$   
(6) שאלת הוכחה.

## משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

### שאלות

(1) נתונה המשוואה  $y'' - 4y = 12x$ .

א. פתרו את המשוואה.

ב. מצאו פתרון המקיים:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 11 \end{cases}$$

ג. נסו למצוא פתרון המקיים:

$$\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תנו דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים  $y(0) = 1$ .

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

(2) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

הראו כי  $y_1(x) = 0$  ו-  $y_2(x) = x^2$ , הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

(3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה  $x = 0$ , כך שהפונקציות  $y = 4x$  ו-  $y = \sin 4x$  הן פתרונותיה?

### תשובות סופיות

(1) א.  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 3x$  ב.  $y = 4e^{2x} - 3e^{-2x} - 3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

(2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

(3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

## השיטה האופרטורית

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

בשאלות אלו הסימון הוא:  $ay'' + by' + cy = Q(x) \Leftrightarrow (aD^2 + bD + c)y = Q(x)$ .

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (1)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (3)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (4)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (5)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x \quad (6)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2 \cos x \cos 2x \quad (7)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1 \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (3)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x \quad (7)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 3 - משוואות ליניאריות מסדר n

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה מסדר שלישי ..... 38
2. משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים ..... 39
3. שיטת השוואת מקדמים ..... 42
4. שיטת וריאציית הפרמטרים ..... 44
5. משוואת אוילר מסדר שלישי ..... (ללא ספר) 45
6. הוורונסקיאן ושימושיו ..... 45
7. השיטה האופרטורית ..... 46

## משוואה חסרה מסדר שלישי

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(1) \quad y'y''' - (y'')^2 - 3y''(y')^2 - 4(y')^4 = -16y(y')^3$$

עם תנאי ההתחלה  $y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = -12$ .

$$(2) \quad \begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y''y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y''y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = -1, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} 3y'''y - y'y'' &= 0 \\ y(1) &= 1, y'(1) = 3, y''(1) = 6 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} (y'y''' - 2(y'')^2)y^2 &= -(y')^4 \\ y &> 0 \\ y(1) &= y'(1) = y''(1) = 1 \end{aligned}$$

### תשובות סופיות

$$(1) \quad \frac{1}{4} \ln |-3 + 4y| = x + \frac{1}{4} \ln 3$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{1-x} - 1$$

$$(3) \quad y = \tan x - 1$$

$$(4) \quad y = x^3$$

$$(5) \quad y = e^{x-1}$$

## משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-15 :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0 \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 0 \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (3)$$

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \quad (4)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 20y = 0 \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y = 0 \quad (7)$$

$$y^{(6)} - y'' = 0 \quad (8)$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3 - 2D^2 - 3D - 1)y = 0 \quad (9)$$

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0 \quad (10)$$

$$z''' - 6z'' + 12z' - 8z = 0 \quad (11)$$

$$y^{(4)} - 4y = 0 \quad (12)$$

$$x^{(6)} - 3x^{(4)} + 3x'' - x = 0 \quad (13)$$

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \\ y''(0) = -1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} y'''' - 3y''' + 6y'' - 12y' + 8y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \\ y''(0) = -19 \\ y'''(0) = -47 \end{cases} \quad (15)$$

**16** נתונה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6,

אשר אחד הפתרונות שלה הוא  $x^2 e^x \cos 2x$ .

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה.

ב. מצאו את המשוואה.

## תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{0x} [c_3 \cos x + c_4 \sin x] \quad (5)$$

$$y = c_1 e^{-4x} + e^x [c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x] \quad (6)$$

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left( c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x} \quad (9)$$

$$y = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + x e^x [c_3 \cos x + c_4 \sin x] + e^{-x} [c_5 \cos x + c_6 \sin x] + x e^{-x} [c_7 \cos x + c_8 \sin x] \quad (10)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} \quad (11)$$

$$y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x \quad (12)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x} \quad (13)$$

$$y = e^x + 2 \cos x + 3 \sin x \quad (14)$$

$$y = e^x - 2e^{2x} + 3 \cos 2x + 4 \sin 2x \quad (15)$$

$$y = e^x [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x] + x e^x [c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x] + x^2 e^x [c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x] \quad (16)$$

$$y'''' - 6y''' + 27y'' - 68y' + 135y - 150y' + 125y = 0 \quad \text{ב.}$$

## שיטת השוואת מקדמים

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 2\sin x - 4\cos x \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = -28e^{2x} \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14 \quad (3)$$

$$y''' - 3y' + 2y = e^x \quad (4)$$

$$y''' - y'' + y' - y = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 2 \end{cases} \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x \quad (7)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x^3 + 4 \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x (\cos x - \sin x) \quad (5)$$

$$y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x} \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x \quad (7)$$

## שיטת וריאציית הפרמטרים

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}} \quad (2)$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x} \quad (3)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + \ln \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| - x \cos x + \sin x \ln |\cos x| \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{2} (e^x + 1 - \ln(e^x + 1)) + e^x (-\ln(e^x + 1)) + e^{2x} \left( -\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}) \right) \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln |x| \quad (3)$$

## הוורונסקיאן ושימושי

### שאלות

- (1) האם קיימת מד"ר מהצורה  $y'''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$ , בעלת מקדמים רציפים בקטע  $[-1, 1]$ , כך שהפונקציות  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = x^2$ ,  $y_3(x) = x^3$  הן פתרונות שלה?
- (2) נתונות הפונקציות  $y_1(x) = 4 - x$ ,  $y_2(x) = 4 + x$ ,  $y_3(x) = 20 + x$ .  
 א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות.  
 ב. קבעו האם הפונקציות תלויות בקטע  $(-\infty, \infty)$ .  
 ג. ענו שוב על סעיף ב', בידיעה ששלוש הפונקציות הן פתרון של המד"ר  $y'' = 0$ .
- (3) פתרו את הסעיפים הבאים:  
 א. יהיו  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$  פונקציות גזירות ברציפות שלוש פעמים בקטע  $I$ , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב-  $I$ . הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 3, בעלת מקדמים רציפים בקטע  $I$ , כך ש-  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$  הם פתרונות שלה.  
 ב. רשמו משוואה לינארית, הומוגנית, מסדר שלישי, עם מקדמים רציפים, שהפונקציות  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = x^2$ ,  $y_3(x) = x^3$  הן פתרונות שלה.

### תשובות סופיות

- (1) לא. הפונקציות מתאפסות רק בנקודה אחת  $x = 0$ .  
 (2) א.  $W = 0$ . ב. הפונקציות תלויות. ג. הפונקציות תלויות.  
 (3) א. שאלת הוכחה. ב.  $x \neq 0$ ,  $y'''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$ .

## השיטה האופרטורית

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 4e^x - 10e^{-2x} \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 10e^{4x} + 2e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)y = 10e^x + 4e^{2x} \quad (3)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = 24e^x + 81e^{4x} \quad (4)$$

$$(D^6 + D^4 + D^2)y = 104\sin(2x+1) + \cos(x+10) \quad (5)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = -5\sin 2x \quad (6)$$

$$(D^4 - 3D^3 + 6D^2 - 12D + 8)y = 30\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 48\cos^2 x - 16 \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} - e^x + e^{-2x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + \frac{5}{81} e^{4x} - \frac{1}{18} x e^x - \frac{1}{30} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x} + 5x^2 e^x + 2x^2 e^{2x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x + c_5 e^{4x} - \frac{1}{3} x^4 e^x + x e^{4x} \quad (4)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} + c_5 e^{3x} + c_6 e^{-3x} - 2\sin(2x+1) - \cos(x+10) \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x + c_5 e^{4x} + \frac{1}{500} [4\sin 2x - 22\cos 2x] \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + \frac{5\sin x + 25\cos x}{26} + \frac{-3\cos 2x - 18\sin 2x}{37} + 1 \quad (7)$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 4 - התמרת לפלס

### תוכן העניינים

|    |                               |
|----|-------------------------------|
| 47 | 1. התמרת לפלס                 |
| 50 | 2. התמרת לפלס ההפוכה          |
| 54 | 3. פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס |
| 56 | 4. נוסחאות - התמרת לפלס       |

## התמרת לפלס

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות להתמרת לפלס.

### שאלות

חשבו את התמרות לפלס בשאלות 1-12 בעזרת טבלת התמרות לפלס:

$$L(t^2 + 4t - 2) \quad (1) \quad L\left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + 1\right) \quad (2)$$

$$L(e^{-4t} + 10e^{2t}) \quad (3) \quad L(\cosh 4t) \quad (4)$$

$$L(\sinh 10t) \quad (5) \quad L(\sin 2t \cos 2t) \quad (6)$$

$$L(\sin 2t \cos 3t) \quad (7) \quad L(\sin^2 t) \quad (8)$$

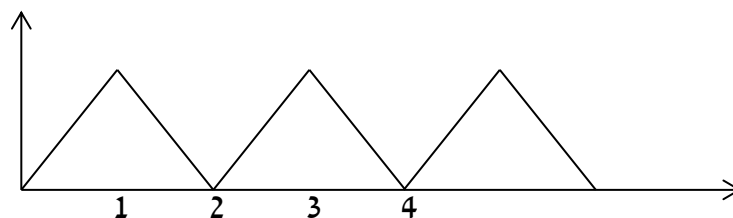
$$L(\cos^2 4t) \quad (9) \quad L(t^2 \sin 4t) \quad (10)$$

$$L(t^4 e^{2t}) \quad (11) \quad L(e^{2t} \sin 4t) \quad (12)$$

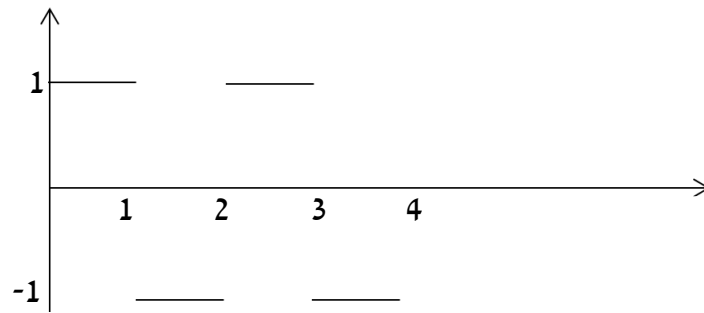
(13) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה  $g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$ .

(14) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה  $g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \end{cases}$ .

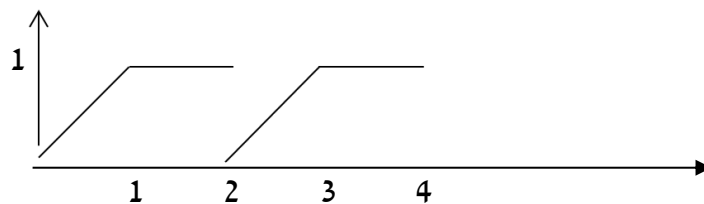
(15) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



(16) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



(17) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



(18) הגדירו ושרטטו את פונקציית המדרגה  $u(t)$  ואת ההזזה שלה  $u(t-k)$ .

(19) שרטטו את הפונקציה  $f(t) = u(t-2) - u(t-3)$ , כאשר  $u(t)$  פונקציית המדרגה.

(20) רשמו את הפונקציה  $f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$ , בעזרת פונקציית המדרגה.

(21) רשמו את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה  $u(t)$ , של הפונקציה  $u(t-k)$ , ושל הפונקציה  $f(t-k)u(t-k)$ .

(22) חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה :  $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ (t-4)^2 & t \geq 4 \end{cases}$ .

(23) חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה :  $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ t^2 & t \geq 4 \end{cases}$ .

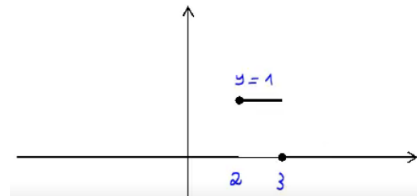
(24) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הגדירו ושרטטו את פונקציית הדלתא  $\delta(t)$ .

ב. מהי התמרת לפלס של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה  $\delta(t-a)$ ?

## תשובות סופיות

- $$\frac{12}{s^5} + s^{-3/2} + \frac{1}{s} \quad (2)$$
- $$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-4} + \frac{1}{s+4} \right] \quad (4)$$
- $$\frac{1}{2} \frac{4}{s^2 + 16} \quad (6)$$
- $$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} \quad (8)$$
- $$\frac{8(3s^2 - 16)}{(s^2 + 16)^3} \quad (10)$$
- $$\frac{4}{(s-2)^2 + 16} \quad (12)$$
- $$\frac{1 - 2e^{-s}}{s^2} \quad (14)$$
- $$\frac{1 - e^{-s}}{s(1 + e^{-s})} \quad (16)$$
- $$u(t-k) = \begin{cases} 0 & t < k \\ 1 & t \geq k \end{cases} \quad (18)$$
- $$\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \quad (1)$$
- $$\frac{1}{s+4} + 10 \frac{1}{s-2} \quad (3)$$
- $$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-10} - \frac{1}{s+10} \right] \quad (5)$$
- $$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{s^2 + 25} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} \quad (7)$$
- $$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 64} \quad (9)$$
- $$\frac{24}{(s-2)^5} \quad (11)$$
- $$\frac{1 - e^{-s}}{s^2} \quad (13)$$
- $$\frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2}}{s^2(1 - e^{-2s})} \quad (15)$$
- $$\frac{1 - e^{-s} - se^{-2s}}{s^2(1 - e^{-2s})} \quad (17)$$
- $$(19)$$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases} = u(t-4) \quad (20)$$

$$L(u(t-k)f(t-k)) = e^{-ks}L(f(t)) \quad (21)$$

$$L((t-4)^2 \cdot u(t-4)) = \frac{2e^{-4s}}{s^3} \cdot \mathcal{N} \quad (22)$$

$$e^{-4s}L(t^2) + 8e^{-4s}L(t) + 16 \frac{e^{-4s}}{s} \quad (23)$$

$$L[\delta(t-2\pi)] = e^{-2\pi s} \quad (24)$$

## התמרת לפלס ההפוכה

### שאלות

חשבו את ההתמרות בשאלות 1-29:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \quad (1)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) \quad (2)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right) \quad (3)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) \quad (4)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \quad (5)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right) \quad (6)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right) \quad (7)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) \quad (8)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right) \quad (9)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \quad (10)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right) \quad (11)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right) \quad (12)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right) \quad (13)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right) \quad (14)$$

$$L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right) \quad (15)$$

$$L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right) \quad (16)$$

$$L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right) \quad (17)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right) \quad (18)$$

$$L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right) \quad (19)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2-4s+4)}\right) \quad (20)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right) \quad (21)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right) \quad (22)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right) \quad (23)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right) \quad (24)$$

$$L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right) \quad (26)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) \quad (25)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1} + \frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right) \quad (28)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{s} - \frac{4e^{-s}}{s^2} + \frac{4e^{-3s}}{s^2}\right) \quad (27)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right) \quad (29)$$

\* בשאלה 27 כתבו את התוצאה בצורה מפורטת ושרטטו אותה.

$$(30) \text{ נתון } F(s) = \frac{e^{-s} + 2}{s}$$

חשבו את  $f(0)$  ו- $f(\infty)$ , כאשר  $f(t) = L^{-1}(F(s))$ .  
פתרו בשתי דרכים שונות.

הערה:  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ ,  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ .

(31) הסבירו והדגימו את משפט הקונוולוציה.

השתמשו במשפט הקונוולוציה כדי לחשב את התרגילים הבאים:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-1)}\right) \quad (32)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right) \quad (33)$$

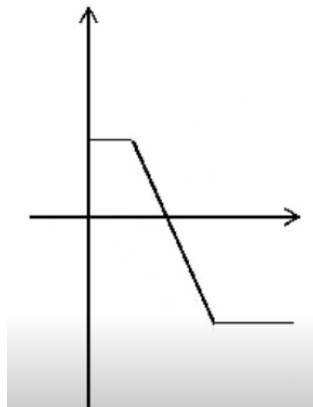
$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right) \quad (34)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right) \quad (35)$$

## תשובות סופיות

- (1) 1
- (2)  $\frac{t^3}{3!}$
- (3)  $e^{10t}$
- (4)  $\frac{1}{3} \sin 2t$
- (5)  $\cos 2t$
- (6)  $e^{10t} \frac{1}{2} \sin 2t$
- (7)  $e^{2t} \left\{ \cos 2t + 2 \frac{1}{2} \sin 2t \right\}$
- (8)  $\frac{1}{4} t \sin 2t$
- (9)  $\frac{1}{4} t \sin 2t$
- (10)  $\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{x}}$
- (11)  $\frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t}$
- (12)  $1 - 2e^{-5t}$
- (13)  $3e^{-3t} - 2e^{-2t}$
- (14)  $1 + \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}$
- (15)  $e^{-t} + 2e^{-2t} + 3e^{3t}$
- (16)  $e^{-3t} + e^{3t} - e^{-2t} - e^{2t}$
- (17)  $e^{2t} + 4te^{2t} - e^{-2t}$
- (18)  $-6 + 5t + 6e^{-2t}$
- (19)  $4 - 4e^{-3t} - 3te^{-3t}$
- (20)  $2e^t + te^t - 2e^{2t} + te^{2t}$
- (21)  $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2}t$
- (22)  $\frac{1}{\sqrt{0.75}} e^{-0.5t} \sin \sqrt{0.75}t$
- (23)  $\sin t + 2e^{3t}$
- (24)  $\cos t + e^{-2t}$
- (25)  $\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t$
- (26)  $e^t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + 5t \sin 2t + \frac{5}{4} (\sin 2t - 2t \cos 2t)$
- (27) א.  $3 - 4u(t-1) \cdot (t-1) + 4u(t-3) \cdot (t-3)$

$$\text{ב. } \begin{cases} 3 & t < 1 \\ 7 - 4t & 1 < t < 3 \\ -5 & t \geq 3 \end{cases} ; \text{ שרטוט:}$$



$$u(t-4)e^{-(t-4)} + u(t+2)\sin(t+2) \quad (28)$$

$$u(t-10)(e^{t-10} - e^{2(t-10)}) \quad (29)$$

$$f(0) = 2 \quad f(\infty) = 3 \quad (30)$$

$$(31) \text{ שאלת הסבר.}$$

$$-\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 2) + e^t \quad (32)$$

$$0.5t - \frac{1}{4}\sin 2t \quad (33)$$

$$\frac{1}{4}e^{4t}(t-1) + \frac{1}{4} \quad (34)$$

$$\frac{1}{2}(-2\cos t + 2 - t\sin t) \quad (35)$$

## פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס:

$$y(0) = 0 ; y' + 4y = e^{-3t} \quad (1)$$

$$y(0) = -1, y'(0) = 4 ; y'' + 4y' + 4y = 10e^{-2t} \quad (2)$$

$$y(0) = -1, y'(0) = -4 ; y'' - 4y' = 16 \quad (3)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 4y' = 8t + 2 \quad (4)$$

$$y(0) = y'(0) = \frac{1}{4} ; 4y'' - 4y' = te^t + e^t \quad (5)$$

$$, y(0) = y'(0) = 0 ; y'' - 3y' + 2y = u(t-4) \quad (6)$$

$$\text{כאשר } u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \text{ היא פונקציית המדרגה.}$$

$$. f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 & t \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר } , y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + y' = f(t) \quad (7)$$

$$. h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases} \text{ כאשר } , y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 5y' + 6y = h(t) \quad (8)$$

$$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 3 ; y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10 \cos t \quad (9)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 ; y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi) \quad (10)$$

$$y(0) = 2, y'(0) = -3 ; y'' + 3y' - 10y = 4\delta(t - 2) \quad (11)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 ; -y'' + 4y = \delta(t - 2\pi) - \delta(t - \pi) \quad (12)$$

## תשובות סופיות

$$y(t) = e^{-3t} - e^{-4t} \quad (1)$$

$$y(t) = e^{-2t}(5t^2 + 2t - 1) \quad (2)$$

$$y(t) = -4t - 1 \quad (3)$$

$$y(t) = t^2 \quad (4)$$

$$y(t) = \frac{1}{8}e^t(t^2 + 2) \quad (5)$$

$$y(t) = u(t-4)(0.5 - e^{t-4} + e^{2(t-4)}) \quad (6)$$

$$y(t) = 2u(t-1) \cdot (-1 + (t-1) + e^{-(t-1)}) \quad (7)$$

$$y(t) = \frac{1}{6}[1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}] - u(t-2)\frac{1}{6}[1 - 3e^{-2(t-2)} + 2e^{-3(t-2)}] \quad (8)$$

$$y(t) = -\cos t + 2\sin t + 2e^{-t} - 2te^{-t} - e^{-2t} \quad (9)$$

$$y(t) = -u(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\sin(t) \quad (10)$$

$$y(t) = \frac{4}{7}u(t-2)[e^{2(t-2)} - e^{-5(t-2)}] + e^{2t} + e^{-5t} \quad (11)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}u(t-2\pi)[\sinh(2(t-2\pi))] + \frac{1}{2}u(t-\pi)[\sinh(2(t-\pi))] \quad (12)$$

## נוסחאות – התמרת לפלס

| $G(s)$                      | $g(t)$                                               |
|-----------------------------|------------------------------------------------------|
| $\frac{1}{s}$               | 1                                                    |
| $\frac{1}{s^2}$             | $t$                                                  |
| $\frac{n!}{s^{n+1}}$        | $t^n$ (for $n = 1, 2, 3, \dots$ )                    |
| $\frac{1}{s^n}$             | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (for $n = 1, 2, 3, \dots$ ) |
| $\frac{1}{s-a}$             | $e^{at}$                                             |
| $\frac{1}{(s-a)^n}$         | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$                      |
| $\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$    | $t^{n-1} e^{at}$                                     |
| $\frac{s}{s^2 + a^2}$       | $\cos(at)$                                           |
| $\frac{a}{s^2 + a^2}$       | $\sin(at)$                                           |
| $\frac{s}{s^2 - a^2}$       | $\cosh(at)$                                          |
| $\frac{a}{s^2 - a^2}$       | $\sinh(at)$                                          |
| $\frac{s}{(s^2 - a^2)^2}$   | $\frac{t}{2a} \sin(at)$                              |
| $\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^2}$ | $\frac{1}{2a} (\sin(at) + at \cos(at))$              |
| $\frac{a}{[(s+b)^2 + a^2]}$ | $e^{-bt} \sin at$                                    |

|                                           |                                           |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$                 | $e^{-bt} \cos at$                         |
| $\frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}$                 | $t \sin at$                               |
| $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$             | $t \cos at$                               |
| $\frac{1}{(s-a)^2}$                       | $te^{at}$                                 |
| $\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$                   | $\frac{1}{2a^3} (\sin(at) - at \cos(at))$ |
| $\frac{1}{2} \sqrt{\pi} s^{-\frac{3}{2}}$ | $\sqrt{t}$                                |
| $\sqrt{\pi} s^{-\frac{1}{2}}$             | $\frac{1}{\sqrt{t}}$                      |
| $\frac{1}{s}$                             | $u(t)$                                    |
| $\frac{e^{-ks}}{s}$                       | $u(t-k)$                                  |
| $e^{-ks} \cdot F(s)$                      | $u(t-k) f(t-k)$                           |
| $(-1)^n (F(s))^{(n)}$                     | $t^n g(t)$                                |

## תוספות

- נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה  $F(s)$ , של פונקציה  $f(t)$ , ורוצים את  $f(0)$  ו- $f(\infty)$ .

אז במקום למצוא את  $f(t)$  ולהציב, ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx \quad - \text{קונבולוציה:}$$

$$\boxed{L(f(t) * g(t)) = F(s) \cdot G(s)}$$

$$L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = f(t) * g(t) \qquad L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 5 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

- 1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים ..... 59
- 2. מבחן ההתבדרות של טורים ..... 62
- 3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים ..... 63
- 4. מבחני התכנסות לטורים כלליים ..... 65
- 5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי ..... 67
- 6. תרגילי תיאוריה ..... 68

## טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

### שאלות

#### טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} & (3) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n & (1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} & (6) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} & (5) & \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} & (4) \end{array}$$

#### טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} & (8) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} & (7) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} & (10) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) & (9) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} & (11) \end{array}$$

#### טור הרמוני מוכלל

(12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} & \text{ג.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{ב.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} & \text{א.} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} & \text{ו.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} & \text{ה.} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} & \text{ד.} \end{array}$$

## תכונות אלגבריות של טורים

13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$     ב.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$     ג.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$ , אם ידוע כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא  $0.123123123... + 0.141414...$ .

## תשובות סופיות

- (1) מתכנס ל-  $\frac{11}{14}$ .      (2) מתכנס ל-  $\frac{1}{3}$ .      (3) מתבדר.
- (4) מתכנס ל-  $-\frac{64}{7}$ .      (5) מתכנס ל-  $\frac{11}{12}$ .      (6) מתכנס ל- 8.
- (7) מתכנס ל-  $\frac{1}{2}$ .      (8) מתכנס ל-  $\frac{1}{12}$ .      (9) מתבדר.
- (10)  $S = \frac{1}{\ln 2}$       (11)  $\frac{1}{12}$
- (12) א. מתכנס.      ב. מתבדר.      ג. מתבדר.
- ד. מתבדר.      ה. מתכנס.      ו. מתכנס.
- (13) א. מתכנס.      ב. מתבדר.      ג. מתבדר.
- (14)  $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$
- (15)  $\frac{323}{1221}$

## מבחן ההתבדרות של טורים

### שאלות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

|                                                      |                                    |                                                         |
|------------------------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$                       | ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$    | ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$                         |
| ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2}$ | ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ | ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+n}{n} \right)^n$ |

### תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

## מבחני התכנסות לטורים חיוביים

### שאלות

#### מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p \leq 1) \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p > 1) \quad (4)$$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ .

ב. מצאו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$ .

#### מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\sin^2 n}{n!} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{3^n+2n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad (13)$$

## מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן ראפה

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad (26) \quad \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad (25)$$

## תשובות סופיות

- |               |             |             |
|---------------|-------------|-------------|
| (1) מתבדר.    | (2) מתבדר.  | (3) מתכנס.  |
| (4) מתכנס.    | (5) מתבדר.  |             |
| (6) א. מתכנס. | ב. 0        |             |
| (7) מתכנס.    | (8) מתבדר.  | (9) מתכנס.  |
| (10) מתבדר.   | (11) מתכנס. | (12) מתכנס. |
| (13) מתבדר.   | (14) מתכנס. | (15) מתכנס. |
| (16) מתבדר.   | (17) מתכנס. | (18) מתכנס. |
| (19) מתכנס.   | (20) מתכנס. | (21) מתכנס. |
| (22) מתכנס.   | (23) מתכנס. | (24) מתכנס. |
| (25) מתבדר.   | (26) מתבדר. |             |

## מבחני התכנסות לטורים כלליים

### מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-3 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

### מבחן דיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו שהטורים } \sum \sin n\theta, \sum \cos n\theta, \text{ כאשר } \theta \neq 2\pi k, \text{ חסומים.}$$

$$(7) \quad \text{הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים :}$$

$$. (\theta \neq 2\pi k) \quad \sum \frac{\sin n\theta}{n}, \quad \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \quad \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}}$$

$$(8) \quad \text{בדקו התכנסות הטור } \sum \frac{\sin^2 n}{n}.$$

$$(9) \quad \text{הוכיחו שאם הסדרה } b_n \text{ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור } \sum b_n \sin n \text{ מתכנס.}$$

$$(10) \quad \text{ענו על שני הסעיפים הבאים :}$$

$$\text{א. הוכיחו שהטור } \sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\bmod 7) \text{ הוא טור חסום.}$$

$$\text{ב. בדקו את התכנסות הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\bmod 7)}{\sqrt{n+1}}.$$

## מבחן אבל

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר:

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

## תשובות סופיות

- |                |             |             |
|----------------|-------------|-------------|
| (1) מתכנס.     | (2) מתכנס.  | (3) מתכנס.  |
| (4) מתכנס.     | (5) מתכנס.  | (6) הוכחה.  |
| (7) הוכחה.     | (8) מתבדר.  | (9) הוכחה.  |
| (10) א. הוכחה. | ב. מתכנס.   | (11) מתכנס. |
| (12) מתכנס.    | (13) מתכנס. | (14) מתכנס. |

## התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

### שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

### תשובות סופיות

- |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|
| (1) מתבדר.       | (2) מתכנס בהחלט. | (3) מתכנס בתנאי. |
| (4) מתכנס בתנאי. | (5) מתכנס בהחלט. | (6) מתכנס בהחלט. |
| (7) מתכנס בתנאי. | (8) מתכנס בתנאי. | (9) מתכנס בתנאי. |

## תרגילי תיאוריה

(1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם  $\sum a_n$  מתכנס ו- $\sum b_n$  מתבדר, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.

ב. אם  $\sum a_n$  מתבדר ו- $\sum b_n$  מתבדר, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.

(2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם  $\sum a_n^2$  מתכנס, אז  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט.

ב. אם  $\sum a_n$  חיובי ומתכנס, אז  $\sum \frac{1}{a_n}$  מתבדר.

ג. אם  $\sum a_n$  מתכנס, אז  $\sum a_n^2$  מתכנס.

(3) הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$  מתבדר.

(4) הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ומתכנס, אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  מתכנס.

(5) נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$  מתכנס.

(6) א. נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו ש- $\sum |a_n|$  מתבדר אם  $\sum a_n^2$  מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

(7) תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי  $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$  מתכנס.

(8)  $\sum a_n$  הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$  מתכנס.

(9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה  $(a_n)_{n \geq 1}$  מקיימת  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$  לכל  $n$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  מתכנס.

(10) נניח כי  $a_n \geq 0$ .

הוכיחו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$  מתכנס.

(11) הוכיחו או הפריכו:

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס והסדרה  $b_n$  חסומה, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  מתכנס.

(12) הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$  מתבדר.

(13) הוכיחו או הפריכו:

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס בתנאי.

(14) נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתבדר.

(15) נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$  מתכנס.

**(16)** נתונים שני טורים חיוביים  $\sum a_n, \sum b_n$ .

א. נתון שהטורים  $\sum a_n^2, \sum b_n^2$  מתכנסים.

1. הוכיחו כי  $\sum a_n b_n$  מתכנס.

2. הוכיחו כי  $\sum (a_n + b_n)^2$  מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  מתכנס.

**(17)** הוכיחו :

א. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$ , אז הטור מתבדר.

ב. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ואם  $\sum (na_n - k)$  מתכנס (כאשר  $k \neq 0$ ),

אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתבדר.

**(18)** הוכיחו כי אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$ , אז הטור מתכנס.

**(19)** נתון  $a_n \geq 0$  לכל  $n$ .

א. נתון כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$ .

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  מתכנס.

ב. נתון כי  $\sum (n^3 a_n^2 - k)$  מתכנס (כאשר  $k > 0$ ).

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  מתכנס.

**(20)** הסדרה  $(a_n)$  מוגדרת על ידי  $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ ,  $a_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_1 = \frac{21}{20}$ , כאשר  $(n \geq 1)$ .

האם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס?

$$(21) \text{ הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכיחו כי הטור מתכנס.

$$(22) \text{ נתון טור חיובי ומתכנס } \sum a_n, \text{ ונתון כי לכל } n \text{ מתקיים } a_{n+1} \leq a_n.$$

הוכיחו כי  $\sum n(a_n - a_{n+1})$  מתכנס.

$$(23) \text{ נתון } \forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1 - a_{n+1}) > 1.$$

$$\text{האם } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1) \text{ מתכנס?}$$

$$(24) \text{ נניח כי } (a_n) \text{ סדרה המקיימת } a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}, a_n > 0 \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

הוכיחו כי  $\sum a_n$  מתבדר.

$$(25) (a_n) \text{ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.}$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ מתבדר.}$$

$$(26) \text{ נתון טור חיובי } \sum a_n.$$

הוכיחו או הפריכו:

- א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.  
 ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

$$(27) \text{ ענו על הסעיפים הבאים:}$$

א. הוכיחו כי הסדרה  $a_n$  מתכנסת אם ורק אם  $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$  מתכנס.

ב. בדקו האם הסדרה  $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$  מתכנסת.

ג. בדקו האם הסדרה  $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא טורי מקלורן עם שארית לגראנז'.

(28) פונקציה  $f$  מוגדרת לכל  $x$ , גזירה ב-0 ומקיימת  $f(0) = 0$ . הוכיחו כי אם  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט, אז  $\sum f(a_n)$  מתכנס בהחלט.

(29) נתון  $p(x)$  פולינום.

$\sum a_n$  מתכנס בהחלט.

הוכיחו כי  $\sum P(a_n)$  מתכנס  $\Leftrightarrow p(0) = 0$ .

(30) יהיו  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  טורים חיוביים.

נתון כי:

(1) הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס. (2)  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$  לכל  $n$  טבעי.

הוכיחו כי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 6 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

|    |                                   |
|----|-----------------------------------|
| 73 | 1. סדרות פונקציות                 |
| 76 | 2. טורי פונקציות                  |
| 78 | 3. טורי חזקות                     |
| 80 | 4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות |

## סדרות פונקציות

### שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות 1-11 :

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

$$(1) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} [0, 0.5] \quad (2) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} (0, 1)$$

$$(3) \quad f_n(x) = \arctan(nx) \quad \text{ב-} (0, \infty) \quad (4) \quad f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(5) \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{ב-} [0, 1] \quad (6) \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad \text{ב-} [0.5, 4]$$

$$(7) \quad f_n(x) = \frac{1}{x^2+n} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (8) \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{ב-} \mathbb{R}$$

$$(9) \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+x^2+n^2} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (10) \quad f_n(x) = n(1-x)x^n \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(11) \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1) + 1 & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(12) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית ב-  $[0, 4]$  ?  
 ב. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[0, 4]$  ?  
 ג. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?  
 ד. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(13) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}$$

- א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע  $[0, \infty)$  ?  
 ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע  $[0, \infty)$  ?  
 ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע  $[1, \infty)$  ?

$$(14) \text{ נתונה } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[ n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?  
 ב. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(15) \text{ נגדיר את סדרת הפונקציות } f_n(x) = \left[ 1 - \chi_n(x) \right] \left( x + \frac{1}{n} \right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x)$$

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left( n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2} \right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ כאשר}$$

- א. מהם ערכי הפרמטר  $\alpha$ , עבורם סדרת הפונקציות  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית ב-  $[1, \infty)$  ?  
 אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?  
 ב. מהם ערכי הפרמטר  $\alpha$ , עבורם סדרת הפונקציות  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[1, \infty)$  ?

## תשובות סופיות

- (1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$  . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$  . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \frac{\pi}{2}$  . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$  . ב. לא במידה שווה.
- (5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$  . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 0 & 0.5 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ 1 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$  . ב. לא במידה שווה.
- (7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$  . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \sqrt{x^2}$  . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$  . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$  . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$  . ב. לא במידה שווה.
- (12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$  . ב. מתכנסת במידה שווה.
- ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$  . ד. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$  . ב. לא במידה שווה. ג. כן.
- (14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$  . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (15) א. לכל ערך של  $\alpha$  ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום  $[1, \infty)$ , לפונקציה  $\frac{1}{x}$ .  
ב. רק אם  $\alpha < 0$ .

## טורי פונקציות

## שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-6 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\ln(nx)]^4} \quad (4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5)$$

בדקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם :

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (7)$$

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{3}}}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (9)$$

$$\left( \frac{1}{4} \leq x \leq 4 \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (10)$$

$$(-a \leq x \leq a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (11)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (12)$$

## תשובות סופיות

(1)  $x > 0$

(2)  $x \neq 5$

(3)  $x < 3\frac{9}{10} \text{ or } 4\frac{1}{10}$

(4)  $0 < x \neq \frac{1}{n}$

(5)  $x > 0$

(6)  $x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$

(7) מתכנס במידה שווה.

(8) מתכנס במידה שווה.

(9) מתכנס במידה שווה.

(10) מתכנס במידה שווה.

(11) מתכנס במידה שווה.

(12) מתכנס במידה שווה.

## טורי חזקות

## שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-12 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות :

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (20) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (19)$$

## הערות חשובות

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

## תשובות סופיות

- |                                                                      |                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (2)                               | $-1 \leq x < 1, R = 1$ (1)                                                             |
| $-1 \leq x \leq 1, R = 1$ (4)                                        | $-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2$ (3)                                                    |
| $-1 < x < 1, R = 1$ (6)                                              | $-3 < x \leq -1, R = 1$ (5)                                                            |
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (8)                               | $x = 1, R = 0$ (7)                                                                     |
| $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3$ (10)                    | $-5 < x \leq 3, R = 4$ (9)                                                             |
| $-7 < x < -3, R = 2$ (12)                                            | $-9 \leq x \leq 11, R = 10$ (11)                                                       |
| $( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n}$ (14)                         | $( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ (13)                                        |
| $( x  < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n$ (16)          | $( x  < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n}$ (15)                       |
| $( x  < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ (18) | $( x  < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1}$ (17)                      |
| $( x  < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n$ (20)   | $( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n$ (19) |

## גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

### שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות 1-7 :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (2)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (3)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (4)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (7)$$

$$(8) \quad \text{חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$$

$$(9) \quad \text{חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n) x^{n-1}$$

(10) ענו על הסעיפים הבאים :

$$א. \text{ חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$ב. \text{ מהו סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n-1)} ?$$

(11) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

ב. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$

(12) חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$

(13) חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

## תשובות סופיות

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (|x| < 1) \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 \leq x < 1) \quad (4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1)$$

$$(5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (-5 \leq x < 5) \quad (6) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (|x| < \frac{1}{2})$$

$$(7) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (|x| \leq 3) \quad (8) \frac{20}{27}$$

$$(9) \frac{2}{(1-x)^3} \quad |x| < 1 \quad (10) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad |x| < 1 \quad \text{א.} \quad \frac{1}{4} \ln 3 \quad \text{ב.}$$

$$(11) \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \arctan x \quad |x| < 1 \quad \text{א.} \quad \frac{1}{8} \left( \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} \right) \quad \text{ב.}$$

$$(12) \frac{1}{10} \left( \frac{1}{4} \ln \frac{11}{9} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{10} \right) \quad (13) \arctan x \quad |x| \leq 1$$

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 7 - פתרון משוואות ליניאריות באמצעות טורים

תוכן העניינים

1. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית ..... 82
2. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית-סינגולרית ..... 84
3. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות ..... 86

## פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות לטורי מקלורן של פונקציות חשובות.

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-7 על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב  $x=0$ .  
במיוחד, רשמו נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי,  
וציינו את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.

**תזכורת:** טור חזקות סביב  $x=0$  שקול לטור טיילור סביב  $x=0$  ושקול לטור מקלורן.

$$y(0)=3, \quad y'(0)=12; \quad y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2 \quad (1)$$

$$y(0)=1, \quad y'(0)=2; \quad y''-xy=0 \quad (2)$$

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0 \quad (3)$$

$$(x^2+4)y''+xy=x+2 \quad (4)$$

$$y''+(x-1)y'+(2x-3)y=0 \quad (5)$$

$$y(0)=a_0=1, \quad y'(0)=a_1=2; \quad y''+ty=e^{t+1} \quad (6)$$

$$y''+(t-1)y'+(2t-3)y=0 \quad (\text{השתמש בפתרון בסימן } \Sigma) \quad (7)$$

$$y(1)=1, \quad y'(1)=2; \quad y''(x)+(x-1)y(x)=e^x \quad (8)$$

פתרו את המשוואה  
על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב  $x=1$ .

$$y(-1)=2, \quad y'(-1)=-2; \quad y''+xy'+(2x-1)y=0 \quad (9)$$

פתרו את המשוואה  
רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב  $x=-1$ .

## תשובות סופיות

$$a_n = \frac{2n-10}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 5) \quad , \quad y = 3 + 12x + x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{23}{12}x^4 + \dots + a_n x^n \dots \quad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 3) \quad , \quad y = 1 + 2x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2)$$

$$a_n = \frac{n-3}{n-1} a_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad , \quad y = a_0 + a_1 x + -a_0 x^2 + 0x^3 - \frac{1}{3}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (3)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3 + \left(\frac{-1}{48}a_1 - \frac{1}{96}\right)x^4 + \dots + a_n x^n \quad (4)$$

$$a_n = \frac{-1}{4(n-1)n} a_{n-3} - \frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n} a_{n-2} \quad , \quad (n \geq 4)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)x^3 + \frac{1}{6}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (5)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$y(t) = 1 + 2t + \frac{e}{2}t^2 + \frac{e-1}{6}t^3 + \frac{e-4}{24}t^4 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (6)$$

$$a_n = \frac{e}{n(n-1)(n-2)!} - \frac{a_{n-3}}{n(n-1)} \quad (n \geq 3)$$

$$y = a_0 + a_1 t + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)t^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)t^3 + \frac{1}{6}a_0 t^4 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (7)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$y = 1 + 2(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e-1}{6}(x-1)^3 + \frac{e-4}{24}(x-1)^4 + \dots + a_n (x-1)^n + \dots \quad (8)$$

$$a_n = \frac{e - a_{n-3}(n-2)!}{n!} \quad (n \geq 3)$$

$$y = 2 - 2(x+1) + 2(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)^3 + \frac{1}{3}(x+1)^4 + \dots \quad (9)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

## פתרון מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית

### שאלות

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראו שהנקודה היא נקודה סינגולרית רגולרית, ופתרו את המשוואה על ידי פיתוח המשוואה לטור חזקות בסביבות הנקודה.

$$3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0 \quad (1)$$

$$2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0 \quad (2)$$

$$2x^2y'' - xy' + (x-5)y = 0 \quad (3)$$

$$3x^2y'' - xy' + y = 0 \quad (4)$$

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \quad (5)$$

$$x^2y'' - xy' + y = 0 \quad (6)$$

$$x^2y'' + x(x+2)y' - 2y = 0 \quad (7)$$

$$x^2y'' + x(x-2)y' + 2y = 0 \quad (8)$$

### הערות

בשאלות 2-5, הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרשם אינו מספר שלם. בשאלות 6 ו-7 הפתרונות שווים, ובשאלות 8 ו-9 הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

## תשובות סופיות

$$y = k_1 x^{1/3} \left( 1 - \frac{1}{14} x^2 + \frac{1}{728} x^4 + \dots \right) + k_2 \left( 1 - \frac{1}{10} x^2 + \frac{1}{440} x^4 + \dots \right) \quad (1)$$

$$y = k_1 x^{1/2} \left( 1 - \frac{7}{18} x^1 + \frac{147}{792} x^2 + \dots \right) + k_2 x^{-3} \left( 1 - \frac{21}{5} x^1 + \frac{49}{5} x^2 - \frac{343}{15} x^3 \right) \quad (2)$$

$$y = k_1 x^{-1} \left( 1 + \frac{1}{5} x + \frac{1}{30} x^2 + \frac{1}{90} x^3 + \dots \right) + k_2 x^{2.5} \left( 1 - \frac{1}{9} x + \frac{1}{198} x^2 - \frac{1}{7722} x^3 + \dots \right) \quad (3)$$

$$y = k_1 x + k_2 x^{1/3} \quad (4)$$

$$y = k_1 \left( 1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + k_2 \left[ \ln x \cdot \left( 1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + \left( \frac{2}{2^3} x^2 + \frac{-12}{4^3 \cdot 2^3} x^4 + \dots \right) \right] \quad (5)$$

$$y(x) = k_1 x + k_2 x \ln x \quad (6)$$

$$y(x) = \frac{k_1}{x^2} \left( 1 - x + \frac{1}{2} x^2 - e^{-x} \right) + \frac{k_2}{x^2} e^{-x} \quad (7)$$

$$y = -a_0 x^2 \ln x \left( 1 - x + \frac{1}{2} x^2 + \dots \right) + a_0 x \left( 1 - x^2 - \frac{3}{4} x^3 + \dots \right) \quad (8)$$

## נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

| טור מקלורן                                                                                                                                                  | תחום התכנסות                                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$                                                   | $-\infty < x < \infty$                                                                                                                 |
| $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$                               | $-\infty < x < \infty$                                                                                                                 |
| $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$                                   | $-\infty < x < \infty$                                                                                                                 |
| $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$                                     | $-1 < x \leq 1$                                                                                                                        |
| $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$                                  | $-1 \leq x \leq 1$                                                                                                                     |
| $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$                                                                                       | $-1 < x < 1$                                                                                                                           |
| $(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$ | $-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$<br>$-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$<br>$-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$<br>$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$ |

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 8 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

תוכן העניינים

1. בעיות גדילה ודעיכה..... 87
2. בעיות בגיאומטריה אנליטית..... 89
3. עקומות אורתוגונליות..... 91
4. בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום..... 92
5. בעיות שונות..... 93

## בעיות גדילה ודעיכה

### שאלות

- (1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה.  
 ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.  
 א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?  
 ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?  
 ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?  
 \*הניחו שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).
- (2) האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית.  
 בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים,  
 ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.  
 א. מצאו את אחוז הגידול השנתי.  
 ב. מצאו כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת),  
 היו בעיר 550 אלף תושבים.
- (3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%.  
 כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש"ח.  
 א. כמה כסף הפקיד האדם?  
 ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש"ח?
- (4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית.  
 בספירה הראשונית היו 1,000 חיות.  
 בספירה השנייה שנעשתה, כעבור 20 חודשים, היו 1,400 חיות בר.  
 מצאו אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה,  
 היו בשמורה 2,000 חיות בר.
- (5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים.  
 ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד,  
 פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.  
 א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1,000 שנים,  
 מכמות התחלתית של 100 גרם?  
 ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם,  
 מכמות התחלתית של 100 גרם?

- 6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע. בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.
- א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?
- ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

### תשובות סופיות

- |                     |                  |                |
|---------------------|------------------|----------------|
| 1) א. 7.28 מיליארד. | ב. 3.54 מיליארד. | ג. בשנת 2,106. |
| 2) א. 2%            | ב. 15.92 שנים.   |                |
| 3) א. 4093.65 ₪.    | ב. 13.41 שנים.   |                |
| 4) 40.77 חודשים.    |                  |                |
| 5) א. 88.69 גרם.    | ב. 19,188 שנים.  |                |
| 6) א. 3.04 שבועות.  | ב. 14.6 שבועות.  |                |

## בעיות גיאומטריות

### שאלות

(1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה  $(x, y)$  על העקום,

$$\text{שווה ל-} -\frac{x}{y}.$$

מצאו את משוואת העקום.

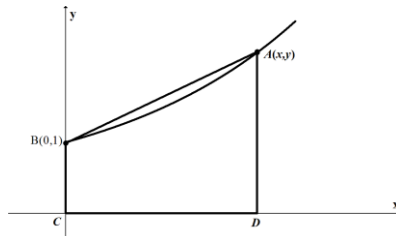
(2) מצאו את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

(3) מצאו את משוואת העקום, ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

(4) תרגמו את התיאור המילולי הבא למשוואה דיפרנציאלית ופתרו אותה:  
נתון עקום ברביע הראשון, העובר בנקודה  $(2, 4)$ .  
נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה  $A(x, y)$  שעליו, ובין שיפוע הישר המחבר את  $A$  עם ראשית הצירים, שווה לשיעור ה- $y$  של הנקודה  $A$ .

(5) מצאו את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה  $(3, 4)$ , אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

(6) קטע הנורמל לעקום בנקודה  $(x, y)$  שבין נקודה זו וציר ה- $x$ , נחצה על ידי ציר ה- $y$ .  
מצאו את משוואת עקום זה.



(7) נתון עקום העובר בנקודה  $B(0,1)$ .

בכל נקודה  $A$  שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז  $ABCD$ , הנראה בציר. מהי משוואת העקום?

(8) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה  $(1, 3)$ ,

ושיפוע המשיק אליו בנקודה  $(x, y)$  שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$ .

מצאו את משוואת העקום.

(9) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה  $(1, 2)$ ,

ושבכל נקודה  $(x, y)$  שעליו שיפוע הנורמל הוא  $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$ .

(10) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה  $(0, 1)$ , כך שהמשולש המוגבל

על ידי ציר ה- $y$ , המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו  $M(x, y)$  והקטע  $OM$ ,

מהראשית  $O$  ל- $M$ , הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע  $MN$

(כאשר  $N$  היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר ה- $y$ ).

ציירו ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

### תשובות סופיות

$$x^2 + y^2 = k \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = k \quad (2)$$

$$y^2 = ax \quad (3)$$

$$y = 2xe^{x-2} \quad (4)$$

$$y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2} \quad (5)$$

$$2x^2 + y^2 = k \quad (6)$$

$$y = 2e^{x^2/4} - 1 \quad (7)$$

$$2xy + x^2 = 7 \quad (8)$$

$$x^3 - 3y^2x = 11 \quad (9)$$

$$2 = y + \sqrt{y^2 + x^2} \quad (10)$$

## עקומות אורתוגונליות

### שאלות

מצאו את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות 1-4 :

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$xy = c \quad (2)$$

$$x^2 + 2y^2 = c \quad \text{א.} \quad (3)$$

ב. מצאו את העקומה האורתוגונלית לעקומה  $x^2 + 2y^2 = 9$ ,  
בנקודה  $(1, 2)$  שעליה.

$$x^2 + y^2 = cx \quad (4)$$

(5) מצאו את משפחת העקומות, היוצרות זווית של  $45^\circ$   
עם משפחת המעגלים  $x^2 + y^2 = c$ .

### תשובות סופיות

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$y^2 - x^2 = k \quad (2)$$

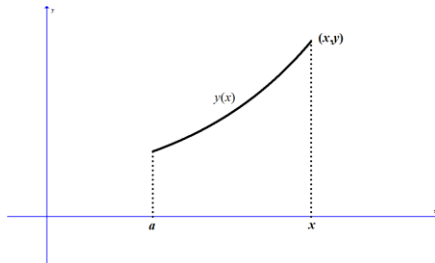
$$y = ax^2, \quad y = 2x^2 \quad (3)$$

$$y = m(x - c)^2 \quad y > 0 \quad (4)$$

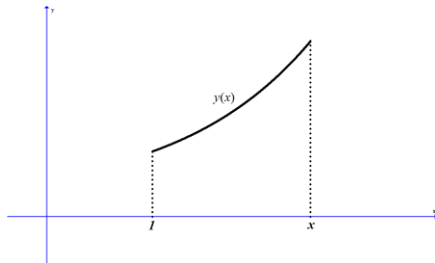
$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln \left( \left( \frac{y}{x} \right)^2 + 1 \right) = -\arctan \left( \frac{y}{x} \right) + c \quad (5)$$

## בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום

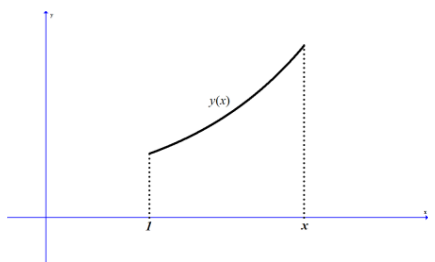
### שאלות



- (1) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = a$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי השטח  $S$  פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות  $(a, y(a))$  ו- $(x, y(x))$ . מצאו את משוואת העקום.



- (2) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי  $y(1) = 2$ . האם קיים עקום כזה, כך ששטחו של  $S$  שווה ל- $2y(x)$ ?



- (3) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי  $y(1) = 2$ . האם קיים עקום כזה, כך שהשטח של  $S$  שווה ל- $2 - y(x)$ ?

### תשובות סופיות

$$y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k} x + C\right) \quad (1)$$

(2) לא.

(3) כן.

## בעיות שונות

### שאלות

- (1) בזמן  $t = 0$ , יש במיכל 4 ק"ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים. נניח שמי מלח, בריכוז של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב.
- א. חשבו את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.  
 ב. תוך כמה זמן תהיה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?
- (2) סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש. ברגע  $t = 0$ , כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחתור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה. משקל החותר והסירה הוא 500 ק"ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל- $2v$ , כאשר  $v$  נמדדת במטר/שנייה.
- א. מצאו את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.  
 ב. מצאו כעבור כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.  
 ג. מצאו את המהירות הסופית.
- (3) חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.
- א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?  
 ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?
- (4) נתון מיכל בצורת גליל, שרדיוס בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונלי לשורש מגובהם.
- נסמן ב- $h(t)$  את גובה פני המים, וב- $k$  את קבוע הפרופורציה.
- א. רשמו מד"ר עבור גובה פני המים,  $h(t)$ .  
 מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?  
 ב. ידוע כי  $k = -2\pi$ . פתרו את המד"ר.  
 תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

- (5) כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ, נמס, כך שהקצב שבו רדיוסו קטן – פרופורציונלי לשטח פניו.  
 לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס"מ.  
 א. רשמו נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן  $t$ .  
 ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג  $\frac{1}{64}$  מנפחו ההתחלתי?
- (6) מבלון מלא אוויר, שרדיוסו  $R$ , מתחיל לצאת אוויר.  
 קצב יציאת האוויר הוא  $3V(t)$ , כאשר  $V(t)$  הוא נפח הבלון בזמן  $t$ .  
 הוכיחו כי כעבור  $\ln 2$  שניות נפח הבלון יקטן לכדי שמינית מנפחו ההתחלתי.  
 הערה: בשאלות 5 ו-6 נדרש ידע בהפרדת משתנים.

### תשובות סופיות

- (1) א. 26.75 ק"ג. ב. 0.942 דקות.
- (2) א. 4.09 מטר/שניה. ב. 72 שניות. ג. 10 מטר/שניה.
- (3) א.  $43\frac{1}{3}^{\circ}$ . ב. 1.13 שעות.
- (4) א.  $h(0) = 4$ ;  $\pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$ . ב.  $h = (2-t)^2$ ;  $t = \sqrt{2} + 2$ .
- (5) א.  $R(t) = \frac{12}{2t+3}$ . ב. 4.5 שעות.
- (6) שאלת הוכחה.

# משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 9 - פרקי חזרה - אינטגרלים

תוכן העניינים

|     |                                                 |
|-----|-------------------------------------------------|
| 95  | 1. אינטגרלים מיידיים                            |
| 98  | 2. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים             |
| 100 | 3. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים             |
| 104 | 4. אינטגרלים בשיטת ההצבה                        |
| 107 | 5. אינטגרלים של פונקציות רציונליות              |
| 111 | 6. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות |
| 116 | 7. נספח - זהויות בטריגו                         |

## אינטגרלים מידיים

בסוף ספר הפרק יש נספח עם זהויות בטריגו.

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ):

$$\int 4dx \quad (1) \quad \int x^4 dx \quad (2) \quad \int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4) \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \quad \int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7) \quad \int \left( \frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \quad \int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \quad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \quad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$ ):

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13) \quad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \quad \int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16) \quad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \quad \int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} \quad (19) \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$ ):

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \quad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \quad \int \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \quad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \quad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

$$(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28) \qquad \int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx : \text{חשבו את האינטגרל} \quad (29)$$

$$(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

$$\int \left( 4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx : \text{חשבו את האינטגרל} \quad (30)$$

$$(\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int 2 \sin 4x + \cos x dx \quad (36)$$

$$\int \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad (35)$$

$$\int \cos 4x dx \quad (34)$$

## תשובות סופיות

- $$\begin{aligned} & -\frac{1}{x} + c \quad (3) & \frac{x^5}{5} + c \quad (2) & 4x + c \quad (1) \\ & \frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) & -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) & \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4) \\ & \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) & -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8) & \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7) \\ & \frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) & -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) & \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10) \\ & -\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) & \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) & \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13) \\ & & 10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) & \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16) \\ & -\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19) & -\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18) \\ & \ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) & \frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21) & \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20) \\ & x + \ln|x+2| + c \quad (25) & \frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24) & x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23) \\ & \frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28) & \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27) & 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26) \\ & 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (30) & \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (29) \\ & -\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33) & \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32) & \frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31) \\ & -\frac{1}{2}\cos(4x) + \sin x + c \quad (36) & -2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + c \quad (35) & \frac{1}{4}\sin(4x) + c \quad (34) \end{aligned}$$

## אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24) \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^2 dx \quad (22)$$

## תשובות סופיות

- |                                                  |                                              |                                                |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $\frac{1}{3} \ln  x^3 + 1  + c$ (3)              | $\ln  \sin x  + c$ (2)                       | $\ln  x^2 + 1  + c$ (1)                        |
| $e^2 \ln  e^x + 1  + c$ (6)                      | $\ln  \ln  x   + c$ (5)                      | $-\ln  \cos x  + c$ (4)                        |
| $-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c$ (9)                   | $e^{\tan x} + c$ (8)                         | $e^{x^2} + c$ (7)                              |
| $\sin(\ln x) + c$ (12)                           | $\sin(\sin x) + c$ (11)                      | $\sin(2x^2 + 1) + c$ (10)                      |
| $-2 \cos(\sqrt{x}) + c$ (15)                     | $-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + c$ (14)        | $\frac{1}{40} \sin(10x^4 + 1) + c$ (13)        |
| $\frac{1}{2} (\tan x)^2 + c$ (18)                | $\frac{1}{2} (\arctan x)^2 + c$ (17)         | $\frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$ (16)               |
| $\frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c$ (21)   | $\sqrt{2 \sin x} + c$ (20)                   | $2\sqrt{x^2 + 1} + c$ (19)                     |
| $\frac{2}{3} (\arctan x)^{\frac{3}{2}} + c$ (24) | $\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$ (23) | $\frac{2}{9} (x^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + c$ (22) |

## אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \quad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \quad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \quad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \quad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \quad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \quad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \quad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \quad \int x \arctan x dx \quad (14) \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \quad \int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \quad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \quad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \quad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \quad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

$$(24) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int x^n e^x dx \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(25) \text{ חשבו את } \int x^4 e^x dx.$$

$$(26) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int \cos^n x dx \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(27) \text{ חשבו את } \int \cos^4 x dx.$$

$$(28) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int \sin^n x dx \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(29) \text{ חשבו את } \int (\sin x)^4 dx.$$

(30) מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$  כאשר  $n$  טבעי.

(31) חשבו את  $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$ .

## תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left( \ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left( \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln|x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left( \frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left( -\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left( -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left( \frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

## אינטגרלים בשיטת ההצבה

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int \cos(x^2+1) \cdot 2x^3 dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left( \frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left( \frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x}^2 - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left( x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left( \frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left( \ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln|\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{1-x^4} - \ln|1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

## אינטגרלים של פונקציות רציונליות

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-19:

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{x^2-4} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

**חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית**

חשבו את האינטגרלים בשאלות 20-24 :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (23)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (24)$$

**אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית**

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - x} \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt[4]{x-1}} dx \quad (27)$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx \quad (28)$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (29)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (30)$$

## תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left( \frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (20)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (21)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (22)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (23)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (24)$$

$$-1.5 \ln|1 - \sqrt[3]{x^2}| + c \quad (25)$$

$$6 \left( \frac{(1 + \sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[6]{x})}{2} + 3(1 + \sqrt[6]{x}) - \ln|1 + \sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (26)$$

$$4 \left( \frac{(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1 + \sqrt[4]{x-1}) - \ln|1 + \sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (27)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln|\sqrt[3]{x} + 1| - \frac{1}{2} \ln\left(\left(\sqrt[3]{x} - 0.5\right)^2 + 0.75\right) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{3}}\right) + c \quad (28)$$

$$-\ln|1 + e^x| + x + c \quad (29)$$

$$2\sqrt{1 + e^x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1}\right| + c \quad (30)$$

## אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

### שאלות

#### פתרון על ידי זהויות

זכרו כי :

|                                            |                                                                |
|--------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $\int \cos x dx = \sin x + c$              | $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$              |
| $\int \sin x dx = -\cos x + c$             | $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$             |
| $\int \tan x dx = -\ln  \cos x  + c$       | $\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln  \cos(ax+b)  + c$       |
| $\int \cot x dx = \ln  \sin x  + c$        | $\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln  \sin(ax+b)  + c$        |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$  | $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$  |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$ | $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$ |

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-24 :

$$\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx \quad (2)$$

$$\int \left( \sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx \quad (1)$$

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx \quad (3)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6)$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5)$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (8)$$

$$\int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx \quad (9)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12)$$

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11)$$

$$\int \sin^2 4x dx \quad (14)$$

$$\int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15)$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad (18)$$

$$\int \cos^4 x dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23)$$

### פתרון על ידי הצבות פשוטות

|                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \left  \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right  = \int f(t) dt$    |
| $\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \left  \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right  = \int f(t) (-dt)$ |

זכרו כי :

חשבו את האינטגרלים בשאלות 25-36 :

$$\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (26)$$

$$\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (25)$$

$$\int \sin^3 2x dx \quad (28)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (27)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (30)$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (29)$$

$$\int \tan^5 x dx \quad (32)$$

$$\int \cos^5 x dx \quad (31)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad (34)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (36)$$

$$\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (35)$$

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad \text{זכרו כי:}$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 37-39:

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (39) \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (38) \quad \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \quad (37)$$

## הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\begin{aligned} \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt) \\ \int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right) \\ \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right) \end{aligned} \quad \text{זכרו כי:}$$

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad (42) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad (41) \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} \quad (40)$$

## תשובות סופיות

- $$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\cos 2x - 12\sin \frac{x}{3} + c \quad (1) \\ & -10\cot 10x + c \quad (3) \\ & \frac{1}{2}\sin 2x + c \quad (5) \\ & -\frac{1}{16}\cos 4x + c \quad (7) \\ & \tan x - \cot x + c \quad (9) \\ & \sin x + c \quad (11) \\ & \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13) \\ & \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + c \quad (15) \\ & \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c \quad (17) \\ & -\cot x - x + c \quad (19) \\ & \ln|\cos x| + c \quad (21) \\ & 3x + \frac{1}{2}\sin 2x - 2\sin x + c \quad (23) \\ & \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{24}\sin 6x\right) + c \quad (24) \\ & \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2\sin x + c \quad (25) \\ & \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c \quad (27) \\ & \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + c \quad (29) \\ & \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c \quad (31) \\ & \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| + c \quad (33) \\ & -2e^{\cos x}(\cos x - 1) + c \quad (35) \\ & \frac{1}{4}\tan 4x + c \quad (2) \\ & \frac{1}{2}\sin 2x + c \quad (4) \\ & x - \frac{1}{2}\cos 2x + c \quad (6) \\ & \tan x - x + c \quad (8) \\ & \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + c \quad (10) \\ & \frac{3}{4}x + \frac{1}{16}\sin 4x + c \quad (12) \\ & \frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14) \\ & -\frac{3}{16}\cos 4x + \frac{1}{48}\cos 12x + c \quad (16) \\ & \frac{3}{8}x - \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{128}\sin 16x + c \quad (18) \\ & 2\sin x + c \quad (20) \\ & -\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + c \quad (22) \\ & \frac{-\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2\cos x + c \quad (26) \\ & -\frac{1}{2}\left(\cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3}\right) + c \quad (28) \\ & -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x + c \quad (30) \\ & \frac{1}{4\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x| + c \quad (32) \\ & \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + c \quad (34) \\ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}}\right) + c \quad (36) \end{aligned}$$

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c \quad (37)$$

$$\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c \quad (38)$$

$$-x+2\left(\frac{2}{3\sqrt{1/3}}\arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}}\right)\right)+c \quad (39)$$

$$-\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c \quad (40)$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right|+c \quad (41)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c \quad (42)$$

## נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$