משוואות דיפרנציאליות חלקיות

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

שיטת הקווים האופייניים

שאלות

1) פתרו את המשוואה עבור $\alpha \neq \frac{1}{2}$ קבוע ממשי.

$$u|_{\gamma} = x^2 + y^2 \qquad \gamma = \{y = \alpha x\} \qquad 2u_x + u_y = 0$$

2) פתרו את המשוואה $u|_{\gamma} = x - y$ $\quad \gamma = \{y = x^2, x \geq 0\}$ $\quad 3u_x - 2u_y = 0$.

3) פתרו את המשוואה $u|_{\gamma} = x + \sin(xy)$ $\quad \gamma = \{y = x^2, x \leq 0\}$ $\quad u_x + 2u_y = 0$.

4) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &u_x - u_y = -u \qquad && y \geq 0 \\ &u(x,0) = x^2 - x^4 && \end{aligned}.$$

5) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &2u_x - 3u_y + 2u = 0 \\ &u(x,-x) = (x+1)e^{-x} \end{aligned}.$$

6) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \qquad && y \geq e^{-x} \\ &u(x,e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x} && \end{aligned}.$$

7) נתון כי $u(x,y)$ הוא פתרון של הבעיה

$$\begin{aligned} &y^2u_x + u_y = -u \qquad && 0 < x < \infty \quad , \quad y > 0 \\ &u(0,y) = 0 && y > 0 \\ &u(x,0) = 1 && x > 0 \end{aligned}$$

8) פתרו את הבעיה כאשר a קבוע ממשי.

$$\begin{aligned} &2u_x + u_y = -u \qquad && 0 < y < x \\ &u(x,0) = a \cdot \cos(x) + \sin(x) && x > 0 \\ &u(y,y) = 0 && y > 0 \end{aligned}$$

שיטת לגראנג

שאלות

1) מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד״ח $xu_x + yuu_y = u$.

2) מצאו פתרון כללי למשוואה $x^2u_x + y^2u_y = u^2$.

3) מצאו פתרון כללי למשוואה $xu \cdot u_x + yu \cdot u_y = -xy$, כאשר $x, y, u > 0$.

4) מצאו פתרון כללי למשוואה $(y^2 + u^2)u_x - xyu_y = xu$, כאשר $x, y, u > 0$.

רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, אז $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

5) מצאו פתרון למשוואה $\begin{cases} xu_x + yu_y = 2xy & x, y > 0 \\ u(x,1) = x & x > 0 \end{cases}$.

6) פתרו את המשוואה $\begin{matrix} e^y u_x - e^x u_y = -e^{x+y} u & u > 0 \\ u(x,0) = 1 & \end{matrix}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{e^x\sqrt{y+1}}u_x + yu_y = y^2u$,

בתחום $u, y > 0$.

ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

8) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\cos(y)u_x + \sin(y)u_y = e^y \sin(y)u$,

בתחום שבו $0 < y < \pi$ ו-$u > 0$.

9) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{y}u_x + \frac{1}{x}u_y = 2$.

10) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+y)u_x + (y-x)u_y = x^2 - y^2$,

בתחום $x, y > 0$.

11) נתון כי $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}F\left(\frac{y+1}{x^2+1}\right)$ הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה $a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$.

א. מצאו את הפונקציות a,b,c.

ב. מצאו פתרון פרטי המקיים $u(0,y)=y^2$.

תשובות סופיות

1) $F\left(\frac{x}{u},\ln(y)-u\right)=0$

2) $u(x,y)=\frac{1}{F\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}}$

3) $u=\sqrt{F\left(\ln\frac{x}{y}\right)-xy}$

4) $F\left(\frac{y}{u},x^2+y^2+u^2\right)=0$

5) $u(x,y)=x\cdot y$

6) $u(x,y)=e^{e^y-1}$

7) א. $u(x,y)=e^{\frac{1}{2}y^2-F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x}\right)}$ ב. שאלת הוכחה.

8) $u(x,y)=e^{e^y-F\left(e^{-x}\sin y\right)}$

9) $u(x,y)=xy-F\left(\frac{x}{y}\right)$

10) $u(x,y)=\frac{y^2+2xy-x^2-F\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\operatorname{ar}\tan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4}$

11) א. $\underbrace{(x^2+1)}_{a}u_x+\underbrace{2x(y+1)}_{b}u_y=\underbrace{2xyu}_{c}$ ב. $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}\cdot\frac{\left(\frac{y+1}{x^2+1}-1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1}-1}}\cdot\frac{y+1}{x^2+1}$

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 2 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 3 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית
$\left(p(x)y'(x)\right)'+\left(\lambda r(x)-q(x)\right)y(x)=0$.

א. $y''-2xy'+\lambda y=0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda)y=0$ (משוואת בסל)

2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y''+e^{2x}y'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)+4y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y''+4y'+xy+\lambda e^x y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות **7-4**:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

4)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<\pi \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(\pi)-y'(\pi)=0 \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

8) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0, & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. פתרו את הבעיה.

9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}$.

ב. נציב $\ell=1$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$.

1. פתחו את הפונקציה $f(x)=1 \, , \, 0\le x\le 1$
לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.
התחל את הטור מ-$n=1$.

2. מה סכום הטור ב-$x=0$?
האם הוא שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$?

ג. נציב $\ell=2$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<2 \\ y(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases}$.

פתחו את הפונקציה $f(x)=x \, , \, 0\le x\le 2$
לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$.

ב. פתחו את הפונקציה $f(x)=e^x \, , 0\le x\le \pi$
לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.
התחילו את הטור מ-$n=1$.

11) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<e \\ y(1)=0 \\ y'(e)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.
ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.
ד. פתחו את $f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x\le\sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e}\le x\le e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.
הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.
ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x=2$, $x=1.5$, $x=\sqrt{e}$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi n)=(-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi n)=0$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

תשובות סופיות

1) א. $\left(e^{-x^2}y'\right)'+\left(\lambda e^{-x^2}-0\right)y=0$ ב. $(xy')'+\left(\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)-(-x)\right)y=0$

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,\dots$ $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x)$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,\dots$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

5) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,\dots$ $\phi_n(x)=n\cos nx+\sin nx$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,\dots$ $\lambda_n=n^2$, ; בנוסף, $\lambda=-1$ הוא ע"ע של הבעיה,

המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=e^x$.

6) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,\dots$ $\varphi_n(x)=\sin(\omega_n x)$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,\dots$ $\lambda_n=(\omega_n)^2$.

7) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,\dots$ $y_n(x)=\sin(\omega_n x)-\omega_n\cos(\omega_n x)$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,\dots$ $\lambda_n=(\omega_n)^2$.

בנוסף, $\lambda_0=0$ הוא ע"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=x-1$.

8) א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,\dots$ $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x$.

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,\dots$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

9) א. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,\dots$ $\varphi_n(x)\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,\dots$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2$.

ב. סכום הטור ב- $x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$.

ג. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$, כאשר $(0<x<2)$.

10) א. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,\dots$ $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,\dots$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$.

ב. $e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1}-1}{1^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$, כאשר $0<x<\pi$.

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,\ldots$ $\qquad \varphi_n(x)=\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\ln x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,\ldots$ $\qquad \lambda_n=\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$.

ג. שאלת הוכחה.

ד. $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-2\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\ln x\right)$$

ה. סכום הטור ב- $x=\sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x=1.5$ הוא 1 ; וב- $x=2$ הוא 0.

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 4 - אינטגרל אנרגיה

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 5 - משוואת החום

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 6 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 7 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 8 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

פתרו את הבעיות בשאלות 1-2:

1)
$$u_x+u_y=u \qquad x,y>0$$
$$u(x.0)=\begin{cases}0 & x>1\\ 1 & 0<x<1\end{cases} \qquad u(0,y)=0$$

2)
$$u_{tt}=u_{xx} \qquad 0<x<\infty \qquad t>1$$
$$u(x,0)=f(x)=0 \qquad u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

3) נתון כי $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:
$$u_{tt}+u_t=u_{xx}+Ax \qquad 0<x<1,\ t>0$$
$$u_x(0,t)=2 \qquad u_x(1,t)=1$$
$$u(x,0)=u_t(x,0)=0$$

נתון כי הגבול $U(x)=\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)$ קיים וסופי.

מצאו את הקבוע A ואת הפונקציה $U(x)$.

4) פתרו את הבעיה הבאה:
$$\triangle u=r \qquad 1<r<2$$
$$u(1,\theta)=1+\sin\theta$$
$$u(2,\theta)=1+2\cos\theta$$

5) פתרו את המשוואה:
$$u_x+u_y+u=(2x+1)e^{x^2} \qquad y\ge e^{-x}$$
$$u\left(x,e^{-x}\right)=e^{x^2}+e^{-x}$$

6) נתונה הבעיה הבאה, בתחום $t>0$ $\quad 0<x<1$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u \\ u(x,0) = x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e} \\ u(0,t) = (1,t) = 0 \end{cases}$$

הוכיחו: $u\left(\frac{1}{2},1\right) < \frac{1}{4\sqrt{e}}$.

רמז: הגדירו את הפונקציה $h(x,t) = u(x,t)e^{\delta x}$, עבור קבוע δ מתאים.

7) עבור איזו פונקציה לפתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 10u & 0<x<1,\ t>0 \\ u(x,0) = h(x) & \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}$$

הגבול $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ קיים וסופי.

8) פתרו את הבעיה הבאה: $\begin{cases} \Delta u = x^2 + y^2 \quad \text{in} \quad x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1+x \end{cases}$.

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

9) נתונה משוואת הגלים הבאה:

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \qquad t>0$$
$$u(x,0) = 1$$
$$u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & -1<x<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את $u(x,1)$.

10) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{matrix} \Delta u = 0 & x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \cosh(x)\sinh(y) \end{matrix}$.

חשבו את $u(0,0)$.

11) נתונה הבעיה הבאה:

$$\Delta u = 0 \qquad 1<x^2+y^2<4$$
$$u|_{x^2+y^2=1} = \ln(2+x)$$
$$u|_{x^2+y^2=4} = \ln\left(e^{2019} - 2 + x\right)$$

הוכיחו כי לכל $1<x^2+y^2<4$ מתקיים $0<u(x,y)<2019$.

12) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x,y>0$.

$$x^2 u_{xx} + 2xy\cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} = 4x^2$$

13) השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta\cdot u_t + F(x,t) & 0<x<L,\ t>0,\ \beta>0 \\ u_x(0,t)=A(t) & u_x(L,t)=B(t) \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

רמז: הגדירו $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)\,dx$.

14) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0<x<L, \quad t>0 \\ u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 \end{cases}$$

15) נתונה המשוואה $2u_{xx}+2yu_{yy}+u_y=0$, בתחום $y>0$.

א. הראו כי המשוואה אליפטית.

ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

16) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{-t} & 0<x<\infty \\ u(0,t)=e^{-t}-1 \\ u(x,0)=1 & u_t(x,0)=2\sin(x)-1 \end{cases}$$

17) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0<x<1,\ t>0 \\ u_x(0,t)=0 & u_x(1,t)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=x^2(1-x) \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty}\int_0^1 u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)\,dx$.

18) $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה:

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & -\infty < x < \infty,\quad t > 0 \\ u(x,0) = h(x) = \dfrac{e^{-x}+2e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} & \end{array}.$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_x(0,t)\sqrt{t}}{u(0,t)}$.

19) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:

$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0$$

20) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t + u_x = u_{xx} & 0<x<1,\ t>0 \\ u(x,0) = e^{\frac{1}{2}x} & \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}.$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)t} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} u_t(x,t)\,dx$.

21) פתרו את המשוואה

$$\begin{array}{ll} u_x + 2u_y = u & 1+y-2x>0,\quad x<0 \\ u(x,x^2) = x + \sin(x^3) & x<0 \end{array}.$$

22) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx} + \cos(\pi x) & 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 1 & \\ u(x,0) = x & \end{array}.$$

רמז: התבוננו בפונקציה $v(x,t) = u(x,t) - x$.

23) נתון כי $u(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{array}{ll} \Delta u = 1 & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = c + \sin(2020\cdot\theta) & \end{array}$$

עבור איזה קבוע c מתקיים $\lim\limits_{r\to 0+} \dfrac{u(r,\theta)}{r^2} = \dfrac{1}{4}$?

24) נתונות הבעיות הבאות:

$$\begin{cases} \Delta u = r^2 & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = \sin^{2019}(\theta) & 0 \le \theta < 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta v = r^2 & 0 \le r < 1 \\ v(1,\theta) = \cos^{2020}(\theta) \end{cases}$$

הוכיחו כי $u(0,0) > v(0,0)$.

25) נתון כי $u_n(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה:
$$\begin{cases} \Delta u_n = \left(\dfrac{r}{2}\right)^n & 0 \le r < 1 \\ u_n(1,\theta) = \sin(\theta) \end{cases}.$$

מצאו את $u_n(r,\theta)$ וחשבו $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(r,\theta)$.

26) הוכיחו את יחידות הפתרון של בעיית החום הבאה, עבור $b>0$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t) & 0 < x < 1 \\ u(x,0) = h(x) \\ v_x(0,t) - b\cdot v(0,t) = f(t) & t \ge 0 \\ u_x(1,t) + b\cdot u(1,t) = g(t) & t \ge 0 \end{cases}$$

רמז: היעזרו באינטגרל האנרגיה $E(t) = \dfrac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,t)\,dx$.

27) פתרו את הבעיה הבאה:
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin(\pi x) & 0 < x < 2 \;,\; t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \\ u(0,t) = 0 \qquad u(2,t) = 0 \end{cases}.$$

28) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3\sin(2x) + \dfrac{\pi - x}{\pi} & 0 < x < \pi \;,\; t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{x}{\pi} + \sin(x) \\ u(0,t) = t \qquad u(\pi,t) = 1 \end{cases}$$

רמז: הגדירו $u(x,t) = v(x,t) + t\dfrac{\pi - x}{\pi} + 1\cdot\dfrac{x}{\pi}$.

29) פתרו את הבעיה הבאה: $\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + \sin(2\pi x) & 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \\ u(0,t) = u(1,t) = t \end{cases}$.

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $v(x,t) = u(x,t) - t$.

30) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(x) & -\infty<x<\infty, \ t>0 \\ u(x,0) = \cos(x) + \begin{cases} 1 & -1<x<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$.

חשבו $\int_{-2}^{2} |u(x,3)|^2 \, dx$.

31) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2+y^2<1 \\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=1} = x^2+xy+y^2 \end{cases}$.

האם ייתכן כי $\iint\limits_{x^2+y^2<1} u(x,y)\,dxdy = \frac{7\pi}{4}$?

32) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<3 \ , \ t>0 \\ u(0,t) = \frac{3}{\sqrt{1+t^2}} & u(3,t)=3 \\ u(x,0) = 3+3x-x^2 \end{cases}$.

הוכיחו כי $u\left(\frac{3}{2},1\right) < 2e$.

33) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<\pi \ , \ t>0 \\ u(0,t) = \arctan(t) & u(\pi,t)=0 \\ u(x,0) = x(x-\pi) \end{cases}$.

הוכיחו כי $u\left(\frac{\pi}{2},1\right) > -\frac{\pi^2}{4}$.

34) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < \infty\ ,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} & u_t(x,0) = g(x) = 0 \\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

חשבו $\int_0^2 \left| u(x,1) - \frac{1}{2} \right|^2 dx$.

35) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} \Delta u = r & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = \sin^{2019}(\theta) \end{cases}$.

חשבו $u(0,0)$.