משוואות דיפרנציאליות חלקיות

תוכן העניינים

1. משוואות מסדר ראשון 1
2. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)
3. בעיות שטורם ליוביל 4
4. משוואת החום ..... (ללא ספר)
5. משוואת הגלים ..... (ללא ספר)
6. משוואת לפלס ..... (ללא ספר)
7. אינטגרל אנרגיה ..... (ללא ספר)
8. שאלות מסכמות ברמת בחינה 9

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. שיטת הקווים האופייניים 1
2. שיטת לגראנג 2

שיטת הקווים האופייניים

שאלות

1) פתרו את המשוואה עבור $\alpha \neq \frac{1}{2}$ קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = 0 \qquad \gamma = \{y = \alpha x\} \qquad u|_\gamma = x^2 + y^2$$

2) פתרו את המשוואה $3u_x - 2u_y = 0$ $\quad \gamma = \{y = x^2, x \geq 0\}$ $\quad u|_\gamma = x - y$.

3) פתרו את המשוואה $u_x + 2u_y = 0$ $\quad \gamma = \{y = x^2, x \leq 0\}$ $\quad u|_\gamma = x + \sin(xy)$.

4) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &u_x - u_y = -u && y \geq 0 \\ &u(x,0) = x^2 - x^4 \end{aligned}$$

.

5) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &2u_x - 3u_y + 2u = 0 \\ &u(x,-x) = (x+1)e^{-x} \end{aligned}$$

.

6) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} && y \geq e^{-x} \\ &u\left(x, e^{-x}\right) = e^{x^2} + e^{-x} \end{aligned}$$

.

7) נתון כי $u(x,y)$ הוא פתרון של הבעיה

$$\begin{aligned} &y^2 u_x + u_y = -u && 0 < x < \infty \quad , \quad y > 0 \\ &u(0,y) = 0 && y > 0 \\ &u(x,0) = 1 && x > 0 \end{aligned}$$

8) פתרו את הבעיה כאשר a קבוע ממשי.

$$\begin{aligned} &2u_x + u_y = -u && 0 < y < x \\ &u(x,0) = a \cdot \cos(x) + \sin(x) && x > 0 \\ &u(y,y) = 0 && y > 0 \end{aligned}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

שיטת לגראנג

שאלות

1) מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד"ח $xu_x+yuu_y=u$.

2) מצאו פתרון כללי למשוואה $x^2u_x+y^2u_y=u^2$.

3) מצאו פתרון כללי למשוואה $xu\cdot u_x+yu\cdot u_y=-xy$, כאשר $x,y,u>0$.

4) מצאו פתרון כללי למשוואה $\left(y^2+u^2\right)u_x-xyu_y=xu$, כאשר $x,y,u>0$.

רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, אז $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

5) מצאו פתרון למשוואה $\begin{cases} xu_x+yu_y=2xy & x,y>0 \\ u(x,1)=x & x>0 \end{cases}$.

6) פתרו את המשוואה $\begin{cases} e^yu_x-e^xu_y=-e^{x+y}u & u>0 \\ u(x,0)=1 \end{cases}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{e^x\sqrt{y}+1}u_x+yu_y=y^2u$, בתחום $u,y>0$.

ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

8) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\cos(y)u_x+\sin(y)u_y=e^y\sin(y)u$, בתחום שבו $0<y<\pi$ ו- $u>0$.

9) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{y}u_x+\frac{1}{x}u_y=2$.

10) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+y)u_x+(y-x)u_y=x^2-y^2$, בתחום $x,y>0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

11) נתון כי $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}F\left(\frac{y+1}{x^2+1}\right)$ הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה $a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$.

א. מצאו את הפונקציות a,b,c.

ב. מצאו פתרון פרטי המקיים $u(0,y)=y^2$.

תשובות סופיות

1) $F\left(\frac{x}{u},\ln(y)-u\right)=0$

2) $u(x,y)=\frac{1}{F\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}}$

3) $u=\sqrt{F\left(\ln\frac{x}{y}\right)-xy}$

4) $F\left(\frac{y}{u},x^2+y^2+u^2\right)=0$

5) $u(x,y)=x\cdot y$

6) $u(x,y)=e^{e^y-1}$

7) א. $u(x,y)=e^{\frac{1}{2}y^2-F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x}\right)}$ ב. שאלת הוכחה.

8) $u(x,y)=e^{e^y-F\left(e^{-x}\sin y\right)}$

9) $u(x,y)=xy-F\left(\frac{x}{y}\right)$

10) $u(x,y)=\frac{y^2+2xy-x^2-F\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4}$

11) א. $\underbrace{\left(x^2+1\right)}_{a}u_x+\underbrace{2x\left(y+1\right)}_{b}u_y=\underbrace{2xyu}_{c}$ ב. $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}\cdot\frac{\left(\frac{y+1}{x^2+1}-1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1}-1}}\cdot\frac{y+1}{x^2+1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 2 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

1. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 3 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל 4
2. טורי קוסינוסים וסינוסים ..... (ללא ספר)

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית
$\left(p(x)y'(x)\right)'+\left(\lambda r(x)-q(x)\right)y(x)=0$.

א. $y''-2xy'+\lambda y=0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda)y=0$ (משוואת בסל)

2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y''+e^{2x}y'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)+4y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y''+4y'+xy+\lambda e^x y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות **4-7**:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

4)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<\pi \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(\pi)-y'(\pi)=0 \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0, & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. פתרו את הבעיה.

9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , & 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}$.

ב. נציב $\ell=1$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$.

1. פתחו את הפונקציה $f(x)=1\ ,\ 0\le x\le 1$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.
התחל את הטור מ-$n=1$.
2. מה סכום הטור ב-$x=0$?
האם הוא שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$?

ג. נציב $\ell=2$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , & 0<x<2 \\ y(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases}$.

פתחו את הפונקציה $f(x)=x\ ,\ 0\le x\le 2$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , & 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$.

ב. פתחו את הפונקציה $f(x)=e^x, 0\le x\le \pi$ לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.
התחילו את הטור מ-$n=1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<e \\ y(1)=0 \\ y'(e)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.

ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את $f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x\le \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e}\le x\le e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.

הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.

ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x=2$, $x=1.5$, $x=\sqrt{e}$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi n)=(-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi n)=0$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\left(e^{-x^2}y'\right)'+\left(\lambda e^{-x^2}-0\right)y=0$ ב. $\left(xy'\right)'+\left(\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)-\left(-x\right)\right)y=0$

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\quad n=1,2,3,\ldots$.

5) פונקציות עצמיות: $\phi_n(x)=n\cos nx+\sin nx\qquad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=n^2,\quad n=1,2,3,\ldots$; בנוסף, $\lambda=-1$ הוא ע"ע של הבעיה,

המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=e^x$.

6) פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\sin(\omega_n x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

7) פונקציות עצמיות: $y_n(x)=\sin(\omega_n x)-\omega_n\cos(\omega_n x)\qquad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

בנוסף, $\lambda_0=0$ הוא ע"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=x-1$.

8) א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x,\qquad n=1,2,3,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

9) א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)\sin\left(\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2l}x\right)\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2l}\right)^2\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ב. סכום הטור ב-$x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$.

ג. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{\pi^2\left(2n+1\right)^2}\sin\left(\left(2n+1\right)\frac{\pi}{4}x\right)$, כאשר $(0<x<2)$.

10) א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ב. $e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1}-1}{1^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$, כאשר $0<x<\pi$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,\ldots$ $\varphi_n(x)=\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\ln x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,\ldots$ $\lambda_n=\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$.

ג. שאלת הוכחה.

ד. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-2\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\ln x\right)$

ה. סכום הטור ב- $x=\sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x=1.5$ הוא 1; וב- $x=2$ הוא 0.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 4 - משוואת החום

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים בקטע סופי ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)
3. עקרון דוהמל ..... (ללא ספר)
4. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)
5. נוסחת פוואסון בקטע אינסופי ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 5 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

1. קטע אינסופי ..... (ללא ספר)
2. קטע חצי אינסופי ..... (ללא ספר)
3. הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית ..... (ללא ספר)
4. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)
5. משולש הקביעה ..... (ללא ספר)
6. עקרון דוהמל ..... (ללא ספר)
7. משוואת המברקן ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 6 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

1. חזרה על אינטגרל קווי ..... (ללא ספר)
2. משוואת לפלס בעיגול ..... (ללא ספר)
3. משוואת לפלס במלבן ..... (ללא ספר)
4. עקרון הממוצע ..... (ללא ספר)
5. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)
6. משוואת לפלס בטבעת ..... (ללא ספר)
7. משוואת לפלס בגזרה מעגלית ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 7 - אינטגרל אנרגיה

תוכן העניינים

1. אינטגרל אנרגיה ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 8 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

1. תרגילים 9

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

פתרו את הבעיות בשאלות 1-2:

1)

$$u_x + u_y = u \qquad x, y > 0$$
$$u(x.0) = \begin{cases} 0 & x > 1 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad u(0, y) = 0$$

2)

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 < x < \infty \qquad t > 1$$
$$u(x,0) = f(x) = 0 \qquad u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

3) נתון כי $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$u_{tt} + u_t = u_{xx} + Ax \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u_x(0,t) = 2 \qquad u_x(1,t) = 1$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$$

נתון כי הגבול $U(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$ קיים וסופי.

מצאו את הקבוע A ואת הפונקציה $U(x)$.

4) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\triangle u = r \qquad 1 < r < 2$$
$$u(1,\theta) = 1 + \sin\theta$$
$$u(2,\theta) = 1 + 2\cos\theta$$

5) פתרו את המשוואה:

$$u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \qquad y \ge e^{-x}$$
$$u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

6) נתונה הבעיה הבאה, בתחום $t>0$ $0<x<1$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u \\ u(x,0) = x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e} \\ u(0,t) = (1,t) = 0 \end{cases}$$

הוכיחו : $u\left(\frac{1}{2},1\right) < \frac{1}{4\sqrt{e}}$.

רמז : הגדירו את הפונקציה $h(x,t) = u(x,t)e^{\delta x}$, עבור קבוע δ מתאים.

7) עבור איזו פונקציה לפתרון של הבעיה הבאה :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 10u & 0<x<1,\ t>0 \\ u(x,0) = h(x) & \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}$$

הגבול $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ קיים וסופי.

8) פתרו את הבעיה הבאה : $\begin{cases} \triangle u = x^2+y^2 & \text{in} \quad x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1+x \end{cases}$.

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

9) נתונה משוואת הגלים הבאה : $u_{tt} = u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad t>0$

$u(x,0) = 1$.

$$u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & -1<x<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את $u(x,1)$.

10) נתונה הבעיה הבאה : $\begin{cases} \triangle u = 0 & x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \cosh(x)\sinh(y) \end{cases}$.

חשבו את $u(0,0)$.

11) נתונה הבעיה הבאה : $\triangle u = 0 \qquad 1<x^2+y^2<4$

$u|_{x^2+y^2=1} = \ln(2+x)$.

$u|_{x^2+y^2=4} = \ln\left(e^{2019}-2+x\right)$

הוכיחו כי לכל $1<x^2+y^2<4$ מתקיים $0<u(x,y)<2019$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

12) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x,y>0$.

$$x^2 ulxx + 2xy\cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} = 4x^2$$

13) השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}+\beta\cdot u_t + F(x,t) & 0<x<L,\ t>0,\ \beta>0 \\ u_x(0,t)=A(t) & u_x(L,t)=B(t) \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

רמז: הגדירו $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)dx$.

14) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0<x<L, \quad t>0 \\ u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 \end{cases}$$

15) נתונה המשוואה $2u_{xx}+2yu_{yy}+u_y=0$, בתחום $y>0$.

א. הראו כי המשוואה אליפטית.

ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

16) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+e^{-t} & 0<x<\infty \\ u(0,t)=e^{-t}-1 \\ u(x,0)=1 \quad u_t(x,0)=2\sin(x)-1 \end{cases}$$

17) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1,\ t>0 \\ u_x(0,t)=0 \quad u_x(1,t)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=x^2(1-x) \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty}\int_0^1 u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

18) $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & -\infty < x < \infty,\ \ t > 0 \\ u(x,0) = h(x) = \dfrac{e^{-x} + 2e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} \end{cases}.$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_x(0,t)\sqrt{t}}{u(0,t)}$.

19) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:

$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0$$

20) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t + u_x = u_{xx} & 0 < x < 1,\ \ t > 0 \\ u(x,0) = e^{\frac{1}{2}x} & \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}.$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)t} \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} u_t(x,t)\,dx$.

21) פתרו את המשוואה

$$\begin{cases} u_x + 2u_y = u & 1 + y - 2x > 0,\ \ x < 0 \\ u(x,x^2) = x + \sin(x^3) & x < 0 \end{cases}.$$

22) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos(\pi x) & 0 < x < 1\ ,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 1 & \\ u(x,0) = x & \end{cases}.$$

רמז: התבוננו בפונקציה $v(x,t) = u(x,t) - x$.

23) נתון כי $u(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} \triangle u = 1 & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = c + \sin(2020\cdot\theta) & \end{cases}$$

עבור איזה קבוע c מתקיים $\lim\limits_{r\to 0+} \dfrac{u(r,\theta)}{r^2} = \dfrac{1}{4}$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

24) נתונות הבעיות הבאות:

$$\begin{cases}\triangle u = r^2 & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = \sin^{2019}(\theta) & 0 \le \theta < 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases}\triangle v = r^2 & 0 \le r < 1 \\ v(1,\theta) = \cos^{2020}(\theta) & \end{cases}$$

הוכיחו כי $u(0,0) > v(0,0)$.

25) נתון כי $u_n(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה: $\begin{cases}\triangle u_n = \left(\frac{r}{2}\right)^n & 0 \le r < 1 \\ u_n(1,\theta) = \sin(\theta) & \end{cases}$.

מצאו את $u_n(r,\theta)$ וחשבו $\lim_{n\to\infty} u_n(r,\theta)$.

26) הוכיחו את יחידות הפתרון של בעיית החום הבאה, עבור $b > 0$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t) & 0 < x < 1 \\ u(x,0) = h(x) & \\ v_x(0,t) - b \cdot v(0,t) = f(t) & t \ge 0 \\ u_x(1,t) + b \cdot u(1,t) = g(t) & t \ge 0 \end{cases}$$

רמז: היעזרו באינטגרל האנרגיה $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,t)\,dx$.

27) פתרו את הבעיה הבאה: $\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin(\pi x) & 0 < x < 2 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & \\ u(0,t) = 0 \qquad u(2,t) = 0 & \end{cases}$.

28) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3\sin(2x) + \frac{\pi - x}{\pi} & 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \frac{x}{\pi} + \sin(x) & \\ u(0,t) = t \qquad u(\pi,t) = 1 & \end{cases}$$

רמז: הגדירו $u(x,t) = v(x,t) + t\frac{\pi - x}{\pi} + 1 \cdot \frac{x}{\pi}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

29) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + \sin(2\pi x) & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \\ u(0,t) = u(1,t) = t \end{cases}.$$

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $v(x,t) = u(x,t) - t$.

30) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(x) & -\infty < x < \infty, \ t > 0 \\ u(x,0) = \cos(x) + \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}.$$

חשבו $\int_{-2}^{2} |u(x,3)|^2 \, dx$.

31) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=1} = x^2 + xy + y^2 \end{cases}.$$

האם ייתכן כי $\iint_{x^2+y^2<1} u(x,y)\,dxdy = \frac{7\pi}{4}$?

32) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 3 \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = \dfrac{3}{\sqrt{1+t^2}} \qquad u(3,t) = 3 \\ u(x,0) = 3 + 3x - x^2 \end{cases}.$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{3}{2},1\right) < 2e$.

33) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = \arctan(t) \qquad u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = x(x-\pi) \end{cases}.$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{\pi}{2},1\right) > -\frac{\pi^2}{4}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

34) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<\infty\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)=\begin{cases}1-x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases} & u_t(x,0)=g(x)=0 \\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$$

חשבו $\int_0^2 \left|u(x,1)-\frac{1}{2}\right|^2 dx$.

35) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases}\triangle u=r & 0\le r<1\\ u(1,\theta)=\sin^{2019}(\theta)\end{cases}$.

חשבו $u(0,0)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com