משוואות דיפרנציאליות חלקיות



תוכן העניינים

1. משוואות מסדר ראשון 1
2. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)
3. משוואת הגלים ..... (ללא ספר)
4. משוואת החום ..... (ללא ספר)
5. משוואת לפלס ..... (ללא ספר)
6. שאלות מסכמות 4

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. שיטת הקווים האופייניים 1
2. שיטת לגראנג 2

שיטת הקווים האופייניים

שאלות

1) פתרו את המשוואה עבור $\alpha \neq \frac{1}{2}$ קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = 0 \qquad \gamma = \{y = \alpha x\} \qquad u|_\gamma = x^2 + y^2$$

2) פתרו את המשוואה $3u_x - 2u_y = 0 \quad \gamma = \{y = x^2, x \geq 0\} \quad u|_\gamma = x - y$.

3) פתרו את המשוואה $u_x + 2u_y = 0 \quad \gamma = \{y = x^2, x \leq 0\} \quad u|_\gamma = x + \sin(xy)$.

4) פתרו את המשוואה

$$u_x - u_y = -u \qquad y \geq 0$$
$$u(x,0) = x^2 - x^4$$

5) פתרו את המשוואה

$$2u_x - 3u_y + 2u = 0$$
$$u(x,-x) = (x+1)e^{-x}$$

6) פתרו את המשוואה

$$u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \qquad y \geq e^{-x}$$
$$u(x,e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$$

7) נתון כי $u(x,y)$ הוא פתרון של הבעיה

$$y^2 u_x + u_y = -u \qquad 0 < x < \infty \quad , \quad y > 0$$
$$u(0,y) = 0 \qquad y > 0$$
$$u(x,0) = 1 \qquad x > 0$$

8) פתרו את הבעיה כאשר a קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = -u \qquad 0 < y < x$$
$$u(x,0) = a \cdot \cos(x) + \sin(x) \qquad x > 0$$
$$u(y,y) = 0 \qquad y > 0$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

שיטת לגראנג

שאלות

1) מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד"ח $xu_x+yuu_y=u$.

2) מצאו פתרון כללי למשוואה $x^2u_x+y^2u_y=u^2$.

3) מצאו פתרון כללי למשוואה $xu\cdot u_x+yu\cdot u_y=-xy$, כאשר $x,y,u>0$.

4) מצאו פתרון כללי למשוואה $\left(y^2+u^2\right)u_x-xyu_y=xu$, כאשר $x,y,u>0$.

רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, אז $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

5) מצאו פתרון למשוואה $\begin{cases} xu_x+yu_y=2xy & x,y>0 \\ u(x,1)=x & x>0 \end{cases}$.

6) פתרו את המשוואה $\begin{cases} e^yu_x-e^xu_y=-e^{x+y}u & u>0 \\ u(x,0)=1 \end{cases}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{e^x\sqrt{y}+1}u_x+yu_y=y^2u$,

בתחום $u,y>0$.

ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

8) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\cos(y)u_x+\sin(y)u_y=e^y\sin(y)u$,

בתחום שבו $0<y<\pi$ ו- $u>0$.

9) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{y}u_x+\frac{1}{x}u_y=2$.

10) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+y)u_x+(y-x)u_y=x^2-y^2$,

בתחום $x,y>0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

11) נתון כי $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}F\left(\frac{y+1}{x^2+1}\right)$ הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה $a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$.

א. מצאו את הפונקציות a,b,c.

ב. מצאו פתרון פרטי המקיים $u(0,y)=y^2$.

תשובות סופיות

1) $F\left(\frac{x}{u},\ln(y)-u\right)=0$

2) $u(x,y)=\frac{1}{F\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}}$

3) $u=\sqrt{F\left(\ln\frac{x}{y}\right)-xy}$

4) $F\left(\frac{y}{u},x^2+y^2+u^2\right)=0$

5) $u(x,y)=x\cdot y$

6) $u(x,y)=e^{e^y-1}$

7) א. $u(x,y)=e^{\frac{1}{2}y^2-F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x}\right)}$ ב. שאלת הוכחה.

8) $u(x,y)=e^{e^y-F\left(e^{-x}\sin y\right)}$

9) $u(x,y)=xy-F\left(\frac{x}{y}\right)$

10) $u(x,y)=\frac{y^2+2xy-x^2-F\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4}$

11) א. $\underbrace{\left(x^2+1\right)}_{a}u_x+\underbrace{2x\left(y+1\right)}_{b}u_y=\underbrace{2xyu}_{c}$ ב. $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}\cdot\frac{\left(\frac{y+1}{x^2+1}-1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1}-1}}\cdot\frac{y+1}{x^2+1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 2 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

1. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 3 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)
3. קטע אינסופי ..... (ללא ספר)
4. קטע חצי אינסופי ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 4 - משוואת החום

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים בקטע סופי ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)
3. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)
4. נוסחת פוואסון בקטע אינסופי ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 5 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

1. משוואת לפלס בעיגול ..... (ללא ספר)
2. משוואת לפלס במלבן ..... (ללא ספר)
3. עקרון הממוצע ..... (ללא ספר)
4. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)
5. משוואת לפלס בטבעת ..... (ללא ספר)
6. משוואת לפלס בגזרה מעגלית ..... (ללא ספר)
7. חזרה על אינטגרל קווי ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 6 - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

1. תרגילים 4

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

פתרו את הבעיות בשאלות 1-2:

1)
$$u_x + u_y = u \qquad x, y > 0$$
$$u(x.0) = \begin{cases} 0 & x > 1 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad u(0, y) = 0$$

2)
$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 < x < \infty \qquad t > 1$$
$$u(x,0) = f(x) = 0 \qquad u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

3) פתרו את המשוואה
$$u_x + 2u_y = u \qquad 1 + y - 2x > 0, \quad x < 0$$
$$u(x, x^2) = x + \sin(x^3) \quad x < 0$$

4) נתון כי $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:
$$u_{tt} + u_t = u_{xx} + Ax \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u_x(0,t) = 2 \qquad u_x(1,t) = 1$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$$

נתון כי הגבול $U(x) = \lim_{t \to \infty} u(x,t)$ קיים וסופי.

מצאו את הקבוע A ואת הפונקציה $U(x)$.

5) פתרו את הבעיה הבאה:
$$\triangle u = r \qquad 1 < r < 2$$
$$u(1,\theta) = 1 + \sin\theta$$
$$u(2,\theta) = 1 + 2\cos\theta$$

6) פתרו את המשוואה:
$$u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \qquad y \ge e^{-x}$$
$$u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

7) נתונה הבעיה הבאה, בתחום $t>0$ $0<x<1$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u \\ u(x,0) = x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e} \\ u(0,t) = (1,t) = 0 \end{cases}$$

הוכיחו : $u\left(\frac{1}{2},1\right) < \frac{1}{4\sqrt{e}}$.

רמז : הגדירו את הפונקציה $h(x,t) = u(x,t)e^{\delta x}$, עבור קבוע δ מתאים.

8) עבור איזו פונקציה h לפתרון של הבעיה הבאה :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 10u & 0<x<1,\ t>0 \\ u(x,0) = h(x) & \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}$$

הגבול $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ קיים וסופי.

9) פתרו את הבעיה הבאה : $\begin{cases} \triangle u = x^2+y^2 & \text{in} \quad x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1+x \end{cases}$.

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

10) נתונה משוואת הגלים הבאה : $u_{tt} = u_{xx} \quad -\infty<x<\infty \quad t>0$

$u(x,0) = 1$.

$$u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & -1<x<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את $u(x,1)$.

11) נתונה הבעיה הבאה : $\begin{cases} \triangle u = 0 & x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \cosh(x)\sinh(y) \end{cases}$.

חשבו את $u(0,0)$.

12) נתונה הבעיה הבאה : $\triangle u = 0 \quad 1<x^2+y^2<4$

$u|_{x^2+y^2=1} = \ln(2+x)$.

$u|_{x^2+y^2=4} = \ln\left(e^{2019}-2+x\right)$

הוכיחו כי לכל $1<x^2+y^2<4$ מתקיים $0<u(x,y)<2019$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

13) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x,y>0$.

$$x^2 ulxx + 2xy\cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} = 4x^2$$

14) השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}+\beta\cdot u_t + F(x,t) & 0<x<L,\ t>0,\ \beta>0 \\ u_x(0,t)=A(t) & u_x(L,t)=B(t) \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

רמז: הגדירו $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)\,dx$.

15) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0<x<L, \quad t>0 \\ u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 \end{cases}$$

16) נתונה המשוואה $2u_{xx}+2yu_{yy}+u_y=0$, בתחום $y>0$.

א. הראו כי המשוואה אליפטית.

ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

17) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+e^{-t} & 0<x<\infty \\ u(0,t)=e^{-t}-1 \\ u(x,0)=1 \quad u_t(x,0)=2\sin(x)-1 \end{cases}$$

18) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1,\ t>0 \\ u_x(0,t)=0 \quad u_x(1,t)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=x^2(1-x) \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty}\int_0^1 u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)\,dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

19) $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & -\infty < x < \infty,\ \ t > 0 \\ u(x,0) = h(x) = \dfrac{e^{-x} + 2e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} \end{cases}.$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_x(0,t)\sqrt{t}}{u(0,t)}$.

20) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t + u_x = u_{xx} & 0 < x < 1,\ \ t > 0 \\ u(x,0) = e^{\frac{1}{2}x} & \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}.$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)t} \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} u_t(x,t)\,dx$.

21) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:

$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com