משוואות דיפרנציאליות חלקיות



תוכן העניינים

1. משוואות מסדר ראשון 1
2. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)
3. בעיות שטורם ליוביל 4
4. טורי פורייה 9
5. משוואת הגלים ..... (ללא ספר)
6. משוואת החום ..... (ללא ספר)
7. אינטגרל אנרגיה ..... (ללא ספר)
8. משוואת לפלס ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. שיטת הקווים האופייניים 1
2. שיטת לגראנג 2

שיטת הקווים האופייניים

שאלות

1) פתרו את המשוואה עבור $\alpha \neq \frac{1}{2}$ קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = 0 \qquad \gamma = \{y = \alpha x\} \qquad u|_\gamma = x^2 + y^2$$

2) פתרו את המשוואה $3u_x - 2u_y = 0 \quad \gamma = \{y = x^2, x \geq 0\} \quad u|_\gamma = x - y$.

3) פתרו את המשוואה $u_x + 2u_y = 0 \quad \gamma = \{y = x^2, x \leq 0\} \quad u|_\gamma = x + \sin(xy)$.

4) פתרו את המשוואה

$$u_x - u_y = -u \qquad y \geq 0$$
$$u(x,0) = x^2 - x^4$$

5) פתרו את המשוואה

$$2u_x - 3u_y + 2u = 0$$
$$u(x,-x) = (x+1)e^{-x}$$

6) פתרו את המשוואה

$$u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \qquad y \geq e^{-x}$$
$$u(x,e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$$

7) נתון כי $u(x,y)$ הוא פתרון של הבעיה

$$y^2 u_x + u_y = -u \qquad 0 < x < \infty \quad , \quad y > 0$$
$$u(0,y) = 0 \qquad y > 0$$
$$u(x,0) = 1 \qquad x > 0$$

8) פתרו את הבעיה כאשר a קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = -u \qquad 0 < y < x$$
$$u(x,0) = a \cdot \cos(x) + \sin(x) \qquad x > 0$$
$$u(y,y) = 0 \qquad y > 0$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

שיטת לגראנג

שאלות

1) מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד"ח $xu_x+yuu_y=u$.

2) מצאו פתרון כללי למשוואה $x^2u_x+y^2u_y=u^2$.

3) מצאו פתרון כללי למשוואה $xu\cdot u_x+yu\cdot u_y=-xy$, כאשר $x,y,u>0$.

4) מצאו פתרון כללי למשוואה $\left(y^2+u^2\right)u_x-xyu_y=xu$, כאשר $x,y,u>0$.

רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, אז $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

5) מצאו פתרון למשוואה $\begin{cases} xu_x+yu_y=2xy & x,y>0 \\ u(x,1)=x & x>0 \end{cases}$.

6) פתרו את המשוואה $\begin{cases} e^yu_x-e^xu_y=-e^{x+y}u & u>0 \\ u(x,0)=1 \end{cases}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{e^x\sqrt{y}+1}u_x+yu_y=y^2u$,

בתחום $u,y>0$.

ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

8) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\cos(y)u_x+\sin(y)u_y=e^y\sin(y)u$,

בתחום שבו $0<y<\pi$ ו- $u>0$.

9) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{y}u_x+\frac{1}{x}u_y=2$.

10) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+y)u_x+(y-x)u_y=x^2-y^2$,

בתחום $x,y>0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

11) נתון כי $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}F\left(\frac{y+1}{x^2+1}\right)$ הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה $a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$.

א. מצאו את הפונקציות a,b,c.

ב. מצאו פתרון פרטי המקיים $u(0,y)=y^2$.

תשובות סופיות

1) $F\left(\frac{x}{u},\ln(y)-u\right)=0$

2) $u(x,y)=\frac{1}{F\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}}$

3) $u=\sqrt{F\left(\ln\frac{x}{y}\right)-xy}$

4) $F\left(\frac{y}{u},x^2+y^2+u^2\right)=0$

5) $u(x,y)=x\cdot y$

6) $u(x,y)=e^{e^y-1}$

7) א. $u(x,y)=e^{\frac{1}{2}y^2-F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x}\right)}$ ב. שאלת הוכחה.

8) $u(x,y)=e^{e^y-F\left(e^{-x}\sin y\right)}$

9) $u(x,y)=xy-F\left(\frac{x}{y}\right)$

10) $u(x,y)=\frac{y^2+2xy-x^2-F\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4}$

11) א. $\underbrace{\left(x^2+1\right)}_{a}u_x+\underbrace{2x\left(y+1\right)}_{b}u_y=\underbrace{2xyu}_{c}$ ב. $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}\cdot\frac{\left(\frac{y+1}{x^2+1}-1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1}-1}}\cdot\frac{y+1}{x^2+1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 2 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

1. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 3 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל 4
2. טורי קוסינוסים וסינוסים ..... (ללא ספר)

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית
$\left(p(x)y'(x)\right)'+\left(\lambda r(x)-q(x)\right)y(x)=0$.

א. $y''-2xy'+\lambda y=0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda)y=0$ (משוואת בסל)

2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y''+e^{2x}y'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)+4y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y''+4y'+xy+\lambda e^x y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות **4-7**:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

4)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<\pi \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(\pi)-y'(\pi)=0 \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0, & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}.$$

א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. פתרו את הבעיה.

9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}.$

ב. נציב $\ell=1$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}.$

1. פתחו את הפונקציה $f(x)=1\ ,\ 0\le x\le 1$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.
התחל את הטור מ-$n=1$.
2. מה סכום הטור ב-$x=0$?
האם הוא שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$?

ג. נציב $\ell=2$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<2 \\ y(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases}.$

פתחו את הפונקציה $f(x)=x\ ,\ 0\le x\le 2$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}.$

ב. פתחו את הפונקציה $f(x)=e^x, 0\le x\le \pi$ לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.
התחילו את הטור מ-$n=1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<e \\ y(1)=0 \\ y'(e)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.

ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את $f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x\le \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e}\le x\le e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.

הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.

ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x=2$, $x=1.5$, $x=\sqrt{e}$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi n)=(-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi n)=0$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\left(e^{-x^2}y'\right)'+\left(\lambda e^{-x^2}-0\right)y=0$ ב. $\left(xy'\right)'+\left(\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)-\left(-x\right)\right)y=0$

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\quad n=1,2,3,\ldots$.

5) פונקציות עצמיות: $\phi_n(x)=n\cos nx+\sin nx\qquad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=n^2,\quad n=1,2,3,\ldots$; בנוסף, $\lambda=-1$ הוא ע"ע של הבעיה,

המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=e^x$.

6) פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\sin(\omega_n x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

7) פונקציות עצמיות: $y_n(x)=\sin(\omega_n x)-\omega_n\cos(\omega_n x)\qquad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

בנוסף, $\lambda_0=0$ הוא ע"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=x-1$.

8) א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x,\qquad n=1,2,3,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

9) א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right)\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ב. סכום הטור ב-$x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$.

ג. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$, כאשר $(0<x<2)$.

10) א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ב. $e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1}-1}{1^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$, כאשר $0<x<\pi$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,\ldots$ $\varphi_n(x)=\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\ln x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,\ldots$ $\lambda_n=\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$.

ג. שאלת הוכחה.

ד. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-2\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\ln x\right)$

ה. סכום הטור ב- $x=\sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x=1.5$ הוא 1; וב- $x=2$ הוא 0.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 4 - טורי פורייה

תוכן העניינים

1. הקדמה ..... (ללא ספר)
2. טור פורייה ממשי 9
3. טור פורייה מרוכב 10
4. משפט פרסבל 11
5. רימן לבג 14
6. משפט דיריכלה 15
7. המשכה זוגית ואי זוגית 17
8. גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה 18
9. התכנסות במידה שווה של טורי פורייה 21
10. טור פורייה בקטע כללי 22
11. משפט הקונבולוציה 24
12. גרעין דיריכלה 26
13. גרעין פייר וממוצעי סזארו 28
14. גרעין פוואסון 30
15. תרגילים מסכמים 31

טור פורייה ממשי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\sin(|x|)$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1 \\ 0 & else\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\sum_{n=1}^{20}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

2) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$

3) $\sin(|x|)\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}\cos(2kx)$

4) $f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 2x & 0\le x<\pi\end{cases}$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ \sin(x) & 0\le x<\pi\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$

2) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}-\frac{1}{2\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{in}+\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}e^{inx}$

3) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-3(-1)^n\frac{\pi}{in}\right]e^{inx}$

4) $f(x)\sim-\frac{1}{2}-\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{3}{\pi i(2k-1)}e^{i(2k-1)x}$

5) $f(x)\sim\frac{1}{4i}e^{ix}-\frac{1}{4i}e^{-ix}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}e^{i[2k]x}$

משפט פרסבל:

שאלות:

1) באמצעות טור הפורייה $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$, חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

2) נתון כי טור הפורייה הממשי של $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הינו $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin\left((2k-1)x\right)$. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le\pi\\ x+\pi & -\pi\le x<0\end{cases}$ ו- $g(x)=x$.

מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

4) מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x\le\pi\\ 0 & -\pi<x\le 0\end{cases}$ ובאמצעותו חשבו את הסכום $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

5) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le\pi\\ e^{x^2} & -\pi\le x<0\end{cases}$ ו- $g(x)=\begin{cases}0 & 1<x\le\pi\\ \frac{1}{x^2+1} & 0\le x\le 1\\ 0 & -\pi\le x<0\end{cases}$.

נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- $g\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}g_ne^{inx}$, $f\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_ne^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_n\cdot\overline{g_n}=\frac{1}{8}$.

6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π:

$$f(x)=\sinh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \quad , \quad -\pi \le x < \pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi < x < 3\pi$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+n^2\right)^2}$.

7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi,\pi]$ על ידי הנוסחה: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}}e^{inx}$.

חשבו $\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x+\pi)-f(x)\right|^2 dx$.

8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $p\neq 0$

כדי להוכיח את הזהות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$.

9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}h^2 & h\le x\le \pi\\ 0 & -\pi\le x\le h\end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$

כאשר $0\neq h\in[-\pi,\pi]$ ובשוויון פרסבל כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos(2n)}{n^2}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{32}$.

ג. הסיקו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi^2}{6}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) $\frac{\pi^2}{4}$

5) הוכחה.

6) א. ראו סרטון. ב. $\sinh(x)\sim-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}\frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi}\sin(nx)$

ג. ≈ 0.769

7) 8π

8) הוכחה.

9) $\frac{\pi^2-4}{4}$

10) א. $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi\left(1-4n^2\right)}e^{inx}$ ב. הוכחה.

ג. ראו סרטון.

רימן לבג:

שאלות:

1) חשבו $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x}\cos\left(\sqrt{|x|}\right)\sin(nx)\,dx$.

2) חשבו $\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2+1}e^{i\cdot n^2 t}\,dt$.

3) הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(n\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{x}\frac{se^{s^2}\,ds}{\sqrt{s^2+2017}}e^{inx}\,dx\right)=0$.

תשובות סופיות:

1) 0
2) 0
3) הוכחה.

משפט דיריכלה:

שאלות:

1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$ לטור פורייה ממשי $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$.

היעזרו בפיתוח זה כדי להוכיח $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$.

רמז: הציבו $x=\frac{\pi}{2}$.

2) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π: $f(x)=\begin{cases}2+\frac{2x}{\pi} & -\pi<x<0\\ 2 & 0<x<\pi\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) במרחב הפונקציות $L^2_{PC}[-\pi,\pi]$ נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$.

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $f(x)$.

ב. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

ד. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\cos(ax)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר a אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

א. $\frac{1}{\sin(\pi a)}=\frac{1}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{\pi a+\pi n}+\frac{1}{\pi a-\pi n}\right]$

ב. $\cot(\pi\alpha)=\frac{1}{\pi\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\alpha+\pi n}+\frac{1}{\pi\alpha-\pi n}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. ראו סרטון.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi n}\sin(nx)$ ג. הוכחה. $f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$

3) א. $x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$ ב. $\frac{\pi^4}{90}$ ג. $\frac{\pi^2}{-12}$ ד. $\frac{\pi^2}{6}$

4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0<x<\pi$

מתקיים $x=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=1$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ והוכיחו כי:

א. לכל $0<x<\pi$ מתקיים $1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}=-\frac{\pi}{4}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$
ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח $f'(x)\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$).

נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ אזי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ מתכנס בהחלט.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x(\pi-x)$ בקטע $[0,\pi]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?
שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$.

ד. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x)=\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ בקטע $[0,\pi]$.

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$. רמז: הציבו $x=0$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x^2}$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

נסמן $f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}\left|c_ne^{inx}\right|$ פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|$ מתכנס?

ב. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|$ מתכנס?

ג. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$ מתכנס?

4) נתבונן בטור הפורייה $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{in(x+i)}$.

כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}$ בקטע $(0,2\pi)$.

ב. נסמן $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ באופן מפורש (ללא טור) בקטע $(0,2\pi)$.

6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi,\pi]$, גזירה ברציפות למקוטעין k פעמים כך שמתקיים $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$ לכל $j=0,1,...k-1$. נסמן $f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(n^k c_n\right)=0$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f(x)\in L^2{}_{PC}[-\pi,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$ ו-$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$. הראו כי מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\le\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx$.

ב. תהי $f(x)\in L^2{}_{PC}[0,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0)=f(\pi)=0$.

הראו כי מתקיים $\int_{0}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\le\int_{0}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx$.

8) נגדיר $f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}e^{in^2x}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

9) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}\sin\left(n^{2.5}x\right)$

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

10) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{1.4}}+\frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$.

א. האם f רציפה?

ב. האם f גזירה ברציפות?

11) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^4}$. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

12) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3.1}+i\cdot n^{2.2}}\cdot e^{inx}$. הוכיחו כי f גזירה ברציפות פעמיים.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. $[0,\pi]$ $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin([2k-1]x)$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

ה. $[0,\pi]$ $\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\sim\frac{\pi^3}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi(2k-1)^4}\cos([2k-1]x)$ ו. הוכחה.

3) א. $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\cdot nc_n\right|\le\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2<\infty$ ב. $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|<\infty$

ג. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$

4) ראו סרטון.

5) א. הוכחה. ב. $-\frac{\pi}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+\frac{\pi^2}{6}x$

6) הוכחה.

7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

10) א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{.4}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2.8}}<\infty$ ב. נניח בשלילה כי f גזירה ברציפות.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי הפונקציה $g(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ \pi-x & 0\le x<\pi\end{cases}$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $g(x)$.

ב. עבור $-\pi\le x\le\pi$ נגדיר את הפונקציה $h(x)=a\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\int_{-\pi}^{x}g(t)\,dt$

כאשר $g(x)$ מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של a מתכנס טור פורייה של $h(x)$ במידה שווה ל-$h(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) נגדיר פונקציה $f(x)=|\sin(x)|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב-$f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של f ושל f'.

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחישבתם?

שרטטו את הגרפים של פונקציות אלו בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f' במידה שווה?

תשובות סופיות:

1) א. $g(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(2k\cdot x)$ ב. $a=-\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $f(x)\sim\left(\frac{2}{\pi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{-4}{(2k+1)(2k-1)}\right]\cos(2k\cdot x)$,

$f'(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{8k}{(2k+1)(2k-1)}\right]\sin(2k\cdot x)$ ב. $f'(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$

ג. $f(x)$ פונקציה רציפה, מחזורית-2π, הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של $f'(x)$ יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו: $[\pi n+\delta,\pi(n+1)-\delta]$

לכל $0<\delta<\pi$ ולכל n שלם.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[0,2\pi]$.

2) תהי הפונקציה $f(x)=\min\{1,|x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2,2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0,2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2}$.

4) פתחו את $f(x)=|x|$ לטור פורייה בקטע $[-1,1]$.

5) פתחו את $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ 2-x & 1<x<2\end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0,2]$.

6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x)=f(x+2)$ ובנוסף $-1\le x<1$ $f(x)=2-|x|$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$.

ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1,1]$?

7) מצאו טור קוסינוסים $f(x)=x$ בקטע $[0,3]$.

8) פתחו את $f(x)=\cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0,\pi]$.

תשובות סופיות:

1) $x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cdot\cos nx-\frac{4\pi}{n}\cdot\sin nx \qquad 0\le x\le 2\pi$

2) א. $b_n=0 \quad , \quad a_n=\begin{cases}\frac{-4}{\pi^2\left[2k-1\right]^2} & n=2k-1\\ \frac{-8}{\pi^2\left[4k-2\right]^2} & n=4k-2\\ 0 & else\end{cases}$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left[2k-1\right]^4}=\frac{\pi^4}{96} \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2k+1\right)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

3) א. $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1|\,4n^2\pi^2}e^{in\pi x}$ ב. ראו סרטון. ג. $\frac{3-e}{4(e-1)}$

4) $|x|\sim\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left(\pi\left[2k-1\right]x\right)$

5) $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2\left[2k-1\right]^2}\sin\left(\frac{\pi\left[2k-1\right]x}{2}\right)$

6) א. $f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\left(\left[2k-1\right]\pi x\right)$ ב. $\frac{\pi^4}{96}$ ג. $\frac{\pi^2}{8}$

ד. אם f רציפה בקטע $[a,b]$, $f(a)=f(b)$ ו-f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל-f בקטע $[a,b]$.

7) $f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-12}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right)$

8) $\cos(2x)\sim-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{4\left[2k-1\right]}{4-\left[2k-1\right]^2}\sin\left(\left[2k-1\right]x\right)$

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π אז $(f*g)_{(x)}$ מחזוריות- 2π.

2) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין, מחזוריות- 2π ופונקציות זוגיות אז $(f*g)_{(x)}$ זוגית.

3) נתונה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=\sqrt{2\pi}\cdot\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x)$.

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$.

הערה: $\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

4) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=x^2$, $g(x)=\cos(x)$.

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

5) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=x$, $g(x)=\chi_{[0,1]}(x)$.

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) $\pi - x$

4) לכל $-\pi \le x \le \pi$, $(f*g)_{(x)} = -2\cos(x)$

5) $$(f*g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(x^2 - (x-1)^2\right) & -\pi+1 \le x \le \pi \\ \frac{1}{4\pi}\left[x^2 - \left(x+(2\pi-1)\right)^2\right] & -\pi \le x \le -\pi+1 \end{cases}$$

גרעין דיריכלה:

שאלות:

1) נגדיר $D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}$ (גרעין דיריכלה).

א. הוכיחו כי $D_n(x)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$.

ב. הוכיחו כי $D_n(x)=\dfrac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ עבור $x\neq 2\pi m$.

2) חשבו לכל ערך של n שלם את ערכו של הביטוי $I(n)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\dfrac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin(100x)\,dx$.

3) הוכיחו כי $I=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\left[\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\right]}{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}dx=2(n+1)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

4) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$. נסמן $S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}$ טור פורייה חלקי.

הוכיחו כי $(f*D_n)_x=S_n(x)$.

5) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{arctg(x-1)\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{e^{(x-1)^2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}dx$.

6) נגדיר $S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{2001}{2}t}{\sin t}2\cos\frac{t}{2}\cos^{17}\left(e^{\sqrt{|x-t|}}\right)dt$.

יהיו a_n , b_n מקדמי פורייה הממשיים ו- c_n מקדמי פורייה המרוכבים, של הפונקציה $S(x)$.

חשבו את b_{500} , c_{1001}.

רמז: $S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)\,f(x-t)dt$ כאשר $D_N(t)$ גרעין דיריכלה מסדר N ו- S_N טור פורייה החלקי ה- N -י של f.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

2) 0

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) $-\frac{\pi^2}{2e}$

6) $b_{500}=0$, $c_{1001}=0$

גרעין פייר וממוצעי סזארו:

שאלות:

1) נסמן $D_n(x)$ גרעין דיריכלה. נגדיר את גרעין פייר כך: $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)$.

א. הראו כי לכל $x\neq 2\pi m$ $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

ב. הראו כי $K_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikx}$.

2) הוכיחו כי $K_n(x)\geq 0$ לכל x כאשר $K_n(x)$ גרעין פייר.

3) הוכיחו כי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)dx=1$

4) הוכיחו כי לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|x|<\pi}K_n(x)dx=0$.

5) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין, מחזורית-2π וכי $m\leq f(x)\leq M$ לכל x ממשי.
הוכיחו כי $m\leq\sigma_n(x)\leq M$ לכל n טבעי ולכל x ממשי כאשר $\sigma_n(x)$ סדרת ממוצעי סזארו של הפונקציה $f(x)$.

6) תהי $\varphi(x)$ רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ ונניח כי:

i. $\varphi(x)\geq 0$.

ii. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=1$.

iii. קיים $0<\delta_0<\pi$ כך שלכל $|x|>\delta_0$ מתקיים $\varphi(x)=0$.

נגדיר $F_n(x)=n\varphi(nx)$ ונרחיב אותה באופן מחזורי.
הוכיחו כי $F_n(x)$ מהווה גרעין חיובי.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

גרעין פוואסון:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי לכל $0<r<1$ מתקיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{inx}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$.

ב. גרעין פוואסון נתון על ידי $P_r(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π וטור פורייה שלה נתון על ידי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הראו כי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}$.

ג. הוכיחו את התכונות הבאות של גרעין פוואסון:

i. $P_r(x)\geq 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to 1-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$ מתקיים.

ד. תהי $f(x)$ רציפה ומחזורית 2π ועם טור פורייה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}\xrightarrow{r\to 1-}f(x)$ במידה שווה.

הערה: ניתן להיעזר במשפט הבא: אם סדרת פונקציות $P_r(x)$ מקיימת את התכונות הבאות:

i. $P_r(x)\geq 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to 1-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$ מתקיים.

אזי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt\xrightarrow{r\to 1-}f(x)$ במידה שווה.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה $f(t)=e^{i\alpha t}$ בתחום $-\pi \le t \le \pi$ כאשר α הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\alpha}{\left[\alpha^2-n^2\right]}=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}-\frac{1}{\alpha}$.

ג. הראו שמתקיים $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{\left[\alpha-n\right]^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$.

ד. הראו שמתקיים $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left((2n+1)^2-\alpha^2\right)}=\frac{\pi}{4\alpha^2}\left(\frac{1}{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}-1\right)$.

2) נגדיר $f(x)=|x|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב-$f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של f.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום $(-\infty,\infty)$?

$$\sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{1}{7}\sin(7x)+\ldots$$

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$.

3) תהי $f\in L^2_{PC}([-\pi,\pi])$.

נסמן ב-c_n את מקדמי פורייה (המרוכבים) של f.

נסמן $d_n=\mathrm{Re}\{c_n\}$ ובנוסף נתון כי:

- f ממשית.
- f מתאפסת על הקטע $[-\pi,0]$.
- מתקיים השיוויון $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}d_n e^{inx}=x^2e^{|x|}\cos(x)$.

מצאו את f.

4) תהי f פונקציה זוגית בעלת מחזור 2π המקיימת $f(x)=\cos(2x)$ בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ ו-$f(x)=-1$ בתחום $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.

מצאו את טור פורייה הממשי של f וחשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$.

האם טור פורייה של f מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

5) נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית 2π.

נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_n e^{inx}$ ויהי $h>0$ פרמטר כלשהו.

מצאו את מקדמי פורייה של $h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(t+x)dt$ כתלות ב-f_n.

תשובות סופיות:

1) א. $e^{i\alpha t}\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\sin(\pi\alpha)}{[\alpha-n]\pi}\cdot e^{in\cdot t}$ ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

2) א. $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos([2k+1]x)$

ב. $\begin{cases}\frac{\pi}{4} & \pi k<x<\pi(k+1)\\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1)<x<\pi k\\ 0 & x=\pi k\end{cases}$, כאשר k מספר שלם. ג. $\frac{\pi^2}{8}$

3) $f(x)=\begin{cases}2x^2e^{|x|}\cos(x) & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x\le 0\end{cases}$

4) התכנסות במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$- אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ ו-$f'\in E[-\pi,\pi]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל-f בקטע $[-\pi,\pi]$.

5) f_0

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 5 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

1. קטע אינסופי ..... (ללא ספר)
2. קטע חצי אינסופי ..... (ללא ספר)
3. הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית ..... (ללא ספר)
4. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)
5. משולש הקביעה ..... (ללא ספר)
6. עקרון דוהמל ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 6 - משוואת החום

תוכן העניינים

1. נוסחת פוואסון בקטע אינסופי ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים בקטע סופי ..... (ללא ספר)
3. עקרון דוהמל ..... (ללא ספר)
4. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)
5. אסימפטוטיקה בתחום אינסופי ..... (ללא ספר)
6. אסימפטוטיקה בתחום סופי ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 7 - אינטגרל אנרגיה

תוכן העניינים

1. אינטגרל אנרגיה ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 8 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

1. חזרה על אינטגרל קווי ..... (ללא ספר)
2. משוואת לפלס בעיגול ..... (ללא ספר)
3. משוואת לפלס בטבעת ..... (ללא ספר)
4. משוואת לפלס בגזרה מעגלית ..... (ללא ספר)
5. משוואת לפלס במלבן ..... (ללא ספר)
6. עקרון הממוצע ..... (ללא ספר)
7. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)