משוואות דיפרנציאליות חלקיות

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

שיטת הקווים האופייניים

שאלות

1) פתרו את המשוואה עבור $\alpha \neq \frac{1}{2}$ קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = 0 \qquad \gamma = \{y = \alpha x\} \qquad u|_\gamma = x^2 + y^2$$

2) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x - y$ $\quad \gamma = \{y = x^2, x \geq 0\}$ $\quad 3u_x - 2u_y = 0$.

3) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x + \sin(xy)$ $\quad \gamma = \{y = x^2, x \leq 0\}$ $\quad u_x + 2u_y = 0$.

4) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &u_x - u_y = -u && y \geq 0 \\ &u(x,0) = x^2 - x^4 \end{aligned}.$$

5) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &2u_x - 3u_y + 2u = 0 \\ &u(x,-x) = (x+1)e^{-x} \end{aligned}.$$

6) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} && y \geq e^{-x} \\ &u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x} \end{aligned}.$$

7) נתון כי $u(x,y)$ הוא פתרון של הבעיה

$$\begin{aligned} &y^2 u_x + u_y = -u && 0 < x < \infty \quad , \quad y > 0 \\ &u(0,y) = 0 && y > 0 \\ &u(x,0) = 1 && x > 0 \end{aligned}$$

8) פתרו את הבעיה כאשר a קבוע ממשי.

$$\begin{aligned} &2u_x + u_y = -u && 0 < y < x \\ &u(x,0) = a \cdot \cos(x) + \sin(x) && x > 0 \\ &u(y,y) = 0 && y > 0 \end{aligned}$$

שיטת לגראנג

שאלות

1) מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד״ח $xu_x + yuu_y = u$.

2) מצאו פתרון כללי למשוואה $x^2u_x + y^2u_y = u^2$.

3) מצאו פתרון כללי למשוואה $xu \cdot u_x + yu \cdot u_y = -xy$, כאשר $x, y, u > 0$.

4) מצאו פתרון כללי למשוואה $\left(y^2 + u^2\right)u_x - xyu_y = xu$, כאשר $x, y, u > 0$.
רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, אז $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

5) מצאו פתרון למשוואה $\begin{cases} xu_x + yu_y = 2xy & x, y > 0 \\ u(x,1) = x & x > 0 \end{cases}$.

6) פתרו את המשוואה $\begin{matrix} e^y u_x - e^x u_y = -e^{x+y} u & u > 0 \\ u(x,0) = 1 & \end{matrix}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{e^x\sqrt{y+1}}u_x + yu_y = y^2u$,
בתחום $u, y > 0$.
ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

8) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\cos(y)u_x + \sin(y)u_y = e^y\sin(y)u$,
בתחום שבו $0 < y < \pi$ ו-$u > 0$.

9) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{y}u_x + \frac{1}{x}u_y = 2$.

10) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+y)u_x + (y-x)u_y = x^2 - y^2$,
בתחום $x, y > 0$.

11) נתון כי $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}F\left(\frac{y+1}{x^2+1}\right)$ הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה $a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$.

א. מצאו את הפונקציות a,b,c.

ב. מצאו פתרון פרטי המקיים $u(0,y)=y^2$.

תשובות סופיות

1) $F\left(\frac{x}{u},\ln(y)-u\right)=0$

2) $u(x,y)=\frac{1}{F\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}}$

3) $u=\sqrt{F\left(\ln\frac{x}{y}\right)-xy}$

4) $F\left(\frac{y}{u},x^2+y^2+u^2\right)=0$

5) $u(x,y)=x\cdot y$

6) $u(x,y)=e^{e^y-1}$

7) א. $u(x,y)=e^{\frac{1}{2}y^2-F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x}\right)}$ ב. שאלת הוכחה.

8) $u(x,y)=e^{e^y-F\left(e^{-x}\sin y\right)}$

9) $u(x,y)=xy-F\left(\frac{x}{y}\right)$

10) $u(x,y)=\frac{y^2+2xy-x^2-F\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\operatorname{ar}\tan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4}$

11) א. $\underbrace{(x^2+1)}_{a}u_x+\underbrace{2x(y+1)}_{b}u_y=\underbrace{2xyu}_{c}$ ב. $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}\cdot\frac{\left(\frac{y+1}{x^2+1}-1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1}-1}}\cdot\frac{y+1}{x^2+1}$

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 2 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 3 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית
$\left(p(x)y'(x)\right)'+\left(\lambda r(x)-q(x)\right)y(x)=0$.

א. $y''-2xy'+\lambda y=0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda)y=0$ (משוואת בסל)

2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y''+e^{2x}y'+\lambda y=0 \quad , \ 0<x<1 \\ y(0)+4y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y''+4y'+xy+\lambda e^{x}y=0 \quad , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות **7-4**:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

4)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<\pi \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(\pi)-y'(\pi)=0 \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

8) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. פתרו את הבעיה.

9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \quad , \ 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}$.

ב. נציב $\ell=1$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \quad , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$.

1. פתחו את הפונקציה $f(x)=1 \, , \, 0\le x\le 1$
לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.
התחל את הטור מ-$n=1$.

2. מה סכום הטור ב-$x=0$?
האם הוא שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$?

ג. נציב $\ell=2$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \quad , \ 0<x<2 \\ y(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases}$.

פתחו את הפונקציה $f(x)=x \, , \, 0\le x\le 2$
לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \quad , \ 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$.

ב. פתחו את הפונקציה $f(x)=e^x \, , 0\le x\le \pi$
לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.
התחילו את הטור מ-$n=1$.

11) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<e \\ y(1)=0 \\ y'(e)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.
ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.
ד. פתחו את $f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x\le\sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e}\le x\le e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.
הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.
ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x=2$, $x=1.5$, $x=\sqrt{e}$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi n)=(-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi n)=0$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

תשובות סופיות

1) א. $\left(e^{-x^2}y'\right)'+\left(\lambda e^{-x^2}-0\right)y=0$ ב. $(xy')'+\left(\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)-(-x)\right)y=0$

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$ $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x)$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

5) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$ $\phi_n(x)=n\cos nx+\sin nx$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=n^2$, ; בנוסף, $\lambda=-1$ הוא ע"ע של הבעיה,

המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=e^x$.

6) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$ $\varphi_n(x)=\sin(\omega_n x)$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2$.

7) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$ $y_n(x)=\sin(\omega_n x)-\omega_n\cos(\omega_n x)$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2$.

בנוסף, $\lambda_0=0$ הוא ע"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=x-1$.

8) א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$ $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

9) א. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,...$ $\varphi_n(x)\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2$.

ב. סכום הטור ב- $x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$.

ג. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$, כאשר $(0<x<2)$.

10) א. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,...$ $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$.

ב. $e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1}-1}{1^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$, כאשר $0<x<\pi$.

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,\ldots$ $\quad \varphi_n(x)=\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\ln x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,\ldots$ $\quad \lambda_n=\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$.

ג. שאלת הוכחה.

ד. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-2\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\ln x\right)$.

ה. סכום הטור ב- $x=\sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x=1.5$ הוא 1 ; וב- $x=2$ הוא 0.

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 4 - מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים

תוכן העניינים

מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים:

שאלות:

1) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\int_a^b |f(x)|dx$ מהווה נורמה במרחב זה.

2) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב זה.

3) יהי $V=R_{\le 2}[x]$ המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה / שווה מ-2 מעל הממשיים.

לכל שני פולינומים $p(x),q(x)$ ב- V נגדיר:

$\langle p(x),q(x)\rangle = p(-1)q(-1)+p(0)q(0)+p(1)q(1)$.

הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ הינה מכפלה פנימית.

4) נגדיר את המרחב $V=C^1[-1,1]$ (מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$).

נגדיר: $\langle f(x),g(x)\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx+\int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}dx$.

הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ הינה מכפלה פנימית.

5) הוכיחו כי בכל מרחב מכפלה פנימית E מתקיים לכל $f,g\in E$:

א. $\langle u,f+g\rangle=\langle u,f\rangle+\langle u,g\rangle \quad \forall u\in E$.

ב. $\mathrm{Re}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2\right)$.

ג. $\mathrm{Im}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+ig\|^2-\|f-ig\|^2\right)$.

ד. $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left\{\|f\|^2+\|g\|^2\right\}$ (שוויון המקבילית).

6) יהי V מרחב מכפלה פנימית.

נסמן $w=u+v$ וקטורים במרחב.

הוכיחו כי אם $\langle u,v\rangle=0$ אזי $\|w\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

7) נגדיר את המרחב V להיות מרחב הפונקציות $f(x)$ הממשיות הגזירות ברציפות פעמיים בקטע $[a,b]$ (כלומר $f''(x)$ רציפה ב- $[a,b]$).
בדקו האם $\langle f,g\rangle=\int_a^b f''(x)g''(x)dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

8) נגדיר את המרחב V להיות מרחב של פונקציות $f(x)$ ממשיות וגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$ (כלומר הנגזרת $f'(x)$ רציפה בקטע $[-1,1]$) כך ש- $f(-1)=0$.
נגדיר $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)dx$.
הוכיחו כי $\langle f,g\rangle$ מהווה מכפלה פנימית במרחב V.

9) יהי V מרחב הפונקציות הרציפות המרוכבות בקטע $[a,b]$.
הוכיחו כי $\|f\|=\int_a^b |f(x)|dx+\max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב V.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) $f(x)=1$
8) הוכחה.
9) הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) יהי V מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$.

נגדיר על V מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\overline{g'(x)}dx$.

אין צורך להוכיח כי זאת מכפלה פנימית.

א. הוכיחו כי המערכת $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורתוגונלית במרחב V.

מצאו נורמה של e^{inx} המושרית מהמכפלה הפנימית הנ"ל.

ב. הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f\in V$ המקיימת:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-in\cdot f'(x)\right)e^{-inx}dx\right|^2}{1+n^2}=1$$

2) נגדיר $a_n=\min_{\alpha\in\mathbb{C}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sqrt{|\cos(x)|}-\alpha\cos(nx)\right|^2dx\right]$. חשבו $\lim_{n\to\infty}a_n$.

3) נגדיר $R_n=\min_{a,b\in\mathbb{C}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sqrt{|x|^3}-a\sin(nx)-b\sin([n+1]x)\right|^2dx\right]$. חשבו $\lim_{n\to\infty}R_n$.

4) נגדיר $g(a,b)=\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\min\{1,|x|\}-a-b\sin(nx)\right|^2dx\right]$.

א. מצאו את הערכים a,b עבורם $g(a,b)$ מינימלית.

ב. חשבו את $g(a,b)$ עבור a,b אלו.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

2) $\frac{4}{\pi}$

3) $\frac{\pi^3}{2}$

4) א. $b=0$, $a=1-\frac{1}{2\pi}$ ב. $g(a,b)=2-\frac{4}{3\pi}-2\left[1-\frac{1}{2\pi}\right]^2$

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 5 - חזרה על טורי פורייה

תוכן העניינים

טור פורייה ממשי:

שאלות:

1) חשבן טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\sin(|x|)$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1 \\ 0 & else\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\sum_{n=1}^{20}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

2) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$

3) $\sin(|x|)\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}\cos(2kx)$

4) $f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

1) חשבון טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 2x & 0\le x<\pi\end{cases}$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ \sin(x) & 0\le x<\pi\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$

2) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}-\frac{1}{2\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{in}+\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}e^{inx}$

3) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-3(-1)^n\frac{\pi}{in}\right]e^{inx}$

4) $f(x)\sim-\frac{1}{2}-\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{3}{\pi i(2k-1)}e^{i(2k-1)x}$

5) $f(x)\sim\frac{1}{4i}e^{ix}-\frac{1}{4i}e^{-ix}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}e^{i[2k]x}$

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0<x<\pi$ מתקיים $x=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=1$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ והוכיחו כי:

א. לכל $0<x<\pi$ מתקיים $1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}=-\frac{\pi}{4}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[0,2\pi]$.

2) תהי הפונקציה $f(x)=\min\{1,|x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2,2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0,2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2}$.

4) פתחו את $f(x)=|x|$ לטור פורייה בקטע $[-1,1]$.

5) פתחו את $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x<2 \end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0,2]$.

6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x)=f(x+2)$ ובנוסף $-1\le x<1$ $f(x)=2-|x|$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$.

ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1,1]$?

7) מצאו טור קוסינוסים $f(x)=x$ בקטע $[0,3]$.

8) פתחו את $f(x)=\cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0,\pi]$.

תשובות סופיות:

1) $0 \le x \le 2\pi$ $\qquad x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx$

2) א. $b_n = 0 \quad , \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & else \end{cases}$

ב. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96}$

3) א. $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1|4n^2\pi^2} e^{in\pi x}$ ב. ראו סרטון. ג. $\frac{3-e}{4(e-1)}$

4) $|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(\pi[2k-1]x)$

5) $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi[2k-1]x}{2}\right)$

6) א. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos([2k-1]\pi x)$ ב. $\frac{\pi^4}{96}$ ג. $\frac{\pi^2}{8}$

ד. אם f רציפה בקטע $[a,b]$, $f(a) = f(b)$ ו-f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[a,b]$.

7) $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3} x\right)$

8) $\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2} \sin([2k-1]x)$

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 6 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 7 - משוואת החום

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 8 - אינטגרל אנרגיה

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 9 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 10 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

1) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:

$$u_{xx}-2\sin(x)u_{xy}-\cos^2(x)u_{yy}-\cos(x)u_y=0$$

2) נתונה משוואת הגלים הבאה:

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \qquad t>0$$
$$u(x,0)=1$$
$$u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}1-x^2 & -1<x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}.$$

חשבו את $u(x,1)$.

3) פתרו את הבעיה:

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad 0<x<\infty \qquad t>1$$
$$u(x,0)=f(x)=0 \qquad u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}.$$

4) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\Delta u=r \qquad 1<r<2$$
$$u(1,\theta)=1+\sin\theta$$
$$u(2,\theta)=1+2\cos\theta.$$

5) נתונה הבעיה הבאה, בתחום $t>0$ $\quad 0<x<1$:

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+4u_x+4u\\ u(x,0)=x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e}\\ u(0,t)=(1,t)=0\end{cases}$$

הוכיחו: $u\left(\frac{1}{2},1\right)<\frac{1}{4\sqrt{e}}$.

רמז: הגדירו את הפונקציה $h(x,t)=u(x,t)e^{\delta x}$, עבור קבוע δ מתאים.

6) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases}\Delta u=x^2+y^2 & \text{in} \quad x^2+y^2<1\\ u|_{x^2+y^2=1}=1+x\end{cases}.$$

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

7) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1,\quad t>0 \\ u_x(0,t)=0 & u_x(1,t)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=x^2(1-x) \end{cases}$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^1 u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)\,dx$.

8) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+e^{-t} & 0<x<\infty \\ u(0,t)=e^{-t}-1 \\ u(x,0)=1 & u_t(x,0)=2\sin(x)-1 \end{cases}$$

9) נתונה המשוואה $2u_{xx}+2yu_{yy}+u_y=0$, בתחום $y>0$.

א. הראו כי המשוואה אליפטית.

ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

10) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{matrix} \Delta u=0 & x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1}=\cosh(x)\sinh(y) \end{matrix}.$$

חשבו את $u(0,0)$.

11) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{matrix} \Delta u=0 & 1<x^2+y^2<4 \\ u|_{x^2+y^2=1}=\ln(2+x) \\ u|_{x^2+y^2=4}=\ln\left(e^{2019}-2+x\right) \end{matrix}.$$

הוכיחו כי לכל $1<x^2+y^2<4$ מתקיים $0<u(x,y)<2019$.

12) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x,y>0$.

$$x^2ulxx+2xy\cdot u_{xy}+y^2u_{yy}=4x^2$$

13) השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}+\beta\cdot u_t+F(x,t) & 0<x<L,\ t>0,\ \beta>0 \\ u_x(0,t)=A(t) & u_x(L,t)=B(t) \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

רמז: הגדירו $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)dx$.

14) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & 0<x<L, \quad t>0 \\ u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 \end{cases}$$

15) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{aligned} &u_t=u_{xx}+\cos(\pi x) \qquad 0<x<1\ ,\ t>0 \\ &u_x(0,t)=u_x(1,t)=1. \\ &u(x,0)=x \end{aligned}$$

רמז: התבוננו בפונקציה $v(x,t)=u(x,t)-x$.

16) נתון כי $u(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{aligned} &\Delta u=1 \qquad 0\le r<1 \\ &u(1,\theta)=c+\sin(2020\cdot\theta) \end{aligned}$$

עבור איזה קבוע c מתקיים $\lim_{r\to 0+}\frac{u(r,\theta)}{r^2}=\frac{1}{4}$?

17) נתונות הבעיות הבאות:

$$\begin{cases} \Delta u=r^2 & 0\le r<1 \\ u(1,\theta)=\sin^{2019}(\theta) & 0\le\theta<2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta v=r^2 & 0\le r<1 \\ v(1,\theta)=\cos^{2020}(\theta) \end{cases}$$

הוכיחו כי $u(0,0)>v(0,0)$.

18) נתון כי $u_n(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה:

$$\begin{cases} \Delta u_n=\left(\frac{r}{2}\right)^n & 0\le r<1 \\ u_n(1,\theta)=\sin(\theta) \end{cases}.$$

מצאו את $u_n(r,\theta)$ וחשבו $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(r,\theta)$.

19) הוכיחו את יחידות הפתרון של בעיית החום הבאה, עבור $b>0$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t) & 0<x<1 \\ u(x,0)=h(x) & \\ v_x(0,t) - b\cdot v(0,t) = f(t) & t\ge 0 \\ u_x(1,t)+b\cdot u(1,t)=g(t) & t\ge 0 \end{cases}$$

רמז: היעזרו באינטגרל האנרגיה $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,t)\,dx$.

20) פתרו את הבעיה הבאה:
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin(\pi x) & 0<x<2 \ , \ t>0 \\ u(x,0)=\sin(\pi x) & \\ u(0,t)=0 \qquad u(2,t)=0 & \end{cases}.$$

21) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3\sin(2x) + \frac{\pi - x}{\pi} & 0<x<\pi \ , \ t>0 \\ u(x,0)=\frac{x}{\pi}+\sin(x) & \\ u(0,t)=t \qquad u(\pi,t)=1 & \end{cases}$$

רמז: הגדירו $u(x,t)=v(x,t)+t\frac{\pi-x}{\pi}+1\cdot\frac{x}{\pi}$.

22) פתרו את הבעיה הבאה:
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + \sin(2\pi x) & 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(x,0)=\sin(\pi x) & \\ u(0,t)=u(1,t)=t & \end{cases}.$$

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $v(x,t)=u(x,t)-t$.

23) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+\cos(x) & -\infty<x<\infty,\ \ t>0 \\ u(x,0)=\cos(x)+\begin{cases}1 & -1<x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases} \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}.$$

חשבון $\int_{-2}^{2}\left|u(x,3)\right|^2 dx$.

24) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} \Delta u=0 & x^2+y^2<1 \\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=1}=x^2+xy+y^2 \end{cases}.$$

האם ייתכן כי $\iint\limits_{x^2+y^2<1} u(x,y)\,dxdy=\frac{7\pi}{4}$?

25) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t=u_{xx} & 0<x<3\ ,\ t>0 \\ u(0,t)=\frac{3}{\sqrt{1+t^2}} & u(3,t)=3 \\ u(x,0)=3+3x-x^2 \end{cases}.$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{3}{2},1\right)<2e$.

26) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t=u_{xx} & 0<x<\pi\ ,\ t>0 \\ u(0,t)=\arctan(t) & u(\pi,t)=0 \\ u(x,0)=x(x-\pi) \end{cases}.$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{\pi}{2},1\right)>-\frac{\pi^2}{4}$.

27) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<\infty\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)=\begin{cases}1-x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases} & u_t(x,0)=g(x)=0 \\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$$

חשבון $\int_{0}^{2}\left|u(x,1)-\frac{1}{2}\right|^2 dx$.

28) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} \triangle u = r & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = \sin^{2019}(\theta) \end{cases}.$$

חשבו $u(0,0)$.