משוואות דיפרנציאליות חלקיות



תוכן העניינים

1. משוואות מסדר ראשון 1
2. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)
3. בעיות שטורם ליוביל 4
4. העשרה - מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים 9
5. מבוא - טורי פורייה 15
6. משוואת הגלים ..... (ללא ספר)
7. משוואת החום ..... (ללא ספר)
8. אינטגרל אנרגיה ..... (ללא ספר)
9. משוואת לפלס ..... (ללא ספר)
10. שאלות מסכמות ברמת בחינה 20

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. שיטת הקווים האופייניים 1
2. שיטת לגראנג 2

שיטת הקווים האופייניים

שאלות

1) פתרו את המשוואה עבור $\alpha \neq \frac{1}{2}$ קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = 0 \qquad \gamma = \{y = \alpha x\} \qquad u|_\gamma = x^2 + y^2$$

2) פתרו את המשוואה $3u_x - 2u_y = 0 \quad \gamma = \{y = x^2, x \geq 0\} \quad u|_\gamma = x - y$.

3) פתרו את המשוואה $u_x + 2u_y = 0 \quad \gamma = \{y = x^2, x \leq 0\} \quad u|_\gamma = x + \sin(xy)$.

4) פתרו את המשוואה

$$u_x - u_y = -u \qquad y \geq 0$$
$$u(x,0) = x^2 - x^4$$

5) פתרו את המשוואה

$$2u_x - 3u_y + 2u = 0$$
$$u(x,-x) = (x+1)e^{-x}$$

6) פתרו את המשוואה

$$u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \qquad y \geq e^{-x}$$
$$u(x,e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$$

7) נתון כי $u(x,y)$ הוא פתרון של הבעיה

$$y^2 u_x + u_y = -u \qquad 0 < x < \infty \quad , \quad y > 0$$
$$u(0,y) = 0 \qquad y > 0$$
$$u(x,0) = 1 \qquad x > 0$$

8) פתרו את הבעיה כאשר a קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = -u \qquad 0 < y < x$$
$$u(x,0) = a \cdot \cos(x) + \sin(x) \qquad x > 0$$
$$u(y,y) = 0 \qquad y > 0$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

שיטת לגראנג

שאלות

1) מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד"ח $xu_x+yuu_y=u$.

2) מצאו פתרון כללי למשוואה $x^2u_x+y^2u_y=u^2$.

3) מצאו פתרון כללי למשוואה $xu\cdot u_x+yu\cdot u_y=-xy$, כאשר $x,y,u>0$.

4) מצאו פתרון כללי למשוואה $\left(y^2+u^2\right)u_x-xyu_y=xu$, כאשר $x,y,u>0$.

רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, אז $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

5) מצאו פתרון למשוואה $\begin{cases} xu_x+yu_y=2xy & x,y>0 \\ u(x,1)=x & x>0 \end{cases}$.

6) פתרו את המשוואה $\begin{cases} e^yu_x-e^xu_y=-e^{x+y}u & u>0 \\ u(x,0)=1 \end{cases}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{e^x\sqrt{y}+1}u_x+yu_y=y^2u$,

בתחום $u,y>0$.

ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

8) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\cos(y)u_x+\sin(y)u_y=e^y\sin(y)u$,

בתחום שבו $0<y<\pi$ ו- $u>0$.

9) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{y}u_x+\frac{1}{x}u_y=2$.

10) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+y)u_x+(y-x)u_y=x^2-y^2$,

בתחום $x,y>0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

11) נתון כי $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}F\left(\frac{y+1}{x^2+1}\right)$ הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה $a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$.

א. מצאו את הפונקציות a,b,c.

ב. מצאו פתרון פרטי המקיים $u(0,y)=y^2$.

תשובות סופיות

1) $F\left(\frac{x}{u},\ln(y)-u\right)=0$

2) $u(x,y)=\frac{1}{F\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}}$

3) $u=\sqrt{F\left(\ln\frac{x}{y}\right)-xy}$

4) $F\left(\frac{y}{u},x^2+y^2+u^2\right)=0$

5) $u(x,y)=x\cdot y$

6) $u(x,y)=e^{e^y-1}$

7) א. $u(x,y)=e^{\frac{1}{2}y^2-F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x}\right)}$ ב. שאלת הוכחה.

8) $u(x,y)=e^{e^y-F\left(e^{-x}\sin y\right)}$

9) $u(x,y)=xy-F\left(\frac{x}{y}\right)$

10) $u(x,y)=\frac{y^2+2xy-x^2-F\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4}$

11) א. $\underbrace{\left(x^2+1\right)}_{a}u_x+\underbrace{2x\left(y+1\right)}_{b}u_y=\underbrace{2xyu}_{c}$ ב. $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}\cdot\frac{\left(\frac{y+1}{x^2+1}-1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1}-1}}\cdot\frac{y+1}{x^2+1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 2 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

1. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 3 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל 4
2. טורי קוסינוסים וסינוסים ..... (ללא ספר)

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית
$\left(p(x)y'(x)\right)'+\left(\lambda r(x)-q(x)\right)y(x)=0$.

א. $y''-2xy'+\lambda y=0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda)y=0$ (משוואת בסל)

2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y''+e^{2x}y'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)+4y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y''+4y'+xy+\lambda e^x y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות **4-7**:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

4)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<\pi \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(\pi)-y'(\pi)=0 \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0, & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}.$$

א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. פתרו את הבעיה.

9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}.$

ב. נציב $\ell=1$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}.$

1. פתחו את הפונקציה $f(x)=1\ ,\ 0\le x\le 1$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.
התחל את הטור מ-$n=1$.
2. מה סכום הטור ב-$x=0$?
האם הוא שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$?

ג. נציב $\ell=2$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<2 \\ y(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases}.$

פתחו את הפונקציה $f(x)=x\ ,\ 0\le x\le 2$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}.$

ב. פתחו את הפונקציה $f(x)=e^x, 0\le x\le \pi$ לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.
התחילו את הטור מ-$n=1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<e \\ y(1)=0 \\ y'(e)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.

ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את $f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x\le \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e}\le x\le e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.

הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.

ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x=2$, $x=1.5$, $x=\sqrt{e}$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi n)=(-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi n)=0$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\left(e^{-x^2}y'\right)'+\left(\lambda e^{-x^2}-0\right)y=0$ ב. $\left(xy'\right)'+\left(\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)-\left(-x\right)\right)y=0$

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\quad n=1,2,3,\ldots$.

5) פונקציות עצמיות: $\phi_n(x)=n\cos nx+\sin nx\qquad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=n^2,\quad n=1,2,3,\ldots$; בנוסף, $\lambda=-1$ הוא ע"ע של הבעיה,

המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=e^x$.

6) פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\sin(\omega_n x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

7) פונקציות עצמיות: $y_n(x)=\sin(\omega_n x)-\omega_n\cos(\omega_n x)\qquad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

בנוסף, $\lambda_0=0$ הוא ע"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=x-1$.

8) א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x,\qquad n=1,2,3,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

9) א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right)\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ב. סכום הטור ב-$x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$.

ג. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$, כאשר $(0<x<2)$.

10) א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ב. $e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1}-1}{1^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$, כאשר $0<x<\pi$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,\ldots$ $\varphi_n(x)=\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\ln x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,\ldots$ $\lambda_n=\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$.

ג. שאלת הוכחה.

ד. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-2\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\ln x\right)$

ה. סכום הטור ב- $x=\sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x=1.5$ הוא 1; וב- $x=2$ הוא 0.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 4 - העשרה - מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים

תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים 9
2. מערכות אורתונורמליות 11

מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים:

שאלות:

1) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\int_a^b |f(x)|dx$ מהווה נורמה במרחב זה.

2) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב זה.

3) יהי $V=R_{\le 2}[x]$ המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה / שווה מ-2 מעל הממשיים.

לכל שני פולינומים $p(x),q(x)$ ב- V נגדיר:

$\langle p(x),q(x)\rangle = p(-1)q(-1)+p(0)q(0)+p(1)q(1)$.

הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ הינה מכפלה פנימית.

4) נגדיר את המרחב $V=C^1[-1,1]$ (מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$).

נגדיר: $\langle f(x),g(x)\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx+\int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}dx$.

הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ הינה מכפלה פנימית.

5) הוכיחו כי בכל מרחב מכפלה פנימית E מתקיים לכל $f,g\in E$:

א. $\langle u,f+g\rangle=\langle u,f\rangle+\langle u,g\rangle$ $\quad\forall u\in E$.

ב. $\mathrm{Re}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2\right)$.

ג. $\mathrm{Im}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+ig\|^2-\|f-ig\|^2\right)$.

ד. $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left\{\|f\|^2+\|g\|^2\right\}$ (שוויון המקבילית).

6) יהי V מרחב מכפלה פנימית.

נסמן $w=u+v$ וקטורים במרחב.

הוכיחו כי אם $\langle u,v\rangle=0$ אזי $\|w\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

7) נגדיר את המרחב V להיות מרחב הפונקציות $f(x)$ הממשיות הגזירות ברציפות פעמיים בקטע $[a,b]$ (כלומר $f''(x)$ רציפה ב-$[a,b]$).

בדקו האם $\langle f,g\rangle=\int_a^b f''(x)g''(x)dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

8) נגדיר את המרחב V להיות מרחב של פונקציות $f(x)$ ממשיות וגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$ (כלומר הנגזרת $f'(x)$ רציפה בקטע $[-1,1]$) כך ש- $f(-1)=0$.

נגדיר $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)dx$.

הוכיחו כי $\langle f,g\rangle$ מהווה מכפלה פנימית במרחב V.

9) יהי V מרחב הפונקציות הרציפות המרוכבות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\int_a^b|f(x)|dx+\max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב V.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) $f(x)=1$
8) הוכחה.
9) הוכחה.

מערכות אורתונורמליות:

שאלות:

1) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x)=\cos(nx)$ במרחב $L^2[-\pi,\pi]$

עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

2) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x)=\sin(nx)$ במרחב $L^2[0,\pi]$

עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית .

3) יהי מרחב מכפלה פנימית V ותהי $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ מערכת של פולינומים כך ש-$\varphi_n(x)$ הינו פולינום ממעלה n.

נניח כי לכל n,m טבעיים כך ש- $m<n$ מתקיים $\langle\varphi_n(x),x^m\rangle=0$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

4) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $\left[e^{-\pi},e^{\pi}\right]$ עם המכפלה

הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}} f(x)\overline{g(x)}\frac{1}{x}dx$ נגדיר $\varphi_n(x)=\sin\left(n\ln(x)\right)$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

5) נניח כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2[a,b]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle_1=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$. יהיו $c>0$ ו- d ממשי כלשהוא.

הוכיחו כי המערכת $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $\psi_n(x)=\sqrt{c}\cdot\varphi_n(c\cdot x+d)$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2\left[\frac{a-d}{c},\frac{b-d}{c}\right]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle_2=\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(x)\overline{g(x)}dx$.

6) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ מערכת אורתונורמלית סופית.

הוכיחו כי לכל $v\in V$ מתקיים $\left\|\sum_{n=1}^{N}\langle v,e_n\rangle e_n\right\|^2=\sum_{n=1}^{N}\left|\langle v,e_n\rangle\right|^2$.

מערכת פולינומי צ'בישב:

7) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1,1)$

ונגדיר ב- K מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

הוכיחו כי אוסף הפונקציות $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $T_n(x)=\cos\left[n\cdot\arccos(x)\right]$ (הנקראת גם פולינומי צ'בישב) הינה מערכת אורתוגונלית ב- K ומצאו קבועים α_n כך שהמערכת $\{\alpha_n T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית.

מערכת פולינומי הרמיט:

8) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות למקוטעין ומקיימות את התנאי $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2\cdot e^{-x^2}dx<\infty$.

נגדיר על K מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\cdot e^{-x^2}dx$.

הוכיחו כי פולינומי הרמיט, המוגדרים על ידי הנוסחה $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]$ (נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתוגונלית במרחב K ומצאו להם קבועי נרמול.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח כי לכל n,k טבעיים כך ש- $k<n$ מתקיים $\langle H_n, x^k\rangle = 0$. ניתן להיעזר בעובדה כי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

מערכת פולינומי לג'נדר:

9) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1,1)$ ונגדיר ב- K מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי פולינומי לג'נדר, הנתונים על ידי נוסחת רודריגז $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$ מהווים מערכת אורתוגונלית ב- K וכי $\langle P_n, P_n\rangle = \frac{2}{2n+1}$ לכל n טבעי.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n,k טבעיים כך ש- $k<n$ מתקיים $\langle P_n, x^k\rangle = 0$.

מערכת פולינומי לגר:

10) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות למקוטעין ומקיימות את התנאי $\int_0^{\infty}|f(x)|^2\cdot e^{-x}dx<\infty$.

נגדיר על K מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle = \int_0^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x}dx$.

הוכיחו כי פולינומי לגר, המוגדרים על ידי הנוסחה $L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right]$ (נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתונורמלית במרחב K.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n,k טבעיים כך ש- $k<n$ מתקיים $\langle L_n, x^k\rangle = 0$.

ניתן להיעזר בנוסחה $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx = n!$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) מערכת פולינומי צ'בישב: הוכחה.
8) מערכת פולינומי הרמיט: הוכחה.
9) מערכת פולינומי לג'נדר: הוכחה.
10) מערכת פולינומי לגר: הוכחה.

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 5 - מבוא - טורי פורייה

תוכן העניינים

1. הקדמה ..... (ללא ספר)
2. טור פורייה ממשי 15
3. טור פורייה מרוכב 16
4. המשכה זוגית ואי זוגית 17
5. טור פורייה בקטע כללי 18

טור פורייה ממשי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\sin(|x|)$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1 \\ 0 & else\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\sum_{n=1}^{20}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

2) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$

3) $\sin(|x|)\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}\cos(2kx)$

4) $f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 2x & 0\le x<\pi\end{cases}$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ \sin(x) & 0\le x<\pi\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$

2) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}-\frac{1}{2\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{in}+\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}e^{inx}$

3) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-3(-1)^n\frac{\pi}{in}\right]e^{inx}$

4) $f(x)\sim-\frac{1}{2}-\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{3}{\pi i(2k-1)}e^{i(2k-1)x}$

5) $f(x)\sim\frac{1}{4i}e^{ix}-\frac{1}{4i}e^{-ix}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}e^{i[2k]x}$

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0<x<\pi$

מתקיים $x=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=1$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ והוכיחו כי:

א. לכל $0<x<\pi$ מתקיים $1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}=-\frac{\pi}{4}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[0,2\pi]$.

2) תהי הפונקציה $f(x)=\min\{1,|x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2,2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0,2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2}$.

4) פתחו את $f(x)=|x|$ לטור פורייה בקטע $[-1,1]$.

5) פתחו את $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ 2-x & 1<x<2\end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0,2]$.

6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x)=f(x+2)$ ובנוסף $-1\le x<1$ $f(x)=2-|x|$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$.

ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1,1]$?

7) מצאו טור קוסינוסים $f(x)=x$ בקטע $[0,3]$.

8) פתחו את $f(x)=\cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0,\pi]$.

תשובות סופיות:

1) $0 \le x \le 2\pi$ $\quad x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx$

2) א. $b_n = 0 \quad , \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & else \end{cases}$

ב. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96}$

3) א. $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1|4n^2\pi^2} e^{in\pi x}$ ב. ראו סרטון. ג. $\frac{3-e}{4(e-1)}$

4) $|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(\pi [2k-1] x)$

5) $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi [2k-1] x}{2}\right)$

6) א. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos([2k-1]\pi x)$ ב. $\frac{\pi^4}{96}$ ג. $\frac{\pi^2}{8}$

ד. אם f רציפה בקטע $[a,b]$, $f(a) = f(b)$ ו-f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל-f בקטע $[a,b]$.

7) $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi (2k-1)}{3} x\right)$

8) $\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2} \sin([2k-1]x)$

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 6 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

1. קטע אינסופי ..... (ללא ספר)
2. קטע חצי אינסופי ..... (ללא ספר)
3. הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית ..... (ללא ספר)
4. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)
5. משולש הקביעה ..... (ללא ספר)
6. עקרון דוהמל ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 7 - משוואת החום

תוכן העניינים

1. נוסחת פוואסון בקטע אינסופי ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים בקטע סופי ..... (ללא ספר)
3. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)
4. עקרון דוהמל ..... (ללא ספר)
5. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 8 - אינטגרל אנרגיה

תוכן העניינים

1. אינטגרל אנרגיה ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 9 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

1. חזרה על אינטגרל קווי ..... (ללא ספר)
2. משוואת לפלס בעיגול ..... (ללא ספר)
3. משוואת לפלס בטבעת ..... (ללא ספר)
4. משוואת לפלס בגזרה מעגלית ..... (ללא ספר)
5. משוואת לפלס במלבן ..... (ללא ספר)
6. עקרון הממוצע ..... (ללא ספר)
7. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 10 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

1. תרגילים 20

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

פתרו את הבעיות בשאלות 1-2:

1)
$$u_x + u_y = u \qquad x, y > 0$$
$$u(x.0) = \begin{cases} 0 & x > 1 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad u(0, y) = 0$$

2)
$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 < x < \infty \qquad t > 1$$
$$u(x,0) = f(x) = 0 \qquad u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

3) פתרו את המשוואה
$$u_x + 2u_y = u \qquad 1 + y - 2x > 0, \quad x < 0$$
$$u(x, x^2) = x + \sin(x^3) \quad x < 0$$

4) נתון כי $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:
$$u_{tt} + u_t = u_{xx} + Ax \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u_x(0,t) = 2 \qquad u_x(1,t) = 1$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$$

נתון כי הגבול $U(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$ קיים וסופי.

מצאו את הקבוע A ואת הפונקציה $U(x)$.

5) פתרו את הבעיה הבאה:
$$\triangle u = r \qquad 1 < r < 2$$
$$u(1,\theta) = 1 + \sin\theta$$
$$u(2,\theta) = 1 + 2\cos\theta$$

6) פתרו את המשוואה:
$$u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \qquad y \ge e^{-x}$$
$$u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

7) נתונה הבעיה הבאה, בתחום $t>0$ $0<x<1$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u \\ u(x,0) = x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e} \\ u(0,t) = (1,t) = 0 \end{cases}$$

הוכיחו : $u\left(\frac{1}{2},1\right) < \frac{1}{4\sqrt{e}}$.

רמז : הגדירו את הפונקציה $h(x,t) = u(x,t)e^{\delta x}$, עבור קבוע δ מתאים.

8) עבור איזו פונקציה לפתרון של הבעיה הבאה :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 10u & 0<x<1,\ t>0 \\ u(x,0) = h(x) & \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}$$

הגבול $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ קיים וסופי.

9) פתרו את הבעיה הבאה : $\begin{cases} \triangle u = x^2+y^2 & \text{in} \quad x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1+x \end{cases}$.

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

10) נתונה משוואת הגלים הבאה : $u_{tt} = u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad t>0$

$u(x,0) = 1$.

$$u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & -1<x<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את $u(x,1)$.

11) נתונה הבעיה הבאה : $\begin{cases} \triangle u = 0 & x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \cosh(x)\sinh(y) \end{cases}$.

חשבו את $u(0,0)$.

12) נתונה הבעיה הבאה : $\triangle u = 0 \qquad 1<x^2+y^2<4$

$u|_{x^2+y^2=1} = \ln(2+x)$.

$u|_{x^2+y^2=4} = \ln\left(e^{2019}-2+x\right)$

הוכיחו כי לכל $1<x^2+y^2<4$ מתקיים $0<u(x,y)<2019$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

13) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x,y>0$.

$$x^2 ulxx + 2xy\cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} = 4x^2$$

14) השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}+\beta\cdot u_t + F(x,t) & 0<x<L,\ t>0,\ \beta>0 \\ u_x(0,t)=A(t) & u_x(L,t)=B(t) \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

רמז: הגדירו $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)dx$.

15) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0<x<L, \quad t>0 \\ u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 \end{cases}$$

16) נתונה המשוואה $2u_{xx}+2yu_{yy}+u_y=0$, בתחום $y>0$.

א. הראו כי המשוואה אליפטית.

ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

17) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+e^{-t} & 0<x<\infty \\ u(0,t)=e^{-t}-1 \\ u(x,0)=1 \quad u_t(x,0)=2\sin(x)-1 \end{cases}$$

18) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1,\ t>0 \\ u_x(0,t)=0 \quad u_x(1,t)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=x^2(1-x) \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty}\int_0^1 u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

19) $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & -\infty < x < \infty, \ \ t > 0 \\ u(x,0) = h(x) = \dfrac{e^{-x} + 2e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} \end{cases}.$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_x(0,t)\sqrt{t}}{u(0,t)}$.

20) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t + u_x = u_{xx} & 0 < x < 1, \ \ t > 0 \\ u(x,0) = e^{\frac{1}{2}x} & \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}.$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)t} \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} u_t(x,t)\,dx$.

21) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:

$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com