משוואות דיפרנציאליות חלקיות

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

שיטת הקווים האופייניים

שאלות

1) פתרו את המשוואה עבור $\alpha \neq \frac{1}{2}$ קבוע ממשי.

$$u|_\gamma = x^2 + y^2 \qquad \gamma = \{y = \alpha x\} \qquad 2u_x + u_y = 0$$

2) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x - y$ $\quad \gamma = \{y = x^2, x \geq 0\}$ $\quad 3u_x - 2u_y = 0$.

3) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x + \sin(xy)$ $\quad \gamma = \{y = x^2, x \leq 0\}$ $\quad u_x + 2u_y = 0$.

4) פתרו את המשוואה

$$\begin{cases} u_x - u_y = -u & y \geq 0 \\ u(x,0) = x^2 - x^4 \end{cases}.$$

5) פתרו את המשוואה

$$\begin{cases} 2u_x - 3u_y + 2u = 0 \\ u(x,-x) = (x+1)e^{-x} \end{cases}.$$

6) פתרו את המשוואה

$$\begin{cases} u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} & y \geq e^{-x} \\ u(x,e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x} \end{cases}.$$

7) נתון כי $u(x,y)$ הוא פתרון של הבעיה

$$\begin{cases} y^2 u_x + u_y = -u & 0 < x < \infty \quad , \quad y > 0 \\ u(0,y) = 0 & y > 0 \\ u(x,0) = 1 & x > 0 \end{cases}$$

8) פתרו את הבעיה כאשר a קבוע ממשי.

$$\begin{cases} 2u_x + u_y = -u & 0 < y < x \\ u(x,0) = a \cdot \cos(x) + \sin(x) & x > 0 \\ u(y,y) = 0 & y > 0 \end{cases}$$

שיטת לגראנג

שאלות

1) מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד"ח $xu_x + yuu_y = u$.

2) מצאו פתרון כללי למשוואה $x^2u_x + y^2u_y = u^2$.

3) מצאו פתרון כללי למשוואה $xu \cdot u_x + yu \cdot u_y = -xy$, כאשר $x, y, u > 0$.

4) מצאו פתרון כללי למשוואה $(y^2 + u^2)u_x - xyu_y = xu$, כאשר $x, y, u > 0$.
רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, אז $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

5) מצאו פתרון למשוואה $\begin{cases} xu_x + yu_y = 2xy & x, y > 0 \\ u(x,1) = x & x > 0 \end{cases}$.

6) פתרו את המשוואה $\begin{matrix} e^y u_x - e^x u_y = -e^{x+y}u & u > 0 \\ u(x,0) = 1 & \end{matrix}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{e^x\sqrt{y+1}}u_x + yu_y = y^2u$,
בתחום $u, y > 0$.
ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

8) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\cos(y)u_x + \sin(y)u_y = e^y \sin(y)u$,
בתחום שבו $0 < y < \pi$ ו-$u > 0$.

9) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{y}u_x + \frac{1}{x}u_y = 2$.

10) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+y)u_x + (y-x)u_y = x^2 - y^2$,
בתחום $x, y > 0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

11) נתון כי $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}F\left(\frac{y+1}{x^2+1}\right)$ הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה $a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$.

א. מצאו את הפונקציות a,b,c.

ב. מצאו פתרון פרטי המקיים $u(0,y)=y^2$.

תשובות סופיות

1) $F\left(\frac{x}{u},\ln(y)-u\right)=0$

2) $u(x,y)=\dfrac{1}{F\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}}$

3) $u=\sqrt{F\left(\ln\frac{x}{y}\right)-xy}$

4) $F\left(\frac{y}{u},x^2+y^2+u^2\right)=0$

5) $u(x,y)=x\cdot y$

6) $u(x,y)=e^{e^y-1}$

7) א. $u(x,y)=e^{\frac{1}{2}y^2-F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x}\right)}$ ב. שאלת הוכחה.

8) $u(x,y)=e^{e^y-F\left(e^{-x}\sin y\right)}$

9) $u(x,y)=xy-F\left(\frac{x}{y}\right)$

10) $u(x,y)=\dfrac{y^2+2xy-x^2-F\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\operatorname{ar}\tan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4}$

11) א. $\underbrace{(x^2+1)}_{a}u_x+\underbrace{2x(y+1)}_{b}u_y=\underbrace{2xyu}_{c}$ ב. $u(x,y)=\dfrac{e^y}{y+1}\cdot\dfrac{\left(\frac{y+1}{x^2+1}-1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1}-1}}\cdot\dfrac{y+1}{x^2+1}$

כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 2 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 3 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית
$\left(p(x)y'(x)\right)'+\left(\lambda r(x)-q(x)\right)y(x)=0$.

א. $y''-2xy'+\lambda y=0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda)y=0$ (משוואת בסל)

2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y''+e^{2x}y'+\lambda y=0 \quad , \ 0<x<1 \\ y(0)+4y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y''+4y'+xy+\lambda e^{x}y=0 \quad , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות **4-7**:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

4) $$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<\pi \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(\pi)-y'(\pi)=0 \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

8) נתונה הבעיה הבאה:
$$\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}.$$

א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
ב. פתרו את הבעיה.

9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}.$$

ב. נציב $\ell=1$ בבעיה מסעיף א', ונקבל:
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}.$$

1. פתחו את הפונקציה $f(x)=1 \, , \, 0\le x\le 1$
לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.
התחל את הטור מ-$n=1$.
2. מה סכום הטור ב-$x=0$?
האם הוא שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$?

ג. נציב $\ell=2$ בבעיה מסעיף א', ונקבל:
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<2 \\ y(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases}.$$

פתחו את הפונקציה $f(x)=x \, , \, 0\le x\le 2$
לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}.$$

ב. פתחו את הפונקציה $f(x)=e^x \, , 0\le x\le \pi$
לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.
התחילו את הטור מ-$n=1$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<e \\ y(1)=0 \\ y'(e)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.
ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.
ד. פתחו את $f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x\le \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e}\le x\le e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.
הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.
ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x=2$, $x=1.5$, $x=\sqrt{e}$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi n)=(-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi n)=0$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

תשובות סופיות

1) א. $\left(e^{-x^2}y'\right)'+\left(\lambda e^{-x^2}-0\right)y=0$ ב. $(xy')'+\left(\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)-(-x)\right)y=0$

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$, $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x)$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

5) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$ $\phi_n(x)=n\cos nx+\sin nx$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$, $\lambda_n=n^2$; בנוסף, $\lambda=-1$ הוא ע״ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=e^x$.

6) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$, $\varphi_n(x)=\sin(\omega_n x)$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2$.

7) פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$ $y_n(x)=\sin(\omega_n x)-\omega_n\cos(\omega_n x)$,

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2$.

בנוסף, $\lambda_0=0$ הוא ע״ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=x-1$.

8) א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: $n=1,2,3,...$, $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x$.

ערכים עצמיים: $n=1,2,3,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

9) א. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,...$ $\varphi_n(x)\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2$.

ב. סכום הטור ב- $x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$.

ג. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$, כאשר $(0<x<2)$.

10) א. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,...$ $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,...$ $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$.

ב. $e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1}-1}{1^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$, כאשר $0<x<\pi$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,...$ $\varphi_n(x)=\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\ln x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,...$ $\lambda_n=\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$.

ג. שאלת הוכחה.

ד. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-2\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\ln x\right)$.

ה. סכום הטור ב- $x=\sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב-$x=1.5$ הוא 1; וב-$x=2$ הוא 0.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 4 - טורי פורייה

תוכן העניינים

טור פורייה ממשי:

שאלות:

1) חשבון טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\sin(|x|)$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1 \\ 0 & else\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\sum_{n=1}^{20}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

2) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$

3) $\sin(|x|)\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}\cos(2kx)$

4) $f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

1) חשבון טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 2x & 0\le x<\pi\end{cases}$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ \sin(x) & 0\le x<\pi\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$

2) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}-\frac{1}{2\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{in}+\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}e^{inx}$

3) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-3(-1)^n\frac{\pi}{in}\right]e^{inx}$

4) $f(x)\sim-\frac{1}{2}-\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{3}{\pi i(2k-1)}e^{i(2k-1)x}$

5) $f(x)\sim\frac{1}{4i}e^{ix}-\frac{1}{4i}e^{-ix}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}e^{i[2k]x}$

משפט פרסבל:

שאלות:

1) באמצעות טור הפורייה $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx)$, חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2) נתון כי טור הפורייה הממשי של $f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi<x<0 \end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הינו $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x\le \pi \\ x+\pi & -\pi\le x<0 \end{cases}$ ו- $g(x)=x$.
מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

4) מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x\le \pi \\ 0 & -\pi<x\le 0 \end{cases}$ ובאמצעותו חשבו את הסכום $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

5) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le \pi \\ e^{x^2} & -\pi\le x<0 \end{cases}$ ו- $g(x)=\begin{cases} 0 & 1<x\le \pi \\ \frac{1}{x^2+1} & 0\le x\le 1 \\ 0 & -\pi\le x<0 \end{cases}$.
נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- $g\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_n e^{inx}$, $f\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}$.
הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n\cdot\overline{g_n}=\frac{1}{8}$.

6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π :

$$f(x)=\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad , \quad -\pi\le x<\pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi<x<3\pi$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+n^2\right)^2}$.

7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi,\pi]$ על ידי הנוסחה : $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}}e^{inx}$.

חשבו $\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x+\pi)-f(x)\right|^2dx$.

8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $p\neq 0$

כדי להוכיח את הזהות $\frac{\pi^2}{64}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}$.

9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}h^2 & h\le x\le\pi\\ 0 & -\pi\le x\le h\end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$

כאשר $0\neq h\in[-\pi,\pi]$ ובשוויון פרסבל כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos(2n)}{n^2}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים :

א. מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\frac{\pi^2}{32}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}$.

ג. הסיקו כי $\frac{\pi^2}{64}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi^2}{6}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) $\frac{\pi^2}{4}$

5) הוכחה.

6) א. ראו סרטון.

ב. $\sinh(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} \sin(nx)$

ג. ≈ 0.769

7) 8π

8) הוכחה.

9) $\frac{\pi^2-4}{4}$

10) א. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx}$

ב. הוכחה.

ג. ראו סרטון.

רימן לבג:

שאלות:

1) חשבו $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x}\cos\left(\sqrt{|x|}\right)\sin(nx)\,dx$.

2) חשבו $\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2+1}e^{i\cdot n^2 t}\,dt$.

3) הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(n\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{x}\frac{se^{s^2}ds}{\sqrt{s^2+2017}}e^{inx}dx\right)=0$.

תשובות סופיות:

1) 0
2) 0
3) הוכחה.

משפט דיריכלה:

שאלות:

1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$ לטור פורייה ממשי $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx)$.

היעזרו בפיתוח זה כדי להוכיח $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$.

רמז: הציבו $x=\frac{\pi}{2}$.

2) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π: $f(x)=\begin{cases} 2+\frac{2x}{\pi} & -\pi<x<0 \\ 2 & 0<x<\pi \end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3) במרחב הפונקציות $L^2_{PC}[-\pi,\pi]$ נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$.

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $f(x)$.

ב. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

ד. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\cos(ax)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר a אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

א. $\frac{1}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\pi a+\pi n} + \frac{1}{\pi a-\pi n}\right]$

ב. $\cot(\pi\alpha) = \frac{1}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\alpha+\pi n} + \frac{1}{\pi\alpha-\pi n}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. ראו סרטון.

ב. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$ ג. הוכחה.

3) א. $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ ב. $\frac{\pi^4}{90}$ ג. $\frac{\pi^2}{-12}$ ד. $\frac{\pi^2}{6}$

4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0<x<\pi$

מתקיים $x=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=1$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ והוכיחו כי:

א. לכל $0<x<\pi$ מתקיים $1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}=-\frac{\pi}{4}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$
ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח $f'(x)\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$).
נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ אזי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ מתכנס בהחלט.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x(\pi-x)$ בקטע $[0,\pi]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?
שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי $\frac{\pi^6}{960}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}$.

ד. הוכיחו כי $\frac{\pi^3}{32}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}$.

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x)=\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ בקטע $[0,\pi]$.

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\frac{\pi^4}{96}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$. רמז: הציבו $x=0$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x^2}$ בקטע $[-\pi,\pi]$.
נסמן $f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}\left|c_ne^{inx}\right|$ פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|$ מתכנס?

ב. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|$ מתכנס?

ג. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$ מתכנס?

4) נתבונן בטור הפורייה $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{in(x+i)}$.
כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ בקטע $(0,2\pi)$.

ב. נסמן $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ באופן מפורש (ללא טור) בקטע $(0,2\pi)$.

6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi,\pi]$, גזירה ברציפות למקוטעין k פעמים כך שמתקיים $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$ לכל $j=0,1,\dots k-1$. נסמן $f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(n^kc_n\right)=0$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f(x)\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$ ו-$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$. הראו כי מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)\right|^2dx\le\int_{-\pi}^{\pi}\left|f'(x)\right|^2dx$.

ב. תהי $f(x)\in L^2_{PC}[0,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0)=f(\pi)=0$.

הראו כי מתקיים $\int_0^{\pi}\left|f(x)\right|^2dx\le\int_0^{\pi}\left|f'(x)\right|^2dx$.

8) נגדיר $f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}e^{in^2x}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

9) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}\sin\left(n^{2.5}x\right)$

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

10) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{1.4}}+\frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$.

א. האם f רציפה?

ב. האם f גזירה ברציפות?

11) נגדיר $f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(nx\right)}{n^4}$. הוכיחו כי $f\left(x\right)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

12) נסמן $f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3.1}+i\cdot n^{2.2}}\cdot e^{inx}$. הוכיחו כי f גזירה ברציפות פעמיים.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. $\left[0,\pi\right]$ $\quad f\left(x\right)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi\left(2k-1\right)^3}\sin\left(\left[2k-1\right]x\right)$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

ה. $\left[0,\pi\right]$ $\quad \frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\sim\frac{\pi^3}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi\left(2k-1\right)^4}\cos\left(\left[2k-1\right]x\right)$ ו. הוכחה.

3) א. $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\cdot nc_n\right|\le\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}n^2\left|c_n\right|^2<\infty$ ב. $\sum_{-\infty}^{\infty}n\left|c_n\right|<\infty$

ג. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f'\left(x\right)\right|^2dx=\sum_{-\infty}^{\infty}n^2\left|c_n\right|^2$

4) ראו סרטון.

5) א. הוכחה. ב. $-\frac{\pi}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+\frac{\pi^2}{6}x$

6) הוכחה.

7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

10) א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2.8}}<\infty$ ב. נניח בשלילה כי f גזירה ברציפות.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי הפונקציה $g(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ \pi-x & 0\le x<\pi\end{cases}$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $g(x)$.

ב. עבור $-\pi\le x\le\pi$ נגדיר את הפונקציה $h(x)=a\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\int_{-\pi}^{x}g(t)dt$

כאשר $g(x)$ מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של a מתכנס טור פורייה של $h(x)$ במידה שווה ל-$h(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) נגדיר פונקציה $f(x)=|\sin(x)|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב-$f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של f ושל f'.

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחישבתם?
שרטטו את הגרפים של פונקציות אלו בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f' במידה שווה?

תשובות סופיות:

1) א. $g(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(2k\cdot x)$ ב. $a=-\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $f(x)\sim\left(\frac{2}{\pi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{-4}{(2k+1)(2k-1)}\right]\cos(2k\cdot x)$,

$f'(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{8k}{(2k+1)(2k-1)}\right]\sin(2k\cdot x)$ ב. $f'(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$

ג. $f(x)$ פונקציה רציפה, מחזורית-2π, הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של $f'(x)$ יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו: $[\pi n+\delta,\pi(n+1)-\delta]$ לכל $0<\delta<\pi$ ולכל n שלם.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[0,2\pi]$.

2) תהי הפונקציה $f(x)=\min\{1,|x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2,2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0,2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2}$.

4) פתחו את $f(x)=|x|$ לטור פורייה בקטע $[-1,1]$.

5) פתחו את $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x<2 \end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0,2]$.

6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x)=f(x+2)$ ובנוסף $-1\le x<1$ $f(x)=2-|x|$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$.

ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1,1]$?

7) מצאו טור קוסינוסים $f(x)=x$ בקטע $[0,3]$.

8) פתחו את $f(x)=\cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0,\pi]$.

תשובות סופיות:

1) $0\le x\le 2\pi$ $\qquad x^2\sim\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cdot\cos nx-\frac{4\pi}{n}\cdot\sin nx$

2) א. $$b_n=0\quad , \quad a_n=\begin{cases}\frac{-4}{\pi^2[2k-1]^2} & n=2k-1\\ \frac{-8}{\pi^2[4k-2]^2} & n=4k-2\\ 0 & else\end{cases}$$

ב. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[2k-1]^4}=\frac{\pi^4}{96}$

3) א. $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1|4n^2\pi^2}e^{in\pi x}$ ב. ראו סרטון. ג. $\frac{3-e}{4(e-1)}$

4) $|x|\sim\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left(\pi[2k-1]x\right)$

5) $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2[2k-1]^2}\sin\left(\frac{\pi[2k-1]x}{2}\right)$

6) א. $f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\left([2k-1]\pi x\right)$ ב. $\frac{\pi^4}{96}$ ג. $\frac{\pi^2}{8}$

ד. אם f רציפה בקטע $[a,b]$, $f(a)=f(b)$ ו-f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[a,b]$.

7) $f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-12}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right)$

8) $\cos(2x)\sim-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2}\sin\left([2k-1]x\right)$

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) הוכח את הטענה כי אם $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π אז $(f*g)_{(x)}$ מחזוריות- 2π.

2) הוכח את הטענה כי אם $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין, מחזוריות- 2π ופונקציות זוגיות אז $(f*g)_{(x)}$ זוגית.

3) נתונה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=\sqrt{2\pi}\cdot\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x)$.
חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$.
הערה: $\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

4) נתונות $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $g(x)=\cos(x)$, $f(x)=x^2$.
חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

5) נתונות $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $g(x)=\chi_{[0,1]}(x)$, $f(x)=x$.
חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) $\pi - x$

4) לכל $-\pi \le x \le \pi$, $(f*g)_{(x)} = -2\cos(x)$

5)
$$(f*g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(x^2-(x-1)^2\right) & -\pi+1 \le x \le \pi \\ \frac{1}{4\pi}\left[x^2-\left(x+(2\pi-1)\right)^2\right] & -\pi \le x \le -\pi+1 \end{cases}$$

גרעין דיריכלה:

שאלות:

1) נגדיר $D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}$ (גרעין דיריכלה).

א. הוכיחו כי $D_n(x)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$.

ב. הוכיחו כי $D_n(x)=\dfrac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ עבור $x\neq 2\pi m$.

2) חשבו לכל ערך של n שלם את ערכו של הביטוי $I(n)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\dfrac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin(100x)\,dx$.

3) הוכיחו כי $I=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\left[\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\right]}{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}dx=2(n+1)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

4) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$. נסמן $S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}$ טור פורייה חלקי.

הוכיחו כי $(f*D_n)_x=S_n(x)$.

5) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{arctg(x-1)\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{e^{(x-1)^2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}dx$.

6) נגדיר $S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{2001}{2}t}{\sin t}2\cos\frac{t}{2}\cos^{17}\left(e^{\sqrt{|x-t|}}\right)dt$.

יהיו a_n , b_n מקדמי פורייה הממשיים ו- c_n מקדמי פורייה המרוכבים, של הפונקציה $S(x)$.

חשבו את b_{500} , c_{1001} .

רמז: $S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)f(x-t)dt$ כאשר $D_N(t)$ גרעין דיריכלה מסדר N ו- S_N טור פורייה החלקי ה- N -י של f .

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

2) 0

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) $-\frac{\pi^2}{2e}$

6) $b_{500}=0$, $c_{1001}=0$

גרעין פייר וממוצעי סזארו:

שאלות:

1) נסמן $D_n(x)$ גרעין דיריכלה. נגדיר את גרעין פייר כך: $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)$.

א. הראו כי לכל $x\neq 2\pi m$ $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

ב. הראו כי $K_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikx}$.

2) הוכיחו כי $K_n(x)\geq 0$ לכל x כאשר $K_n(x)$ גרעין פייר.

3) הוכיחו כי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)dx=1$

4) הוכיחו כי לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|x|<\pi}K_n(x)dx=0$.

5) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין, מחזורית-2π וכי $m\leq f(x)\leq M$ לכל x ממשי.
הוכיחו כי $m\leq\sigma_n(x)\leq M$ לכל n טבעי ולכל x ממשי כאשר $\sigma_n(x)$ סדרת ממוצעי סזארו של הפונקציה $f(x)$.

6) תהי $\varphi(x)$ רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ ונניח כי:

i. $\varphi(x)\geq 0$.

ii. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=1$.

iii. קיים $0<\delta_0<\pi$ כך שלכל $|x|>\delta_0$ מתקיים $\varphi(x)=0$.

נגדיר $F_n(x)=n\varphi(nx)$ ונרחיב אותה באופן מחזורי.
הוכיחו כי $F_n(x)$ מהווה גרעין חיובי.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) הוכחה.

6) הוכחה.

גרעין פוואסון:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי לכל $0<r<1$ מתקיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{inx}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$.

ב. גרעין פוואסון נתון על ידי $P_r(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π וטור פורייה שלה נתון על ידי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הראו כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt$.

ג. הוכיחו את התכונות הבאות של גרעין פוואסון:

i. $P_r(x)\ge 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to 1-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. מתקיים $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$.

ד. תהי $f(x)$ רציפה ומחזורית 2π ועם טור פורייה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}\xrightarrow{r\to 1-}f(x)$ במידה שווה.

הערה: ניתן להיעזר במשפט הבא: אם סדרת פונקציות $P_r(x)$ מקיימת את התכונות הבאות:

i. $P_r(x)\ge 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to 1-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. מתקיים $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$.

אזי $f(x)\xrightarrow{r\to 1-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt$ במידה שווה.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה $f(t)=e^{i\alpha t}$ בתחום $-\pi\le t\le\pi$ כאשר α הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים $\frac{1}{\alpha}-\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\alpha}{\left[\alpha^2-n^2\right]}$.

ג. הראו שמתקיים $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{[\alpha-n]^2}$.

ד. הראו שמתקיים $\left(\frac{1}{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}-1\right)\frac{\pi}{4\alpha^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left((2n+1)^2-\alpha^2\right)}$.

2) נגדיר $f(x)=|x|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב-$f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של f.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום $(-\infty,\infty)$?

$$\sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{1}{7}\sin(7x)+...$$

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$.

3) תהי $f\in L^2_{PC}([-\pi,\pi])$.

נסמן ב-c_n את מקדמי פורייה (המרוכבים) של f.

נסמן $d_n=\mathrm{Re}\{c_n\}$ ובנוסף נתון כי:

- f ממשית.
- f מתאפסת על הקטע $[-\pi,0]$.
- מתקיים השיוויון $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}d_ne^{inx}=x^2e^{|x|}\cos(x)$.

מצאו את f.

4) תהי f פונקציה זוגית בעלת מחזור 2π המקיימת $f(x)=\cos(2x)$
בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ ו-$f(x)=-1$ בתחום $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.

מצאו את טור פורייה הממשי של f וחשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$.

האם טור פורייה של f מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

5) נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית 2π.

נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_n e^{inx}$ ויהי $h>0$ פרמטר כלשהו.

מצאו את מקדמי פורייה של $h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(t+x)dt$ כתלות ב-f_n.

תשובות סופיות:

1) א. $e^{i\alpha t}\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\sin(\pi\alpha)}{[\alpha-n]\pi}\cdot e^{in\cdot t}$ ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

2) א. $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos([2k+1]x)$

ב. $\begin{cases}\frac{\pi}{4} & \pi k<x<\pi(k+1)\\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1)<x<\pi k\\ 0 & x=\pi k\end{cases}$, כאשר k מספר שלם. ג. $\frac{\pi^2}{8}$

3) $f(x)=\begin{cases}2x^2e^{|x|}\cos(x) & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x\le 0\end{cases}$

4) התכנסות במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$ - אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$
ו-$f'\in E[-\pi,\pi]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ״ש ל-f בקטע $[-\pi,\pi]$.

5) f_0

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 5 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 6 - משוואת החום

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 7 - אינטגרל אנרגיה

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 8 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 9 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

פתרו את הבעיות בשאלות 1-2:

1)

$$u_x + u_y = u \qquad x, y > 0$$

$$u(x.0) = \begin{cases} 0 & x > 1 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad u(0, y) = 0$$

2)

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 < x < \infty \qquad t > 1$$

$$u(x,0) = f(x) = 0 \qquad u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

3) נתון כי $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$u_{tt} + u_t = u_{xx} + Ax \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$

$$u_x(0,t) = 2 \qquad u_x(1,t) = 1$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$$

נתון כי הגבול $U(x) = \lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$ קיים וסופי.

מצאו את הקבוע A ואת הפונקציה $U(x)$.

4) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\triangle u = r \qquad 1 < r < 2$$

$$u(1,\theta) = 1 + \sin\theta \,.$$

$$u(2,\theta) = 1 + 2\cos\theta$$

5) פתרו את המשוואה:

$$u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \qquad y \ge e^{-x}$$

$$u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x} \,.$$

כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

6) נתונה הבעיה הבאה, בתחום $t>0$ $0<x<1$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u \\ u(x,0) = x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e} \\ u(0,t) = (1,t) = 0 \end{cases}$$

הוכיחו: $u\left(\frac{1}{2},1\right) < \frac{1}{4\sqrt{e}}$.

רמז: הגדירו את הפונקציה $h(x,t) = u(x,t)e^{\delta x}$, עבור קבוע δ מתאים.

7) עבור איזו פונקציה לפתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 10u & 0<x<1,\ t>0 \\ u(x,0) = h(x) & \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}$$

הגבול $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ קיים וסופי.

8) פתרו את הבעיה הבאה: $\begin{cases} \Delta u = x^2 + y^2 \quad \text{in} \quad x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1+x \end{cases}$.

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

9) נתונה משוואת הגלים הבאה:

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \qquad t>0$$
$$u(x,0) = 1.$$
$$u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & -1<x<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את $u(x,1)$.

10) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{matrix} \Delta u = 0 & x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \cosh(x)\sinh(y) & \end{matrix}$.

חשבו את $u(0,0)$.

11) נתונה הבעיה הבאה:

$$\Delta u = 0 \qquad 1<x^2+y^2<4$$
$$u|_{x^2+y^2=1} = \ln(2+x).$$
$$u|_{x^2+y^2=4} = \ln\left(e^{2019} - 2 + x\right)$$

הוכיחו כי לכל $1<x^2+y^2<4$ מתקיים $0<u(x,y)<2019$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

12) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x,y>0$.

$$x^2ulxx+2xy\cdot u_{xy}+y^2u_{yy}=4x^2$$

13) השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}+\beta\cdot u_t+F(x,t) & 0<x<L,\ t>0,\ \beta>0 \\ u_x(0,t)=A(t) & u_x(L,t)=B(t) \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

רמז: הגדירו $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)dx$.

14) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & 0<x<L, \quad t>0 \\ u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 \end{cases}$$

15) נתונה המשוואה $2u_{xx}+2yu_{yy}+u_y=0$, בתחום $y>0$.

א. הראו כי המשוואה אליפטית.

ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

16) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+e^{-t} & 0<x<\infty \\ u(0,t)=e^{-t}-1 \\ u(x,0)=1 \quad u_t(x,0)=2\sin(x)-1 \end{cases}$$

17) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1,\ t>0 \\ u_x(0,t)=0 & u_x(1,t)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=x^2(1-x) \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty}\int_0^1 u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)dx$.

כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

18) $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה:
$$u_t = u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty,\ \ t > 0$$
$$u(x,0) = h(x) = \frac{e^{-x} + 2e^{x}}{e^{-x} + e^{x}}.$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{u_x(0,t)\sqrt{t}}{u(0,t)}$.

19) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:
$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0$$

20) נתונה הבעיה הבאה:
$$\begin{cases} u_t + u_x = u_{xx} & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{\frac{1}{2}x} & \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}.$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)t} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} u_t(x,t)\,dx$.

21) פתרו את המשוואה
$$u_x + 2u_y = u \qquad 1 + y - 2x > 0,\ \ x < 0$$
$$u(x,x^2) = x + \sin(x^3) \quad x < 0.$$

22) פתרו את הבעיה הבאה:
$$u_t = u_{xx} + \cos(\pi x) \qquad 0 < x < 1\ ,\ t > 0$$
$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 1.$$
$$u(x,0) = x$$

רמז: התבוננו בפונקציה $v(x,t) = u(x,t) - x$.

23) נתון כי $u(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:
$$\Delta u = 1 \qquad 0 \le r < 1$$
$$u(1,\theta) = c + \sin(2020\cdot\theta)$$

עבור איזה קבוע c מתקיים $\lim\limits_{r\to 0+} \frac{u(r,\theta)}{r^2} = \frac{1}{4}$?

24) נתונות הבעיות הבאות:

$$\begin{cases} \Delta u = r^2 & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = \sin^{2019}(\theta) & 0 \le \theta < 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta v = r^2 & 0 \le r < 1 \\ v(1,\theta) = \cos^{2020}(\theta) & \end{cases}$$

הוכיחו כי $u(0,0) > v(0,0)$.

25) נתון כי $u_n(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה:

$$\begin{cases} \Delta u_n = \left(\frac{r}{2}\right)^n & 0 \le r < 1 \\ u_n(1,\theta) = \sin(\theta) & \end{cases}.$$

מצאו את $u_n(r,\theta)$ וחשבו $\lim_{n\to\infty} u_n(r,\theta)$.

26) הוכיחו את יחידות הפתרון של בעיית החום הבאה, עבור $b > 0$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t) & 0 < x < 1 \\ u(x,0) = h(x) & \\ v_x(0,t) - b \cdot v(0,t) = f(t) & t \ge 0 \\ u_x(1,t) + b \cdot u(1,t) = g(t) & t \ge 0 \end{cases}$$

רמז: היעזרו באינטגרל האנרגיה $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,t)\,dx$.

27) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin(\pi x) & 0 < x < 2 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & \\ u(0,t) = 0 \qquad u(2,t) = 0 & \end{cases}.$$

28) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3\sin(2x) + \frac{\pi - x}{\pi} & 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \frac{x}{\pi} + \sin(x) & \\ u(0,t) = t \qquad u(\pi,t) = 1 & \end{cases}$$

רמז: הגדירו $u(x,t) = v(x,t) + t\frac{\pi - x}{\pi} + 1 \cdot \frac{x}{\pi}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

29) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + \sin(2\pi x) & 0<x<1 \;,\; t>0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \\ u(0,t) = u(1,t) = t \end{cases}.$$

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $v(x,t) = u(x,t) - t$.

30) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(x) & -\infty<x<\infty,\; t>0 \\ u(x,0) = \cos(x) + \begin{cases} 1 & -1<x<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}.$$

חשבו $\int_{-2}^{2} |u(x,3)|^2 \, dx$.

31) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2+y^2<1 \\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=1} = x^2+xy+y^2 \end{cases}.$$

האם ייתכן כי $\iint\limits_{x^2+y^2<1} u(x,y)\,dxdy = \frac{7\pi}{4}$?

32) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<3 \;,\; t>0 \\ u(0,t) = \frac{3}{\sqrt{1+t^2}} & u(3,t) = 3 \\ u(x,0) = 3+3x-x^2 \end{cases}.$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{3}{2},1\right) < 2e$.

33) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<\pi \;,\; t>0 \\ u(0,t) = \arctan(t) & u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = x(x-\pi) \end{cases}.$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{\pi}{2},1\right) > -\frac{\pi^2}{4}$.

34) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} & u_t(x,0) = g(x) = 0 \\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

חשבו $\int_0^2 \left| u(x,1) - \frac{1}{2} \right|^2 dx$.

35) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} \Delta u = r & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = \sin^{2019}(\theta) \end{cases}$.

חשבו $u(0,0)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com