משוואות דיפרנציאליות חלקיות 8321501

תוכן העניינים

1. משוואות מסדר ראשון 1
2. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)
3. משוואת הגלים ..... (ללא ספר)
4. משוואת החום ..... (ללא ספר)
5. משוואת לפלס ..... (ללא ספר)
6. שאלות מסכמות ברמת בחינה 4

משוואות דיפרנציאליות חלקיות 8321501

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. שיטת הקווים האופייניים 1
2. שיטת לגראנג 2

שיטת הקווים האופייניים

שאלות

1) פתרו את המשוואה עבור $\alpha \neq \frac{1}{2}$ קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = 0 \qquad \gamma = \{y = \alpha x\} \qquad u|_\gamma = x^2 + y^2$$

2) פתרו את המשוואה $3u_x - 2u_y = 0$ $\quad \gamma = \{y = x^2, x \geq 0\}$ $\quad u|_\gamma = x - y$.

3) פתרו את המשוואה $u_x + 2u_y = 0$ $\quad \gamma = \{y = x^2, x \leq 0\}$ $\quad u|_\gamma = x + \sin(xy)$.

4) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &u_x - u_y = -u && y \geq 0 \\ &u(x,0) = x^2 - x^4 \end{aligned}$$

.

5) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &2u_x - 3u_y + 2u = 0 \\ &u(x,-x) = (x+1)e^{-x} \end{aligned}$$

.

6) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} && y \geq e^{-x} \\ &u\left(x, e^{-x}\right) = e^{x^2} + e^{-x} \end{aligned}$$

.

7) נתון כי $u(x,y)$ הוא פתרון של הבעיה

$$\begin{aligned} &y^2 u_x + u_y = -u && 0 < x < \infty \quad , \quad y > 0 \\ &u(0,y) = 0 && y > 0 \\ &u(x,0) = 1 && x > 0 \end{aligned}$$

8) פתרו את הבעיה כאשר a קבוע ממשי.

$$\begin{aligned} &2u_x + u_y = -u && 0 < y < x \\ &u(x,0) = a \cdot \cos(x) + \sin(x) && x > 0 \\ &u(y,y) = 0 && y > 0 \end{aligned}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

שיטת לגראנג

שאלות

1) מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד"ח $xu_x+yuu_y=u$.

2) מצאו פתרון כללי למשוואה $x^2u_x+y^2u_y=u^2$.

3) מצאו פתרון כללי למשוואה $xu\cdot u_x+yu\cdot u_y=-xy$, כאשר $x,y,u>0$.

4) מצאו פתרון כללי למשוואה $\left(y^2+u^2\right)u_x-xyu_y=xu$, כאשר $x,y,u>0$.

רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, אז $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

5) מצאו פתרון למשוואה $\begin{cases} xu_x+yu_y=2xy & x,y>0 \\ u(x,1)=x & x>0 \end{cases}$.

6) פתרו את המשוואה $\begin{cases} e^yu_x-e^xu_y=-e^{x+y}u & u>0 \\ u(x,0)=1 \end{cases}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{e^x\sqrt{y}+1}u_x+yu_y=y^2u$, בתחום $u,y>0$.

ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

8) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\cos(y)u_x+\sin(y)u_y=e^y\sin(y)u$, בתחום שבו $0<y<\pi$ ו- $u>0$.

9) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{y}u_x+\frac{1}{x}u_y=2$.

10) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+y)u_x+(y-x)u_y=x^2-y^2$, בתחום $x,y>0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

11) נתון כי $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}F\left(\frac{y+1}{x^2+1}\right)$ הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה $a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$.

א. מצאו את הפונקציות a,b,c.

ב. מצאו פתרון פרטי המקיים $u(0,y)=y^2$.

תשובות סופיות

1) $F\left(\frac{x}{u},\ln(y)-u\right)=0$

2) $u(x,y)=\frac{1}{F\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}}$

3) $u=\sqrt{F\left(\ln\frac{x}{y}\right)-xy}$

4) $F\left(\frac{y}{u},x^2+y^2+u^2\right)=0$

5) $u(x,y)=x\cdot y$

6) $u(x,y)=e^{e^y-1}$

7) א. $u(x,y)=e^{\frac{1}{2}y^2-F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x}\right)}$ ב. שאלת הוכחה.

8) $u(x,y)=e^{e^y-F\left(e^{-x}\sin y\right)}$

9) $u(x,y)=xy-F\left(\frac{x}{y}\right)$

10) $u(x,y)=\frac{y^2+2xy-x^2-F\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4}$

11) א. $\underbrace{\left(x^2+1\right)}_{a}u_x+\underbrace{2x\left(y+1\right)}_{b}u_y=\underbrace{2xyu}_{c}$ ב. $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}\cdot\frac{\left(\frac{y+1}{x^2+1}-1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1}-1}}\cdot\frac{y+1}{x^2+1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

משוואות דיפרנציאליות חלקיות 8321501

פרק 2 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

1. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות 8321501

פרק 3 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)
3. משוואת המברקן ..... (ללא ספר)
4. משולש הקביעה ..... (ללא ספר)
5. עקרון דוהמל ..... (ללא ספר)
6. קטע אינסופי ..... (ללא ספר)
7. קטע חצי אינסופי ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות 8321501

פרק 4 - משוואת החום

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים בקטע סופי ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)
3. נוסחת פוואסון בקטע אינסופי ..... (ללא ספר)
4. עקרון דוהמל ..... (ללא ספר)
5. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות 8321501

פרק 5 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

1. משוואת לפלס בעיגול ..... (ללא ספר)
2. משוואת לפלס במלבן ..... (ללא ספר)
3. עקרון הממוצע ..... (ללא ספר)
4. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)
5. משוואת לפלס בטבעת ..... (ללא ספר)
6. משוואת לפלס בגזרה מעגלית ..... (ללא ספר)
7. חזרה על אינטגרל קווי ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות 8321501

פרק 6 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

1. תרגילים 4

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

פתרו את הבעיות בשאלות 1-2:

1)

$$u_x + u_y = u \qquad x, y > 0$$
$$u(x.0) = \begin{cases} 0 & x > 1 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad u(0, y) = 0$$

2)

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 < x < \infty \qquad t > 1$$
$$u(x,0) = f(x) = 0 \qquad u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

3) נתון כי $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$u_{tt} + u_t = u_{xx} + Ax \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u_x(0,t) = 2 \qquad u_x(1,t) = 1$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$$

נתון כי הגבול $U(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$ קיים וסופי.

מצאו את הקבוע A ואת הפונקציה $U(x)$.

4) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\triangle u = r \qquad 1 < r < 2$$
$$u(1,\theta) = 1 + \sin\theta$$
$$u(2,\theta) = 1 + 2\cos\theta$$

5) פתרו את המשוואה:

$$u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \qquad y \ge e^{-x}$$
$$u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

6) נתונה הבעיה הבאה, בתחום $t>0$ $0<x<1$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u \\ u(x,0) = x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e} \\ u(0,t) = (1,t) = 0 \end{cases}$$

הוכיחו : $u\left(\frac{1}{2},1\right) < \frac{1}{4\sqrt{e}}$.

רמז : הגדירו את הפונקציה $h(x,t) = u(x,t)e^{\delta x}$, עבור קבוע δ מתאים.

7) עבור איזו פונקציה לפתרון של הבעיה הבאה :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 10u & 0<x<1,\ t>0 \\ u(x,0) = h(x) & \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}$$

הגבול $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ קיים וסופי.

8) פתרו את הבעיה הבאה : $\begin{cases} \triangle u = x^2+y^2 & \text{in} \quad x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1+x \end{cases}$.

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

9) נתונה משוואת הגלים הבאה : $u_{tt} = u_{xx} \quad -\infty<x<\infty \quad t>0$

$u(x,0) = 1$.

$$u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & -1<x<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את $u(x,1)$.

10) נתונה הבעיה הבאה : $\begin{cases} \triangle u = 0 & x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \cosh(x)\sinh(y) \end{cases}$.

חשבו את $u(0,0)$.

11) נתונה הבעיה הבאה : $\triangle u = 0 \quad 1<x^2+y^2<4$

$$u|_{x^2+y^2=1} = \ln(2+x)$$

$$u|_{x^2+y^2=4} = \ln\left(e^{2019}-2+x\right)$$

הוכיחו כי לכל $1<x^2+y^2<4$ מתקיים $0<u(x,y)<2019$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

12) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x,y>0$.

$$x^2 ulxx + 2xy\cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} = 4x^2$$

13) השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}+\beta\cdot u_t + F(x,t) & 0<x<L,\ t>0,\ \beta>0 \\ u_x(0,t)=A(t) & u_x(L,t)=B(t) \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

רמז: הגדירו $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)dx$.

14) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0<x<L, \quad t>0 \\ u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 \end{cases}$$

15) נתונה המשוואה $2u_{xx}+2yu_{yy}+u_y=0$, בתחום $y>0$.

א. הראו כי המשוואה אליפטית.

ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

16) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+e^{-t} & 0<x<\infty \\ u(0,t)=e^{-t}-1 \\ u(x,0)=1 \quad u_t(x,0)=2\sin(x)-1 \end{cases}$$

17) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1,\ t>0 \\ u_x(0,t)=0 \quad u_x(1,t)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=x^2(1-x) \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty}\int_0^1 u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

18) $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} && -\infty < x < \infty,\ \ t > 0 \\ &u(x,0) = h(x) = \frac{e^{-x} + 2e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} \end{aligned}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty} \frac{u_x(0,t)\sqrt{t}}{u(0,t)}$.

19) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:

$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0$$

20) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t + u_x = u_{xx} & 0 < x < 1,\ \ t > 0 \\ u(x,0) = e^{\frac{1}{2}x} & \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty} e^{\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)t} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} u_t(x,t)\,dx$.

21) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &u_x + 2u_y = u && 1 + y - 2x > 0,\ \ x < 0 \\ &u(x,x^2) = x + \sin(x^3) && x < 0 \end{aligned}$$

22) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + \cos(\pi x) && 0 < x < 1\ ,\ t > 0 \\ &u_x(0,t) = u_x(1,t) = 1 \\ &u(x,0) = x \end{aligned}$$

רמז: התבוננו בפונקציה $v(x,t) = u(x,t) - x$.

23) נתון כי $u(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{aligned} &\triangle u = 1 && 0 \le r < 1 \\ &u(1,\theta) = c + \sin(2020\cdot\theta) \end{aligned}$$

עבור איזה קבוע c מתקיים $\lim_{r\to 0+} \frac{u(r,\theta)}{r^2} = \frac{1}{4}$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

24) נתונות הבעיות הבאות:

$$\begin{cases}\triangle v = r^2 & 0 \le r < 1 \\ v(1,\theta) = \cos^{2020}(\theta)\end{cases} \qquad \begin{cases}\triangle u = r^2 & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = \sin^{2019}(\theta) & 0 \le \theta < 2\pi\end{cases}$$

הוכיחו כי $u(0,0) > v(0,0)$.

25) נתון כי $u_n(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה: $\begin{cases}\triangle u_n = \left(\frac{r}{2}\right)^n & 0 \le r < 1 \\ u_n(1,\theta) = \sin(\theta)\end{cases}$.

מצאו את $u_n(r,\theta)$ וחשבו $\lim_{n\to\infty} u_n(r,\theta)$.

26) הוכיחו את יחידות הפתרון של בעיית החום הבאה, עבור $b > 0$.

$$\begin{cases}u_t = u_{xx} + F(x,t) & 0 < x < 1 \\ u(x,0) = h(x) \\ v_x(0,t) - b \cdot v(0,t) = f(t) & t \ge 0 \\ u_x(1,t) + b \cdot u(1,t) = g(t) & t \ge 0\end{cases}$$

רמז: היעזרו באינטגרל האנרגיה $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,t)\,dx$.

27) פתרו את הבעיה הבאה: $\begin{cases}u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin(\pi x) & 0 < x < 2 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \\ u(0,t) = 0 \qquad u(2,t) = 0\end{cases}$.

28) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases}u_t = u_{xx} + 3\sin(2x) + \frac{\pi - x}{\pi} & 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \frac{x}{\pi} + \sin(x) \\ u(0,t) = t \qquad u(\pi,t) = 1\end{cases}$$

רמז: הגדירו $u(x,t) = v(x,t) + t\frac{\pi - x}{\pi} + 1 \cdot \frac{x}{\pi}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

29) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + \sin(2\pi x) & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \\ u(0,t) = u(1,t) = t \end{cases}.$$

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $v(x,t) = u(x,t) - t$.

30) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(x) & -\infty < x < \infty, \ t > 0 \\ u(x,0) = \cos(x) + \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}.$$

חשבו $\int_{-2}^{2} |u(x,3)|^2 \, dx$.

31) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=1} = x^2 + xy + y^2 \end{cases}.$$

האם ייתכן כי $\iint_{x^2+y^2<1} u(x,y)\,dxdy = \frac{7\pi}{4}$?

32) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 3 \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = \dfrac{3}{\sqrt{1+t^2}} \qquad u(3,t) = 3 \\ u(x,0) = 3 + 3x - x^2 \end{cases}.$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{3}{2},1\right) < 2e$.

33) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = \arctan(t) \qquad u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = x(x-\pi) \end{cases}.$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{\pi}{2},1\right) > -\frac{\pi^2}{4}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

34) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<\infty\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)=\begin{cases}1-x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases} & u_t(x,0)=g(x)=0 \\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$$

חשבו $\int_0^2 \left|u(x,1)-\frac{1}{2}\right|^2 dx$.

35) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases}\triangle u=r & 0\le r<1\\ u(1,\theta)=\sin^{2019}(\theta)\end{cases}$.

חשבו $u(0,0)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com