משוואות דיפרנציאליות חלקיות וטורי פורייה

תוכן העניינים

1. משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר ראשון 1
2. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)
3. מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים 4
4. חזרה על טורי פורייה 6
5. בעיות שטורם ליוביל 11
6. משוואת הגלים ..... (ללא ספר)
7. משוואת החום ..... (ללא ספר)
8. אינטגרל אנרגיה ..... (ללא ספר)
9. משוואת לפלס ..... (ללא ספר)
10. התמרת פורייה 16

משוואות דיפרנציאליות חלקיות וטורי פורייה

פרק 1 - משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. שיטת הקווים האופייניים 1
2. שיטת לגראנג' 2

שיטת הקווים האופייניים

שאלות

1) פתרו את המשוואה עבור $\alpha \neq \frac{1}{2}$ קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = 0 \qquad \gamma = \{y = \alpha x\} \qquad u|_\gamma = x^2 + y^2$$

2) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x - y \quad \gamma = \{y = x^2, x \geq 0\} \quad 3u_x - 2u_y = 0$.

3) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x + \sin(xy) \quad \gamma = \{y = x^2, x \leq 0\} \quad u_x + 2u_y = 0$.

4) פתרו את המשוואה

$$u_x - u_y = -u \qquad y \geq 0$$
$$u(x,0) = x^2 - x^4$$

5) פתרו את המשוואה

$$2u_x - 3u_y + 2u = 0$$
$$u(x,-x) = (x+1)e^{-x}$$

6) פתרו את המשוואה

$$u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \qquad y \geq e^{-x}$$
$$u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$$

7) נתון כי $u(x,y)$ הוא פתרון של הבעיה

$$y^2 u_x + u_y = -u \qquad 0 < x < \infty \quad , \quad y > 0$$
$$u(0,y) = 0 \qquad y > 0$$
$$u(x,0) = 1 \qquad x > 0$$

8) פתרו את הבעיה כאשר a קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = -u \qquad 0 < y < x$$
$$u(x,0) = a \cdot \cos(x) + \sin(x) \qquad x > 0$$
$$u(y,y) = 0 \qquad y > 0$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

שיטת לגראנג

שאלות

1) מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד"ח $xu_x + yuu_y = u$.

2) מצאו פתרון כללי למשוואה $x^2u_x + y^2u_y = u^2$.

3) מצאו פתרון כללי למשוואה $xu \cdot u_x + yu \cdot u_y = -xy$, כאשר $x, y, u > 0$.

4) מצאו פתרון כללי למשוואה $\left(y^2 + u^2\right)u_x - xyu_y = xu$, כאשר $x, y, u > 0$.

רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, אז $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

5) מצאו פתרון למשוואה $\begin{cases} xu_x + yu_y = 2xy & x, y > 0 \\ u(x,1) = x & x > 0 \end{cases}$.

6) פתרו את המשוואה $\begin{cases} e^y u_x - e^x u_y = -e^{x+y}u & u > 0 \\ u(x,0) = 1 \end{cases}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{e^x\sqrt{y}+1}u_x + yu_y = y^2u$, בתחום $u, y > 0$.

ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

8) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\cos(y)u_x + \sin(y)u_y = e^y \sin(y)u$, בתחום שבו $0 < y < \pi$ ו- $u > 0$.

9) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{y}u_x + \frac{1}{x}u_y = 2$.

10) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+y)u_x + (y-x)u_y = x^2 - y^2$, בתחום $x, y > 0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

11) נתון כי $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}F\left(\frac{y+1}{x^2+1}\right)$ הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה $a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$.

א. מצאו את הפונקציות a,b,c.

ב. מצאו פתרון פרטי המקיים $u(0,y)=y^2$.

תשובות סופיות

1) $F\left(\frac{x}{u},\ln(y)-u\right)=0$

2) $u(x,y)=\frac{1}{F\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}}$

3) $u=\sqrt{F\left(\ln\frac{x}{y}\right)-xy}$

4) $F\left(\frac{y}{u},x^2+y^2+u^2\right)=0$

5) $u(x,y)=x\cdot y$

6) $u(x,y)=e^{e^y-1}$

7) א. $u(x,y)=e^{\frac{1}{2}y^2-F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x}\right)}$ ב. שאלת הוכחה.

8) $u(x,y)=e^{e^y-F\left(e^{-x}\sin y\right)}$

9) $u(x,y)=xy-F\left(\frac{x}{y}\right)$

10) $u(x,y)=\frac{y^2+2xy-x^2-F\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4}$

11) א. $\underbrace{\left(x^2+1\right)}_{a}u_x+\underbrace{2x\left(y+1\right)}_{b}u_y=\underbrace{2xyu}_{c}$ ב. $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}\cdot\frac{\left(\frac{y+1}{x^2+1}-1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1}-1}}\cdot\frac{y+1}{x^2+1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

משוואות דיפרנציאליות חלקיות וטורי פורייה

פרק 2 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

1. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות וטורי פורייה

פרק 3 - מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים

תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים 4

מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים:

שאלות:

1) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\int_a^b |f(x)|dx$ מהווה נורמה במרחב זה.

2) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב זה.

3) יהי $V=R_{\le 2}[x]$ המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה / שווה מ-2 מעל הממשיים.

לכל שני פולינומים $p(x),q(x)$ ב- V נגדיר:

$\langle p(x),q(x)\rangle = p(-1)q(-1)+p(0)q(0)+p(1)q(1)$.

הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ הינה מכפלה פנימית.

4) נגדיר את המרחב $V=C^1[-1,1]$ (מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$).

נגדיר: $\langle f(x),g(x)\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx+\int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}dx$.

הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ הינה מכפלה פנימית.

5) הוכיחו כי בכל מרחב מכפלה פנימית E מתקיים לכל $f,g\in E$:

א. $\langle u,f+g\rangle=\langle u,f\rangle+\langle u,g\rangle$ $\forall u\in E$.

ב. $\mathrm{Re}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2\right)$.

ג. $\mathrm{Im}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+ig\|^2-\|f-ig\|^2\right)$.

ד. $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left\{\|f\|^2+\|g\|^2\right\}$ (שוויון המקבילית).

6) יהי V מרחב מכפלה פנימית.

נסמן $w=u+v$ וקטורים במרחב.

הוכיחו כי אם $\langle u,v\rangle=0$ אזי $\|w\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

7) נגדיר את המרחב V להיות מרחב הפונקציות $f(x)$ הממשיות הגזירות ברציפות פעמיים בקטע $[a,b]$ (כלומר $f''(x)$ רציפה ב-$[a,b]$).

בדקו האם $\langle f,g\rangle=\int_a^b f''(x)g''(x)dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

8) נגדיר את המרחב V להיות מרחב של פונקציות $f(x)$ ממשיות וגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$ (כלומר הנגזרת $f'(x)$ רציפה בקטע $[-1,1]$) כך ש- $f(-1)=0$.

נגדיר $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)dx$.

הוכיחו כי $\langle f,g\rangle$ מהווה מכפלה פנימית במרחב V.

9) יהי V מרחב הפונקציות הרציפות המרוכבות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\int_a^b|f(x)|dx+\max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב V.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) $f(x)=1$
8) הוכחה.
9) הוכחה.

משוואות דיפרנציאליות חלקיות וטורי פורייה

פרק 4 - חזרה על טורי פורייה

תוכן העניינים

1. טור פורייה ממשי 6
2. טור פורייה מרוכב 7
3. המשכה זוגית ואי זוגית 8
4. טור פורייה בקטע כללי 9

טור פורייה ממשי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\sin(|x|)$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1 \\ 0 & else\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\sum_{n=1}^{20}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

2) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$

3) $\sin(|x|)\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}\cos(2kx)$

4) $f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 2x & 0\le x<\pi\end{cases}$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ \sin(x) & 0\le x<\pi\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$

2) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}-\frac{1}{2\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{in}+\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}e^{inx}$

3) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-3(-1)^n\frac{\pi}{in}\right]e^{inx}$

4) $f(x)\sim-\frac{1}{2}-\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{3}{\pi i(2k-1)}e^{i(2k-1)x}$

5) $f(x)\sim\frac{1}{4i}e^{ix}-\frac{1}{4i}e^{-ix}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}e^{i[2k]x}$

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0<x<\pi$

מתקיים $x=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=1$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ והוכיחו כי:

א. לכל $0<x<\pi$ מתקיים $1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}=-\frac{\pi}{4}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[0,2\pi]$.

2) תהי הפונקציה $f(x)=\min\{1,|x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2,2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0,2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2}$.

4) פתחו את $f(x)=|x|$ לטור פורייה בקטע $[-1,1]$.

5) פתחו את $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ 2-x & 1<x<2\end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0,2]$.

6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x)=f(x+2)$ ובנוסף $-1\le x<1$ $f(x)=2-|x|$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$.

ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1,1]$?

7) מצאו טור קוסינוסים $f(x)=x$ בקטע $[0,3]$.

8) פתחו את $f(x)=\cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0,\pi]$.

תשובות סופיות:

1) $0 \le x \le 2\pi$ $$x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx$$

2) א. $$b_n = 0 \quad , \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & else \end{cases}$$

ב. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3) א. $$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1|\, 4n^2\pi^2} e^{in\pi x}$$ ב. ראו סרטון. ג. $\frac{3-e}{4(e-1)}$

4) $$|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\pi [2k-1] x\right)$$

5) $$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi [2k-1] x}{2}\right)$$

6) א. $$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos\left([2k-1]\pi x\right)$$ ב. $\frac{\pi^4}{96}$ ג. $\frac{\pi^2}{8}$

ד. אם f רציפה בקטע $[a,b]$, $f(a) = f(b)$ ו-f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל-f בקטע $[a,b]$.

7) $$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3} x\right)$$

8) $$\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2} \sin\left([2k-1]x\right)$$

משוואות דיפרנציאליות חלקיות וטורי פורייה

פרק 5 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל 11
2. טורי קוסינוסים וסינוסים ..... (ללא ספר)

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית
$\left(p(x)y'(x)\right)'+\left(\lambda r(x)-q(x)\right)y(x)=0$.

א. $y''-2xy'+\lambda y=0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda)y=0$ (משוואת בסל)

2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y''+e^{2x}y'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)+4y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y''+4y'+xy+\lambda e^x y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות **4-7**:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

4) $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 0<x<\pi \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(\pi)-y'(\pi)=0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0, & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. פתרו את הבעיה.

9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}$.

ב. נציב $\ell=1$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$.

1. פתחו את הפונקציה $f(x)=1 \ , \ 0\le x\le 1$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.
התחל את הטור מ-$n=1$.
2. מה סכום הטור ב-$x=0$?
האם הוא שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$?

ג. נציב $\ell=2$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<2 \\ y(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases}$.

פתחו את הפונקציה $f(x)=x \ , \ 0\le x\le 2$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$.

ב. פתחו את הפונקציה $f(x)=e^x, 0\le x\le \pi$ לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.
התחילו את הטור מ-$n=1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<e \\ y(1)=0 \\ y'(e)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.

ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את $f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x\le \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e}\le x\le e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.

הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.

ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x=2$, $x=1.5$, $x=\sqrt{e}$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi n)=(-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi n)=0$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\left(e^{-x^2}y'\right)'+\left(\lambda e^{-x^2}-0\right)y=0$ ב. $\left(xy'\right)'+\left(\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)-\left(-x\right)\right)y=0$

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\quad n=1,2,3,\ldots$.

5) פונקציות עצמיות: $\phi_n(x)=n\cos nx+\sin nx\qquad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=n^2,\quad n=1,2,3,\ldots$; בנוסף, $\lambda=-1$ הוא ע"ע של הבעיה,

המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=e^x$.

6) פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\sin(\omega_n x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

7) פונקציות עצמיות: $y_n(x)=\sin(\omega_n x)-\omega_n\cos(\omega_n x)\qquad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

בנוסף, $\lambda_0=0$ הוא ע"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=x-1$.

8) א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x,\qquad n=1,2,3,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

9) א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right)\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ב. סכום הטור ב-$x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$.

ג. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$ כאשר $(0<x<2)$.

10) א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ב. $e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1}-1}{1^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$ כאשר $0<x<\pi$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,\ldots$ $\varphi_n(x)=\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\ln x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,\ldots$ $\lambda_n=\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$.

ג. שאלת הוכחה.

ד. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-2\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\ln x\right)$

ה. סכום הטור ב- $x=\sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x=1.5$ הוא 1; וב- $x=2$ הוא 0.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות דיפרנציאליות חלקיות וטורי פורייה

פרק 6 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

1. קטע אינסופי ..... (ללא ספר)
2. קטע חצי אינסופי ..... (ללא ספר)
3. הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית ..... (ללא ספר)
4. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)
5. משולש הקביעה ..... (ללא ספר)
6. עקרון דוהמל ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות וטורי פורייה

פרק 7 - משוואת החום

תוכן העניינים

1. נוסחת פוואסון בקטע אינסופי ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים בקטע סופי ..... (ללא ספר)
3. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)
4. עקרון דוהמל ..... (ללא ספר)
5. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות וטורי פורייה

פרק 8 - אינטגרל אנרגיה

תוכן העניינים

1. אינטגרל אנרגיה ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות וטורי פורייה

פרק 9 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

1. חזרה על אינטגרל קווי ..... (ללא ספר)
2. משוואת לפלס בעיגול ..... (ללא ספר)
3. משוואת לפלס בטבעת ..... (ללא ספר)
4. משוואת לפלס בגזרה מעגלית ..... (ללא ספר)
5. משוואת לפלס במלבן ..... (ללא ספר)
6. עקרון הממוצע ..... (ללא ספר)
7. עקרון המקסימום והמינימום ..... (ללא ספר)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות וטורי פורייה

פרק 10 - התמרת פורייה

תוכן העניינים

1. מבוא כללי 16
2. נוסחת כיווץ והזזה 18
3. נוסחת הנגזרת 20
4. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה 21
5. נוסחת המומנט 23
6. נוסחת ההתמרה ההפוכה 25
7. נוסחת התמרה כפולה ..... (ללא ספר)
8. משפט פלנשראל 26
9. משפט הקונבולוציה 27
10. תרגילים מסכמים 31

מבוא כללי:

שאלות:

1) חשבו את התמרת פורייה של $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$.

2) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$.

3) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & else\end{cases}$.

4) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 2 & 1<|x|<2\\ 0 & else\end{cases}$.

5) הוכיחו כי התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & x>0\\ e^{bx} & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים הינה
$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{b-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\right]$.

6) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

7) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 2 & 1\le x<2\\ 0 & else\end{cases}$.

8) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & 0\le x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

9) הוכיחו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{2ix} & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$ הינה $f(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$.

10) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

11) חשבו את התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}x & |x|<a\\ 0 & else\end{cases}$ עבור $a>0$.

12) האם קיימת $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\begin{cases}1-|\omega| & |\omega|\le\frac{1}{2}\\ 0 & |\omega|>\frac{1}{2}\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\frac{1-\cos(\omega)}{\pi\omega^2}$

3) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi(1+i\omega)}$

4) $f(\omega)=\frac{2\sin(2\omega)-\sin(\omega)}{\pi\omega}$

5) הוכחה.

6) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\omega)+i\left[\cos(\omega)-1\right]}{\omega}$

7) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{1+e^{-i\omega}-2e^{-i2\omega}}{i\omega}$

8) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1-i\omega}$

9) הוכחה.

10) $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sin([1-\omega])}{1\quad\omega}-\frac{\sin([1+\omega])}{1\,|\,\omega}\right\}$

11) $f(\omega)=-\frac{1}{\pi}i\frac{\sin(\omega a)-\omega a\cos(\omega a)}{\omega^2}$

12) לא. אינה רציפה בנקודות $\omega=\pm\frac{1}{2}$.

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-r,r]\\ 0 & else\end{cases}$ כאשר $r>0$.

2) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה כי $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) נתונה פונקציה $g(x)\in G(R)$ בעלת התמרת פורייה $g(\omega)$.
מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב-$g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

4) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-ax^2}$ כאשר $a>0$.
רמז: $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\cos(4\pi\omega)\cdot\frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.
רמז: $F\left\{\chi_{[-1,1]}(x)\right\}=\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\frac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{16}}$

3) $f(x)=\frac{g(x+1)+g(x-1)}{2}$

4) $f(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}}$

5) $f(x)=\frac{\pi}{2}\begin{cases}1 & 4\pi-2\le x\le 4\pi+2 \ \ or \ \ -4\pi-2\le x\le -4\pi+2 \\ 0 & else\end{cases}$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

1) נניח כי $f(x)\in G$ גזירה, מקיימת $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$, $f'(x)\in G$ ו- $f(\omega)=\frac{\omega}{1+\omega^{30}}$.
מצאו התמרת פורייה של $f'(x)\cos(2x)$.

2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $F\left\{\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}\right\}_\omega=\left(-\frac{1}{2}\right)(i\omega)\frac{1}{2|a|}e^{-|\omega a|}$.

3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\omega^2e^{-|\omega|}$.
רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{i\cdot\frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}}+i\cdot\frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2}$

2) הוכחה.

3) $f(x)=(-2)\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

1) הוכיחו כי התמרת פורייה של $F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)}=\frac{1}{\pi i}\frac{2c\cdot\omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$.

2) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1}-\frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$.

3) הוכיחו כי התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases}\sin(ax)e^{-bx} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים,
הינה $g(\omega)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{bi-(\omega-a)}-\frac{1}{bi-(\omega+a)}\right]$.

4) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\cos(2x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה
כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\sin^2(3x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה
ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

6) נניח כי $f(x)\in G(R)$ ונגדיר $g(x)=f(3x-2)\cdot\cos(x)$. בטאו את $g(\omega)$ על ידי $f(\omega)$.

7) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=e^{3i\omega}\cdot e^{-|\omega-2|}$. רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

8) תהי $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$.
חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

א. $H(x)e^{-ax}$ כאשר $a>0$.

ב. $H(x)e^{-ax}\cos(bx)$ כאשר $a,b>0$.

ג. $H(x)e^{-ax}\sin(bx)$ כאשר $a,b>0$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $f(x)=2\pi i\cdot\chi_{[-1,1]}(x)\cdot\sin(x)$

3) הוכחה.

4) $$F\left\{e^{-|x|}\cos(2x)\right\}=\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega+2]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega-2]^2\right)}$$

5) $$g(\omega)=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}-\left[\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega+6]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega-6]^2\right)}\right]$$

6) $$g(\omega)=\frac{1}{6}\left[e^{-i\frac{2}{3}(\omega+1)}f\left(\frac{\omega+1}{3}\right)+e^{-i\frac{2}{3}(\omega-1)}f\left(\frac{\omega-1}{3}\right)\right]$$

7) $$F\left\{e^{2i[x+3]}\frac{2}{1+[x+3]^2}\right\}$$

8) א. $$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)}$$

ב. $$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a+i[\omega-b]}+\frac{1}{a+i[\omega+b]}\right)$$

ג. $$\frac{1}{4\pi i}\left(\frac{1}{a+i[\omega-b]}+\frac{1}{a+i[\omega+b]}\right)$$

נוסחת המומנט:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases}x & x\in(-1,1)\\ 0 & else\end{cases}$ על ידי שימוש בנוסחה $F\{x\cdot f(x)\}=i\frac{d}{d\omega}f(\omega)$.

2) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x^2e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x\cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}$.

4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x)=e^{-x^2}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=8x^3e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$.

6) תהי $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^5} & x\geq 1\\ 0 & x<1\end{cases}$.

הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

7) נתון כי התמרת פורייה של $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega)=\frac{1}{1+|\omega|}$.

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}|x\cdot f(x)|dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

1) $i\cdot\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\pi\omega^2}$

2) $F\left\{x^2e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{\omega^2}{2}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

3) $F\left\{x\cdot e^{-|x|}\right\}=-\frac{i}{\pi}\frac{2\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$

4) $f\left(\omega\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) $f\left(\omega\right)=\frac{1}{256}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\left(27i\omega^3+216\omega^2-792i\omega-1088\right)e^{i\omega-\frac{3\omega^2}{16}-\frac{5}{3}}$

6) הוכחה.

7) הוכחה.

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)}d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

2) חשבו $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{\sin(\omega)\cos(\omega x)}{\pi\omega}d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

1) ראו סרטון.

2)
$$\begin{cases}0 & |x|>1\\ 1 & |x|<1\\ \frac{1}{2} & x=1\ ,\ x=-1\end{cases}$$

משפט פלנשראל:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x)=\chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a>0$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\frac{\sin(bx)}{x}dx$ עבור $a,b>0$.

2) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

3) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)}dx=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})\cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=\frac{\sin(\omega a)}{\pi\omega}$ ב. $\pi\cdot\min\{a,b\}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)}$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & else \end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים.

2) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים $x > 0$ ו- $x \le 0$.

3) מצאו פונקציה $f \in G$ כך ש- $f(\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2$.

4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$

המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$.

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t) \in E$ מתקיים השוויון.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t) - f''(t)\right) g(x-t) dt = 2f(x)$$.

5) נגדיר $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.

תזכורת: $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$.

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|} + |x| e^{-|x|}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}dx=\frac{\pi}{3}$.

8) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[1,2]}(x)$.

9) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,2]}(x)$.

10) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}$.

11) חשבו את הקונבולוציה $\left(e^{-x^2}*e^{-x^2}\right)_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f(x-t)dt=e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$.

13) נניח כי $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy\equiv 0$ הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$.

תשובות סופיות:

1) $\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x\in[-2,0] \\ 2-x & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$

2) $\left(f*f\right)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x\in[-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$

4) $g(x) = e^{-|x|}$

5) $\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{x^2+9}$

6) א. $\frac{2}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$ ב. $f(x) = e^{-|x|}$

7) א. $\left(f*f\right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>2 \\ 2-x & 1<x<2 \\ x & 0<x<1 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ ב. הוכחה.

8) $\left(f*f\right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>4 \\ 4-x & 3<x<4 \\ x-2 & 2<x<3 \\ 0 & x<2 \end{cases}$

9) $$(f*f)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>4\\ 4-x & 2<x<4\\ x & 0<x<2\\ 0 & x<0\end{cases}$$

10) $$\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>3\\ 3-x & 2<x<3\\ x-1 & 1<x<2\\ 0 & x<1\end{cases}$$

11) א. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$

12) $$f(x)=\sqrt[4]{\frac{6}{\pi}}e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

13) הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $g(x)=\begin{cases}\cos(x) & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ג. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)\sin(x)}{(1-x^2)}dx$.

ד. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^2}\sin^2(\pi x)dx$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x)=x\cdot e^{-|x|}$.

ב. מצאו את כל הפונקציות $h(y)$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} h'(y)e^{-|x-y|}dy = x\cdot e^{-|x|}$.

3) יהי $A>0$ קבוע. נגדיר $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le A\\ 0 & else\end{cases}$.

ידוע כי ישנה פונקציה $g(x)\in G$ המקיימת $g(\omega)=f(\omega)f(-\omega)$.

מצאו במפורש את $g(x)$.

4) נניח כי $f(x)\in C^2(-\infty,\infty)$ כך ש-$f'(x), x\cdot f'(x), f''(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$

ומתקיים $f''(x)+x\cdot f'(x)+f(x)=0$ לכל x ממשי.

א. הוכיחו כי $f(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$.

ב. חשבו את $f(\omega)$ אם נתון כי $f(0)=1$.

ג. מצאו את $f(x)$.

5) תהי $f(x)=\begin{cases}2 & |x|\le 1\\ 4 & 1\le|x|\le 2\\ 0 & else\end{cases}$.

א. חשבו את $f(\omega)$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\left[2\sin(2t)-\sin(t)\right]^2}{t^2}dt$.

ג. חשבו את האינטגרל $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{2\sin(2t)-\sin(t)}{\pi t}\cos(t)\,dt$.

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x^2}{\pi^2} & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ב. חשבו את האינטגרלים: $\int_0^\infty\left(\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\right)^2dx$

ו- $\int_0^\infty\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\cos(x)\,dx$.

7) נגדיר $\phi(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. הוכיחו כי המערכת $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורותונורמלית ב- $L^2_{PC}(-\infty,\infty)$.

8) תהי $f\in G$ פונקציה כך ש- $f'\in G$ פונקציה רציפה. מצאו פונקציה $g\in G$ המקיימת את המשוואה $g(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{u-t}g(u)\,du+f'(t)$.

9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{1}{\left(1+\omega^2\right)^2}$.

10) פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+b^2}dt=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}$.

11) נגדיר $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(\omega-t)\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(t)e^{i\omega x}dtd\omega$.

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור $f(x)$.

תזכורת: $\chi_{[a,b]}(t)=\begin{cases}1 & t\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

12) השתמשו במשפט פלנשראל על מנת לחשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)\left(x^2+b^2\right)}dx$

כאשר $a,b>0$.

13) מצאו את התמרת הפורייה של $f(x)=e^{-\left(x^2+2x+5\right)}$.

14) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos(bx)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$ לכל $a,b>0$ קבועים.

15) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(x)\cos(x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8e}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$.

16) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\sin^3(x)xe^{-x}dx=\frac{9}{25}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\sin(\omega\pi)\cdot\frac{2}{1-\omega^2}$ ב. $g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\omega\sin(\omega\pi)}{1-\omega^2}$

ג. $\frac{\pi}{2}\sin(1)$ ד. $\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $-\frac{2i\omega}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$ ב. $h(y)=-e^{-|y|}$, $-h(y)=e^{-|y|}$

3)
$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(A+x)^3}{3}-\frac{(A+x)^2}{2}x\right) & -A<x<0\\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{A^3}{3}-\frac{A^2}{2}x+\frac{x^3}{6}\right) & 0<x<A\\ 0 & else\end{cases}$$

4) א. הוכחה.

5) א. $\frac{4\cdot\sin(2\omega)-2\cdot\sin(\omega)}{\pi\omega}$

6) א. $2\frac{\sin(\pi\omega)-\pi\omega\cos(\pi\omega)}{\pi^3\omega^3}$

7) הוכחה.

8) $g(t)=f(t)+f'(t)$

9)
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}e^{x}(1-x) & x<0\\ \frac{\pi}{2}e^{-x}(1+x) & x>0\end{cases}$$

10) $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{b}{a}\frac{(a-b)x}{\left(x^2+(a-b)^2\right)^2}$

11) $f(x)=4\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2}$

12) $\frac{\pi}{a+b}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\frac{\omega}{b^2+\omega^2}d\omega$

13) $f(\omega)=\frac{1}{e^4}\cdot e^{i\omega}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

14) הוכחה.

ב. $e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ ג. $\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

ב. $\frac{5\pi}{2}$ ג. $\frac{3\pi}{2}$

ב. $\frac{1}{15}$ ו- $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)$

15) הוכחה.

16) הוכחה.