מכניקה לתלמידי מתמטיקה 77154

תוכן העניינים

מכניקה לתלמידי מתמטיקה 77154

פרק 1 - מבוא מתמטי -

תוכן העניינים

סינוס קוסינוס ומה שביניהם:

רקע

במשולש ישר זווית:

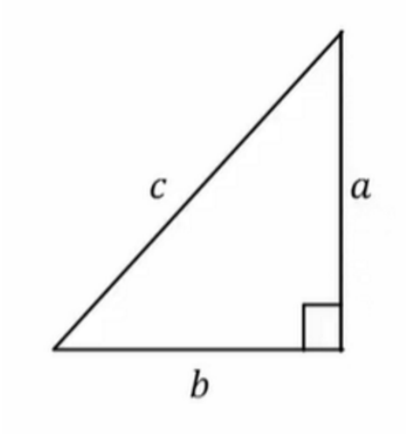
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{יתר}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{יתר}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{ליד ניצב}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{ניצב שמול}} = \frac{1}{\tan\alpha}$$



משפט פיתגורס:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

זהויות:

$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha$ $\cot(90^\circ-\alpha)=\tan\alpha$	$90^\circ-\alpha$
$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$ $\tan(90^\circ+\alpha)=-\cot\alpha$ $\cot(90^\circ+\alpha)=-\tan\alpha$	$90^\circ+\alpha$
$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(180^\circ-\alpha)=-\cot\alpha$	$180^\circ-\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$-\alpha$
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha==1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$	2α
$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$	$\alpha\pm\beta$

סכום והפרש של פונקציות:

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

ערכים ששווה לזכור:

הזווית\הפונקציה	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	לא מוגדר

פתרונות עבור:

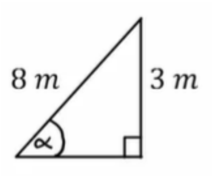
$\sin x=\sin\alpha$	$x_1=\alpha+2\pi k$ $x_2=\pi-\alpha+2\pi k$
$\cos x=\cos\alpha$	$x_1=\alpha+2\pi k$ $x_2=-\alpha+2\pi k$
$\tan x=\tan\alpha$	$x=\alpha+\pi k$

שאלות:

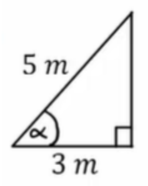
1) דוגמה 1-חישוב אלפא

חשב את הזווית אלפא במקרים הבאים:

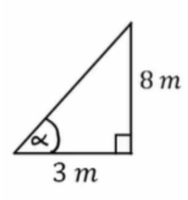
א.



ב.



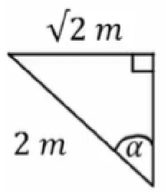
ג.



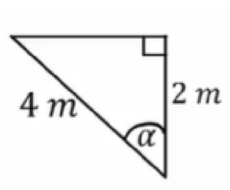
2) דוגמה 2-משולשים שמסורטטים אחרת

חשב את הזווית אלפא במקרים הבאים:

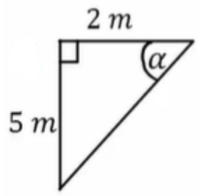
א.



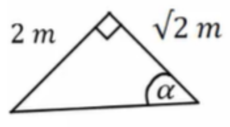
ב.



ג.

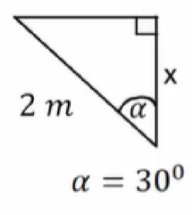


ד.

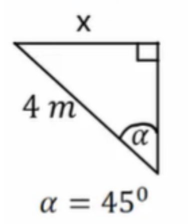


3) דוגמה-2-מציאת ניצבים

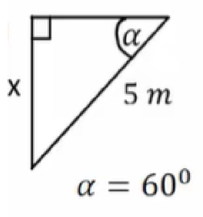
א.



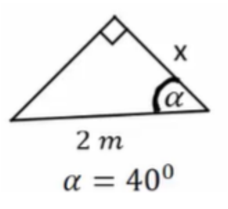
ב.



ג.



ד.



תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 22^\circ$ ב. $\alpha = 53^\circ$ ג. $\alpha = 69^\circ$

2) א. $\alpha = 45^\circ$ ב. $\alpha = 60^\circ$ ג. $\alpha = 68.2^\circ$ ד. $\alpha = 55^\circ$

3) א. $\sqrt{3}m$ ב. $2\sqrt{2}m$ ג. $\frac{5\sqrt{3}m}{2}$ ד. $1.53m$

נגזרות ואינטגרלים בסיסיים:

רקע

נגזרות:

הנגזרת נותנת את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה כלשהיא.

אם y היא פונקציה של x אז הסימון של הנגזרת של y לפי x הוא $\frac{dy}{dx}$ או y'.

נגזרת של פולינום:

$$y(x) = x^n \quad \rightarrow \quad y'(x) = nx^{n-1}$$

כפל בקבוע אפשר להוציא מהנגזרת:

$$\left(Ay(x)\right)' = Ay'(x)$$

נגזרת של מכפלה:

$$y(x) = \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x) \quad \rightarrow \quad y'(x) = \mathrm{f}'(x)\mathrm{g}(x) + \mathrm{f}(x)\mathrm{g}'(x)$$

כלל שרשרת:

אם y היא פונקציה של x ו- x הוא פונקציה של t אז :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

נגזרות של פונקציות נוספות:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

אינטגרל:

פעולה הפוכה לנגזרת.

אינטגרל של פולינום

$$\int Ax^n\,\mathrm{d}x = A\tfrac{x^{n+1}}{n+1}$$

אינטגרל לא מסוים, מוסיפים קבוע לתוצאת האינטגרל.

אינטגרל מסוים, מציבים גבולות בתוצאה של האינטגרל.

$$\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

מה עושה האינטגרל?

האינטגרל מבצע סכימה על ערכי הפונקציה.

האינטגרל נותן את השטח מתחת לגרף הפונקציה.

שאלות:

1) דוגמה 1

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y=5x^4\ ,\ \frac{dy}{dx}=?$

ב. $y=ax^5\ ,\ \frac{dy}{dx}=?$

ג. $y=5x+2x^{18}\ ,\ \frac{dy}{dx}=?$

ד. $f(x)=8x^2+2\ ,\ \frac{df}{dx}=?$

ה. $y=6t^2\ ,\ \frac{dy}{dt}=?$

ו. $x=5t^3\ ,\ \frac{dx}{dt}=?$

ז. $x=5t^4+t^3+4\ ,\ \frac{dx}{dt}=?$

ח. $f(t)=\mathrm{A}t^6+\mathrm{B}t+\mathrm{C}\ ,\ \frac{df}{dt}=?$

2) דוגמא 2

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y=(5x^4+2)(5x+2x^{18})\ ,\ \frac{dy}{dx}=?$

ב. $y=\mathrm{A}x^5(\mathrm{B}+\mathrm{C}x^3)\ ,\ \frac{dy}{dx}=?$

ג. $y=5x+2x^2(4x+5x^5)\ ,\ \frac{dy}{dx}=?$

ד. $y=(5t^2+1)(2t+27+5t^3)\ ,\ \frac{dy}{dt}=?$

ה. $x=(2t^3+7)(4t+3+6t^2)\ ,\ \frac{dy}{dt}=?$

3) **דוגמא 3-נגזרת פנימית**

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y=(x+2)^4$, $\frac{dy}{dx}=?$

ב. $y=5(8x^2+x)^5$, $\frac{dy}{dx}=?$

ג. $y=5t+2(5t^4+4)^{14}$, $\frac{dy}{dx}=?$

ד. $f(t)=8(5t^4+t^3+4)^2+2$, $\frac{df}{dt}=?$

4) **דוגמה 4-כלל שרשרת**

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y=(x+2)^4$, $x=2t$, $\frac{dy}{dt}=?$

ב. $y=5(8x^2+x)^5$, $x=5t^4+4$, $\frac{dy}{dt}=?$

ג. $y=5x+2(5x^4+4)^{14}$, $x=3t^2+t$, $\frac{dy}{dt}=?$

ד. $y=x^2$, $x=t^2$, $\frac{dy}{dt}=?$

5) **דוגמה 5-נגזרות של פונקציות נוספות**

מצאו את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

א. $y=\sin(ax)$ כאשר a קבוע.

ב. $y=e^{-x^2}$

6) **דוגמה 1-אינטגרלים בסיסיים**

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^7dx$

ב. $\int xdx$

ג. $\int dx$

ד. $\int 3dx$

ה. $\int 7x^4dx$

ו. $\int(5x^2+3)dx$

ז. $\int\left(8x^7+5x\right)dx$

ח. $\int \mathrm{A}x^7dx$

ט. $\int\left(\mathrm{A}x^7+\mathrm{B}x\right)dx$

7) דוגמה 2-אינטגרל מסוים

חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\int_0^2 x^5dx$

ב. $\int_1^5 4dx$

ג. $\int_{-1}^3 7x^4dx$

ד. $\int_0^4\left(2x^2+4\right)dx$

ה. $\int_{-1}^2\left(\mathrm{A}x^7+\mathrm{B}x\right)dx$

8) דוגמה 3-אינטגרל של פונקציות נוספות

חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\int_0^\pi \sin xdx$

ב. $\int_0^\pi \cos\left(2x\right)dx$

ג. $\int e^{3x}dx$

ד. $\int_0^5 2e^{-3x}dx$

ה. $\int_3^5 \frac{1}{x}dx$

ו. $\int \frac{1}{x^2}dx$

ז. $\int e^{ax}dx$

תשובות סופיות:

1) א. $20x^3$ ב. $5a\cdot x^4$ ג. $5+36x^{17}$ ד. $16x$ ה. $12\cdot t$
ו. $15t^2$ ז. $20t^3+3t^2$ ח. $6\mathrm{A}t^5+\mathrm{B}$

2) א. $20x^3\cdot\left(5x+2x^{18}\right)+\left(5x^4+2\right)\left(5+36x^{17}\right)$ ב. $5\mathrm{A}x^4\left(\mathrm{B}+\mathrm{C}x^3\right)+3\mathrm{AC}x^7$
ג. $5+4x\cdot\left(4x+5x^5\right)+2x^2\left(4+25x^4\right)$
ד. $(10t)\left(2t+27+5t^3\right)+\left(5t^2+1\right)\left(2+0+15t^2\right)$
ה. $\left(6t^2+0\right)\left(4t+3+6t^2\right)+\left(2t^3+7\right)\left(4+0+12t\right)$

3) א. $4\left(x+2\right)^3\cdot 1$ ב. $25\left(8x^2+x\right)^4\left(16x+1\right)$ ג. $5+560t^3(5t^4+4)^{13}$
ד. $16\left(5t^4+t^3+4\right)\left(20t^3+3t^2\right)$

4) א. $8\left(2t+2\right)^3$ ב. $500t^3\left(8\left(5t^4+4\right)^2+5t^4+4\right)\cdot\left(16\left(5t^4+4\right)+1\right)$
ג. $\left(5+2\cdot 14\left(5x^4+4\right)^{13}\cdot\left(5\cdot 4x^3+0\right)\right)\cdot\left(3+2t+1\right)$ ד. $4t^3$

5) א. $\cos\left(ax\right)\cdot a$ ב. $e^{-x^2}\cdot\left(-2x\right)$

6) א. $\frac{x^8}{8}+\mathrm{C}$ ב. $\frac{x^2}{2}+\mathrm{C}$ ג. $x+\mathrm{C}$ ד. $3x$ ה. $\frac{7x^5}{5}+\mathrm{C}$
ו. ז. $x^8+\frac{5}{2}x^2+\mathrm{C}$ ח. $\mathrm{A}\cdot\frac{x^8}{8}+\mathrm{C}$ ט. $\mathrm{A}\frac{x^8}{8}+\mathrm{B}\frac{x^2}{2}+\mathrm{C}$

7) א. 10.67 ב. 16 ג. 341.6 ד. 58.67 ה. $31.875\mathrm{A}+1.5\mathrm{B}$

8) א. 2 ב. 0 ג. $\frac{e^{3x}}{3}+\mathrm{C}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$
ו. $-\frac{1}{x}+\mathrm{C}$ ז. $\frac{e^{ax}}{a}$

אינטגרל כפול ומשולש:

שאלות:

פתרו את האינטגרלים הבאים:

1) **דוגמה 1**

$$\int_0^3\int_0^2 3\cdot x^3y^2dxdy$$

2) **דוגמה 2**

$$\int_1^2\int_0^3 \left(x^2+2y\right)dxdy$$

3) **דוגמה 3**

$$\int_0^2\int_1^3 \left(x^2+y\right)dydx$$

4) **דוגמה 4**

$$\int_0^1\int_0^2 x\cdot z^2dxdz$$

5) **דוגמה 5**

$$\int_1^5\int_0^4 2\cdot y^3dydz$$

6) **דוגמה 6**

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2drd\theta$$

7) **דוגמה 7**

$$\int_a^b\int_0^c 4\cdot x^2ydxdy$$

8) **דוגמה 8**

$$\int_a^b\int_0^c \left(4z+r^2\right)drdz$$

9) **דוגמה 9**

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R 4a\cdot r^2drd\theta$$

10) **דוגמה 10**

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R 4yr^2drd\theta$$

11) **דוגמה 11**

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin\varphi d\theta d\varphi$$

12) **דוגמה – אינטגרל משולש**

$$\int_1^2\int_0^2\int_0^3 \left(zx^2+3y\right)dydxdz$$

תשובות סופיות:

1) 108

2) 18

3) 13.33

4) $\frac{2}{3}$

5) 512

6) 56.55

7) $\frac{4c^3}{3}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)$

8) $2cb^2+\frac{c^3}{3}b-2ca^2-\frac{a^3}{3}$

9) $\frac{4aR^3}{3}2\pi$

10) $\frac{8\pi yR^3}{3}$

11) $4\pi r^2$

12) 39

מעברי יחידות:

שאלות:

1) דוגמה 1

נתון: $A = 2km\ ,\ B = 10gr$.

מצא את $C = A \cdot B$ ביחידות של m.k.s.

2) דוגמה 2

נתון: $A = 2m^2\ ,\ B = 3gr\ ,\ C = 5c.m \cdot s$

חשב את הגדלים הבאים ביחידות של m.k.s:

א. $D = 2 \cdot A$

ב. $E = \frac{5 \cdot B \cdot C}{A}$

3) מעבר יחידות בחזקות

מצא את הגדלים הבאים ביחידות של ס"מ:

א. $A = 1m^2$

ב. $B = 1m^3$

4) סנטימטר בשלישית

הבע את הערכים הנ"ל ביחידות של $c.m^3$:

א. $5.2m^3$

ב. $320mm^3$

ג. $0.0054km^3$

5) ליטר, דוגמה

הבע את הגדלים הבאים ב- Liter:

א. $5m^3$

ב. $5mm^3$

תשובות סופיות:

1) $20m\cdot kg$

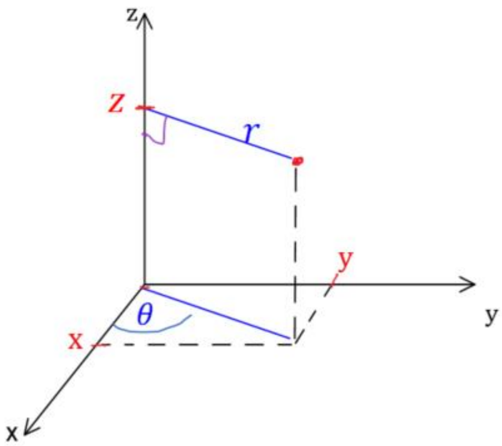
2) א. $4m^2$ ב. $37.5\cdot10^{-5}\dfrac{sec\cdot kg}{m}$

3) א. $10^4 cm^2$ ב. $10^6 cm^3$

4) א. $5.2\cdot10^6 cm^3$ ב. $0.32cm^3$ ג. $5.4\cdot10^{12} cm^3$

5) א. $5\cdot10^3 Liter$ ב. $5\cdot10^{-6} Liter$

קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאלים:



רקע:

קואורדינטות גליליות: (r, θ, z)

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

טבעת

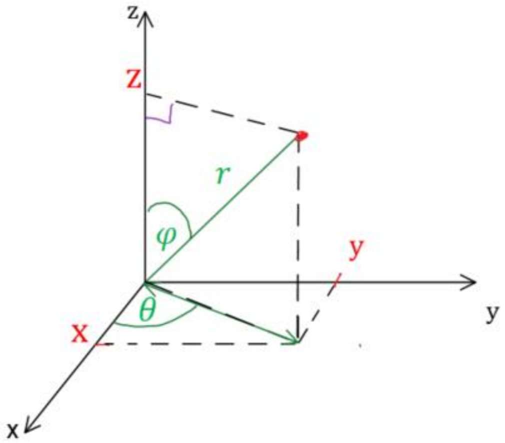
$$dl = r\,d\,\theta / d\,r / d\,z$$

דיסקה   מעטפת גלילית

$$dS = rd\theta\,d\,r / r\,d\theta\,d\,z / d\,r\,dz$$

גליל מלא

$$dV = rd\theta\,dr\,dz$$



קואורדינטות כדוריות: (r, θ, φ)

$$z = r\cos\varphi$$

$$x = r\sin\varphi\cos\theta$$

$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$dl = d\,r / r\sin\varphi d\theta / r\,\mathrm{d}\varphi$$

מעטפת בדור

$$dS = r^2\sin\varphi d\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

בדור מלא

$$dV = r^2\sin\varphi dr d\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

שאלות:

1) שטח מעגל

חשבו שטח דיסקה בעלת רדיוס R (שטח מעגל) באמצעות אינטגרל על אלמנט שטח בקואורדינטות פולריות.

2) חישוב נפח גליל

חשבו נפח גליל באמצעות אינטגרל על אלמנט נפח בקואורדינטות גליליות.

תשובות סופיות:

1) $S = \pi R^2$

2) $V = \pi R^2 h$

צפיפות:

שאלות:

1) דיסקה עם חור

א. מצא את הצפיפות של דיסקה בעלת רדיוס R ומסה M?

ב. בדיסקה קדחו חור ברדיוס r.
מצא את המסה שהוצאה מהדיסקה.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{M}{\pi R^2}$ ב. $M\left(\frac{r}{R}\right)^2$

צפיפות אינפיטיסימלית:

שאלות:

1) מוט עם צפיפות לא אחידה

חשב את המסה הכוללת של מוט בעל אורך L וצפיפות מסה $\lambda(x)=\lambda_0\frac{x}{\mathrm{L}}$

כאשר x הוא המרחק מהקצה השמאלי של המוט והפרמטרים: L , λ_0 הם קבועים.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\lambda_0\mathrm{L}}{2}$

חשבון דיפרנציאלי:

שאלות:

1) נגזרת סתומה**

נתונה הפונקציה הבאה: $f\left(x,y\right)=y^{\sin x}+6y+e^{x^2+y^2}=0$.

מצא את: $\frac{dy}{dx}$.

2) אלמנט אורך בהחלפת קואורדינטות**

נתונות קואורדינטות חדשות: $\theta'=\frac{1}{2}\theta$, $r'=\frac{1}{r^{2'}}$.

כאשר r ו-θ הם הקואורדינטות הפולריות.

מצא את גודלו של אלמנט אורך dl כפונקציה של הקואורדינטות החדשות.

תשובות סופיות:

1) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\ln y\right)\left(\cos x\right)\left(y^{\sin x}\right)+2xe^{x^2+y^2}}{\sin x\cdot y^{(\sin x-1)}+6+2ye^{\left(x^2+y^2\right)}}$$

2) $$dl^2=\frac{1}{4}r'^{-3}dr'^2+\frac{1}{r'}4d\theta'^2$$

מכניקה לתלמידי מתמטיקה 77154

פרק 2 - וקטורים-

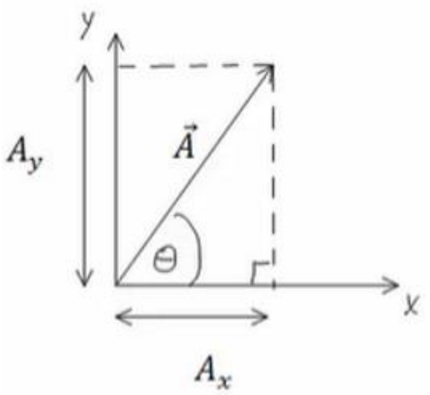
תוכן העניינים

הגדרות ופעולות בסיסיות:

רקע:

הצגת וקטור באמצעות גודל וכיוון נקראת הצגה פולרית.
הצגת וקטור באמצעות רכיבי ה- x וה- y נקראת הצגה קרטזית.

פירוק וקטור לרכיבים:



היטל על ציר ה- x או רכיב ה- x של A:

$A_x = |\vec{A}|\cos\theta$.

היטל על ציר ה- y או רכיב ה- y של A:

$A_y = |\vec{A}|\sin\theta$.

המעבר ההפוך: $\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$, $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$.

כפל בסקלר:

$$\vec{B} = \alpha\vec{A} = \alpha\left(A_x, A_y\right) = \left(\alpha A_x, \alpha A_y\right)$$

שאלות:

1) חיבור וחיסור בקרטזי

נתונים שלושה וקטורים: $\vec{A}(1,3)$, $\vec{B}(4,2)$, $\vec{C}(3,5)$.

א. חשבו את: $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$.

ב. חשבו את: $\vec{A}-\vec{B}-\vec{C}$.

ג. חשבו את: $2\vec{A}+3\vec{B}-4\vec{C}$.

2) חיבור וקטורים בפולרי

נתונים שני וקטורים בהצגה הפולרית:

הוקטור $\vec{A}$ שגודלו 10 והזווית שלו עם ציר ה-x היא $30°$.

הוקטור $\vec{B}$ שגודלו 8 והזווית שלו עם ציר ה-x היא $60°$.

מצאו את $\vec{A}+\vec{B}$.

3) עוד חיבור בפולרי

נתונים שני וקטורים:

הוקטור $\vec{A}$ שגודלו 10 וכיוונו $30°$,

הוקטור $\vec{B}$ שגודלו לא ידוע וכיוונו $350°$.

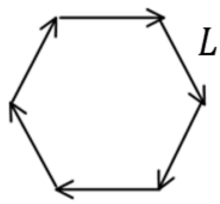
מהו גודלו של הוקטור $\vec{B}$ אם נתון שסכום הוקטורים ייתן וקטור ללא רכיב בציר ה-y?

4) משושה של וקטורים

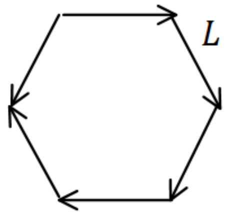
שישה וקטורים בגודל L כל אחד יוצרים משושה שווה צלעות.

מצאו את הוקטור השקול (גודל וכיוון) בכל אחד מהמקרים הבאים:

א.



ב.



5) וקטור בין שתי נקודות

הוקטור $\vec{A}$ הוא וקטור מהנקודה (x_1, y_1, z_1) אל הנקודה (x_2, y_2, z_2).
רשום ביטוי לרכיבים של הוקטור ומצא את גודלו.

6) חיבור באמצעות מקבילית

נתונים הוקטורים $\vec{A}$ ו-$\vec{B}$.
גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא: $\theta_A = 130^\circ$.
גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא: $\theta_B = 60^\circ$.
שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את $\vec{A}+\vec{B}$ באמצעות שיטת המקבילית.

7) חיסור באמצעות מקבילית

נתונים הוקטורים $\vec{A}$ ו-$\vec{B}$.
גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא $\theta_A = 130^\circ$.
גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא $\theta_B = 60^\circ$.
שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את $\vec{A}-\vec{B}$ באמצעות שיטת המקבילית.

8) מציאת אורך של שקול

אורכם של שני וקטורים הוא 5 ו-10 ס"מ.
הזווית ביניהם היא 30 מעלות.
מהו אורכו של הוקטור השקול שלהם (סכום הוקטורים)?

9) מציאת זווית בין שני וקטורים

נתונים שני וקטורים שאורכם 10 ו-13 מטר.
אורך השקול שלהם הוא 20 מטר.
מצא את הזווית בין הוקטורים.

תשובות סופיות:

1) א. $(8,10)$ ב. $(-6,-4)$ ג. $(2,-8)$

2) $(12.7,11.9)$

3) 28.8

4) $L\cdot 4\cos(30)$

5) $\vec{A}=(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1\ ,\ z_2-z_1)$, $|\vec{A}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

6) $C=10.1\ ,\ \theta_c=108.1°$

7) $C=7.62\ ,\ \theta_c=159.5°$

8) $|\vec{a}|=14.6\text{c.m}$

9) $\theta=60°$

מכפלה סקלרית:

רקע:

שתי דרכים לביצוע המכפלה:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x\cdot B_x + A_y\cdot B_y = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\alpha$$

α - זווית בין הוקטורים.

<u>תכונות המכפלה</u>:

- תוצאת המכפלה היא תמיד סקלר (ולא וקטור).
- מכפלה בין וקטורים מאונכים מתאפסת (זו דרך לבדוק האם וקטורים מאונכים)
- מכפלה סקלרית של וקטור בעצמו נותנת את גודל הוקטור בריבוע $\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}|^2$
- פתיחת סוגרים והעלאה בריבוע:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

$$(\vec{A}+\vec{B})^2 = |\vec{A}|^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B} + |\vec{B}|^2$$

נוסחה למציאת זווית בין שני וקטורים: $\cos\alpha = \dfrac{A_xB_x + A_yB_y}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|} = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}$.

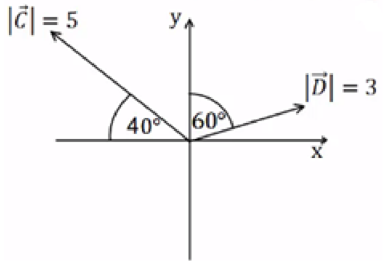
שאלות:

1) דוגמה 1

מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית בין הוקטורים הנתונים בכל המקרים הבאים:

א. $\vec{A} = (-1,2)$, $\vec{B}(2,2)$

ב.



2) דוגמה 2

בדוק עבור זוגות הוקטורים הבאים האם הם מאונכים :

א. $\vec{A}=(1,4)\ ,\ \vec{B}=(-2,5)$

ב. $\vec{A}=(1,4)\ ,\ \vec{B}=(8,-2)$

ג. $\vec{A}=(-1,-2)\ ,\ \vec{B}=(-2,1)$

ד. שרטט כל זוג וקטורים מאונכים על מערכת צירים, חשב את זוויות הוקטורים עם הצירים והראה שהזווית בין הוקטורים היא אכן $90°$.

3) דוגמה 3

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A}=(-3,1)\ ,\ \vec{B}=(2,-4)$.

א. מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות.

ב. מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.

ג. מצא את המכפלה הסקלרית שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בקוסינוס הזווית. בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א'.

4) דוגמה 4

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A}=(-3,1)\ ,\ \vec{B}=(2,-4)$.

א. הראה כי החישוב של $\vec{A}\cdot\vec{B}$ זהה לחישוב $\vec{B}\cdot\vec{A}$.

ב. הוכח בצורה כללית כי המכפלה הסקלרית היא פעולה קומוטטיבית.
(הדרכה : רשום את הוקטורים בצורה כללית עם נעלמים).

5) דוגמה 5

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A}=(2,1)\ ,\ \vec{B}(-3,2)\ ,\ \vec{C}=(1,-3)$.

חשב את :

א. $\vec{A}\cdot\vec{C}$

ב. $(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}$

ג. $\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}$

ד. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$

ה. $\vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})$

ו. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{B}$

ז. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})$

6) דוגמה 6

נתונים הווקטורים הבאים: $\vec{C}=(1,5)$, $\vec{B}(1,-3)$, $\vec{A}=(-2,2)$.

חשב את:

א. $\dfrac{(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}}{|\vec{B}|^2}$

ב. $\dfrac{(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{C}}{|\vec{C}|^2}$

7) דוגמה 7

נתונים הווקטורים הבאים: $\vec{C}=(1,5)$, $\vec{B}(1,-3)$, $\vec{A}=(-2,2)$.

מצא את הזווית בין $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$ לבין $\vec{B}$ ל- $\vec{C}$.

8) פירמידה משוכללת*

באיור מתוארת פירמידה משוכללת שבסיסה ריבוע בעל אורך צלע a

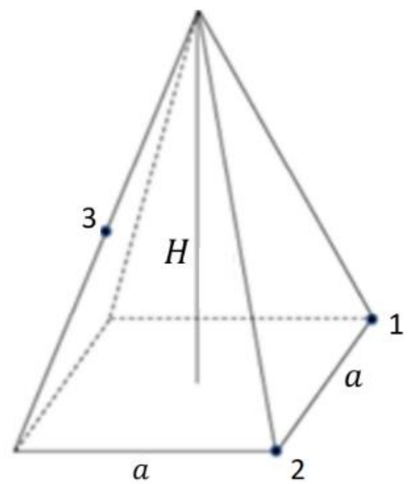
וגובהה $H=2a$. נקודה 3 באיור נמצאת באמצע הצלע שבין הפינה לקודקוד.

נגדיר שני ווקטורים:

הווקטור $\vec{A}$ יוצא מנקודה 1 לנקודה 2.

הווקטור $\vec{B}$ יוצא מנקודה 1 לנקודה 3.

מהי הזווית בין שני הווקטורים?



9) הוכיחו את הזהויות

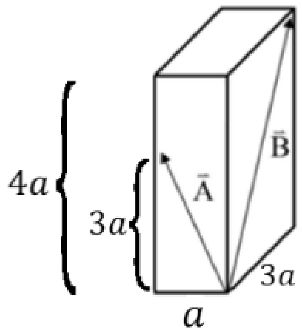
הוכיחו כי: $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

10) היטלים של וקטורים בתוך תיבה

נתונה תיבה בעלת אורך צלעות: a, $3a$ ו- $4a$. נגדיר שני ווקטורים: $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ כמתואר באיור.

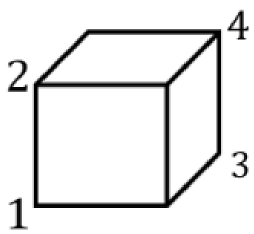
א. מהו היחס בין ההיטל של $\vec{A}$ על הכיוון של $\vec{B}$ (נסמנו - A_B) להיטל של $\vec{B}$ על הכיוון של $\vec{A}$ (נסמנו - B_A), $\frac{A_B}{B_A}$?

ב. חשבו את הזווית בין $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$.



11) היטל של אלכסון על אלכסון בקובייה

נתונה קובייה בעלת אורך צלע a, ראו איור.
מהו ההיטל של הווקטור המצביע מפינה 1 לפינה 4 על הציר המוגדר על ידי הכיוון מפינה 3 לפינה 2.

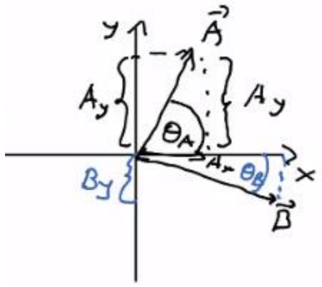


תשובות סופיות:

1) א. $\vec{A}\cdot\vec{B}=2$ ב. $\vec{C}\cdot\vec{D}=-5.13$

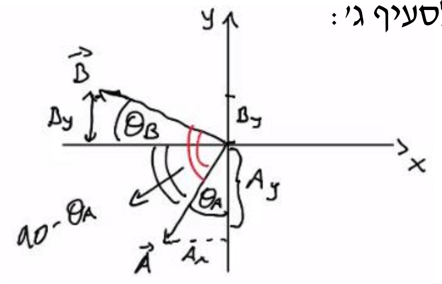
2) א. $\vec{A}$ לא מאונך ל- $\vec{B}$. ב. הוקטורים מאונכים. ג. הוקטורים מאונכים.

ד. לסעיף ב':



הזויות: $\theta_B=14.04°$, $\theta_A=75.96°$.

לסעיף ג':



הזוויות: $\theta_B=26.57°$, $\theta_A=26.57°$.

3) א. $\vec{A}\cdot\vec{B}=-10$ ב. $\theta_A=161.57°$, $|\vec{A}|=\sqrt{10}$, $\theta_B=-63.43°$, $|\vec{B}|=\sqrt{20}$

ג. $\vec{A}\cdot\vec{B}=-10$

4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

5) א. $\vec{A}\cdot\vec{C}=-1$ ב. $(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}=-10$ ג. $\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}=-10$

ד. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}=(-4,12)$ ה. $\vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})=(-18,-9)$ ו. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{B}=(12,-8)$

ז. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})=36$

6) א. $\dfrac{(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}}{|\vec{B}|^2}=\left(\dfrac{-8}{10},\dfrac{24}{10}\right)$ ב. $\dfrac{(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{C}}{|\vec{C}|^2}=(-0.54,-2.69)$

7) $\alpha_{\vec{A}\vec{B}}=153.43°$, $\alpha_{\vec{B}\vec{C}}=150.26°$

8) $59°$

9) הוכחה בסרטון

10) א. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ב. $40.6°$

11) $-\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

וקטור יחידה:

רקע:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

שאלות:

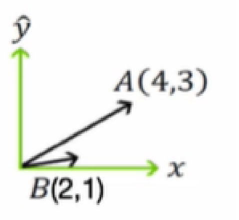
1) דוגמה וקטור יחידה

מצא וקטורי יחידה בכיוון של הוקטורים הבאים:

א. $\vec{A} = (-2,-3)$

ב. $\vec{B} = (3,4)$

2) הטלת וקטור יחידה על וקטור יחידה



נתון הוקטור $\vec{A}$ שבשרטוט.

א. מהו היטל הוקטור על ציר ה- x (וקטור יחידה)?

ב. מהו היטל הוקטור על ציר ה- y (וקטור יחידה)?

ג. הסבר כיצד מחשבים היטל הוקטור על הוקטור $\vec{B}(2,1)$.

ד. הסבר במילים את משמעות ההטלה של וקטור על וקטור.

3) וקטור בזמן

נתון הוקטור $\vec{A}(t)$ במישור דו מימדי כך ש- $|\vec{A}(t)| = A_0 \sin(t)$

ו- $\theta(t) = t$ כאשר $t \in [0,\pi]$ ו- A_0 קבוע.

א. מצא את הרכיבים הקרטזים של $\vec{A}(t)$ כתלות בזמן.

ב. מצא את $\frac{d\vec{A}}{dt}$.

ג. מצא את $\frac{d\hat{A}}{dt}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\hat{A}=(-0.55,\ -0.83)$ ב. $\hat{B}=(0.6,\ 0.8)$

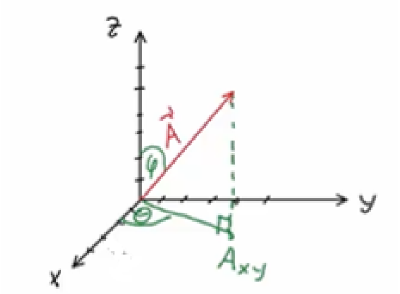
2) א. $\vec{A}_{\hat{x}}=(4,0)$ ב. $\vec{A}_{\hat{y}}=(0,3)$ ג. ראה סרטון

3) א. $A_y(t)=A_0\sin^2 t\ ,\ A_x(t)=\frac{1}{2}A_0\sin 2t$ ב. $A_0(\cos 2t\hat{x}+\sin 2t\hat{y})$

ג. $-\sin t\hat{x}+\cos t\hat{y}$

וקטור בשלושה מימדים:

רקע:



$0 \le \varphi \le \pi$

$0 \le \theta \le 2\pi$

מציאת גודל הוקטור: $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.

פירוק לרכיבים:

$A_z = |\vec{A}|\cos\varphi$.

$A_{xy} = |\vec{A}|\sin\varphi$.

$A_x = |\vec{A}|\sin\varphi\cos\theta$.

$A_y = |\vec{A}|\sin\varphi\sin\theta$.

שאלות:

1) חישוב וקטור יחידה

נתון הוקטור: $\vec{A}(2,3,4)$.

א. מהו גודלו של הוקטור?

ב. מהו וקטור היחידה של הוקטור $\vec{A}$?

2) חישוב גודל זווית בקרטזי

נתונים שני וקטורים: $\vec{B}(3,4,5)$, $\vec{A}(1,5,10)$.

א. מהו גודלו של כל וקטור?

ב. מהי הזווית בין שני הוקטורים?

3) מציאת שקול וזווית עם הצירים

שני כוחות נתונים פועלים על גוף: $\vec{B}(3,6,7)$, $\vec{A}(1,4,5)$.

א. מהו הכוח השקול?

ב. מהו גודלו של הכוח השקול?

ג. מהי הזווית בין הכוח השקול ובין כל אחד מהצירים?

4) וקטור בזווית 30 עם ציר Y - ספיר אפיק מעבר

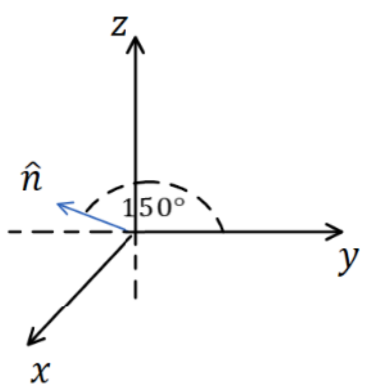
אילו מהווקטורים הבאים נמצא בזווית של $30°$ מציר y?

$$\vec{C}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \vec{B}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},1\right) \qquad \vec{A}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

5) היטל של A על 150 מעלות מציר y

נתון הווקטור: $\vec{A}=\hat{x}+\sqrt{3}\hat{y}+6\hat{z}$.

מהו ההיטל של הווקטור $\vec{A}$ על ציר $\hat{n}$ הנמצא במישור y-z וכיוונו החיובי מסובב בזווית של $150°$ מציר y נגד כיוון השעון?



6) שהסכום מאונך להפרש

הוכח- אם סכום של שני וקטורים מאונך להפרש אזי אורכם שווה.

7) מציאת וקטור מאונך

נתונים 2 וקטורים : $\vec{B}(B_x,B_y,0)$, $\vec{A}(1,4,8)$.

מצא את מרכיבי וקטור B אם נתון כי הוא ניצב לוקטור A וגודלו 10.

תשובות סופיות:

1) א. $|A|=\sqrt{29}$ ב. $\hat{A}=\left(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{3}{\sqrt{29}},\frac{4}{\sqrt{29}}\right)$

2) א. $|\vec{B}|=\sqrt{50}$, $|\vec{A}|=\sqrt{126}$ ב. $\alpha=23°$

3) א. $\vec{C}=(4,10,12)$ ב. $|C|=\sqrt{260}$ ג. $\alpha=75.63$, β=51.67 , γ=41.90

4) הווקטור C.

5) 1.5

6) שאלת הוכחה.

7) $\vec{B}=\left(-4\sqrt{\frac{100}{17}},\sqrt{\frac{100}{17}},0\right)$

מכפלה וקטורית בשלושה מימדים:

רקע:

שתי דרכים לביצוע המכפלה:

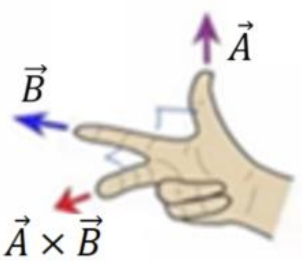
דרך 1 – דטרמיננטה:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

דרך 2 – לפי גודל וכיוון בנפרד:

גודל המכפלה - $|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}||\sin\alpha|$

כיוון לפי כלל יד ימין -



יש כמה דרכים לבצע את הכלל, אם מחליפים אצבעות לכל שלושת הוקטורים הכלל נשאר נכון (אם מחליפים מקום רק לשני וקטורים – טעות).

דרך נוספת לכלל יד ימין נקראת כלל הבורג

מסובבים את האצבעות מ- $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$ והתוצאה בכיוון האגודל.

שאלות:

1) דוגמה - דטרמיננטה

נתונים הוקטורים הבאים :

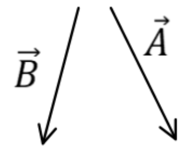
$\vec{A}(-1,2,-2)$, $\vec{B}(2,0,1)$

חשבו את $\vec{A}\times\vec{B}$.

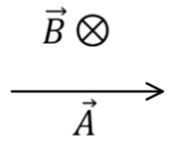
2) דוגמה - כלל יד ימין

מצאו את $\vec{A}\times\vec{B}$ במקרים הבאים :

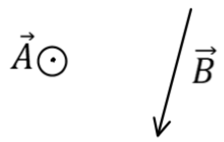
א.



ב.



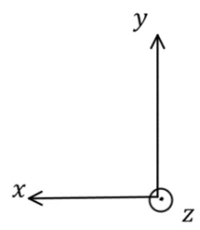
ג.



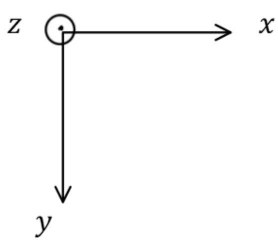
3) דוגמה - מערכות צירים

בדקו האם המערכות הבאות הן ימניות או שמאליות :

א.



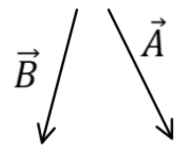
ב.



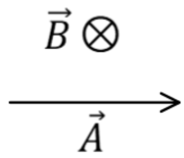
4) דוגמה - כלל הבורג

מצאו את $\vec{A} \times \vec{B}$ באמצעות כלל הבורג :

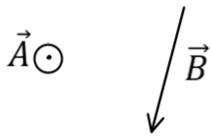
א. ג



ב. ע



ג.



5) מקבילון

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{a} = 2\hat{x} - 3\hat{y} + \hat{z}$, $\vec{b} = \hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$, $\vec{c} = 2\hat{x} - \hat{y}$

מרכיבים מהוקטורים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ מקבילית ובוחרים את ראשית הצירים בקודקוד המקבילית (הנח כל היחידות בס"מ).

א. מצאו את מיקומו של הקודקוד שמול הקודקוד שבראשית הצירים.

ב. מצאו את אורכי האלכסונים של המקבילית.

ג. מצאו את שטח המקבילית.

ד. יוצרים מקבילון על ידי הוספת הוקטור $\vec{c}$ למקבילית.
חשבו את גובה המקבילון המאונך למקבילית.
רמז : השתמש ב- $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$.

תשובות סופיות:

1) $2\hat{x}-3\hat{y}-4\hat{z}$

2) א. לתוך הדף ב. למעלה ג. 

3) א. שמאלית ב. שמאלית

4) א. לתוך הדף ב. למעלה ג. 

5) א. $\vec{r}_1=(3,-1,0)$ ב. $|\vec{r}_1|=\sqrt{10}$, $|\vec{r}_2|=\sqrt{30}$ ג. $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{59}\text{c.m}^2$

ד. $\tilde{h}=0.13\text{c.m}$

גרדיאנט ורוטור:

רקע:

גרדיאנט בקואורדינטות השונות:

גרדיאנט בקואורדינטות קרטזיות: $\vec{\nabla} f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$.

גרדיאנט בקואורדינטות גליליות: $\vec{\nabla} f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$.

גרדיאנט בקואורדינטות כדוריות (*): $\vec{\nabla} f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r\sin\varphi}\cdot\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$.

(*) שימו לב שהזווית φ היא עם ציר ה- z והזווית θ עם ציר x.

רוטור (Rot/Curl) בקואורדינטות השונות:

בקרטזיות:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x}-\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

בגליליות:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta}-\frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{r}+\left(\frac{\partial F_r}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\theta}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{z}$$

בכדוריות (*):

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\frac{1}{r\sin\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\theta\sin\varphi)-\frac{\partial F_\varphi}{\partial\theta}\right)\hat{r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)-\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}\right)\hat{\theta}+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial F_r}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot F_\theta)\right)\hat{\varphi}$$

(*) שימו לב שהזווית φ היא עם ציר ה- z והזווית θ עם ציר x.

שאלות:

1) חישוב גרדיאנט

נתונה פונקציית המיקום f : $f\left(\vec{r}\right)=f\left(x,y,z\right)=\dfrac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

חשב את הגרדיאנט של הפונקציה f.

2) חישוב השיפוע בכיוון השונה

חשב את גודל השיפוע של הפונקציה: $f\left(x,y\right)=2x^2y$ בנקודה $\left(1,2\right)$

בכיוון: $\hat{n}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

תשובות סופיות:

1) $$\vec{D}f=\frac{-xz\hat{x}-yz\hat{y}+\left(x^2+y^2\right)\hat{z}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

2) $$\vec{\nabla}f\cdot\hat{n}=\frac{8}{\sqrt{2}}+-\frac{2}{\sqrt{2}}$$

וקטורים קולינריים:

רקע:

וקטורים מקבילים ומתקיימים הקשר $\vec{B}=\alpha\vec{A}$ כאשר α סקלר כלשהו.

שאלות:

1) וקטורים קוליניארים

עבור אילו ערכים של α ו-β הוקטורים הבאים קולינארים (מצביעים באותו כיוון)?

$$\vec{A}=3\hat{i}+a\,j+5k$$

$$\vec{B}=-2\hat{i}+a\,j-2\beta k$$

2) מציאת וקטורים מאונכים

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{C}(5,8)$, $\vec{B}(6,B_y)$, $\vec{A}(A_x,4)$.

מצאו את ערכי הוקטורים כך שהוקטור A והוקטור B יהיו מאונכים לוקטור C. האם שני הוקטורים שמצאתם מקבילים?

3) תרגיל - פריסה לבסיס

נתונים שני וקטורים:

$\vec{A}=2\hat{x}+3\hat{y}$ ו-$\vec{B}=-\hat{x}+2\hat{y}$.

א. מצאו את קוסינוס וסינוס הזווית של הוקטור: $\vec{C}=3\vec{A}-2\vec{B}$ ביחס לציר x (אין צורך לחשב את הזווית עצמה).

ב. נתון הוקטור: $\vec{D}=e\hat{x}+\pi\hat{y}$ מצאו את כל הוקטורים האפשריים שניצבים לו.

ג. רשמו את הוקטור $\vec{D}$ בבסיס שנפרש ע"י הוקטורים $\vec{A}$ ו-$\vec{B}$.

תשובות סופיות:

1) $\alpha=-\frac{9}{2}\ ,\ \beta=\frac{5}{3}$

2) $\vec{B}=\left(6,-\frac{30}{8}\right)\ ,\ \vec{A}=\left(-\frac{32}{5},4\right)$, הוקטורים מקבילים.

3) א. $\cos\alpha=\frac{8}{\sqrt{89}}$, $\sin\alpha=\frac{5}{\sqrt{89}}$ ב. $\beta\left(-\frac{\pi}{e}\hat{x}+\hat{y}\right)$

ג. $\vec{D}=\frac{\pi+2e}{7}\vec{A}+\frac{2\pi-3e}{7}\vec{B}$

מכניקה לתלמידי מתמטיקה 77154

פרק 3 - קינמטיקה -

תוכן העניינים

תנועה בקו ישר (מימד אחד):

רקע:

הגדרות:

מהירות רגעית - $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_{(t)}$.

מהירות ממוצעת - $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$

תאוצה רגעית - $a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

תאוצה ממוצעת - $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$

קשרים הפוכים:

$$x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t$$

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$$

את האינטגרל אפשר לעשות לא מסוים (בלי גבולות) ואז צריך להוסיף קבוע או מסוים (עם גבולות)

מיקום ומהירות כתלות בזמן בתאוצה קבועה:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v(t) = v_0 + at$$

שטח מתחת לגרף הפונקציה:

- השטח מתחת לגרף הפונקציה של המהירות (כתלות בזמן) שווה להעתק (כאשר שטח מתח לציר הזמן מחושב כשלילי, אם מחשבים אותו כחיובי אז מקבלים את הדרך)
- השטח מתחת לגרף של התאוצה (כתלות בזמן) הוא שינוי המהירות (שטח מתחת לציר הזמן מחושב כשלילי)

שאלות:

1) דני ודנה רצים זה לקראת זו

דני ודנה רצים זה לקראת זו.
שניהם מתחילים לרוץ ממנוחה.
דני רץ בתאוצה של 0.5 מטר לשנייה בריבוע ודנה בתאוצה של 1 מטר לשנייה בריבוע.
המרחק ההתחלתי ביניהם הוא 50 מטר.

א. מתי והיכן יפגשו דני ודנה?
ב. מה מהירות כל אחד מהם ברגע המפגש?

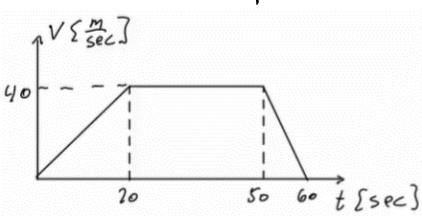
2) דני שכח את הפלאפון

דני רץ בקו ישר במהירות קבועה שגודלה 14 מטר לשנייה.
ברגע מסוים מבחין יוסי כי דני שכח את הפלאפון שלו.
באותו הרגע נמצא דני כבר במרחק של 64 מטר מיוסי.
יוסי מתחיל לרוץ אחר דני ממנוחה בתאוצה קבועה של 8 מטר לשנייה בריבוע.

א. מצא ביטוי למהירות כתלות בזמן עבור דני ויוסי.
שרטט גרפים עבור שני הביטויים שמצאת על אותה מערכת צירים.
ב. מתי מהירותו של יוסי שווה לזו של דני? האם הוא משיג את דני ברגע זה?
ג. מצא ביטוי למיקום כתלות בזמן עבור דני ויוסי.
שרטט גרפים עבור שני הביטויים שמצאת על אותה מערכת צירים.
ד. מתי ישיג יוסי את דני? כמה מרחק עבר יוסי עד אז?

3) גרף של מהירות אופנוע בזמן

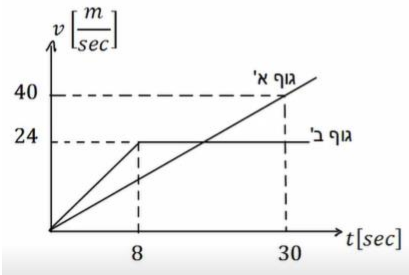
בגרף הבא נתונה מהירותו של אופנוע כתלות בזמן. האופנוע נע על קו ישר.
קבע את ראשית הצירים במיקום ההתחלתי של האופנוע.



א. תאר את סוג התנועה של האופנוע בכל אחד מקטעי התנועה.
ב. מצא את תאוצת האופנוע כתלות בזמן.
ג. מהי מהירות האופנוע ברגעים: $t = 15\ ,\ 40\ ,\ 55$?
ד. מצא את מיקום האופנוע באותם רגעים של סעיף ג'.

4) גרף מהירויות של שני גופים

בגרף הבא מתוארות המהירויות של שני גופים כתלות בזמן.
הנח ששני הגופים נעים לאורך קו ישר ויוצאים מהראשית.

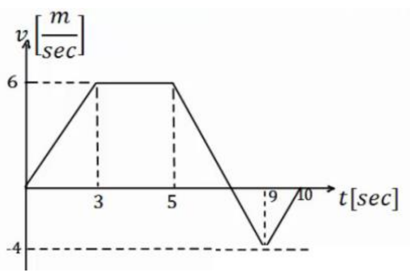


א. תאר את תנועתו של כל גוף.
ב. רשום נוסחת מקום זמן לכל גוף.
ג. מצא את המרחק בין הגופים ברגעים: $t = 3s$, $24s$ וציין מי מקדים את מי.
ד. מתי מהירויות שני הגופים שוות?
ה. מתי מיקום שני הגופים זהה?

5) תרגיל עם הכל

הגרף הבא מתאר את מהירותו של גוף הנע בקו ישר.
הנח שהגוף מתחיל את תנועתו מהראשית. הגוף נע במשך 10 שניות ונעצר.

א. תאר את התנועה של הגוף במילים.
ב. שרטט גרף של התאוצה כתלות בזמן של הגוף.
ג. מתי נמצא הגוף במרחק הגדול ביותר (בכיוון החיובי) מהראשית? מהו מרחק זה?
ד. מהו המרחק הכולל שעבר הגוף?
ה. מהו ההעתק הכולל שעשה הגוף?
ו. מהי המהירות הממוצעת של הגוף בתנועה?
ז. מהו מרחק הגוף מהראשית ב- $t = 6\sec$?
ח. מתי נמצא הגוף במרחק 12 מטרים מהראשית?
ט. שרטט גרף של מיקומו של הגוף כתלות בזמן, אין צורך לסמן ערכים בציר האנכי של הגרף.



6) תפוח עץ

תפוח נופל מעץ בגובה 15 מטרים.
(הנח שהתפוח נופל ממנוחה והזנח את התנגדות האוויר).

א. מצא את המהירות בה יפגע התפוח בקרקע.
ב. מצא את המהירות בה יפגע התפוח בראשו של ניטון היושב מתחת לעץ.
הנח שגובה הראש של ניטון בישיבה הוא אחד מטר.

7) חסידה מביאה חבילה

חסידה מרחפת במנוחה באוויר ומפילה חבילה מגובה של 320 מטרים.

א. מצא את ההעתק שמבצעת החבילה בשנייה הרביעית של תנועתה.
ב. מצא את ההעתק שמבצעת החבילה בשנייה האחרונה של תנועתה.

8) דני זורק כדור מחלון גבוה

דני זורק כדור כלפי מעלה מחלון בביתו הנמצא בגובה 105 מטרים מעל הקרקע (בניין גבוה). מהירות הכדור ישר אחרי הזריקה היא 20 מטר לשנייה.
סמן את כיוון הציר החיובי כלפי מעלה ואת ראשית הצירים בנקודת הזריקה.

א. רשום נוסחאות מקום זמן ומהירות זמן עבור הכדור.
ב. הכן טבלה ורשום בטבלה את הערכים של המיקום והמהירות ב-6 השניות הראשונות.
ג. צייר את מיקום הכדור בכל שנייה ב-6 השניות.
ד. מתי יפגע הכדור בקרקע?
ה. חזור על סעיפים א׳ ו-ד׳ במקרה שבו ראשית הצירים בקרקע.

9) גוף נזרק אנכית מגג בניין

גוף נזרק אנכית כלפי מעלה מגג בניין שגובהו 40 מטר.
מהירותו ההתחלתית של הגוף היא 30 מטר לשנייה.
בחר ציר y שראשיתו בקרקע וכיוונו החיובי כלפי מעלה.

א. רשום את פונקציית המקום-זמן, מהירות-זמן ותאוצה-זמן של הגוף.
ב. ערוך טבלה של מהירותו ומיקומו בזמנים: $t = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\text{sec}$.
ג. שרטט גרפים עבור שלושת הפונקציות שחישבת בסעיף א׳.

10) כדור נזרק מלמעלה וגוף נזרק מלמטה

כדור נזרק כלפי מטה מראש בניין שגובהו 80 מטר.
מהירותו ההתחלתית של הכדור היא 15 מטר לשנייה.
באותו הרגע נזרק גוף שני מתחתית הבניין כלפי מעלה.
מהירותו ההתחלתית של הגוף השני היא 40 מטר לשנייה.

א. רשום נוסחת מקום-זמן עבור כל גוף.
ב. האם הגוף השני יעבור את גובה הבניין?
ג. היכן ביחס לרצפת הבניין יחלפו הגופים אחד ליד השני?
ד. רשום נוסחת מהירות-זמן לכל גוף.
ה. מה תהיה מהירות כל גוף ברגע המפגש?
ו. מהי מהירות הפגיעה בקרקע של כל גוף?
ז. שרטט גרף מהירות-זמן וגרף מיקום זמן לכל גוף.

11) מהירות כנגזרת של פולינום

גוף נע בקו ישר ומיקומו כתלות בזמן נתון לפי: $x(t)=2t^3-12t+30$
כאשר הזמן בשניות והמיקום במטרים.

א. מצאו את המהירות כתלות בזמן.
ב. מתי הגוף נעצר?

12) תנועה בקו ישר, מהירות כנגזרת

מיקומו של גוף הנע בקו ישר נתון לפי: $x(t)=32te^{-t}$.

א. מצא את הזמן בו הגוף נעצר.
ב. מצא את מרחק הגוף ברגע זה מהראשית.

13) תנועה בקו ישר, מהירות כנגזרת ותאוצה

גוף נע בקו ישר ומיקומו כתלות בזמן נתון לפי: $x(t)=-2t^3+6t+3$
כאשר הזמן בשניות והמיקום במטרים.

א. מצאו את המהירות כתלות בזמן ואת הרגע בו הגוף נעצר.
ב. מהו המרחק המקסימאלי אליו הגיע הגוף?
ג. מהי תאוצת הגוף?

14) תאוצה מפוצלת

גוף נקודתי מתחיל לנוע ממנוחה ונע בקו ישר.

תאוצת הגוף תלויה בזמן ונתונה לפי: $a(t)=\begin{cases} t\left[\frac{\text{m}}{\sec^2}\right] , & 0\le t\le 3[\sec] \\ 5-t\left[\frac{\text{m}}{\sec^2}\right] , & 3<t[\sec] \end{cases}$.

תנועת הגוף נמשכת עד לרגע בו הוא עוצר.

א. מהי מהירות הגוף בזמן?

ב. מהי המהירות המרבית של הגוף במהלך התנועה?

ג. מתי עוצר הגוף?

ד. איזה מרחק (העתק) הוא עובר עד לעצירה?

15) מהירות מינימלית

גוף נע בקו ישר ומיקומו כתלות בזמן נתון לפי: $x(t)=\alpha t^3-\beta t^2+\gamma t$.

כל היחידות סטנדרטיות (מיקום במטר וזמן בשניות).

א. מהן היחידות של γ , β , α?

ב. מהו מיקום הגוף ב-$t=0$?

ג. מצאו את המהירות ההתחלתית של הגוף.

ד. מצאו מהי התאוצה ההתחלתית של הגוף.

ה. חשבו את המהירות המינימלית של הגוף כפונקציה של הקבועים בבעיה ומצאו מה התנאי שצריכים למלא הקבועים על מנת שאכן תהיה מהירות מינימלית.

16) ילד זורק כדור בקפיצה*

ילד מנסה לזרוק כדור לתקרה של הכיתה אך אינו מצליח להגיע עד לתקרה. המורה לפיזיקה שהבחין בניסיונותיו של הילד הציע לו שיזרוק את הכדור תוך כדי קפיצה בכיוון מעלה.

א. האם המורה צודק? לאיזה גובה יגיע הכדור אם הילד קופץ ומיד זורק את הכדור כלפי מעלה? הניחו שמהירות הקפיצה של הילד היא v_1 ומהירות הזריקה של הכדור v_2 ביחס לילד היא אותו הדבר.
הניחו שזריקת הכדור לא משפיעה על הילד.

ב. בטאו את ההעתק של הילד ושל הכדור כפונקציה של הזמן בו הילד זורק את הכדור.

17) זמן מינימלי לסיים מסלול*

מכונית יכולה להאיץ מאפס ל-100 קמ"ש תוך 10 שניות, כאשר ניתן להניח שקצב ההאצה קבוע. אותה מכונית יכולה לבלום בקצב של 0.5g.
מהו הזמן המינימלי לעבור מסלול של 3 ק"מ אם המכונית מתחילה ממנוחה ומסיימת בעצירה מוחלטת? (רמז: השתמש בגרף מהירות זמן).

18) כמה זמן הרכבת נסעה במהירות קבועה*

רכבת יוצאת מיישוב א' אל יישוב ב'.
בשליש הראשון של הדרך הרכבת מאיצה בתאוצה קבועה.
בשליש השני של הדרך הרכבת נוסעת במהירות קבועה.
בשליש האחרון של הדרך הרכבת מאטה בקצב קבוע עד לעצירתה ביישוב ב'.
זמן הנסיעה הכולל הוא T.
כמה זמן נסעה הרכבת במהירות קבועה?

19) אדם משחרר כדור מתוך מעלית*

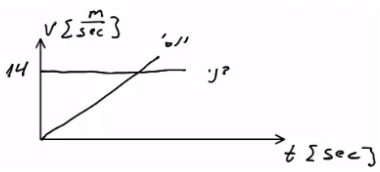
מעלית עולה מגובה הקרקע במהירות קבועה.
בזמן T_1, אדם הנמצא במעלית משחרר כדור מתוך המעלית דרך חור שברצפת המעלית.
הכדור מגיע לקרקע כעבור T_2 שניות.
מצאו את גובה המעלית h בזמן T_1.
נתונים T_1 ו- T_2.

תשובות סופיות:

1) א. הזמן: $t = 8.16\,\mathrm{sec}$, המיקום: $16.65\mathrm{m}$.

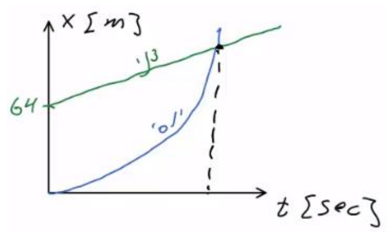
ב. $V_{Dani}(t=8.16) = 4.08\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$, $V_{Dana}(t=8.16) = -8.16\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$

2) א. דני - $V(t) = 14\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$, יוסי - $V(t) = 8t$. גרף:



ב. $t = 1.75\,\mathrm{sec}$, לא.

ג. דני - $x(t) = 64 + 14t$, יוסי - $x(t) = 4t^2$. גרף:



ד. ב- $t = 6.12$, המרחק: $149.82\mathrm{m}$.

3) א. כאשר $0 \le t \le 20$ (חלק I), התאוצה חיובית וקבועה, והמיקום הולך וגדל.
כאשר $20 \le t \le 50$ (חלק II), המהירות קבועה (אין תאוצה) והמיקום גדל.
כאשר $50 \le t \le 60$ (חלק III), התאוצה קבועה ושלילית והמיקום הולך וגדל.

ב.
$$a = \begin{cases} 2\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2} & 0 < t < 20 \\ 0 & 20 < t < 50 \\ -4\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2} & 50 < t < 60 \end{cases}$$

ג. $V(t=55) = 20\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$, $V(t=40) = 40\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$, $V(t=15) = 30\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$

ד. $x(t=55) = 1,750\mathrm{m}$, $x(t=40) = 1,200\mathrm{m}$, $x(t=15) = 225\mathrm{m}$

4) א. גוף א׳: תנועה בתאוצה קבועה, האצה. ההתקדמות בכיוון חיובי.
גוף ב׳: כאשר $0 < t < 8$, כמו גוף א׳. כאשר $8 \le t$,
תנועה במהירות קבועה בכיוון חיובי.

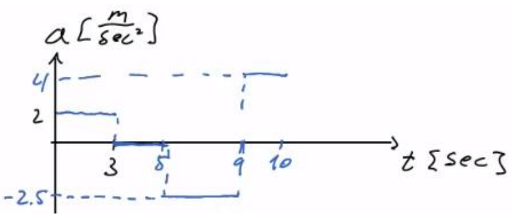
ב. גוף א׳: $\dfrac{2}{3}t^2$, גוף ב׳: כאשר $0 \le t \le 8$, כמו גוף א׳.
כאשר $8 \le t \le \infty$, $x(t) = 96 + 24(t-8)$.

ג. כש- $\Delta x(t=3) = 7.5\mathrm{m}$, וכש- $\Delta x(t=24) = 96\mathrm{m}$. גוף ב׳ מקדים את א׳.

ד. $t = 18\,\mathrm{sec}$ ה. כש- $t = 31.42\,\mathrm{sec}$.

5) א. כאשר $0 \le t \le 3$ (חלק I), תאוצה קבועה, האצה והתקדמות בכיוון החיובי.
כאשר $3 \le t \le 5$ (חלק II), תנועה במהירות קבועה, התקדמות בכיוון החיובי.
כאשר $5 \le t \le 9$ (חלק III), תאוצה קבועה שלילית.
תאוצה עד אשר המהירות מתאפסת, ואז מתחילה האצה בכיוון הנגדי.
התקדמות בכיוון החיובי עד שהמהירות מתאפסת ואז מתחילים לחזור בכיוון הנגדי.
כאשר $9 \le t \le 10$, תאוצה קבועה חיובית, תאוטה. התקדמות בכיוון הנגדי.

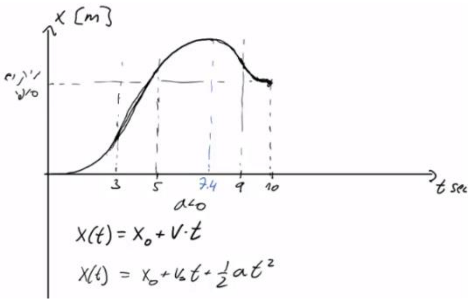
ב. $a = \begin{cases} 2\dfrac{\text{m}}{\text{sec}^2} & 0 < t < 3 \\ 0 & 3 < t < 5 \\ -2.5\dfrac{\text{m}}{\text{sec}^2} & 5 < t < 9 \\ 4\dfrac{\text{m}}{\text{sec}^2} & 9 < t < 10 \end{cases}$ גרף:



ג. בזמן: 7.4sec, המרחק: 28.2m. ד. $S = 33.4\text{m}$ ה. $\Delta x = 23\text{m}$

ו. $\bar{V} = 2.3\dfrac{\text{m}}{\text{sec}}$ ז. $\Delta x = x(t=6)25.75\text{m}$ ח. $t = 3.5\text{sec}$

ט.



6) א. $17.32\dfrac{\text{m}}{\text{sec}}$ ב. $V_F \approx 16.73$

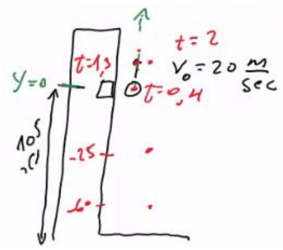
7) א. 80m ב. $40\dfrac{\text{m}}{\text{sec}}$

8) א. מקום-זמן: $y(t) = 20t - 5t^2$, $V(t) = 20 - 10t$

ב.

מהירות (מטר לשנייה)	מיקום (מטר)	זמן (שניות)
10	15	1
0	20	2
-10	15	3
-20	0	4
-30	-25	5
-40	-60	6

ג.



ד. 7sec

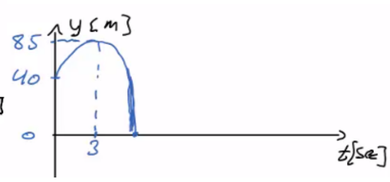
ה. (א) מקום-זמן: $y(t) = 105 + 20t - 5t^2$. מהירות-זמן: $V(t) = 20 - 10t$.
(ד) 7sec

9) א. מקום-זמן: $y(t)=40+30t-5t^2$, מהירות-זמן: $v(t)=30-10t$,
תאוצה-זמן: $a=-10$

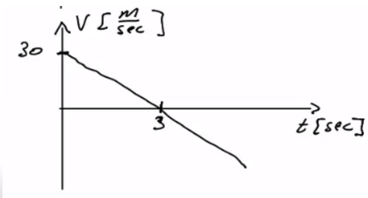
ב.

מהירות (מטר לשנייה)	מקום (מטר)	זמן (שניות)
30	40	0
20	65	1
10	80	2
0	85	3
-10	80	4
-20	65	5

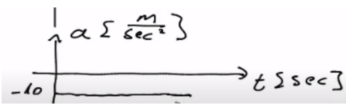
ג. מקום-זמן:



מהירות-זמן:



תאוצה-זמן:



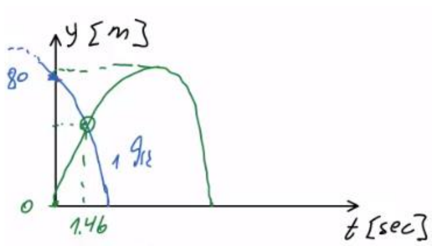
10) א. גוף 1 - כדור: $y_1(t)80+(-15)t-5t^2$, גוף 2 - ריבוע: $y_2(t)=40t-5t^2$.

ב. יגיע בדיוק לגובהו. ג. $47.74m$ ד. גוף 1: $v_1(t)-15-10t$, גוף 2: $v_2(t)=40-10t$

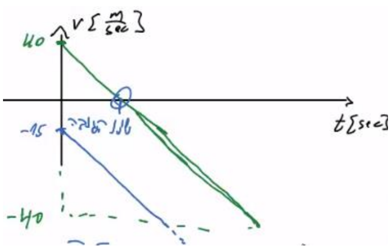
ה. גוף 1: $-29.6\frac{m}{sec}$, גוף 2: $25.4\frac{m}{sec}$

ו. גוף 1: $-42.72\frac{m}{sec}$, גוף 2: $-40\frac{m}{sec}$.

ז. מיקום-זמן: (גוף 1 בכחול, גוף 2 בירוק)



מהירות-זמן:



11) א. $v=6t^2-12$ ב. $t=\sqrt{2}\sec$

12) א. $t=1\sec$ ב. $x(t=1)=\frac{32}{e}$

13) א. $t=1\sec$, $v(t)=-6t^2+6$ ב. $X\max=7m$ ג. $a=-12t$

14) א. $V(t)=\begin{cases}\frac{t^2}{2}\left(\frac{m}{sec}\right) & 0\le t\le 3\\ \left(5t-\frac{t^2}{2}-6\right)\left(\frac{m}{sec}\right) & 3\le t\end{cases}$ ב. $V_{max}=6.5\frac{m}{sec}$

ג. $t_2\approx 8.61$ ד. $\Delta x\approx 31.79m$

15) א. $[\gamma]=\frac{m}{sec}$, $[\beta]=\frac{m}{sec^2}$, $[\alpha]=\frac{m}{sec^3}$ ב. 0 ג. γ

ד. -2β ה. $\alpha>0$, $-\frac{\beta^2}{3\alpha}+\gamma$

16) א. $\frac{(v_1+v_2)^2}{2g}$ המורה צודק ב. ילד: $\frac{{v_1}^2}{2g}$, כדור: $\frac{(v_1+v_2)^2}{2g}-v_2t_0$

17) $T\approx 58sec$

18) $t_2=\frac{T}{5}$

19) $h=\frac{g{T_2}^2}{2\left(1+\frac{T_2}{T_1}\right)}$

תנועה במישור וזריקה משופעת:

רקע:

וקטור המיקום - $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$.

וקטור ההעתק - $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

וקטור המהירות הממוצעת (velocity) - $\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

וקטור המהירות הרגעית (velocity) - $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

וקטור התאוצה הממוצעת - $\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

וקטור התאוצה הרגעית - $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

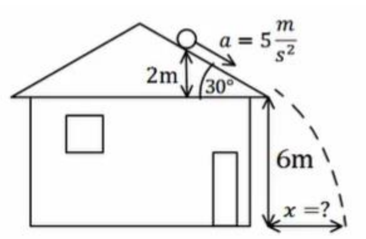
גודל המהירות (Speed) - $|\vec{v}| = \frac{dS}{dt}$, כאשר S זה הדרך.

שאלות:

1) דוגמה - דן יורה חץ על עץ

דן יורה חץ מגובה של 2 מטרים לעבר עץ הנמצא במרחק של 8 מטרים.
מהירות היציאה של החץ מהקשת היא 30 מטר לשנייה.
מצא באיזה גובה יפגע החץ בעץ אם הזווית שבה יורה דן את החץ היא 15 מעלות?

2) כדור מתגלגל מגג משופע



כדור מתגלגל מגג בניין משופע.
הכדור מתחיל תנועתו ממנוחה מגובה של 2 מטרים מקצה הגג.
שיפוע הגג הוא 30 מעלות מתחת לאופק.
נתון כי תאוצת הכדור בכיוון תנועתו על הגג היא 5 מטרים לשנייה בריבוע.
גובה קצה הגג מעל הקרקע הוא 6 מטרים.
מצא את המרחק האופקי מקצה הגג בו יפגע הכדור בקרקע.

3) תנועת כדור עם רוח נגדית

כדור נבעט מהקרקע במהירות של 20 מטרים לשנייה ובזווית של 45 מעלות מהקרקע.
רוח נגדית גורמת לכדור תאוצה בכיוון האופקי של 2 מטרים לשנייה בריבוע (בנוסף לתאוצת הכובד).

א. מצא את מיקום הכדור ומהירותו ב- $t=2\sec$.
ב. מהו המרחק בו פוגע הכדור בקרקע?
ג. מהו הגובה המקסימאלי אליו הגיע הכדור?
ד. מהו המרחק האופקי המקסימאלי אליו הגיע הכדור?

4) מסירה בפוטבול

במשחק הפוטבול הרכז האחורי זורק כדור בזווית של 45 מעלות ביחס לקרקע ובמהירות של 30 מטרים לשנייה. שחקן הקבוצה הנמצא 15 מטרים קדימה מהרכז האחורי רץ במהירות של 5 מטרים לשנייה. השחקן רואה את הכדור ומתחיל להאיץ בתאוצה קבועה.
מהי התאוצה הדרושה לשחקן כך שיוכל לתפוס את הכדור בדיוק בגובה בו הוא נזרק?
האם סימן התאוצה יכול להיות שלילי?
מה המשמעות של תאוצה זו?

5) דוגמה מהירות ממוצעת

מיקומו של גוף כתלות בזמן הוא: $\vec{r}(t)=3t^2x+(2t+1)y$.

מצא את המהירות הממוצעת ב-5 השניות הראשונות של התנועה.

6) דוגמה - מהירות רגעית

מיקומו של גוף כתלות בזמן הוא: $\vec{r}(t)=3t^3x+(4t-5)y$.

א. מצא את מהירות הגוף כתלות בזמן.

ב. מהי מהירות הגוף ב-$t=2$?

7) דוגמה - תאוצה

מהירותו של גוף כתלות בזמן היא: $\vec{v}(t)=2t^3x+(6t-5)y$.

א. מצא את תאוצת הגוף כתלות בזמן.

ב. מהי התאוצה הממוצעת בחמש השניות הראשונות של התנועה?

8) דרך והעתק

מיקומו של גוף לפי הזמן נתון לפי: $\vec{r}(t)=2t^3x+(t^3-2)y$.

א. מצא את המהירות הרגעית (velocity) והתאוצה הרגעית כפונקציה של הזמן.

ב. מצא את גודל המהירות (speed) כתלות בזמן.

ג. מצא את הדרך שעשה הגוף בחמש השניות הראשונות.

ד. מצא את המהירות הממוצעת (average velocity) ב-5 השניות הראשונות של התנועה.

ה. מצא את ה-speed הממוצע של הגוף בחמש השניות הראשונות.

תשובות סופיות:

1) 3.78m

2) 4.49m

3) א. $x=24.28\text{m}\,,\ y=8.28\text{m}\,,\ V_x=10.14\frac{\text{m}}{\text{sec}}\ ,\ V_y=-5.86\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ב. 32.01m

ג. 10m ד. $x_{\max}=32.01$

4) $a=5.99\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$, יכול לצאת שלילי, המשמעות שהשחקן צריך להאט בשביל להגיע לנקודה הזאת בדיוק יחד עם הכדור.

5) $\vec{V}=(15,2)$

6) א. $\vec{V}=9t^2\hat{x}+4\hat{y}$ ב. $\vec{V}(t=2)=(36,4)$

7) א. $\vec{a}(t)=6t^2\hat{x}+6\hat{y}$ ב. $\vec{a}=50\hat{x}+6\hat{y}$

8) א. $\vec{V}_{(t)}=6t^2\hat{x}+3t^2\hat{y}$ ב. $|\vec{V}|=\sqrt{45}t^2$ ג. $S\approx 279.5\text{m}$

ד. $\vec{V}=50\hat{x}+25\hat{y}$ ה. $|\vec{V}|\approx 55.9\frac{\text{m}}{\text{sec}}$

משוואת מסלול:

רקע:

משוואת מסלול היא פונקציה מהצורה $y(x)$, סרטוט של הפונקציה הוא המסלול של הגוף במישור. ניתן למצא את המשוואה באמצעות בידוד משתנה הזמן מהפונקציה x(t) והצבה ב y(t).

שאלות:

1) **דוגמה-משוואת מסלול**

מצא את משוואת המסלול ושרטט את המסלול על מערכת צירים עבור המסלול הבא: $y(t)=\sqrt{7-t^2}$, $x(t)=\sqrt{3+t^2}$.

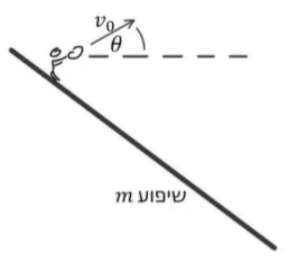
הנח ש- x ו- y תמיד חיוביים.

2) **זריקה משופעת על מישור משופע**

איתי עומד על מישור משופע בעל שיפוע m , איתי זורק כדור לכיוון מורד המישור במהירות התחלתית v_0 ובזווית θ ביחס לאופק.

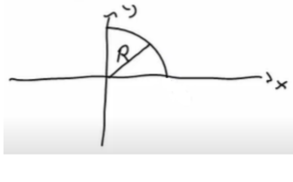
א. מצא מה המרחק מאיתי שבו יפגע הכדור? (התעלם מהגובה של איתי).

ב. מהי הזווית θ עבורה מרחק זה יהיה מקסימאלי?



תשובות סופיות:

1) $y(x)=\sqrt{10-x^2}$



א. $x=\dfrac{2v_0^2\cos^2\theta(\tan\theta+m)}{g}$

ב. $\tan 2\theta=\dfrac{1}{m}$

תאוצה נורמלית ומשיקית ורדיוס עקמומיות:

רקע:

תאוצה משיקית:

$$|\vec{a}_t| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\ ,\ \vec{a}_t = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$$

התאוצה המשיקית היא ההרכיב של התאוצה שמשיק למהירות (או למסלול) והיא משנה רק את גודל המהירות.

$$|\vec{a}_t| = \frac{\mathrm{d}|\vec{v}|}{\mathrm{d}t}$$

תאוצה נורמלית:

$$|\vec{a}_n| = |\vec{a} - \vec{a}_t| = \frac{|\vec{a}\times\vec{v}|}{|v|},\ \ \vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$$

התאוצה הנורמאלית היא ההרכיב של התאוצה שמאונך למהירות (או למסלול) והיא משנה רק את כיוון המהירות.

רדיוס עקמומיות:

$$R = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_n|}$$

שאלות:

1) תאוצה משיקית ונורמאלית

מיקומו של גוף כתלות בזמן נתון לפי: $y(t)=(1-t)^2,\ x(t)=2t^2$

כאשר הצבה של הזמן בשניות תיתן מיקום במטרים.

א. מצא מתי מהירות הגוף מינימלית?

ב. מצא את מיקום הגוף כאשר מהירותו היא: $6\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

ג. חשב את התאוצה המשיקית והנורמאלית ב- $t=2\sec$.

2) חישוב תאוצה משיקית ונורמלית גודל וכיוון

וקטור המיקום של גוף מסוים נתון ע"י המשוואה: $\vec{r}(t)=t^2 x+4tx-5t^2\hat{z}$.

א. חשב את וקטור המהירות של הגוף כתלות בזמן.
ב. חשב את וקטור התאוצה של הגוף כתלות בזמן.
ג. חשב את גודל התאוצה המשיקית כתלות בזמן.
ד. חשב את גודל התאוצה הנורמלית כתלות בזמן.
ה. חשב את וקטור התאוצה המשיקית כתלות בזמן.
ו. חשב את וקטור התאוצה הנורמלית כתלות בזמן.

3) תאוצה משיקית ונורמאלית בציקלואידה

המסלול שמשרטטת נקודה על ההיקף של גלגל בעת שזה מתגלגל (ללא החלקה) על משטח אופקי נקרא ציקלואידה. מיקום הנקודה בכל רגע נתון על ידי הביטוי: $\vec{r}(t)=(\mathrm{R}\sin\omega t+\mathrm{R}\omega t)\hat{x}+(\mathrm{R}\cos\omega t+\mathrm{R})\hat{y}$. R ו-$\omega$ הם קבועים נתונים.

א. חשב את וקטור המהירות של הנקודה בכל רגע.
ב. מצא את הרגע בו הנקודה נמצאת בשיא הגובה (בציר ה-y) ואת הרגע בו הגובה מינימלי (קיימים אינסוף רגעים כי התנועה מחזורית, רשום בצורה כללית).
ג. מצא את תאוצת החלקיק בכל רגע.
ד. חשב את התאוצה המשיקית והנורמאלית כאשר הנקודה מגיעה לגובה מקסימלי ומינימלי.
ה. חשב את התאוצה המשיקית והנורמאלית ברגע שבו רכיב ה-x של המהירות מתאפס.

4) חרוז נע על טבעת אליפטית

חרוז נע על פני טבעת אליפטית, כך שמיקומו בכל רגע כתלות בזמן הוא: $\vec{r}(t)=a\cos(\omega t)\hat{x}+b\sin(\omega t)\hat{y}$. a, b, ω קבועים נתונים.

א. מצא את התאוצה המשיקית כתלות בזמן.
ב. מצא את התאוצה הנורמלית כתלות בזמן.
ג. כאשר $|a|=|b|$ האליפסה הופכת למעגל.
במקרה זה, האם גודל המהירות במשך התנועה גדל, קטן, לפעמים גדל ולפעמים קטן או נשאר קבוע?

תשובות סופיות:

1) א. $t = 0.2\sec$ ב. $\vec{r} = (4.38, 0.23)$

ג. $\vec{a}_n = (-0.24, 0.94)\frac{\text{m}}{\sec^2}$, $\vec{a}_b = (4.24, 1.06)\frac{\text{m}}{\sec^2}$

2) א. $\vec{V}_{(t)} = \dot{\vec{r}} = 2t\hat{x} + 4\hat{y} - 10t\hat{z}$ ב. $\vec{a} = \dot{\vec{V}} = 2\hat{x} - 10\hat{z}$

ג. $|a_t| = \frac{52t}{\sqrt{26t^2 + 4}}$ ד. $|a_n| = \sqrt{\frac{208}{13t^2 + 2}}$

ה. $\vec{a}_t = \frac{52t}{26t^2 + 4}(t, 2, -5t)$ ו. $\vec{a} = \frac{4}{13t^2 + 2}(1, -13t, -5)$

3) א. $\vec{V} = \dot{\vec{r}} = (R\omega \cdot \cos(\omega t) + R\omega)\hat{x} + (-R\omega \sin(\omega t))\hat{y}$

ב. $t_{\max} = \frac{2\pi}{\omega}k$, $t_{\min} = \frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega}k$ ג. $\vec{a} = \dot{\vec{V}} = -\omega^2 R \sin(\omega t)\hat{x} - \omega^2 R \cos(\omega t)\hat{y}$

ד. $\vec{a}_t = 0$, $\vec{a}_n = \vec{a} = -\omega^2 R\hat{y}$ ה. אי אפשר להגדיר.

4) א. $a_t = \frac{\omega^2 \sin(2\omega t)(a^2 - b^2)}{2\sqrt{a^2 \sin^2(\omega t) + b^2 \cos^2(\omega t)}}$

ב. $a_n = \sqrt{\omega^4 a^2 \cos^2(\omega t) + \omega^4 b^2 \sin^2(\omega t) + \left(-\frac{\omega^4 \sin^2(2\omega t)(a^2 - b^2)}{4(a^2 \sin^2(\omega t) + b^2 \cos^2(\omega t))}\right)}$

ג. $|\vec{V}| = \text{const}$, הגודל נשאר קבוע.

תרגילים נוספים:

שאלות:

1) גודל מהירות מינימלי

וקטור המיקום של גוף מסוים כתלות בזמן נתון על ידי: $\vec{r}(t)=2t^2\hat{i}-6j+(t-5)^2k$.

א. מהו וקטור המהירות של הגוף כתלות בזמן?

ב. מהו וקטור התאוצה של הגוף כתלות בזמן?

ג. מתי גודל מהירות הגוף מינימלי?

ד. מהו וקטור המיקום כאשר גודל מהירותו הוא: $\sqrt{160}\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$?

2) וקטורים בזריקה משופעת

גוף נזרק מראשית הצירים במהירות התחלתית v_0 ובזווית θ ביחס לציר ה-x.

א. מצאו את וקטור המיקום של הגוף כתלות בזמן.

ב. מצאו את וקטור המהירות והתאוצה של הגוף כתלות בזמן.

ג. חשבו את הזווית בין וקטור המהירות לוקטור התאוצה כתלות בזמן.

3) וקטור מיקום ומסלול

וקטור המיקום של גוף הנע במישור xy נתון לפי: $\hat{r}(t)=\text{A}\sin(\omega t)\hat{x}+\text{B}\cos(\omega t)\hat{y}$.

א. מצאו את וקטור המהירות והתאוצה של הגוף.

ב. חשבו את הזווית בין וקטור המהירות לוקטור התאוצה ב-$t=0$.

ג. הראו שוקטור התאוצה ווקטור המיקום הפוכים בכיוון.

ד. מצאו את מסלול התנועה של הגוף, כלומר את $y(x)$.

4) וקטור מיקום ומסלול עם זמן בריבוע

וקטור המיקום של גוף הנע במישור $x-y$ נתון לפי: $\vec{r}(t)=\text{A}\sin(\alpha t^2)\hat{x}+\text{B}\cos(\alpha t^2)\hat{y}$.

א. מצאו את וקטור המהירות והתאוצה של הגוף.

ב. מצאו את מסלול התנועה של הגוף, כלומר את $y(x)$.

ג. מה ההבדל בין המסלול בתרגיל זה לבין המסלול בתרגיל הקודם?

5) רובין הוד יורה ותופס חץ

רובין הוד יורה חץ במהירות v_0 וזווית θ ביחס לקרקע.

ברגע שחרור החץ מתחיל רובין הוד לרוץ בקו ישר ובתאוצה $a(t)=Ae^{-kt}$.

רובין הוד רוצה לתפוס את החץ ברגע פגיעתו בקרקע.

מצאו משוואה עם הפרמטרים A , θ , v_0 והמשתנה k ממנה ניתן לחלץ את k כך שרובין יצליח לתפוס את החץ. אין צורך לפתור את המשוואה.

6) תנועה במעגל*

גוף נקודתי נע במישור אופקי xy.

בזמן $t=0$ מהירות הגוף הייתה: $\vec{v}(0)=15\pi\hat{\imath}\ \frac{m}{sec}$ יחד עם וקטור המצב: $\vec{r}(0)=5\hat{J}m$.

תאוצת הגוף כפונקציית זמן החל מרגע זה היא:

$\vec{a}(t)=-45\pi^2\sin(3\pi t)\hat{\imath}-45\pi^2\cos(3\pi t)\hat{J}\ \frac{m}{sec^2}$.

א. מצא את וקטור המהירות של הגוף בזמן.

ב. מצא את וקטור המצב של הגוף בזמן.

ג. מצא את הזווית בין וקטור המצב לוקטור התאוצה בזמן.

ד. מצא את משוואת המסלול של הגוף.

7) תנועה על אליפסה*

מיקום של גוף נקודתי נתון במשוואה: $\vec{r}=4\sin(\pi t)\hat{\imath}+3\cos(\pi t)\hat{J}$.

(המיקום במטרים, הזמן בשניות).

א. מצא את משוואת המסלול של הגוף.

ב. מצא את רגעי הזמן שבהם המהירות ורדיוס הוקטור מאונכים.

ג. מצא את תאוצת התנועה והראה שהיא מכוונת כלי ראשית הצירים.

ד. מצא באיזה רגעי זמן גודל התאוצה הוא: $\frac{v^2}{r}$.

ה. חשבו את המרחק המינימלי של הגוף מראשית הצירים.
כמה פעמים, במשך מחזור תנועה אחד, מגיע הגוף למרחק מינימלי מהראשית?

8) מהירות לפי גזירה תרגיל פשוט

נתון וקטור r של חלקיק מסוים: $\vec{r}=\left(8t,-5t^2\right)$.

א. מהו רכיב ה-x של הווקטור בזמן?

ב. מהו רכיב ה-y של הווקטור בזמן?

ג. מהי מהירותו בציר x?

ד. מהי מהירותו בציר y?

ה. האם מהירויות אלו קבועות בזמן?

ו. מהו מרחק החלקיק מהראשית לאחר שעברו 3 שניות?

9) גזירת מיקום למציאת מהירות

מיקומו של חלקיק נתון ע"י הווקטור r: $\vec{r}=5\sin\left(\pi t\right)\ ,4t^3+t^2\ ,8e^t$.

א. מצאו את וקטור המהירות כפונקציה של הזמן.

ב. מהי מהירות החלקיק ב-$t=2$?

10) העתק לפי גזירה

וקטור r מתאר מיקומו של חלקיק בזמן: $\vec{r}=\left(5t,10+t^2\right)$.

א. מהו מיקום החלקיק בזמן $t=0$?

ב. מהו מיקום החלקיק בזמן $t=5$?

ג. מהו ההעתק בחמש השניות הראשונות?

ד. מהי מהירות החלקיק בזמן $t=5$ (בהצגת גודל וכיוון)?

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{\mathrm{v}}=\dot{\vec{r}}=4t\hat{i}+2(t-5)\hat{k}$ ב. $\vec{a}=\dot{\vec{\mathrm{v}}}=4\hat{i}+2\hat{k}$ ג. $t_{\min}=1\sec$

ד. $\vec{r}(t_1)=18\hat{i}-6\hat{J}+4\hat{k}$

2) א. $\vec{r}(t)=\mathrm{v}_0\cos\theta\cdot t\hat{x}+\left(\mathrm{v}_0\sin\theta\cdot t-5t^2\right)\hat{y}$ ב. $\vec{\mathrm{v}}=\mathrm{v}_0\cos\theta\hat{x}+\left(\mathrm{v}_0\sin\theta-10t\right)\hat{y}$

ג. $\cos\alpha=\dfrac{10t-\mathrm{v}_0\sin\theta}{\sqrt{(\mathrm{v}_0\cos\theta)^2+(\mathrm{v}_0\sin\theta-10t)^2}}$

3) א. $\vec{\mathrm{v}}=\omega\mathrm{A}\cos(\omega t)\hat{x}-\omega\mathrm{B}\sin(\omega t)\hat{y}$, $\vec{a}=-\omega^2\mathrm{A}\sin(\omega t)\hat{x}-\omega^2\mathrm{B}\cos(\omega t)\hat{y}$

ב. $90°$ ג. הוכחה. ד. $\left(\frac{y}{\mathrm{B}}\right)^2+\left(\frac{x}{\mathrm{A}}\right)^2=1$

4) א. $\vec{\mathrm{v}}=\mathrm{A}\cos(\alpha t^2)2\alpha t\cdot\hat{x}-\mathrm{B}\sin(\alpha t^2)(2\alpha t)\hat{y}$,

$$\vec{a}=\left[-\mathrm{A}\sin(\alpha t^2)(2\alpha t)^2+2\alpha\mathrm{A}\cos(\alpha t^2)\right]\hat{x}-\left[\mathrm{B}\cos(\alpha t^2)(2\alpha t)^2+2\alpha\mathrm{B}\sin(\alpha t^2)\right]\hat{y}$$

ב. $\left(\frac{y}{\mathrm{B}}\right)^2+\left(\frac{x}{\mathrm{A}}\right)^2=1$ ג. אין הבדל

5) $\dfrac{\mathrm{v}_0^{\,2}\sin2\theta}{\mathrm{g}}=\dfrac{\mathrm{A}}{k}\dfrac{2\mathrm{v}_0\sin\theta}{\mathrm{g}}+\dfrac{\mathrm{A}}{k^2}\left(e^{-k\frac{2\mathrm{v}_0\sin\theta}{\mathrm{g}}}-1\right)$

6) א. $\vec{\mathrm{v}}(t=0)=15\pi\cos(3\pi t)\hat{i}-15\pi\sin(3\pi t)\hat{J}$ ב. $\vec{r}(t)=5\sin(3\pi t)\hat{i}+5\cos(3\pi t)\hat{J}$

ג. $\alpha=180°$ ד. $x^2+y^2=25$

7) א. $\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$ ב. $t_1=0\ ,\ t_2=1\ ,\ t_3=\frac{1}{2}\ ,\ t_4=\frac{3}{2}$

ג. $\vec{a}=\dot{\vec{\mathrm{v}}}=-4\pi^2\sin(\pi t)\hat{i}-3\pi^2\cos(\pi t)\hat{J}$

ד. $t_1=\frac{1}{4}\sec\ ,\ t_2=\frac{5}{4}\sec\ ,\ t_3=\frac{3}{4}\sec\ ,\ t_4=\frac{7}{4}\sec$ ה. $|\vec{r}|(t=1)=3$, פעמיים.

8) א. $r_x=8t$ ב. $r_y=-5t^2$ ג. $\mathrm{v}_x=\dot{r}_x=8$ ד. $\mathrm{v}_y=\dot{r}_y=-10t$

ה. המהירות על x קבועה בזמן, המהירות על y לא קבועה בזמן.

ו. $|r_{t=3}|=\sqrt{2601}$

9) א. $\vec{\mathrm{v}}=\dot{\vec{r}}5\pi\cos(\pi t)\ ,\ 12t^2+2t\ ,\ 8e^t$

ב. $\vec{\mathrm{v}}_{t=2}=5\pi\cos(2\pi)\ ,\ 4.2^3+2^2\ ,\ 8e^2=5\pi\ ,\ 36\ ,\ 8e^2$

10) א. $\vec{r}_{t=0}=(0,10)$ ב. $\vec{r}_{t=5}=(25,35)$ ג. $|\vec{r}_{t=5}-\vec{r}_{t=0}|=\sqrt{1250}$

ד. $|\mathrm{v}_{(t=5)}|=\sqrt{125}$

מכניקה לתלמידי מתמטיקה 77154

פרק 4 - תנועה יחסית -

תוכן העניינים

תנועה יחסית:

רקע:

נוסחה למיקום היחסי:

$$x_{1,2} = x_1 - x_2$$

x_1, x_2 הם המיקומים של גוף 1 ו- 2 ביחס למעבדה/קרקע. $x_{1,2}$ הוא המיקום של גוף 1 ביחס לגוף 2 (כלומר המיקום של גוף 1 ביחס לראשית צירים הנמצאת על גוף 2)

כנ"ל לגבי המהירות היחסית והתאוצה היחסית:

$$v_{1,2} = v_1 - v_2$$
$$a_{1,2} = a_1 - a_2$$

שאלות:

1) מדרגות נעות

כאשר אדם עומד על מדרגות נעות בחנות, הוא מגיע לקומה הרצויה תוך 50 שניות. יום אחד, המדרגות הנעות מתקלקלות והאדם צריך לעלות אותן ברגל בכוחות עצמו, כאשר הוא נע במלוא היכולת שלו, הוא מצליח להגיע לקומה הרצויה תוך 80 שניות. למחרת, המדרגות הנעות עובדות כרגיל, אך האדם מחליט לרוץ בהן במלוא יכולתו בכל זאת.

א. תוך כמה זמן יגיע לקומה הרצויה?

ב. האדם מנסה עתה לרדת חזרה לקומה המקורית במדרגות העולות (אלה בהן הוא עלה קודם). האם הוא יכול להצליח בכך? אם כן תוך כמה זמן יגיע לקומה המקורית?

2) כדור נזרק במעלית

מרצפת מעלית הנמצאת במנוחה נזרק כדור כלפי מעלה במהירות התחלתית לא ידועה. הכדור עובר ליד שעון עצר, המחובר למעלית, ונמצא בגובה 2 מטרים מרצפת המעלית. שעון העצר מופעל ברגע שהכדור חולף לידו בפעם הראשונה ומפסיק ברגע שהכדור חולף לידו בפעם השנייה (בדרכו למטה). השעון מדד זמן של 0.5 שניות.

א. מהו זמן התנועה של הכדור מרגע הזריקה עד לפגיעה ברצפת המעלית?

ב. מהי הדרך אותה עשה הכדור ביחס למעלית וביחס לכדה"א עד אשר הגיע לשעון בפעם השנייה?

ג. חוזרים על הניסוי, אבל כעת המעלית נעה (מלפני זריקת הכדור) במהירות קבועה כלפי מעלה של $4\frac{\text{m}}{\text{sec}}$. הזמן שמודד השעון הוא שוב 0.5 שניות. מהו זמן התנועה של הכדור מרגע הזריקה ועד לפגיעה ברצפת המעלית?

ד. מהי הדרך אותה עשה הכדור ביחס למעלית וביחס לכדה"א עד אשר הגיע לשעון בפעם השנייה?

ה. מהי מהירות הכדור ביחס לכדה"א ברגע הפגיעה ברצפת המעלית?

3) כדור נזרק במעלית מאיצה

מעלית נעה בתאוצה קבועה כלפי מעלה של $2\frac{m}{sec^2}$.

ברגע שמהירות המעלית היא $4\frac{m}{sec}$ נזרק מרצפת המעלית כדור כלפי מעלה במהירות התחלתית לא ידועה.

הכדור עובר ליד שעון עצר המחובר למעלית ונמצא בגובה 1 מטר מרצפת המעלית. שעון העצר מופעל ברגע שהכדור חולף לידו בפעם הראשונה ומפסיק ברגע שהכדור חולף לידו בפעם השנייה (בדרכו למטה). השעון מדד זמן של 0.5 שניות.

א. מהו הזמן עד לפגיעת הכדור ברצפת המעלית?

ב. מהי הדרך הכוללת שעבר הכדור ביחס למעלית עד אשר עבר ליד השעון בפעם השנייה?

ג. מהי הדרך הכוללת שעבר הכדור ביחס לכדה"א עד אשר עבר ליד השעון בפעם השנייה?

ד. מהי מהירות הכדור יחסית לכדה"א ברגע הפגיעה ברצפת המעלית?

4) כדור נזרק במעלית מאיצה**

מעלית נעה בתאוצה קבועה כלפי מעלה של $2\frac{m}{sec^2}$.

ברגע שמהירות המעלית היא $4\frac{m}{sec}$ נזרק מרצפת המעלית כדור כלפי מעלה במהירות התחלתית לא ידועה.

הכדור עובר ליד שעון עצר המחובר למעלית ונמצא בגובה 1 מטר מרצפת המעלית. שעון העצר מופעל ברגע שהכדור חולף לידו בפעם הראשונה ומפסיק ברגע שהכדור חולף לידו בפעם השנייה (בדרכו למטה). השעון מדד זמן של 0.5 שניות.

א. מהו הזמן עד לפגיעת הכדור ברצפת המעלית?

ב. מהי הדרך הכוללת שעבר הכדור ביחס למעלית עד אשר עבר ליד השעון בפעם השנייה?

ג. מהי הדרך הכוללת שעבר הכדור ביחס לכדה"א עד אשר עבר ליד השעון בפעם השנייה?

ד. מהי מהירות הכדור יחסית לכדה"א ברגע הפגיעה ברצפת המעלית?

תשובות סופיות:

1) א. $t=30.8\sec$ ב. לא.

2) א. $t=1.36\sec$ ב. $S=2.62m$ ג. $t=1.36\sec$ ד. S=5.72m
ה. $v_1=-2.8\frac{m}{\sec}$

3) א. $t=0.96\sec$ ב. $S=2.76m$ ג. S=4.46m ד. $v_1=1.6\frac{m}{\sec}$

4) א. $t=0.96\sec$ ב. $S=1.76m$ ג. S=4.46m ד. $v_1=0.16\frac{m}{\sec}$

מכניקה לתלמידי מתמטיקה 77154

פרק 5 - דינמיקה - חוקי ניוטון

תוכן העניינים

חוקי ניוטון:

רקע:

כוחות נפוצים:

כוח הכובד

סימון : W (קיצור של Weight).

מופעל ע״י כדור הארץ.

כיוון : למרכז כדור הארץ (או לכיוון האדמה).

גודל : mg.

נורמל

סימון : N.

מופעל ע״י משטח.

כיוון : תמיד מאונך למשטח ודוחף (מהמשטח כלפי חוץ).

גודל : לא ידוע, תלוי בבעיה (לא שווה ל-mg).

מתיחות

מופעל על ידי חוט או חבל.

סימון : T (קיצור של Tension).

כיוון : תמיד מושך את הגוף לכיוון החוט.

הערה, חוט תמיד מושך משני צדדיו.

חוט אידיאלי – חוט חסר מסה שאינו משנה את אורכו (לא אלסטי).

בחוט אידיאלי המתיחות אחידה לאורך החוט.

החיכוך:

חיכוך סטטי

סימון - f_s

פועל כאשר אין תנועה יחסית בין המשטחים.

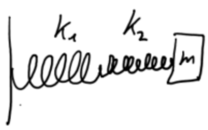
מופעל ע״י המשטח.

כיוון : משיק למשטח (נגד כיוון השאיפה לתנועה).

$f_s \le \mu_s N$ או $f_{s\max} = \mu_s N$

חיבור במקביל

חיבור בטור



μ_s - מקדם חיכוך סטטי (תלוי בחומר וקבוע).

N - הנורמל שמפעיל המשטח.

שימו לב ש $f_s = \mu_s N$ רק אם הגוף על סף החלקה! (בכל מקרה אחר החיכוך אינו ידוע , בדר״כ אפשר למצוא אותו ממשוואת הכוחות)

חיכוך קינטי:

סימון- f_k

פועל כאשר יש תנועה יחסית בין המשטחים.

מופעל ע"י משטח.

כיוון: משיק למשטח (נגד כיוון התנועה היחסית).

גודל: $f_k = \mu_k N$.

μ_k - מקדם החיכוך הקינטי – תלוי בסוגי החומרים. בד"כ קבוע.

N - הנורמל שמפעיל המשטח.

חוק ראשון של ניוטון – התמדה:

אם גוף נע בקו ישר ובמהירות קבועה (בהתמדה) סכום הכוחות עליו שווה לאפס.
מקרה פרטי של תנועה במהירות קבועה הוא מנוחה. לכן, אם גוף נמצא במנוחה סכום הכוחות עליו הוא אפס.

חוק שלישי – עקרון פעולה תגובה:

לכל כוח שגוף A מפעיל על גוף B יש כוח תגובה שגוף B מפעיל חזרה על גוף A.
כוח התגובה שווה בגודלו והפוך בכיוונו.
שימו לב: הכוחות פועלים על גופים שונים ולכן אף פעם לא יופיעו באותו תרשים כוחות.

חוק שני של ניוטון:

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$.

בפועל רושמים את הנוסחה לכל ציר בנפרד.

חוק הוק – הכוח של קפיץ:

חיבור במקביל

חיבור בטור

$F = -k\Delta x$.

$\Delta x = x - x_0$

x - מיקום הגוף.

x_0 - מיקום שבו הקפיץ רפוי.

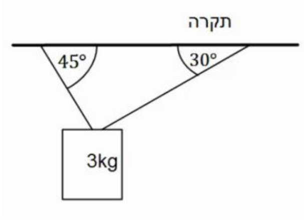
חיבור קפיצים במקביל (שני הקפיצים מחוברים לגוף ולקיר) - $k_{eff} = k_1 + k_2$.

חיבור קפיצים בטור (גוף מחובר לקפיץ אחד שמחובר לקפיץ שני שמחובר לקיר) -

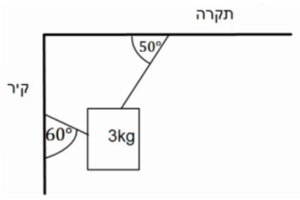
$\frac{1}{k_{eff}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

שאלות:

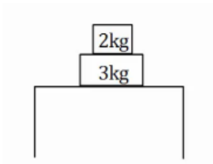
1) **דוגמה-גוף תלוי מהתקרה**
גוף תלוי במנוחה מהתקרה באמצעות שני חוטים,
לפי האיור הבא.
מהי המתיחות בכל חוט אם מסת הגוף היא 3 ק"ג?



2) **דוגמה-גוף תלוי מהתקרה ומהקיר**
גוף תלוי במנוחה מהתקרה באמצעות חוט ומחובר לקיר
המאונך לתקרה באמצעות חוט נוסף (הסתכל באיור).
מהי המתיחות בכל חוט אם מסת הגוף היא 3 ק"ג?

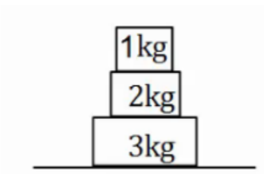


3) **דוגמה-מסה על מסה**
במערכת הבאה ישנה מסה של 3 ק"ג הנמצאת במנוחה על שולחן.
על המסה מונחת מסה נוספת של 2 ק"ג.



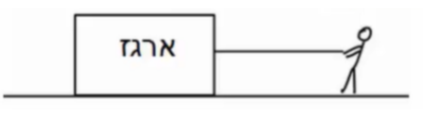
א. שרטט תרשים כוחות לכל אחת מהמסות.
ב. חשב את הכוח הנורמלי הפועל על המסה העליונה.
ג. חשב את הכוח הנורמלי הפועל על המסה התחתונה.
ד. חשב את הכוח הנורמלי הפועל על השולחן.

4) **דוגמה-מסה על מסה על מסה**
שלוש מסות מונחות אחת על גבי השנייה ועל הקרקע במנוחה, כפי שנראה בציור.

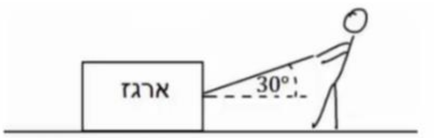


א. מהו גודלו וכיוונו של הכוח שמפעילה המסה הכי תחתונה על המסה מעליה?
ב. מהו גודלו וכיוונו של הכוח שמפעילה הרצפה על המסה הכי תחתונה?

5) **דוגמה-דני מושך במקביל לקרקע**
דני מושך ארגז במקביל לקרקע. ידוע כי מסת
הארגז היא 20 ק"ג ומקדם החיכוך הקינטי
בין הארגז לקרקע הוא: $\mu_k = 0.2$.
מצא מהו גודלו של הכוח שמפעיל דני,
אם הארגז נע במהירות קבועה?

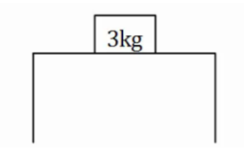


6) ירון מושך בזווית



ירון מושך ארגז באמצעות חבל הנמתח בזווית של 30 מעלות ביחס לקרקע.
ידוע כי מסת הארגז היא 20 ק"ג, ומקדם החיכוך הקינטי בין הארגז לקרקע הוא: $\mu_k = 0.2$.
מצא מהו גודלו של הכוח שמפעיל ירון, אם הארגז נע במהירות קבועה?

7) גוף על שולחן



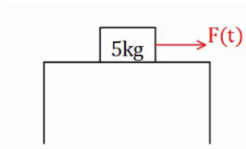
גוף בעל מסה של 3 ק"ג נמצא במנוחה על שולחן.
מקדם החיכוך הסטטי הוא: $\mu_s = 0.4$.

א. מהו הכוח המקסימלי הניתן להפעיל על הגוף, כך שישאר במנוחה?

כוח אופקי בגודל 10 ניוטון פועל על הגוף ימינה.

ב. מצא את גודלו וכיוונו של החיכוך הסטטי.

8) כוח תלוי בזמן



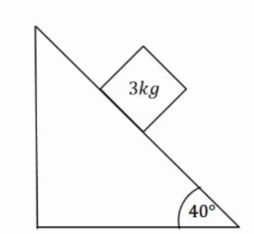
גוף בעל מסה של 5 ק"ג נמצא במנוחה על שולחן.
כוח אופקי התלוי בזמן $F(t) = 2 \cdot t^2$ פועל על הגוף ימינה.
מקדם החיכוך הסטטי הוא: $\mu_s = 0.3$.

א. מהו הכוח המקסימלי הניתן להפעיל על הגוף, כך שישאר במנוחה?

ב. מתי יתחיל הגוף בתנועה?

ג. שרטט גרף של החיכוך הסטטי כתלות בזמן.

9) מסה בשיפוע

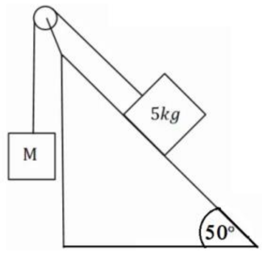


מסה של 3 ק"ג נמצאת במנוחה על מישור משופע בעל זווית של 40 מעלות.
בין המסה למדרון קיים חיכוך, ומקדם החיכוך הסטטי הוא: $\mu_s = 0.9$.

א. שרטט תרשים כוחות לבעיה.

ב. מצא את גודלם של הכוח הנורמלי והחיכוך.

10) מסה בשיפוע ומסה באוויר



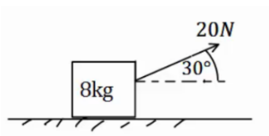
מסה של 5 ק״ג מונחת על מישור משופע בעל זווית של 50 מעלות. המסה מחוברת באמצעות חוט אידיאלי ודרך גלגלת אידיאלית למסה נוספת M התלויה באוויר מצידו השני של המישור.

א. מצא את גודלה של המסה M, על מנת שהמערכת תשאר במנוחה כאשר אין חיכוך בבעיה.

כעת נתון שבין המסה למדרון קיים חיכוך, ומקדם החיכוך הסטטי הוא: $\mu_s = 0.3$.

ב. מצא מה הוא גודלה המקסימלי והמינימלי האפשרי של M, על מנת שהמערכת תשאר במנוחה.

11) דוגמה-כוח בזווית 30 מעלות



כוח של 20 ניוטון פועל בזווית של 30 מעלות מעל האופק. הכוח מופעל על ארגזבעל מסה של 8 ק״ג. הארגז נמצא במנוחה ונתון כי בין הארגז לרצפה קיים חיכוך. מקדמי החיכוך הסטטי והקינטי הם: $\mu_s = 0.2$, $\mu_k = 0.1$.

א. בדוק האם הארגז נשאר במנוחה או מתחיל נוע?

ב. כמה זמן ייקח להזיז את הארגז למרחק של 30 מטרים באמצעות כוח זה?

ג. חזור על הסעיפים אם הכוח היה בזווית של 70 מעלות.

12) דוגמה-מרחק עצירה

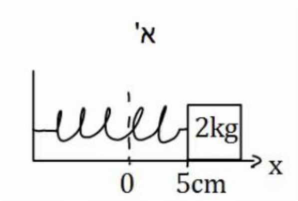
דני נוסע במכוניתו במהירות של 54 קמ״ש, ולפתע הוא מבחין כי רמזור הנמצא 50 מטרים לפניו הופך לאדום. דני לוחץ על הבלמים ומתחיל בעצירה. מקדם החיכוך הקינטי בין הגלגלים לרצפה הוא: $\mu_k = 0.3$.

הנח שהגלגלים ננעלים ואין למכונית מערכת ABS.

א. האם דני יספיק לעצור לפני הרמזור?

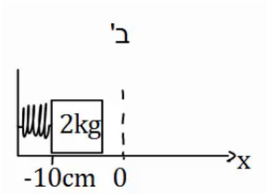
ב. בדוק שוב האם דני יספיק לעצור, אך הפעם הוסף זמן תגובה של שנייה אחת (הזמן מהרגע שבו דני מבחין באור עד אשר הוא לוחץ על הבלמים).

13) דוגמה 1-קפיץ



גוף בעל מסה של 2 ק"ג מחובר לקפיץ בעל קבוע קפיץ $k=50\frac{N}{m}$. בין הגוף למשטח אין חיכוך.

א. מושכים את הגוף למרחק 5 ס"מ מהנקודה בה הקפיץ רפוי ומשחררים אותו.
מהי תאוצת הגוף (גודל וכיוון)?

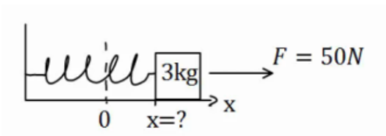


ב. דוחפים את הגוף למרחק 10 ס"מ מהנקודה בה הקפיץ רפוי ומשחררים אותו.
מהי תאוצת הגוף (גודל וכיוון)?

כעת נתון כי בין הגוף למשטח קיים חיכוך, ומקדם החיכוך הסטטי הוא: $\mu_s=0.2$.

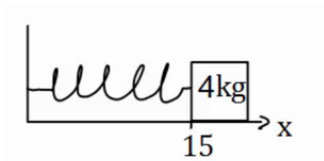
ג. מהו המרחק המקסימלי בו ניתן להניח את הגוף קשור לקפיץ כך שיישאר במנוחה?

14) דוגמה 2-קפיץ



גוף בעל מסה של 3 ק"ג מחובר לקפיץ בעל קבוע קפיץ $k=100\frac{N}{m}$. בין הגוף למשטח אין חיכוך.
על הגוף פועל כוח ימינה שגודלו 50 ניוטון.
קבע את ראשית הצירים בנקודת הרפיון של הקפיץ.
היכן נמצאת נקודת שיווי המשקל (הנקודה בה סכום הכוחות שווה לאפס)?

15) דוגמה 3-קפיץ



גוף בעל מסה של 4 ק"ג מחובר לקיר באמצעות קפיץ בעל קבוע קפיץ $k=50\frac{N}{m}$. בין הגוף למשטח אין חיכוך.
אורכו הרפוי של הקפיץ הוא 10 ס"מ.

א. חשב את הכוח שמפעיל הקפיץ על הגוף כאשר הגוף במרחק 15 ס"מ מהקיר.

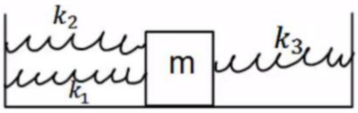
ב. חשב את הכוח שמפעיל הקפיץ על הגוף כאשר הגוף במרחק 6 ס"מ מהקיר.

ג. חשב את תאוצת הגוף בכל נקודה אם על הגוף פועל כוח שגודלו 10 ניוטון שמאלה.

16) מסה עם שלושה קפיצים

שלושה קפיצים מחוברים למסה $m = 2kg$, כפי שנראה באיור.

אין חיכוך בין המסה לרצפה.

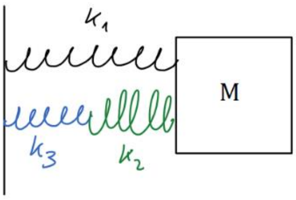


נתון כי: $k_1 = 3\frac{N}{m}$, $k_2 = 5\frac{N}{m}$, $k_3 = 12\frac{N}{m}$.

הנח כי כל הקפיצים רפויים באותה הנקודה.

מהי תאוצת המסה כאשר היא נמצאת במרחק 20 ס"מ מנקודת שיווי המשקל?

17) שלושה קפיצים שוב



באיור הבא, המסה $m = 4kg$ מחוברת לשלושה קפיצים

בעלי קבועי קפיץ שונים. הנח שכל הקפיצים רפויים

כאשר המסה נמצאת ב- $x = 0$.

מהי תאוצת המסה, כאשר מיקומה הוא: $x = 0.2m$,

אם קבועי הקפיצים הם: $k_1 = 3\frac{N}{m}$, $k_2 = 5\frac{N}{m}$, $k_3 = 12\frac{N}{m}$?

18) כוח אופקי תלוי בזמן

כוח אופקי שגודלו $F = 2t$ פועל על גוף, כאשר הזמן t נתון בשניות והכוח F בניוטונים.

מסת הגוף $2kg$ והוא נמצא במנוחה על משטח אופקי.

מקדמי החיכוך בין הגוף למשטח: $\mu_k = 0.15$, $\mu_s = 0.2$. מצא\י את:

א. זמן תחילת התנועה.

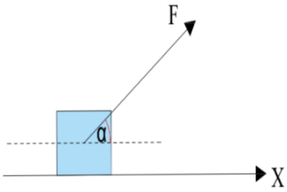
ב. כוח החיכוך בזמן $t = 0.5\sec$.

ג. תאוצת הגוף כפונקציה של זמן.

ד. מהירות הגוף לאחר 4 שניות.

ה. מיקום הגוף לאחר 4 שניות.

19) כוח בזווית תלוי בזמן



הגוף שבציור מונח על הרצפה, בזמן $t = 0$ מתחיל לפעול

על הגוף כוח שגודלו $F = 2t$ הזמן בשניות והכוח בניוטונים.

הכוח פועל בזווית $\alpha = 37°$ יחסית לציר התנועה.

מסת הגוף היא $2kg$.

נתון כי מקדם החיכוך הסטטי והקינטי בין הגוף והרצפה הוא: $\mu = 0.2$.

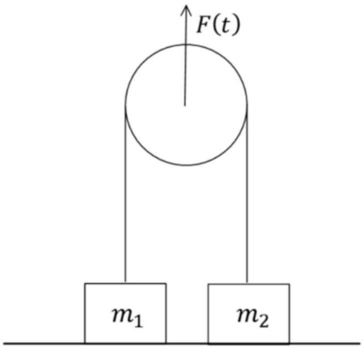
לפשטות החישוב קחו: $cos\alpha = 0.8$, $\sin\alpha = 0.6$, $g = 10\frac{m}{\sec^2}$.

א. מתי יתחיל הגוף לנוע?

ב. מהי מהירות הגוף לאחר 4 שניות?

ג. מה המרחק שהתקדם הגוף עד לניתוקו מהקרקע?

20) מכונת אטווד נמשכת בכוח תלוי בזמן



מכונת אטווד מורכבת מגלגלת וחוטים אידיאליים ושתי מסות המחוברות משני צידי הגלגלת(ראו איור) . ב $t = 0$ שתי המסות מונחות על הקרקע ומתחיל לפעול כוח התלוי בזמן $F(t) = 8t^2$ ניוטון על הגלגלת כלפי מעלה.

נתון : $m_1 = 1.6\ kg,\ m_2 = 3.6\ kg$

א. באיזה זמן כל אחת מהמסות תתנתק מהרצפה?

ב. מהי מהירות המסה m_1 ב $t = 5s$?(הניחו שהחוטים ארוכים מאוד).

21) זריקה משופעת עם כוחות תלויים בזמן

גוף שמסתו 2 ק״ג נזרק מהקרקע במהירות 30 מטר לשניה ובזווית 20 מעלות מעל האופק. במהלך תנועתו פועלים על הגוף כוחות שונים עד אשר הוא פוגע בקרקע. שקול הכוחות (כולל כוח הכובד) נתון לפי $\vec{F}(t) = 10t^2\hat{x} + (0.4t - 10)\hat{y}$ בניוטון.

א. מהו וקטור המיקום של הגוף כתלות בזמן?

ב. מתי יפגע הגוף בקרקע ובאיזה מרחק תהיה הפגיעה מנקודת המוצא?

22) גוף על מישור עם כוח סינוס

גוף שמסתו m נמצא במנוחה על מישור אופקי. ברגע $t = 0$ מתחיל לפעול על הגוף כוח אופקי $F(t) = A\sin(\omega t)$ כאשר $\omega = 1\frac{rad}{sec}$ ו- A הינו פרמטר נתון.

מקדם החיכוך הסטטי והקינטי בין הגוף והמישור הוא $\mu = \frac{A}{2mg}$.

א. מתי הגוף יתחיל לנוע?

ב. מהי מהירות הגוף כתלות בזמן?

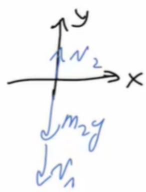
ג. מהו מיקום הגוף כתלות בזמן ביחס לנקודת המוצא?

תשובות סופיות:

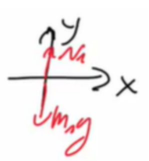
1) $T_1 \approx 22.0N$, $T_2 \approx 26.9N$

2) $T_2 \approx 19.6N$, $T_1 \approx 26.4N$

3) א. מסה 3 ק״ג:



מסה 2 ק״ג:



ב. 20N ג. 20N ד. 50N

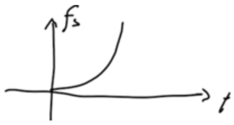
4) א. 30N למעלה ב. 60N למעלה

5) 40N

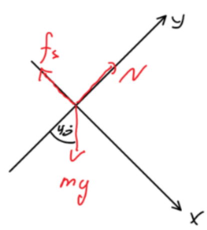
6) $T \approx 41.3N$

7) א. 12N ב. 10N

8) א. 20N ב. $\sqrt{10}\,\sec$ ג.



9) א.



ב. $f_s \approx 19.3N$, $N \approx 23.0N$

10) א. $M = 3.83kg$ ב. $M_{min} = 2.87kg$, $M_{max} = 4.79kg$

11) א. הגוף לא יכול להיות במנוחה. ב. $t \approx 6.82\sec$

ג. סעיף א': נשאר במנוחה, סעף ב': אין משמעות.

12) א. כן, כי $\Delta x \approx 37.5m < 50m$ ב. לא, כי $\Delta x = 52.5m > 50m$

13) א. גודל: $-1.25\frac{m}{\sec^2}$, הכיוון חיובי. ב. גודל: $a = 2.5\frac{m}{\sec^2}$, הכיוון חיובי.

ג. $x = 8cm$

14) $x = \frac{1}{2}m$

15) א. $F = -2.5N$ ב. $F = 2N$ ג. סעיף א': $a = -3.13\frac{m}{\sec^2}$,

סעיף ב': $a = -2\frac{m}{\sec^2}$

16) $a = -2\frac{m}{\sec^2}$

17) $a \approx 0.326\frac{m}{\sec^2}$

18) א. $t = 2\sec$ ב. $f_s = 1N$ ג. $a = \begin{cases} 0 & 0 < t < 2 \\ t - \frac{3}{2} & 2 < t \end{cases}$

ד. $v(t=4) = 3\frac{m}{\sec}$ ה. $x(t=4) = 2.3m$

19) א. $t \approx 2.17\sec$ ב. $v(t=4) = 1.53\frac{m}{\sec}$ ג. $x = 467m$

20) א. $t_2 = 3\sec$, $t_1 = 2\sec$, ב. $67.5\,m/s$

21) א. $\vec{r}(t) = \left(\frac{5}{12}t^4 + 28.2t\right)\hat{x} + \left(\frac{t^3}{30} - \frac{5}{2}t^2 + 10.3t\right)\hat{y}$

ב. זמן פגיעה 4.36sec ובמרחק 274m

22) א. $t \approx 0.524s$

ב. $v = 0$ כאשר $t < 0.524s$

ו- $v(t) = \frac{A}{m}\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t) - \frac{1}{2}t + 1.32\right]$ כאשר $t > 0.524s$

ג. $\mathrm{x} = 0$ כאשר $t < 0.524s$

ו- $x(t) = \frac{A}{m}\left[-\frac{1}{\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{\Sigma^2}{4} + 1.32t - 0.0724\right]$ כאשר $t > 0.524s$

מכניקה לתלמידי מתמטיקה 77154

פרק 6 - תנועה מעגלית -

תוכן העניינים

נוסחאות בסיסיות בתנועה מעגלית

רקע

- תנועה מעגלית היא תנועה על מעגל עם רדיוס קבוע.

הדרך בתנועה מעגלית	$S = \Delta\theta \cdot R$	יש להציב את הזווית ברדיאנים
גודל המהירות הקווית הרגעית (speed)	$v(t) = \frac{dS}{dt}$	כיוון המהירות תמיד משיק למעגל
מהירות זוויתית	$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$	f- התדירות T - זמן המחזור התדירות וזמן המחזור מוגדרים רק בתנועה מעגלית קצובה
קשר בין המהירות הקווית לזוויתית	$v = \omega R$	קשר רק בין הגדלים
תאוצה רדיאלית לכיוון מרכז המעגל	$a_r = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$	
הכוח	$\Sigma F_{\text{למרכז המעגל}} = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$	
תאוצה זוויתית	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	
תאוצה משיקית	$a_\theta = \frac{d\lvert\vec{v}\rvert}{dt} = \alpha R$	
הגובה במעגל אנכי	$h = R(1 - \cos\theta)$	כאשר h ו- θ נמדדים מתחתית המעגל

GOOL בשביל התירגול

שאלות

1) דוגמה-נהג מרוצים

נהג מרוצים נוסע במסלול מעגלי שרדיוסו 50 מטר.

מהירותו של הנהג כתלות בזמן היא: $v(t)=4t$.

א. מצא את המהירות הזוויתית של הנהג כתלות בזמן ומצא את הזווית של הנהג לאחר 5 שניות? (בהנחה כי התחיל מזווית אפס).

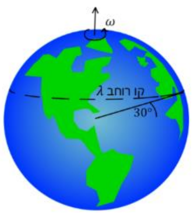
ב. מתי ישלים הנהג את הסיבוב הראשון?

2) דוגמה-חישוב מהירות זוויתית של מחוגי שעון

חשב את המהירות הזוויתית של מחוג השניות, מחוג הדקות ומחוג השעות בשעון מחוגים.

3) חישוב מהירות זוויתית של כדור הארץ

א. חשב את המהירות הזוויתית של סיבוב כדור הארץ סביב עצמו.



ב. מהי המהירות הקווית של אדם הנמצא בקו המשווה אם רדיוס כדור הארץ הוא בערך 6400 ק"מ?

ג. מהי המהירות הקווית של אדם הנמצא בקו רוחב $\lambda=30^\circ$?

4) דוגמה-יובל מסובבת אבן

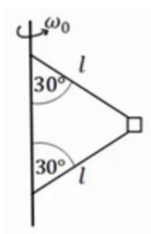
יובל קושרת אבן שמסתה 200 גרם לחוט באורך 0.7 מטר.

יובל מסובבת את האבן באמצעות החוט במעגל אופקי מעל ראשה (כמו שמסובבים קלע). המהירות הזוויתית של האבן היא: $12\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

מהי התאוצה הרדיאלית של האבן ומהי המתיחות בחוט?

הנח שכוח הכובד זניח.

5) מסה קשורה לעמוד מסתובב



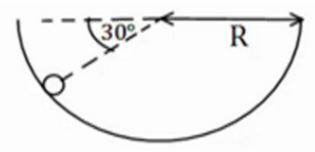
במערכת הבאה מסה m קשורה דרך שני חוטים למוט המסתובב במהירות זוויתית ω_0. אורך החוטים זהה ושווה ל-l.

הזווית של החוטים עם המוט היא 30 מעלות.

מהי המתיחות בכל חוט? בשאלה זו כוח הכובד אינו זניח.

נתונים: ω_0, l, m.

6) כדור בקערה כדורית



כדור קטן מונח בתוך קערה כדורית בעלת רדיוס R.
מניחים את הכדור בזווית של 30 מעלות ביחס לאופק ונותנים לו מהירות התחלתית לתוך הדף.
מהו גודל המהירות ההתחלתית הדרוש כך שהכדור יישאר בתנועה מעגלית בגובה קבוע?

7) דוגמה-תאוצה זוויתית נהג המרוצים

מצא את התאוצה הזוויתית בדוגמה-נהג מרוצים (שאלה 1).

8) זווית משתנה בזמן

המיקום הזוויתי של נקודה על גבי שפת גלגל מסתובב נתונה ע"י: $\phi = 5t + 3t^2 - 2t^3$.

א. מהי המהירות הזוויתית ב- $t = 2\sec$ ו- $t = 4\sec$?
ב. מהי התאוצה הזוויתית הממוצעת בין זמנים אלו?
ג. מהי התאוצה הזוויתית הרגעית בזמנים אלו?

9) תאוצה משיקית קבועה

גוף נע במעגל בעל רדיוס R בתאוצה משיקית קבועה a_t וללא מהירות התחלתית.
מצאו את גודל התאוצה הרדיאלית:

א. כפונקציה של הזמן.
ב. כפונקציה של זווית הסיבוב.

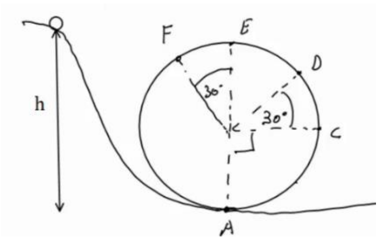
10) תאוצה משיקית רדיאלית וכוללת

גוף נע במעגל שרדיוסו 3 מטר.
הדרך שעובר הגוף נתונה ע"י: $s = 6t^2 + 3t$.
חשב את התאוצה המשיקית, הרדיאלית והכוללת (כתלות בזמן).

11) דוגמה-כוח על נהג המרוצים

בדוגמה של נהג המרוצים (שאלה 1), מצא מה הכוח הפועל על המכונית אם מסת המכונית (כולל הנהג) היא טון אחד.
מי מפעיל כוח זה?

12) דוגמה-כדור בלופ



כדור קטן מאוד מתחיל להתגלגל ממנוחה מגובה $h = 6m$ ונכנס לתוך מעגל אנכי.
נתון שהכדור משלים סיבוב ואין חיכוך בינו לבין הרצפה.
רדיוס המעגל הוא: $R = 2m$.

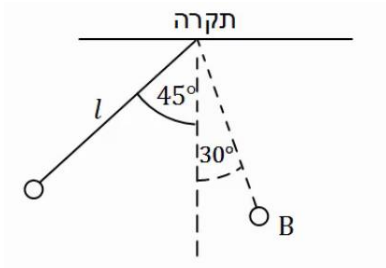
א. מצא את מהירות הכדור בכל הנקודות באיור.
(רמז: שימור אנרגיה).

ב. מצא את התאוצה הרדיאלית של הכדור באותן נקודות.

ג. מצא את התאוצה בכיוון המשיק באותן נקודות.

ד. מצא את גודל התאוצה הכוללת באותן נקודות.

13) כוחות במטוטלת



מטוטלת משוחררת ממנוחה מזווית של 45 מעלות.
אורך החוט הוא l והמסה היא m.

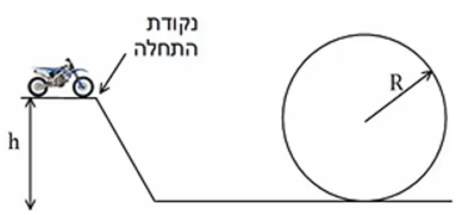
א. מהי מהירות המסה בתחתית המסלול?

ב. מהי המתיחות בחוט ברגע זה?

ג. מהי מהירות המסה בנקודה B הנמצאת בזווית 30 מעלות? ומהי המתיחות בחוט באותה נקודה?

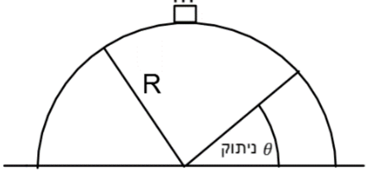
ד. מהי המתיחות בחוט בשיא הגובה וברגע השחרור?

14) רוכב אופנוע במעגל אנכי



רוכב אופנוע מתחיל תנועתו מנקודת ההתחלה שבציור.
מהי המהירות ההתחלתית המינימלית הנדרשת עבור הרוכב כך שיוכל להשלים את הסיבוב האנכי.
הנח שהרוכב אינו משתמש במנוע לאחר נקודת ההתחלה.
נתון: h , R.

15) קופסה מחליקה על גבעה מעגלית



קופסה במסה m מונחת על ראש גבעה בצורת חצי מעגל ברדיוס R.
הקופסה מתחילה להחליק לאחד הצדדים ממנוחה כאשר אין חיכוך בינה לבין הגבעה.
מצא באיזה זווית הקופסה תתנתק מהגבעה.

תשובות סופיות

1) א. $\omega = \frac{2t}{25}$, $\theta \approx 57.3^\circ$ ב. $12.5\sec$

2) מחוג שניות: $0.105\frac{\text{rad}}{\sec}$ מחוג דקות: $1.75\cdot10^{-3}\frac{\text{rad}}{\sec}$

מחוג שעות: $1.45\cdot10^{-4}\frac{\text{rad}}{\sec}$

3) א. $7.27\cdot10^{-5}\frac{\text{rad}}{\sec}$ ב. $465\frac{\text{m}}{\sec}$ ג. $400\frac{\text{m}}{\sec}$

4) $T = 20.16\text{N} \ , \ a_r = 100.8\frac{\text{m}}{\sec^2}$

5) $T_1 = \frac{\text{mg}}{\sqrt{3}} + \frac{\text{m}\omega_0{}^2\text{l}}{2} \ , \ T_2 = \frac{-\text{mg}}{\sqrt{3}} + \frac{\text{m}\omega_0{}^2\text{l}}{2}$

6) $v = \sqrt{\frac{3gR}{2}}$

7) $\alpha = \frac{2}{25}\frac{\text{rad}}{\sec^2}$

8) א. $\omega(t=2) = -7\frac{\text{rad}}{\sec} \ , \ \omega(t=4) = -67\frac{\text{rad}}{\sec}$ ב. $\bar{\alpha} = -30\frac{\text{rad}}{\sec^2}$

ג. $\alpha(t=2) = 18\frac{\text{rad}}{\sec^2} \ , \ \alpha(t=4) = -42\frac{\text{rad}}{\sec^2}$

9) א. $a_r = \frac{(a_t\cdot t)^2}{R}$ ב. $a_r = 2a_t\theta$

10) $a_\theta = 12\frac{\text{m}}{\sec^2} \ , \ a_r = (4t+1)^2\cdot 3\frac{m}{\sec}{}^2 \ , \ a = \sqrt{12^2 + 9(4t+1)^4}$

11) $|F| = \sqrt{(80t)^2 + 4000^2}$, הכביש מפעיל כוח זה.

12) החיכוך מהכביש: $|F| = \sqrt{(80t)^2 + 4000^2}$

13) א. $v_A \approx 10.95\frac{\text{m}}{\sec} \ , \ v_C \approx 8.94\frac{\text{m}}{\sec} \ , \ v_D \approx 7.975\frac{\text{m}}{\sec} \ , \ v_E \approx 6.32\frac{\text{m}}{\sec} \ , \ v_F \approx 6.73\frac{\text{m}}{\sec}$

ב. $a_{r_B} = 40\frac{\text{m}}{\sec^2}$, $a_{r_A} = 60\frac{\text{m}}{\sec^2}$ וכו', לפי הנוסחה $a_r = \frac{v^2}{R}$.

ג. $a_{\theta_A} = 0 \ , \ a_{\theta_C} = -g \ , \ a_{\theta_D} = -10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\text{m}}{\sec^2} \ , \ a_{\theta_E} = 0 \ , \ a_{\theta_F} = 5\frac{\text{m}}{\sec^2}$

ד. $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$

14) **א.** $v=\sqrt{0.58gl}$ **ב.** $T=1.58mg$

ג. מהירות: $v_B=\sqrt{0.32gl}$, מתיחות: $T=mg(1.19)$.

ד. בשניהם: $T=mg\frac{1}{\sqrt{2}}$.

15) $\theta=41.8°$

הכוח הצנטרפוגלי

רקע

$$F_r = m\omega^2 R$$

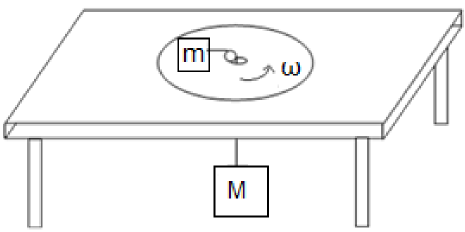
בכיוון החוצה מהמעגל

שימו לב שהכוח הצנטריפוגלי הוא כוח מדומה והוא מגיע מדרך הסתכלות שונה על תנועה מעגלית של צופה המסתובב עם המערכת. בצורת ההסתכלות הזו אין לגוף תאוצה רדיאלית.

שאלות

1) מסה על שולחן מסתובב

מסה m מונחת על דיסק המסתובב על שולחן במהירות זוויתית קבועה ω.
המסה מחוברת לחוט העובר דרך מרכז השולחן ומחובר למסה m.
בין המסה m לדיסק יש חיכוך ומקדם החיכוך הסטטי הוא μ_s.
נתון: μ_s , m , μ , ω.
מהו הרדיוס המינימלי והרדיוס המקסימאלי שבו ניתן להניח את המסה כך שלא תזוז בכיוון הרדיאלי?



תשובות סופיות

1) $r_{\substack{\max\\ \min}} = \dfrac{Mg \pm \mu_s mg}{m\omega^2}$

וקטורים בתנועה מעגלית

רקע

וקטור המיקום: $\vec{r} = R\cos\theta\hat{x} + R\sin\theta\hat{y}$

הקשר בכללי בין המהירות הקווית לזוויתית: $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

וקטורי יחידה בכיוון רדיאלי ומשיק:

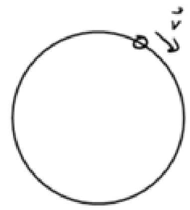
$$\hat{r} = cos\,\theta\,\hat{x} + sin\,\theta\hat{y}\ \ ;\ \ \hat{\theta} = -\,sin\,\theta\,\hat{x} + cos\,\theta\hat{y}$$

שאלות

1) מציאת הכיוון של אומגה

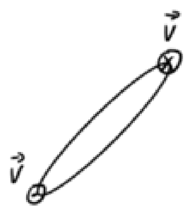
במקרים הבאים נתון כיוונה של המהירות הקווית של גוף הנע במעגל.
מצא את הכיוון של המהירות הזוויתית בכל מקרה:

א.



ב.

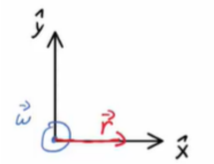
ג.



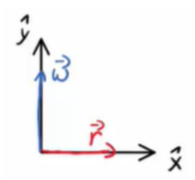
2) תרגיל לנוסחה $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

מצא את כיוון המהירות הקווית של הגוף במקרים הבאים בהנחה כי הגוף נע בתנועה מעגלית.

א.



ב.



3) תאוצה זוויתית קבועה כוקטור

גוף נע במעגל בעל רדיוס קבוע שאינו ידוע.

התאוצה הזוויתית של הגוף קבועה ונתונה לפי: $\vec{\alpha} = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 1\hat{z}$ ביחידות של רדיאן לשניה בריבוע.

המיקום ההתחלתי והמהירות הזוויתית ההתחלתית הם: $\vec{r}_0 = 5\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z}$ במטרים ו- $\vec{\omega}_0 = -2\hat{x} + 3\hat{y} - 4\hat{z}$ ברדיאן לשניה.

מצא את גודל המהירות הקווית של הגוף ב- $t = 2\sec$.

4) דוגמה-וקטור המיקום של נהג המרוצים

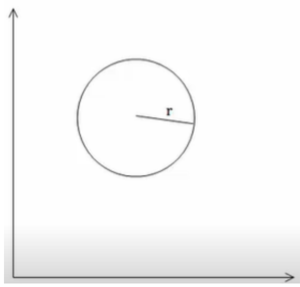
מצא את וקטור המיקום כתלות בזמן בדוגמה עם נהג המרוצים:
נהג מרוצים נוסע במסלול מעגלי שרדיוסו 50 מטר. מהירותו של הנהג כתלות בזמן היא $v(t)=4t$.

א. מצאו את המהירות הזוויתית של הנהג כתלות בזמן, ומצאו את הזווית של הנהג לאחר 5 שניות (בהנחה כי התחיל מזווית אפס).
ב. מתי ישלים הנהג את הסיבוב הראשון?

5) תנועה מעגלית שאינה סביב הראשית

גוף נע על מעגל ברדיוס 3m.
הגוף חולף דרך הנקודה (5,4) ביחס לראשית הצירים O.
נתון כי מרכז המעגל נמצא ב- (5,7) והמהירות הזוויתית היא: $\omega=\frac{2\pi}{20}\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

א. מצא את וקטור המיקום של הגוף כפונקציה של הזמן.
ב. מצא את וקטור המהירות של הגוף כפונקציה של הזמן.
ג. מצא את וקטור התאוצה של הגוף כפונקציה של הזמן.
ד. מצא את המהירות הממוצעת בין $t=5\,\text{sec}$ ל- $t=10\,\text{sec}$.
ה. מצא את תחום הזווית ביחס לראשית בו נע וקטור המקום.
ו. מצא את תחום הגדלים של וקטור המקום.



תשובות סופיות

1) א. $\otimes$ ב. $\downarrow$ ג. ^

2) א. $\hat{y}$ ב. $-\hat{z}$

3) $63.63\frac{\text{m}}{\text{sec}}$

4) $\vec{r}=50\cos\left(\frac{t^2}{25}\right)\hat{x}+50\sin\left(\frac{t^2}{25}\right)\hat{y}$

5) א. $\vec{r}=\left(5+3\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{10}t\right),7+3\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{10}t\right)\right)$

ב. $\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\left(-3\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{10}t\right)\frac{\pi}{10},3\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{10}t\right)\frac{\pi}{10}\right)$

ג. $\vec{a}=\dot{\vec{v}}=-\omega^2\vec{r}\,'$ ד. $\hat{v}=\left(\frac{-3}{5},\frac{3}{5}\right)$

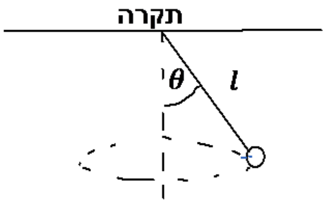
ה. $\theta_{\min}=34.5^\circ$, $\theta_{\max}=74.9^\circ$ ו. $r_{\max}=8.6+3$, $r_{\min}=8.6-3$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

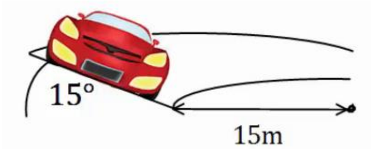
1) מטוטלת מסתובבת אופקית

מטוטלת בעלת אורך l מסתובבת סביב ציר האנך לתקרה בזווית מפתח קבועה θ. נתון: l , θ.
מצא את התדירות וזמן המחזור של הסיבוב.



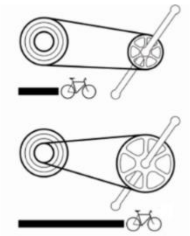
2) מכונית במחלף

מכונית נוסעת על מחלף משופע.
זווית השיפוע של המחלף היא 15 מעלות.
רדיוס הסיבוב של המחלף הוא 15 מטרים.
אם נניח שלמכונית אין חיכוך עם הכביש,
מה המהירות בה צריכה לנסוע המכונית על מנת לא להחליק?



3) הילוכי אופניים

הילוכים של אופניים מורכבים משני גלגלי שיניים ברדיוסים שונים ושרשרת המקיפה את שני הגלגלים. כאשר השרשרת מתוחה האורך שלה קבוע. מצאו את הקשר בין מהירות הסיבוב של גלגלי השיניים אם הרדיוסים שבהם מקיפה השרשרת כל אחד מהגלגלים ידועים.



4) שני גופים על מסילה מעגלית אנכית (כולל עבודה ואנרגיה)

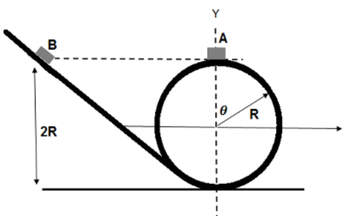
מסילה מעגלית חלקה, דקה ובעלת רדיוס R מוצבת במישור אנכי.
מישור משופע וחלק משיק למסילה ומשתלב בה כמתואר בתרשים.
מציבים את בול A בגובה 2R ואת בול B על המישור המשופע בגובה זהה מהרצפה.
נותנים ל-A דחיפה קלה ועוזבים את B ממצב מנוחה.
שני הגופים מחליקים, גוף A בצידה החיצוני של המסילה ואילו גוף B משתלב ונכנס לתוך המסילה. בשלב מסוים כל אחד מהגופים מתנתק מהמסילה.
התייחסו לגופים כאל גופים נקודתיים.

א. באיזו זווית θ_1 עם ציר ה- y, יתנתק גוף A מהמסילה?

ב. באיזו זווית θ_2 יתנתק גוף B מהמסילה?

ג. אם שני הגופים מתנתקים מהמסילה בו זמנית. מה גודל המהירות היחסית בניהם?

ד. מה יהיה המרחק בין הגופים לאחר הניתוק, אחרי פרק זמן Δt (הניחו שהגופים עדיין באוויר).



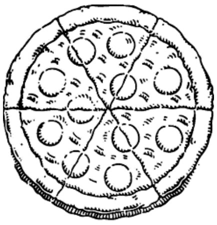
5) מציאת מיקום כפונקציה של הזמן

חלקיק מוגבל לנוע על מעגל ברדיוס R.

נתון שגודל המהירות של החלקיק: $V(t)=Ct^2$ כאשר C קבוע.

מצאו ופתרו את משוואת המיקום של החלקיק.

6) מסובבים פיצה בתנועה מעגלית



מסובבים פיצה בתנועה מעגלית כך שמתקיים: $\theta=4t^2+5t$

כאשר θ נמדדת ברדיאנים ו- t בשניות.

א. מצאו את המהירות הזוויתית של הבצק.

ב. מצאו את התאוצה הזוויתית של הבצק.

ג. לאחר שהוסיפו את הזיתים מסובבים עוד פעם את הפיצה באותו אופן.
מצאו את הרדיוס בו נמצא זית הנע בתאוצה משיקית של $0.2\frac{m}{sec^2}$.

ד. חזור על סעיף ג' אם ידוע שהתאוצה הקווית הכוללת ב- $t=1sec$ היא: $0.2\frac{m}{sec^2}$.

7) תאוצה משיקית קבועה

נקודה נעה במסלול מעגלי שרדיוסו 30 ס"מ.

הנקודה נעה בתאוצה משיקית קבועה של 4 מטר לשנייה בריבוע.

לאחר כמה זמן מתחילת התנועה התאוצה הרדיאלית של הנקודה תהיה:

א. גדולה פי 2 מהתאוצה המשיקית?

ב. שווה לתאוצה המשיקית?

8) זווית בין משיקית לכוללת

גוף נקודתי מתחיל לנוע ממנוחה במסלול מעגלי בעל רדיוס 2 מטר בתאוצה משיקית קבועה. ידוע כי לאחר שני סיבובים שלמים הגיע הגוף למהירות קווית של 2 מטר לשנייה.

א. תוך כמה זמן השלים הגוף את שני הסיבובים הראשונים?

ב. מה הייתה התאוצה המשיקית של הגוף?

ג. מה הייתה הזווית בין וקטור התאוצה המשיקית לווקטור התאוצה השקולה לאחר שני הסיבובים הראשונים?

ד. מתי, החל מעת תחילת התנועה, תהיה התאוצה המשיקית שווה בגודלה לתאוצה המרכזית של הגוף?

ה. איזה מרחק יעבור הגוף עד אז? (ראה סעיף ד').

9) חמישה סיבובים

נקודה שנמצאת במרחק 15 ס״מ ממרכז הגלגל, מתחילה להסתובב בתאוצה משיקית קבועה. הנקודה מגיעה למהירות זוויתית של $20\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ לאחר 5 סיבובים.

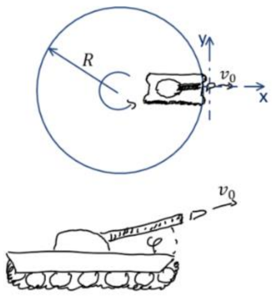
מצא את:

א. התאוצה המרכזית של הנקודה כעבור 5 שניות.

ב. התאוצה המשיקית של הנקודה כעבור 5 שניות.

ג. התאוצה השקולה של הנקודה כעבור 5 שניות.

10) טנק יורה פגז מדיסקה מסתובבת



טנק נמצא בקצה של דיסקה ברדיוס R היכולה להסתובב במקביל לקרקע. הדיסקה מתחילה להסתובב ב- $t=0$ בתאוצה זוויתית $\ddot{\theta}=kt^2$.

כעבור זמן t_0 הטנק נמצא במיקום שבאיור ויורה פגז.

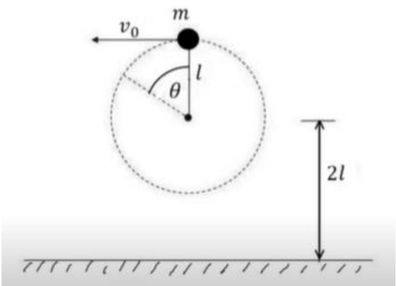
מהירות הלוע של הפגז היא v_0.

התותח מכוון בכיוון הרדיאלי כלפי חוץ, ובזווית φ מעל הקרקע (במאונך למישור שבו מסתובבת הדיסקה).

א. באיזה מהירות ביחס לצופה נייח יוצא הכדור מלוע הטנק?

ב. באיזה מרחק מנקודת הירי יפגע הפגז?

11) חוט נקרע במעגל אנכי גבוה



כדור קטן שמסתו m קשור לקצהו של חוט שאורכו l. הכדור מסתובב במעגל אנכי שמרכזו בגובה 2l מעל הרצפה.

כאשר החוט מתוח והכדור נמצא אנכית מעל ציר סיבוב מעניקים לו מהירות אופקית v_0.

א. מה המהירות המינימלית v_0 הנדרשת כדי שהכדור יבצע תנועה מעגלית שלמה?

ב. מעניקים לכדור מהירות התחלתית: $v_0=1.5\sqrt{gl}$, אם החוט נקרע ברגע שמתיחותו עולה על 5.25mg מצאו את הזווית θ שבה יקרע החוט.

ג. מה מהירות הכדור ברגע שהחוט נקרע, אם נתון ש: $l=2m$?

ד. תוך כמה זמן מרגע קריעת החוט יפגע הכדור ברצפה?

תשובות סופיות:

1) $f=\frac{\omega}{2\pi}$, $T=\frac{2\pi}{\omega}$

2) $V\approx 6.34\frac{m}{sec}$

3) $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1}$

4) א. $\theta_1=48.2°$ ב. $\theta_2=\theta_1=48.2°$ ג. $\left|\vec{V}_{AB}\right|=\sqrt{\frac{8}{3}gR}$ ד. $d=\sqrt{\frac{8}{3}gR}\Delta t$

5) $x=R\cos\frac{C\cdot t^3}{3R}$, $y=R\sin\left(\frac{C\cdot t^3}{3R}\right)$

6) א. $\omega=\dot{\theta}=8t+5$ ב. $\alpha=\dot{\omega}=8\frac{rad}{sec^2}$ ג. $R=2.5c.m$
ד. $1.18\cdot 10^{-3}m$

7) א. $t\approx 0.39\sec$ ב. $t\approx 0.27\sec$

8) א. $t_1\approx 25.1\sec$ ב. $a_\theta\approx 0.08\frac{m}{sec^2}$ ג. $\alpha=87.73°$ ד. $t_2=5\sec$
ה. $S=1m$

9) א. $a_r\approx 150\frac{m}{sec^2}$ ב. $a_\theta\approx 0.95\frac{m}{sec^2}$ ג. $|a|\approx 150\frac{m}{sec^2}$

10) א. $v_x=v_0\cos\varphi$, $v_y=\frac{kt_0{}^3R}{3}$, $v_z=v_0\sin\varphi$
ב. $d=\left((v_0\cos\varphi)^2+\left(\frac{kt_0{}^3R}{3}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(t_0+\frac{2v_0\sin\varphi}{g}\right)$

11) א. $v_{min}=\sqrt{gl^5}$. ב. $\theta\approx 110°$. ג. $v\approx 10\frac{m}{sec}$. ד. $t\approx 0.3\sec$

תרגילים מסכמים למתקדמים:

שאלות:

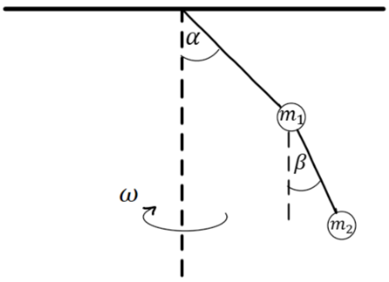
1) מטוטלת כפולה מסתובבת אופקית*

גוף בעל מסה m_1 מחובר באמצעות חוט באורך l_1 לתקרה.

גוף בעל מסה m_2 מחובר באמצעות חוט באורך l_2 לגוף הראשון.

שני הגופים מסתובבים יחדיו בתדירות זוויתית קבועה ω סביב ציר האנך לתקרה.

הזוויות בין החוטים לאנכים הן: β , α (ראה איור).



א. רשום את משוואת התנועה לכל גוף.

ב. מצא מהי הזווית α עבור המקרה בו $m_2 = 0$ ו- $m_1 \neq 0$.
מהי תדירות הסיבוב המינימלית האפשרית?

ג. דני ויוסי ניסו למצא את ω במקרה הכללי.
דני הציב את גדלי המתיחויות של החוטים
במשוואת התנועה של גוף 2
וקיבל: $\omega^2 = \dfrac{g\tan\beta}{l_1\sin\alpha + l_2\sin\beta}$.
יוסי הציב את המתיחויות במשוואת התנועה
של גוף 1 וקיבל: $\omega^2 = \dfrac{g}{l_1}\cdot\dfrac{\frac{m_1+m_2}{m_1}\tan\alpha - \frac{m_2}{m_1}\tan\beta}{\sin\alpha}$.
ישב את הסתירה.

2) חבל עם מסה מסתובב*

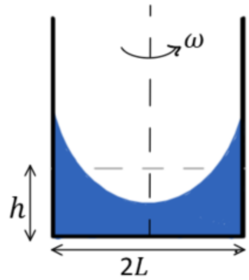
נתון חבל אחיד בעל מסה m ואורך l.

החבל קשור בקצה אחד ומסתובב במישור אופקי במהירות זוויתית ω.

מצא את גודל המתיחות לאורך החבל (כתלות במרחק מהקצה הקשור).

רמז: יש לחלק את החבל לחתיכות קטנות ולעשות משוואת תנועה על כל חתיכה.

(3 מים בכלי מסתובב**



תיבה באורך $2L$ ורוחב w כך ש- $w << L$ מכילה מים.
גובה המים בתיבה הוא h.
מסובבים את התיבה במהירות זוויתית ω סביב ציר העובר במרכזה.
הנח כי המים לא נשפכים מהתיבה.

א. מצאו את הפונקציה המתארת את פני המים במרחב (רמז: חשבו את השיפוע של המשיק לפני המים בנקודה כלשהיא, שיפוע זה הוא הנגזרת של הפונקציה).

ב. מהו הפרש הגבהים בין המים במרכז התיבה למים במרחק אופקי d מהמרכז?

ג. מה יהיה הפרש הגבהים אם נגדיל את מהירות הסיבוב פי 2?

ד. מהו התנאי שתחתית התיבה תתייבש בנקודה כלשהיא?

תשובות סופיות:

(1 גוף 1: $\sum F_y = 0$, $\sum F_x = m_1\omega^2 l_1 \sin\alpha$

גוף 2: $\sum F_y = m_2 g$, $\sum F_x = m_2\omega^2 \left(l_1 \sin\alpha + l_2 \sin\beta\right)$

(2 $T(x) = \frac{m\omega^2}{2l}\left(l^2 - x^2\right)$

(3 א. $y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + h - \frac{\omega^2 L^2}{6g}$ ב. $\Delta y = \frac{\omega^2 d^2}{2g}$ ג. $\Delta y = \frac{2\omega^2 d^2}{g}$

ד. $h = \frac{\omega^2 L^2}{6g}$

מכניקה לתלמידי מתמטיקה 77154

פרק 7 - עבודה ואנרגיה -

תוכן העניינים

שימור אנרגיה ומשפט עבודה ואנרגיה

רקע

עבודה של כוח קבוע :

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot \cos\alpha = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$$

כאשר α היא הזווית בין הכוח להעתק

הערות :

1. העבודה של כוח שמאונך להעתק (לתנועה) מתאפסת.
2. אם הגוף לא זז אז אין עבודה (לכן העבודה של החיכוך הסטטי היא תמיד אפס).

הקשר בין עבודה כוללת לאנרגיה קינטית :

$W_{\Sigma F} = \Delta E_k$ העבודה של **כל הכוחות** שפועלים על הגוף

$E_k = \frac{1}{2}mv^2$ אנרגיה קינטית

כוח משמר :

1. **העבודה שמבצע הכוח אינה תלויה במסלול**. היא תלויה רק בנקודה בה התחיל הגוף ובנקודה בה סיים הגוף את התנועה.
2. העבודה במסלול סגור מתאפסת.
3. יש לו אנרגיה פוטנציאלית $W_c = -\Delta U$

האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית $U_g = mgh$

האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$

כאשר x הוא ההתארכות של הקפיץ ממצב רפוי ו-k הוא קבוע הקפיץ

אנרגיה (מכאנית) כללית : $E = E_k + U$

U היא סכום כל האנרגיות הפוטנציאליות שקיימות בבעיה.

משפט עבודה אנרגיה: $E_i + W_{NC} = E_F$

W_{NC} העבודה של הכוחות הלא משמרים

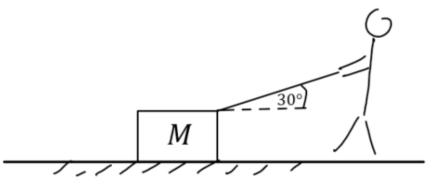
חוק שימור האנרגיה:

אם כל הכוחות משמרים (או העבודה של הכוחות הלא משמרים שווה לאפס) אז האנרגיה הכללית נשמרת

שאלות

1) אדם מושך ארגז

אדם מושך ארגז שמסתו $M = 5kg$ באמצעות חבל ובזווית 30 מעלות ביחס לקרקע.
מקדם החיכוך הקינטי בין הארגז לקרקע הוא: $\mu_k = 0.2$.
האדם מושך את הארגז לאורך שני מטרים. הכוח שמפעיל האדם הוא $80N$.



א. מהי העבודה שביצע האדם?
ב. מהי העבודה שביצע כוח החיכוך?
ג. מהן העבודות שביצעו כוח הכובד והנורמל מהמשטח?
ד. מהי העבודה הכוללת שנעשתה על הארגז?

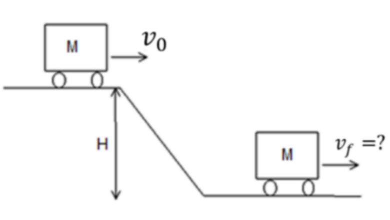
2) מהירות הארגז

בדוגמה הקודמת, אדם מושך ארגז, חשב את מהירות הארגז לאחר שהאדם משך אותו 2 מטרים אם ידוע שהוא התחיל ממנוחה.

3) חישוב עבודה של כוח הכובד

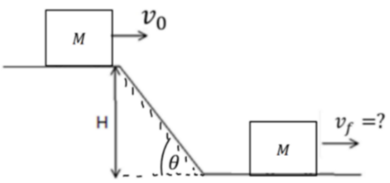
אבן בעלת מסה $2kg$ נופלת מגג בניין בגובה 10 מטרים.
חשבו את העבודה שביצע כוח הכובד על האבן עד הפגיעה בקרקע.
חשבו פעם אחת באופן מפורש דרך המכפלה הסקלרית ופעם נוספת דרך האנרגיה הפוטנציאלית.

4) עגלה במדרון



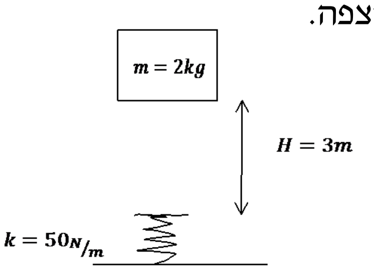
עגלה נעה על משטח ללא חיכוך.
העגלה מתחילה במעלה המדרון בגובה H
עם מהירות התחלתית v_0.
מצא את מהירות העגלה בתחתית המדרון.
נתונים: H, v_0.

5) קופסה במדרון עם חיכוך



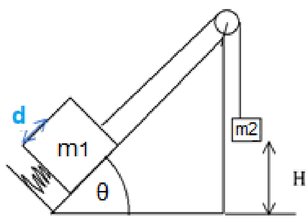
קופסה יורדת במדרון משופע בעל זווית θ.
הנח כי מהירות הקופסה במעלה המדרון היא v_0
וגובהה ההתחלתי הוא H.
מצא את מהירות העגלה בתחתית המדרון.
הנח שהחיכוך הוא רק על החלק המשופע של התנועה.
נתונים: H , $\theta \mu_k$, v_0.

6) מסה נופלת על קפיץ



קפיץ חסר מסה, בעל קבוע קפיץ של $50 \frac{N}{m}$, מחובר לרצפה.
משחררים ממנוחה מסה של $m = 2kg$ הנמצאת
בגובה 3 מטר מעל הקפיץ.
א. מצא את הכיווץ המקסימאלי של הקפיץ.
ב. מה הגובה המקסימאלי אליו תגיע המסה לאחר הפגיעה בקפיץ.

7) שתי מסות מחוברות, מדרון וקפיץ



מסה m_1 נמצאת על מדרון משופע בזווית θ.
המסה מונחת על קפיץ בעל קבוע קפיץ k המכווץ ב- $\Delta x = d$.
אל המסה קשור חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית ומחובר
למסה m_2 הנמצאת בגובה H מעל הרצפה.
המערכת משוחררת ממנוחה.
מצא את מהירות הפגיעה בקרקע של m_2.
נתון:
$m_1 = 1kg$, $m_2 = 2kg$
$H = 3m$, $k = 100 \frac{N}{m}$
$\theta = 30^\circ$, $d = 30cm$

תשובות סופיות

1) א. $W=139J$ ב. $W_{fk}=-4J$ ג. $W_N=W_g=0$ ד. $W_T=135J$

2) $V_F \approx 7.35\frac{m}{sec}$

3) $W_C=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\alpha=200J\ ,\ W_C=-\Delta U=-\left(U_F-U_i\right)=200J$

4) $V_F=\sqrt{v_0^{\ 2}+2gH}$

5) $V_F=\sqrt{v_0^{\ 2}+2gH\left(1-\mu_k\cot\left(\theta\right)\right)}$

6) א. $\Delta x=2m$ ב. $mgH=mgh$

7) $V=5.745\frac{m}{sec}$

חישוב עבודה לכוח לא קבוע

רקע

$$W=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\left(F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz\right)$$

צריך גם משוואה של המסלול

שאלות

1) חישוב עבודה במסלולים שונים

חשב את העבודה שמבצע הכוח: $\vec{F}=xx+yxy$ בין הנקודה $A(0,0)$ לנקודה $B(2,4)$:

א. דרך המסלול של הקו הישר המחבר בין הנקודות.

ב. דרך מסלול המקביל לציר ה-x עד לנקודה $C(2,0)$ ולאחר מכן דרך המסלול המקביל לציר ה-y עד לנקודה B.

ג. דרך המסלול $y=x^2$.

ד. דרך המסלול $x(t)=2t$, $y(t)=4t^2$.

2) כוח בשלושה מימדים

נתון הכוח: $\vec{F}=zx^2\hat{x}+xz\hat{y}+2y\hat{z}$.

א. חשב את העבודה של הכוח דרך המסלול היוצא מהנקודה $A(1,2,3)$ עד לנקודה $B(2,3,5)$ כאשר המסלול יוצא מ-A במקביל לציר ה-Y עד לנקודה $C(1,3,3)$ ולאחר מכן מ-C במקביל לציר ה-Z ועד לנקודה $D(1,3,5)$ ולאחר מכן מהנקודה D במקביל לציר ה-X עד לנקודה B.

ב. חשב את העבודה של הכוח מהנקודה $A(0,0,-1)$ עד הנקודה $B(4,4,5)$ לאורך המסלול הנתון לפי המשוואות: $x(t)=2t$; $y(t)=t^2$; $z(t)=3t-1$.

תשובות סופיות

1) א. $W_{A\to B}=\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 8}{3}$ ב. $W_{A\to B}=18$ ג. $W_{A\to B}=2+\frac{64}{5}$

ד. $W_{A\to B}=2+\frac{64}{5}$

2) א. $26.67J$ ב. $128J$

חישוב כוח משמר מאנרגיה פוטנציאלית

רקע

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \cdot U$$

שאלות

1) **חישוב עבודה מתוך אנרגיה פוטנציאלית**

על גוף מסוים פועל כוח משמר המתאים לאנרגיה הפוטנציאלית הבאה: $\mathrm{U}(x,y) = 2x^2 - 6y^3$.

מצא את העבודה אותה צריך לבצע על מנת להביא את הגוף מהנקודה $(1,0)$ אל הנקודה $(2,3)$.

תשובות סופיות

1) $\mathrm{W_{ext}} = 156\mathrm{J}$

נקודת שיווי משקל:

רקע

נקודת שיווי משקל $\Sigma\vec{F} = 0$ או $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$

שיווי משקל יציב - $U_x'' > 0$

שיווי משקל רופף - $U_x'' < 0$

שיווי משקל אדיש - אנרגיה קבועה

אם יש כמה ממדים אז $\vec{\nabla} U = 0$

שיווי משקל יציב - כל הנגזרות השניות גדולות מאפס

שיווי משקל רופף - כל הנגזרות השניות קטנות מאפס

אוכף - חלק מהנגזרות השניות גדול מאפס וחלק קטן מאפס

שאלות:

1) שעון תלוי

שעון קיר תלוי באמצעות מסמר הנמצא בקצהו העליון.
ניתן לסובב את כל השעון (לא את המחוגים) סביב המסמר.

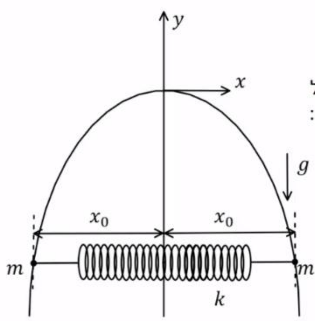
א. מצאו באילו מצבים השעון יהיה בשיווי משקל וקבעו עבור כל מצב איזה סוג שיווי משקל הוא.

ב. חזרו על סעיף א' אם המסמר תקוע במרכז השעון (השעון עדיין יכול להסתובב סביב המסמר).

2) אנרגיה פוטנציאלית בשיווי משקל

האנרגיה הפוטנציאלית של הגוף נתונה לפי הפונקציה הבאה: $U = (x-4)^2 + x^3$.
מצאו את נקודת שיווי המשקל ומיינו אותה לסוגים הרלוונטיים.

3) קפיץ וחרוזים על תיל קשיח מכופף



תיל קשיח מכופף בצורת פרבולה המתאימה לפונקציה: $y=-\mathrm{A}x^2$ כאשר A קבוע נתון.

על התיל מושחלים שני חרוזים זהים בעלי מסה m, אחד בכל צד.

קפיץ אופקי בעל קבוע k ואורך רפוי l מחבר בין החרוזים (ראה איור).

חשבו את המרחק האופקי x_0 של כל חרוז מציר ה- y במצב של שיווי משקל.

הניחו כי הקפיץ והחרוזים נמצאים תמיד באותו הגובה.

הדרכה: כתבו ביטוי לאנרגיה הפוטנציאלית כפונקציה של x בלבד.

תשובות סופיות:

1) א. כשהשעון למטה שיווי משקל יציב וכשהשעון הפוך ב- $180°$ שיווי משקל רופף. ב. השעון בשיווי משקל אדיש.

2) $\mathrm{U}''(x_1)=6\cdot\frac{4}{3}+2>0$, x_1 נק' מינימום ⇐ ש.מ. יציב.

$\mathrm{U}''(x_2)=-2\cdot 6+2<0$, x_2 נק' מקסימום ⇐ ש.מ. רופף.

3) $x_0=\frac{\mathrm{kl}}{2\mathrm{k}-2\mathrm{mgA}}$

ניתוח באמצעות גרפים של אנרגיות:

שאלות:

1) נקודה הכי ימנית

גוף שמסתו 6 ק"ג נע לאורך ציר x בהשפעת כוח יחיד הנגזר מהאנרגיה הפוטנציאלית: $\mathrm{U}(x)=2x^4-36x^2$.

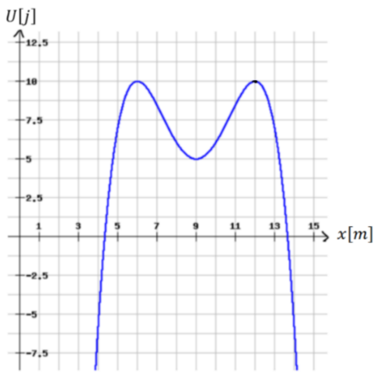
נתון שכאשר הגוף מגיע לנקודה בה $x=-1.5\mathrm{m}$ מהירותו שווה ל- $\mathrm{v}=3\frac{\mathrm{m}}{\sec}$.

א. מהי הנקודה הימנית ביותר במסלול של הגוף?

ב. חזור על סעיף א', אם ערך המהירות היה: $\mathrm{v}=3\frac{\mathrm{m}}{\sec}$.

2) גמל דו דבשתי

כוח משמר פועל על כדור בעל מסה $625\mathrm{gr}$. הגרף הבא מתאר את האנרגיה הפוטנציאלית של הכדור כתלות במיקומו:



א. שרטטו באופן איכותי את הגרף של הכוח כתלות במיקום.

ב. תארו באופן מילולי את תנועת הכדור אם הוא משוחרר מ- $x=7\mathrm{m}$ ממנוחה.

ג. מהי המהירות המינימלית שצריך לתת לכדור במצב של סעיף ב' על מנת שהכדור יגיע לאינסוף?

ד. מהן נקודות שיווי המשקל? מיינו אותן לפי יציבותן וציינו מה המשמעות של כל סוג של שיווי משקל.

3) שני גופים בפוטנציאל אקספוננציאלי ריבועי

שני גופים נמצאים על ציר ה- x ונתונים להשפעת הפוטנציאל: $\mathrm{U}(x)=\mathrm{A}xe^{-\mathrm{B}x^2}$ כאשר B , A הם קבועים חיוביים. נתון כי ברגע מסוים גוף אחד נמצא ב- $x=0$ והאנרגיה שלו היא אפס, והגוף השני נמצא ב- $x=-\sqrt{\frac{1}{\mathrm{B}}}$ והאנרגיה שלו היא: $\mathrm{E}=-\frac{\mathrm{A}}{e}\sqrt{\frac{1}{\mathrm{B}}}$. היכן ייפגשו הגופים? (בחר את התשובה הנכונה):

א. בתחום $-\sqrt{\frac{1}{\mathrm{B}}}\le x\le 0$.

ב. הגופים לא ייפגשו אף פעם

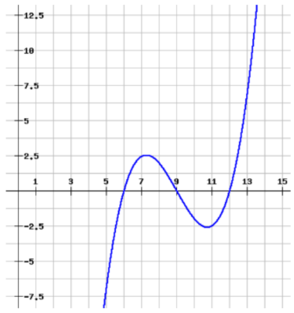
ג. בנקודה $x=-\sqrt{\frac{1}{\mathrm{B}}}$.

ד. ב- $x=0$.

תשובות סופיות:

1) א. $x=-1.202\text{m}$ ב. $x=6.81\text{m}$

2) א.



ב. מתחיל בתאוצה בכיוון החיובי עד $x=9\text{m}$ ואז מתחיל להאט עד $x=11\text{m}$ שם עוצר רגעית ומסתובב חזרה. כך חוזר עד אינסוף.

ג. 2 מטר לשנייה.

ד. $x=6\text{m}$ לא יציבה, $x=9\text{m}$ יציבה, $x=12\text{m}$ לא יציבה.

3) א'.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

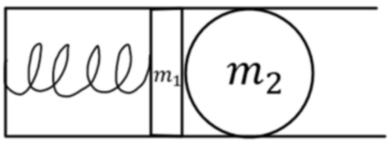
1) קפיץ יורה כדור

הלוע של רובה צעצוע מורכב מקפיץ בעל קבוע k ובוכנה בעלת מסה m_1.

בטעינה דוחפים כדור בעל מסה m_2 ודורכים את הקפיץ.

הכיווץ של הקפיץ הוא d.

ברגע הירי הקפיץ משוחרר ממנוחה.



א. באיזה רגע הכדור מנתק מגע מהבוכנה?

ב. מהי מהירות הכדור ברגע הזה?

2) כוח כפונקציה של מיקום, קפיץ וחיכוך*

מסה m נמצאת על מישור אופקי לא חלק ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k.

החל מ- $t=0$ פועל על המסה כוח התלוי במיקום: $\vec{F}(x)=\left(30x^2-4x\right)\hat{x}$.

כל היחידות בשאלה הן יחידות סטנדרטיות.

ב- $t=0$ המסה נמצאת בראשית עם מהירות התחלתית v_0 והקפיץ רפוי.

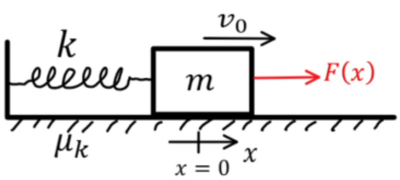
נתונים: $m=2\text{kg}$, $k=10\frac{\text{N}}{\text{m}}$, $\mu_k=0.3$, $v_0=5\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

א. רשמו ביטוי לתאוצת המסה כתלות במיקום $a(x)$, הנח כי התנועה תמיד בכיוון החיובי.

ב. מצאו את המיקום בו התאוצה של המסה מתאפסת.

ג. מהי העבודה שביצע הכוח מתחילת התנועה ועד אשר $x=0.5\text{m}$?

ד. מהי המהירות של המסה כאשר מיקומה $x=0.5\text{m}$?



3) כוח כפונקציה של זמן במישור משופע*

מסה $m = 5kg$ נמצאת על מישור משופע לא חלק.

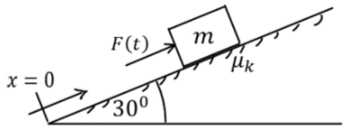
על המסה פועל כוח התלוי בזמן $F(t)$ שדוחף אותה במעלה המישור.

מהירות המסה ידועה והיא נתונה לפי הפונקציה: $v(t) = 3t^2 + 2t$.

מקדם החיכוך הוא: $\mu_k = 0.2$ ונתון כי: $x(t=0) = 0$.

כל היחידות הן יחידות סטנדרטיות.

זווית המישור היא 30 מעלות.



א. (1) היכן נמצא הגוף ב- $t = 2\sec$?

(2) מהו גודל הכוח F ברגע זה?

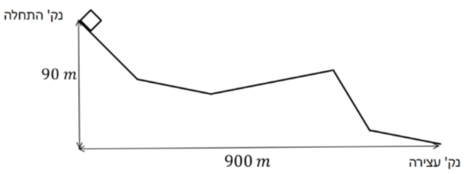
ב. מהו מיקום הגוף כאשר תאוצתו היא: $8\frac{m}{\sec^2}$?

ג. מהי האנרגיה הקינטית של הגוף ברגע של סעיף ב'?

ד. מהי עבודת הכוח F מרגע $t = 0\sec$ ועד ל- $t = 3\sec$?

4) קופסה מחליקה על מקטעים ישרים*

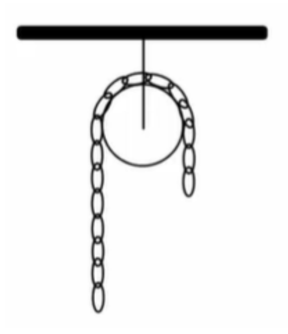
קופסה משוחררת ממנוחה ומתחילה להחליק לאורך מסלול שאינו ידוע, אך מורכב מקטעים ישרים בלבד.



בין הקופסה למשטח עליו היא מחליקה קיים חיכוך והקופסה נעצרת בנקודה המרוחקת 900m אופקית ו- 90m מתחת לנקודה בה התחילה.

חשבו את מקדם החיכוך, לא חסרים נתונים.

5) שרשרת על גלגלת



שרשרת בעלת מסה M ואורך L מונחת על גלגלת אידאלית התלויה מהתקרה.

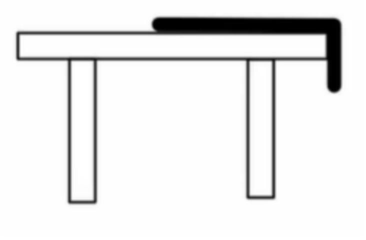
השרשרת מונחת כך שרבע מהשרשרת בצד אחד של הגלגלת ושאר השרשרת בצד השני.

הנח שהחלק על הגלגלת עצמה זניח.

המערכת משוחררת ממנוחה.

מצאו את מהירות השרשרת ברגע שהקצה האחרון שלה עובר את הגלגלת.

6) חבל מחליק משולחן אנרגיה ומשוואת תנועה*



חבל באורך L ומסה M מונח על שולחן חסר חיכוך כך שהקצה של החבל באורך d נשמט מחוץ לשולחן. החבל מוחזק ומשוחרר ממנוחה.

א. רשמו את האנרגיה הקינטית והאנרגיה הפוטנציאלית במהלך החלקת החבל.

ב. השתמשו בשימור אנרגיה ומצאו את משוואת התנועה של החבל.

ג. השתמשו במשוואת התנועה ומצאו את מהירות החלקת כל החבל מהשולחן למטה.

7) חישוב עבודה של כוח במסלול מעגלי ואלפטי

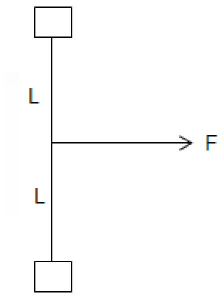
נתון הכוח הבא: $\vec{F} = a(2x+4y)x + b(4x-2y)y$

א. מצא תנאי על a ו- b כך שהכוח יהיה משמר.

ב. מצא את העבודה שעושה הכוח על גוף הנע במסלול סגור לאורך מעגל המתואר ע"י: $\vec{r} = R\cos\theta x + R\sin\theta y$ כאשר הגוף מתחיל את תנועתו מהנקודה $(R,0)$.

ג. מצא את העבודה שעושה הכוח על גוף הנע במסלול סגור לאורך אליפסה המתוארת ע"י: $\vec{r} = d\cos\theta x = k\sin\theta y$ כאשר הגוף מתחיל את תנועתו מהנקודה $(d,0)$.

8) חוט מושך שתי מסות מחוברות בחוט**



חוט חסר מסה באורך 2L מחבר שתי מסות הנעות במישור אופקי ללא חיכוך.
כוח אופקי קבוע ונתון מושך את החוט במרכזו, בכיוון מאונך לחוט.
הנח שהמסות מתנגשות ונדבקות בהתנגשות.
כמה אנרגיה הלכה לאיבוד בהתנגשות?

תשובות סופיות:

1) א. בנקודת הרפיון של הקפיץ. ב. $V=\sqrt{\frac{kd^2}{m_1+m_2}}$

2) א. $a_{(x)}=15x^2-7x-3$ ב. $x=0.738\text{m}$ ג. $W=0.75\text{J}$

ד. $V=4.64\frac{m}{s}$

3) א. (1) $x=12$ (2) $F=103.7\text{N}$ ב. $x=2\text{m}$ ג. $E_k=62.5\text{J}$

ד. $W=3935\text{J}$

4) 0.1

5) $V=\sqrt{\frac{3gL}{8}}$

6) א. $E=\frac{1}{2}MV^2-\frac{M}{2}g\frac{y^2}{2}$ ב. $\ddot{y}=\frac{gy}{L}$

ג. $V(y=L)=\sqrt{\frac{g}{L}\left(L^2-d^2\right)}$

7) א. $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0\Rightarrow a=b$ ב. $W=R^2\left(0-4a\pi+4b\pi\right)$ ג. $W=k\cdot d\left(0-4a\pi+4b\pi\right)$

8) $\Delta E=F\cdot l$

מכניקה לתלמידי מתמטיקה 77154

פרק 8 - מתקף ותנע -

תוכן העניינים

מתקף ותנע:

רקע

התנע של גוף:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

הניסוח הכללי יותר לחוק השני של ניוטון:

$$\sum \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

המתקף של כוח:

$$\vec{J} = \int \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

המתקף הוא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות בזמן
(לא לבלבל עם העבודה שהיא השטח מתחת לגרף של הכוח כתלות במיקום).

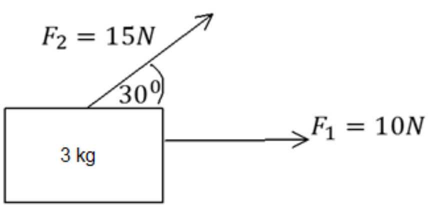
המתקף הכולל שפועל על גוף שווה לשינוי בתנע שלו:

$$\vec{J}_{\Sigma\vec{F}} = \Delta\vec{p}$$

שאלות:

1) **דוגמה לחישוב מתקף**
שחקן בועט בכדור בעל מסה 2 ק"ג בכוח קבוע של 50 ניוטון.
זמן המגע בין הכדור לשחקן הוא 0.2 שניות.
מהי מהירות הכדור לאחר הבעיטה?

2) **דוגמה 2-שני כוחות על גוף**
נתון גוף בעל מסה של 3 קילוגרם.
על הגוף פועלים הכוחות כמתואר בציור
במשך זמן של 0.5 שניות.
א. מצא את המתקף שמפעיל כל כוח.
ב. מצא את המתקף השקול הפועל על הגוף.
ג. מצא את מהירות הגוף לאחר פעולת הכוחות אם התחיל ממנוחה.



3) מתקף של כוח ממוצע דוגמה

כדור בעל מסה של 1 ק"ג נזרק לעבר קיר במהירות של 2 מטר לשנייה.
הכדור פוגע בקיר וחוזר באותה המהירות.

א. חשב את המתקף שפעל על הכדור.

ב. מי מפעיל את המתקף הנ"ל?

ג. חשב את הכוח הנורמאלי הממוצע שמפעיל הקיר אם זמן הפגיעה הוא 0.2 שניות.

תשובות סופיות:

1) $V_f = \frac{5m}{sec}$

2) א. $\vec{J}_1 = 5N \cdot sec\,\hat{x}$, $|\vec{J}_2| = 7.5N \cdot sec$ ב. $|J| = 12.1N \cdot sec$

ג. $V_x = \frac{11.5}{3}\frac{m}{sec}$, $V_y = \frac{3.75}{3}\frac{m}{sec}$

3) א. $\vec{J} = \Delta\vec{P} = -4N \cdot sec\,\hat{x}$ ב. הכוח הנורמלי. ג. $\bar{N} = -20N\hat{x}$

חוק שימור תנע וכוחות חיצוניים:

רקע

אם סכום הכוחות החיצוניים על מערכת גופים מתאפס אז התנע הכולל של המערכת נשמר.

הנוסחה לחוק שימור התנע עבור שני גופים:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

בד"כ רושמים את הנוסחה פשוט לכל ציר בנפרד.

שאלות:

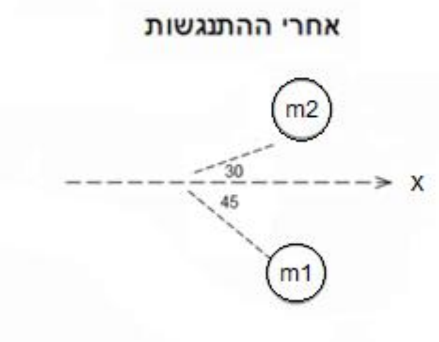
1) **דוגמה לשימור תנע**

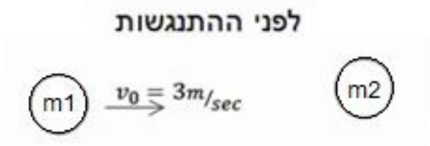
כדור בעל מסה m_1 ומהירות V_0, פוגע בכדור שני בעל מסה m_2.
לאחר ההתנגשות, כדור 2 עף בזווית של 30 מעלות עם ציר ה-x
וכדור 1 עף בזווית של 45 מעלות מתחת לציר ה-x.

נתון: $m_1 = 3\text{kg}$, $m_2 = 2\text{kg}$, $V_0 = 3\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

א. מצא את גודל מהירות הגופים לאחר ההתנגשות.

ב. מצא את המתקף שפעל על כל גוף.





תשובות סופיות:

1) א. $V_1 = 1.55\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $V_2 = 3.29\frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ב. $\vec{J}_1 = -5.71\text{N}\cdot\sec\hat{x} - 3.29\text{N}\cdot\sec\hat{y}$, $\vec{J}_2 = -\vec{J}_1$

סוגי התנגשויות:

רקע

סוג ההתנגשות	התנגשות אלסטית	התנגשות אי-אלסטית
תכונות	שימור תנע ושימור אנרגיה $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$ $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$	רק שימור תנע $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$
מקרים מיוחדים	התנגשות חזיתית $v_1+u_1=v_2+u_2$ **התנגשות חזיתית בין שני גופים בעלי מסות שוות כשאחד הגופים במנוחה** כל האנרגיה עוברת לגוף השני (הגוף הפוגע נעצר) התנגשות **שאינה** חזיתית בין שני גופים בעלי מסות שוות כשאחד הגופים במנוחה זווית בין המהירויות היא 90 מעלות	**התנגשות פלסטית** הגופים נעים יחד לאחר ההתנגשות $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{u}$ דוגמאות: קליע שנתקע בבול עץ, שני כדורים שנדבקים **רתע** הגופים נעים יחד לפני ההתנגשות $(m_1+m_2)\vec{v}=m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2$ דוגמאות: קליע שנורה מרובה, פיצוץ

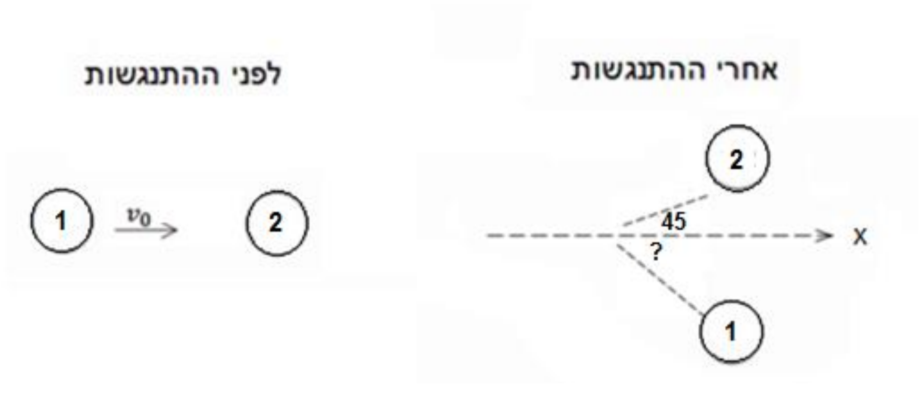
שאלות:

1) פיזור

כדור מספר 1 בעל מסה m ומהירות V_0 מתנגש אלסטית בכדור מספר 2 בעל מסה 3m הנמצא במנוחה.

הזווית של כדור מספר 2 עם ציר ה- x היא 45.

מצא את הזווית של כדור מספר 1 לאחר ההתנגשות.



תשובות סופיות:

1) $\theta = 71.56°$

שימור תנע בהתנגשויות קצרות:

שאלות:

1) **זיקוק מתפוצץ**

זיקוק נורה לאוויר בכיוון אנכי לקרקע.

ברגע שהזיקוק מגיע לשיא הגובה הוא מתפוצץ לשלושה חלקים שווים בגודלם.

משך זמן הפיצוץ הוא: 0.5sec.

מהירות החלק הראשון לאחר הפיצוץ היא: $50\frac{\text{m}}{\text{sec}}\hat{x}$ ומהירות החלק השני

היא: $20\frac{\text{m}}{\text{sec}}\hat{x}-10\frac{\text{m}}{\text{sec}}\hat{y}+50\frac{\text{m}}{\text{sec}}\hat{z}$.

מהי מהירות החלק השלישי?

תשובות סופיות:

1) $\vec{u}_3=70\hat{x}-25\hat{y}+50\hat{z}$

סיכום ומקדם תקומה:

רקע

מקדם תקומה:

$$e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}$$

מסמל את מידת האלסטיות של גופים בהתנגשות.

שאלות:

1) דוגמה עם מקדם תקומה

גוף בעל מסה m נע במהירות V על משטח אופקי חלק ומתנגש בגוף בעל מסה 3m הנמצא במנוחה.
נתון כי ההתנגשות חד ממדית ומקדם התקומה הוא 0.8.
מצא את מהירות הגופים לאחר ההתנגשות.

תשובות סופיות:

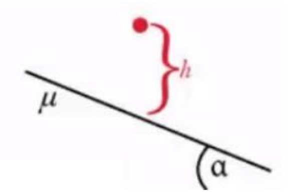
1) $u_2 = 0.45V$, $u_1 = -0.35V$

התנגשויות קצרות ללא שימור תנע:

שאלות:

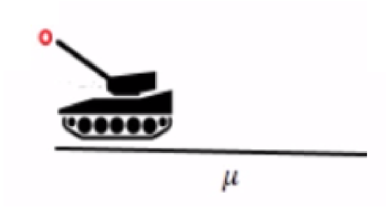
1) התנגשות קצרה במדרון

כדור בעל מסה m נופל אל מדרון לפי המתואר בשרטוט.
נתון כי הכדור אינו מתרומם חזרה מעל המדרון לאחר הפגיעה.
מצא את מהירות הכדור רגע לאחר הפגיעה.



2) טנק וחיכוך קינטי

טנק בעל מסה M יורה פגז בעל מסה m
בזווית α מעל האופק במהירות V.
הטנק מוצב על מישור בעל מקדם חיכוך קינטי נתון.
מה תהיה מהירותו של הטנק רגע לאחר הירייה?



תשובות סופיות:

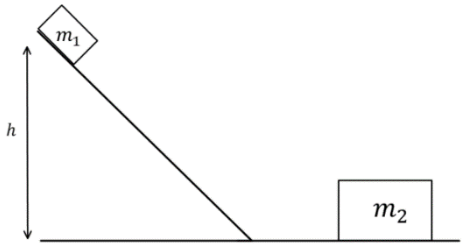
1) $$u_P = \frac{m\sqrt{2gh}\sin\theta - \mu m\sqrt{2gh}\cos\theta}{m}$$

2) $$u = \frac{mv\cos\alpha - \mu mv\sin\alpha}{M}$$

תרגילים מסכמים:

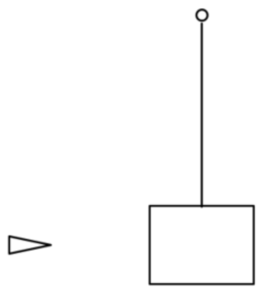
שאלות:

1) גוף יורד במדרון מתנגש ועולה חזרה



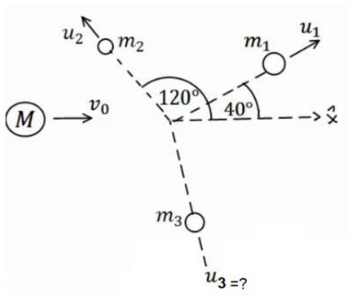
גוף בעל מסה $m_1 = 2kg$ משוחרר ממנוחה על מדרון משופע בגובה $h = 1m$.
בתחתית המדרון מונח גוף בעל מסה $m_2 = 5kg$.
הגוף הראשון פוגע בגוף השני בהגיעו למישור האופקי והגופים מתנגשים התנגשות אלסטית, עד לאיזה גובה יגיע הגוף הראשון בחזרה במעלה המדרון? אין חיכוך בין הגופים למשטחים.

2) קליע חודר מטוטלת בליסטית



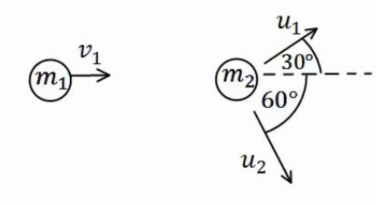
בול עץ בעל מסה $2kg$ קשור לחוט ותלוי אנכית במנוחה.
קליע בעל מסה $5gr$ נע במהירות $v_1 = 450\frac{m}{sec}$ פוגע בבול העץ, חודר אותו, ויוצא מצידו השני במהירות $u_1 = 150\frac{m}{sec}$.
לאיזה גובה מקסימאלי יגיע בול העץ?

3) פצצה



פצצה בעלת מסה $M = 13kg$ נעה באוויר במהירות קבועה $v_0 = 100\frac{m}{sec}$. ברגע מסוים, הפצצה מתפוצצת לשלושה חלקים קטנים יותר.
מסת החלק הראשון היא: $m_1 = 4kg$ והוא נע במהירות $v_1 = 80\frac{m}{sec}$ בזווית של 40° ביחס לכיוון המקורי.
מסת החלק השני היא: $m_2 = 2kg$ והוא נע במהירות $v_2 = 10\frac{m}{sec}$ בזווית של 120° ביחס לכיוון המקורי.
מסת החלק השלישי היא: $7kg$.
מצא את מהירות החלקיק השלישי.

4) איבוד אנרגיה

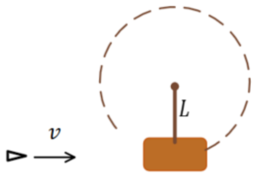


כדור בעל מסה $m_1 = 2kg$ ומהירות $v_1 = 10\frac{m}{sec}$
מתנגש בכדור בעל מסה $m_2 = 3kg$ הנמצא במנוחה.
לאחר ההתנגשות הכדור הראשון נע בכיוון $30°$
מעל לכיוון הפגיעה, והכדור השני נע בזווית $60°$ מתחת לכיוון הפגיעה (ראה איור).

א. מצא את מהירות הגופים לאחר ההתנגשות.

ב. האם ההתנגשות אלסטית? אם לא - כמה אנרגיה נאבדה בהתנגשות?

5) קליע חודר בול עץ וגורם לסיבוב אנכי (כולל תנועה מעגלית)



בול עץ בעל מסה M תלוי אנכית באמצעות מוט קשיח
חסר מסה באורך L. המוט ביחד עם בול העץ יכולים
להסתובב במעגל אנכי (ראה איור).
יורים קליע בעל מסה m במהירות אופקית v לעבר בול העץ.
הקליע חודר את הבול ויוצא מצידו השני במהירות v_f.
יחד עם הקליע יוצאת גם חתיכה מהעץ (במהירות הקליע) ובמסה של 5 אחוז ממסת בול העץ.
מהי המהירות המינימלית של הכדור עבורה בול העץ יוכל להשלים סיבוב אנכי (שימו לב שהמוט קשיח)?

6) אדם יורד מכדור פורח

אדם נמצא בכדור פורח בגובה קבוע באוויר.
משקלו של האדם הוא 70 ק״ג ומסתו של הכדור פורח (ללא האדם) היא 280 ק״ג (כולל הסל וכל אביזר אחר בכדור).
האדם משלשל חבל מהסל של הכדור פורח ומתחיל לרדת באמצעות החבל כלפי מטה.

א. אם מהירותו של האדם בזמן הירידה בחבל היא 3 מטר לשנייה כלפי מטה וביחס לקרקע, מהי המהירות של הכדור פורח (גודל וכיוון)?

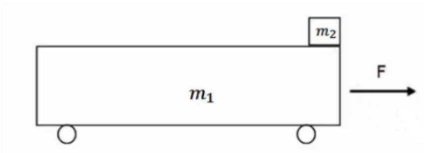
ב. מהי מהירות הכדור פורח אם האדם נעצר לפתע באמצע (לפני שהוא מגיע לקרקע)?

7) מסה על קרונית ואיבוד אנרגיה

נתון כוח F קבוע המושך עגלה בעלת מסה m_1 ללא חיכוך.

מעל העגלה נמצאת מסה m_2 ובין המסות יש חיכוך.

נתון: m_2 , m_1 , F , μ_k , μ_s .



א. מה הכוח F המקסימאלי עבורו המסה העליונה תחליק ביחס לתחתונה?

נניח כי הכוח F גדול מזה שחישבת בסעיף א'.

נניח גם כי הכוח הפועל במשך זמן T נתון והמסה העליונה אינה נופלת מהתחתונה.

ב. מה הכוח F המקסימאלי?

ג. מהי תאוצת הגופים, מהירותם ומיקומם כפונקציה של הזמן עד לזמן T?

ד. כמה אנרגיה הלכה לאיבוד בזמן הזה?

ה. מצא את מהירותם הסופית של הגופים (ב- $t > T$) בהנחה שהמסה העליונה עדיין לא נופלת.

8) מסה על שני קרונות

נתונים שני קרונות על משטח חלק.

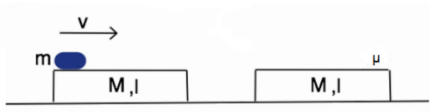
הקרון הימני במנוחה והקרון השמאלי נע לעברו במהירות v.

על הקרון השמאלי מונחת מסה הנעה יחד עד הקרון.

מקדם החיכוך בין המסה לקרון הימני נתונה.

בין המסה לקרון השמאלי אין חיכוך.

בזמן $t = 0$ הקרון השמאלי פוגע בקרון הימני ונצמד אליו (אך הוא יכול להיפרד ממנו לאחר מכן).



א. מתי תעבור המסה לקרון הימני?

ב. מה תהיה מהירותו הסופית של הקרון הימני?

ג. מהי תאוצת הקרון הימני? כמה זמן תאוצה זו נמשכת?

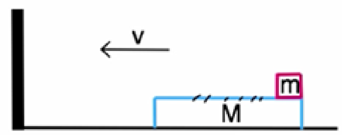
ד. האם סעיף ב' וג' תואמים בתשובותיהם?

9) מסות שומרות תנע ונדבקות לקיר

המסה m מונחת על גבי הקרונית M (אך אינה מחוברת אליה).

שתי המסות נעות יחד במהירות v על גבי משטח חלק לעבר קיר. התנגשות בקיר אלסטית.

מקדם החיכוך בין המסות הוא μ .

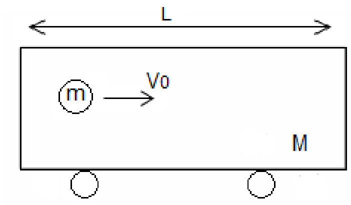


א. מה תהיה מהירות המסה M לאחר זמן רב בהנחה שהיא גדולה מהמסה m .

ב. ענה על סעיף א' בהנחה שהמסה M קטנה מהמסה m .

10) כדור בקרונית

כדור בעל מסה m ומהירות v_0 נע בתוך קרונית בעלת מסה $M=\alpha m$ ואורך L.
הכדור מתנגש בדופן הימנית של הקרונית התנגשות אלסטית.
(אין חיכוך בין הקרונית לרצפה).



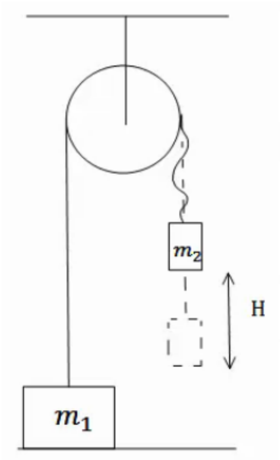
א. מהי מהירות הגופים לאחר ההתנגשות?
בדוק עבור: $\alpha = 0\ ,\ 1\ ,\ \infty$.

ב. כמה זמן יעבור מהפגיעה הראשונה בדופן לפגיעה השנייה בדופן השמאלית?

11) שתי מסות על גלגלת וחוט רפוי

שתי מסות m_2 , m_1 תלויות על גלגלת אידיאלית חסרת חיכוך.
המסה m_1 נמצאת על הקרקע במנוחה בעוד שהמסה m_2 תלויה באוויר.
מרימים את מסה m_2 גובה H נוסף כך שהחוט מתרופף ומשחררים אותה ממנוחה.

א. מצא את מהירות המסה m_2 לפני שהיא מגיעה לנקודה בה החוט נמתח.



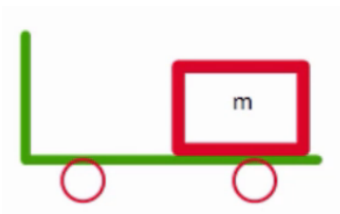
ב. כעת החוט נמתח. הנח שהחוט אינו אלסטי, כלומר, האורך שלו קבוע ללא תלות בגודל המתיחות שלו כל עוד קיימת בו מתיחות כלשהי (והוא אינו רפוי כמו בסעיף א').
מצא את השינוי הכולל בתנע של שתי המשקולות (בין הקטע מיד לפני שהחוט נמתח לבין הקטע מיד אחרי שהחוט מתוח ושתי המסות זזות).

ג. מצא את המתקף שהפעילה התקרה על הגלגלת בזמן מתיחות החוט.

ד. לאיזה גובה תעלה m_1 בהנחה ש- $m_1 > m_2$ ו- m_2 אינה פוגעת ברצפה.

ה. מהו המתקף שמפעילה התקרה על הגלגלת מהרגע $t=0$ ועד לרגע בו m_1 הגיעה לשיא הגובה?

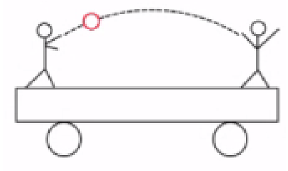
12) מסה מתנגשת במשאית ונופלת



מסה m מונחת על עגלה חסרת חיכוך בעלת אורך L ומסה $5m$. המסה נוסעת במהירות v לכיוון שמאל והעגלה נייחת.
נתון כי ההתנגשות בין המסה לבין העגלה היא התנגשות אלסטית.
לאחר כמה זמן מרגע ההתנגשות תיפול המסה מהעגלה?

13) רתע בתוך עגלה

בתוך עגלה ללא חיכוך עומדים שני חברים המקובעים לרצפת הקרון.
מסת האנשים והקרון M ואורך הקרון L.
האדם זורק כדור בעל מסה m במהירות v אל עבר חברו.



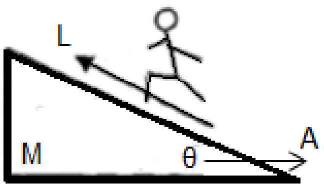
א. מה תהיה מהירות העגלה והאנשים שעליה לאחר זריקת הכדור?
ב. מה תהיה מהירות העגלה לאחר שהחבר יתפוס את הכדור?
ג. כמה זמן הכדור ישהה באוויר?
ד. מהו המרחק אותו עברה העגלה במהלך זמן זה?
ה. תאר מה יקרה אם החבר ימסור חזרה את הכדור לחברו.

14) אדם הולך על עגלה (מכיל תנועה יחסית)

אדם בעל מסה M עומד על עגלה בעלת מסה m.
האדם מתחיל ללכת במהירות v_R ביחס לעגלה.
מצא את מהירות האדם והעגלה ביחס לקרקע אם אין חיכוך בין העגלה לרצפה.

15) אדם על רמפה (מכיל תנועה יחסית)*

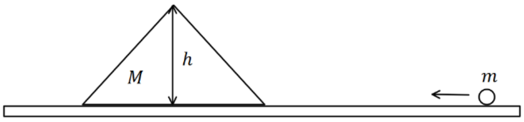
אדם שמסתו m רץ במעלה רמפה משופעת בזווית θ.
מסת הרמפה היא M, והיא מונחת על מישור חלק.
האדם מתחיל ממנוחה והזמן הדרוש לו בכדי לעבור דרך שאורכה L על פני הרמפה הוא T.



א. מהי תאוצת האדם ביחס לרמפה?
ב. עקב הריצה נהדפת הרמפה ימינה, בתאוצה לא ידועה A יחסית לקרקע. בטאו את רכיבי התאוצה של האדם יחסית לקרקע בעזרת התאוצה A.
ג. כמה זזה הרמפה ימינה בזמן T?

16) כדור עולה על מדרון משולש

מדרון משולש בעל גובה $h=3m$ חופשי לנוע מעל משטח אופקי חלק (ללא חיכוך).
מסת המדרון היא: $M=15kg$.
מגלגלים כדור בעל מסה $m=5kg$ על המשטח לכיוון המדרון.
התייחס לכדור כאל גוף נקודתי.



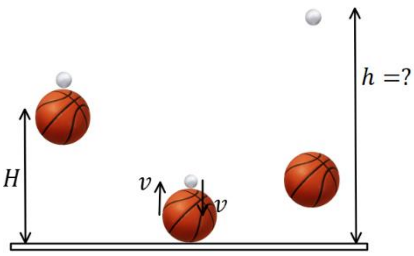
א. מה צריכה להיות המהירות שבה מגלגלים את הכדור כך שהוא יעצור (ביחס למדרון) בדיוק לפני שהוא עובר את שיא הגובה של המדרון?
ב. מהי מהירות המדרון ברגע שהכדור מגיע לשיא הגובה?
ג. מהי המהירות הסופית של המדרון והכדור?

17) מסה מחליקה בין שני טריזים

גוף בעל מסה m מחליק על שני טריזים זהים בעלי מסה M כל אחד.
המעבר מהטריז למשטח האופקי הוא חלק,
המשטחים חסרי חיכוך וחופשיים לנוע על
השולחן (ראו סרטוט).
לאיזה גובה מקסימאלי יטפס הגוף על הטריז
השני אם גובהו ההתחלתי הוא h?

18) כדור גולף על כדורסל

כדור גולף וכדור כדורסל מוחזקים במנוחה
אחד מעל השני בגובה $H = 1.5m$.
משחררים אותם ליפול ממנוחה.
מה יהיה הגובה המרבי אליו יגיע כדור הגולף
אם נניח שכל ההתנגשויות אלסטיות ומצחיות.
מסת כדור הגולף היא: $m = 46gr$
ומסת הכדורסל היא: $M = 624gr$.

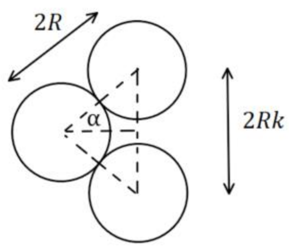


19) התנגשות אלסטית זהה בכל המערכות

במערכת אינרציאלית מסוימת האנרגיה הקינטית של שני גופים m_1 ו- m_2 היא E_k.
מצאו את האנרגיה הקינטית של הגופים במערכת אינרציאלית אחרת הנעה
במהירות v_0 ביחס למערכת המקורית.
השתמשו בתוצאה שקיבלתם והראו כי אם במערכת מסוימת ההתנגשות היא
אלסטית אז היא חייבת להיות אלסטית גם בכל מערכות הייחוס האינרציאליות
האחרות.

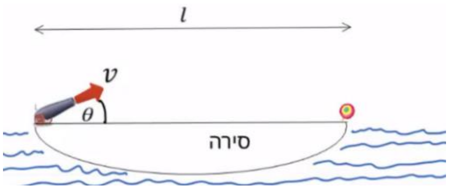
20) דיסקה מתנגשת בשתי דיסקות זהות

על מישור חלק נמצאות 3 דיסקות זהות בעלות מסה M
ורדיוס R כל אחת.
הדיסקה השמאלית באיור נעה במהירות v ומתנגשת
התנגשות אלסטית בו זמנית עם שתי הדיסקות האחרות
כפי שמתואר באיור.
המרחק בין הדיסקות שנמצאות במנוחה לפני ההתנגשות
מתואר על ידי 2Rk כאשר $1 \le k \le 2$.



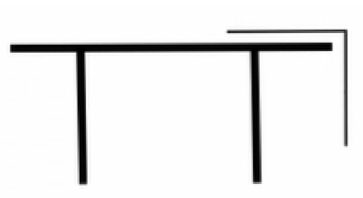
א. מהי גודלה של מהירות הדיסקה הפוגעת לאחר ההתנגשות
כתלות בזווית α שבאיור?
ב. עבור אילו ערכים של k הדיסקה תחזור אחורה/תיעצר במקום/
תמשיך קדימה?

21) סירה יורה פגז על מטרה בקצה השני



סירה באורך l נמצאת על מים שקטים,
בקצה השמאלי של הסירה נמצא תותח
צעצוע ובקצה הימני נמצאת מטרה.
התותח יורה פגז צעצוע בזווית θ
ובמהירות v ביחס לקרקע.
מסת הפגז היא m ומסת הסירה היא M.
מצא את המהירות v הדרושה בשביל לפגוע בדיוק במטרה
(הזנח את גובה התותח וגובה המטרה והנח כי התותח מחובר לסירה).

22) שרשרת מחליקה משולחן

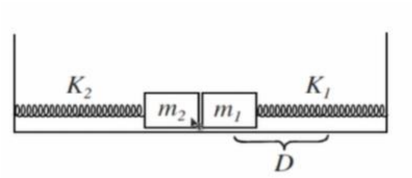


שרשרת בעלת אורך l ומסה m מחליקה ממנוחה
משולחן כאשר חציה עדיין מונח על השולחן.

א. מה תהיה מהירות השרשרת ברגע הניתוק
מהשולחן, בהנחה שאין חיכוך?

ב. ענה על סעיף א׳ בהנחה שמקדם חיכוך μ
קיים בין השרשרת לשולחן.

23) שתי מסות ושני קפיצים

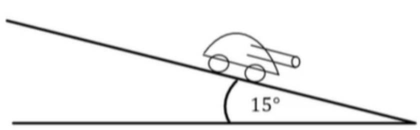


מסות מתחילות ממנוחה כבשרטוט.
המסה הימנית נמתחת מרחק D ימינה ומשוחררת.
כשהיא פוגעת במסה השנייה היא נדבקת אליה
ושתיהן ממשיכות יחד.

א. מהו הכיווץ המקסימלי של הקפיץ השמאלי?

ב. מהו הכיווץ המקסימלי של הקפיץ הימני כאשר שתי המסות חוזרות ימינה?

24) טנק יורה פגזים ועולה במדרון**



טנק שמסתו 800 ק״ג (טנק קל מאוד) נמצא
ברגע מסוים במנוחה על מדרון משופע בזווית
של 15 מעלות. הטנק יורה שני פגזים במרווח
של 2 שניות בין הירי הראשון לשני.
מסת כל פגז היא 20 ק״ג והוא נורה במהירות
לוע של 400 מטר לשנייה במקביל ובמורד למדרון.
הניחו שלטנק גלגלים והחיכוך בינו למדרון זניח.
מה ההעתק המקסימאלי שיעשה הטנק במעלה המדרון?

תשובות סופיות:

1) 0.18m

2) 0.028m

3) $u=155\dfrac{\text{m}}{\sec}$

4) א. $u_1=8.66\dfrac{\text{m}}{\sec}\ ,\ u_2=3.34\dfrac{\text{m}}{\sec}$ ב. לא אלסטית, $Q=8.27\text{J}$

5) $v_{\min}=\left[(m+0.05M)v_f+0.95M\cdot 2\sqrt{gL}\right]\cdot\dfrac{1}{m}$

6) א. $0.75\dfrac{\text{m}}{\sec}$ כלפי מעלה. ב. 0

7) א. $F\le\mu_s g(m_1+m_2)$ ב. תאוצה: $a_2=\mu_k g\ ,\ a_1=\dfrac{F}{m_1}-\dfrac{m_2}{m_1}\mu_k g$,

מהירות: $v_2(t)=a_2t\ ,\ v_1(t)=a_1t$, מיקום: $x_2(t)=\dfrac{1}{2}a_2t^2\ ,\ x_1(t)=\dfrac{1}{2}a_1t^2$

ג. $E=F\cdot\dfrac{1}{2}a_1T^2-\left(\dfrac{1}{2}m_2{v_2}^2(T)+\dfrac{1}{2}m_1{v_1}^2(T)\right)$ ד. $u_f=\dfrac{F\cdot T}{m_1+m_2}$

8) א. $t=\dfrac{2l}{v}$ ב. $\tilde{u}=\dfrac{v\left(m+\dfrac{M}{2}\right)}{M+m}$

ג. $a=\dfrac{mg\mu}{M}\ ,\ M\cdot v\cdot\left(m+\dfrac{M}{2}\right)=(m+M)\cdot M\cdot\dfrac{v}{2}+(m+M)\cdot mg\mu\cdot\tilde{t}$ ד. כן.

9) א. $\tilde{u}=\dfrac{v(M-m)}{M+m}$, חיובי. ב. $\tilde{u}=\dfrac{v(M-m)}{M+m}$, שלילי.

10) א. $\alpha=0$: $u_1=v_0\ ,\ u_2=2v_0$, $\alpha=1$: $u_1=0\ ,\ u_2=v_0$, $\alpha=\infty$: $u_1=-v_0\ ,\ u_2=0$

ב. $t=\dfrac{L}{u_2-u_1}$

11) א. $v_2=\sqrt{2gH}$ ב. $\Delta P_{Total}=\dfrac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gH}$ ג. $J_{ceiling}=\dfrac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gH}\hat{y}$

ד. $h=\dfrac{m_2}{m_1-m_2}\sqrt{\dfrac{H}{2g}}$ ה. $J_{Totalceiling}=0+\dfrac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gH}+\dfrac{m_1(m_1+m_2)}{m_1-m_2}\sqrt{32gH}$

12) $t=\dfrac{L}{v}$

13) א. $0=mv+Mu$ ב. $mv+Mu=(m+M)\cdot 0$ ג. $L=t\cdot(v-u)$

ד. $x=u\cdot t$ ה. ראה סרטון.

14) $u_1=\dfrac{-Mv_R}{m+M}\ ,\ u_2=\dfrac{mv_R}{m+M}$

15) א. $a'_P = \frac{2L}{T^2}$ ב. $a_{P_x} = \frac{2L}{T^2}\cos\theta - A$ ג. $x_{ramp}(T) = \frac{m}{m+M}L\cos\theta$

16) א. $v_0 = 8.94\frac{m}{sec}$ ב. $u = \sqrt{5}\frac{m}{sec}$ ג. $u_1' = 2\sqrt{5}\frac{m}{sec}$, $u_2' = -2\sqrt{5}\frac{m}{sec}$

17) $h'_{max} = \frac{M^2h}{(M+m)^2}$

18) $h \approx 12.3m$

19) $E_k' = E_R - (m_1v_1 + m_2v_2)v_0 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_0^2$

20) א. $u_1 = v\frac{1-2\cos^2\alpha}{1+2\cos^2\alpha}$

ב. קדימה: $\sqrt{2} < k \le 2$, במקום: $k = \sqrt{2}$, אחורה: $1 \le k < \sqrt{2}$

21) $v = \sqrt{\frac{gL}{\left(1+\frac{m}{M}\sin 2\theta\right)}}$

22) א. $v = \sqrt{\frac{3}{4}gl}$ ב. $v = gl\left(\frac{3-\mu}{4}\right)$

23) ראה סרטון.

24) $x(t=5.82) \approx 60m$

מכניקה לתלמידי מתמטיקה 77154

פרק 9 - מרכז מסה -

תוכן העניינים

הסבר בסיסי על מרכז מסה:

רקע

$$\vec{r}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

ניתן לרשום אותה לכל רכיב בנפרד , לדוגמה לרכיב x :

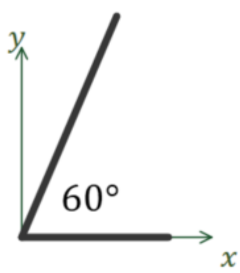
$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{a}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$

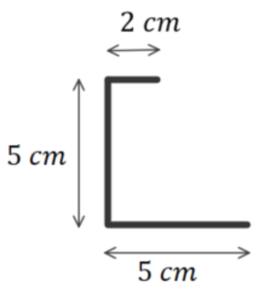
שאלות:

1) **דוגמה - מרכז מסה של שני מוטות בזווית**



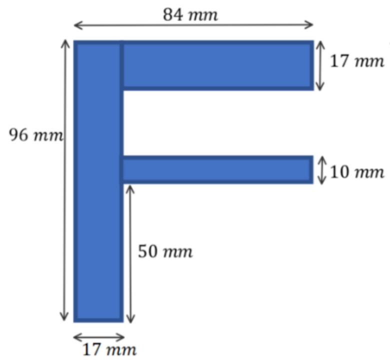
המערכת המתוארת באיור מורכבת משני מוטות בעלי צפיפות אחידה.
מוט ראשון באורך 3c.m נמצא לאורך ציר ה- x
ומסתו 2kg , מוט שני נמצא בזווית 60° עם ציר ה- x החיובי אורכו 5c.m ומסתו 3kg .
מצאו את מרכז המסה של המערכת (ביחס לראשית).

2) **דוגמה - מרכז מסה של האות נ**



המערכת המתוארת באיור מורכבת ממוט בעל צפיפות מסה אחידה המכופף בצורת האות "נ" בתמונת מראה.
מצאו את מיקום מרכז המסה של המערכת ביחס לפינה השמאלית התחתונה.

3) **דוגמה - מרכז מסה של F**



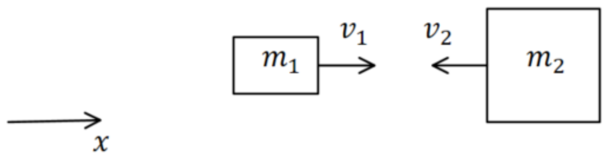
מרכיבים את האות F מלוחות בעלי צפיפות מסה אחידה ליחידת שטח.
המימדים של כל הלוחות נתונים באיור.

א. מצאו את מרכז המסה של המערכת ביחס לפינה השמאלית התחתונה של האות.

ב. מהו מרכז המסה של המערכת ביחס לפינה הימנית התחתונה של האות?

4) **דוגמה - מהירות מרכז מסה בהתנגשות**

שני גופים בעלי מסות m_1 ו-m_2 נעים על קו ישר אחד כלפי השני במהירויות v_1 ו- v_2. חשבו את מהירות מרכז המסה לפני ואחרי ההתנגשות.



תשובות סופיות:

1) $x_{c.m}=1.35c.m \quad , \quad y_{c.m}=1.3c.m$

2) $x_{c.m}=1.2c.m \quad , \quad y_{c.m}=1.875c.m$

3) א. $x_{c.m}=31mm \quad , \quad y_{c.m}=62mm$ ב. $x_{c.m}=14mm \quad , \quad y_{c.m}=62mm$

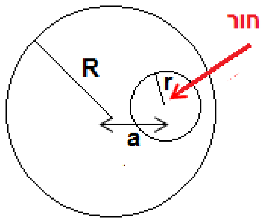
4) $\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$

דוגמה מרכז מסה של דיסקה עם חור:

שאלות:

1) דוגמה מרכז מסה של דיסקה עם חור

בדסקה בעלת רדיוס R ומסה M קדחו חור עגול בעל רדיוס r במרחק a ממרכז הדסקה. הנח כי צפיפות המסה אחידה בכל הדסקה.
מצא את מרכז המסה של הדסקה עם החור.



תשובות סופיות:

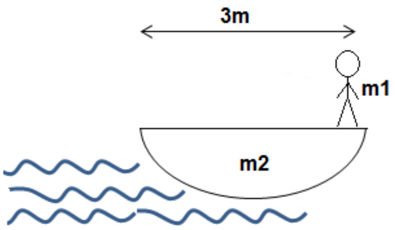
1) $$x_{\text{c.m.}} = \frac{-a\left(\rho\pi r^2\right)}{\mathrm{M}-\left(\rho\pi r^2\right)}$$

שני תרגילים:

שאלות:

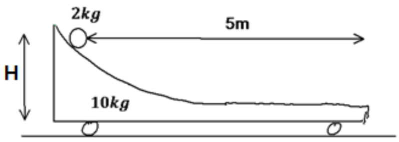
1) נער על סירה

אדם עומד בקצה סירה באורך 3 מטר.
מסת האדם היא 70 קילוגרם ומסת הסירה 100 קילוגרם.
האדם התקדם 2 מטרים לאורך הסירה.
כמה זזה הסירה?
(הזנח את החיכוך בין המים לסירה).
נתון: $m_1 = 70kg$, $m_2 = 100kg$.



2) כדור על קרונית

כדור מונח על קרונית משופעת הנמצאת במנוחה.
הכדור מונח בגובה $H = 1m$ ובמרחק של $5m$ מטר מקצה הקרונית.



מסת הקרונית: $m_1 = 10kg$, מסת הכדור: $m_2 = 2kg$.

א. מצא את העתק הקרונית כאשר הכדור מגיע לקצה.

ב. מצא את מהירות הגופים אם נתון שמהירות הכדור בקצה הקרונית היא רק בכיוון ציר ה-x .

תשובות סופיות:

1) $x = \frac{14}{17}\text{m}$

2) א. $\Delta x_1 = -\frac{10}{12}\text{m}$ ב. $u_1 \approx -0.82\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $u_2 \approx 4.08\frac{\text{m}}{\text{sec}}$

דוגמאות לחישוב מרכז מסה בעזרת אינטגרלים:

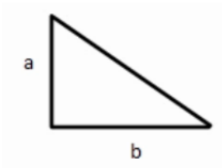
שאלות:

1) מרכז מסה של מוט עם צפיפות לא משתנה

חשב את מרכז המסה של מוט בעל אורך L וצפיפות מסה $\lambda(x)=\lambda_0\frac{x}{L}$.

2) מרכז מסה של משולש

מצא את מרכז המסה של המשולש שבתמונה.



3) מרכז מסה של שער

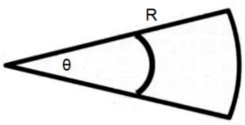
שער חשמלי בעל מסה m ואורך l מונח על ציר שמרחקו d מסופו.

הסבר מדוע מחוברים לקצה השער משקולת כבדה

ומצא את מסתה אם נתון כי אורכה L.

4) מרכז מסה של גיזרה וחצי דיסקה

חשב את מרכז המסה של גיזרה עם צפיפות אחידה וזווית θ.



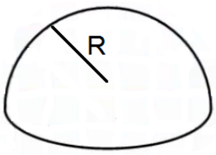
5) חישוב שטח גיזרה

נתון מעגל שרדיוסו R.

חשב שטח של גיזרה עם זווית θ.

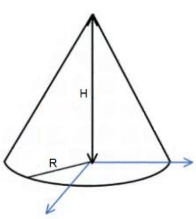
6) מרכז מסה של חצי כדור מלא

חשב את מרכז המסה של חצי כדור מלא בעל צפיפות אחידה.



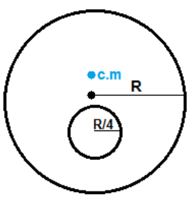
7) מרכז מסה של חרוט מלא

חשב את מרכז המסה של חרוט מלא בעל צפיפות אחידה.



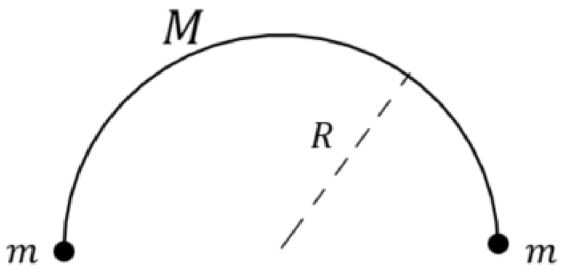
8) דיסקה עם חור

חשב את מרכז המסה של חרוט מלא בעל צפיפות אחידה.



9) חצי חישוק ושתי מסות

מצאו את מרכז המסה של חצי החישוק בעל מסה M ורדיוס R אשר בקצותיו חוברו שני כדורים קטנים בעלי מסה m.



תשובות סופיות:

1) $x_{c.m.}=\frac{2}{3}L$

2) $r_{c.m}=\left(\frac{1}{3}b,\frac{1}{3}a\right)$

3) $\frac{\left(\frac{L}{2}-d\right)m+\left(d+\frac{l}{2}\right)M}{m+M}=0$

4) $x_{c.m.}=\frac{4R\sin\frac{\theta_0}{2}}{3\theta_0}$

5) $S=\frac{\theta R^2}{2}$

6) $z_{c.m.}=\frac{3R}{8}$

7) $z_{c.m.}=\frac{H}{4}$

8) $z_{c.m.}=-\frac{1}{30}R$

9) $y_{c.m.}=\frac{2RM}{\pi(M+2m)}$

מערכת מרכז המסה:

רקע:

התנע הכולל של מערכת:

$$\vec{p}_T = M\vec{v}_{c.m.}$$

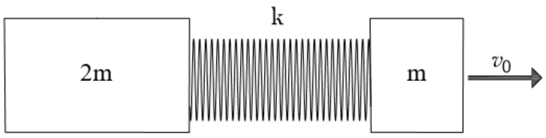
ניתן להסתכל על מערכת כגוף נקודתי שמסתו היא סכום המסות ומהירותו היא מהירות מרכז המסה.

מערכת מרכז המסה היא מערכת שזזה ביחד עם נקודת מרכז המסה. בשביל למצוא את מהירות הגופים במערכת מרכז המסה נשתמש בטרנספורמציית גליליי.

במערכת מרכז המסה התנע הכולל של המערכת הוא אפס
ולכן, במקרה של שני גופים, הגופים תמיד ינועו על ציר אחד.
ואם ההתנגשות אלסטית אז גודל המהירות של כל גוף נשמר.

שאלות:

1) שני גופים מחוברים בקפיץ ונעים

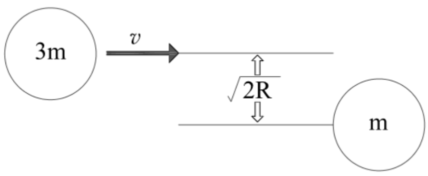


שני גופים עם מסות $m_1 = m$, $m_2 = 2m$
קשורים בקפיץ בעל קבוע k ומונחים
על משטח חסר חיכוך.
ברגע מסוים מעניקים לגוף m_1 מהירות v_0 כך שהוא מתרחק מהמסה m_2.

א. מה מהירות מרכז המסה $v_{c.m.}$?
ב. מה מהירויות שני הגופים במערכת מרכז המסה מיד עם תחילת התנועה?
ג. מה האנרגיה הקינטית הכוללת מיד עם תחילת התנועה במערכת המעבדה ובמערכת מרכז המסה?
ד. מהי ההתארגות המקסימלית של הקפיץ? מה מהירויות שני הגופים במצב זה (גם במערכת מרכז המסה וגם במערכת המעבדה)?
ה. מה מהירויות שני הגופים (בשתי מערכות הייחוס) בפעם הראשונה בה הקפיץ חוזר לאורכו המקורי?

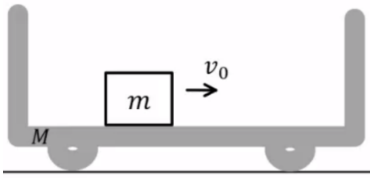
2) התנגשות לא חזיתית

שתי דיסקות ברדיוס זהה R נמצאות על משטח ללא חיכוך.
הדיסקה $m_1 = m$ נמצאת במנוחה
והדיסקה $m_2 = 3m$ נעה במהירות v כלפיה.
המרחק בין מרכז דיסקה 1, למסלול של מרכז דיסקה 2 הוא $\sqrt{2}R$ כמתואר באיור.
אין חיכוך בין שפות הדיסקות במהלך ההתנגשות וההתנגשות האלסטית.



א. תארו את תנועתן במערכת מרכז המסה לפני ההתנגשות.
ב. באיזו נקודה על פני כל דיסקה תהיה ההתנגשות ביניהן? מה כיוון הכוח ביניהן בעת ההתנגשות?
ג. מה היו וקטורי המהירות אחרי ההתנגשות במערכת מרכז המסה?
ד. מה יהיו המהירויות, גודלן וכיוונן אחרי ההתנגשות במערכת המעבדה?
ה. מה המתקף שהפעיל כדור 2 על כדור 1? חשבו בשתי המערכות.

3) גוף מתנגש בדפנות עגלה



גוף שמסתו m מונח בתוך עגלה שמסתה M.
העגלה נמצאת במנוחה על משטח אופקי ואין חיכוך בינה לבין המשטח.
מקנים לגוף מהירות התחלתית v_0 והוא נע הלוך ושוב בין דפנות העגלה ללא חיכוך.
ההתנגשות של הגוף עם הדפנות היא התנגשות אי-אלסטית.
מה תהיה מהירות הגוף ביחס לקרקע לאחר זמן רב?

4) זווית פיזור אפשרית באיבוד אנרגיה**

חלקיק בעל מסה M נע במהירות קבועה לאורך ציר ה-x.
כאשר האנרגיה הקינטית שלו היא K.
החלקיק פוגע בחלקיק אחר, בעל מסה זהה הנמצא במנוחה.
האנרגיה של כל המערכת לאחר ההתנגשות היא αK כאשר α קבוע חיובי נתון, הקטן מ-1.

א. מהי מהירות מרכז המסה לפני ואחרי ההתנגשות?

ב. האם ניתן לדעת את כיוון המהירות של החלקיק הפוגע, במערכת מרכז המסה, לפני ואחרי ההתנגשות?

ג. אם $\alpha = 0.6$, מה תחום זוויות הפיזור האפשריות?
מומלץ לצפות בסרטון ההוכחה שהזווית בין שני גופים בעלי מסות זהות המתנגשים התנגשות אלסטית היא 90 מעלות.

תשובות סופיות:

1) א. $v_{c.m.}=\frac{v_0}{3}$ ב. $v_{1_{c.m.}}=\frac{2v_0}{3}\ ,\ v_{2_{c.m.}}=-\frac{v_0}{3}$

ג. מעבדה: $E_k=\frac{1}{2}mv_0^{\,2}$, מרכז המסה: $E_k=\frac{1}{3}mv_0^{\,2}$

ד. מעבדה: $\Delta x_{\substack{max\\min}}=\sqrt{\frac{2mv_0^{\,2}}{3k}}\ ,\ \frac{v_0}{3}$, מרכז המסה: $\Delta u_{c.m.}=0$, 0

ה. מעבדה: $u_1=-\frac{1}{3}v_0\ ,\ u_2=\frac{2v_0}{3}$, מרכז המסה: $u_{1_{c.m.}}=-\frac{2v_0}{3}\ ,\ u_{2_{c.m.}}=\frac{v_0}{3}$

2) א. $v_{1_{c.m.}}=-\frac{3}{4}v\ ,\ v_{2_{c.m.}}=\frac{1}{4}v$ ב. $\alpha=45^\circ$ ג. בכיוון ציר y השלילי - $\left|\vec{v}_{1_{c.m.}}\right|=\frac{3}{4}v$, בכיוון ציר y החיובי - $\left|u_{2_{c.m.}}\right|=\frac{1}{4}v$

ד. $u_1=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 3v\ ,\ \alpha_1=-45^\circ$, $u_2=\frac{\sqrt{10}}{4}v\ ,\ \alpha_2=18.4^\circ$

ה. במעבדה: $\vec{J}_{2\to1}=\Delta\vec{P}_1=mv\cdot\frac{3}{4}(1,-1)$,

במרכז המסה: $\vec{J}=\int N\,dt=m\frac{3}{4}v(1,-1)$

3) $u=\frac{mv_0}{m+M}$

4) א. $v_{c.m.}=\frac{v}{2}$ ב. לפני: באותו כיוון , אחרי: לא ניתן. ג. $-48.2^\circ\le\theta\le48.2^\circ$

תרגילים מסכמים:

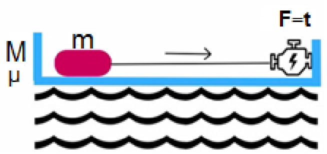
שאלות:

1) שני גופים מחוברים בקפיץ נלחצים לקיר

שני גופים מחוברים בקפיץ בעל קבוע k ונמצאים על משטח אופקי חסר חיכוך.
מסת הגוף הימני היא m_1, מסת הגוף השמאלי היא m_2 והוא צמוד לקיר.
האורך הרפוי של הקפיץ הוא l_0.
לוחצים את הגוף הימני עד שהקפיץ מתכווץ לאורך $\frac{l_0}{3}$ ומשחררים ממנוחה.

א. מתי תתנתק המסה השמאלית מהקיר?
ב. מהו מיקום מרכז המסה כתלות בזמן?

2) מנוע מושך מסה בסירה

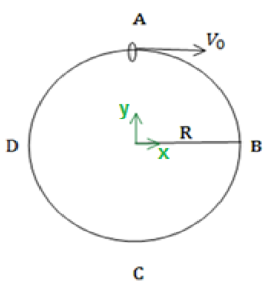


על סירה (ללא חיכוך עם המים) מונחת מסה.
המסה מחוברת בחוט למנוע המחובר לסירה.
כוח המשיכה של המנוע משתנה בזמן,
מקדם החיכוך הסטטי ומקדם החיכוך הקינטי נתונים.

א. מתי תתחיל לנוע המסה?
ב. מה תהיה תאוצת מרכז המסה? תאוצת הסירה? תאוצת המסה?
ג. לאחר שהמסה נעה החוט ניתק. ענה שוב על סעיף ב'.
ד. האם המסה והסירה ייעצרו בו זמנית?

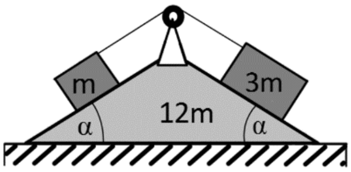
3) חרוז מסתובב על חישוק שחופשי לנוע

חישוק בעל רדיוס R ומסה m מונח על שולחן אופקי חלק.
על החישוק ישנו חרוז המתחיל לנוע מהנקודה A ומסתו m גם כן.
ב-$t=0$ החישוק נמצא במנוחה ומהירותו ההתחלתית של החרוז היא v_0 ימינה.



א. מצא את מיקום מרכז המסה של המערכת בתחילת התנועה.
ב. מצא את מהירות מרכז המסה כפונקציה של הזמן ואת מסלולה.
ג. מהן מהירויות החרוז והצינור כאשר החרוז נמצא בנקודות D , C , B ושוב ב-A ביחס לחישוק?

4) שני גופים על מדרון שנע

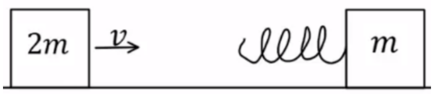


שני גופים בעלי מסות m ו- 3m נמצאים על מדרון דו-צדדי בעל זווית נטייה α משני צדדיו.
שני הגופים קשורים זה לזה בחוט אידיאלי דרך גלגלת אידיאלית המחוברת למדרון.
למדרון מסה 12m והוא יכול לנוע על הרצפה.
אין חיכוך בין הגופים למדרון ובין המדרון לרצפה.
משחררים את המערכת ממנוחה.

א. חשב את העתק המדרון, לאחר שהגוף הכבד עבר מרחק L במורד המדרון.
ב. מהי העבודה שביצע משקל הגוף הכבד ומשקל הגוף הקל במהלך התנועה?
ג. חשב את מהירות המדרון ביחס לרצפה ברגע זה.

5) מסה מתנגשת במסה עם קפיץ

גוף שמסתו 2m נע במהירות v על משטח חסר חיכוך לעבר גוף נוסף שמסתו m הנמצא במנוחה. בצידו השמאלי של הגוף במנוחה ישנו קפיץ רפוי בעל קבוע k.
הבעיה חד מימדית.



א. מהי מהירות מרכז המסה של הגופים?
ב. מהי ההתכווצות המקסימאלית של הקפיץ?

תשובות סופיות:

1) א. כאשר הקפיץ מגיע לנקודת רפיון או ב- $t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_1}{k}}$.

ב. $x_{c.m.}(d)=\frac{m_1 l_0}{m_1+m_2}\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{m_1 k t}\right)$

2) א. $\mu\cdot mg=t$ ב. $-a=\frac{t}{M}$, $a=\frac{t}{m}$ ג. $-a=\mu\cdot g$, $a=\mu\cdot g\frac{m}{M}$

ד. כן.

3) א. $y_{c.m.}(t=0)=\frac{R}{2}$ ב. $\vec{v}_{c.m.}(t)=\frac{1}{2}v_0\hat{x}$

ג. בנקודה B: $u_{1_y}=\frac{-v_0}{2}=-u_{2_y}$, $u_{1_x}=\frac{1}{2}v_0=u_{2_x}$,

בנקודה C: $u_{1_x}=0$, $u_{2_x}=v_0$, $u_{1_y}=0=u_{2_y}$,

בנקודה D: $u_{1_y}=\frac{v_0}{2}=-u_{2_y}$, $u_{1_x}=u_{2_x}=\frac{1}{2}v_0$

4) א. $x_2=-\frac{L\cos\alpha}{4}$ ב. הכבד: $W=3mgL\sin\alpha$, הקל: $W=mg(-L\sin\alpha)$

ג. $v_{2_x}=\sqrt{\frac{gL\sin\alpha}{4(4\tan^2\alpha+3)}}$

5) א. $v_{c.m.}=\frac{2}{3}v$ ב. $\Delta x_{max}=\sqrt{\frac{10m}{3k}}\cdot v$

מכניקה לתלמידי מתמטיקה 77154

פרק 10 - מומנט כוח -

תוכן העניינים

מומנט כוח - הסבר:

רקע

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

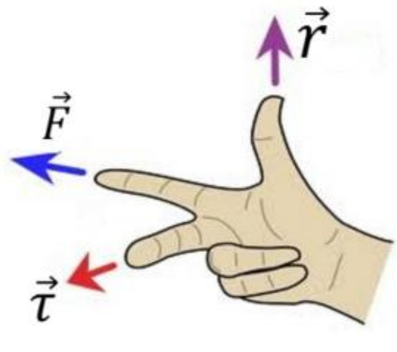
כאשר $\vec{r}$ הוא וקטור שיוצא מהציר עד לנקודה שבה פועל הכוח.

ניתן לחשב את המכפלה באמצעות דטרמיננטה או באמצעות גודל וכיוון
גודל המומנט :

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\alpha = |\vec{F}|r_{\perp}$$

כאשר $r_{\perp}$ הוא הרכיב של $\vec{r}$ המאונך לכוח

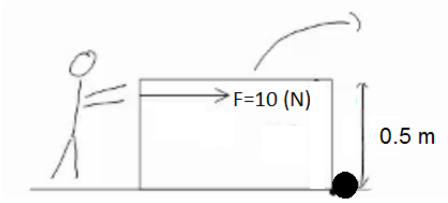
כיוון לפי כלל יד ימין או כלל הבורג



משוואת מומנטים : אם גוף נמצא במנוחה אז סכום המומנטים הפועלים עליו שווה לאפס.

שאלות:

1) **מרחק אפקטיבי**



אדם דוחף ארגז בגובה $0.5m$ ומפעיל כוח F (ראו תמונה).
לארגז אין חיכוך עם המשטח.
האדם דוחף את הארגז ללא כל בעיה עד שנתקע באבן והארגז מתהפך
(מיקום האבן הופך לציר הסיבוב).
חשבו את גודל מומנט הכוח.

תשובות סופיות:

1) $|\vec{\tau}| = 5N \cdot m$

תרגיל - מומנטים על משולש:

שאלות:

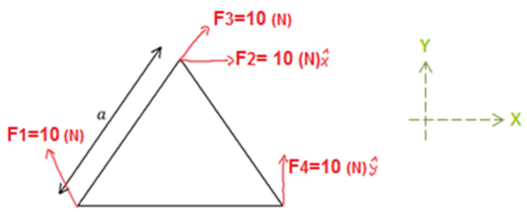
1) מומנטים על משולש

המשולש בתמונה הוא משולש שווה צלעות עם אורך צלע נתונה a.

א. חשב את המומנטים של הכוחות בתמונה סביב הפינה השמאלית של המשולש.

ב. נתונה המסה של המשולש M ונתון גם כי מרכז המסה של המשולש נמצא בנקי': $\left(\frac{1}{2}a\ ,\ \frac{1}{2\sqrt{3}}a\right)$.
חשב את מומנט הכוח של כוח הכובד.

ג. חשב שוב את המומנטים סביב ציר העובר במרכז המסה של המשולש, הנח כי הזווית בין F_1 לדופן המשולש היא 60 מעלות.



תשובות סופיות:

1) א. $\tau_1 = 0!\ ,\ \vec{\tau}_2 = -5\cdot\sqrt{3}a\ ,\ \vec{\tau}_3 = 0!\ ,\ \tau_4 = 10a$ ב. $\tau_g = -Mg\frac{1}{2}a$

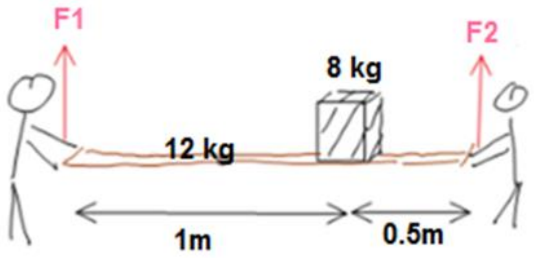
ג. $\tau_1 = \frac{-10a}{\sqrt{3}}\ ,\ \tau_2 = -10\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}a\ ,\ \tau_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}a\cdot 10\cdot\sin 30^\circ\ ,\ \tau_4 = 10\cdot\frac{1}{2}a\ ,\ \tau_g = 0$

תרגיל - שני פועלים מחזיקים מנשא:

שאלות:

1) שני פועלים מחזיקים מנשא

שני פועלים מחזיקים מנשא מעץ שמסתו 12kg ואורכו 1.5m.
על המנשא, במרחק של 0.5m מהפועל הימני, מונח ארגז בעל מסה של 8kg.
בהנחה כי המערכת במנוחה, מצאו את הכוח שמפעיל כל פועל (ראה איור).



תשובות סופיות:

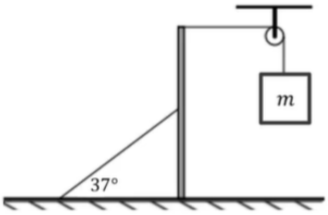
1) $F_2 = 113.333N$, $F_1 = 86.666N$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) מוט עומד מחובר לחוט ומשקולת

מוט אחיד מונח על משטח אופקי לא חלק, כמוראה בתרשים.
המוט מחובר במרכזו לחוט אידיאלי שקצהו השני קשור למשטח ויוצר עימו זווית של 37°.
הקצה העליון של המוט מחובר באמצעות חוט אופקי אידיאלי וגלגלת אל משקולת שמסתה $m = 7kg$.
המערכת נמצאת במנוחה.

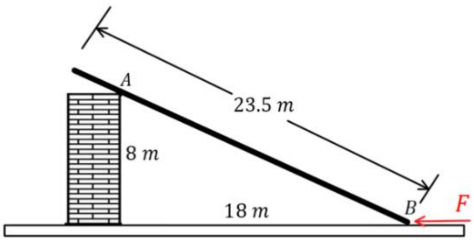


א. מהי המתיחות בחוט המחובר אל המשטח?

ב. מהו כוח החיכוך שמפעיל המשטח האופקי על המוט?

2) קורה על קיר אנכי

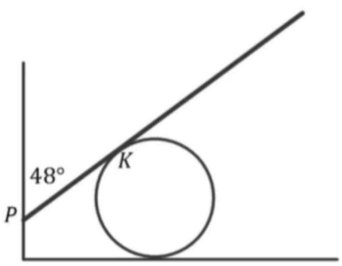
באיור לשאלה זו מתוארת קורה אחידה שאורכה הכולל הוא $23.5m$.
מסת הקורה היא $140kg$.
הקורה נשענת בנקודה A על קיר אנכי חלק שגובהו $8m$.



קצה הקורה מונח על הרצפה בנקודה B במרחק $18m$ מהקיר ובקצה הזה פועל כוח אופקי F, כמתואר באיור.
מקדם החיכוך הסטטי שבין הקורה הרצפה הוא $\mu_s = 0.3$.
מהו F המקסימלי הניתן להפעיל כך שהקורה תישאר במנוחה?

3) מוט נשען על כדור

נתון מוט דק שאורכו $L = 3.5m$ ומסתו $m = 7kg$
הנשען על כדור חסר חיכוך המודבק לרצפה כמתואר בשרטוט.
נקודת המגע של המוט בכדור היא הנקודה K.
בקצהו השמאלי נוגע המוט בקיר בעל חיכוך בנקודה P, הזווית שיוצר המוט יחסית לקיר היא 48°. מקדם החיכוך הסטטי שבין הקיר למוט הוא $\mu_s = 0.15$.



א. מהו הכוח שמפעיל הכדור על המוט אם נתון שקצהו הימני של המוט נמצא על סף תנועה כלפי מטה?

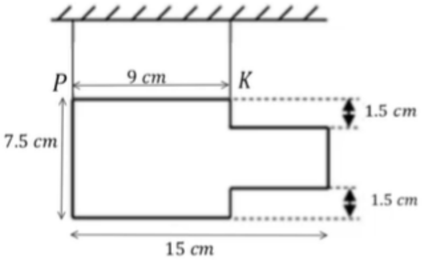
ב. מהו המרחק בין הנקודות P ו- K במצב זה?

4) טבלה מעץ

טבלה העשויה עץ בעלת עובי אחיד שמסתה 400 גר' וצורתה כמתואר בתרשים, תלויה בשני חוטים בנקודות K ו-P.

א. חשב את מרכז הכובד של הטבלה ביחס למערכת צירים שראשיתה ממוקמת בנקודה P.

ב. מצא את המתיחות בשני החוטים.

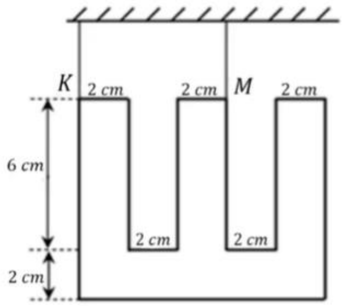


5) שלט בצורת האות ש

שלט העשוי מחומר אחיד בצורת האות "ש" (כמשורטט), שמסתו 4 ק"ג, נתלה בשני חוטים בנקודות K ו- M.

א. חשבון את מרכז המסה של השלט ביחס למערכת צירים שראשיתה ממוקמת בנקודה K.

ב. מצאו את המתיחות בשני החוטים.



6) מסה תלויה על קורה שמחוברת לקיר

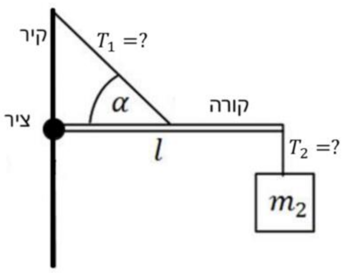
קורה בעלת מסה m_1 ואורך l מחוברת לקיר באמצעות ציר.

בקצה הקורה קשורה מסה m_2 התלויה במנוחה.

מאמצע הקורה יוצא חוט בזווית הקשור חזרה לקיר, הזווית שיוצר החוט עם הקורה היא α.

א. מהי המתיחות בחוטים?

ב. מהו הכוח (גודל וכיוון) שמפעיל הציר?



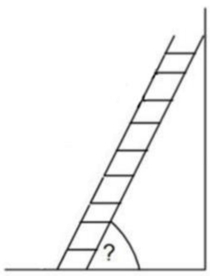
7) סולם נשען על קיר

סולם נשען על קיר.

קיים חיכוך סטטי בין הסולם לרצפה וגם בין הסולם לקיר.

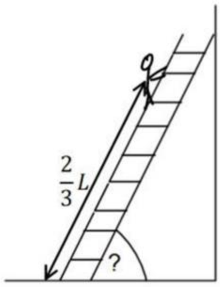
מקדם החיכוך הסטטי בין הסולם לרצפה ובין הסולם לקיר הוא μ_s. אורך הסולם הוא L וניתן להניח שמסתו מפולגת בצורה אחידה.

מהי הזווית המינימלית עם הרצפה כך שהסולם לא יחליק?



8) אדם עומד על סולם שנשען על קיר

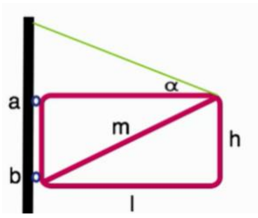
אדם עומד על סולם שנשען על קיר.
אורך הסולם הוא L וניתן להניח שמסתו מפולגת בצורה אחידה. האדם עומד על הסולם כשמרחקו מהקצה התחתון של הסולם הוא שני שליש מאורך הסולם.
קיים חיכוך סטטי בין הסולם לרצפה וגם בין הסולם לקיר.
מקדם החיכוך הסטטי בין הסולם לרצפה ובין הסולם לקיר הוא μ_s. מסת האדם כפולה ממסת הסולם.
מהי הזווית המינימלית עם הרצפה כך שהסולם לא יחליק?



9) מומנטים על שער

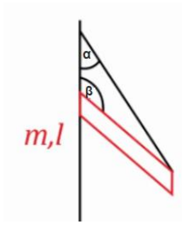
שער שגובהו h ואורכו l מחובר לקיר בשני צירים a ו- b.
על מנת להקל על הציר העליון חיברו לשער כבל ומתחו אותו עד אשר הכוח האופקי בנקודה a מתאפס.

א. מהי המתיחות בכבל?
ב. מהו הכוח האופקי הפועל על הציר b?
ג. מהו סכום הכוחות האנכיים המופעלים על שני הצירים?



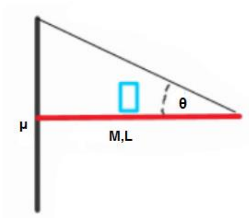
10) גגון מוחזק אל קיר

גגון מוחזק אל קיר בעזרת חבל וחיכוך כמתואר בשרטוט.
מצא את הכוחות הפועלים על הגגון.



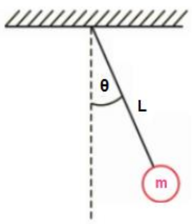
11) מסה על גגון מחליק

גגון מוחזק לקיר בעזרת חיכוך בלבד לפי הנתונים שבשרטוט.
מהו המרחק הקטן ביותר מהקיר בו ניתן לשים את המסה m מבלי לגרום לגגון להחליק מהקיר?



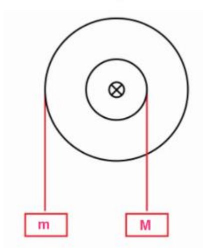
12) מטוטלת מתמטית

מצא את מומנט הכוח המופעל על מטוטלת מתמטית כפונקציה של הזווית מהאנך.

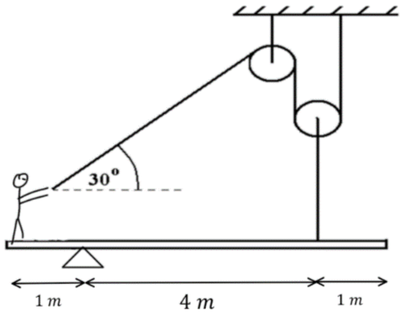


13) מנוף מדיסקה כפולה

נתונה המערכת שבשרטוט.
רשום את כל הכוחות הפועלים על הדיסקה ומצא את יחס הרדיוסים בין שתי הדיסקות.



14) אדם על קורה מחזיק בחוט ושתי גלגלות

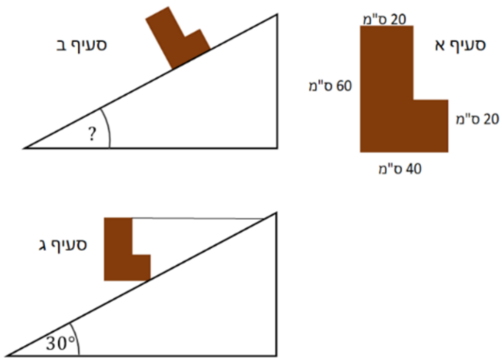


אדם שמסתו 65kg עומד בקצה קורה שמסתה 40kg.
הקורה מונחת על ציר הנמצא במרחק 1m מהאדם.
האורך הכולל של הקורה הוא 6m.
האדם מחזיק בחוט העובר דרך שתי גלגלות כפי שמתואר באיור.
הגלגלת השמאלית מחוברת לתקרה, הגלגלת הימנית לקורה במרחק 1m מהקצה השני.

א. מהו הכוח בו האדם צריך למשוך את החבל כדי לשמור על מצב של שיווי משקל?
ב. מהם רכיבי הכוח שהציר מפעיל על הקורה?
ג. מהו מקדם החיכוך הסטטי המינימאלי בין האדם לקורה כדי שהאדם לא יחליק מהקורה?

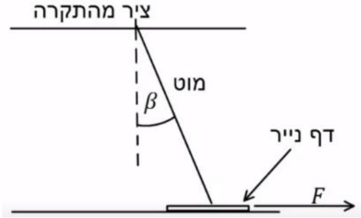
15) L על מישור משופע*

באיור נתון גוף משטחי בצורת L.
צפיפות המסה של הגוף היא: $\sigma = 5\frac{kg}{m^2}$.



א. מהו מרכז המסה של הגוף ביחס לפינה התחתונה השמאלית?
ב. מניחים את הגוף על מישור משופע. מהי הזווית המקסימאלית של המישור עבורה הגוף לא יתהפך?
ג. קושרים את הגוף למישור באמצעות חוט אופקי מהפינה הימנית העליונה ומותחים את החוט עד שהגוף מתיישר במקביל לקרקע. מהי המתיחות בחוט במצב זה אם זווית המישור היא 30° והגוף במנוחה.

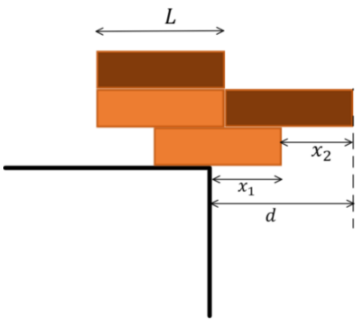
16) מוט נשען על דף נייר*



מוט בעל אורך L ומסה M מחובר לתקרה באמצעות ציר.
בקצהו השני המוט מונח על דף נייר המונח על הרצפה.
מסת דף הנייר זניחה.
הזווית בין המוט לאנך היא β ומקדם החיכוך הסטטי בין המוט לנייר ובין הנייר לרצפה הוא μ_s.

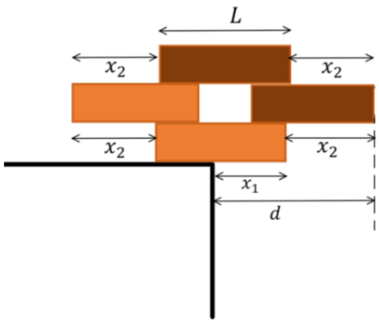
א. מושכים את הנייר ימינה בכוח F. מהו הכוח המינימלי הדרוש בשביל להוציא את הנייר מתחת למוט? הנח שהמוט נשאר במנוחה.
ב. חזור על סעיף א' אם הכוח פועל שמאלה.

17) ערימת קוביות 1



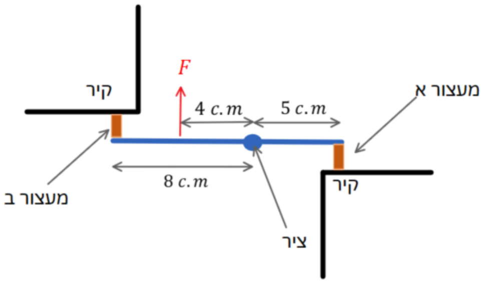
ערימת קוביות מורכבת מ-4 קוביות זהות באורך L .
הקוביות מסודרות באופן שמתואר באיור.
מהו המרחק d המקסימאלי האפשרי כך שהערימה לא תיפול מהשולחן.
מהם x_1 ו- x_2 במצב זה?

18) ערימת קוביות 2*



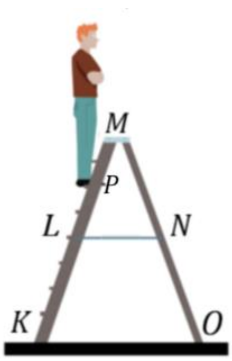
ערימת קוביות מורכבת מ-4 קוביות זהות באורך L .
הקוביות מסודרות באופן שמתואר באיור.
מהו המרחק d המקסימאלי האפשרי כך שהערימה לא תיפול מהשולחן.
מהם x_1 ו- x_2 במצב זה?

19) מוט עם שני מעצורים מגומי**



באיור ישנו מוט באורך 13c.m. המחובר
בציר הנמצא במרחק 5c.m. מהקצה הימני.
בשני הקצוות של המוט ישנם מעצורים
זהים העשויים מגומי.
מפעילים כוח $F = 200N$ במרחק 4c.m.
שמאלה מהציר, הכוח גורם לכיווץ קטן של המעצורים.
המערכת אופקית, כלומר כוח הכובד פועל לתוך הדף וניתן להתעלם ממנו.
מהו הכוח שפועל על כל מעצור?
רמז : התייחס למעצורים כמו קפיצים בעלי קבוע k זהה.

20) אדם על סולם עם שתי רגליים**



אדם עומד על סולם בעל שתי רגליים המחוברות באמצעות כבל במרכז הסולם. משקל האדם הוא 800 ניוטון וניתן להזניח את משקל הסולם ואת החיכוך עם הרצפה.
נתונים אורכי הקטעים הבאים :
$KM = OM = 2.34m$, $KP = 1.70m$, $LN = 0.746m$.

א. מצא את הכוחות שפועלים בנקודות O ו- K .
ב. מצאו את המתיחות בכבל.

רמז : יש לעשות משוואה רק על חלק מהסולם.

תשובות סופיות:

1) א. $T_2 \approx 180N$ ב. $f_s = T_1 = 70N$, ימינה.

2) $F_{max} \approx 521N$

3) א. $N_2 \approx 110N$ ב. $PK \approx 0.84m$

4) א. $x_{c.m.} = 6.6c.m.$, $y_{c.m.} = 3.75c.m$ ב. $T_2 = 3N$, $T_1 = 1N$

5) א. $x_{c.m.} = 5c.m.$, $y_{c.m.} \approx 4.4c.m$ ב. $T_K = 6.7N$, $T_M = 33.3N$

6) א. $T_2 = m_2 g$, $T_1 = \frac{(m_1 + 2m_2)g}{\sin\alpha}$

ב. $\tan\theta = -\frac{m_2}{m_1 + 2m_2}\tan\alpha$, $F = \sqrt{((m_1 + 2m_2)g\cot\alpha)^2 + (m_2 g)^2}$

7) $\tan\theta = \frac{1-\mu_s^2}{2\mu_s}$

8) $\tan\theta = \frac{11-7\mu_s^2}{18\mu_s}$

9) ראה סרטון.

10) ראה סרטון.

11) ראה סרטון.

12) $\sum\tau = -mgl\sin\theta + Tl\sin\theta = -mgl\sin\theta$

13) $\sum\tau = \frac{m}{M} = \frac{r}{R}$

14) א. $T_1 = 20N$ ב. $F_x = 10\sqrt{3}N$, $F_y = 1000N$ שמאלה

ג. $\mu_{s_{min}} = 0.027$

15) א. $x_{c.m.} = 0.15m$, $y_{c.m.} = 0.25m$ ב. $\alpha = 31^\circ$

ג. $T = 3.3N$

16) א. $F_{min} = \frac{\mu_s mg\sin\beta}{\sin\beta + \mu_s\cos\beta}$ ב. $F_{min} = \frac{\mu_s mg\sin\beta}{\sin\beta + \mu_s\cos\beta}$

17) $x_1 = \frac{5L}{8}$, $x_2 = \frac{L}{2}$, $d = \frac{9L}{8}$

18) $x_1 = \frac{L}{2}$, $x_2 = \frac{2L}{3}$, $d = \frac{7L}{6}$

19) $F_R \approx 45N$, $F_L \approx 72N$

20) א. $N_O \approx 291N$, $N_k = 509N$ ב. $T_L \approx 196N$

מכניקה לתלמידי מתמטיקה 77154

פרק 11 - תנע זוויתי -

תוכן העניינים

נוסחאות וחוקי שימור:

רקע

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\vec{r}$ - הוא וקטור המיקום של הגוף
$\vec{p}$ - התנע הקווי

עבור גוף הנע בקו ישר ניתן לחשב את התנ"ז לפי L=mvd כאשר d זה המרחק האפקטיבי

הקשר בין תנ"ז למומנט כוח:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

חוק שימור התנע הזוויתי:
אם $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$ אז התנע הזוויתי נשמר

סיכום חוקי שימור:
תנע - $\sum \vec{F}_{ext} = 0$
אנרגיה - האם כל הכוחות משמרים?
תנ"ז - $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$

שאלות:

1) תנ"ז בזריקה משופעת

אבן נזרקת בזריקה משופעת במהירות v_0 ובזווית α,
כוח הכובד שפועל על האבן $\vec{F} = -mg\hat{y}$.

א. מהו התנ"ז של האבן ביחס לנקודת המוצא כתלות בזמן?
ב. מהו מומנט הכוח של כוח הכובד?
ג. הראה כי השינוי של התנ"ז בזמן שווה למומנט הכוח של כוח הכובד.

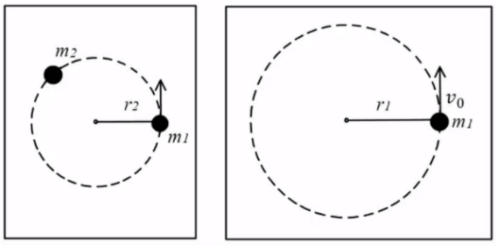
2) גוף מסתובב על שולחן ונמשך למרכז

מסה m_1 מחוברת לחוט המחובר למרכז שולחן.

המסה נעה במסלול מעגלי ברדיוס קבוע r_1

ובמהירות קבועה v_0.

ברגע מסוים מושכים את המסה למרכז המעגל (מקצרים את אורך החוט) ומפסיקים כאשר אורך החוט שווה r_2 והמסה מסתובבת שוב בתנועה מעגלית קבועה.



רגע לאחר מכן מניחים מסה נוספת m_2 במסלול של m_1 והמסות מתנגשות התנגשות פלסטית.

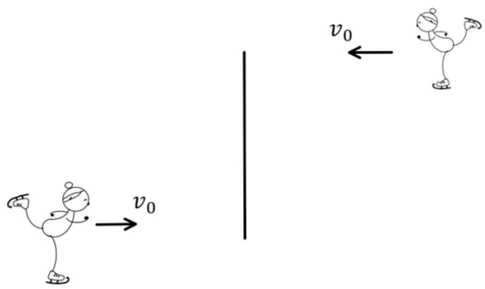
מצאו את מהירות המסות לאחר ההתנגשות.

3) שתי מחליקות על הקרח

שתי מחליקות תאומות בעלות מסה זהה m מחליקות בכיוונים מנוגדים ובמהירות v_0.

המחליקות נעות על קווים ישרים והמרחק בין הקווים הוא d. באמצע ביניהן שמים חבל.

כאשר הן מגיעות לחבל, שתיהן תופסות את החבל ומתחילות להסתובב סביב המרכז ביניהן.



א. מה המהירות הזוויתית שהן מסתובבות?

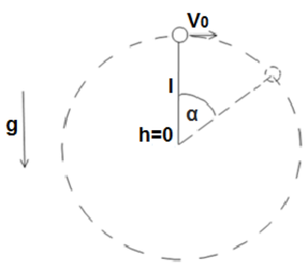
ב. כעת המחליקות מושכות את החבל ומתקרבות זו לזו עד אשר המרחק ביניהן הוא $\frac{d}{2}$.

מצא את המהירות הזוויתית החדשה של המחליקות.

4) כדור מסתובב אנכית

כדור בעל מסה m מחובר לחוט בעל אורך l ומסתובב במעגל אנכי.

נתון כי מהירת הכדור בשיא הגובה היא v_0.

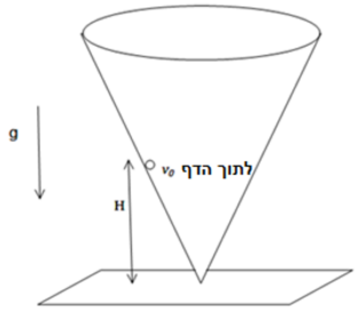


א. מצא את מומנט הכוח הפועל על הכדור כפונקציה של הזווית α.

ב. מצא את התנע הזוויתי של הכדור כפונקציה של הזווית α.

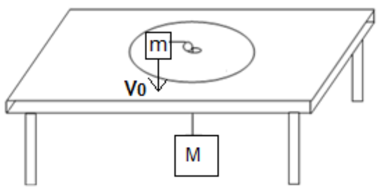
5) כדור בתוך חרוט

כדור קטן נע בתוך חרוט המחובר הפוך למשטח.
נתון כי מהירות הכדור ההתחלתית היא v_0
בכיוון אופקי ומשיק לדופן החרוט.
גובהו ההתחלתי H.
מצא את הגובה המקסימאלי אליו יגיע הכדור
(החרוט אינו זז).
הנחיות: מספיק להגיע למשוואה ממעלה שלישית
על h אין צורך לפתור אותה.



6) כדור מסתובב מחובר למסה תלויה

מסה m נעה על שולחן חסר חיכוך ומחובר באמצעות
חוט העובר דרך מרכז השולחן למסה M התלויה באוויר.
אורך החוט הוא L. נתון כי ב- $t=0$ המסה M
נמצאת במנוחה והמסה m נמצאת במרחק R
ממרכז הלוח, במהירות התחלתית v_0,
בכיוון מאונך לרדיוס.
רשום את משוואת שימור האנרגיה והתנע הזוויתי
ומצא משוואה דיפרנציאלית התלויה רק בגודל r,
מרחק המסה m ממרכז השולחן.



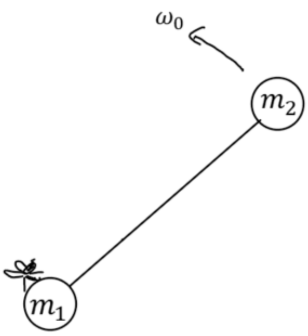
7) מומנט הכוח לא תלוי בנקודת הייחוס

הוכיחו כי אם הכוח השקול על קבוצת גופים מתאפס אז מומנט הכוח על קבוצת הגופים אינו תלוי בנקודת הייחוס.

8) תנע זוויתי לא תלוי בנקודת ייחוס

הוכיחו כי אם התנע הקווי של קבוצת גופים מתאפס אז התנע הזוויתי שלהם לא תלוי בנקודת הייחוס.

9) זבוב הולך על מוט*



שתי מסות נקודתיות m_1 ו-m_2 מחוברות
באמצעות מוט חסר מסה באורך d.
על המסה m_1 נמצא זבוב בעל מסה m_3.
כל המערכת נמצאת על שולחן אופקי ומסתובבת
סביב מרכז המסה שלה במהירות זוויתית קבועה ω_0.
ברגע מסוים הזבוב מתחיל ללכת על המוט במהירות v
ביחס למוט ונעצר כאשר הוא מגיע למרכז המסה של
שלושת הגופים (שימו לב שהמוט לא מחובר לשולחן).
מהי המהירות הזוויתית של המערכת כאשר הזבוב נעצר?

תשובות סופיות:

1) א. $-\frac{1}{2}gt^2v_0m\cos\alpha\hat{z}$ ב. $-mgv_0\cos\alpha t\hat{z}$ ג. שאלת הוכחה.

2) $u=\frac{m_1r_1v_0}{r_2(m_1+m_2)}$

3) א. $\omega'=\frac{2v_0}{d}$ ב. $\omega''=\frac{8v_0}{d}$

4) א. $\sum\vec{\tau}=-mgl\sin\alpha$ ב. $\vec{L}=lmv(-\hat{z})$

5) $(2gH+v_0^2)h^2_{max}+2gh^3_{max}+v_0^2H^2$

6) $a+br+\frac{c}{r^2}=\ddot{r}$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) $\omega'=\frac{(m_1+m_3)(m_1+m_2)}{m_1(m_1+m_2+m_3)}\omega_0$

תנע זוויתי ביחס למרכז מסה:

רקע

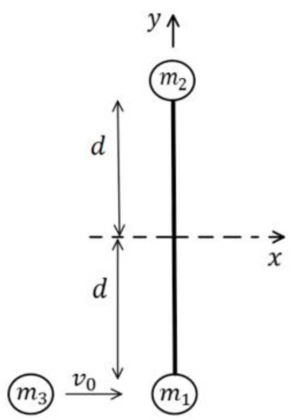
$$\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$$

$\vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$ - התנע הזוויתי של מרכז המסה כאילו הוא גוף נקודתי שהמסה שלו היא מסת כל המערכת

$\vec{L}_{c.m.}$ - התנע הזוויתי ביחס למערכת מרכז המסה, כלומר מה התנ"ז של כל גוף במערכת ביחס לצופה הנע בנקודת מרכז המסה.

שאלות:

1) מסה מתנגשת במוט עם שתי מסות



שתי מסות נקודתיות m_1 ו-m_2 מחוברות באמצעות מוט חסר מסה באורך 2d. המערכת נמצאת במנוחה על שולחן אופקי חסר חיכוך (שתי המסות על השולחן, המוט אופקי). מסה שלישית m_3 נעה במהירות v_0 ומתנגשת התנגשות פלסטית במסה m_1 .

נסמן את רגע ההתנגשות ב-$t = 0$.

$d = 3\text{m}$, $v_0 = 6\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $m_1 = m_2 = m_3 = 0.2\text{kg}$.

א. חשבו את מיקום מרכז המסה ברגע $t_1 = 0.5\text{sec}$ ביחס לראשית הנמצאת במרכז המוט בהתחלה ואינה נעה עם המוט.

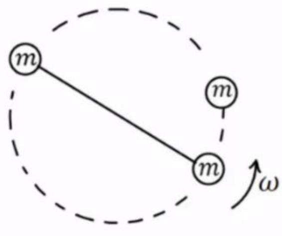
ב. חשבו את התנע הזוויתי של המערכת ביחס לראשית הצירים ברגע t_1.

ג. חשבו את התנע הזוויתי של המערכת ביחס למרכז המסה שלה ברגע t_1.

ד. מצאו את המהירות הזוויתית של המוט ביחס למרכז המסה לאחר ההתנגשות.

ה. מהי המהירות הקווית של m_1 ומהי המהירות הקווית של m_2 מיד לאחר ההתנגשות?

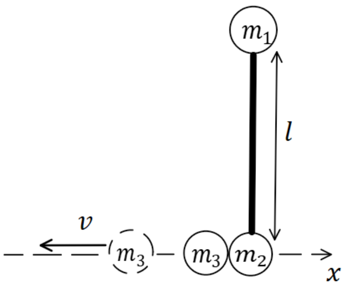
2) שתי מסות מחוברות מסתובבות ומתנגשות בשלישית



שתי מסות זהות m מחוברות במוט חסר מסה באורך d ומסתובבות סביב מרכז המסה שלהן במהירות זוויתית קבועה ω. אחת המסות מתנגשת התנגשות פלסטית במסה זהה נוספת הנמצאת במנוחה.
מצא את מהירות מרכז המסה של שלושת המסות המחוברות לאחר ההתנגשות ואת המהירות הזוויתית שלהן סביב מרכז המסה של שלושתן.

3) מסה נפרדת ממוט עם שתי מסות

שלוש מסות m_1, m_2, m_3 נתונות ומחוברות לקצה של מוט באורך l.



המסות m_2 , m_3 מחוברות בקצה התחתון באיור והמסה m_1 בקצה העליון.
המוט נמצא על שולחן חסר חיכוך (באיור המבט מלמעלה) ובמנוחה.
ברגע מסוים יש פיצוץ בין המסות m_2 , m_3 והמסה m_3 מתנתקת מהמוט וממשיכה במהירות v נתונה (ביחס לשולחן) ובמאונך למוט.
המסה m_2 נשארת מחוברת למוט.
נתון כי: $m_1 , m_2 = M , m_3 = 3M$.

א. מצא את מהירות מרכז המסה של המוט (עם המסות המחוברות).
ב. מצא את המהירות הזוויתית של המוט סביב מרכז המסה שלו.

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{r}_{cm}(t_1) = (1_m - 1_m)$. ב. $L = 3.6kg \cdot \frac{m^2}{sec}$. ג. $L_{c.m.} = 4.8kg \cdot \frac{m^2}{sec}$.
ד. $\omega = 1\frac{rad}{sec}$. ה. $V_1 = 4\frac{m}{sec}\hat{x}$, $V_2 = -2\frac{m}{sec}\hat{x}$.

2) $u_{1,2,3_{c.m}} = 0$, $\omega' = \frac{3}{4}\omega$.

3) א. $v_{1,2_{c.m.}} = \frac{3}{2}v$ ב. $\omega = \frac{3v}{l}$

מכניקה לתלמידי מתמטיקה 77154

פרק 12 - תנועה הרמונית -

תוכן העניינים

תנועה הרמונית פשוטה:

רקע:

משוואת התנועה:

$$-k(x-x_0)=m\ddot{x}$$

k ו– m- קבועים <u>חיוביים</u> כלשהם.

x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.

x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או כל משתנה אחר.

$\ddot{x}$ - נגזרת שניה של המשתנה.

חייב להיות מינוס לפני k.

פתרון המשוואה:

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)+x_0$$

x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה: $\Sigma\vec{F}=0$.

A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משוויי המשקל.

ω - תדירות זוויתית: $\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$.

φ - פאזה.

מציאת הקבועים בפתרון:

x_0 - אפשר למצא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

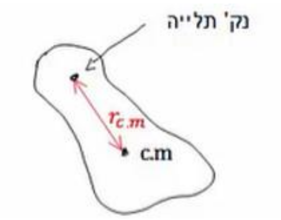
$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{x \text{ של המקדם}}{\ddot{x} \text{ של המקדם}}}$$

A,φ מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$, $\dot{x}(0)$.

נוסחה למהירות המקסימאלית:

$$v_{max} = \omega A$$

מטוטלת פיזיקאלית:



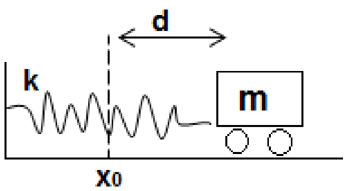
$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_{c.m.}}{I_0}}$$

אנרגיה:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}mA^2$$

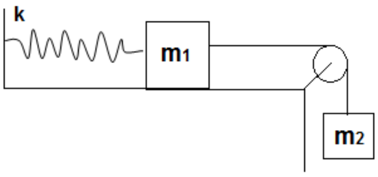
שאלות:

1) מסה מתנגשת במסה



מסה m מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחובר לקיר בעל קבוע קפיץ k.
מותחים את המסה מרחק d מהמיקום בו הקפיץ רפוי ומשחררים ממנוחה.
מצאו את $x(t)$ של המסה.

2) מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה



מסה m_1 מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k. מהמסה יוצא חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשור למסה נוספת התלויה באוויר M.

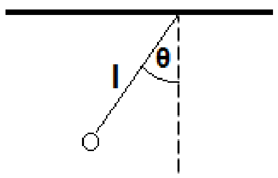
א. מצאו את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבעו את הראשית בנקודה שבה הקפיץ רפוי).

ב. מצאו את תדירות התנודה של המערכת.

ג. מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתיחות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?

3) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם מומנטים)

נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה.
אורך החוט של המטוטלת הוא l.
מצאו את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית
כפונקציה של הזמן.
הניחו כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה
בזווית ידועה θ (דרך מומנטים).



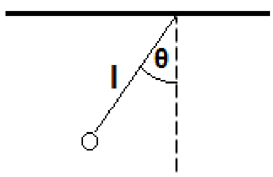
$\theta << \pi$

4) דיסקה עם חור

נתונה דיסקה בעלת מסה M ורדיוס R. קודחים בדיסקה
חור עגול ברדיוס $\frac{R}{4}$ שמרכזו $\frac{R}{2}$ ממרכז הדיסקה. מחברים את
הדיסקה במרכזה אל קיר כך שהיא יכולה להתנדד סביב
מרכזה. מצאו את תדירות התנודות הקטנות .

5) מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)

נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה ו
אורך החוט של המטוטלת הוא l.
מצאו את תדירות התנודות הקטנות
כפונקציה של הזמן.
הניחו כי המטוטלת מתחילה את תנ
בזווית ידועה θ (דרך אנרגיה).

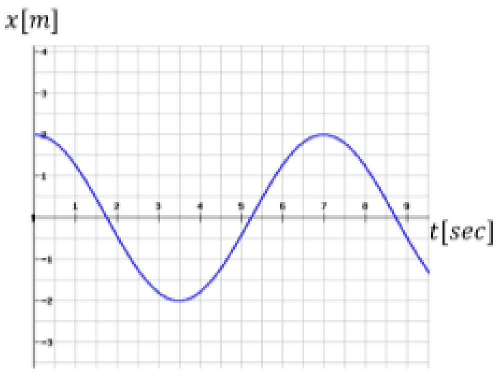


$\theta << \pi$

6) גרף מיקום זמן

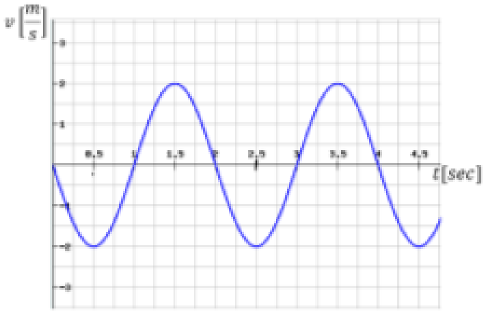
הגרף הבא מתאר את מיקומו כתלות בזמן
של גוף הנע בתנועה הרמונית פשוטה.

א. מהי אמפליטודת התנועה?
ב. מהו זמן המחזור?
ג. מהי התדירות הזוויתית?
ד. מהי הפאזה?
ה. רשום נוסחה למהירות כתלות בזמן.



7) גרף מהירות זמן

מהירותו של גוף המתנדנד בתנועה הרמונית נתונה לפי הגרף הבא:



א. מתי מגיע הגוף לנקודת שיווי המשקל בפעם הראשונה?

ב. האם תאוצת הגוף ב- $t=1\text{sec}$ מקסימאלית?

ג. האם ב- $t=1.5\text{sec}$ האנרגיה קינטית מרבית?

ד. מהו הכוח ב- $t=2.5\text{sec}$?

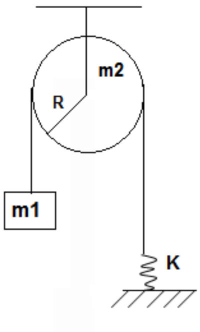
ה. כמה מחזורי תנועה עשה הגוף ב-4 השניות הראשונות של התנועה?

8) גליל מחובר לקפיץ מתגלגל ללא החלקה

גליל בעל מסה m ורדיוס R נמצא על משטח אופקי לא חלק ומחובר באמצעות קפיץ אל הקיר.
קבוע הקפיץ הוא k והוא מחובר למרכז הגליל.
הנח שתנועת הגליל אופקית בלבד ושהוא מתגלגל ללא החלקה על המשטח.
מצאו את תדירות התנודות הקטנות.
פתרו פעם אחת באמצעות אנרגיה ופעם נוספת באמצעות כוחות ומומנטים.

9) גלגלת מסה וקפיץ

במערכת הבאה, המסה m_1 קשורה בחוט דרך גלגלת אל קפיץ המחובר לקרקע. הגלגלת אינה אידאלית.
נתון: R רדיוס הגלגלת, m_2 מסת הגלגלת, k קבוע הקפיץ.
הניחו כי החוט לא מחליק על הגלגלת.

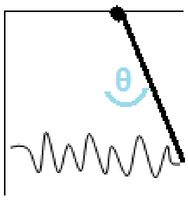


א. מצאו את נקודת שיווי המשקל.

ב. מצאו את תדירות התנודה.

ג. מושכים את המסה אורך d מנקודת שיווי המשקל. מהו d_{max} המרחק המקסימלי שניתן למשוך את המסה מבלי שהמתיחות בחוט תתאפס במהלך התנועה?

10) מוט תלוי מחובר עם קפיץ לקיר



מוט בעל אורך L ומסה M (התפלגות אחידה)
תלוי מהתקרה וחופשי להסתובב סביב נקודת התלייה.
קצהו השני של המוט מחובר בקפיץ, בעל קבוע k לקיר.
הקפיץ רפוי כאשר המוט נמצא מאונך לתקרה.

א. הראו כי תנועת המוט בזוויות קטנות היא תנועה הרמונית ומצאו את תדירות התנועה.

ב. מצאו את הזווית של המוט כפונקציה של הזמן אם המוט משוחרר ממנוחה בזווית נתונה θ_0.

תשובות סופיות:

1) $x(t)=-\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{2m}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t+\frac{\pi}{2}\right)+x_0$

2) א. $x=\frac{m_2 g}{k}$ ב. $\omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$ ג. $A_{max}=\frac{g}{\omega^2}$

3) $\theta(t)=\theta_0\cos(\omega t)\ ,\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

4) $\sqrt{\frac{16g}{247R}}$

5) $\theta(t)=\theta_0\cos(\omega t)\ ,\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

6) א. $A=2m$ ב. $T=7\sec$ ג. $\omega\approx 0.898\frac{rad}{sec}$ ד. $\varphi=0$
ה. $v(t)=-1.80\cdot\sin(0.898\cdot t+0)$

7) א. $t=0.5\sec$ ב. כן. ג. כן. ד. 0
ה. 2

8) $\omega_0=\sqrt{\frac{2k}{3m}}$

9) א. $x_0=\frac{m_1 g}{k}$ ב. $\omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+\frac{1}{2}m_2}}$ ג. $d_{max}=\frac{m_1 g}{k}$

10) א. $\omega=\sqrt{\frac{3(mg+2kL)}{2mL}}$ ב. $\theta(t)=\theta_0\cos(\omega t)$

בור פוטנציאל:

רקע:

כאשר גוף נמצא בנקודת מינימום של הפוטנציאל והאנרגיה הכללית שלו גדולה רק במעט מהאנרגיה הפוטנציאלית אז הוא מבצע תנועה הרמונית בתדירות:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$$

כאשר x_0 היא נקודת המינימום ו- U'' נגזרת שניה בנקודה

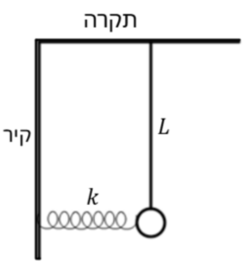
שאלות:

1) פוטנציאל לנארד-ג'ונס

פונקציית הפוטנציאל של לנארד ג'ונס מתארת את האינטראקציה בין אטומים או מולקולות בתוך סריג והיא נתונה לפי הנוסחה: $\mathrm{U}(r) = \varepsilon\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right]$

כאשר ε ו- r_0 קבועים ו- r הוא המרחק בין המולקולות.
מצא את התדירות של תנודות קטנות סביב שיווי משקל של המערכת.
ניתן להניח שמדובר בחלקיק אחד במסה m המרגיש את הפוטנציאל מחלקיק שני במסה M הנשאר נייח $(\mathrm{m} << \mathrm{M})$.

2) מטוטלת מתמטית וקפיץ עם אנרגיות



מטוטלת עם מסה m תלויה מהתקרה באמצעות חוט באורך L.
קושרים למסה קפיץ בעל קבוע k המחובר אופקית לקיר.
הקפיץ במצב רפוי כאשר החוט מאונך לתקרה.
מזיזים את המסה זווית קטנה θ_0 ימינה ומשחררים ממנוחה.

א. מצאו את הזווית של המסה כתלות בזמן.
ב. מהי המתיחות בחוט כאשר המוט נמצא במצב אנכי תוך כדי תנועה.

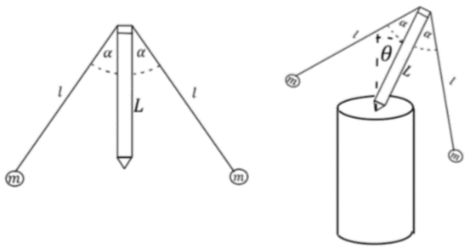
3) עיפרון עם מוטות בשיווי משקל

הגוף שבאיור מורכב מעיפרון בעל מסה זניחה ואורך L.
לקצה של העיפרון מחוברים שני כדורים בעלי מסה m
באמצעות מקלות דקים חסרי מסה באורך l ובזווית α.
מניחים את הגוף על מעמד ומטים אותו בזווית θ במישור הדף.

א. רשמו את האנרגיה הפוטנציאלית של הגוף כתלות בזווית θ.
ב. באיזו זווית θ יהיה הגוף בשיווי משקל?

ג. מה התנאי לכך ששיווי המשקל יהיה יציב?

ד. מהו זמן המחזור של התנודות סביב נקודת שיווי המשקל?



תשובות סופיות:

1) $\omega_0 = \sqrt{\frac{72\varepsilon}{mv_0}}$

2) א. $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{mg+kL}{mL}} \cdot t\right)$ ב. $T = mg + (mg+kL)\theta_0^{\,2}$

3) א. $U = 2mg(L - l\cos\alpha)\cos\theta$ ב. $\theta = 0$ ג. $L < l\cos\alpha$

ד. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{l\cos\alpha - L}{L^2 + l^2 - 2Ll\cos\alpha}}}$

תנועה הרמונית מרוסנת:

רקע:

משוואת התנועה:

$$\ddot{z}+\Gamma\dot{z}+\omega_0^2 z=0$$

$$\Gamma=\frac{\lambda}{m}\ ,\ \omega_0^2=\frac{k}{m}$$

פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:

(I). ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2}>\omega_0$

$$z(t)=e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(Ae^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}\cdot t}+Be^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}\cdot t}\right)$$

אין תנודות.

(II). ריסון קריטי: $\frac{\Gamma}{2}=\omega_0$

$$z(t)=(A+B\cdot t)\cdot e^{-\omega_0\cdot t}$$

דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.

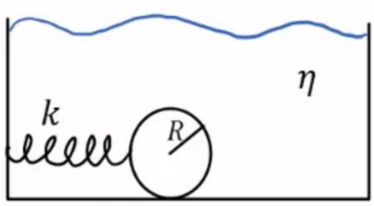
(III). ריסון חלש: $\frac{\Gamma}{2}<\omega_0$

$$z(t)=Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t}\cos(\tilde{\omega}t+\varphi)$$
$$\tilde{\omega}=\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.

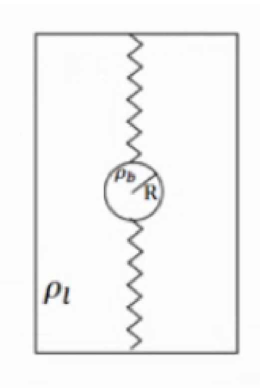
שאלות:

1) כדור במיכל מים



כדור בעל מסה m ורדיוס R נמצא בתוך מיכל מים ומחובר באמצעות קפיץ אופקי לדופן המיכל.
קבוע הקפיץ הוא k. בתנועת הגוף במים, מפעילים המים על הכדור כוח התנגדות המתכונתי והפוך למהירותו. כוח זה נקרא כוח סטוקס וגודלו הוא: $\vec{F}=-6\pi R\eta\vec{v}$. כאשר η היא צמיגות המים ו- R הוא רדיוס הכדור.
התייחס ל- m, k, η, R כנתונים ומצא את תדירות התנודות של הכדור בהנחה ש- $R<\frac{\sqrt{mk}}{3\pi\eta}$. הזנח את החיכוך בין הכדור לתחתית המיכל.

2) שני קפיצים בנוזל



כדור נמצא בתוך תיבה מלאה במים ומחובר עם קפיץ אידיאלי לקצה העליון של התיבה ועם קפיץ אידיאלי נוסף זהה לקצה התחתון של התיבה.
נתון: R - רדיוס הכדור, ρ_b - צפיפות המסה של הכדור,
ρ_l - צפיפות המסה של המים, K - קבוע שני הקפיצים
ו- η - צמיגות המים.
(תזכורת: כאשר כדור נמצא בתוך נוזל פועלים עליו כוח ציפה: $F=\rho_l Vg$ וכוח סטוקס: $F=-6\pi\eta Rv$).

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת.
ב. מה התנאי שיהיו תנודות הרמוניות?
מצא את התדירות בהנחה שתנודות אלו מתקיימות.
ג. מצא את התנאי בו יחזור הכדור הכי מהר לנקודת שיווי המשקל.

3) איבוד אנרגיה במחזור

בתנועה הרמונית מרוסנת קיים ריסון חלש כך שהאמפליטודה של התנועה יורדת ב-2.5 אחוז כל מחזור.
בכמה אחוז יורדת האנרגיה בכל מחזור?

4) משקולת במיכל מים תלויה מהתקרה

משקולת שמסתה: $M = 1\text{kg}$ נמצאת במיכל מים ומחוברת לתקרה באמצעות קפיץ בעל קבוע: $k = 20\frac{\text{N}}{\text{m}}$. כוח ההתנגדות שמפעילים המים הוא מהצורה של: $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ כאשר: $\lambda = 4\frac{\text{kg}}{\text{sec}}$ ו- $\vec{v}$ היא מהירות המסה.
הניחו שהמשקולת אינה יוצאת מהמים ואינה פוגעת ברצפה.

א. תוך כמה זמן תרד האמפליטודה לחמישית מגודלה ההתחלתי?
(הניחו שהפאזה היא אפס)

ב. לאחר כמה מחזורים זה יקרה?

5) מסה באמבט מים ודבש

מסה: $m = 1\text{kg}$ נמצאת באמבט מלא מים, המסה מחוברת באמצעות שני קפיצים זהים בעלי קבוע: $k = 25\frac{\text{N}}{\text{m}}$ לשתי דפנות האמבט ונעה ללא חיכוך עם ריצפת האמבט. מזיזים את המסה 0.5m מנקודת שיווי המשקל ומשחררים ממנוחה. התנגדות המים מפעילה כוח גרר: $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ כאשר: $\lambda = 10\frac{\text{kg}}{\text{sec}}$.

א. מהו העתק המסה כתלות בזמן?

ב. מחליפים את המים בדבש מה שמגדיל את λ פי $\sqrt{2}$. מזיזים שוב את המסה 0.5m ומשחררים, מהו העתק המסה כתלות בזמן?

תשובות סופיות:

1) $\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\text{k}}{\text{m}} - \left(\frac{3\pi \text{R}\eta}{\text{m}}\right)^2}$

2) א. $y_{eq} = \frac{\text{F}_\text{b}}{2\text{K}}$ ב. $\omega^* = \sqrt{\frac{2\text{K}}{\text{m}} - \left(\frac{6\pi\eta \text{R}}{2\text{m}}\right)^2}$ ג. $\frac{2\text{K}}{\text{m}} = \frac{6\pi\eta\text{R}}{2\text{m}}^2$

3) 5%

4) א. 1.6sec ב. בערך מחזור אחד.

5) א. $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-5t}\cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$ ב. $x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}}t\right)e^{-5\cdot\sqrt{2}t}$

תנועה הרמונית מאולצת:

רקע:

כוח מאלץ:

$$\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

משוואת התנועה:

$$\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

פתרון משואת התנועה:

$$x(t) = A(\Omega)\sin(\Omega t + \phi) + x_{\text{הומוגני}}(t)$$

$x_{\text{הומוגני}}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים במצב עמיד נזניח את הפתרון ההומוגני.

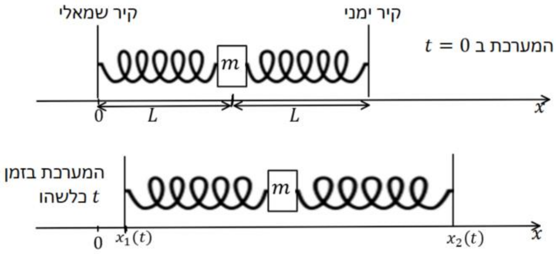
$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2\Omega^2}}$$

$$\sin(\phi) = \frac{\Gamma\, \Omega}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2\Omega^2}}$$

תדירות תהודה - התדירות של הכוח המאלץ עבורה $A(\Omega)$ מקסימאלי.

שאלות:

1) מסה בין קירות זזים



מסה m מחוברת לשני קפיצים זהים בעלי קבוע k ואורך רפוי L משני צידיה. הקפיצים מחוברים לקירות הנמצאים במרחק L מהמסה משמאלה ומימינה והמערכת כולה מונחת על שולחן חלק (כוח הכובד לתוך הדף).

על המסה פועל כוח גרר: $F=-bv$. ב-$t=0$ הקירות מתחילים לזוז.

ראשית הצירים ממוקמת במרכז התנועה של הקיר השמאלי והכיוון החיובי ימינה.

מיקום הקירות כתלות בזמן הוא: $x_2(t)=2L+2d\sin(\omega t)$, $x_1(t)=d\sin(\omega t)$.

נתונים: m , b , k , ω , L , d ו-$d<<L$.

א. מהי תדירות התנועה ומהי האמפליטודה?

ב. מה התנאי לתהודה בהנחה כי הריסון חלש מאוד?

2) מציאת תדירות ברבע אמפליטודה

מסה m מחוברת לקפיץ אופקי בעל קבוע k, המסה נעה על מישור חלק ללא חיכוך.

על המסה פועל כוח גרר: $f=-bv$ וכוח מאלץ: $F(t)=d\cdot\cos(\omega t)$.

מצא את תדירות הכוח בה אמפליטודת התנועה במצב העמיד תהיה רבע מהאמפליטודה המקסימלית.

הנח כי: d , m , k , b , ω נתונים וכי: $b<<\sqrt{mk}$.

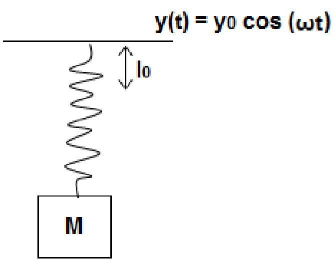
3) מסה תלויה על קרש נע

מסה M מחוברת באמצעות קפיץ אנכי לקרש אופקי הנע בציר ה- y

לפי: $y(t)=y_0\cos(\omega t)$.

קבוע הקפיץ k ואורכו הרפוי l_0 נתונים.

מצא את מיקום המסה כפונקציה של הזמן.



תשובות סופיות:

1) א. $A(\omega)=\dfrac{\dfrac{3kd}{m}}{\sqrt{\left(\dfrac{2k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\dfrac{b}{m}\right)^2\omega^2}}$ ב. $\omega\sim\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

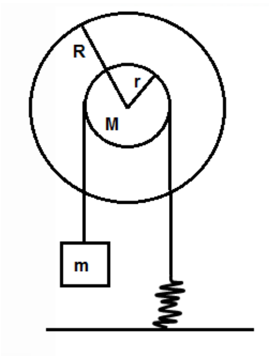
2) $\omega_{1,2}=\sqrt{\dfrac{B\pm\sqrt{B^2-4C}}{2}}$

3) $y(t)=\dfrac{\dfrac{F_0}{m}}{\dfrac{k}{m}-\omega^2}\cos\omega t+y'_0$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) דיסקה כפולה מסה וקפיץ

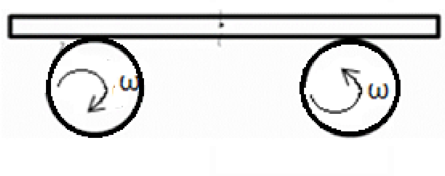


נתונה דיסקה ממוסמרת במרכזה לקיר (כלומר הדיסקה יכולה להסתובב אך לא לנוע מעלה ומטה).
הדיסקה בנויה משתי דיסקות מודבקות בעלות רדיוס r לדיסקה הקטנה ו- R לדיסקה הגדולה.
סביב הדיסקות מלופפים חוטים כמתואר בשרטוט.
עוד נתון כי אין החלקה לחוטים.

א. מצאו את תדירות התנודות.

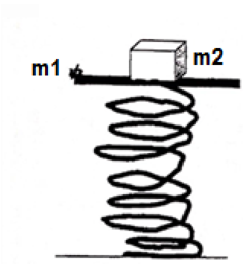
ב. מהי האנרגיה הכוללת של המערכת?

2) מוט על שני גלגלים



מוט בעל מסה M מונח על שני גלגלים המקובעים במרכזם.
הגלגלים מסתובבים במהירות זוויתית ω כך שהגלגל הימני מסתובב נגד כיוון השעון והשמאלי עם כיוון השעון.
בין המוט והגלגלים קיים חיכוך ומקדם החיכוך הקינטי נתון.
מניחים את המוט כך שמרכזו נמצא במרחק A מהמרכז בין הגלגלים.
מצא את תדירות התנודה של המוט.

3) מסה על משטח על קפיץ אנכי



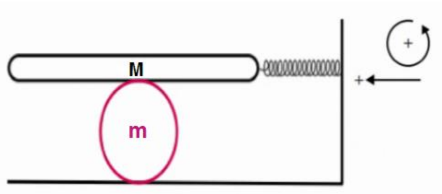
על קפיץ שקבועו k מונח משטח שמסתו m_1,
המשטח צמוד לקצהו של הקפיץ.
על המשטח מונח גוף שמסתו m_2.
מכווצים את הקפיץ בשיעור Δy ומשחררים.

א. מה צריך להיות Δy_{min} כדי שהגוף יתנתק מן המשטח באיזה שהוא שלב?

ב. הניחו: $\Delta y = 2\Delta y_{min}$, $k = 10\frac{\text{N}r}{\text{m}}$, $m_1 = 0.04\text{kg}$, $m_2 = 0.06\text{kg}$
ומצאו את רגע הניתוק.

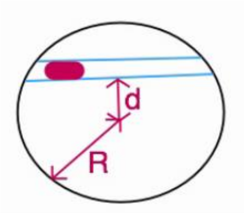
ג. באמצעות הנתונים המספריים מסעיף ב', מהו מקומו ומהירותו של המשטח ברגע שהגוף ניתק מן המשטח?

4) משטח על דיסקה מחובר לקפיץ



נתונה מערכת כבשרטוט (אין החלקה במערכת).
מהי התדירות?

5) תנודה בתעלה בכדו"א



בתוך כדור הארץ נחפרה תעלה כבשרטוט.
מסת כדור הארץ M .
מהי תדירות התנודות הקטנות של מסה החופשיה לנוע בתעלה?

6) שתי מסות מחוברות בקפיץ**

שתי מסות m_1 ו- m_2 מחוברות בקפיץ בעל קבוע k ואורך רפוי l.
המסות נמצאות במנוחה על מישור אופקי חלק.
נותנים דחיפה ימינה למסה m_1 המקנה לה מהירות התחלתית v_0.

א. מהי תדירות התנודות של התנועה (כתלות בנתוני הבעיה)?
רמז : על מנת לפתור את המשוואות יש להחליף משתנים ל-

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2};\ x_{rel} = x_1 - x_2$$

ב. מצאו את מיקום המסה m_2 כתלות בזמן.

תשובות סופיות:

1) א. $\sqrt{\dfrac{2kR}{\frac{1}{2}MR+\frac{r^2}{R}}}$ ב. $E_{total}=\frac{1}{2}Kx^2-mgx+\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

2) $\omega=\sqrt{\dfrac{\mu_k g}{d}}$

3) א. $\Delta y_{min}=\dfrac{(m_1+m_2)}{k}$ ב. $t_1=\dfrac{1}{\omega}\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

ג. $\Delta y_{min}=\dfrac{(m_1+m_2)}{k}$, $v(t)=\dot{y}(t)=-2\Delta y_{min}\omega\sin(\omega t)$

4) $\ddot{x}=-\left(\dfrac{K}{m+2M}\right)x$

5) $\ddot{x}=-\left(\dfrac{M}{R^3}\right)(x-0)$

6) א. $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$, $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$

ב. $x_2(t)=\dfrac{m_1}{m_1+m}(l+v_0t)-\dfrac{m_1}{m_1+m_2}A\cos(\omega t+\varphi)$, $A=\dfrac{\sqrt{v_0^2+l^2\omega^2}}{\omega}$,

$\tan\varphi=-\dfrac{v_0}{\omega l}$

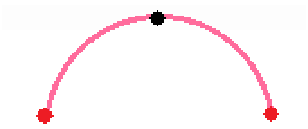
תרגילים מסכמים (מטוטלות שונות):

שאלות:

1) שני חצאי דיסקה

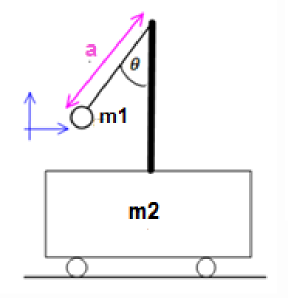
נתונים שני חצאי דיסקה התלויים על מסמר כמתואר בשרטוט.
מסת הדיסקה ורדיוסה נתונים.
מצא את התדירות של כל אחד מחצאי הדיסקה.

2) חצי חישוק ושתי מסות



מצא את תדירות חצי החישוק שבתמונה.
רדיוס R ומסתו M, בקצוותיו חוברו שתי מסות m.
החישוק תלוי ממסמר בקודקודו.

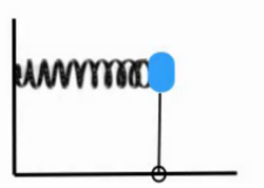
3) מטוטלת על עגלה נעה



עגלה בעלת מסה m_2 חופשיה לנוע על משטח אופקי ללא חיכוך.
אל העגלה מחובר מוט אנכי עליו תלויה מטוטלת מתמטית עם מסה m_1 ואורך חוט a.
משחררים את המסה (של המטוטלת) בזווית נתונה כאשר כל המערכת נמצאת במנוחה.

א. רשמו את מהירות המטוטלת במערכת העגלה כפונקציה של θ ו-$\dot{\theta}$.
ב. רשמו את מהירות העגלה והמטוטלת כפונקציה של θ ו-$\dot{\theta}$.
ג. רשמו את משוואת שימור האנרגיה המכאנית של המערכת.
ד. רשמו את משוואת שימור האנרגיה בתנודות קטנות.
ה. מצאו את תדירות התנודה של המסה M.

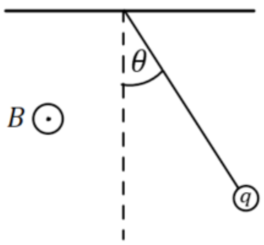
4) קפיץ מוט ומסה



נתונה מסה m המחוברת לקפיץ בעל קבוע k.
המסה גם מחוברת למוט חסר מסה בעל אורך l.
המוט מחובר לרצפה בציר המאפשר לו להסתובב.
המערכת בשרטוט נמצאת במצב שיווי משקל.

א. מהי תדירות התנודות הקטנות של המערכת?
ב. מהי המסה המקסימלית שתאפשר תדירות זו?

5) מטוטלת בשדה מגנטי



מטוטלת מתמטית שאורכה L, מסתה m ומטענה q

נתונה בשדה מגנטי אופקי B היוצא מהדף.

השדה המגנטי יוצר כוח מגנטי על המטוטלת כאשר

היא בתנועה לפי הנוסחה: $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$.

א. מצא את הכוחות הפועלים על המטוטלת במהלך התנועה כתלות בזווית θ ובמהירות v.

ב. מסיטים את המטוטלת זווית קטנה θ_0 ומשחררים במנוחה.
מצא את משוואת התנועה של המטוטלת ומשם את מיקום המטוטלת כתלות בזמן עבור זוויות קטנות.

ג. מהי המתיחות בחוט כתלות בזמן.

ד. מהי המתיחות המקסימאלית בחוט ובאיזו זווית ומהירות מצב זה מתרחש?

תשובות סופיות:

1) דיסקה 1: $\ddot{\theta} = -\left(\frac{A}{B}\right)\cdot\left(\theta-(0)\right)$, דיסקה 2: ראה סרטון.

2) $\ddot{\theta} = -\frac{(2m+M)\cdot gb}{I}\theta$

3) א. $v_x = \dot{\theta}a\cos\theta \ , \ v_y = \dot{\theta}a\sin\theta$

ב. $v_{1_x} = \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a\dot{\theta}\cos\theta \ , \ v_{1_y} = \dot{\theta}a\sin\theta$

ג. $E = \frac{1}{2}m_1\left(\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\right)^{-2} a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \dot{\theta}^2 a^2\sin^2\theta - m_1 ga\cos\theta$

ד. $E = \frac{1}{2}m_1\left(\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a^2\dot{\theta}^2 + \frac{ga}{2}\theta^2\right) - m_1 ga\frac{1}{2}$

ה. $\omega = \sqrt{\frac{\frac{ga^2}{2}}{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a^2}}$

4) א. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}-\frac{g}{l}} > 0$

ב. $m < \frac{lk}{gv}$

5) א. $\left|\vec{F}\right| = qvB$, כיוון החוצה מהמעגל.

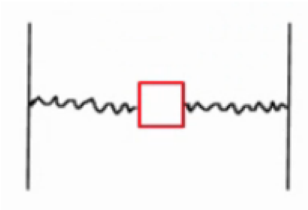
ב. $\theta(t) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$

ג. $T(t) = -qB\sqrt{gL}\theta_0\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + mg$ עבור $\theta_0 << \frac{2qB}{m}\sqrt{\frac{L}{g}}$

ד. $T_{max} = mg + qB\sqrt{gL}\theta_0$

תרגילים למתקדמים:

שאלות:

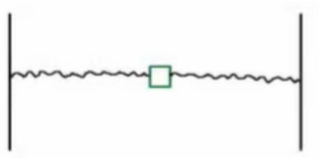


1) מסה בין שני קפיצים עם אורך זניח

בין שני קירות במרחק 2L נמצאת מסה m המחוברת לקירות בקפיצים בעלי מקדם k ואורך רפוי זניח.

א. מצא את תדירויות התנודות הקטנות בציר ה- x.

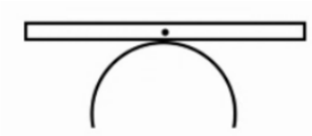
ב. מצא את תדירויות התנודות הקטנות בציר ה- y.



2) מסה בין שני קפיצים (אורך רפוי לא זניח)**

בין שני קירות במרחק 2L נמצאת מסה m המחוברת לקירות בקפיצים בעלי מקדם k ואורך רפוי l_0.

מצא את תדירות התנודות הקטנות בציר ה- y.



3) מוט על חצי כדור**

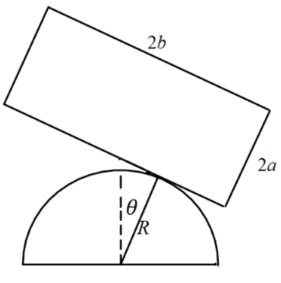
מוט בעל אורך l ומסה m מונח על כדור בעל רדיוס R.

א. מצא את תדירות התנודות הקטנות של המוט.

ב. מצא את גובה מרכז המסה של המוט כפונקציה של זווית ההטיה.

4) עכביש בשיווי משקל יציב*

מוט בעל מסה M ואורך l מחובר ברבע מגובהו לציר. מתחתית המוט עכביש בעל מסה m מטפס כלפי מעלה. מצא את תדירות המערכת כפונקציה של מיקום העכביש ומצא את משקל העכביש המקסימלי שישאיר את המערכת בשיווי משקל יציב.



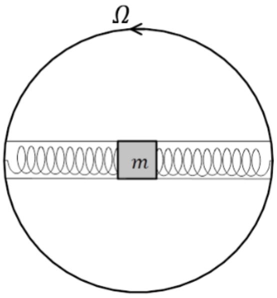
5) תיבה על כיפה חצי כדורית**

תיבה שמסתה M מונחת על כיפה גלילית חצי עגולה ברדיוס R. גודל התיבה הוא $2a\times 2b$.

מניחים את התיבה על ראש הכיפה כך שמרכזה בדיוק מעל מרכז הכיפה. לאחר מכן מטים את התיבה מעט הצידה כך שהיא מתגלגלת ללא החלקה על הכיפה.

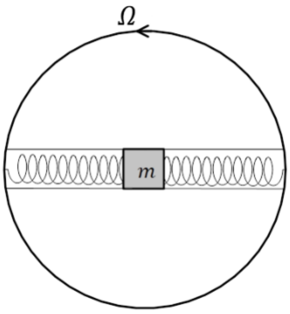
מצא את תדירות התנודות הקטנות של התיבה על ראש הכיפה. מה התנאי שיהיו תנודות?

6) **מסה בתוך חישוק מסתובב**
(כולל קוריאוליס וקורדינטות פולריות)



גוף שמסתו m נמצא במרכז תעלה הנמצאת לאורך קוטרו של חישוק.
המערכת מונחת על השולחן כך שכוח הכובד לתוך הגוף.
הגוף מחובר לשני קפיצים זהים אחד מכל צד המצויים במצב הרפוי כאשר הגוף במרכז החישוק. קבוע הקפיצים הוא k.
מסובבים את החישוק במהירות זוויתית Ω ומרחיקים את המסה מעט מהמרכז.
רשום משוואת כוחות במערכת החישוק, מה התנאי לתנועה הרמונית ומהי תדירות התנועה אם התנאי מתקיים?
(מומלץ לפתור גם באמצעות ק. פולריות).

7) **מסה בתוך חישוק מסתובב עם חיכוך**
(כולל קואורדינטות פולריות, קוריאוליס, ותנועה מרוסנת)



גוף שמסתו m נמצא במרכז תעלה הנמצאת לאורך קוטרו של חישוק.
המערכת מונחת על השולחן כך שכוח הכובד לתוך הגוף.
הגוף מחובר לשני קפיצים זהים אחד מכל צד המצויים במצב הרפוי כאשר הגוף במרכז החישוק. קבוע הקפיצים הוא k.
מסובבים את החישוק במהירות זוויתית Ω ומשחררים את המסה ממנוחה במרחק d מהמרכז.
בין המסה והדופן של התעלה קיים חיכוך (אין חיכוך עם הבסיס).
מקדמי החיכוך הסטטי והקינטי הם : μ_k , μ_s .

א. רשום משוואת כוחות במערכת החישוק, מהם התנאים לתנועה הרמונית? האם צריך את מקדם החיכוך הסטטי?
ב. מצא את המיקום כתלות בזמן בהנחת התנאים של סעיף א', מהו מקדם האיכות של המערכת?
(מומלץ לפתור גם באמצעות ק. פולריות).

תשובות סופיות:

1) א. $\omega_x = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ ב. $\omega_y = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

2) $-\left(2k\frac{L\cdot l_0}{L}\right)y = \ddot{y}$

3) א. $\omega = \sqrt{\frac{12gR}{l^2}}$ ב. $y_{c.m} = R\left(1+\frac{\theta^2}{2}\right)$

4) $-\left(m'g\frac{C}{I}\right)\theta = \ddot{\theta}$

5) $\omega_0 = \sqrt{\frac{g(R-a)}{\frac{1}{3}(a^2+b^2)+a^2}}$

6) $(-2k-\Omega^2 m)x = m\ddot{x}$, $2k-\Omega^2 m > 0$, $\omega=\sqrt{\frac{2k-m\Omega^2}{m}}$

7) א. $\Omega^2(1+\mu_k{}^2) < \frac{2k}{m}$, $-2kx+m\Omega^2 x-2\mu_k m\Omega\dot{x} = m\ddot{x}$, לא כי $N=0$ כשהגוף נעצר.

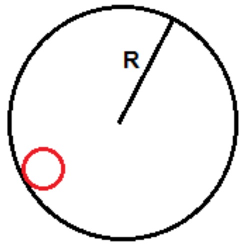
ב. $x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(d\cos(\tilde{\omega}t) - \frac{d\sqrt{1-\omega_0{}^2}}{\tilde{\omega}}\sin(\tilde{\omega}t)\right)$, $Q = \frac{\omega_0}{\Gamma} = \frac{\sqrt{\frac{2k}{m}}}{2\mu_k\Omega}$.

תרגילים לבקשת סטודנטים:

שאלות:

1) כדור מתגלגל בצינור

דיסקה בעלת רדיוס r מתגלגלת בתוך צינור מקובע לרצפה בעל רדיוס R. מותר להשתמש בקירוב זוויות קטנות ומותר להזניח את הרדיוס הקטן ביחס לגדול.



א. מה תהיה תדירות התנודות הקטנות של הדיסקה, בהנחה שאין חיכוך?

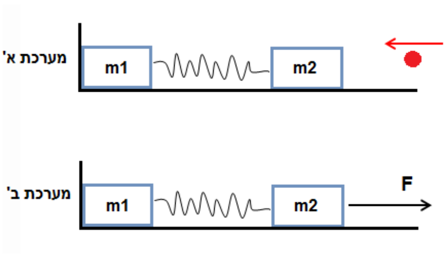
ב. מה תהיה התשובה לסעיף א' אם יוסיפו חיכוך עם הרצפה והגלגול יהיה ללא החלקה?

ג. מה תהיה התדירות עם בנוסף לחיכוך עם הרצפה יתווסף כוח חיכוך: $F=-bv$?

2) קפיץ נמתח להתארכות מקסימלית

קליע בעל מסה זניחה נע במהירות לא ידועה לעבר מסה m_2 שמחוברת למסה m_1 דרך קפיץ בעל מקדם אלסטי k.

המסה m_1 ניצבת בצמוד לקיר כמתואר בשרטוט.

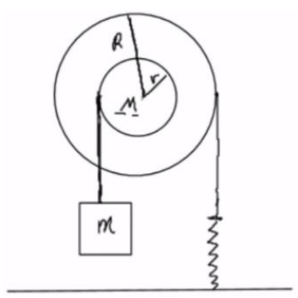


א. לאחר פגיעת הקליע הקפיץ מתכווץ במצב המקסימלי ומאבד d מאורכו.
מהי מהירות מרכז המסה מייד לאחר שהמערכת מתנתקת מהקיר?

ב. על מערכת בעלת נתונים זהים ואורך קפיץ רפוי l מופעל כוח קבוע ואופקי F לכיוון המסומן בציור.
מה ההתארכות המקסימלית של הקפיץ?

3) דיסקה כפולה מסה וקפיץ

נתונה דיסקה ממוסמרת במרכזה לקיר (כלומר הדיסקה יכולה להסתובב אך לא לנוע מעלה ומטה).
הדיסקה בנויה משתי דיסקיות מודבקות בעלות רדיוס r לדיסקה הקטנה ו- R לדיסקה הגדולה.
סביב הדיסקות מלופפים חוטים כמתואר בשרטוט.
עוד נתון כי אין החלקה לחוטים.

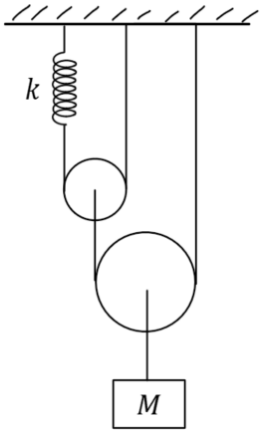


א. מצא את תדירות התנודות.

ב. מהי האנרגיה הכוללת של המערכת?

4) הרמונית עם גזירה של חוט *(רק למי שמכיר את הנושא של תאוצות לא שוות)*

במערכת הבאה הגלגלות והקפיץ אידיאלים.



קבוע הקפיץ הוא: $k = 50\frac{\text{N}}{\text{m}}$ והמסה: $M = 4\text{kg}$.

א. מצאו את התארכות הקפיץ במצב שיווי המשקל.

ב. מה ההעתק של המשקולת במצב שיווי המשקל (ביחס למצבה כשהקפיץ רפוי).

ג. מהי תדירות התנודות של המערכת?

ד. מותחים את המשקולת מטה 20cm מנקודת שיווי המשקל ומשחררים ממנוחה.
רשמו ביטוי למיקום של המשקולת כתלות בזמן.

תשובות סופיות:

1) א. $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ ב. $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$ ג. $\omega' = \sqrt{\omega_0^{\,2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

2) א. $v_{c.m.} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m_2}}d}{m_1 + m_2}$ ב. $\Delta = \frac{F}{2k + k\frac{m_2 - m_1}{m_1}}$

3) א. $\omega = \sqrt{\frac{kR}{\frac{1}{2}MR + \frac{r^2}{R}}}$ ב. $E_{total} = \frac{1}{2}kx^2 - mgx + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

4) א. 0.2m ב. 0.05m ג. $3.54\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

ד. $x(t) = 0.2\cos(3.54t)$ משיווי משקל.

מכניקה לתלמידי מתמטיקה 77154

פרק 13 - יחסות פרטית -

תוכן העניינים

טרנספרמציית לורנץ למיקום והזמן:

רקע:

תורת היחסות הפרטית עוסקת בתיאור של מאורעות מנקודת המבט של צופים הנמצאים במערכות ייחוס שונות.

מערכות הייחוס תמיד יהיו מערכות אינרציאליות (צופים שזזים במהירות קבועה ביחס למערכת הכוכבים).

הגדרת מאורע:

מאורע הוא אירוע פיזיקאלי המוגדר בזמן ובמרחב.
כל מאורע ניתן לתאר ע"י ארבע קואורדינטות (x, y, z, t).

עקרונות יסוד בתורת היחסות:

חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות האינרציאליות.

האור אינו צריך תווך בשביל לעבור בו.

מהירות האור קבועה וזהה בכל מערכות הייחוס.

אף גוף אינו יכול לנוע יותר מהר ממהירות האור בוואקום. כתוצאה מכך מדידת הזמן שונה בין מערכות הייחוס.

הזמן הופך לקואורדינטה רביעית (ביחד עם : x, y, z) שעוברת טרנספורמציה.

טרנספורמציית לורנץ למיקום והזמן:

$$x' = \gamma_o(x - v_o t)$$

$$t' = \gamma_o\left(t - \frac{v_o x}{c^2}\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\beta = \frac{v_o}{c}$$

$$\gamma_o = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_o}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$x = \gamma_o(x' + v_o t')$$

$$t = \gamma_o\left(t' + \frac{v_o x'}{c^2}\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

תנאים לשימוש בטרנספורמציית לורנץ:

הצירים של המערכות מקבילים.

בזמן: $t = t' = 0$ הראשיות מתלכדות.

המערכת העצמית:

מערכת עצמית היא מערכת בה המאורע הנצפה נמצא במנוחה.

זמן עצמי τ - מוגדר להיות הפרש הזמנים בין שני מאורעות כפי שהוא נמדד במערכת העצמית שלהם.

אורך עצמי - האורך של גוף כפי שנמדד במערכת בו הגוף נמצא במנוחה.

התכווצות האורך:

$$l = \frac{l_0}{\gamma_0}$$

l_0 - האורך העצמי

התארכות הזמן:

$$\Delta t = \gamma_0 \tau > \tau$$

שינוי זווית במדידת אורך:

$$\tan\theta = \gamma_0 \tan\theta'$$

θ' - זווית במערכת העצמית

אפקט דופלר היחסותי:

זמן המחזור של הגל:

$$T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\tau$$

אורך הגל:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\lambda'$$

λ' - אורך הגל במערכת העצמית

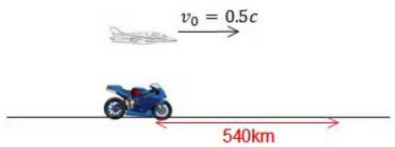
תדירות הגל:

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}f'$$

f' - תדירות במערכת העצמית

שאלות:

1) מציאת מהירות ומיקום אופנוע

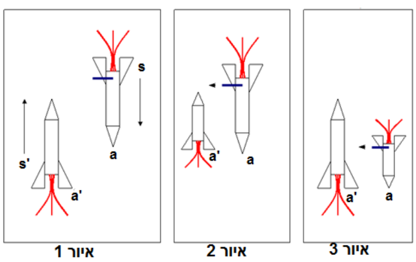


אופנוע נוסע במהירות קבועה בקו ישר.
צופה על הקרקע מודד כי האופנוע נסע מרחק של 540km.
צופה הנע במטוס ממש מהיר $v = 0.5c$, בכיוון נסיעת האופנוע, מודד כי משך זמן נסיעת האופנוע היה 0.01 שניה.

א. מצא את מהירות האופנוע במערכת כדה"א.

ב. מצא את המרחק שעבר האופנוע כפי שמדד הצופה במטוס.

2) בדיקת ירי



שתי חלליות בעלות אורך מנוחה זהה, עוברות זו במקביל לזו במהירות גבוהה.
בזנב החללית S מצוי תותח המכוון בניצב לכיוון תנועת החללית ולעבר מסלול התנועה של החללית 's (איור 1).
בחללית S מתבצעת בדיקת ירי בתותח ברגע שהנקודה a בראש החללית מתלכדת עם הנקודה 'a (זנב 's).
מכיוון שאורך החללית 's קצר מהאורך העצמי בחללית ב- s מניחים כי הטיל יפספס את החללית השנייה (איור 2).
אולם במערכת 's אורך החללית S קצר מהאורך העצמי ולכן כאשר a ו- 'a מתלכדות האסטרונאוט S יפגע (איור 3).
ישב/י את הפרדוקס.

3) מוט פולט אור לסירוגין

מוט בעל אורך l_0 נע במהירות V נתונה ביחס לכדה״א.

נתון כי ב-$t=0$ הקצה השמאלי של המוט נמצא ב-$x=x'=0$.

ברגע זה המוט פולט אור מקצהו הימני.

לאחר זמן τ המוט פולט אור מקצהו הימני.

מצא את הפרש הזמנים כפי שרואה אותם צופה מכדה״א

(הפרש הזמנים בין הגעת האור משני המאורעות לראשית).

4) פיצוץ בכוכב אלפה

החללית אנטרייז יוצאת מכוכב אלפה חזרה לכדה״א.

בדרך היא עוברת ליד הירח של כוכב אלפה ורואה

פולס אלקטרו מגנטי חזק יוצא לכיוון הכוכב.

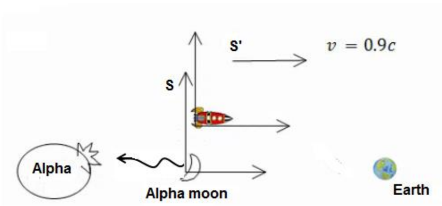
ידוע שבירח ישנה קבוצת חייזרים תוקפניים בשם

ה״קליגונים״. 1.3 שניות מאוחר יותר היא רואה

פיצוץ בכוכב. המרחק בין הכוכב לירח שלו

הוא 500 מיליון מטרים כפי שנמדד במערכת החללית.

מהירות החללית ביחס לכוכב ולירח היא 0.9c.



א. מהו מרווח הזמן בין גילוי הגל לפיצוץ במערכת הכוכב והירח?

ב. מה משמעות הסימן בהפרש הזמן?

ג. האם הפולס גרם לפיצוץ או להיפך?

תשובות סופיות:

1) א. $v=5.65\cdot10^7\,\frac{m}{sec}$ ב. $x'_2=-10.32\cdot10^5\,m$

2) ראה סרטון.

3) $\Delta t=\gamma_0(1+\beta)\left(\tau-\frac{l_0}{c}\right)$

4) א. $t_3=-3.525\,sec$ ב. הפיצוץ היה לפני הגעת הגל לכוכב וגם לפני ירי הגל.

ג. לא יכול להיות שהפיצוץ גרם לירי של הפולס, $x_2=11.47\cdot10^8\cdot m>10.575\cdot10^8 m$

טרנספורמציית לורנץ למהירות:

רקע:

$$v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}$$

$$v_y' = \frac{v_y}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

$$v_z' = \frac{v_z}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

אברציה - שינוי זווית המהירות:

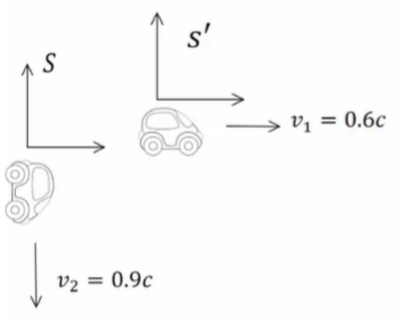
$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma_0 \left(\cos \theta - \frac{v_0}{c}\right)}$$

שאלות:

1) מהירות יחסית בין מכוניות

שתי מכוניות נוסעות האחת במאונך לשנייה כך שמהירות המכונית הראשונה היא 0.6c ומהירות המכונית השנייה היא 0.9c.

מצא את המהירות היחסית.



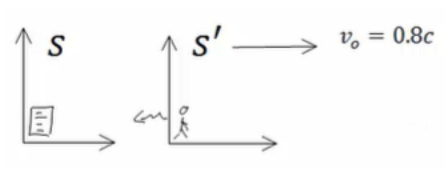
תשובות סופיות:

1) $v'_{2_x} = -0.6c \ , \ v'_{2_y} = -0.72c$

תרגילים לטרנספרמציית מיקום ומהירות:

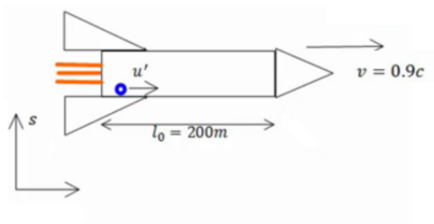
שאלות:

1) דודה יוצאת לטיול



המבחן בפיזיקה התחיל בשעה 9:00 והמשגיחה יצאה לטייל במהירות $0.8c$ (דודה זריזה במיוחד). לאחר שעה לפי שעונה היא שולחת לסטודנטים אות רדיו לסיים את הבחינה. כמה זמן ארכה הבחינה עבור הסטודנטים?

2) כדור מתגלגל בחללית



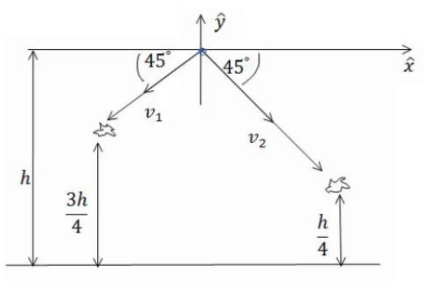
חללית בעלת אורך עצמי של 200 מטר נעה במהירות $0.9c$ ביחס למערכת אינרציאלית S. כדור קטן מתגלגל לאורכה במהירות $u' = 0.04c$ בכיוון ציר x, כפי שנמדד ע"י צופה בחללית.

א. מהי מהירות הכדור כפי שנמדדת ע"י צופה ב- S? (הבא את התשובה ביחידות של c).

ב. מהו הזמן שייקח לכדור לעבור מקצה לקצה של החללית כפי שנמדד ב- s? (הבא את התשובה במיליוניות שנייה).

ג. איזה מרחק עבר הכדור לפי צופה במערכת s? (ביחידות של ק"מ).

3) חלקיקים נוצרים בגובה ומתפרקים



שני חלקיקים נוצרים בגובה h מעל הקרקע. אחד נפלט בזווית 225 מעלות עם ציר ה- x והשני בזווית -45 מעלות עם ציר ה- x.

החלקיק הראשון מתפרק לאחר זמן T בגובה $\frac{3h}{4}$

והחלקיק השני מתפרק לאחר זמן T_2 בגובה $\frac{h}{4}$.

התעלם מהכבידה בבעיה.

א. הבע את מהירויות החלקיקים באמצעות h ו- T.

ב. מצא את זמן החיים העצמי של כל חלקיק (זמן החיים במערכת המנוחה).

ג. מצא מערכת s' הנעה בכיוון החיובי של ציר ה- x בה ההתפרקויות מתרחשות באותו הזמן.

ד. מה המרחק בין ההתפרקויות במערכת s'?

4) מיואון מתפרק ליד אלקטרון

מיואון (μ) נוצר ברגע מסוים ונע במהירות $0.7c$ ביחס לקרקע.

המיואון מתפרק לאחר שנע 3 ק"מ ממקום היווצרו.

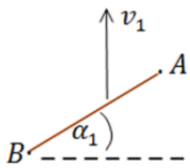
א. כמה זמן חי המיואון במערכת העצמית שלו?

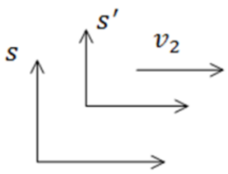
אלקטרון נע במקביל למיואון ובמהירות $0.5c$ ביחס למעבדה.

ב. מהי מהירות המיואון ביחס לאלקטרון?

ג. איזה מרחק נע המיואון ביחס לאלקטרון.

5) זווית של מוט נע

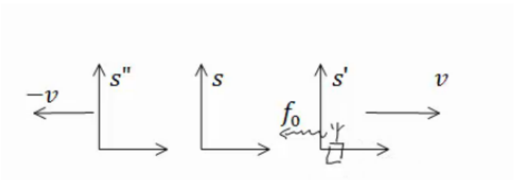




מוט בעל אורך l (לא נתון) נע במהירות v_1 בכיוון ציר ה- y ביחס לצופה הנמצא במעבדה. הצופה במעבדה מודד זווית α_1 של המוט ביחס לציר ה- x.

איזו זווית ימדוד צופה הנע במהירות $v_2\hat{x}$ ביחס למעבדה?

6) תדר יחסי



במערכת s' הנעה במהירות v ביחס למערכת המעבדה S, נמצא משדר רדיו הפולט אותות בתדירות f_0 ?

א. מה תהיה התדירות שתיקלט במעבדה?

ב. מה תהיה התדירות שתיקלט במערכת s'' הנעה במהירות $\vec{v}=-v\hat{x}$ ביחס למעבדה?

תשובות סופיות:

1) $\Delta t = 1.08 \cdot 10^4 \sec$

2) א. $v_x = 0.907c$ ב. $t_1 = 39.62 \mu s$ ג. $x_1 = 10.78\text{km}$

3) א. $v_1 = \frac{h}{2\sqrt{2T}}$, $v_2 = \frac{3h}{4\sqrt{2T}}$ ב. $\tau_1 = T\sqrt{1-\frac{h^2}{8T^2c^2}}$, $\tau_2 = 2T\sqrt{1-\frac{9h^2}{64T^2c^2}}$

ג. $v_0 = \frac{c^2T}{h}$ ד. $d'^2 = \frac{\frac{5h^4}{4} - 3c^2T^2h^2 + c^4T^4}{h^2 - c^2T^2}$

4) א. $\tau = 10^{-5} \sec$ ב. $V_{12} = 0.31c$ ג. $\Delta x_{12} = 0.98\text{km}$

5) $\tan\alpha' = \gamma_2\left(\tan\alpha_1 + \frac{v_1v_2}{c^2}\right)$

6) א. $f_s = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}\, f_0$ ב. $f'' = \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2}\, f_0$

דינמיקה יחסותית:

רקע:

תנע ואנרגיה יחסותיים:

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v}$$

$$E = \gamma mc^2$$

הגודל γ קשור עכשיו למהירות הגוף עבורו נרצה לחשב את התנע ואינו קשור למעבר בין מערכות אינרציאליות שונות.

נוסחאות נוספות:

$$E^2 = |p|^2c^2 + m^2c^4$$

$$|p| = \sqrt{\gamma^2 - 1} \cdot mc$$

אנרגיית מנוחה:

$$E_0 = mc^2$$

אנרגיה קינטית:

$$E_k = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1)$$

עבור חלקיקים מסוימים מסת המנוחה היא אפס (פוטון, ניוטרינו).

$$E = |p|c = \mathrm{h}\nu$$

ν – תדירות

קבוע פלאנק:

$$\mathrm{h} = 6.626 \cdot 10^{-34} j \cdot s$$

טרנספורמציה של התנע והאנרגיה:

$$E' = \gamma_0(E - v_0 p_x)$$

$$p_x' = \gamma_0(p_x - v_0\, E/c^2)$$

$$p_y' = p_y$$

$$p_z' = p_z$$

וקטור תנע אנרגיה:

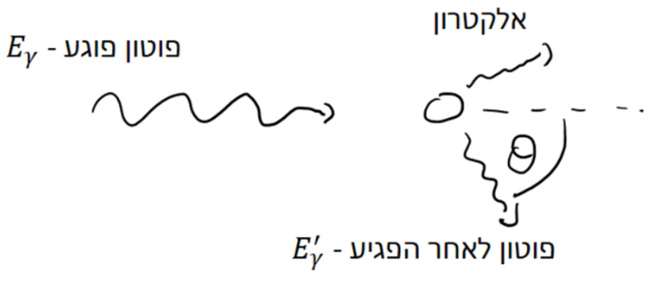
$$\left(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c}\right)$$

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = const$$

- הקבוע זהה בכל מערכות הייחוס.
- הנוסחה נכונה גם עבור מערכת עם יותר מגוף אחד כאשר התנע והאנרגיה הם התנע והאנרגיה של כל המערכת.
- עבור גוף יחיד הקבוע הוא : m^2c^2.

פיזור קומפטון:

פוטון הפוגע באטום הנמצא במנוחה, לאחר הפגיעה נפלט אלקטרון וכיוון התנועה של הפוטון משתנה.



$$\frac{1}{E_\gamma'} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$$

E_γ - אנרגיית הפוטון לפני הפגיעה

E_γ' - אנרגיית הפוטון אחרי הפגיעה

m_e - מסת אלקטרון

θ - זווית התנועה של הפוטון ביחס לכיוון הפגיעה.

יחידת האלקטרון וולט:

$$1\ eV = 1.602\,176\,462 \times 10^{-19}\ J$$

Object	Mass (kg)	Energy Equivalent	
Electron	$\approx 9.11 \times 10^{-31}$	$\approx 8.19 \times 10^{-14}$ J	($\approx$ 511 keV)
Proton	$\approx 1.67 \times 10^{-27}$	$\approx 1.50 \times 10^{-10}$ J	($\approx$ 938 MeV)
Uranium atom	$\approx 3.95 \times 10^{-25}$	$\approx 3.55 \times 10^{-8}$ J	($\approx$ 225 GeV)

ניתן גם לרשום את היחידות של התנע של גופים כ - $\frac{eV}{c}$.

שאלות:

1) הגעת נויטרון ממרחקים

מצא את האנרגיה הדרושה לנויטרון להגיע לכדור הארץ ממרחק של 5 שנות אור בהינתן שזמן החיים של נויטרון הוא 881 שניות והמסה שלו היא: $M_n = 940\text{MeV}\frac{}{c^2}$.

2) התנגשות בסיסית

חלקיק בעל מסה m מתנגש בחלקיק בעל מסה $3m$.

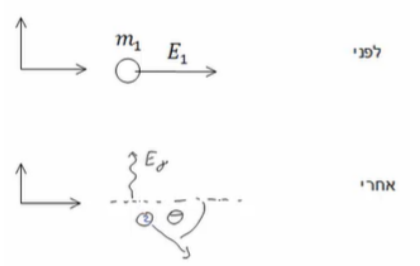
לחלקיק הראשון אנרגיה כוללת לפני ההתנגשות $5mc^2$ ונתון כי התנע הכולל שלהם במערכת המעבדה הוא אפס. כתוצאה מההתנגשות שני החלקיקים מושמדים ונוצר חלקיק חדש הנמצא במנוחה.

א. מצאו את האנרגיה הקינטית של החלקיק הראשון.

ב. מצאו את פקטור לורנץ של החלקיקים לפני ההתנגשות ואת האנרגיה הקינטית של החלקיק השני.

ג. מצאו את מסת החלקיק הנוצר לאחר ההתנגשות.

3) **חלקיק מתפרק לפוטון וחלקיק נוסף**



חלקיק בעל אנרגיה כוללת E_1 ומסת מנוחה m_1
נע במעבדה בכיוון החיובי של ציר ה- x.
ברגע מסוים מתפרק החלקיק לפוטון ולחלקיק נוסף.
אנרגיית הפוטון נתונה E_y וידוע כי הפוטון נע בציר ה- y, בכיוון החיובי.

א. מהו התנע של החלקיק הראשון לפני ההתפרקות?
ב. מהי הזווית של התנע של חלקיק 2 ביחס לציר ה- x?
ג. מצא מערכת ייחוס חדשה S' שבה הפוטון יפלט בכיוון נגדי לכיוון תנועתו של חלקיק מס' 2.
מה מהירותה של מערכת זו ביחס למערכת המעבדה?

4) **פוטון פוגע בפרוטון ויוצר פיון**

פוטון פוגע בפרוטון הנמצא במנוחה במערכת המעבדה.
נתונות מסת הפרוטון והפיון M_p, M_π.
מהי האנרגיה המינימלית הדרושה לפוטון על מנת שלאחר ההתנגשות ייווצרו פרוטון ופיון (π)?

5) **דוגמה - חישוב תנע ואנרגיה קינטית של אלקטרון ופרוטון**

חשבו את התנע והאנרגיה הקינטית של פרוטון ואלקטרון בעלי אנרגיה של 1GeV במערכת המעבדה.

6) **דוגמה - גמה וביטה של אלקטרון**

מסת האלקטרון היא: $9.10938188 \times 10^{-31}$ kg ומהירות האור היא: 299792458 m/sec.
מצאו בדיוק של 6 ספרות את γ ו-β של אלקטרון שהאנרגיה הקינטית שלו היא: $K = 100.000\text{MeV}$ במערכת המעבדה.

7) **בטה של מיואונים מתפרקים**

מסת מיואון היא פי 207 ממסת האלקטרון.
זמן מחצית החיים הממוצע של מיואון הוא $2.20\mu s$.
מיואונים נעים ביחס למעבדה בניסוי כלשהו.
זמן החיים הנמדד של המיואונים ביחס למערכת המעבדה הוא: $6.90\mu s$.
מהם β, התנע והאנרגיה הקינטית של המיואונים ביחידות $\frac{\text{MeV}}{\text{c}}$?

תשובות סופיות:

1) $E_n = 1.69\cdot 10^8\,\text{MeV}$

2) א. $E_{k_1=4mc^2}$ ב. $E_{k_2} = 3mc\left(\sqrt{\frac{11}{3}}-1\right)$, $\gamma_1 = 5$, $\gamma_2 = \sqrt{\frac{11}{3}}$ ג. $m_3 = 6.91m$

3) א. $\vec{p}_1 = \sqrt{\left(\frac{E_1}{c}\right)^2 - m_1^{\,2}c^2}\cdot\hat{x}$ ב. $\tan\theta = -\frac{E_\gamma}{\sqrt{E_1^{\,2} - m_1^{\,2}c^4}}$

ג. $v_0 = \sqrt{1-\left(\frac{m_1c^2}{E_1}\right)^2}\cdot c$

4) $E_\gamma = \frac{1}{2m_p}\left(m_\pi^{\,2} + 2m_\pi m_p\right)c^2$

5) אלקטרון: $K = 0.999\text{GeV}$, $P=1\frac{\text{GeV}}{c}$

פרוטון: $K = 0.062\text{GeV}$, $P=0.347\frac{\text{GeV}}{c}$

6) $\gamma = 196.695$, $\beta = 0.999987$

7) $K = 226\text{MeV}$, $P = 314\frac{\text{MeV}}{c}$, $\beta = 0.898$

תרגילים לדינמיקה יחסותית:

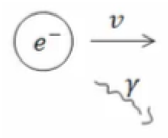
שאלות:

1) חלקיק מתפרק לשני חלקיקים

חלקיק בעל מסה m הנמצא במנוחה מתפרק לשני חלקיקים בעלי מסות מנוחה m_2 , m_1.

מה יהיו האנרגיה והתנע של החלקיקים שנוצרו? (כל המסות נתונות).

2) אלקטרון חופשי פולט פוטון



הראו כי אלקטרון חופשי הנע בואקום אינו יכול לפלוט פוטון בודד.

3) התנגשות חלקיקים זהים ויצירת חלקיקים

חלקיק בעל מסת מנוחה m פוגע בחלקיק זהה לו הנמצא במנוחה.

כתוצאה מההתנגשות נוצרים שני חלקיקים בעלי מסות מנוחה m_1, ו- m_2.

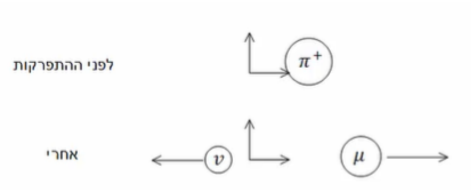
מצא את אנרגיית הסף ליצירת ריאקציה זו. (הנח ש: $(m_1+m_2)>2m$).

4) פיון מתפרק

פיון (π^+) מתפרק למיואון חיובי ($M_\mu=160Me\frac{V}{c^2}$)

וניטרינו חסר מסה.

מצא את מסת המנוחה של הפיון אם למיואון אנרגיה קינטית של $5MeV$.



5) פוטון מתנגש אלסטית באלקטרון

אלקטרון נע במהירות v ומתנגש בפוטון בעל אנרגיה E_γ הנע לקראתו.

מצא את הערך של v אם ידוע כי הפוטון מוחזר באותה אנרגיה בה פגע.

הנח כי מסת האלקטרון ידועה.

תשובות סופיות:

1) $$E_1 = m_1c^2\gamma_1 = \frac{c^2}{2m}\left(m^2 + m_1^2 - m_2^2\right)\ ,\ p_1 = c\sqrt{\frac{1}{2m}\left(m^2 + m_1^2 - m_2^2\right)^2 - 1}\ ,$$

$$E_2 = m_2c^2\gamma_2 = \frac{c^2}{2m}\left(m^2 + m_2^2 - m_1^2\right)\ ,\ p_2 = m_2c\sqrt{\gamma_2^2 - 1} = c\sqrt{\frac{1}{2m}\left(m^2 + m_2^2 - m_1^2\right)^2 - 1}$$

2) שאלת הוכחה.

3) $$E_{min} = \frac{1}{2m}c^2\left(\left(m_1 + m_2\right)^2 - 2m^2\right)$$

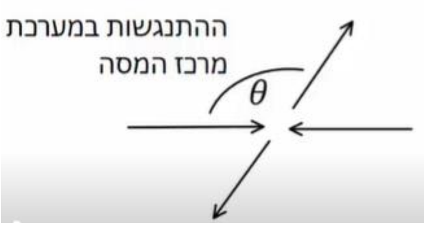
4) $$M_\pi = 144\frac{MeV}{c^2}$$

5) $$v = c\left|1 - \left(\left(\frac{E_\gamma}{m_e c^2}\right)^2 + 1\right)^{-1}\right|^{\frac{1}{2}}$$

תרגילים נוספים:

שאלות:

1) **פוטון מתנגש ומעבר למרכז מסה**



פוטון עם אנרגיה E_0 מתנגש אלסטית עם חלקיק בעל מסה m הנמצא במנוחה (במערכת המעבדה).

א. מצא את מהירות מערכת מרכז המסה של המערכת פוטון פלוס חלקיק.

ב. מצא את התנע והאנרגיה של החלקיק והפוטון לפני ההתנגשות במערכת מרכז המסה.
מצא את התנע והאנרגיה של הפוטון והחלקיק אחרי ההתנגשות אם ידוע שהפוטון מפוזר בזווית θ ביחס לכיוון בפגיעה במערכת מרכז המסה (ראה איור).

ג. מהם האנרגיה והערך המוחלט של התנע של הפוטון והחלקיק לאחר ההתנגשות במערכת המעבדה?

ד. מצא את הזווית θ עבורה האנרגיה של הפוטון במערכת המעבדה תהיה מינימלית.

2) **שאלה 1**

נתונים שני גופים הנעים בניצב זה לזה. ידוע כי מסת הגופים זהה ושווה ל- M, וכן כי התנעים של הגופים הם: p_1 , p_2 .

ברגע מסוים, הגופים מתנגשים ומופיעים ארבעה גופים חדשים.

מסות הגופים החדשים שנוצרו הן: m , 2m , 3m , 4m .

מהו m המקסימלי האפשרי?

נתון: $p_1 = 6Mc$, $p_2 = 17Mc$.

3) **שאלה 2**

נתונים שני חלקיקים בעלי מסה m, וכן נתונות האנרגיות שלהם E_1 , E_2 .

החלקיקים נעים זה אל עבר זה, ומתנגשים.

חשבו את מסת החלקיק M הנוצר כתוצאה מהתנגשות החלקיקים.

נתון: $E_1 = 4mc^2$, $E_2 = 7mc^2$.

4) **שאלה 3**
שתי חלליות יוצאות מאותה נקודה, בכיוון ניצב אחת לשנייה.
חללית א' טסה במהירות v_1 , וחללית ב' טסה במהירות v_2 .
חשבו את וקטור המהירות של חללית ב' ביחס לחללית א'.
נתון : $\mathrm{v}_1 = 0.8\mathrm{c}(+\hat{x})\ ,\ \mathrm{v}_2 = 0.9\mathrm{c}(-\hat{y})$

5) **שאלה 4**
חלקיקים 1,2 נוצרים במעבדה ונמצאים במנוחה.
ידוע לגבי זמני החיים שלהם כי : $t_2 = 0.75t_1$ (במצב מנוחה חלקיק 2 נעלם לפני חלקיק 1).
מהי המהירות אליה יש להאיץ את חלקיק 2, כדי שלא ידעך לפני חלקיק 1?

6) **זריקה אופקית יחסותית**
מסלולו של חלקיק במערכת S נתון ע"י : $y = \frac{1}{2}\mathrm{a}t^2\ ,\ x = \mathrm{v}t$ כאשר $\mathrm{v}\ ,\ \mathrm{a}$ קבועים ידועים.
מצא את תאוצת החלקיק במערכת S' הנעה במהירות v בכיוון ציר ה-x ביחס ל-S .
תאר את צורת המסלול בשתי המערכות (v אינה זניחה ביחס למהירות האור).

תשובות סופיות:

1) א. $v_{c.m}=\frac{E_0\cdot c}{mc^2+E_0}$

ב. פוטון לפני ההתנגשות: $P'_{pH}=\frac{E_0}{c}\sqrt{\frac{mc^2}{2E_0+mc^2}}$, $E'_{pH}=E_0\sqrt{\frac{mc^2}{2E_0+mc^2}}$

חלקיק לפני ההתנגשות: $P'_{m_x}=\frac{-mE_0c}{\sqrt{m^2c^4+2E_0mc^2}}$, $E'_m=mc^2\left(\frac{mc^2+E_0}{\sqrt{m^2c^4+2E_0mc^2}}\right)$

פוטון אחרי ההתנגשות: אותו דבר כמו לפני ההתנגשות.

חלקיק אחרי ההתנגשות: אותו דבר כמו לפני ההתנגשות.

כיוון התנע: $\vec{P}_m=-\vec{P}_{pH}=(P\cos\theta,P\sin\theta,0)$, $\vec{P}_{pH}=(P(-\cos\theta),P\sin(\theta),0)$

ג. $|P_m|=\sqrt{\left(\frac{E_m}{c}\right)^2-m^2c^2}$, $E'_m=mc^2\left(\frac{mc^2+E_0}{\sqrt{m^2c^4+2E_0mc^2}}\right)$

ד. $\theta=\frac{\pi}{2}$

2) $m_{max}\approx 1.45M$

3) $M\approx\sqrt{112}m$

4) $\vec{v}'=(-0.8c,-0.54c,0)$

5) $v\approx 0.66c$

6) $x'=0\ ,\ y'=\frac{1}{2}a\gamma_0^2t'^2$

כוחות ודינמיקה יחסותית:

רקע:

$$\Sigma\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{dt}}=m\gamma^{3}\vec{a}_{||}+m\gamma\vec{a}_{\perp}$$

$\vec{a}_{||}$ - רכיב התאוצה שמקביל למהירות

$\vec{a}_{\perp}$ - רכיב התאוצה שמאונך למהירות

$$a_{||}=\dot{v}$$

טרנספורמציה של הכוחות:

$$F_x'=F_x-\frac{v_0\left(F_yv_y+F_zv_z\right)}{c^2-v_0v_x}$$

$$F_y'=\frac{F_y}{\gamma_0\left(1-\frac{v_0v_x}{c^2}\right)}$$

$$F_z'=\frac{F_z}{\gamma_0\left(1-\frac{v_0v_x}{c^2}\right)}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$F_x=F_x'+\frac{v_0\left(F_y'v_y'+F_z'v_z'\right)}{c^2+v_0v_x'}$$

$$F_y=\frac{F_y'}{\gamma_0\left(1+\frac{v_0v_x'}{c^2}\right)}$$

$$F_z=\frac{F_z'}{\gamma_0\left(1+\frac{v_0v_x'}{c^2}\right)}$$

שאלות:

1) דוגמה-כוח קבוע בזמן

כוח קבוע F פועל על חלקיק בעל מסה m הנמצא במנוחה.
מצא את מהירות החלקיק כתלות בזמן.

2) כוח קבוע

כוח קבוע F פועל על חלקיק יחסותי בעל מסה m המתחיל תנועתו ממנוחה.

א. כתוב את משוואת התנועה של החלקיק.

ב. מצא את מהירות החלקיק כתלות בזמן.

ג. מצא את מיקום החלקיק כתלות בזמן.

ד. רשום תנאי למהירויות נמוכות והראה שהביטוי שקיבלת למהירות ולמיקום מתכנס לפתרון הקלאסי במהירויות נמוכות.

ה. צייר גרף של המהירות היחסותית והקלאסית כתלות בזמן עד זמן $t=\frac{\text{mc}}{\text{F}}$.

ו. צייר גרף של המיקום היחסותי והקלאסי כתלות בזמן עד זמן $t=\frac{\text{mc}}{\text{F}}$.

3) כוח גרר מתכונתי לתנע היחסותי

כוח קבוע F פועל על מסה m המתחילה תנועתה במערכת המעבדה.
בנוסף פועל על המסה כוח גרר המתכונתי לתנע היחסותי $f=-\lambda p$ כאשר λ קבוע נתון.

א. רשום משוואת תנועה לתנע היחסותי.

ב. פתור את המשוואה ומצא מהו קבוע הזמן האופייני להתייצבות התנע על ערך קבוע.

ג. מצא את מהירות הגוף כתלות בזמן.

ד. מהי המהירות בגבול של זמנים קצרים וזמנים ארוכים ביחס לקבוע הזמן שמצאת בסעיף ב'? להזכירך הפתרון של המקרה הקלאסי בו פועל כוח קבוע F על גוף וכוח גרר $f=-\lambda p$ הוא: $\text{v}(t)=\frac{\text{F}}{\lambda \text{m}}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$.

תשובות סופיות:

1) $$v(t)=\frac{\frac{F\cdot t}{m}}{\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2}}$$

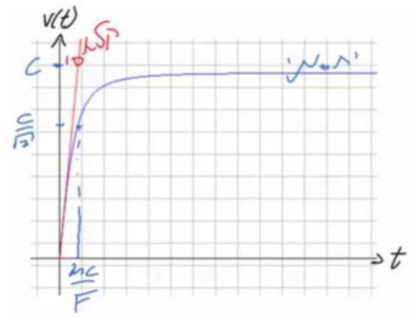
2) א. $F=m\gamma^3\dot{v}$

ב. $$v=\frac{\frac{Ft}{m}}{\left(1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

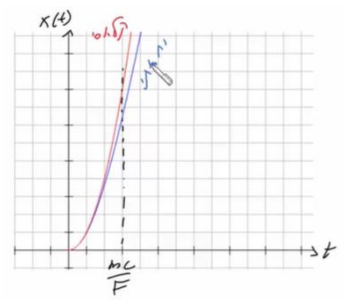
ג. $$x(t)=\frac{mc^2}{F}\left(\left(1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)$$

ד. ראה סרטון.

ה.



ו.



3) א. $F-\lambda p=\frac{dp}{dt}$

ב. $p(t)=\frac{F}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$, $\tau=\frac{1}{\lambda}$

ג. $$v(t)=\frac{\frac{F}{\lambda m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)}{\left(1+\left(\frac{F}{\lambda mc}\left(1-e^{-\lambda t}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ד. זמן קצר: $v(t)=\frac{F}{\lambda m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)\approx v(t)$,

זמן ארוך: $$\underset{t>>\frac{1}{\lambda}}{v(t)}=\frac{F}{\lambda m}\neq \underset{t>>\frac{1}{\lambda}}{v(t)}\approx\frac{\frac{F}{\lambda m}}{\left(1+\left(\frac{F}{\lambda mc}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$