# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

# תוכן העניינים

1. מבוא לאלגברה ..... 1
2. משוואות אלגבריות ..... 47
3. אי שוויונים אלגבריים ..... 67
4. בעיות מילוליות ..... 76
5. מבוא לגיאומטריה של המישור (גיאומטריה אוקלידית) ..... 101
6. גיאומטריה אוקלידית - משולשים ..... (ללא ספר)
7. גיאומטריה אוקלידית - מרובעים ..... (ללא ספר)
8. גיאומטריה אוקלידית- שטחים והיקפים ..... (ללא ספר)
9. גיאומטריה אוקלידית - המעגל ..... (ללא ספר)
10. גיאומטריה אוקלידית - פרופורציה ודמיון ..... (ללא ספר)
11. גיאומטריה אוקלידית - שאלות חזרה ..... (ללא ספר)
12. גיאומטריה אנליטית - הישר ..... 107
13. גיאומטריה אנליטית - המעגל ..... 119
14. טריגונומטריה א - טריגונומטריה במשולש ישר זווית ..... (ללא ספר)
15. טריגונומטריה א - זהויות טריגונומטריות ..... (ללא ספר)
16. טריגונומטריה א - טריגונומטריה במישור ..... (ללא ספר)
17. טריגונומטריה במרחב - התיבה והקובייה ..... 126
18. טריגונומטריה במרחב - המנסרה ..... 139
19. טריגונומטריה במרחב - הפירמידה ..... 144
20. חקירה פרמטרית - חקירת משוואה ממעלה ראשונה ..... 159
21. חקירה פרמטרית - חקירת משוואה ממעלה שנייה ..... 171
22. חקירה פרמטרית - נוסחאות וייטה (להעשרה) ..... 185
23. סדרות ..... (ללא ספר)

# תוכן העניינים


24. חוקי החזקות והשורשים ..... 187
25. משוואות ואי-שוויונים מעריכיים ..... 197
26. חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים ..... 206
27. בעיות גדילה ודעיכה ..... 222
28. פונקציות - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות ..... (ללא ספר)
29. פונקציות - תכונות מתקדמות ..... 235
30. חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים ..... (ללא ספר)
31. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום ..... 248
32. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש ..... 261
33. חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון ..... (ללא ספר)
34. חשבון דיפרנציאלי של פונקציות מעריכיות ..... (ללא ספר)
35. חשבון דיפרנציאלי של פונקציות לוגריתמיות ..... (ללא ספר)
36. טריגונומטריה ב- משוואות טריגונומטריות ..... (ללא ספר)
37. חשבון דיפרנציאלי של פונקציות טריגונומטריות ..... (ללא ספר)
38. חשבון אינטגרלי ..... (ללא ספר)
39. חשבון אינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, מעריכיות ולוגריתמיות. ..... (ללא ספר)
40. הסתברות קלאסית ..... 299
41. אינדוקציה מתמטית - נושא בחירה במבחן הסופי ..... 311
42. סימן הסכימה (סיגמה) - נושא בחירה במבחן הסופי ..... 325
43. הבינום של ניוטון - נושא בחירה במבחן הסופי ..... 328
44. מספרים מרוכבים - נושא בחירה במבחן הסופי ..... 332
45. גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה - נושא בחירה במבחן הסופי ..... 348
46. גיאומטריה אנליטית - ההיפרבולה - נושא בחירה במבחן הסופי ..... 358

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 1 - מבוא לאלגברה

### תוכן העניינים


1. מספרים מכוונים ..... 1
2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים ..... 5
3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים ..... 7
4. שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים ..... 8
5. כפל וחילוק שברים ..... 14
6. חיבור וחיסור שברים ..... 16
7. בעיות יסודיות באחוזים ..... 20
8. חזרה על תבניות מספר ..... 22
9. כינוס איברים ..... 24
10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים ..... 26
11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר ..... 28
12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים ..... 30
13. פירוק הטרינום ..... 33
14. שברים אלגברים ..... 35
15. כפל וחילוק של שברים אלגברים ..... 39
16. חיבור וחיסור של שברים אלגברים ..... 41
17. שברים כפולים ..... 45

# מספרים מכוונים:

## סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2- ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

**כללים:**

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שוני סימן - התוצאה תהיה שלילית.

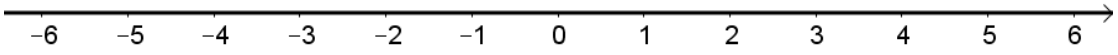
**הערה:**

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

## שאלות:

**1)** סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-2\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ -5\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ 4\ ,\ -3\frac{1}{2}$$




**2)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3+2$

ב. $-3-2$

ג. $3-2$

ד. $-3+2$

ה. $-1-4$

ו. $7+10$

ז. $-6+5$

ח. $-7+3$

**3)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $5+7-23+1$

ב. $5-8-12+17$

ג. $3-14+2+6$

ד. $-4-11+2+9$

ה. $6-21+3-7$

ו. $-7-13+5-3$

**4)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $4\cdot 9$

ב. $4\cdot(-7)$

ג. $(-6)\cdot(-5)$

ד. $(-5)\cdot(-3)$

ה. $(-2)\cdot 8$

ו. $(-8)\cdot 5$

ז. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)$

ח. $2\cdot 3\cdot 3$

ט. $(-2)\cdot 3\cdot(-3)$

י. $(-2)\cdot(-3)\cdot 3$

יא. $2\cdot 3\cdot(-3)$

יב. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)$

יג. $(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

יד. $1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

**5)** מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה:

א. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot(-4)\cdot(-2)$

ב. $(-5)\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ג. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ד. $5\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

**6)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-5):(-25)$

ב. $(-30):3$

ג. $40:(-10)$

ד. $(-32):(-4)$

ה. $(-6):18$

ו. $4:(-16)$

**7)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{-60}{12}$

ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

**8)** מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות:

א. $0:5$

ב. $(-2)\cdot 0$

ג. $0\cdot(-3)\cdot 4$

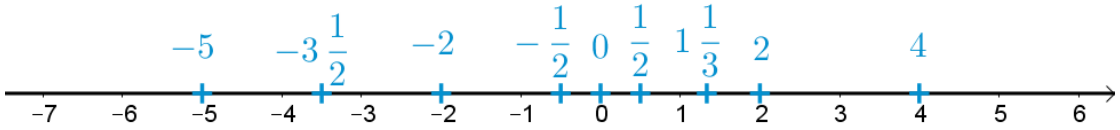
ד. $6:0$

ה. $0+4$

ו. $0-4$

## תשובות סופיות:

**1)** להלן מערכת הצירים:




**2)** א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5
ו. 17 ז. -1 ח. -4.

**3)** א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18.

**4)** א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16
ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18
יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16.

**5)** א. + ב. + ג. - ד. -.

**6)** א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$.

**7)** א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4.

**8)** א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4.

# חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

כאשר $a$ נקרא הבסיס ו- $n$ נקראת החזקה.

**הערות:**

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

**הגדרה:**

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר $a$ נקרא הבסיס ו- $n$ נקרא סדר השורש.

**הערות:**

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3^2$
ב. $3^3$
ג. $(-3)^3$
ד. $(-2)^3$
ה. $4^3$
ו. $3^4$
ז. $(-5)^3$
ח. $10^4$
ט. $-(-3)^4$
י. $-5^4$
יא. $-4^3$
יב. $-(-2)^6$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt[3]{-27}$
ב. $\sqrt[4]{625}$
ג. $\sqrt[4]{-16}$
ד. $\sqrt[5]{-32}$
ה. $-\sqrt[4]{81}$
ו. $-\sqrt[3]{1000}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. 9 ב. 27 ג. -27 ד. -8 ה. 64 ו. 81
ז. -125 ח. 10000 ט. -81 י. -625 יא. -64 יב. -64

**2)** א. -3 ב. 5 ג. לא מוגדר ד. -2 ה. -3 ו. -10

# סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

## סיכום כללי:

**סדר פעולות חשבון:**

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

## שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

**1)** $\sqrt{81}+3\cdot 2^3-40:8$

**2)** $(-3)^2:9-2\cdot\left(-4^2\right)$

**3)** $\sqrt{144}-20:4+3\cdot(-2)^2$

**4)** $3+4\cdot\left[-3+4\cdot(-2)\right]+\sqrt{10+6}$

**5)** $(-3)^4:(-9)-5\cdot(-2)^3$

**6)** $-\sqrt{9}+5^2:(-4-1)-24:12\cdot 3$

**7)** $-2^5:(-8)+4^2-3\cdot 5$

**8)** $\sqrt[3]{-27}+4\cdot 3^2-2\cdot 3^3$

**9)** $\left[6\cdot(-1)^4-10\cdot(-1)^3\right]\cdot(-1)^5$

**10)** $\left(8-\sqrt[3]{64}\right)\cdot\left(2\cdot(-4)-\sqrt[5]{243}\right)$

**11)** $\dfrac{3^2\cdot(8-2\cdot 3)^3}{\left(5^2\cdot 3-72\right)\cdot(-4)}+2\cdot\left\{15-20:(4+3\cdot 2)\right\}$

## תשובות סופיות:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1)** 28 | **2)** 33 | **3)** 19 | **4)** -37 |
| **5)** 31 | **6)** -14 | **7)** 5 | **8)** -21 |
| **9)** -16 | **10)** -44 | **11)** 20 | |

# שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

## סיכום כללי:

**הגדרה כללית:**

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

**ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:**

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

**שבר עשרוני:**

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ...
שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{X\,X}_{\text{שלמים}}.\underbrace{Y\,Y\,Y}_{\text{שברים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

**אחוזים - הגדרה:**

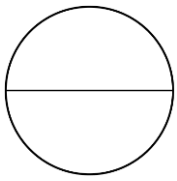
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45% , והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

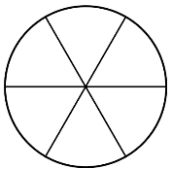
## שאלות:

**1)** צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

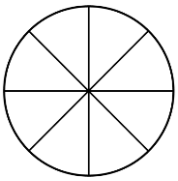
א. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגול



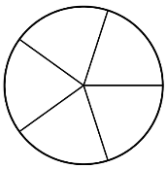
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגול



ג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

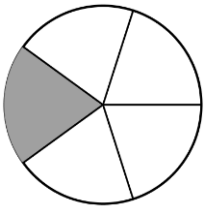


ד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגול

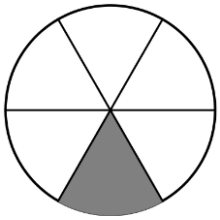


**2)** כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

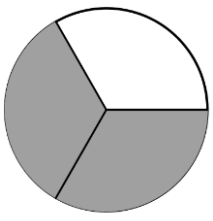
א. שבר:



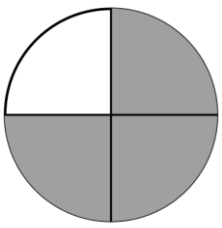
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



**3)** הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

**4)** צמצם את השברים הבאים ככל הניתן:

א. $\frac{25}{30}$ ב. $\frac{10}{30}$ ג. $\frac{6}{24}$ ד. $\frac{4}{20}$

ה. $\frac{35}{56}$ ו. $\frac{24}{42}$ ז. $\frac{36}{48}$ ח. $\frac{33}{121}$

**5)** המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים:

א. $-\frac{20}{3}$ ב. $\frac{19}{4}$ ג. $\frac{12}{5}$ ד. $\frac{22}{5}$

ה. $-\frac{34}{6}$ ו. $-\frac{50}{7}$ ז. $\frac{47}{8}$ ח. $\frac{60}{9}$

**6)** המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים:

א. $1\frac{2}{3}$ ב. $3\frac{5}{6}$ ג. $4\frac{1}{2}$ ד. $6\frac{1}{4}$

ה. $11\frac{3}{4}$ ו. $-2\frac{5}{8}$ ז. $-6\frac{2}{7}$ ח. $12\frac{7}{9}$

**7)** קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $\frac{3}{10}$ או $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{8}$ או $\frac{7}{6}$

ג. $\frac{2}{3}$ או $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{5}{18}$ או $\frac{7}{12}$

**8)** המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים:

א. 0.7 ב. 0.07 ג. 0.007 ד. 0.34

ה. 0.304 ו. 0.65 ז. 1.2 ח. 1.02

ט. 1.42 י. 3.5 יא. 6.03 יב. 5.125

**9)** המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$ ב. $\frac{3}{100}$ ג. $\frac{3}{1000}$ ד. $\frac{23}{1000}$

ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{3}{4}$ ז. $\frac{2}{5}$ ח. $\frac{4}{25}$

ט. $\frac{7}{50}$ י. $\frac{3}{20}$ יא. $\frac{7}{8}$ יב. $\frac{9}{16}$

יג. $9\frac{1}{10}$ יד. $3\frac{1}{5}$ טו. $4\frac{7}{8}$ טז. $-4\frac{1}{16}$

**10)** כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית
(היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$ ב. $\frac{5}{6}$ ג. $\frac{3}{7}$ ד. $\frac{2}{11}$

**11)** המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25% ב. 32% ג. 64% ד. 80%

ה. 120% ו. 5% ז. 300% ח. 150%

**12)** המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{4}{5}$ ד. $\frac{7}{20}$

ה. $\frac{11}{40}$ ו. $\frac{70}{125}$ ז. $\frac{5}{6}$ ח. $\frac{4}{9}$

## תשובות סופיות:

**1)** תשובה מודגמת בסרטון.

**2)** א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$

**3)** א. $\frac{40}{80},\frac{18}{36},\frac{4}{8}$ ב. $\frac{180}{300},\frac{75}{125},\frac{30}{50}$ ג. $\frac{440}{700},\frac{160}{256},\frac{80}{128}$

**4)** א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$
ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$

**5)** א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$
ז. $5\frac{7}{8}$ ח. $6\frac{2}{3}$

**6)** א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$
ז. $-\frac{44}{7}$ ח. $\frac{115}{9}$

**7)** א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$

**8)** א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$
ז. $1\frac{1}{5}$ ח. $1\frac{1}{50}$ ט. $1\frac{21}{50}$ י. $3\frac{1}{2}$ יא. $6\frac{3}{100}$ יב. $5\frac{1}{8}$

**9)** א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75
ז. 0.4 ח. 0.16 ט. 0.14 י. 0.15 יא. 0.875
יב. 0.5625 יג. 9.1 יד. 3.2 טו. 4.875 טז. -4.0625

**10)** א. $0.\overline{6}$ ב. $0.8\overline{3}$ ג. 0.428 ד. $0.\overline{18}$

**11)** א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$
ז. 3 ח. $1\frac{1}{2}$

**12)** א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

# כפל וחילוק שברים:

## סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$ ב. $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$ ג. $\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{10}$

ד. $3\cdot\frac{4}{5}$ ה. $6\cdot\frac{2}{3}$ ו. $\frac{12}{25}\cdot 5$

ז. $1\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{4}$ ח. $3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{2}{5}$ ט. $3\frac{3}{7}\cdot 2\frac{2}{5}$

י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ יא. $\frac{4}{5^3}$ יב. $\frac{4^3}{5}$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5}:\frac{4}{9}$ ב. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ ג. $\frac{3}{25}:\frac{7}{10}$

ד. $8:\frac{2}{9}$ ה. $10:\frac{2}{3}$ ו. $\frac{5}{6}:3$

ז. $\frac{2}{5}:5$ ח. $3\frac{3}{4}:5\frac{5}{8}$ ט. $2\frac{2}{5}:1\frac{3}{15}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. $4$ ו. $2\frac{2}{5}$

ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$

**2)** א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. $36$ ה. $15$ ו. $\frac{5}{18}$

ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. $2$

# חיבור וחיסור שברים:

## סיכום כללי:

**כפולה משותפת מינימלית:**

בהינתן זוג מספרים $a$ ו- $b$, המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

**הערות:**

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

**כללי החיבור והחיסור של שברים:**

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.

  דוגמא: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$ , $\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2-3}{7}=\frac{-1}{7}$.

- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.

  דוגמא: $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{3-10}{12}=-\frac{7}{12}$ , $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$.

- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.

  דוגמא: $3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$.

  חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.

  דוגמא: $3-\frac{1}{4}=2\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$.

  דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

דוגמא: $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{6}=\frac{17}{5}+\frac{13}{6}=\frac{17\cdot 6}{30}+\frac{13\cdot 5}{30}=\frac{102+65}{30}=\frac{167}{30}=5\frac{17}{30}$.

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

דוגמא: $2\frac{3}{4}-5\frac{1}{3}=(2-5)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=-3+\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=-3+\frac{5}{12}=-2\frac{7}{12}$.

## שאלות:

**1)** מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3 ב. 2 ו-4 ג. 3 ו-5 ד. 6 ו-10

ה. 4 ו-10 ו. 4 ו-6 ז. 3, 5 ו-10 ח. 2, 3 ו-8

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$ ב. $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$

ג. $\frac{4}{13}+\frac{9}{13}$ ד. $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$

ה. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$ ו. $\frac{8}{9}-\frac{7}{9}$

ז. $\frac{2}{12}-\frac{5}{12}$ ח. $\frac{2}{5}-\frac{6}{5}$

ט. $\frac{2}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}$ י. $\frac{7}{15}+\frac{8}{15}-\frac{6}{15}$

**3)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6}-\frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6}-\frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+\frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{3}{5}$

**4)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2+\frac{5}{6}$

ב. $2-\frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3}+4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8}-6\frac{1}{2}$

ז. $2+\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+\frac{8}{20}$

**5)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14}:\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11}\cdot 2\frac{3}{4}-6:\frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5}:\frac{9}{10}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{4}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. 6 ב. 4 ג. 15 ד. 30 ה. 20 ו. 12
ז. 30 ח. 24

**2)** א. $\frac{4}{5}$ ב. $\frac{7}{9}$ ג. 1 ד. $1\frac{3}{4}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{1}{9}$
ז. $-\frac{1}{4}$ ח. $-\frac{4}{5}$ ט. $1\frac{5}{8}$ י. $\frac{3}{5}$

**3)** א. $1\frac{5}{6}$ ב. $\frac{7}{10}$ ג. $\frac{7}{12}$ ד. $-\frac{1}{8}$ ה. 5 ו. $3\frac{5}{6}$
ז. $\frac{19}{21}$ ח. $-\frac{1}{10}$

**4)** א. $2\frac{5}{6}$ ב. $1\frac{1}{6}$ ג. $3\frac{1}{12}$ ד. $1\frac{5}{12}$ ה. $7\frac{11}{12}$ ו. $-\frac{5}{8}$
ז. $2\frac{13}{18}$ ח. $-\frac{1}{20}$

**5)** א. $2\frac{11}{24}$ ב. $1\frac{1}{10}$ ג. $-13\frac{3}{4}$ ד. $2\frac{5}{6}$ ה. $3\frac{5}{18}$

# בעיות יסודיות באחוזים:

## סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $\frac{40}{100}\cdot 120 = 48$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48**.

## שאלות:

**1)** בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
א. כמה בנות בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

**2)** בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
א. כמה תלמידים בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

**3)** מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
א. מהו מחירו בסוף העונה?
ב. מה גודל ההנחה?

**4)** מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
א. מה מחירו הסופי?
ב. מה גודל ההתייקרות?

**5)** מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

**6)** מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

**7)** ענה על השאלות הבאות:

א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.
מה אחוז הבנים בקהל?

ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.
מה אחוז הבנות בכיתה?

ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

## תשובות סופיות:

**1)** א. 18 בנות. ב. 12 בנים.

**2)** א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.

**3)** א. 240 ₪ ב. 60 ₪

**4)** א. 540 ₪ ב. 40 ₪

**5)** 4.9755 ₪

**6)** 400 ₪

**7)** א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

# חזרה על תבניות מספר:

## סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).
ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של $x$ פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3\cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה-$x$ הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$

ב. $x^2+3x$ כאשר $x=2$

ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$

ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$

ה. $x^3+1$ כאשר $x=-2$

ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$

ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$

ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

**2)** חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה-$x$ הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$.

ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$.

**3)** הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

א. $a^2+2ab+b^2$ עבור: $a=3\ ,\ b=-5$.

ב. $(x-3)^2+3x^2b$ עבור: $x=5\ ,\ b=-1$.

ג. $-x^3-2xy+y^4$ עבור: $x=-2\ ,\ y=-1$.

ד. $\frac{(a-2c)^4}{a}-a^2$ עבור: $a=2\ ,\ c=-2$.

ה. $\frac{4a^2-3b}{c}$ עבור: $a=-1\ ,\ b=2\ ,\ c=-4$.

ו. $\sqrt{c-3a}$ עבור: $a=-1\ ,\ c=13$ ועבור: $a=\frac{1}{3}\ ,\ c=82$.

ז. $\frac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ עבור: $m=3\ ,\ q=48\ ,\ p=-5$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 11 ב. 10 ג. -12 ד. -65 ה. -7 ו. 5
ז. -10 ח. 45

**2)** א. $\frac{10}{27}$ ב. $5\frac{22}{27}$

**3)** א. 4 ב. -71 ג. 5 ד. 644 ה. $\frac{1}{2}$
ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שניה: 9 ז. -37

# כינוס איברים:

## סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x+6x-5x=(3+6-5)x=4x$.

איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.

כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים $x$ ו- $x^2$ הם שונים.

## שאלות:

כנס איברים דומים:

**1)** $5x+7x-4x$

**2)** $9x^2-2x^2-3x^2-2x^2$

**3)** $-10xy+15xy+xy-2yx$

**4)** $x^2y-3yx^2+x^2y$

**5)** $8a^2+10a-5a^2-11a+a^2$

**6)** $2x^2-3m^2-x^2+3m^2$

**7)** $3xy+y-30y+6yx-7y$

**8)** $mn^2+4m^2n+6n^2m-10nm^2+mn^2$

**9)** $-6+x^3+4-3x^3+17x^3-17$

**10)** $y^2+x^2-5x^2+5y^2+4x^2-6y^2$

**11)** $7x^2-3x-4x+2$

**12)** $5xy+2x-3yx-x+1$

**13)** $3-x-x^2+4x+5x^2-12$

**14)** $x+xy+y-6yx-6y-6x$

**15)** $mn+n-5m+5nm-14n+3m$

**16)** $ab^2+6ba^2-6b+16a^2b+3b-6b^2a$

**17)** $z^3-4z^2+7-z^3-8+8z^2$

**18)** $4x^2z+6xz^2-6-xz^2+12+10zx^2$

**19)** $2-x^3-3-4x^2+2x+x^3+x^2-2$

**20)** $x^3-3x-4x^2+2x+x^3+x^2-2x^3$

**21)** $2a^2b+3x^2y+5a^2b+10x^2y$

**22)** $12x^2y^3+13a^2-20x^2y^3+2a^2$

**23)** $2y^2-4x^3y^2-10y^2-x^3y^2$

**24)** $-2x^3y+5x^2-4yx^3-6x^2$

**25)** $2a^2b+2b+3a^2+5b$

**26)** $5a^2b-8ab^2+20a^2b-14ab^2$

**27)** $-12x^2+2y^2+3x^2y+14xy^2-5xy^2-6y^2+2xy+11x^2+x^2y-9xy$

**28)** $21x^3y^3+x^2y^2-3xy^3+x^3y-15x^2y^2-7x^3y+12x^3y^3-4xy^3+4xy^3-6x^3y$

## תשובות סופיות:

(1) $8x$

(2) $2x^2$

(3) $4xy$

(4) $-x^2y$

(5) $4a^2-a$

(6) $x^2$

(7) $9xy-36y$

(8) $8mn^2-6nm^2$

(9) $15x^3-19$

(10) 0

(11) $7x^2-7x+2$

(12) $2xy+x+1$

(13) $4x^2+3x-9$

(14) $-5x-5y-5xy$

(15) $-13n-2m+6mn$

(16) $-5ab^2+22a^2b-3b$

(17) $4z^2-1$

(18) $14x^2z+5xz^2+6$

(19) $-3x^2+2x-3$

(20) $-3x^2-x$

(21) $7a^2b+13x^2y$

(22) $-8x^2y^3+15a^2$

(23) $-8y^2-5x^3y^2$

(24) $-6x^3y-x^2$

(25) $2a^2b+3a^2+7b$

(26) $25a^2b-22ab^2$

(27) $-x^2-4y^2+4x^2y+9xy^2-7xy$

(28) $33x^3y^3-14x^2y^2-3xy^3-12x^3y$

# פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

## סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

- $a(b+c)=ab+ac$.
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x\cdot 3x$ ב. $-4x\cdot(-7x)$ ג. $-2x\cdot(-4x)\cdot(-3)$

ד. $8m^2\cdot 4m^3$ ה. $3a^3\cdot(-2a^2)$ ו. $-b\cdot 4b^2\cdot\frac{b^2}{2}$

ז. $a\cdot 3b$ ח. $4a^2\cdot 7b^2$ ט. $ab\cdot(-2a^2b)$

**2)** פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$ ב. $2(-3x^2+5x-1)$

ג. $(7x-2)4$ ד. $(1-2x)(-2)$

ה. $a(3a-1)$ ו. $b(b^2-3b+4)$

ז. $2x(5x+3)$ ח. $5x(x^2+2x-3)$

ט. $3t^2(4t-t^2+6)$ י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

**3)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$ ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$

ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$ ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

ה. $(3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$

ו. $3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7$

**4)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+2)$ ב. $(x+3)(x-7)$

ג. $(3-x)(x+4)$ ד. $(3x+4)(5x+1)$

ה. $3(4x+1)(2x-3)$ ו. $-2(3x-1)(5-2x)$

**5)** פשט את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+3)+2(3-x)$

ב. $(a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$

ג. $(2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6)$

ד. $-x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2)$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $6x^2$ ב. $28x^2$ ג. $-24x^2$ ד. $32m^5$ ה. $-6a^5$ ו. $-2b^5$

ז. $3ab$ ח. $28a^2b^2$ ט. $-2a^3b^2$

**2)** א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$

ה. $3a^2-a$ ו. $b^3-3b^2+4b$ ז. $10x^2+6x$ ח. $5x^3+10x^2-15x$

ט. $12t^3-3t^4+18t^2$ י. $10d^5-7.5d^2$

**3)** א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$

ו. $10y^2+32y-27$

**4)** א. $x^2+x-2$ ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$

ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$

**5)** א. $x^2+3$ ב. $7$ ג. $18m^2-6m-39$ ד. $-3x^5y^3+3x^4y^2$

# פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

## סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$ ב. $(x+2)^2$ ג. $(4x+5)^2$

ד. $(6x+2)^2$ ה. $(7x+y)^2$ ו. $(5x+2y)^2$

ז. $(x^2+7)^2$ ח. $(x^2+y^2)^2$ ט. $(x^3+2y^2x)^2$

**2)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$ ב. $(x-2)^2$ ג. $(5-x)^2$

ד. $(6x-1)^2$ ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$ ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$

ז. $(3m-2n)^2$ ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ ט. $\left(x^2y^2-7\right)^2$

**3)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$ ב. $(3+x)(x-3)$

ג. $(3x-1)(3x+1)$ ד. $(5-7x)(7x+5)$

ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$

ז. $\left(x^2+y\right)\left(x^2-y\right)$ ח. $\left(3a^2b^3-4\right)\left(3a^2b^3+4\right)$

**4)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$

ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$

ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$

ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$

ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$

ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x^2+10x+25$ ב. $x^2+4x+4$ ג. $16x^2+40x+25$

ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$

ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$

**2)** א. $x^2-12x+36$ ב. $x^2-4x+4$ ג. $25-10x+x^2$

ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$

ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$

**3)** א. $x^2-25$ ב. $x^2-9$ ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$

ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. $x^4-y^2$ ח. $9a^4b^6-16$

**4)** א. $x^2+2$ ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$

ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

# פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים:

## סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:
  - הוצאת מספר משותף: $2x-8=2(x-4)$.
  - הוצאת אות משותפת: $x^2-12x=x(x-12)$.
  - הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2-21x=3x(x-7)$.
- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:
  - נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
  - נוסחה להפרש ריבועים: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x-12$ ב. $6y-4$

ג. $20-8a$ ד. $4a^3+8b$

ה. $75m^2+25m+15$ ו. $40a^2-8b^2+64c^2$

**2)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $y^2+5y$ ב. $3x-11x^3$

ג. $6y^2+5y^3+4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7-\frac{1}{4}a^5+a^3$

**3)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $2x^2-8x$

ב. $3t^2+12t$

ג. $5n^3-20n^2+50n$

ד. $8y^2+6y^3-2y^4$

ה. $4x^2y^2+16x^2y-20xy^2$

ו. $27mn-3n^2m+9n^3m$

**4)** פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $x^2+10x+25$

ב. $x^2+12x+36$

ג. $y^2-18y+81$

ד. $y^2-22y+121$

ה. $4x^2+4x+1$

ו. $16y^2-8y+1$

ז. $9x^2-24x+16$

ח. $25x^2+70x+49$

**5)** פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $r^2-25$

ב. $x^2-81$

ג. $25y^2-49$

ד. $121x^2-1$

ה. $x^2y^2-4$

ו. $9y^4-169x^4$

**6)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר:

א. $y-y^3$

ב. $x^3-10x^2+25x$

ג. $m^4-1$

ד. $196x^4-140x^3+25x^2$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$

ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$

**2)** א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$

ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$

**3)** א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$

ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$

**4)** א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$

ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$

**5)** א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$

ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$

**6)** א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$

ד. $x^2(14x-5)^2$ .

# פירוק הטרינום:

## סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: $ax^2+bx+c$ כאשר $a$, $b$ ו-$c$ הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר $bx$ לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, $m_1$ ו-$m_2$, שמקיימים: $m_1\cdot m_2=ac$ ו-$m_1+m_2=b$.

לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2+bx+c=ax^2+m_1x+m_2x+c$.

השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2+m_1x}+\underbrace{m_2x+c}$.

**הערה:**

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים $m_1$ ו-$m_2$ באופן הבא: $m_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ , $m_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום כמכפלה: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)\left(x-m_2\right)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד אז $m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$ נכתוב: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

## שאלות:

**1)** פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. $x^2+5x+4$ ב. $x^2-8x+15$ ג. $x^2-33x+62$

ד. $2x^2+7x-15$ ה. $3x^2-11x+6$ ו. $6x^2+5x+1$

ז. $2x^2+x-6$ ח. $x^2-18x+81$ ט. $x^2+2x+8$

**2)** פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

**הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.**

א. $6x^2+5x+1$ ב. $x^2+5x+4$

ג. $4x^2+20x+25$ ד. $3x^2-x+20$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$

ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$

ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.

**2)** א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

# שברים אלגבריים:

## סיכום כללי:

### הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

דוגמא לשברים אלגבריים: $\frac{4}{x-x^3}$ , $\frac{3x}{x^2+1}$ , $\frac{x+1}{x+2}$.

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: $\frac{3x+5}{4}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

### תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

דוגמא: השבר $\frac{1}{x+4}$ לא מוגדר כאשר $x=-4$ מכיוון שמתקבל: $\frac{1}{0}$.

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x\neq -4$ ומשמעו היא ש-$x$ יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט 4-, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

### כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים.
במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

- צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: $\frac{2x+8}{x+4}=\frac{2\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=\frac{2\cdot 1}{1}=2$.
- צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: $\frac{3x-15}{x^2-10x+25}=\frac{3\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}}}=\frac{3\cdot 1}{x-5}=\frac{3}{x-5}$.
- צמצום ע"י פירוק טרינום: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$.

## שאלות:

**1)** מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$

ב. $\frac{5}{x-6}$

ג. $\frac{x+7}{2x-8}$

ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$

ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$

ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$

ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$

ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

**2)** צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$

ב. $\frac{a-x}{a}$

ג. $\frac{a-ax}{a}$

ד. $\frac{x+1}{y+1}$

ה. $\frac{x}{x+y}$

ו. $\frac{6x}{6y}$

ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$

ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

ט. $\frac{4x^2y}{xy}$

י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

**3)** צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$

ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$

ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$

ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$

ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$

ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$

ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$

ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

**4)** צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2+10x+25}{2x+10}$

ב. $\frac{8n-n^2}{n^2-16n+64}$

ג. $\frac{z^3-4z^2}{2z^2-16z+32}$

ד. $\frac{4m^2+20m+25}{4m^2+10m}$

ה. $\frac{18y^2-24y+8}{2y-3y^2}$

ו. $\frac{a^3+4a^2b+4ab^2}{3ab+6b^2}$

**5)** צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$

ב. $\frac{m^2-12m+32}{m-4}$

ג. $\frac{4y-10}{2y^2+y-15}$

ד. $\frac{3z^2+26z+16}{3z+2}$

ה. $\frac{x^2+5x-36}{x^3+9x^2}$

ו. $\frac{9n^2-12n}{4+5n-6n^2}$

ז. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

ח. $\frac{x^2-14x+49}{x^2+x-56}$

ט. $\frac{3a^2b-10ab^2+3b^3}{-3a^3b+11a^2b^2-6ab^3}$

י. $\frac{m^3n-m^2n^2-m^2+mn}{2m^2n^3+mn^2-3n}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x\neq -3$ ב. $x\neq 6$ ג. $x\neq 4$ ד. $x\neq 0\ ,\ x\neq 4$

ה. $x\neq -1$ ו. $x\neq 2\ ,\ x\neq -2$ ז. $y\neq 0\ ,\ y\neq -1\ ,\ y\neq 1$

ח. $x\neq 0\ ,\ x\neq 1\ ,\ x\neq 4$

**2)** א. $x$ ב. לא ניתן לצמצם ג. $1-x$

ד. לא ניתן לצמצם ה. לא ניתן לצמצם ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$

ח. לא ניתן לצמצם ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם

**3)** א. $3\ ,\ x\neq -4$ ב. $\frac{m}{4}\ ,\ m\neq -4$ ג. $\frac{2}{a}\ ,\ a\neq 0,6$

ד. $-\frac{x}{3}\ ,\ x\neq 5$ ה. $-3\ ,\ y\neq \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ ו. $\frac{2x^2}{3}\ ,\ x\neq \frac{1}{2}$

ז. $\frac{3}{y(y-3)}\ ,\ y\neq 0,3$ ח. $\frac{3z^2-12z+4}{z+5}\ ,\ z\neq 0,-5$

**4)** א. $\frac{x+5}{2}\ ,\ x\neq -5$ ב. $\frac{n}{8-n}\ ,\ n\neq 8$ ג. $\frac{z^2}{2(z-4)}\ ,\ z\neq 4$

ד. $\frac{2m+5}{2m}\ ,\ m\neq 0,-\frac{5}{2}$ ה. $\frac{2(2-3y)}{y}\ ,\ y\neq 0,\frac{2}{3}$ ו. $\frac{a(a+2b)}{3b}\ ,\ b\neq 0,\ a\neq -2b$

**5)** א. $\frac{1}{x-5}\ ,\ x\neq 5,-2$ ב. $m-8\ ,\ m\neq 4$ ג. $\frac{2}{y+3}\ ,\ x\neq -3,\frac{5}{2}$

ד. $z+8\ ,\ z\neq -\frac{2}{3}$ ה. $\frac{x-4}{x^2}\ ,\ x\neq 0,-9$ ו. $\frac{-3n}{2n+1}\ ,\ n\neq -\frac{1}{2},\frac{4}{3}$

ז. $\frac{x+2}{x+3}\ ,\ x\neq -2,-3$ ח. $\frac{x-7}{x+8}\ ,\ x\neq 7,-8$

ט. $\frac{3a-b}{a(2b-3a)}\ ,\ a\neq 0\ ,\ b\neq 0,\ a\neq 3b\ ,\ 2b\neq 3a$ י. $\frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}\ ,\ mn\neq 1,-\frac{3}{2},n\neq 0$

# כפל וחילוק של שברים אלגברים:

## סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.

חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3x+3}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3(x+1)}=\frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{3x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}}=\frac{1}{3x}$.

- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y}:\frac{12}{y^2+y}=\frac{4x}{y}\cdot\frac{y^2+y}{12}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}x}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}(y+1)}{\underset{3}{\cancel{12}}}=\frac{x(y+1)}{3}$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{8}$

ב. $\frac{x}{3}\cdot\frac{9}{x^2}$

ג. $7y\cdot\frac{5}{y^2}$

ד. $6x^2\cdot\frac{3}{40x}$

ה. $\left(x^2+3x\right)\cdot\frac{2}{3x+9}$

ו. $\left(a^2-25\right)\cdot\frac{20}{5a+25}$

ז. $\frac{w^2-9}{w}\cdot\frac{w^2}{2w+6}$

ח. $\frac{y+4}{y^2+16}\cdot\frac{y^2-16}{2y+8}$

ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90}\cdot\frac{12}{2z-10}$

י. $\frac{5n^2}{n^2-121}\cdot\frac{2n^2+44n+242}{n+2}\cdot\frac{n^2+4n+4}{n}$

**2)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8}:\frac{x}{6}$

ב. $\frac{y}{25}:\frac{5}{y}$

ג. $a^2:\frac{1}{6a}$

ד. $\frac{5}{6a}:a^2$

ה. $\left(d^2-3d\right):\frac{5d-15}{5d}$

ו. $\frac{t}{t+4}:\frac{3t}{t+4}$

ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2}:\frac{y^2-16}{7y^2}$

ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36}:\frac{a+8}{a+6}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$ ה. $\frac{2x}{3}$

ו. $4(a-5)$ ז. $\frac{w(w-3)}{2}$ ח. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$ ט. $\frac{z+15}{z-5}$ י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$

**2)** א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{y^2}{125}$ ג. $6a^3$ ד. $\frac{5}{6a^3}$ ה. $d^2$ ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$ ח. $\frac{a-8}{a-6}$

# חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

## סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים.

נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים.

כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף.
לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת.

דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x}=\frac{1+(x+1)}{x}=\frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)+3}{x+2}=\frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x(x+1)}=\frac{x+x+1}{x(x+1)}=\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-3x}=\frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{3}{(x-3)^2}-\frac{2}{(x-3)(x+3)}=\frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}=\frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6}+\frac{a-5}{6}$

ב. $\frac{5}{x}+\frac{4x+3}{x}$

ג. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3+4x}{x+1}$

ד. $\frac{7z}{2z-3}-\frac{4z}{2z-3}-\frac{z+3}{2z-3}$

**2)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab}-\frac{5}{bc}$

ב. $\frac{1}{xy}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xz}$

ג. $\frac{c}{ab}-\frac{ad}{bc}+\frac{2b}{cd}$

ד. $-\frac{5}{x}+\frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)}-\frac{2}{z(z-2)}$

**3)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $1-\frac{2}{x}$

ב. $1+\frac{3}{y^2}$

ג. $2+\frac{2}{x+1}$

ד. $3-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}$

ה. $\frac{a+1}{a^2}-\frac{3-a}{4a}-3$

ו. $\frac{x}{9yz}+\frac{z}{3y^2x}+\frac{3-y}{12xz}-3\frac{1}{2}$

**4)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x}$

ב. $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y}$

ג. $\frac{a+1}{a+2}+\frac{3}{a}$

ד. $\frac{1}{z+3}+\frac{2}{3z}-\frac{3}{z}$

**5)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{24}{a^2-9}+\frac{4}{a+3}$

ב. $\frac{3}{x^2-16}+\frac{2}{(x+4)^2}$

ג. $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{3y}{4-y^2}$

ד. $\frac{3z}{z^2+4z+3}-\frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$

ה. $\frac{x-1}{x^2+3x-40}+\frac{2}{-x^2+8x-15}$

ו. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7}+\frac{a+3}{a^2+14a+49}$

ז. $\frac{x}{x-3}+\frac{9-x}{x^2-8x+15}$

ח. $\frac{1}{a-b}+\frac{2}{a+2b}-\frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

**6)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{4}{x}\cdot\frac{x^2}{8}+\frac{9}{x+1}\cdot\frac{x+1}{18}$

ב. $\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot\frac{x^2}{7x+14}$

ג. $\frac{7}{y^2}:\frac{6}{y^3}-\frac{y-4}{63}\cdot\frac{3y-4}{y^2-8y+16}$

ד. $\left(3x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right):\frac{6x^3+2x-4}{x^2}$

ה. $\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3}-\frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right):\frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$

## תשובות סופיות:

1) א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1

2) א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d-a^2d^2+2ab^2}{abcd}$

ד. $\frac{-5y^2+x+1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$

3) א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$

ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2+a+4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z}$

4) א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$

ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$

5) א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$

ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$

ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$

6) א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

# שברים כפולים:

## סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

## שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

1) $\frac{\frac{4x}{12}}{x}$

2) $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5}$

3) $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2}$

4) $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54}$

5) $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{\frac{y^2}{3-y}}$

6) $\frac{\frac{4x}{x+1}}{\frac{8}{x^2+2x+1}}$

7) $\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{\frac{40}{15c+15}}$

8) $\frac{\frac{t^2-t-20}{16t+8}}{\frac{25-t^2}{2t+1}}$

9) $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}}$

## תשובות סופיות:

1) $\frac{x^2}{3}$

2) $2.5$

3) $\frac{1}{6t^3}$

4) $\frac{t-9}{54t^2}$

5) $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$

6) $\frac{x(x+1)}{2}$

7) $\frac{c}{c-4}$

8) $\frac{t+4}{-8(t+5)}$

9) $\frac{5}{x}$

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 2 - משוואות אלגבריות

### תוכן העניינים

1. משוואות ממעלה ראשונה ..... 47
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה ..... 49
3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון ..... 52
4. משוואה ממעלה שנייה ..... 53
5. משוואות דו-ריבועיות ..... 55
6. משוואות עם פרמטרים ..... 57
7. משוואות עם ערך מוחלט ..... 59
8. משוואות עם שורשים ..... 60
9. מערכת משוואות ממעלה שנייה ..... 62
10. משוואות מתקדמות מסכמות ..... 64

# משוואה ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $6x+2=8$
ב. $7-2x=7$
ג. $2x+x=24$
ד. $2x+6=8+x$
ה. $-7x+5+2x=4x-13$
ו. $6x-3+5-7x=x-5x-7$
ז. $2-5x+7=-3x+8$
ח. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

**2)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$
ב. $7x-4(3-4x)=-x$
ג. $6(4-x)-(6-x)=3x$
ד. $5x-(3x-7)4=21$
ה. $x(x-5)=x^2-7x+8$
ו. $(7-x)(1-x)-(x-3)^2=0$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1$

ג. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ד. $\frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1$

ה. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

ו. $5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0$

ב. $\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0$

ג. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ד. $\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2}$

ה. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ו. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

**5)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$

ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$.

**2)** א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$.

**3)** א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$.

**4)** א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$.

**5)** א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6$ , $x\neq 3$.

# מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר $a_1$ , $b_1$ , $c_1$ ו- $a_2$ , $b_2$ , $c_2$ הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ , $\begin{cases} y=3x-1 \\ \frac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

**פתרון של מערכת משוואות:**

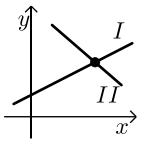
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

**הצגה גרפית של מערכת משוואות:**

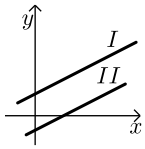
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

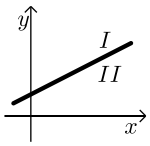
- הישרים נחתכים:
במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.




- הישרים מקבילים:
במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.




- הישרים מתלכדים:
במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



**פתרון אלגברי של מערכת משוואות:**

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

**הערה:**

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}3x+y=11\\y=5\end{cases}$ ב. $\begin{cases}y=x-3\\y=2x+4\end{cases}$ ג. $\begin{cases}-3x+2y=-16\\x=5y+14\end{cases}$

ד. $\begin{cases}5x-2y=-2\\x+4y=4\end{cases}$ ה. $\begin{cases}-5x+7y=-26\\x+3y=-8\end{cases}$ ו. $\begin{cases}2x+3y=5\\5x+7y=11\end{cases}$

**2)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+3y=5\\x-3y=3\end{cases}$ ב. $\begin{cases}5x+2y=14\\5x+3y=23\end{cases}$

ג. $\begin{cases}5y=2x\\4x=5y+8\end{cases}$ ד. $\begin{cases}4x=3y-29\\5y=9-13x\end{cases}$

**3)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+2y=1\\4x+8y=5\end{cases}$ ב. $\begin{cases}2(x-y)+4y=1+x\\2-7y+x=3(x-y)\end{cases}$.

**4)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases}$.

**5)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases}$

**6)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $(2,5)$ ב. $(-7,-10)$ ג. $(4,-2)$ ד. $(0,1)$ ה. $(1,-3)$ ו. $(-2,3)$.

**2)** א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$.

**3)** א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

**4)** א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$ ג. $(7,2)$.

**5)** א. $(1,1)$ ב. $(-3,1)$ ג. $(1,1)$.

**6)** א. $(-1,-3)$ ב. $(2,10)$ ג. $(-2,4)$.

# משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

## סיכום כללי:

**משוואה ממעלה ראשונה:**

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0\cdot x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של $x$ המקיים אותה.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

**1)** $x+4=6+x$

**2)** $3x+6-x=4+2x+2$

**3)** $6(x-2)=2x+5+4x$

**4)** $5x-3+x=4x+2x-3$

**5)** נתונה המשוואה: $\square+5x=3-2(x+2)$.

א. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

## תשובות סופיות:

**1)** אף פתרון.

**2)** אינסוף פתרונות.

**3)** אין פתרון.

**4)** אינסוף פתרונות.

**5)** א. -8 ב. -1 ג. $-7x-1$

ד. $-7x+k$ כאשר $k$ הוא מספר כלשהו השונה מ- -1.

# משוואה ממעלה שנייה:

## סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$ , $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.

פתרונות המשוואה יסומנו ב- $x_1$ ו- $x_2$ ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.

2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.

3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$ ב. $-x^2+10x-16=0$

ג. $25x^2-20x+4=0$ ד. $2x^2-6x+5=0$

**2)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $4x^2-5x+7=4-x^2+13$ ב. $-x(x-5)=(1-3x)(1-x)+4$

ג. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$ ד. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת $b$):

א. $x^2-36=0$ ב. $32x^2-18=0$

ג. $4x-x(x+2)=3(x-1)-x-6$ ד. $(2x-1)^2+(2x+1)^2=10$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת $c$):

א. $-7x^2-14x=0$ ב. $5x^2-x=0$

ג. $6x(x-2)-1=4x-3(x+1)+2$ ד. $(5x-2)^2=(x-2)(x+3)+10$

**5)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$ ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$ ד. $\frac{x}{2x^2-72}+\frac{2}{x^2+12x+36}=\frac{8x-15}{24-4x}+2$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x_1=2\ ,\ x_2=8$ ג. $x=\frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.

**2)** א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1$ ב. $x_1=1\ ,\ x_2=1\frac{1}{4}$ ג. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$

ד. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$.

**3)** א. $x=\pm 6$ ב. $x=\pm\frac{3}{4}$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=\pm 1$

**4)** א. $x_1=0\ ,\ x_2=-2$ ב. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=2\frac{1}{6}$

ד. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{7}{8}$.

**5)** א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq -3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$

ד. $x_1=-7.6\ ,\ x_2=-4\frac{2}{7}$.

# משוואות דו-ריבועיות:

## סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא $x$.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t\rightarrow at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי $x$.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת $x$.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

**1)** $5x^4+3x^2-8=0$

**2)** $x^4-3x^2+2=0$

**3)** $13x^2\left(3x^2-1\right)-2=3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

**4)** $x^2\left(x^2+1\right)=10\left(3x^2-10\right)$

**5)** $x^6+x^3=56$

**6)** $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

**7)** $x-9\sqrt{x}+14=0$

**8)** $x^8-4x^4-50=31x^4-84$

**9)** $125x^6-1=124\left(x^6+x^3+1\right)$

**10)** $\left(2x^2-x\right)^2-4\left(2x^2-x\right)+3=0$

**11)** $\left(x^2+2x\right)^2+7x^2+14x=-6$

**12)** $\frac{21}{x^2-4x+10}=6+x^2-4x$

**13)** $\frac{12}{x^2+2x-8}=1+\frac{7.5}{x^2+2x-3}$

**14)** $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

**15)** $\frac{3}{3x^2-15}+\frac{1}{x^2+5}=\frac{10}{x^4-25}$

**16)** $\frac{x^2-1}{4x^2-28}+2=\frac{9}{x^4-8x^2+7}+\frac{x^2}{2x^2-2}$

**17)** $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^2+35=12\left(2x+\frac{3}{x}\right)$

**18)** $\frac{3x^4}{\left(x+2\right)^2}+\frac{3x^2}{x+2}=6$

**19)** $\left(2x-x^2+3\right)\left(2x-x^2-2\right)=0$

**20)** $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x-8\right)=-24$

## תשובות סופיות:

1) $x=\pm 1$
2) $x=\pm 1,\pm\sqrt{2}$
3) $x=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3}$
4) $x=\pm 2,\pm 5$
5) $x_1=\sqrt[3]{7}\ ,\ x_2=-2$
6) $x=-2,\sqrt[3]{4}$
7) $x_1=4\ ,\ x_2=49$
8) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{34}\ ,\ x_{3,4}=\pm 1$
9) $x=5,-1$
10) $x_1=1.5\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=1\ ,\ x_4=-\frac{1}{2}$
11) $x=-1$
12) $x_{1,2}=1,3$
13) $x_1=0\ ,\ x_2=-2\ ,\ x_3=3.06\ ,\ x_4=-5.06$
14) $x_1=0\ ,\ x_2=-2$
15) אין פתרונות.
16) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$
17) $x=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},3$
18) $x=-1,2$
19) $x=3,-1$
20) $x=\pm 1,4,6$

# משוואות עם פרמטרים:

## סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים.
את המשתנים מקובל לסמן באותיות $x$ , $y$ , $z$ ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות.
פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר $x$ הוא הנעלם ו- $m$ הוא פרמטר) הוא $x=\frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצאות הפרמטר $m$.

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m\neq 0$.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{1}{3}(a-3x)=\frac{1}{a}(ax-3)$

ג. $(x-2a)(x-2b)=x^2-2(a^2+b^2)$

ד. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

ה. $\frac{x}{a^2-a}-\frac{1}{2a}=\frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a}-\frac{2}{a^3-2a^2+a}$

**2)** פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+my=1\\x+y=m\end{cases}$

ב. $\begin{cases}ax+y=2\\x+ay=4\end{cases}$

ג. $\begin{cases}\frac{x}{m}+y=m\\x-m^2y=1\end{cases}$

ד. $\begin{cases}(m-1)x-(2m+3)y=5\\(m+2)x-(2m-1)y=10m\end{cases}$

ה. $\begin{cases}(2a+b)x-(2a-b)y=8ab\\(2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2\end{cases}$

**3)** פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2-2x+4a=a^2+3$

ג. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

ד. $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}=0$

ה. $(m^2+1)x^2-m^2x-1=0$

ו. $\frac{a}{x}+\frac{1}{b}=\frac{x}{a}+b$

ז. $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=\frac{b-6}{2-b}\ ,\ b\neq 2$ ב. $x=\frac{a^2+9}{6a}\ ,\ a\neq 0$ ג. $x=a+b$ ד. $x=-m$ ה. $x=a+1$

**2)** א. $m\neq 1\ ,\ (m+1,-1)$ ב. $a\neq\pm 1\ ,\ \left(\frac{2a-4}{a^2-1},\frac{4a-2}{a^2-1}\right)$

ג. $m\neq 0-1\ ,\ \left(m^2-m+1,\frac{m-1}{m}\right)$ ד. $m\neq 1,-2\ ,\ (2m+1,m-2)$

ה. $b\neq\pm 2a\ ,\ (2a+b,2a-b)$

**3)** א. $x=m+1,\mathrm{m}-1$ ב. $x=a-1,3-a$ ג. $x=m-5,-2m$

ד. $a\neq 0\ ,\ x\neq\pm a\ ,\ x=\pm a\sqrt{3}$ ה. $x=1,-\frac{1}{m^2+1}$

ו. $a,b\neq 0\ ,\ x=\frac{a}{b},-ab$ ז. $a\neq\pm b\ ,\ x=\frac{a+b}{a-b},\frac{a-b}{a+b}$.

# משוואות עם ערך מוחלט:

## סיכום כללי:

### הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

### משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x|=a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $|3x+14|=7$
2) $|3x-24|=x$
3) $|12-x|=3x$
4) $2x-|8-x|=10$
5) $|4x-5|=|2x+13|$
6) $|14-3x|=2|x+5|$
7) $|x|+7=|2x|$
8) $|x+2|+6=|2x-4|$
9) $|x+2|+|2x-6|=|4x+8|$
10) $|10-3x|-|x+4|=|2x-6|$

## תשובות סופיות:

1) $x=-\frac{7}{3},\ -7$
2) $x=6,12$
3) $x=3$
4) $x=6$
5) $x=9,-1\frac{1}{3}$
6) $x=24,\frac{4}{5}$
7) $x=\pm 7$
8) $x=12,-1\frac{1}{3}$
9) $x=0,-12$
10) $x=0$

# משוואות עם שורשים:

## סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x}=a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x=a^2 \rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=\left(a\right)^2$.

**הערות:**

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$ שבה $a<0$ אין פתרון.
3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$
2) $\sqrt{x+2}=x$
3) $\sqrt{3x+1}+x=13$
4) $\sqrt{2x+7}+4=x$
5) $\sqrt{x-1}+3=x$
6) $\sqrt{10x+6}+9=x$
7) $\sqrt{x+6}-2=2x$
8) $\sqrt{24-x}+3=2x$
9) $\sqrt{x+16}+4=2x$
10) $2x=16-3\sqrt{x-1}$
11) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$
12) $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$
13) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-5}=\sqrt{11-x^2}$
14) $\sqrt{2x-1}+3=\sqrt{7x+1}$
15) $\sqrt{9x-8}-3\sqrt{x+4}=-2$
16) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$
17) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$
18) $\sqrt{2x-2}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x-2}$
19) $3\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}$

## תשובות סופיות:

1) $x=22$
2) $x=2$
3) $x=8$
4) $x=9$
5) $x=5$
6) $x=25$
7) $x=0.25$
8) $x=3.75$
9) $x=4.25$
10) $x=5$
11) $x=6$
12) $x=4,-3$
13) $x=3$
14) $x=5$
15) $x=12$
16) $x=2,2\frac{8}{9}$
17) $x=6$
18) $x=1$
19) $x=2$

# מערכת משוואות ממעלה שנייה:

## סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

## שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

**1)** $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

**2)** $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ x^2+3y=10 \end{cases}$

**3)** $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

**4)** $\begin{cases} x^2-2y^2=17 \\ xy=-10 \end{cases}$

**5)** $\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 \\ x+6y=1 \end{cases}$

**6)** $\begin{cases} x^2-2xy+8y^2=8 \\ 3xy-2y^2=4 \end{cases}$

**7)** $\begin{cases} x^2-y^2=33 \\ x+y=11 \end{cases}$

**8)** $\begin{cases} 16x^2-y^2=391 \\ 4x-y=23 \end{cases}$

**9)** $\begin{cases} 4xy+x=-15 \\ \frac{3}{y}-2x=16 \end{cases}$

**10)** $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{4}{y}-\frac{1}{x}=-19 \end{cases}$

**11)** $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=21 \\ \frac{8}{x}-\frac{1}{y}=13 \end{cases}$

**12)** $\begin{cases} xy=24 \\ (y-x)^2-7(y-x)+10=0 \end{cases}$

**13)** $\begin{cases} x^2y-xy^2=84 \\ x^2-2xy+y^2+5x-5y=24 \end{cases}$

**14)** $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3} \\ x^2+y^2=9xy+25 \end{cases}$

## תשובות סופיות:

1) $(2,4),(4,2)$

2) $(\pm 4,-2)$

3) $(\pm 2,\pm 1)$

4) $(5,-2),(-5,2)$

5) $\left(-2,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{11},\frac{1}{11}\right)$

6) $\left(3,\frac{1}{2}\right),\left(-3,-\frac{1}{2}\right),(2,1),(-2,-1)$

7) $(7,4)$

8) $(5,-3)$

9) $\left(-5,\frac{1}{2}\right)$ , $\left(-24,-\frac{3}{32}\right)$

10) $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

11) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

12) $(4,6)$ , $(-6,-4)$ , $(3,8)$ , $(-8,-3)$

13) $(-1.65,6.35)$ , $(-6.35,1.65)$ , $(7,4)$ , $(-4,-7)$

14) $(5,45)$ , $(-5,-45)$ , $(45,5)$ , $(-45,-5)$

# משוואות מסכמות מתקדמות:

## סיכום כללי:

**תזכורת מהירה:**

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.

- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.

- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.

- משוואה עם פרמטר/ים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטר/ים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטר/ים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+\sqrt{x+6}-6=0$

2) $x^2+5x-\sqrt{x^2+5x}-30=0$

3) $4x^2+16x-4\sqrt{x^2+4x}-3=0$

4) $2x^2+6x-\sqrt{x^2+3x+5}=5$

5) $x^2-\sqrt{16x^2+48}+7=0$

6) $x^2-\sqrt{6x^2-15}=1$

7) $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

8) $\frac{\sqrt{x^2+4x-12}}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+5}=\frac{7}{\sqrt{x-1}}$

9) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$

10) $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$

11) $\sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}}-\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}=2$

12) $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}$

פתור את המשוואות הבאות עבור $a>0$:

13) $x^2+ax-2a\sqrt{x^2+ax-a^2}=0$

14) $x^2+ax-2a\sqrt{3x^2+3ax-9a^2}=0$

פתור את המשוואות הבאות:

15) $\left|3-\left|2-x\right|+\left|x\right|\right|=1$

16) $\left|4-\left|5-x\right|\right|=\left|x+3\right|$

17) $\left|\frac{x+\left|3-x\right|}{x+2}\right|=18$

18) $\sqrt{25+\left|16x^2-25\right|}=4+4\left|x+1\right|$

19) $\frac{x^3-5x}{\sqrt{2x^2-4x-1}-\left|x\right|+2}=0$

20) הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה: $\frac{\left|x+2\right|}{\left|x\right|+2}=\left|2-x\right|+2$.

## תשובות סופיות:

1) $x=3$
2) $x_1=4\ ,\ x_2=-9$
3) $x_1=0.5\ ,\ x_2=-4.5$
4) $x_1=1\ ,\ x_2=-4$
5) $x_{1,2}=\pm 1$
6) $x_{1,2}=\pm 2$
7) $x=1$.
8) $x=3$.
9) $x=2$.
10) $3.5\le x\le 7$.
11) $x=4$.
12) $x=1\ ,\ x=\frac{9}{16}$.
13) $x_1=-2a\ ,\ x_2=a$
14) $x_1=-2a\ ,\ x_2=3a$
15) $x\le 0$.
16) $x=-1$.
17) $x=-\frac{39}{18},-\frac{33}{18}$.
18) $x=-\frac{1}{4}\ ,\ x\le\frac{5}{4}$.
19) $x=-\sqrt{5}$.
20) שאלת הוכחה.

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

### תוכן העניינים

1. אי שוויונים ממעלה ראשונה ..... 67
2. אי שוויונים ממעלה שנייה ..... 69
3. אי שוויונים ממעלה שלישית ..... 70
4. אי שוויונים עם מנה ..... 71
5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו ..... 73
6. שאלות מסכמות ..... 74

# אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

**פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:**

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

**פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:**

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $45x-26>109$

**2)** $6x>2(3x-1)$

**3)** $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

**4)** $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

**5)** $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

**6)** $4(6x-8)<8(3x-4)$

**7)** $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\geq 12-x$

**8)** $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

## תשובות סופיות:

1) $x>3$
2) כל $x$
3) אף $x$
4) $x>-2$
5) $x<5$
6) אף $x$
7) $x\geq 12$
8) $x>-13$

# אי-שוויונים ממעלה שנייה:

## סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2+bx+c \begin{matrix}>\\<\end{matrix} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $x^2<144$

**2)** $x^2-12x>-32$

**3)** $(x+2)(x+5)<0$

**4)** $(x+2)(x+4)<35$

**5)** $-x^2+13x+30<0$

**6)** $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

**7)** $(x-5)^2+x(x+2)<89$

**8)** $(5x+6)^2\leq 4(x-3)^2$

**9)** $-3x^2+12x>0$

**10)** $x^2-10x+25>0$

**11)** $(x-3)^2>(x-1)(x+6)-x^2-3x$

**12)** $2x^2+2x+24\geq 0$

## תשובות סופיות:

**1)** $-12<x<12$

**2)** $x<4\ ,\ x>8$

**3)** $-5<x<-2$

**4)** $-9<x<3$

**5)** $x<-2\ ,\ x>15$

**6)** $x\leq 7\ ,\ x\geq 11$

**7)** $-4<x<8$

**8)** $-4\leq x\leq 0$

**9)** $0<x<4$

**10)** $x>5\ ,\ x<5$

**11)** $x<3\ ,\ x>5$

**12)** כל $x$

# אי-שוויונים ממעלה שלישית:

## סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3-4x^2+4x+1>0$ , $x^4+2x^2+1<0$ וכו'.

בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.

לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

**2)** $x(x^2+x+1)>0$

**3)** $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

**4)** $x^3-25x\ge 0$

**5)** $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

**6)** $(x^2+8x+20)(3x-5)\le 0$

**7)** $(x^2-x-6)(x-1)<0$

**8)** $x^3-6x^2+9x\le 0$

**9)** $(x^2+6)(x+3)>0$

**10)** $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

## תשובות סופיות:

**1)** $1<x<2$ , $x>3$

**2)** $x>0$

**3)** $-2\le x\le -1$ , $x\ge \frac{1}{2}$

**4)** $-5\le x\le 0$ , $x\ge 5$

**5)** $x>2$

**6)** $x\le 1\frac{2}{3}$

**7)** $x<-2$ , $1<x<3$

**8)** $x\le 0$ , $x=3$

**9)** $x>-3$

**10)** $x<1$ , $2<x<4$

# אי-שוויונים עם מנה:

## סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (או $\frac{f(x)}{g(x)}<0$) נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$ ו-$g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4}<0$ בו: $f(x)=2x+4$ ו-$g(x)=x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

**הערות:**

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

**2)** $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

**3)** $\frac{1}{x^2-16}>0$

**4)** $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

**5)** $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

**6)** $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

**7)** $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

**8)** $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

**9)** $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

**10)** $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

## תשובות סופיות:

1) $-3<x<1\ ,\ x>3$

2) $x<-\frac{2}{3}\ ,\ x\geq-\frac{1}{2}$

3) $x<-4\ ,\ x>4$

4) $2<x<3\ ,\ x>3$

5) $\frac{1}{2}\leq x<5$

6) $x>1$

7) $x>-2$

8) $2<x<3$

9) $1\leq x\leq 6$

10) $x<2\ ,\ x>6$

# אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

## סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שיוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a<b$ וגם $b<c$, ניתן לכתוב: $a<b<c$.

מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שיוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $3<x+1<5$

**2)** $0<\frac{1}{x+4}<2$

**3)** $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

**4)** $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

**5)** $6x-38\le x-3\le 5x+7$

**6)** $6<\frac{2x+10}{3}\le\frac{7x-20}{5}$

**7)** $-1\le\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

**8)** $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

## תשובות סופיות:

**1)** $2<x<4$

**2)** $x>-3\frac{1}{2}$

**3)** $x>0$

**4)** $x<2\frac{2}{5}\ ,\ x>2\frac{2}{3}$

**5)** $-2.5\le x\le 7$

**6)** $x\ge 10$

**7)** $1\le x<13$

**8)** $\phi$

# שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $x\le -\frac{3}{4}\cap\{-2<x\le 5\ \cup\ 0<x<8\}$

**2)** $x(x+5)-3x+15\le 2x-1-x(4-x)$

**3)** $\frac{(x-3)(x+4)}{2-x}\le 0$

**4)** $\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)}<0$

**5)** $\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)}\ge 0$

**6)** $x(x+3)(2x-5)<0$

**7)** $\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2}>0$

**8)** $\frac{5-2x}{(x-8)^2}\le 0$

**9)** $\frac{x-3}{x^2+2}>0$

**10)** $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3}>0$

**11)** $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x}>0$

**12)** $\frac{x-7}{x^2+x+3}>0$

**13)** $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}<\frac{1}{x-2}$

**14)** $\frac{2x^2}{x^2-6x+8}\ge\frac{x}{x-4}-\frac{x}{x-2}$

**15)** $6<5x-x^2\cap x^2>3x+10$

**16)** $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}>0\ \cup\ \frac{1}{x-3}<\frac{1}{1-x}$

**17)** $1<\frac{x-1}{x-4}\le 2$

**18)** לאלו ערכי $x$ נמצאת הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה: $g(x)=\frac{x+1}{x+3}$?

## תשובות סופיות:

1) $-2 < x \le -\frac{3}{4}$

2) $x \le -4$

3) $-4 \le x < 2 \ , \ 3 \le x$

4) $x < -7 \ , \ -\frac{1}{3} < x < 2 \ , \ x > 5$

5) $-1 < x \le 1.5 \ , \ 4 < x \le 12$

6) $x < -3 \ , \ 0 < x < 2.5$

7) $x < -1 \ , \ 2 < x < 6 \ , \ x > 6$

8) $2.5 \le x < 8 \ , \ x > 8$

9) $x > 3$

10) $x < -3 \ , \ 0 < x < 1 \ , \ x > 4$

11) $-1 < x < 0 \ , \ 1 < x < 3 \ , \ x > 3$

12) $x > 7$

13) $x < -2 \ , \ 2 < x < 4$

14) $x \le 0 \ , \ 1 \le x < 2 \ , \ x > 4$

15) אף $x$

16) $x \ne 1$

17) $x \ge 7$

18) $-3 < x < -\frac{3}{5} \ , \ x > 3$

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 4 - בעיות מילוליות

### תוכן העניינים

1. בעיות תנועה ללא אחוזים ..... 76
2. בעיות תנועה עם אחוזים ..... 79
3. בעיות תנועה עם משפט פיתגורס ..... 80
4. בעיות תנועה מהירות מושפעת מזרמים ..... 81
5. בעיות תנועה מהירות ממוצעת ..... 82
6. בעיות קנייה ומכירה בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים ..... 83
7. בעיות קנייה ומכירה עם אחוזים בנעלם אחד ושניים ..... 84
8. בעיות קנייה ומכירה שונות ..... 85
9. בעיות יסודיות במרובעים ..... 91
10. בעיות במשולשים כולל משפט פיתגורס ..... 93
11. בעיות במעגל – ללא אחוזים ללא משפט פיתגורס ..... 95
12. בעיה במעגל – ללא אחוזים וכולל משפט פיתגורס ..... 96
13. בעיה במעגל – כולל אחוזים ..... 97
14. בעיות בהנדסת המרחב ..... 98

## בעיות תנועה בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים:

### שאלות:

**1)** מכונית נוסעת מ-A ל-B במהירות של 90 קמ״ש. בדרך חזרה נסעה המכונית במהירות של 60 קמ״ש. בסה״כ נמשכה הנסיעה הלוך וחזור 20 שעות.

א. כמה שעות נסעה המכונית לכל כיוון?

ב. מהי הדרך שעברה המכונית?

**2)** אוטובוס ומשאית יוצאים בו זמנית משני יישובים A ו-B בהתאמה.
מהירות האוטובוס היא 60 קמ״ש ומהירות המשאית היא 80 קמ״ש.
האוטובוס הגיע ליישוב B שעה ו-40 דקות מאוחר יותר מהזמן שלקח למשאית להגיע ליישוב A.

א. כמה זמן נסע האוטובוס וכמה זמן נסעה המשאית?

ב. מהו המרחק בין שתי הערים?

**3)** הולכת רגל יצאה לטיול במהירות מסוימת. לאחר שעה וחצי יצא בעקבותיה מאותו מקום הולך רגל נוסף במהירות הגדולה ממהירותה ב-4.5 קמ״ש.
הולך הרגל השיג את הולכת הרגל שעה לאחר שיצא לדרכו.

א. מהי מהירות ההליכה של הולכת הרגל?

ב. מהו המרחק שעברו עד שנפגשו?

**4)** שני רוכבי אופניים יוצאים בו זמנית מעיר א׳ לעיר ב׳. הרוכב הראשון נוסע במהירות קבועה ומגיע לעיר ב׳ לאחר 5 שעות. הרוכב השני נוסע במשך השעתיים הראשונות במהירות הקטנה ב-2 קמ״ש ממהירות הרוכב הראשון.
לאחר מכן הוא מגביר את מהירותו ב-14 קמ״ש ומגיע לעיר ב׳ שעה ו-20 דקות לפני הרוכב הראשון.

א. באיזו מהירות נסע הרוכב הראשון?

ב. איזו דרך עבר הרוכב השני בכל חלק?

**5)** משאית נוסעת מרחק של 245 ק״מ בכל יום במהירות קבועה.
יום אחד נסעה המשאית במשך שעתיים וחצי במהירות הרגילה, לאחר מכן עצרה לתדלוק במשך 24 דקות ואז המשיכה בנסיעה במהירות הגדולה ב-70 קמ״ש ממהירותה הקודמת.
המשאית הגיעה ליעדה שעה לפני השעה שהיא מגיעה בכל יום.

א. באיזו מהירות נוסעת המשאית בכל יום?

ב. כמה זמן לוקח למשאית להגיע ליעדה בכל יום?

**6)** אוטובוס נוסע מעיר א׳ לעיר ב׳ הרחוקה ממנה ב-800 ק״מ. לאחר שעבר האוטובוס 135 ק״מ במהירות קבועה הוא עצר להתרעננות במשך חצי שעה.
לאחר מכן המשיך האוטובוס את נסיעתו במהירות הגדולה ב-43 קמ״ש ממהירותו הקודמת עד לעיר ב׳.
סך כל הזמן שהיה האוטובוס בדרך הוא 7 שעות.

א. מה הייתה המהירות ההתחלתית של האוטובוס?

ב. מה היה המרחק שעבר האוטובוס אחרי ההתרעננות עד לעיר ב׳?

**7)** רוכב אופניים יצא בשעה 06:00 לרכיבה במהירות 24 קמ״ש.
בשעה 07:00 יצא מאותו מקום רוכב אופנוע באותו כיוון ובמהירות של 40 קמ״ש.
באיזו שעה ובאיזה מרחק מנקודת היציאה ישיג רוכב האופנוע את רוכב האופניים?

**8)** המרחק בין ת״א לנצרת הוא 103 ק״מ. בשעה 08:00 יצאה מכונית מנצרת לת״א במהירות 90 קמ״ש. בשעה 08:20 יצאה משאית מת״א לנצרת במהירות 56 קמ״ש.
באיזו שעה ייפגשו המכונית והמשאית?

**9)** משאית נסעה מדימונה לאילת, מרחק של 200 ק״מ. 50 דקות אחריה יצאה מכונית מדימונה לאילת במהירות הגבוהה ב-30 קמ״ש והגיעה לאילת 40 דקות לפני המשאית.
מצא את מהירות המכונית.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 8 שעות הלוך ו-12 שעות חזור. ב. 1440 ק״מ.

**2)** א. אוטובוס-6 שעות ו-40 דקות, משאית-5 שעות. ב. 400 ק״מ.

**3)** א. 3 קמ״ש. ב. 7.5 קמ״ש.

**4)** א. 12 קמ״ש. ב. 20 ק״מ ו-40 ק״מ.

**5)** א. 50 קמ״ש. ב. 4 שעות ו-54 דקות.

**6)** א. 90 קמ״ש. ב. 665 ק״מ.

**7)** 8:30, 60 קמ״ש.

**8)** 8:50.

**9)** 80 קמ״ש.

## בעיות תנועה עם אחוזים:

### שאלות:

**10)** מכונית נוסעת מעיר א' לעיר ב' מרחק של 480 ק"מ במהירות קבועה.
בדרכה חזרה נסעה המכונית במשך שעה במהירות הקבועה. לאחר מכן עצרה להתרעננות של 36 דקות ואז הגבירה את מהירותה ב-25% ממהירותה הקודמת והגיעה בחזרה לעיר א' 24 דקות פחות מהזמן שלקח לה להגיע לעיר ב'.
באיזו מהירות נסעה המכונית מעיר א' לעיר ב'?

**11)** רכבת משא ורכבת נוסעים יוצאות מעיר א' לעיר ב' מרחק של 360 ק"מ.
מהירות רכבת הנוסעים גדולה ב-20% ממהירות רכבת המשא.
רכבת הנוסעים התעכבה 40 דקות בתחנה, ולכן יצאה באיחור מהתחנה של עיר א'.
עם זאת היא הגיעה לעיר ב' 20 דקות לפני רכבת המשא.

א. מה הן המהירויות של שתי הרכבות?

ב. מה זמן נסעה רכבת הנוסעים מעיר א' לעיר ב'?

**12)** מכונית ומונית נוסעות מנקודה A לנקודה B. המכונית נוסעת במהירות קבועה ומגיעה לנקודה B כעבור 4 שעות. המונית נוסעת במשך 3 שעות המהירות הקטנה ב-10 קמ"ש ממהירות המכונית ולאחר מכן מגבירה את מהירותה ב-50% ומגיעה לנקודה B יחד עם המכונית.

א. מהי מהירות המכונית?

ב. מהו המרחק בין נקודה A לנקודה B?

### תשובות סופיות:

**10)** 80 קמ"ש.

**11)** א. 60 קמ"ש ו-72 קמ"ש. ב. 5 שעות.

**12)** א. 90 קמ"ש. ב. 360 ק"מ.

# בעיות תנועה עם משפט פיתגורס:

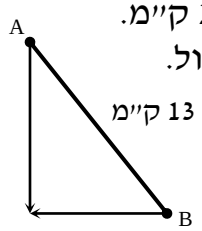
## שאלות:

**13)** שתי מכוניות יצאו מהעיר, האחת לכיוון מזרח והשנייה לכיוון צפון.
לאחר שלוש שעות המרחק בין שתי המכוניות היה 300 ק"מ.
מהירות מכונית אחת גדולה ב-20 קמ"ש ממהירות המכונית השנייה.

א. מהן המהירויות של שתי המכוניות?

ב. מה היה המרחק של כל מכונית מהעיר לאחר שלוש שעות?

**14)** שני הולכי רגל יוצאים משני יישובים A ו-B המרוחקים זה מזה 13 ק"מ.
היישוב A ממוקם בצפון מערב ביחס ליישוב B כמתואר באיור ממול.
הולך הרגל מיישוב A הולך דרומה והולך הרגל מיישוב B הולך מערבה. הולך הרגל מיישוב A יוצא שעתיים לפני הולך הרגל השני. לאחר שלוש שעות מיציאתו נפגשו שני הולכי הרגל. מהירות הולך הרגל מיישוב B גדולה ב-25% ממהירות הולך הרגל השני.
באיזו מהירות הלך כל אחד משני הולכי הרגל?




**15)** רוכב אופנוע יצא מביתו מזרחה במהירות מסוימת ונסע במשך חצי שעה.
לאחר מכן, פנה צפונה, הגדיל את מהירותו ב-20% ונסע כך שעה נוספת.
לאחר שעה זו פנה חזרה לכיוון ביתו, העלה את מהירותו ל-65 קמ"ש ונסע (בקו ישר) עד שהגיע חזרה לביתו.

א. מצא את מהירותו של רוכב האופנוע ביציאה מביתו אם ידוע שעבר בסה"כ 150 ק"מ.

ב. מה הייתה מהירותו הממוצעת של רוכב האופנוע (בכל חלקי הדרך)?

## תשובות סופיות:

**13)** א. 60 קמ"ש ו-80 קמ"ש. ב. 180 ק"מ ו-240 ק"מ.

**14)** א. 4 קמ"ש ו-5 קמ"ש.

**15)** א. 50 קמ"ש. ב. 60 קמ"ש.

# בעיות תנועה מהירות מושפעת מזרמים:

## שאלות:

**16)** סירה שטה בנהר שבו מהירות הזרם היא 3 קמ״ש עם כיוון זרם המים.
לאחר חצי שעה החליטו אנשי הסירה לשנות את כיוונם וחזרו במשך שעתיים לנקודת המוצא שלהם.
מהירות הסירה במים עומדים קבועה במשך כל השייט.

א. מצא את מהירות הסירה.

ב. מהו המרחק הכולל ששטה הסירה?

## תשובות סופיות:

**16)** א. 5 קמ״ש. ב. 8 קמ״ש.

# בעיות תנועה מהירות ממוצעת:

## שאלות:

**17)** מכונית נוסעת 3 שעות במהירות קבועה של 140 קמ״ש ולאחר מכן במשך שעתיים נוספות במהירות קבועה של 100 קמ״ש.

א. מה סך הדרך שעברה המכונית?

ב. מהי המהירות הממוצעת של המכונית?

**18)** מכונית נוסעת 4 שעות במהירות של 130 קמ״ש ולאחר מכן מספר שעות נוספות במהירות של 70 קמ״ש.
ידוע כי מהירותה הממוצעת היא 110 קמ״ש.
כמה שעות נסעה המכונית במהירות של 70 קמ״ש?

**19)** אופנוע עובר מרחק של 200 ק״מ במהירות מסוימת.
לאחר מכן מאיץ האופנוע ומגדיל את מהירותו ב-40%.
הוא נוסע במהירות זו ועובר מרחק של 280 ק״מ.
המהירות הממוצעת של האופנוע היא 96 קמ״ש.

א. כמה זמן נסע האופנוע?

ב. באיזו מהירות התחיל האופנוע את נסיעתו?

## תשובות סופיות:

**17)** א. 620 ק״מ. ב. 125 קמ״ש.

**18)** שעתיים.

**19)** א. 5 שעות . ב. 80 קמ״ש.

# בעיות קנייה ומכירה בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים:

## שאלות:

**1)** מחיר כניסה למוזיאון המדע למבוגר גדול ב-15 ₪ ממחיר הכניסה לילד.
יוסי נסע עם אשתו ושבעת ילדיו ליום כיף במוזיאון המדע ושילם בעבור הכניסה סכום כולל של 210 שקלים.
מה המחיר לילד ומה המחיר למבוגר?

**2)** המחיר של 3 ק"ג אגסים גדול ב-3 שקלים מהמחיר של 2 ק"ג תפוחים.
שרון קנתה 4 ק"ג אגסים ו-5 ק"ג תפוחים ושילמה סכום כולל של 73 שקלים.
מה המחיר של ק"ג מכל סוג?

**3)** דן קנה מחברות בסכום כולל של 224 שקלים.
אם ירד המחיר למחברת ב-10 שקלים יוכל דן לקנות 40 מחברות יותר מאשר קנה בתחילה באותו הסכום.
כמה מחברות קנה דן ומה המחיר של כל מחברת?

**4)** סוחר קנה 60 כיסאות זהים במחיר זהה לכיסא.
5 כיסאות נשברו לו ואת שאר הכיסאות הוא מכר במחיר הגדול ב-40 ₪ מהמחיר שקנה אותם. בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 1950 ₪.
באיזה מחיר קנה הסוחר כל כיסא?

## תשובות סופיות:

**1)** 20 ₪ ו-35 ₪.

**2)** 7 ₪ ו-9 ₪.

**3)** 16 ב-14 ₪.

**4)** 50 ₪.

## בעיות קנייה ומכירה עם אחוזים בנעלם אחד ושניים:

### שאלות:

**5)** משכורתו של אלון גדולה ב-200 ₪ ממשכורתו של רן.
אם אלון יקבל תוספת של 16% למשכורתו ורן יקבל תוספת של 30% למשכורתו אז המשכורת של רן תהיה גדולה משל אלון ב-300 ₪.
מהי המשכורת של כל אחד מהם?

**6)** עקב ביקוש רב מחירו של מקרר "אמנה" עלה ב-5%. לאחר שנה ירד הביקוש למקרר "אמנה" ולכן הוזל מחירו ב-10%. מחיר המקרר הסופי הוא 1,323 ₪.

א. מה היה מחיר המקרר ההתחלתי?

ב. כמה אחוזים ממחיר המקרר המקורי מהווה מחיר המקרר הסופי?

**7)** המחיר של שמיכה וזוג כריות הוא 380 ₪. לאחר שנה מחיר השמיכה הוזל ב-20%, אך מחיר הכריות התייקר ב-20%. כעת המחיר של 5 כריות ו-2 שמיכות הוא 888 ₪.

א. מה היה המחיר הראשוני של כרית?

ב. כמה עולה שמיכה לאחר ההוזלה?

**8)** סוחר קנה שולחנות במחיר כולל של 18,000 ₪. 10 שולחנות הוא מכר ברווח של 60% לשולחן, 20 שולחנות הוא מכר ללא רווח ואת שאר השולחנות הוא מכר בהפסד של 15% לשולחן. סה"כ הרוויח הסוחר בעסקאות אלו 450 ₪.

א. כמה שולחנות קנה הסוחר?

ב. מה המחיר ששילם הסוחר עבור כל שולחן?

### תשובות סופיות:

**5)** א. 1,400 ₪. ב. 94.5%.

**6)** א. 100 ₪. ב. 144 ₪.

**7)** א. 60 שולחנות. ב. 300 ₪.

**8)** א. 250 מרצפות . ב. 88 ₪. ג. 156,000.

# בעיות קנייה ומכירה שונות:

## שאלות:

**9)** קבלן רכש $x$ מרצפות רצפה בסכום כולל של 22,000 ₪. 20 מרצפות נשברו בהובלה ולכן לא נמכרו. את שאר המרצפות מכר הקבלן ברווח של 50%.
סה"כ הרוויח הקבלן בעסקה 8,360 ₪.

א. כמה מרצפות קנה הקבלן?

ב. כמה כסף שילם הקבלן עבור כל מרצפה?

**10)** שמואל קנה מחשב ומדפסת במכרז ושילם עבורם סכום כולל של 3,600 ₪.
לאחר חודש ימים, מכר שמואל את המדפסת בהפסד של 10% ואת המחשב ברווח של 40%.
ידוע כי שמואל מכר את שני המוצרים במחיר כולל של 4,740 ₪.
בכמה כסף קנה שמואל את המחשב ובכמה כסף קנה את המדפסת?

**11)** חוואי קנה 15 סוסי פוני במחיר זהה לסוס. לאחר שנה מכר החוואי 3 סוסים ברווח של 35%, שניים מתו ממחלה נדירה ואת שאר הסוסים הוא מכר ללא רווח. סה"כ הפסיד החוואי 1710 ₪.

א. כמה שילם החוואי עבור כל סוס פוני?

ב. אם רק סוס אחד היה מת, האם היה החוואי מרוויח מהעסקה?
אם לא נמק, אם כן בכמה היה מרוויח?

**12)** מכונת כביסה עולה 4,000 ₪. לאחר שנה עלה מחיר מכונת הכביסה ב-20% ושנה לאחר מכן עלה מחירה בעוד 20%.

א. מה מחיר מכונת הכביסה לאחר שנתיים?

ב. בכמה אחוזים מהמחיר המקורי התייקרה מכונת הכביסה?

ג. בחנות למוצרי חשמל מוכרים מכונות כביסה במחיר מסוים.
רפי קנה 3 מכונות כביסה למכבסה שברשותו. ידוע כי לאחר שנה חלה התייקרות ב- $p$ אחוזים וכך גם בשנה שאחריה. בתום השנתיים, החליט רפי לקנות 2 מכונות כביסה נוספות. מבדיקה שערך רפי, גילה כי המחיר הכולל ששילם בקנייה השנייה שווה למחיר ששילם בקנייה הראשונה.
מהו $p$ ?

**13)** המחיר של שמיכה וזוג כריות הוא 380 ₪. לאחר שנה מחיר השמיכה הוזל ב-20% אך מחיר הכריות התייקר ב-20%.
כעת המחיר של 5 כריות ו-2 שמיכות הוא 888 ₪.

א. מה היה המחיר הראשוני של כרית?

ב. כמה עולה שמיכה לאחר ההוזלה?

ג. אכסניית נוער מעוניינת לרכוש שמיכות וכריות עבור מיטות יחיד למספר חדרים (מספר זהה של שמיכות וכריות).
האם כדאי להנהלת האכסניה לרכוש את השמיכות והכריות במחירים המקוריים או לאחר שנה? נמק.

**14)** המחיר של 6 שרפרפים גדול ב-20 שקלים מהמחיר של כיסא.
לאחר שמחיר השרפרפים התייקר ב-35% ומחיר הכיסא הוזל ב-19%, המחיר של 3 שרפרפים היה זהה למחיר של כיסא אחד.

א. מה המחיר של כיסא והמחיר של שרפרף לפני ההוזלה וההתייקרות?

ב. בכמה אחוזים גדול המחיר של הכיסא לאחר ההוזלה מהמחיר של השרפרף לאחר ההתייקרות?

ג. לרשות בית ספר תקציב מסוים המיועד לרכישת כיסאות ושרפרפים.
ידוע כי בית הספר מעוניין לרכוש פי 4 יותר שרפרפים מאשר כיסאות.
האם כדאי לבית הספר לבצע את הרכישה במחירים המקוריים או לאחר השינויים אם ברצונו לרכוש יותר פריטים?

**15)** סוחר קנה 60 כיסאות זהים במחיר זהה לכיסא. 5 כיסאות נשברו לו ואת שאר הכיסאות הוא מכר במחיר הגדול ב-40 ₪ מהמחיר שקנה אותם.
בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 1950 ₪.

א. באיזה מחיר קנה הסוחר כל כיסא?

ב. בעסקה אחרת, קנה הסוחר 60 כיסאות אחרים במחיר זהה לכיסא.
ידוע כי המחיר של כיסא בודד גדול ב-30% מהמחיר של כיסא בודד שרכש הסוחר בעסקה הראשונה. במהלך ההובלה נגנבו 8 כיסאות.
הסוחר רוצה להרוויח ממכירת הכיסאות הנותרים לפחות 2000 ₪ בעסקה זו. נסמן ב- $p$ את אחוז ההתייקרות שבו צריך למכור הסוחר כיסא בודד. מצא את $p$ המינימלי עבורו יעמוד הסוחר ביעדו.

**16)** סוכן של חברת רהיטים קנה מיטות במחיר כולל של 60,000 ₪.
רבע מכמות המיטות שקנה הוא מכר ברווח של 4.80% מיטות הוא מכר ללא רווח כלל ואת שאר המיטות הוא מכר בהפסד של 10% למיטה.
בסה"כ הרוויח הסוכן 9,500 ₪.

א. כמה מיטות קנה הסוכן?

ב. כמה שילם הסוכן עבור כל מיטה?

ג. בהנחה שהסוכן רוכש עבור החברה פעם נוספת כמות מיטות זהה ממקום אחר, ומוכר באותם התנאים, כמה עליו לשלם עבור מיטה בודדת כדי שהרווח שלו יהיה לפחות 10,000 ₪? (עגל את תשובתך לשקלים שלמים).

**17)** יצרנית מוצרי חשמל מוכרת מקררים במחיר של $x$ ₪ ליחידה.
עם השקת מקרר חדש הוחלט להעלות את מחירו ב-5% עקב הביקוש הרב.
בשנה הראשונה להשקתו נקנו מספר מקררים. שנה לאחר מכן ירד הביקוש ולכן מחיר המקרר הוזל ב-10% (ביחס למחירו בשנה הראשונה).
כעת נמכרו מספר כפול של יחידות ביחס לשנה הקודמת.

א. מצא את המחיר המקורי של מקרר אם ידוע כי סך כל הרווחים של יצרנית המקרר בשנתיים הנ"ל זהה לסכום שהייתה מרוויחה אם היו קונים את אותו מספר המקררים שנרכשו בשנה הראשונה במחיר של 4116 ₪ ליחידה.

ב. היצרנית הרוויחה בשנה השנייה 235,200 ₪ יותר מאשר בשנה הראשונה.
מצא כמה מקררים נמכרו בשנה הראשונה.

**18)** בחנות מסוימת, מחיר כובע גדול ב-40% מהמחיר של זוג כפפות.
לאחר חודש התייקר הכובע ב-50% והכפפות הוזלו ב- $p$ אחוזים.

א. מצא את $p$ עבורו קנייה של 16 כובעים ו-2 זוגות כפפות לפני השינויים תשתווה לקנייה של 4 כובעים ו-20 זוגות כפפות לאחר השינויים.

ב. מצא את $p$ עבורו ההפרש בין קניית 5 כובעים ו-4 זוגות כפפות במחירים לאחר השינויים, לבין קניית 3 כובעים ו-2 זוגות כפפות במחירים המקוריים יהיה שווה למחיר של קניית 5 זוגות כפפות במחירים המקורי.

ג. מצא את $p$ עבורו המחיר של כובע אחד ו-10 זוגות כפפות לאחר השינויים יהווה 80% מהמחיר של קניית אותם הפריטים במחירים המקוריים.

**19)** סוחר רוכש מנורות בסכום כולל של 4,000 ₪. 26 מהמנורות מכר הסוחר ברווח של 20 ₪ למנורה ואת השאר הוא מכר בהפסד של 5 ₪ למנורה.
בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 400 ₪.

א. כמה מנורות קנה הסוחר ברכישה הראשונה ובאיזה מחיר למנורה?

ב. בעסקה אחרת רכש הסוחר כמות מנורות מסוימת בהנחה של 20% ביחס למחיר ששילם בתחילה. הסוחר מכר אותם לבית עסק ברווח של 50% למנורה. ידוע כי הרוויח הסוחר בעסקה 3200 ₪.
כמה מנורות רכש הסוחר בעסקה השנייה?

**20)** סוחר קנה 450 תיקים. הוא מכר 150 מהם ברווח של 15% ואת השאר בהפסד של 5 שקלים. בסה"כ הפסיד הסוחר בעסקה 600 ₪.

א. בכמה כסף קנה הסוחר כל תיק?

ב. אם הסוחר היה מוכר את שאר התיקים בהפסד של 2 שקלים במקום 5 שקלים, האם עדיין הוא היה מפסיד מהעסקה?

ג. התיקים שמכר הסוחר ברווח של 15% נקנו ע"י חנות מרכזית.
בחודש הראשון למכירת התיקים, מכרה החנות כל תיק ברווח של 50%.
לאחר חודש העלתה החנות את המחיר של תיק ב-20% נוספים ופרסמה מבצע שבמסגרתו כל הקונה שני תיקים יקבל את השני בהנחה של 40%.
חן הגיעה לחנות בחודש הראשון וקנתה שני תיקים ואחותה, שרית, הגיעה לחנות לאחר חודש וקנתה שני תיקים במסגרת המבצע.
מי משתי האחיות שילמה מחיר נמוך יותר בממוצע על תיק?

**21)** בית קפה רכש 120 ק"ג מוצרי שוקולד. 10 ק"ג נהרסו מיד עם הגעתם למקום עקב תנאי תחזוקה רעועים, 40 ק"ג נמכרו ברווח של 3 ₪ לק"ג ואת שאר הכמות מכר בית הקפה בהפסד של 2 ₪ לק"ג. בסה"כ הפסיד בית הקפה בעסקה 60 ₪.

א. מהו המחיר של ק"ג מוצרי שוקולד?

ב. בהזמנה נוספת רכש בית הקפה כמות מסוימת של מוצרי שוקולד ושילם עבור ק"ג אחד את המחיר שמצאת שסעיף הקודם.
ידוע כי 10% מהכמות מכר בית הקפה ברווח של 50% לק"ג ו-20% מהכמות מכר בית הקפה בהפסד של 25%.
מצא באיזה מחיר צריך למכור בית הקפה את הכמות הנותרת על מנת שירוויח 70% מהסכום שהוציא.

**22)** בעל מזנון פלאפל קנה 12 ק"ג גרגירי חומוס להכנת כדורי פלאפל ו-8 ק"ג קמח לאפיית פיתות. ידוע כי המחיר של 2 ק"ג גרגירי חומוס גבוה ב-2 ₪ מהמחיר של 1 ק"ג קמח. בעל המזנון קיבל הנחה של 25% על כל 1 ק"ג גרגירי חומוס והנחה של 20% על כל 1 ק"ג קמח. לאחר ההנחה שילם בעל המזנון 74.4 ₪ בעבור קנייתו.

א. מה הם המחירים של 1 ק"ג גרגירי חומוס ו-1 ק"ג קמח?

ב. ידוע כי כל מנת פלאפל נמכרת במחיר זהה ולהכנתה דרושים 300 גרם גרגירי חומוס ו-$x$ גרם קמח.
בעל המזנון ניצל בצורה מלאה את כל הרכיבים שברשותו ולאחר מכירת כל המנות שהכין נשאר עם רווח של 245.6 ₪.
מצא את $x$ ואת המחיר של מנת פלאפל.

**23)** בעל גלידריה קנה 30 ליטרים חלב ו-18 ק"ג אבקת שוקולד להכנת גלידות שוקולד. על כל 1 ליטר חלב קיבל 5% הנחה ועל כל 1 ק"ג אבקה קיבל 10% הנחה. ידוע כי המחיר ששילם על כל כמות החלב שרכש גדולה ב-77.7 ₪ מהמחיר ששילם על כל האבקה שרכש.

א. מצא את המחיר של 1 ליטר חלב ו-1 ק"ג אבקת שוקולד אם ידוע כי הוא שילם 207.3 ₪ בעבור כל הקנייה.

ב. כדי לייצר כדור שוקולד אחד דרושים 300 מ"ל חלב ו-180 גרם אבקת שוקולד. בעל הגלידריה ניצל את כל המוצרים שקנה ופרסם כי המחיר של כדור שוקולד אחד הוא 10 ₪ וכי בקניית שני כדורי שוקולד תינתן הנחה של שקל. בעל הגלידריה מכר את כל הכדורים שברשותו והרוויח סה"כ בעסקה 762.7 ₪.
מצא כמה לקוחות קנו כדור בודד וכמה קנו שני כדורים.

**24)** סוכן כלי כתיבה רכש בקנייה מרוכזת 40 חבילות עטים ו-60 חבילות עפרונות.
חבילת עטים מכילה 12 עטים וחבילת עפרונות מכילה 10 עפרונות.
הסוכן קיבל הנחה של 10% לעט ו-15% הנחה לעפרון. בסה"כ שילם הסוכן 3102 ₪.
ידוע כי אילולא היה מקבל הסוכן את ההנחות, אז המחיר הכולל שהיה נדרש לשלם עבור כל העטים היה גדול פי 4.8 מהמחיר שהיה משלם עבור כל העפרונות.

א. מצא מה המחירים המקוריים של עט בודד ושל עפרון בודד.

ב. חנות "כותבים בכיף" קנתה כמות מסוימת של עטים ועפרונות מהסוכן והכינה מארזים לתחילת שנה שכל אחד מכיל 2 עטים ו-3 עפרונות.
הסוכן מכר לחנות את העפרונות והעטים במחירים המקוריים שלהם ואילו החנות מכרה את המארזים במחיר הגדול ב-40% מעלות ההכנה שלהם.
מצא כמה עפרונות וכמה עטים רכשה החנות מהסוכן אם ידוע כי הרוויחה מעסקה זו (לאחר שמכרה את כל המארזים שהכינה) סה"כ 72 ₪.

## תשובות סופיות:

**9)** א. 250 מרצפות. ב. 88 ₪. ג. 156,000.

**10)** מחשב-3000 ₪, מדפסת-600 ₪.

**11)** א. 1800 ₪. ב. היה מרוויח 90 ₪.

**12)** א. 5760 ₪. ב. 44%. ג. 22.4%.

**13)** א. 100 ₪. ב. 144 ₪.
ג. כדאי לקנות לאחר שנה, ללא תלות במספר החדרים.

**14)** א. 100₪ ו-20 ₪. ב. ב-200% (פי 3). ג. במחירים המקוריים.

**15)** א. 50 ₪. ב. 74.5%.

**16)** א. 12 מיטות. ב. 5,000 ₪ .
ג. המחיר המדויק הוא: 5263.15 ₪ ולכן נעגל ונדרוש: 5264 ₪ למיטה.

**17)** א. 1400 ₪ $x=$ . ב. 200 יחידות.

**18)** א. 20%. ב. 82.5%. ג. 29.8%.

**19)** א. 50 נורות ב-80 ₪ למנורה. ב. 100 מנורות.

**20)** א. 40 ₪. ב. לא. ג. שרית (66.24 ₪).

**21)** א. 4 ₪. ב. 8 ₪

**22)** א. 1 ק"ג גרגירי חומוס-4 ₪, 1 ק"ג קמח-6 ₪.
ב. 200 גרם $x=$ , מנת פלאפל-8 ₪.

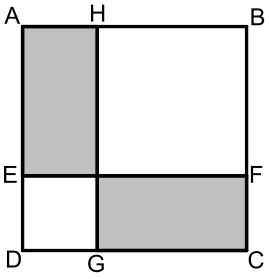
**23)** א. 1 ליטר חלב-5 ₪, 1 ק"ג אבקה-4 ₪.
ב. 30 קנו שני כדורים ו-40 קנו כדור בודד.

**24)** א. עט-6 ₪, עפרון-1 ₪.
ב. 12 מארזים ולכן 24 עטים ו-36 עפרונות.

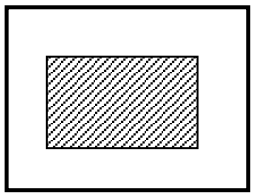
# בעיות יסודיות במרובעים:

## שאלות:

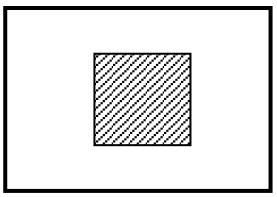
**1)** המרובע ABCD הוא ריבוע (ראה איור).
הקטע EF מקביל לצלעות הריבוע ומחלק את הצלעות AD ו-BC באופן כזה כך ש-DE ו-CF מהוות 30% מצלע הריבוע. הקטע GH מקביל לצלעות AD ו-BC ומרחקו מהצלע AD הוא 2 ס"מ.
ידוע שסכום השטחים של המלבנים המקווקוים מהווה 50% מסכום שטחי המלבנים הלבנים.
מצא את אורך צלע הריבוע.




**2)** היקף חלקה מלבנית הוא 30 ק"מ. רוצים לבנות בניין מלבני (המקווקו באיור) במרכז החלקה ששטחו הכולל הוא 10 קמ"ר.
ידוע ששטח הבניין מהווה 20% משטח החלקה.
מצא את מידות החלקה.



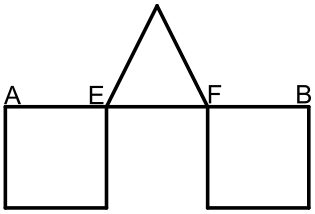
**3)** במרכז חלקה מלבנית שצלע אחת שלה גדולה ב-10 ק"מ מהצלע הסמוכה לה בונים בניין ריבועי (המקווקו באיור).
ידוע כי אורך הצלע שלו היא שליש מאורך הצלע הקטנה של החלקה. מחיר קמ"ר אחד משטח הבניין הוא 1,000 ₪ ומחיר קמ"ר אחד משטח החלקה הוא 100 ₪.
קבלן בניה שילם עבור כל השטח סכום כולל של 60,000 ₪.
מצא את מידות החלקה.



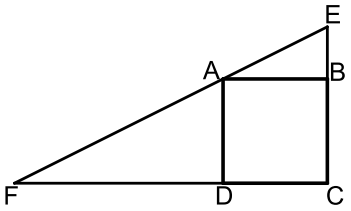
**4)** לרפי מטבח מלבני שמידותיו הם: 12×18 מטרים. רפי מחלק את המטבח לשני מלבנים כך ששטח אחד גדול פי 2 מהשטח של השני. רפי רוצה לרצף את השטח הקטן ברצפת שיש יוקרתית (השטח הימני) לעומת השטח הגדול שאותו ירצף רפי ברצפה רגילה (השטח השמאלי).
ידוע שהמחיר של מ"ר אחד מהרצפה הרגילה הוא 60% מהמחיר של מ"ר אחד מרצפת השיש היוקרתית.
רפי השקיע בריצוף המטבח סכום כולל של 3168 ₪.
כמה עולה מ"ר מכל סוג?

**בעיות במרובעים ובמשולשים ללא משפט פיתגורס:**

**5)** על הקטע AB מקצים את הנקודות E ו-F כך ששלושת הקטעים AE , EF ו-BF שווים. על הקטעים BF ו-AE בונים ריבועים ועל הקטע EF בונים משולש שווה שוקיים. ידוע כי הגובה במשולש שווה לאורך הבסיס EF וכי סכום שטחי שני המרובעים והמשולש הוא 90 סמ"ר. מצא את אורך צלע הריבוע.



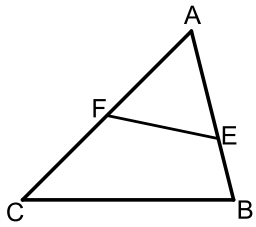

**6)** נתון ריבוע ABCD. בונים משולש ישר זווית EFC כך ש-E ו-F הן נקודות על המשכי הצלעות BC ו-DC של הריבוע בהתאמה.
הנקודה A נמצאת על יתר המשולש EF.
הקטע BE מהווה 50% מצלע הריבוע והקטע DF גדול פי 2 מצלע הריבוע. ידוע כי שטח המשולש EFC הוא 81 סמ"ר.
מצא את אורך צלע הריבוע.




**7)** הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו-AC של המשולש ABC.
ידוע כי שטח המשולש AEF הוא 22 סמ"ר.
שטח המרובע BCFE מהווה 60% משטח המשולש ABC.

א. מצא את שטח המרובע BCFE.

ב. מצא את שטח המשולש ABC.




## תשובות סופיות:

**1)** 24 ס"מ.

**2)** 10 ס"מ ו-5 ס"מ.

**3)** 15 ק"מ ו-25 ק"מ.

**4)** 20 ₪ ו-12 ₪.

**5)** 6 ס"מ.

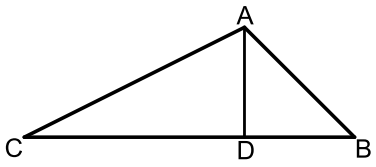
**6)** 6 ס"מ.

**7)** א. $S=33$ ב. $S=55$

# בעיות במשולשים כולל משפט פיתגורס:

## שאלות:

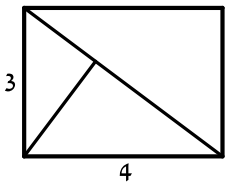
**8)** במשולש ABC מורידים גובה AD לצלע BC המחלק אותו לשני משולשים ADC ו-ABD כך שמתקיים: $S_{ADC}=2S_{ABD}$.




א. נתון שאורך הקטע BD הוא 12 ס"מ.
מצא את אורך הקטע CD.

ב. נתון שאורך הצלע AC הוא 25 ס"מ.
חשב את: $S_{ABD}$.

**9)** במלבן שצלעותיו הן 3 ו-4 ס"מ מעבירים אלכסון ומעלים לו גובה מהקדקוד התחתון לו.

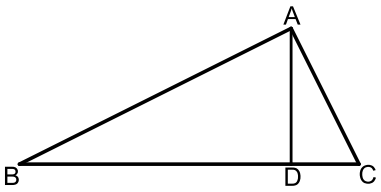



א. מצא את אורך האלכסון.

ב. מצא את אורך הגובה.

ג. מצא את אורכי שני הקטעים שהגובה מחלק את האלכסון.

**10)** במשולש ABC מורידים גובה AD לצלע BC כך שהקטע BD גדול פי 4.5 מהקטע CD.
אורך הצלע AB הוא 13 ס"מ ואורך הצלע AC הוא $5\frac{2}{3}$ ס"מ.

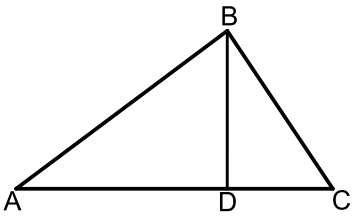



א. מצא את האורכים BD ו- CD.

ב. מצא את אורך הגובה AD.

ג. חשב את שטח המשולש ABC.

**11)** BD הוא גובה ליתר במשולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle B=90°)$.
היתר AC גדול ב-25% מהניצב AB.
ידוע כי אורך הניצב BC הוא 18 ס"מ.




א. מצא את אורכי הניצב AB והיתר AC.

ב. מהם האורכים AD ו-DC?

## תשובות סופיות:

**8)** א. 24 ס"מ. ב. $S_{ABD}=42$.

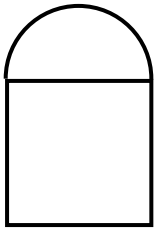
**9)** א. 5 ס"מ. ב. 2.4 ס"מ. ג. 3.2 ס"מ ו-1.8 ס"מ.

**10)** א. 12 ס"מ ו-$2\frac{2}{3}$ ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S=36\frac{2}{3}$.

**11)** א. 24 ס"מ ו-30 ס"מ. ב. 19.2 ס"מ ו-10.8 ס"מ.

# בעיות במעגל – ללא אחוזים ללא משפט פיתגורס:

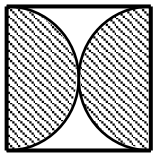
## שאלות:



**12)** בבניין של רפי השכן יש חלון מרכזי המורכב ממלבן וחצי עיגול.
ידוע כי בסיס החלון קטן פי 2 מגובה המלבן.
שטח החלון הכולל הוא: $200+12.5\pi$.

א. מצא את מידות המלבן.

ב. מצא את היקף החלון.



**13)** בריבוע שלפניך חסומים שני חצאי עיגולים הפוכים זה לזה.
ידוע כי סכום ההיקפים של שני החצאים יחדיו הוא $10\pi$.

א. מצא את אורך צלע הריבוע.

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. מצא את סכום השטחים של שני חצאי העיגולים (השטח המקווקו).

ii. מצא את השטח הכלוא בין העיגולים והריבוע (השטח הלבן).

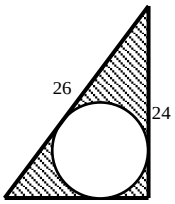
## תשובות סופיות:

**12)** א. 10 ס"מ. ב. i. $S=25\pi$. ii. $S=100-25\pi=21.4$.

**13)** א. 10 ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S=120-25\pi=41.4$.

# בעיה במעגל – ללא אחוזים וכולל משפט פיתגורס:

## שאלות:




**14)** באיור שלפניך מתואר משולש ישר זווית שבתוכו כלוא עיגול.
ידוע כי אורך היתר במשולש הוא 26 ס"מ וכי אורך הניצב האנכי הוא 24 ס"מ.

א. מצא את אורך הניצב השני.

ב. שטח המעגל הוא $25\pi$. מצא את רדיוס המעגל.

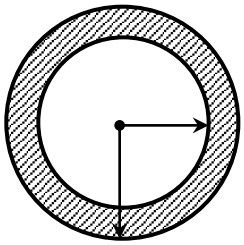
ג. מצא את השטח הכלוא בין המשולש למעגל (השטח המקווקו).

## תשובות סופיות:

**14)** א. 10 ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S=120-25\pi=41.4$.

# בעיה במעגל – כולל אחוזים:

## שאלות:



**15)** באיור שלפניך מתוארת טבעת המורכבת משני מעגלים בעלי אותו מרכז ששטחה הוא $63\pi$. ידוע כי רדיוס המעגל הפנימי קטן ב-25% מרדיוס המעגל החיצוני.
מצא את הרדיוסים של שני המעגלים.

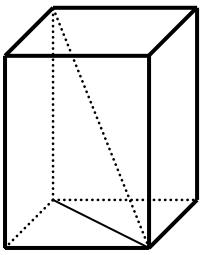
## תשובות סופיות:

**15)** 12 ו-9.

# בעיות בהנדסת המרחב:

## שאלות:

**1)** נתונה תיבה שבסיסה מלבן.
ידוע כי אורך צלע אחת של בסיס התיבה קטנה ב-25% מהצלע הסמוכה לה וכי גובה התיבה גדול פי 3 מהצלע הגדולה.
אורך אלכסון הבסיס הוא 10 ס"מ.

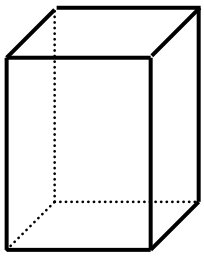


א. מצא את מידות בסיס התיבה.

ב. מצא את נפח התיבה.

ג. חשב את אורך אלכסון התיבה.

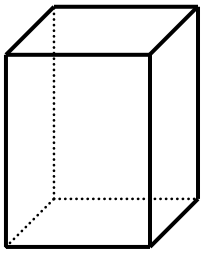
**2)** נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן וגובהה הוא 10 ס"מ.
ידוע כי נפח התיבה הוא 280 סמ"ק וכי שטח הפנים שלה הוא 276 סמ"ר.



א. מצא את מידות בסיס התיבה.

ב. מה יהיה אורך אלכסון התיבה?

**3)** נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן.
ידוע כי צלע אחת של המלבן גדולה ב-50% מהצלע הסמוכה לה.
כמו כן גובה התיבה גדול ב-50% מצלע המלבן הגדולה.
סכום ארבעת הגבהים של התיבה גדול ב-32 ס"מ מהיקף בסיס המלבן.

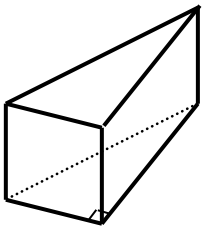


א. מצא את מידות מלבן הבסיס של התיבה.

ב. חשב את שטח המעטפת של התיבה.

ג. חשב את נפח התיבה.

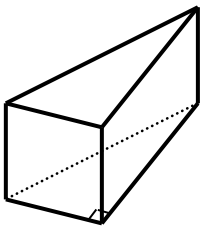
**4)** נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש ישר זווית.
ידוע כי אורך היתר במשולש הבסיס הוא 17 ס"מ.
גובה המנסרה שווה לאורך ניצב המשולש הקטן.
הניצב השני של המשולש גדול ב-7 ס"מ מהניצב הקטן.



א. חשב אורכי הניצבים ואת גובה המנסרה.

ב. חשב את נפח המנסרה.

**5)** נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש ישר זווית.
הניצב הגדול, גדול ב-4 ס״מ מהניצב קטן, וקטן ב-4 ס״מ מאורך היתר. נפח המנסרה הוא 2880 סמ״ק.

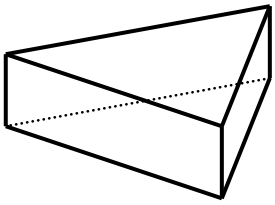


א. מצא את מידות משולש הבסיס.

ב. מצא את גובה המנסרה.

ג. מצא את שטח המעטפת של המנסרה.

**6)** נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים.
ידוע כי שטח הפאה הבנויה על מקצוע הבסיס של המשולש מהווה 80% משטח הפאה הסמוכה לה.
כמו כן ידוע כי אורך השוק במשולש בסיס גדול ב-4 ס״מ מאורך הבסיס במשולש זה. אורך גובה המנסרה הוא 4 ס״מ.

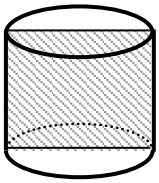


א. מצא את מידות משולש הבסיס.

ב. מה יהיה שטח המעטפת של המנסרה?

ג. מה יהיה סכום כל מקצועות המנסרה?

**7)** שטח החתך הצירי של גליל הוא 30 סמ״ר.
רדיוס הגליל וגובהו מקיימים: $2h-3r=1$.

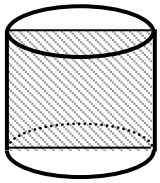


א. מצא את רדיוס הגליל ואת גובהו.

ב. חשב את שטח עיגול הבסיס של הגליל.

ג. חשב את נפח הגליל.

**8)** נתון גליל שרדיוסו הוא 4 ס״מ.
מעבירים חתך צירי בגליל.
ידוע כי היקף המלבן של החתך הצירי גדול פי 4 מאורך גובה הגליל.



א. ענה על השאלות הבאות:

i. מצא את גובה הגליל.

ii. איזה מרובע הוא המלבן של החתך הצירי?

ב. חשב את שטח הפנים של הגליל.

ג. חשב את נפח הגליל.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 6 ס"מ ו-8 ס"מ. ב. $V=1152$. ג. 26 ס"מ.

**2)** א. 4 ס"מ ו-7 ס"מ. ב. $\sqrt{165}=12.84$ ס"מ.

**3)** א. $8\times12\times18$ ס"מ. ב. $S=720$. ג. $V=1728$.

**4)** א. 8 ס"מ, 8 ס"מ ו-15 ס"מ. ב. $V=480$.

**5)** א. 12 ס"מ, 16 ס"מ ו-20 ס"מ. ב. 30 ס"מ. ג. $S=1440$.

**6)** א. 16 ס"מ ו-20 ס"מ. ב. $S=224$. ג. 124 ס"מ.

**7)** א. $r=3\ ,\ h=5$. ב. $S=9\pi$. ג. $V=45\pi$.

**8)** א.i. 8 ס"מ. א.ii. ריבוע. ב. $S=96\pi$.
ג. $V=128\pi$.

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 5 - מבוא לגיאומטריה של המישור (גיאומטריה אוקלידית)

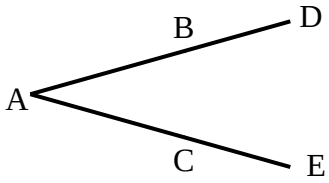
### תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות ..... (ללא ספר)
2. חיבור וחיסור קטעים ..... 101
3. חישובי זוויות וחיבור וחיסור זוויות ..... 102
4. זוויות קדקודיות וזוויות צמודות ..... 104
5. זוויות בין ישרים מקבילים ..... 105

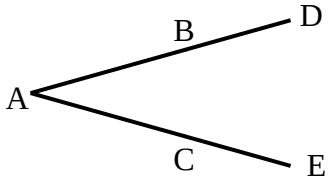
# חיבור וחיסור קטעים:

## שאלות:

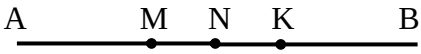
**1)** באיור שלפניך נתון:
$AB = AC \ , \ BD = CE$.
הוכח: $AD = AE$.



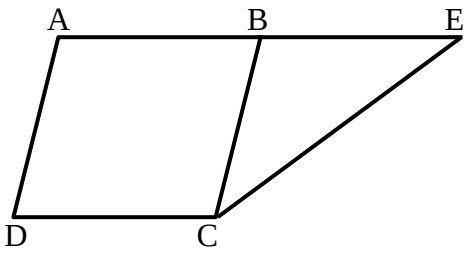

**2)** באיור שלפניך נתון:
$AD = AE \ , \ AB = AC$.
הוכח: $BD = CE$.




**3)** הנקודות $A \ , M \ , N \ , K \ , B$ נמצאות על ישר אחד.
נתון כי: $AM = KB \ , \ MN = NK$.
הוכח: $AN = BN$.




**4)** בסרטוט שלפניך נתון כי:
$BC = AB \ , \ BE + BC = 2AB$.
הוכח: $AB = BE$.




## תשובות סופיות:

**1)** שאלת הוכחה.

**2)** שאלת הוכחה.

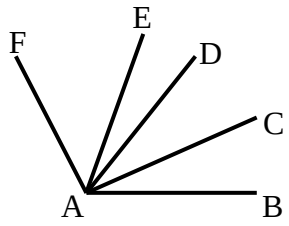
**3)** שאלת הוכחה.

**4)** שאלת הוכחה.

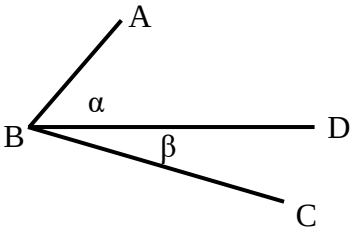
## חישובי זוויות וחיבור וחיסור זוויות:

### שאלות:

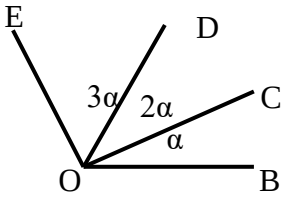
**5)** נתון: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAC$ , $\sphericalangle FAE = 2 \cdot \sphericalangle EAD$ .
וכן: $\sphericalangle FAD = 60°$ , $\sphericalangle EAB = 80°$ .
חשב את הזויות הבאות:
$\sphericalangle CAB$ , $\sphericalangle EAC$ , $\sphericalangle FAB$ .



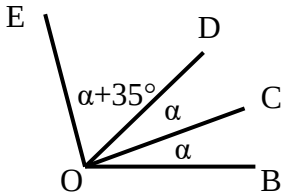

**6)** באיור שלפניך נתון: $\sphericalangle ABC = 69°$ .
נתון כי: $\alpha = 2\beta$ (זוויות סמוכות).
מצא את $\alpha$ ואת $\beta$ .



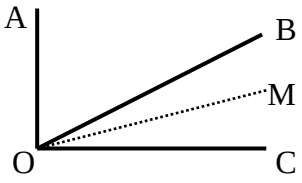

**7)** באיור שלפניך מספר קרניים היוצאים מהנקודה O.
הנתונים הם: $\sphericalangle EOB = 138°$ .
חשב את הזוויות הבאות:
$\sphericalangle COB$ , $\sphericalangle DOC$ , $\sphericalangle EOD$ .



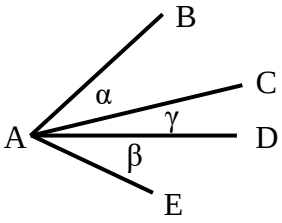

**8)** באיור שלפניך נתון: $\sphericalangle EOB = 110°$ .
שאר הנתונים מופיעים בתרשים.
חשב את הזוויות הבאות:
$\sphericalangle DOC$ , $\sphericalangle EOC$ .




**9)** נתון האיור הבא ובו: $\sphericalangle AOC = 90°$ .
OM חוצה את זוית BOC.
מתקיים: $\sphericalangle AOB = 3\sphericalangle MOC$ .
חשב את: $\sphericalangle BOM$ , $\sphericalangle AOM$ .




**10)** בסרטוט שלפניך נתון: $\alpha = \beta$ .
הוכח כי: $\sphericalangle EAC = \sphericalangle BAD$ .



## תשובות סופיות:

**5)** $\sphericalangle CAB = 30^\circ$ , $\sphericalangle EAC = 50^\circ$ , $\sphericalangle FAB = 120^\circ$.

**6)** $\alpha = 46^\circ$ , $\beta = 23^\circ$.

**7)** $\sphericalangle DOE = 69^\circ$ , $\sphericalangle COD = 46^\circ$ , $\sphericalangle BOC = 23^\circ$.

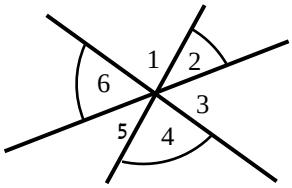
**8)** $\sphericalangle DOC = 25^\circ$ , $\sphericalangle EOC = 85^\circ$.

**9)** $\sphericalangle BOM = 18^\circ$ , $\sphericalangle AOM = 72^\circ$.

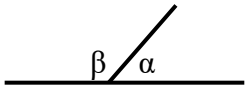
**10)** שאלת הוכחה.

# זוויות קדקודיות וזוויות צמודות:

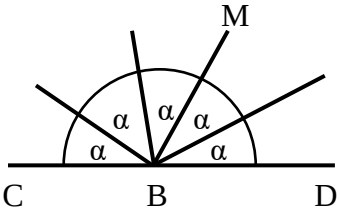
## שאלות:



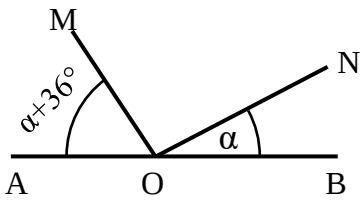

**11)** חשב את סכום הזויות הבאות (נמק):
$\sphericalangle 2+\sphericalangle 4+\sphericalangle 6$



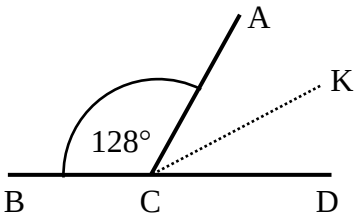

**12)** באיור שלפניך הזויות $\alpha$ ו- $\beta$ הן זויות צמודות.
ידוע כי: $\alpha=63°$. מצא את זוית $\beta$.




**13)** באיור שלפניך הזוית CBD היא שטוחה.
כל הזוויות שוות ל- $\alpha$.
א. חשב את $\alpha$.
ב. חשב את זוית CBM.




**14)** בסרטוט שלפניך ידוע:
הזוית AOB היא שטוחה.
נתון: $\alpha=27°$.
הוכח כי: $MO\perp NO$.




**15)** הזוויות $\sphericalangle ACD$ ו- $\sphericalangle ACB$ הן צמודות.
ידוע כי CK חוצה זוית ACD.
כמו כן: $\sphericalangle ACB=128°$.
חשב את זוית BCK.

## תשובות סופיות:

**11)** $180°$.

**12)** $\beta=117°$.

**13)** א. $\alpha=36°$ ב. $\sphericalangle CBM=108°$.

**14)** שאלת הוכחה.

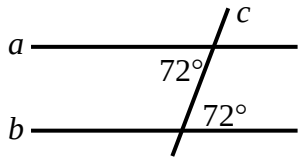
**15)** $\sphericalangle BCK=154°$.

# זוויות בין ישרים מקבילים:

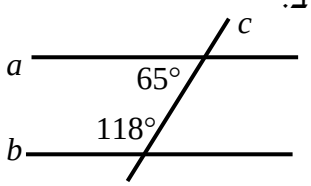
## שאלות:

**16)** קבע בכל מקרה האם הישרים $a$ ו-$b$ מקבילים או שלא. נמק.

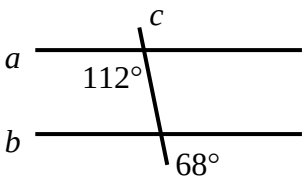
א.



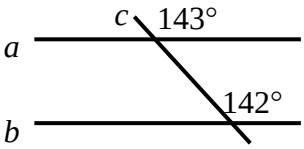

ב.




ג.

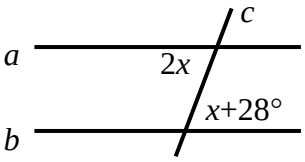



ד.

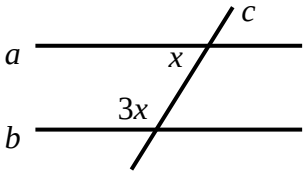



**17)** הישרים $a$ ו-$b$ מקבילים. מצא את $x$ בכל אחד מהמקרים הבאים:

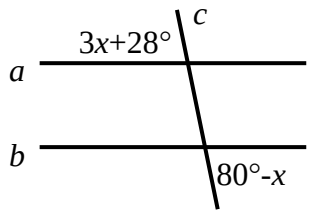
א.



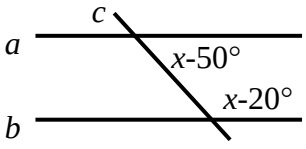

ב.



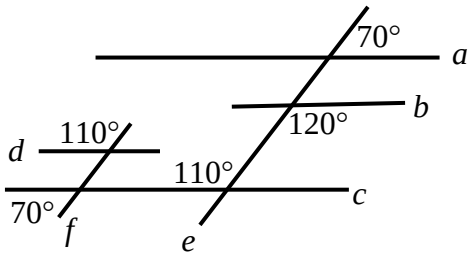

ג.



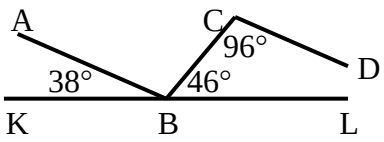

ד.



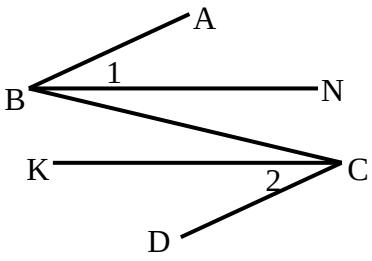

**18)** מצא את זוגות הישרים המקבילים בסרטוט הבא. נמק.



**19)** בסרטוט שלפניך נתון כי KL הוא קו ישר.
שאר הזוויות מופיעות בתרשים.
הוכח כי: $AB \parallel CD$.



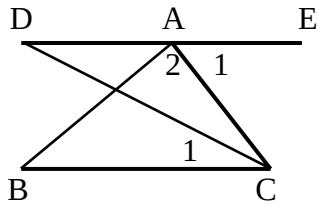

**20)** באיור שלפניך נתון כי:
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$ , $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle C_2$.
הוכח כי: $BN \parallel CK$.



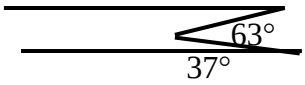

**21)** באיור שלפניך מופיע קטע ישר DE.
מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
מחברים את BC וידוע כי $BC \parallel DE$.
מעבירים את CD – חוצה זווית C.
נתון: $\sphericalangle A_2 = 85°$ , $\sphericalangle A_1 = 68°$.

א. חשב את הזווית $\sphericalangle C_1$.

ב. חשב את הזווית $\sphericalangle B$.




**22)** בסרטוט שלפניך נתון:
$AB \parallel DE$ , $\sphericalangle B = 63°$ , $\sphericalangle D = 37°$.
חשב את גודל הזווית BCD.




## תשובות סופיות:

**16)** א. כן ב. לא ג. כן ד. לא.

**17)** א. 28° ב. 45° ג. 13° ד. 125°.

**18)** $a \parallel c \parallel d$ , $e \parallel f$.

**19)** שאלת הוכחה.

**20)** שאלת הוכחה.

**21)** א. 34° ב. 27°.

**22)** $\sphericalangle BCD = 100°$.

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 6 - גיאומטריה אוקלידית - משולשים

### תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות ..... (ללא ספר)
2. זוויות במשולשים ..... (ללא ספר)
3. משולש שווה שוקיים ..... (ללא ספר)
4. חפיפת משולשים ..... (ללא ספר)
5. זווית חיצונית במשולש ..... (ללא ספר)
6. משולש ישר זווית ..... (ללא ספר)
7. קטע אמצעים במשולש ..... (ללא ספר)
8. מפגש תיכונים במשולש ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 7 - גיאומטריה אוקלידית - מרובעים

### תוכן העניינים

1. מרובע כללי ..... (ללא ספר)
2. המקבילית ..... (ללא ספר)
3. המלבן ..... (ללא ספר)
4. המעוין ..... (ללא ספר)
5. הריבוע ..... (ללא ספר)
6. הטרפז ..... (ללא ספר)
7. הדלתון ..... (ללא ספר)
8. סיכום משפחת המרובעים ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 8 - גיאומטריה אוקלידית- שטחים והיקפים

תוכן העניינים

1. שטחים והיקפים של משולשים ..... (ללא ספר)
2. שטחים והיקפים של מרובעים ..... (ללא ספר)
3. שאלות עם מקבילית ..... (ללא ספר)
4. שאלות עם מלבן ..... (ללא ספר)
5. שאלות עם מעוין ..... (ללא ספר)
6. שאלות עם ריבוע ..... (ללא ספר)
7. שאלות עם טרפז ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 9 - גיאומטריה אוקלידית - המעגל

### תוכן העניינים

1. קשתות ומיתרים במעגל ..... (ללא ספר)
2. אנך אמצעי למיתר ..... (ללא ספר)
3. זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל ..... (ללא ספר)
4. זווית היקפית הנשענת על קוטר ..... (ללא ספר)
5. משיקים למעגל ..... (ללא ספר)
6. משיק ומיתר ..... (ללא ספר)
7. שני מעגלים ..... (ללא ספר)
8. מעגל חוסם ומעגל חסום ..... (ללא ספר)
9. שטחים והיקפים במעגל ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 10 - גיאומטריה אוקלידית - פרופורציה ודמיון

### תוכן העניינים

1. משפט תאלס ..... (ללא ספר)
2. הרחבות של משפט תאלס ..... (ללא ספר)
3. משפט חוצה זווית ..... (ללא ספר)
4. שאלות המשלבות את משפט תלס ומשפט חוצה זווית ..... (ללא ספר)
5. דמיון משולשים ..... (ללא ספר)
6. יחסים בין גדלים שונים ושטחים במשולשים דומים ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 11 - גיאומטריה אוקלידית - שאלות חזרה

### תוכן העניינים

1. שאלות מסכמות ללא פרופורציה ..... (ללא ספר)
2. שאלות מסכמות הכוללות פרופורציה ודמיון ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 12 - גיאומטריה אנליטית - הישר

### תוכן העניינים

1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית ..... 107
2. משוואת הישר ..... 111
3. מצבים הדדיים בין ישרים ..... 115
4. שאלות מסכמות ..... 117

# מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

## סיכום כללי:

### נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ יחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

- אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ הוא:

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ y_M=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

- שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ הוא: $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

## שאלות:

### שאלות העוסקות באמצע קטע:

**1)** מצא את אמצעי הקטעים שקודקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

א. $A(1,4)\ ,\ B(5,-8)$ ב. $A(-3,0)\ ,\ B(3,-2)$

ג. $A(4,5)\ ,\ B(-4,-5)$ ד. $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\ ,\ B\left(7\frac{1}{2},-2\right)$

ה. $A(6,-1)\ ,\ B(-3,-1)$ ו. $A(4,7)\ ,\ B(4,-12)$

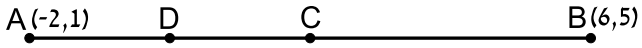
**2)** נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

א. $A(4,-2)\ ,\ M(2,1)$ ב. $A(-6,-8)\ ,\ M(0,0)$

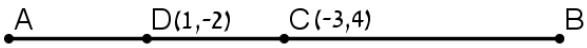
ג. $A(13,-11)\ ,\ M(4,-7)$ ד. $A\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)\ ,\ M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

**3)** נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
ידוע כי שיעורי הקודקודים B ו-C הם $B(2,-4)\ ,\ C(6,1)$.
מעבירים תיכון AD לבסיס BC.
מצא את שיעורי הנקודה D.

**4)** באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $A(-2,1)$ , $B(6,5)$.
מצא את שיעורי הנקודה D.




**5)** באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $D(1,-2)$ , $C(-3,4)$.
מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.




**6)** הנקודות $B(-10,4)$ , $A(2,-7)$ ו-$C(6,11)$ הן שלושה קודקודים של מקבילית ABCD.
מצא את שיעורי הקודקוד הרביעי.

**שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:**

**7)** מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

א. $A(4,7),B(-3,7)$
ב. $A(6,2),B(1,2)$
ג. $A(-3,10),B(0,6)$
ד. $A(6,-9),B(1,3)$
ה. $A(4,7),B(13,-1)$
ו. $A(6,6),B(-9,-9)$

**8)** חשב את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם: $C(0,14)$ , $B(4,9)$ , $A(3,-2)$.

**9)** נתונות נקודות $B(6,y)$ , $A(14,4)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך.
מצא את $y$.

**10)** נתונות נקודות $B(15,-2)$ , $A(x,-12)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך.
מצא את $x$.

**11)** נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה-$y$ שלה גדול פי 3 משיעור ה-$x$ שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

**12)** במשולש שווה שוקיים $ABC$ $(AB=AC)$ ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$ יחידות אורך. שיעורי הקודקוד A הם $(0,4)$ ושיעורי ה- $y$ של הקודקודים B ו-C הוא 2-.
מצא את קודקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

**13)** אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC}=\sqrt{50}$ וידוע כי: $A(-3,-2)$ , $B(-4,1)$.
מצא את היקף המלבן.

**שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:**

**14)** מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

א. $A(5,2)$ , $B(4,1)$

ב. $A(3,-2)$ , $B(-3,1)$

ג. $A(7,8)$ , $B(6,15)$

ד. $A(0,5)$ , $B(7,0)$

ה. $A(6,9)$ , $B(6,-7)$

ו. $A(4,-1)$ , $B(18,-1)$

**15)** מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו הם:
$A(6,5)$ , $B(2,13)$ , $C(4,-7)$ מונחים עליהם.

## תשובות סופיות:

1) א. $(3,-2)$ ב. $(0,-1)$ ג. $(0,0)$ ד. $\left(4,-\frac{5}{8}\right)$
ה. $(1.5,-1)$ ו. $(4,-2.5)$.

2) א. $B(0,4)$ ב. $B(6,8)$ ג. $B(-5,-3)$ ד. $B\left(1,\frac{2}{3}\right)$.

3) $D(4,-1.5)$.

4) $D(0,2)$.

5) $B(-11,16)$ , $A(5,-8)$.

6) $D(18,0)$.

7) א. $d_{AB}=7$ ב. $d_{AB}=5$ ג. $d_{AB}=5$ ד. $d_{AB}=13$
ה. $d_{AB}=\sqrt{145}$ ו. $d_{AB}=15\sqrt{2}$.

8) 33.727 יחידות אורך $\approx P_{ABC}$.

9) $y=10$ או $y=-2$.

10) $x=-9$ או $x=39$.

11) $B(-1,-3)$.

12) $C(-3,-2)$ , $B(3,-2)$.

13) 18.97 יחידות אורך $\approx P_{ABCD}=6\sqrt{10}$.

14) א. $m_{AB}=1$ ב. $m_{AB}=-\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB}=-7$ ד. $m_{AB}=-\frac{5}{7}$
ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB}=0$.

15) $m_{AC}=6$ , $m_{BC}=-10$ , $m_{AB}=-2$.

# משוואת הישר:

## סיכום כללי:

### שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-$x$: $m = \tan\alpha$.

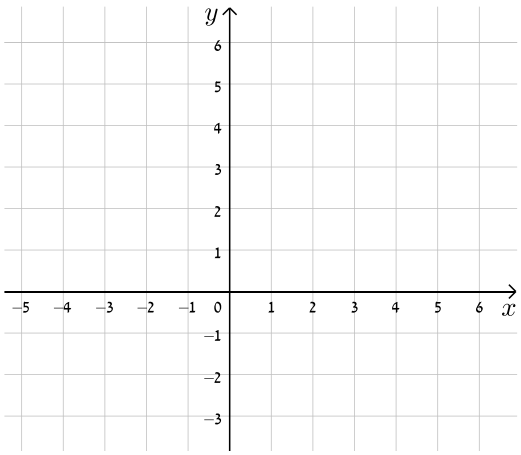
### משוואת הישר:

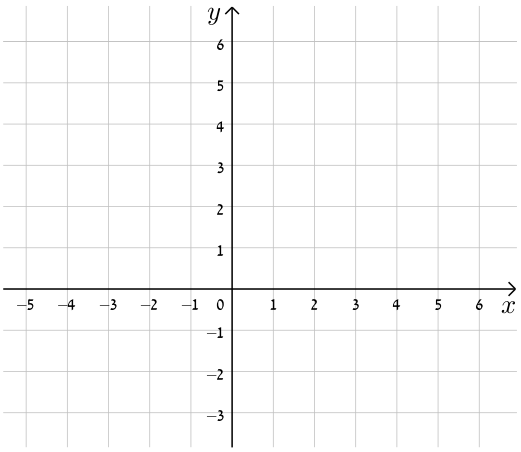
- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y = mx + n$.
  כאשר: $m$ הוא שיפוע הישר ו-$n$ הוא שיעור ה-$y$ של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-$y$.
- נוסחה למציאת משוואת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

## שאלות:

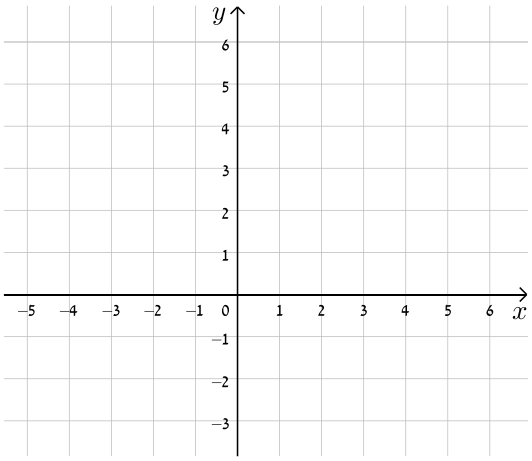
**16)** עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

א. $y = x + 4$ ב. $y = -x + 5$

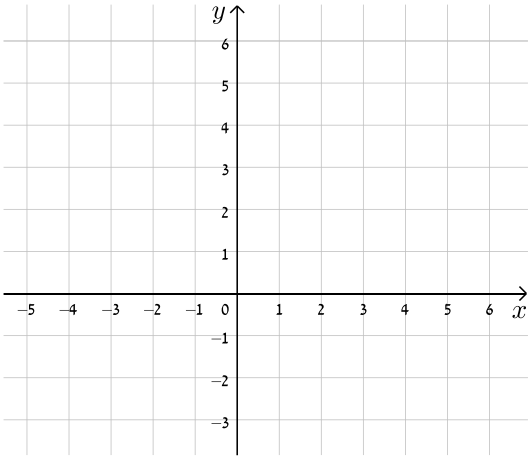


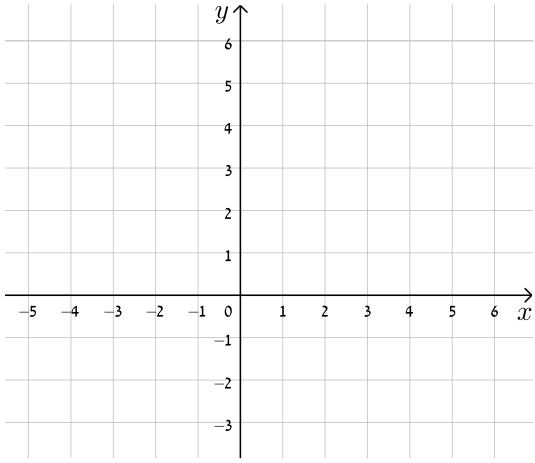
ג. $y=2x-3$



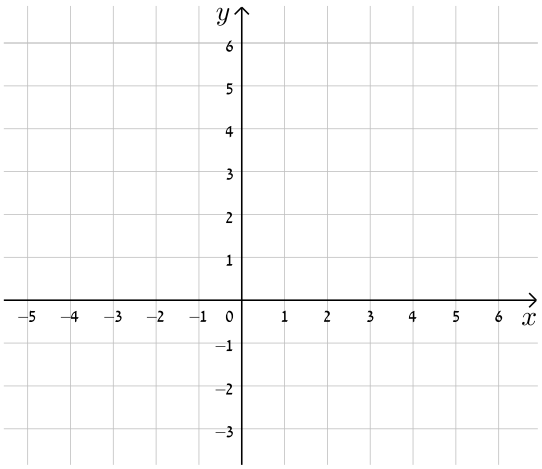
ד. $y=-3x+5$



ה. $y=3x-1$

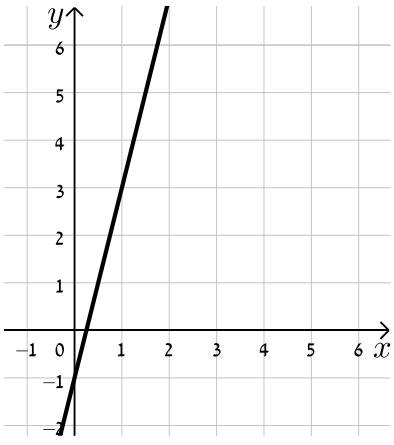


ו. $y=8-4x$

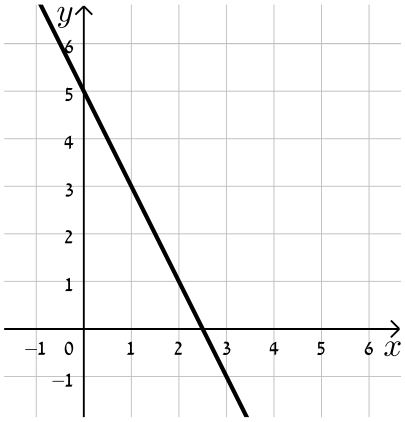


**17)** כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

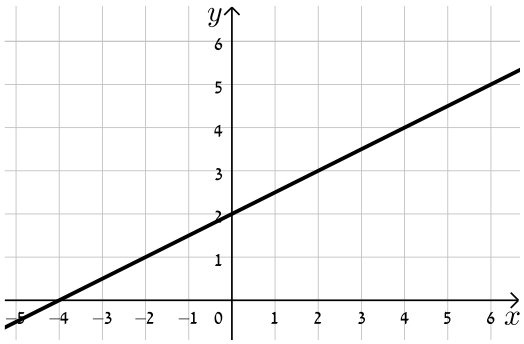
א.



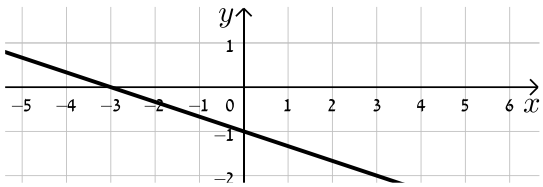
ב.



ג.




ד.




**18)** התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:

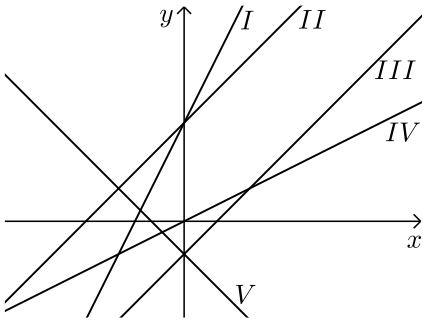
א. $y=x+3$.

ב. $y=-x-1$.

ג. $y=2x+3$.

ד. $y=x-1$.

ה. $y=\frac{1}{2}x$.




**19)** נתונה משוואת הישר הבאה: $y=2x+3$. קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות עליו: $D(6,15)$ , $C(0,4)$ , $B(3,3)$ , $A(-1,1)$.

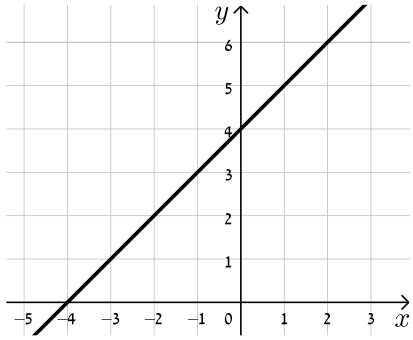
**20)** נתונה משוואת הישר הבאה: $y=mx-2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4,2)$ נמצאת על הישר. מצא את $m$ וקבע האם גם הנקודה $B(7,-2)$ נמצאת עליו.

**21)** הנקודות $B(4,1)$ , $A(5,-3)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא: $y=mx+n$. מצא את $m$ ואת $n$.

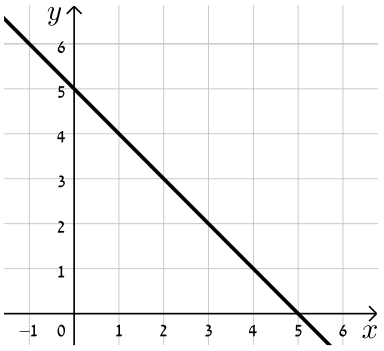
## תשובות סופיות:

**16)** להלן הגרפים של משוואות הישרים:

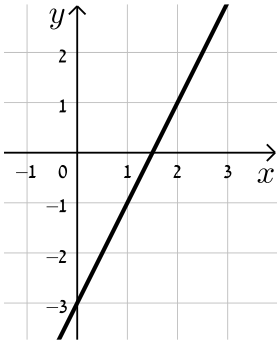
א.



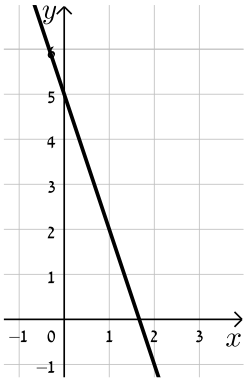
ב.



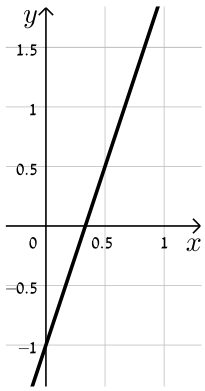
ג.



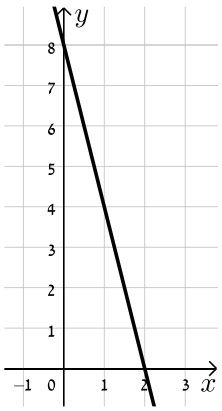
ד.



ה.



ו.



**17)** א. $y=4x-1$ ב. $y=-2x+5$ ג. $y=\frac{1}{2}x+2$ ד. $y=-\frac{1}{3}x-1$.

**18)** א.II. ב.V. ג.I. ד.III. ה.IV.

**19)** נמצאות: A , D. לא נמצאות: B , C.

**20)** $m=\frac{9}{8}$ , B לא נמצאת.

**21)** $m=-4$ , $n=17$.

# מצבים הדדיים בין ישרים:

## סיכום כללי:

**מצב הדדי בין שני ישרים:**

- ישרים מקבילים מקיימים: $m_1 = m_2$ , $n_1 \neq n_2$.
- ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.
- ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1 = m_2$ , $n_1 = n_2$.

## שאלות:

**22)** מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$

**23)** קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}$

**24)** קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

א. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}$

**25)** משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y = 6x - 2$.

א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?

ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

**26)** במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $A(5,-1)$ , $B(3,7)$ , $C(-5,5)$.
הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

**27)** מצא את משוואות הישרים הבאים:

א. ישר העובר דרך הנקודה $A(1,3)$ ושיפועו $m=2$.

ב. ישר העובר דרך הנקודה $A(0,-4)$ ושיפועו $m=\frac{1}{3}$.

ג. ישר העובר דרך הנקודה $A(5,9)$ ושיפועו $m=0$.

ד. ישר העובר דרך הנקודות $A(5,-12)$ ו-$B(6,-6)$.

ה. ישר העובר דרך הנקודה $A(-6,4)$ ומקביל לישר: $y=2x-3$.

ו. ישר העובר דרך הנקודה $A(3,-5)$ ומקביל לציר ה-$y$.

ז. ישר העובר דרך הנקודה $A(-7,-3)$ ומאונך לישר: $y=x+3$.

ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים: $y=11x-4$ ו-$y=3x-12$
ומקביל לישר: $y=7x+5$.

## תשובות סופיות:

**22)** א. $(-1,1)$ ב. $(-6,-18)$ ג. $(10,16)$.

**23)** א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.

**24)** מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.

**25)** א. $m_{AB}=m_{CD}=6$ , $m_{BC}=m_{AD}=-\frac{1}{6}$.

ב. הכל הפוך: $m_{AB}=m_{CD}=-\frac{1}{6}$ , $m_{BC}=m_{AD}=6$.

**26)** שאלת הוכחה.

**27)** א. $y=2x+1$ ב. $y=\frac{1}{3}x-4$ ג. $y=9$ ד. $y=6x-42$

ה. $y=2x+16$ ו. $x=3$ ז. $y=-x-10$ ח. $y=7x-8$.

# שאלות מסכמות:

## שאלות:

**28)** במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.
ידוע כי: $A(3,-2)$ , $B(2,4)$ , $D(-2,2)$.

א. כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.

ב. מצא את שיעורי הקודקוד C.

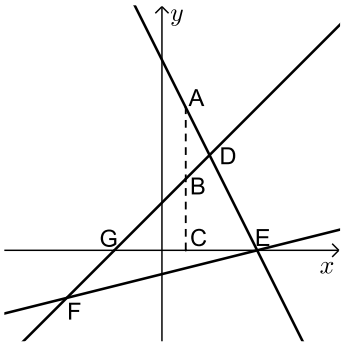
ג. כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

**29)** נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים $A(-9,1)$ ו-$B(5,-7)$.
משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x+3y+6=0$.

א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.

ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.

**30)** שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים בשרטוט:
$x-4y-4=0$ , $x-y+2=0$ ו-$2x+y-8=0$.
הקטע AC מקביל לציר ה-$y$.




א. חשב את שטח המשולש DEF.

ב. נתון: $d_{BC}=3$.
חשב את אורך הקטע AB.

**31)** BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד $A(-6,1)$.
משוואת התיכון BD היא $x-y=1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x+5y=67$.
מצא את שיעורי הקודקוד C.

**32)** נתון טרפז ABCD $(AB\|CD)$ ובו משוואת השוק BC היא: $x=2$.
משוואת הבסיס CD היא $2x+3y=7$ וידוע כי $A(-4,1)$.

א. מצא את משוואת הבסיס AB.

ב. מצא את שיעורי הקודקודים B ו-C.

ג. מעבירים את האלכסון AC.
הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.

## תשובות סופיות:

**28)** א. $y=-\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}$ ב. $C(-6,0)$ ג. $y=-\frac{2}{9}x-\frac{4}{3}$.

**29)** א. $l_{BD}: y=3x-22$. ב. $l_{BC}: y=-\frac{1}{8}x-6\frac{3}{8}$.

**30)** א. 18 יח"ש $=S_{EDF}$. ב. 3 יחידות אורך $=AB$.

**31)** $C(14,5)$.

**32)** א. $y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ ב. $B(2,-3)$ , $C(2,1)$ ג. 12 יחידות שטח $=S_{ABC}$.

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 13 - גיאומטריה אנליטית - המעגל

### תוכן העניינים

1. שאלות יסודיות במציאת משוואת מעגל ..... 119
2. מעגל המשיק לצירים ..... 123
3. משיק למעגל ..... 124
4. שאלות מסכמות ..... 125

# שאלות יסודיות במציאת משוואת מעגל:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.

**משוואת מעגל:**

משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $M(a,b)$ ורדיוסו $R$ היא: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

**משוואת מעגל קנוני:**

משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים $M(0,0)$)

ורדיוסו $R$ היא: $x^2+y^2=R^2$.

## שאלות:

**1)** מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $(x-3)^2+(y+5)^2=49$.

ב. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=10$.

ג. $(x-m)^2+(y+n)^2=m^2+n^2$.

**2)** כתוב את משוואות המעגלים שמרכזם M ורדיוסם $R$:

א. $M(4,-2)\ ,\ R=3$

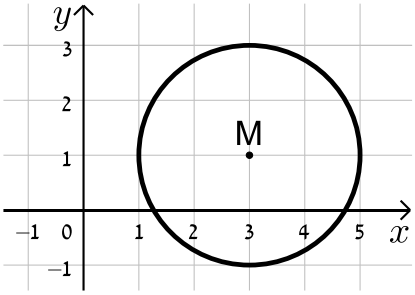
ב. $M(-3,5)\ ,\ R=10$

ג. $M(5,5)\ ,\ R=\sqrt{40}$

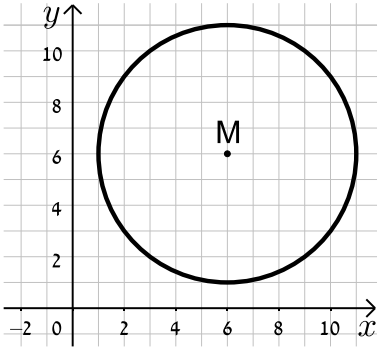
ד. $M(10,-12)\ ,\ R=\sqrt{30}$

**3)** כתוב את משוואות המעגלים הבאים בכל מקרה:

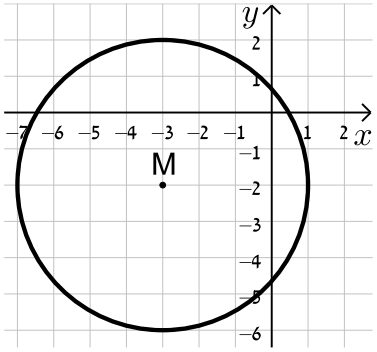
א.



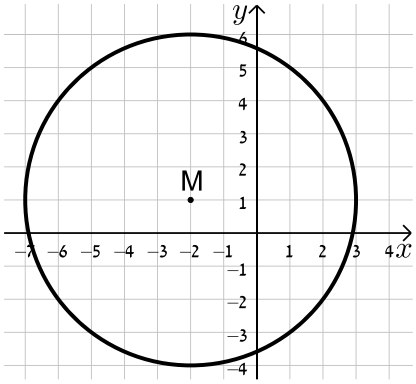

ב.




ג.




ד.




**4)** מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(-4,5)$ ומרכזו בנקודה $O(2,-1)$.

**5)** מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(-5,6)$ והוא חותך את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=9$.

**6)** מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(0,-7)$ והוא חותך את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=3$.

**7)** מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(11,2)$, רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר $y=2x-1$.

**8)** מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות $A(-2,3)$ ו-$B(4,-3)$ הן קצות הקוטר שלו.

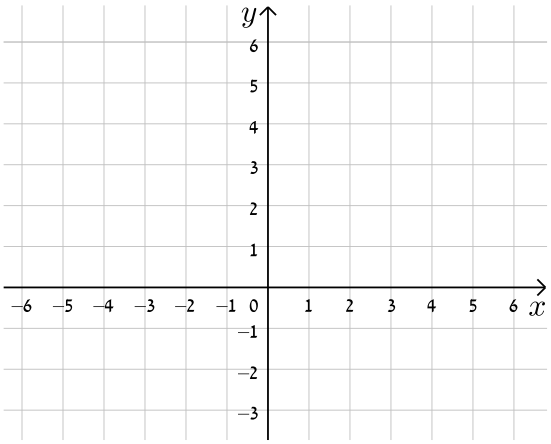
**9)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר $x=4$, רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה-$x$ מיתר שאורכו 12.

**10)** נתונים שני מעגלים בעלי אותו המרכז $M(3,-1)$, האחד הוא בעל רדיוס $R$ והשני בעל רדיוס של $2R$.

א. כתוב את המשוואות של שני המעגלים (בטא באמצעות $R$).

ב. מה תהיינה המשוואות עבור $R=2$?

ג. צייר את שני המעגלים במערכת הצירים שלפניך.




**11)** שני מעגלים עם מרכזים $M_1(6,2)$ ו-$M_2(-3,-4)$ חותכים זה את זה בנקודה $(-2,3)$. מצא את משוואות המעגלים.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $M(3,-5)\ ,\ R=7$ ב. $M(-0.5,0)\ ,\ R=\sqrt{10}$

ג. $M(m,-n)\ ,\ R=\sqrt{m^2+n^2}$ .

**2)** א. $(x-4)^2+(y+2)^2=9$ ב. $(x+3)^2+(y-5)^2=100$

ג. $(x-5)^2+(y-5)^2=40$ ד. $(x-10)^2+(y+12)^2=30$ .

**3)** א. $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ ב. $(x-6)^2+(y-6)^2=25$

ג. $(x+3)^2+(y+2)^2=16$ ד. $(x+2)^2+(y-1)^2=25$ .

**4)** $(x-2)^2+(y+1)^2=72$ .

**5)** $(x+5)^2+(y-6)^2=232$ .

**6)** $x^2+(y+7)^2=100$ .

**7)** $(x+1)^2+(y+3)^2=169$ או $(x-7.8)^2+(y-14.6)^2=169$ .

**8)** $(x-1)^2+y^2=18$ .

**9)** $(x-4)^2+(y-8)^2=100$ או $(x-4)^2+(y+8)^2=100$

**10)** א. $(x-3)^2+(y+1)^2=4R^2$ , $(x-3)^2+(y+1)^2=R^2$

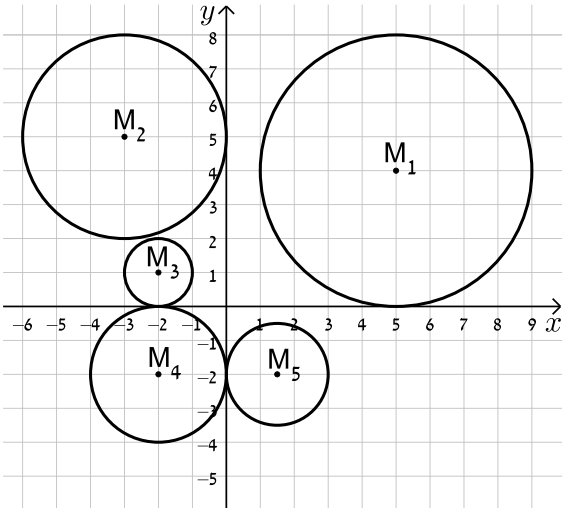
ב. $(x-3)^2+(y+1)^2=16$ , $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ .

**11)** $(x-6)^2+(y-2)^2=65$ , $(x+3)^2+(y+4)^2=50$

# מעגל המשיק לצירים:

## שאלות:

**12)** כתוב את משוואות המעגלים הבאים:




**13)** מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

**14)** מצא את משוואת המעגל שמשיק לציר ה-$x$ ומרכזו בנקודה $M(16,8)$.

**15)** מצא את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על הישר $2x+3y+6=0$ והוא משיק לשני הצירים.

## תשובות סופיות:

**12)** $M_1:(x-5)^2+(y-4)^2=16$ , $M_2:(x+3)^2+(y-5)^2=9$
$M_3:(x+2)^2+(y-1)^2=1$ , $M_4:(x+2)^2+(y+2)^2=4$
$M_5:(x-1.5)^2+(y+2)^2=2\frac{1}{4}$

**13)** $(x\pm4)^2+(y\pm4)^2=16$.

**14)** $(x-16)^2+(y-8)^2=64$.

**15)** $(x-6)^2+(y+6)^2=36$ , $\left(x+1\frac{1}{5}\right)^2+\left(y+1\frac{1}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$.

# משיק למעגל:

## שאלות:

**16)** מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ בנקודות על המעגל שבהן $y=5$.

## תשובות סופיות:

**16)** $4x-3y+35=0$ ו- $4x+3y=27$.

# שאלות מסכמות:

## שאלות:

**17)** נתון מעגל שמשוואתו: $(x-3)^2+(y+4)^2=25$.

א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה-$x$.
מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

**18)** נתון ישר שמשוואתו: $y=2x-10$.
הישר חותך את ציר ה-$x$ בנקודה A ואת ציר ה-$y$ בנקודה B.
בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו.
המשיק חותך את ציר ה-$y$ בנקודה C.
מצא את אורך הקטע BC.

**19)** נתון המעגל שמשוואתו: $x^2+y^2=81$.
מסמנים ב-A את נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה-$x$.
הנקודה A היא מרכזו של מעגל נוסף בעל רדיוס של 12.
מסמנים את נקודות החיתוך של שני המעגלים ב-B ו-C.
מצא את שטח המשולש שנוצר בין הנקודות B, C ו-O (ראשית הצירים).

## תשובות סופיות:

**17)** א. $(0,-8)$, $(6,0)$, $(0,0)$ ב. 27 יח"ש.

**18)** 12.5 יחידות אורך.

**19)** $S_{\Delta BOC}=\sqrt{80}$ יח"ש.

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 14 - טריגונומטריה א - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

### תוכן העניינים

1. הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 15 - טריגונומטריה א - זהויות טריגונומטריות

### תוכן העניינים


1. זהויות היסוד ..... (ללא ספר)
2. ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות ..... (ללא ספר)
3. מעגל היחידה ..... (ללא ספר)
4. סכום והפרש זוויות ..... (ללא ספר)
5. זווית כפולה ..... (ללא ספר)
6. סכום והפרש פונקציות ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 16 - טריגונומטריה א - טריגונומטריה במישור

### תוכן העניינים

1. טריגונומטריה במישור ..... (ללא ספר)
2. שאלות מסכמות ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 17 - טריגונומטריה במרחב - התיבה והקובייה

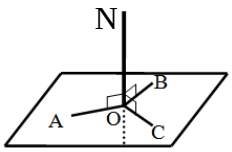
### תוכן העניינים

1. הגדרות יסודיות ..... 126
2. תיבה שבסיסה ריבוע ..... 129
3. תיבה שבסיסה מלבן ..... 133
4. הקובייה ..... 138

# הגדרות יסודיות:

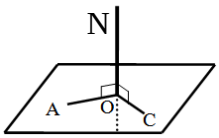
## סיכום כללי:

**הגדרה:**




ישר המאונך לכל הישרים במישור העוברים דרך עקבו נקרא אנך למישור.
באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים AO , BO , CO שעל המישור.

**משפט:**

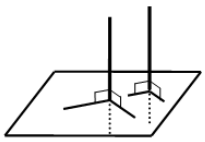



אם ישר מאונך לשני ישרים במישור העוברים דרך עקבו אזי הוא מאונך למישור כולו.
באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים AO , CO שעל המישור ולכן מאונך למישור כולו.

**משפט:**

בכל נקודה במישור אפשר להעלות אנך אחד בלבד.

**משפט:**

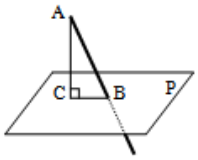


מנקודה שמחוץ למישור אפשר להוריד אנך אחד בלבד למישור זה.

**משפט:**

שני אנכים למישור אחד הם מקבילים.
באיור הסמוך ניתן לראות כי שני אנכים הם מקבילים.

**הגדרה:**

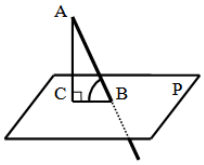



ישר החותך מישור ואינו מאונך למישור זה נקרא משופע למישור.
הקטע המחבר את עקב האנך עם עקב המשופע נקרא היטל המשופע על המישור.
באיור הסמוך הקטע AC הוא אנך למישור P , AB הוא משופע למישור ו-BC הוא היטל המשופע.

**הגדרה:**

אורך אנך המורד מנקודה שמחוץ למישור אל המישור נקרא מרחק הנקודה מהמישור.

**הגדרה:**




זווית בין ישר ומישור היא הזווית שבין הישר (המשופע) ובין היטלו של הישר על המישור.
באיור הסמוך הזווית שבין הישר המשופע AB לבין המישור P היא: $\sphericalangle ABC$.

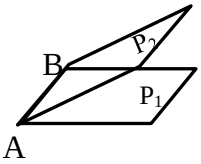
**הגדרה:**

שני מישורים שאינם נחתכים נקראים מישורים מקבילים.

**הגדרה:**

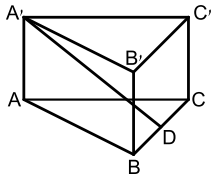
אורך האנך המורד מנקודה שעל פני מישור אחד אל מישור המקביל לו נקרא המרחק בין המישורים.

**הגדרה:**

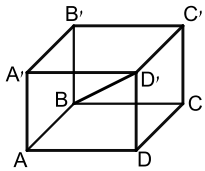



שני מישורים נחתכים יוצרים צורה גיאומטרית הנקראת פינה.
ישר החיתוך של שני המישורים נקרא מקצוע, והמישורים היוצרים את הפינה נקראים פאות.
באיור הסמוך הקטע AB הוא ישר החיתוך של שני המישורים $P_1$ ו-$P_2$ הנקרא מקצוע.
הצורות הסגורות של המישורים נקראות פאות וכל הצורה נקראת פינה.

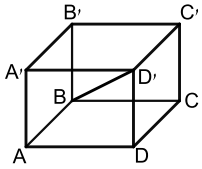
## שאלות:



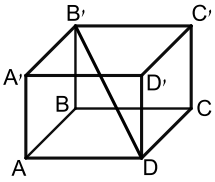

**1)** במנסרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$ הנקודה D היא אמצע המקצוע BC.
סמן את הזווית בין הישר A'D לבין הבסיס ABC.




**2)** נתונה תיבה ABCDA'B'C'D'.
סמן את הזווית בין האלכסון BD' לבין הבסיס ABCD.



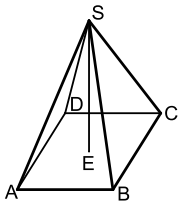

**3)** נתונה תיבה ABCDA'B'C'D' (ראה איור).
סמן את הזווית בין האלכסון AC' לבין הפאה D'C'CD.



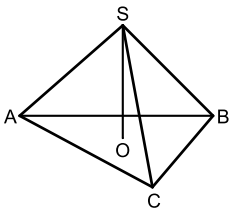

**4)** נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$. סמן את הזוויות בין:

א. האלכסון $B'D$ לבין הפאה $B'C'CB$.

ב. האלכסון $B'D$ לבין הפאה $D'C'CD$.




**5)** $SABCD$ היא פירמידה ישרה שבסיסה מלבן (ראה איור).
סמן את הזווית בין המקצוע $SB$ לבין הבסיס $ABCD$.




**6)** $SABC$ היא פירמידה ישרה שבסיסה
משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$.
סמן את הזווית בין המקצוע $SA$ לבין הבסיס $ABC$.

## תשובות סופיות:

**1)** $\sphericalangle A'DA$

**2)** $\sphericalangle D'BD$

**3)** $\sphericalangle AC'D$

**4)** א. $\sphericalangle DB'C$ ב. $\sphericalangle B'DC'$

**5)** $\sphericalangle SBE$

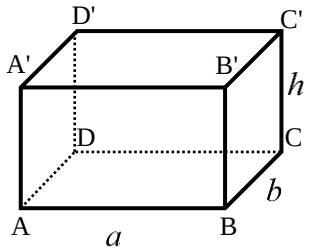
**6)** $\sphericalangle SAO$

# תיבה שבסיסה ריבוע:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

גוף מרחבי הבנוי משני מלבנים זהים מקבילים במרחב (ABCD ו-A'B'C'D') הקרויים בסיסי התיבה. כל מקצוע צדדי (AA' , BB' , CC' , DD') נקרא גובה התיבה. המקצועות הצדדיים שווים זה לזה ומאונכים למישורי הבסיס של התיבה.



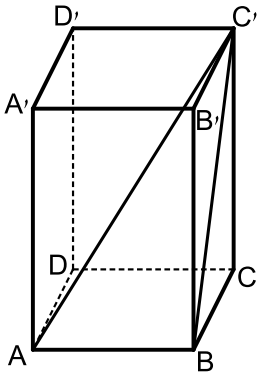

**נוסחאות:**

| הנוסחה | תיאור מילולי |
|---|---|
| $S=a\cdot b$ | שטח בסיס התיבה |
| $V=a\cdot b\cdot h$ | נפח התיבה |
| $M=2h(a+b)$ | שטח מעטפת התיבה |
| $P=2h(a+b)+2ab$ | שטח פנים |

- תיבה שבסיסה ריבוע: תיבה שבסיסיה הם ריבועים.
  מתקיים: $a=b$ בכל הנוסחאות.
- קובייה: אם בסיסי התיבה הם ריבועים וגובה התיבה שווה לאורך מקצוע הבסיס, דהיינו: $a=b=h$ אזי התיבה נקראת קובייה.

## שאלות:

**1)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע,
אורך אלכסון הבסיס $AC$ הוא 15.2 ס"מ.
אורך המקצוע הצדדי $AA'$ הוא 10 ס"מ.



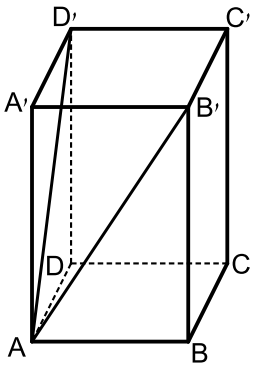

א. חשב אורך מקצוע הבסיס.

ב. חשב נפח התיבה ושטח הפנים.

ג. חשב את $BC'$, אלכסון הפאה $BB'C'C$,
ואת אלכסון התיבה $AC'$.

ד. חשב את זווית $\sphericalangle AC'B$, שבין
האלכסון $BC'$ בפאה $BB'C'C$ לבין אלכסון התיבה $AC'$.

**2)** נתונה תיבה $ABCDA'BC'D'$ שבסיסה
ריבוע. אורך האלכסון $AD'$ של הפאה הצדדית $ADD'A'$
הוא 16.8 ס"מ. הזווית שנוצרת בין שני
האלכסונים $AD'$ ו- $AB'$ היא בת $58°$.



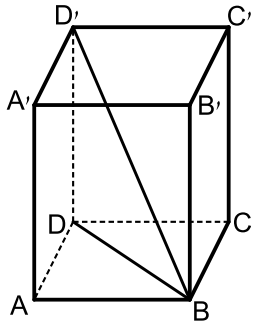

א. חשב את אורך אלכסון הבסיס, $B'D'$.

ב. חשב את אורך מקצוע הבסיס $AB$.

ג. חשב את גובה התיבה $AA'$.

ד. חשב את נפח התיבה.

**3)** נתונה תיבה $ABCDA'BC'D'$ שבסיסה ריבוע.
אורך אלכסון הבסיס $BD$ הוא 16 ס"מ ונפח
התיבה הוא 1408 סמ"ק. חשב:

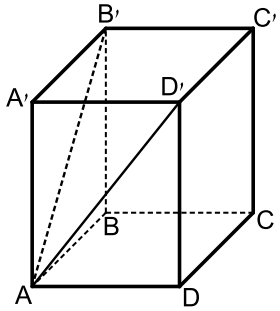



א. גובה התיבה $DD'$.

ב. הזווית שבין אלכסון התיבה $BD'$ לבסיס $ABCD$.

ג. אורך מקצוע הבסיס $AB$.

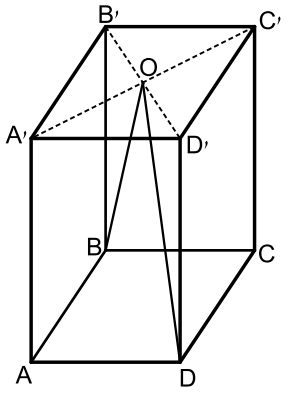
**4)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$, שבסיסה $ABCD$
הוא ריבוע. אורך האלכסון של הפאה הצדדית
הוא 10 ס"מ. הזווית שבין אלכסוני
הפאות הצדדיות היא בת $48°$.




א. חשב את אורך האלכסון של הבסיס העליון $B'D'$.

ב. חשב את שטח הבסיס של התיבה.

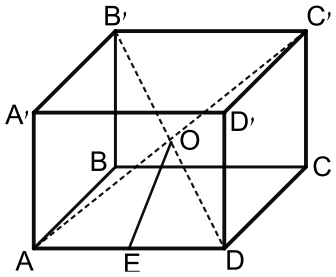
**5)** בתיבה ריבועית $ABCDA'B'C'D'$ מעבירים את האלכסונים $B'D'$ ו-$A'C'$ במישור הבסיס העליון.
האלכסונים נפגשים בנקודה O כך שנוצר המשולש BOD.
נתון כי: $\sphericalangle BOD = 23°$ וכי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 6 ס"מ.




א. חשב את היקף המשולש BOD.

ב. חשב את הזווית שנוצרת בין הצלע OD של המשולש BOD ומישור הפאה $AA'D'D$.

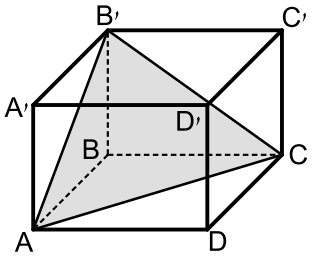
**6)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע מעבירים את האלכסונים $AC'$ ו-$B'D$.
האלכסונים נחתכים בנקודה O שבתוך התיבה.
מהנקודה O מעבירים את הקטע OE כך ש-E היא אמצע המקצוע AD.
ידוע כי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 8 ס"מ ואורך אלכסון התיבה הוא 12 ס"מ.




א. מצא את אורך גובה התיבה.

ב. מצא את אורך הקטע OE.

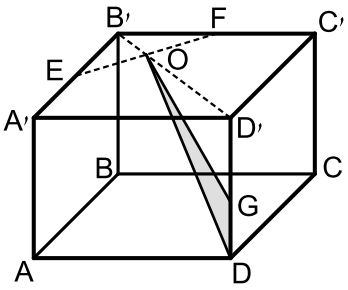
**7)** בתיבה ריבועית וישרה $ABCDA'B'C'D'$ מסמנים את אורך הגובה ב-$h$.
מעבירים את הקטעים $AB'$ , $AC$ ו-$B'C$ כך שנוצר המשולש $AB'C$ כמתואר באיור.
הזווית הנוצרת בין אנך לצלע AC במשולש $AB'C$ ומישור הבסיס ABCD היא $\alpha$.




א. הבע באמצעות $h$ ו-$\alpha$ את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. הבע באמצעות $h$ ו-$\alpha$ את נפח התיבה.

**8)** בתיבה הריבועית $ABCDA'B'C'D'$ שלפניך מעבירים את אלכסון הבסיס העליון $B'D'$.
הנקודות E ו-F נמצאות על אמצעי המקצועות $A'B'$ ו-$B'C'$ כך שהקטע EF חותך את האלכסון $B'D'$ בנקודה O.
מקצים נקודה נוספת G - הנמצאת על הגובה $DD'$ כך ש: $DG = a$. מעבירים את הקטעים GO ו-DO כך שנוצר המשולש DOG. אורך מקצוע הבסיס הוא $k$ וגובה התיבה הוא $h$.




א. הבע באמצעות $k$ ו-$a$ את שטח המשולש DOG.

ב. מצא את היחס $\frac{a}{h}$ עבורו מתקיים: $S_{DOG} = S_{D'OG}$.

**9)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ הבסיס $ABCD$ הוא ריבוע. גובה התיבה הוא $h$.
נתון : $\sphericalangle A'DC' = \beta$.

א. הראה כי אורך הצלע בבסיס התיבה הוא : $\dfrac{\sqrt{2}h \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{\sqrt{\cos\beta}}$.

ב. לאלו ערכים של $\beta$ יש פתרון לבעיה?

## תשובות סופיות:

**1)** א. 10.748 ס"מ. ב. 1155.2 סמ"ק $= V$ , 660.959 סמ"ר $= S$.
ג. 14.68 ס"מ, 18.19 ס"מ. ד. $\sphericalangle AC'B = 36.21°$.

**2)** א. 16.29 ס"מ. ב. 11.518 ס"מ. ג. 12.23 ס"מ.
ד. 1622.485 סמ"ק $= V$.

**3)** א. 11 ס"מ. ב. $34.51°$ ג. 11.313 ס"מ.

**4)** א. 8.13 ס"מ. ב. 33.09 סמ"ר.

**5)** א. 51 ס"מ. ב. $8.1°$.

**6)** א. 4 ס"מ. ב. 4.47 ס"מ.

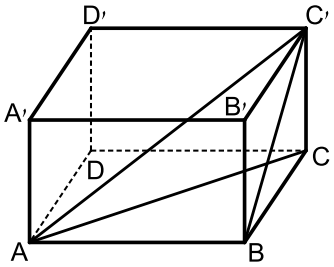
**7)** א. $\dfrac{h\sqrt{2}}{\tan\alpha}$ ב. $\dfrac{2h^3}{\tan^2\alpha}$.

**8)** א. $S_{DOG} = \dfrac{3ka}{4\sqrt{2}}$ ב. $\dfrac{a}{h} = \dfrac{1}{2}$.

**9)** ב. $0° < \beta < 90°$.

# תיבה שבסיסה מלבן:

## שאלות:




**10)** בתיבה שלפניך אורכי צלעות הבסיס הם:
12 ס"מ = AB , 5 ס"מ = BC. הזווית בין 'BC
אלכסון הפאה, BB'C'C, לבסיס ABCD היא 40°.

א. חשב את גובה התיבה 'CC.

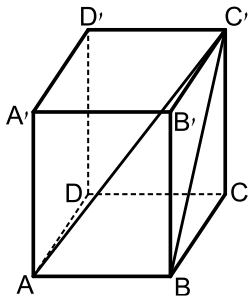
ב. חשב את אורך אלכסון הבסיס, AC.

ג. חשב את הזווית בין אלכסון התיבה 'AC לבסיס ABCD.

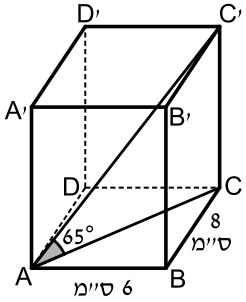
ד. חשב את אורך אלכסון התיבה 'AC.

ה. חשב את נפח התיבה.

ו. חשב את שטח מעטפת התיבה.




**11)** נתונה תיבה 'ABCDA'B'C'D.
אורך צלע הבסיס: 9 ס"מ = AB.
אלכסון הפאה BB'C'C הוא: 15 ס"מ = 'BC.
חשב את הזווית בין 'BC, אלכסון הפאה BB'C'C,
לאלכסון התיבה 'AC.




**12)** נתונה תיבה 'ABCDA'B'C'D, בה מתקיים:
8 ס"מ = AD , 6 ס"מ = AB. הזווית בין אלכסון
התיבה 'AC לבסיס ABCD היא בת 65°.

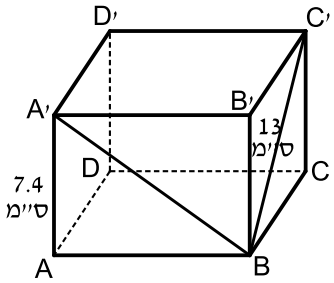
א. חשב את גובה התיבה 'CC.

ב. חשב את נפח התיבה ושטח הפנים שלה.

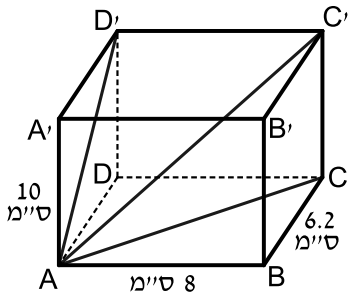
**13)** נתונה תיבה 'ABCDA'B'C'D שבסיסה
מלבן. גובה התיבה 'AA הוא 7.4 ס"מ.
אורך אלכסון הפאה 13 ס"מ = 'BC.
הזווית בין אלכסון הפאה A'B לבסיס ABCD
היא בת 37°.

א. חשב את אורכי צלעות הבסיס.

ב. חשב את שטח המעטפת ושטח הפנים של התיבה.



**14)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון:
$BC = 6.2$ ס"מ , $AB = 8$ ס"מ , $AA' = 10$ ס"מ.
חשב את:

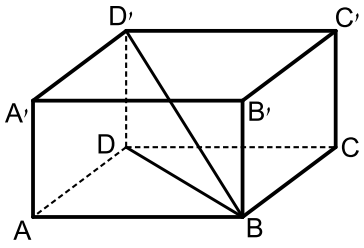



א. אלכסון הבסיס, $AC$, אלכסון הפאה, $AD'$ ואלכסון התיבה, $AC'$.

ב. הזווית בין $AD'$, אלכסון הפאה $ADD'A'$, לאלכסון התיבה $AC'$: $\sphericalangle D'AC'$.

ג. נפח התיבה ושטח המעטפת.

**15)** נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$. $AB = 12$ ס"מ.
אורך אלכסון הבסיס BD הוא 15 ס"מ.
נפח התיבה הוא 864 סמ"ק.
חשב את:

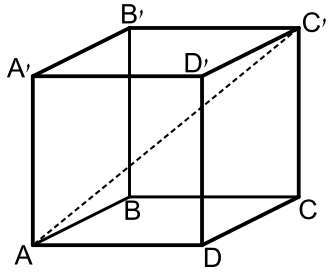



א. רוחב הבסיס של התיבה, $BC$.

ב. גובה התיבה, $AA'$.

ג. הזווית בין אלכסון התיבה $BD'$ לבסיסה $ABCD$.

**16)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ (ראה ציור), נתון:
$AD = 12$ ס"מ , $DC = 8$ ס"מ , $CC' = 14$ ס"מ.



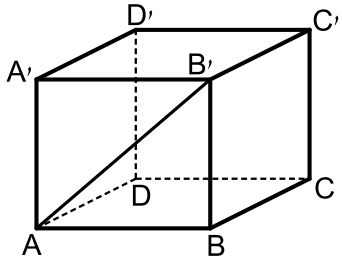

א. חשב את האורך של אלכסון הבסיס, $AC$.

ב. חשב את הזווית שבין אלכסון התיבה $AC'$ לבין הבסיס $ABCD$.

ג. חשב את שטח המעטפת של התיבה.

ד. חשב את שטח הפנים של התיבה.

**17)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ (ראה ציור) נתון:
$AB = 12$ ס"מ , $AD = 10$ ס"מ.
הזווית שבין אלכסון הפאה $AB'$ לבין הבסיס $ABCD$ היא בת $35°$.

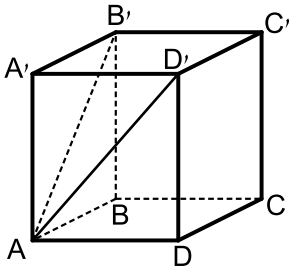



א. חשב את גובה התיבה $BB'$.

ב. חשב את $AD'$, אלכסון הפאה $ADD'A'$.

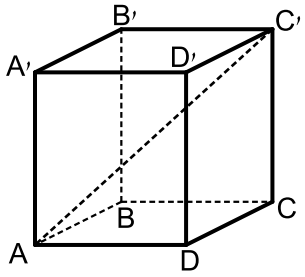
ג. חשב את הזווית שבין $AD'$ לבין הבסיס $ABCD$.

**18)** נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה מלבן (ראה ציור).
אורך גובה התיבה $AA'$ הוא 10 ס"מ.
אורך $AB'$, אלכסון הפאה $ABB'A'$ הוא 14 ס"מ.



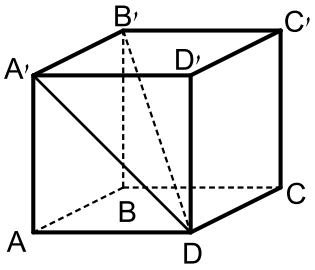

א. חשב את אורך המקצוע $AB$.
הזווית שבין $AD'$, אלכסון הפאה $ADD'A'$,
לבין הבסיס $ABCD$ היא בת $40°$.
ב. חשב את נפח התיבה.
ג. חשב את שטח מעטפת התיבה.

**19)** נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבה
$AB = 10$ ס"מ, $AD = 12$ ס"מ (ראה ציור).



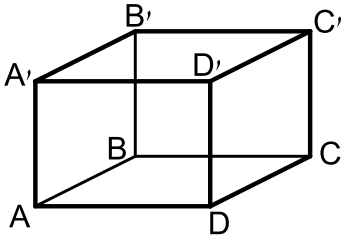

הזווית שבין אלכסון התיבה, $AC'$
לבין הבסיס $ABCD$ היא בת $38°$.
א. חשב את אלכסון הבסיס.
ב. חשב את גובה התיבה.
ג. חשב את שטח פני התיבה.

**20)** נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ (ראו סרטוט)
שבה: $AB = 10$ ס"מ, $AD = 12$ ס"מ, $AA' = 8$ ס"מ.

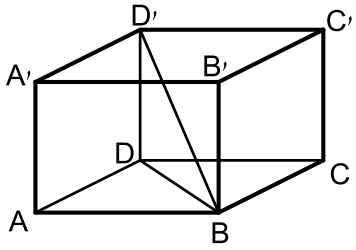



א. חשב את אורך $A'D$, אלכסון הפאה $ADD'A'$.
ב. חשב את אורך האלכסון של התיבה $B'D$.

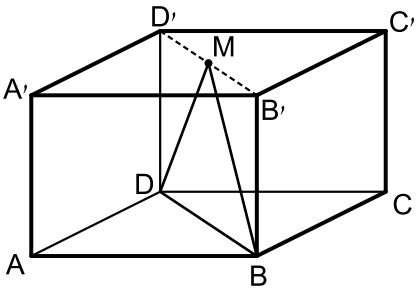
**21)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון:
$AA' = 7$ ס"מ, $AD = 12$ ס"מ, $AB = 8$ ס"מ.
חשב את אורך האלכסון $BD'$ ואת הזווית
בינו לבין בסיס התיבה.




**22)** נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה מלבן.
מעבירים את האלכסונים $BD$ ו-$BD'$ כך
שמתקיים: $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBD' = \alpha$.
אורך האלכסון $BD$ יסומן ב-$a$.




א. הבע באמצעות $a$ ו-$\alpha$ את:
i. אורך התיבה – $AB$.
ii. רוחב התיבה – $AD$.
iii. גובה התיבה – $AA'$.
ב. מצא את $\alpha$ אם ידוע כי נפח התיבה הוא $0.64a^3$.




**23)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה מלבן מעבירים את האלכסון $B'D'$ בבסיס העליון. מאמצע האלכסון M מעבירים את הקטעים DM ו-BM כך שנוצר המשולש ישר הזווית BMD $\left(\sphericalangle BMD=90°\right)$.
אורך מקצוע הבסיס AB הוא $5a$
ואורך הקטע DM הוא $4a$.

א. הבע באמצעות $a$ את אורך המקצוע AD.

ב. מעבירים את הקטע AM. חשב את זווית MAD.

ג. מצא את $a$ אם ידוע כי שטח המשולש MAD הוא 125 סמ"ר (עגל למספר שלם).

**24)** בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $BD'=m$. הזווית שבין האלכסון $BD'$ לבסיס ABCD היא $\alpha$ והזווית שבין האלכסון $BD'$ לפאה צדדית $ABB'A'$ היא $\gamma$.
הבע באמצעות $m$ , $\alpha$ ו- $\gamma$ את נפח התיבה.

## תשובות סופיות:

**10)** א. $CC'=4.195$ ס"מ ב. $AC=13$ ס"מ ג. $17.886°$
ד. $AC'=13.66$ ס"מ ה. $V=251.7$ סמ"ק ו. $M=142.63$ סמ"ר.

**11)** $\sphericalangle AC'B=30.96°$.

**12)** א. $CC'=21.44$ ס"מ ב. $V=1029.6$ סמ"ק, $P=696.96$ סמ"ר.

**13)** א. $AB=9.82$ ס"מ, $BC=10.688$ ס"מ ב. $M=303.5184$ סמ"ר, $P=513.43$ סמ"ר.

**14)** א. $AC=10.121$ ס"מ, $AD'=11.766$ ס"מ, $AC'=14.227$ ס"מ
ב. $34.22°$. ג. $V=496$ סמ"ק, $M=284$ סמ"ר.

**15)** א. $BC=9$ ס"מ ב. $h=8$ ס"מ ג. $28.072°$.

**16)** א. $AC=14.42$ ס"מ ב. $44.15°$ ג. 560 סמ"ר ד. 752 סמ"ר.

**17)** א. $BB'=8.4$ ס"מ ב. $AD'=13.06$ ס"מ ג. $40.03°$

**18)** א. $AB=9.8$ ס"מ ב. $V=1,167.9$ סמ"ק ג. 434.4 סמ"ר.

**19)** א. 15.62 ס"מ ב. $h=12.2$ ס"מ ג. $P=776.8$ סמ"ר.

**20)** א. $A'D=14.42$ ס"מ ב. $B'D=17.55$ ס"מ.

**21)** $BD'=16.031$ ס"מ, $\sphericalangle D'BD=25.89°$.

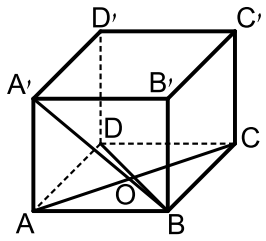
**22)** א. i. $a\cos\alpha$ ii. $a\sin\alpha$ iii. $a\tan\alpha$ ב. $53.13°$.

**23)** א. $a\sqrt{7}$ ב. $70.6°$ ג. $a=5$.

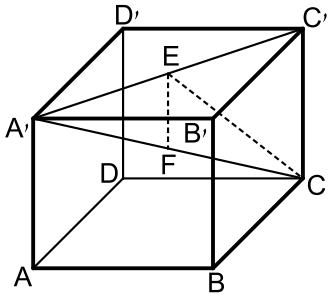
**24)** $V=m^3\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\sqrt{\cos^2\gamma-\sin^2\alpha}$.

# הקובייה:

## שאלות:




**25)** בקובייה $ABCDA'B'C'D'$ אורך המקצוע הוא 8 ס״מ.
הנקודה O היא מפגש אלכסוני הבסיס התחתון.
מצא את הזווית שבין $OA'$ לפאה $ABB'A'$.




**26)** נתונה קובייה $ABCDA'B'C'D'$ מעבירים את האלכסון $A'C$ בבסיס העליון. מהנקודה E שעל האלכסון $A'C$ מותחים את הקטע CE השווה באורכו לקטע $A'E$. כמו כן מורידים גובה EF ממישור הבסיס העליון $A'B'C'D'$.
(EF מאונך ל-$A'C'$).
הנקודה F נמצאת על האלכסון הראשי $A'C$.
נסמן: $\sphericalangle A'CE=\alpha$ , $A'F=m$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו-$m$ את נפח הקובייה.

## תשובות סופיות:

**25)** $24.095°$.

**26)** $\left(m\sin 2\alpha\cos\alpha\right)^3$.

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 18 - טריגונומטריה במרחב - המנסרה

### תוכן העניינים

1. מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות ..... 139
2. מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים ..... 141
3. מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית ..... 142

# מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות:

## סיכום כללי:

גוף מרחבי הבנוי משני מצולעים זהים המקבילים זה לזה במרחב.
המקצועות הצדדיים המחברים את קדקודי הבסיסים המתאימים נקראים גובהי המנסרה.
כל גובה במנסרה ישרה מאונך למישורי הבסיס העליון והתחתון.

נעסוק במנסרות הבאות:

- מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות.
- מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים.
- מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית.

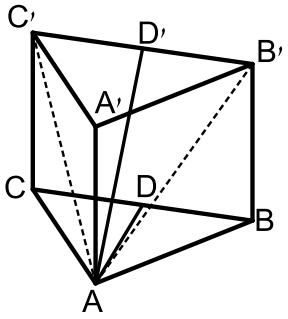
**הערה:**
התיבה וקובייה הן מקרים פרטיים של מנסרות ישרות שבסיסן מלבן וריבוע בהתאמה.

## שאלות:

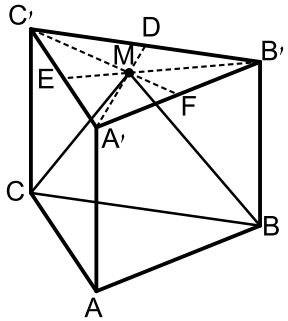
**1)** במנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים את האלכסונים AB' ו-AC' כך שנוצר המשולש AB'C'.
הזווית שבין האנך לצלע BC במשולש ABC והאנך לצלע B'C' במשולש AB'C' היא 40°.
אורך גובה המנסרה הוא 14 ס"מ.

א. חשב את שטח המשולש A'B'C'.

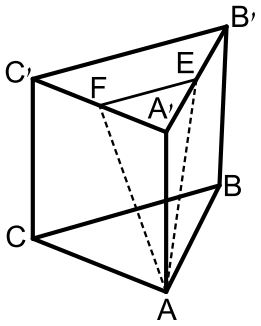
ב. חשב את נפח המנסרה.




**2)** במנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים בבסיס העליון A'B'C' את התיכונים A'D , B'E ו-C'F אשר נחתכים בנקודה M. מהנקודה M מעבירים את הקטעים MC ו-MB כך שנוצר המשולש MCB.
גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה.
חשב את הזווית שבין האנך לצלע BC במשולש MCB למישור הבסיס ABC.



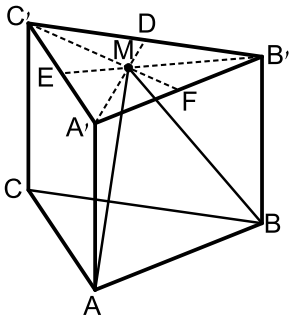
**3)** במנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי המקצועות A'B' ו-A'C'. מעבירים את הקטעים AE ו-AF, כך שנוצר המשולש AEF.
אורך מקצוע הבסיס של המנסרה הוא 10 ס"מ וגובה המנסרה הוא 12 ס"מ.




א. חשב את אורכי הצלעות של המשולש AEF.

ב. חשב את הזווית שבין גובה המנסרה AA' למישור המשולש AEF.

**4)** במנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים בבסיס העליון A'B'C' את התיכונים A'D , B'E ו-C'F אשר נחתכים ב-M.
מהנקודה M מעבירים את הקטעים MA ו-MB כך שנוצר המשולש MAB.
גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה ויסומן ב- $2a$.




א. הבע באמצעות $a$ את אורך הקטע MA.

ב. חשב את הזווית שבין הקטע MA ומישור הבסיס ABC.

ג. חשב את הזווית שבין הגובה למקצוע AB במישור MAB לבין מישור הבסיס ABC.

ד. חשב את הזווית שבין MA והפאה AA'B'B.

ה. הבע באמצעות $a$ את שטח הפנים של המנסרה.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 160.68 סמ"ר. ב. 2250 סמ"ק.

**2)** $73.89°$.

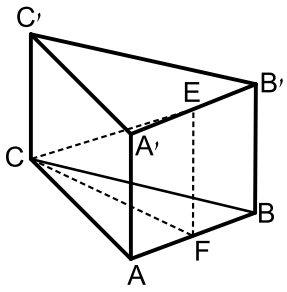
**3)** א. 13 ס"מ, 13 ס"מ, 5 ס"מ. ב. $19.84°$.

**4)** א. $MA = 2.3a$ ב. $60°$ ג. $73.9°$ ד. $14.47°$ ה. $P = 15.46a^2$.

# מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים:

## שאלות:

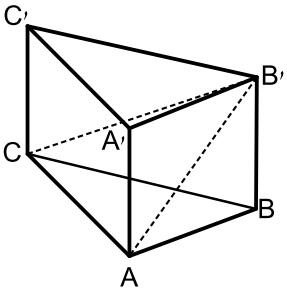
**5)** נתונה מנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים $(AC=BC)$.
מאמצעי המקצועות A'B' ו-AB מעבירים את הקטע EF.
ידוע כי אורך מקצוע הבסיס AB הוא $k$ ס"מ והוא קטן פי 2 מאורך שוק הבסיס AC. נסמן: $\sphericalangle FCE=\alpha$.




א. הבע באמצעות $k$ ו- $\alpha$ את נפח המנסרה.

ב. חשב את נפח המנסרה אם ידוע כי: $2EF=CE$,
וכי שטח הבסיס ABC הוא $\sqrt{15}$ סמ"ר.

**6)** במנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים $(AC=BC)$ מעבירים את האלכסונים AB' ו-CB' כך שנוצר המשולש AB'C.
ידוע כי הזווית שבין אנך למקצוע AC במשולש ABC ואנך למקצוע AC במשולש AB'C היא $45°$
(האנכים נפגשים על המקצוע AC בנקודה E).
זוויות הבסיס ABC הן $\sphericalangle ABC=\sphericalangle CAB=75°$, $\sphericalangle ACB=30°$
גובה המנסרה הוא 5 ס"מ.




א. מצא את אורך המקצוע AC.

ב. חשב את הזווית שבין האלכסון CB' למישור הבסיס.

**7)** נתונה מנסרה ABCA'B'C' שבה הבסיס הוא משולש שווה שוקיים $(AC=BC)$,
אורך השוק היא $k$ וזווית הראש היא $\gamma$. הזווית שבין המישור ABC למישור ABC' היא $\beta$. הבע באמצעות $k$, $\gamma$ ו- $\beta$ את נפח המנסרה.

## תשובות סופיות:

**5)** א. $V=\frac{15k^3\tan\alpha}{8}$ ב. $\frac{15}{\sqrt{3}}$ סמ"ק.

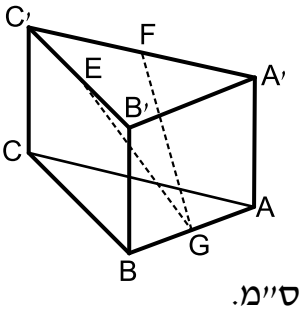
**6)** א. 10 ס"מ. ב. $26.56°$ .

**7)** $V=\frac{1}{2}k^3\sin\gamma\cos\frac{\gamma}{2}\tan\beta$.

# מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית:

## שאלות:

**8)** במנסרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90°)$,
הנקודות $E$, $F$ ו-$G$ הן בהתאמה אמצעי המקצועות $B'C'$, $A'C'$ ו-$AB$
כמתואר באיור.



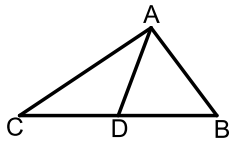

מסמנים את מידות הבסיס $ABC$: $BC = 12t$ , $AB = 5t$.
הזווית שבין הקטע $GE$ למישור הבסיס $ABC$ היא $36.86°$.

א. הבע באמצעות $t$ את גובה המנסרה.

ב. חשב את הזווית שבין הקטע $GF$
ולמישור הבסיס $ABC$.

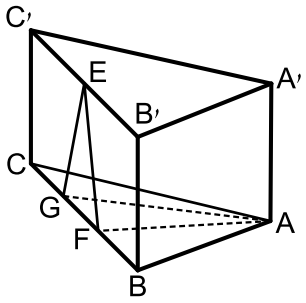
ג. מצא את $t$ אם ידוע כי אורך הקטע $GF$ הוא: $\sqrt{3825}$ ס"מ.

**9)** ענה על הסעיפים הבאים:




א. הוכח את הטענה: תיכון במשולש חוצה אותו
לשני משולשים שווי שטח. כלומר, הקטע $AD$
הוא תיכון במשולש $ABC$. הראה כי: $S_{ABD} = S_{ACD}$.

במנסרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש
ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90°)$ הנקודות $F$ ו- $G$ מחלקות
את מקצוע הבסיס $BC$ לשלושה חלקים שווים.
הנקודה $E$ היא אמצע המקצוע $B'C'$.
ידוע כי אורך הקטע $EF$ הוא 10 ס"מ ואורך
המקצוע $BC$ הוא 24 ס"מ.
שטח המשולש $AFG$ הוא 40 סמ"ר.



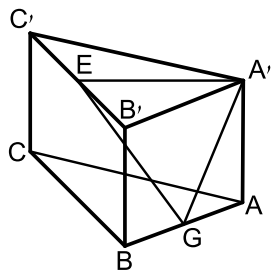

ב. איזה משולש הוא המשולש $EFG$ ? מצא את זוויותיו.

ג. מצא את גובה המנסרה.

ד. היעזר בטענה שהוכחת בסעיף א' ומצא את אורך המקצוע $AB$.
(רמז: התבונן במשולש $ABF$ ומצא את הצלע $AB$ באמצעות שטחו).

ה. חשב את שטח המעטפת של המנסרה.

**10)** לפניך מנסרה ישרה שבסיסה משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90°)$.
ידוע כי הפאה הצדדית AA'B'B היא ריבוע וכי אורך המקצוע BC גדול פי 3 מ-AB.
הנקודות E ו-G נמצאות על אמצעי
המקצועות B'C' ו-AB בהתאמה.
מעבירים את הקטעים A'G, A'E ו-GE.




א. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE ומישור הבסיס.

ב. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE ומישור הפאה AA'B'B.

ג. חשב את זווית EA'G.

## תשובות סופיות:

**8)** א. $4.875t$ ב. $39.1°$ ג. $t = 8$.

**9)** ב. משולש שווה שוקיים. $66.42°, 47.15°$ ג. $\sqrt{84}$ ס"מ. ד. 10 ס"מ.
ה. $60\sqrt{84}$ סמ"ר.

**10)** א. $\sphericalangle EGH = 32.31°$ ב. $\sphericalangle B'GE = 53.3°$
ג. $\sphericalangle GA'E = 71.93° \sim 72°$ .

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 19 - טריגונומטריה במרחב - הפירמידה

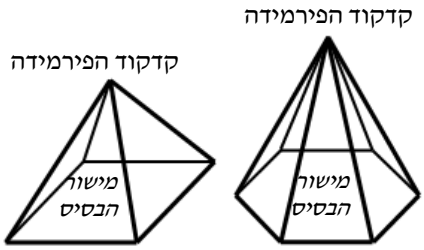
### תוכן העניינים

1. פירמידה שבסיסה ריבוע ..... 144
2. פירמידה שבסיסה מלבן ..... 148
3. פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות ..... 155
4. פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים ..... 157
5. פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית ..... 158

# פירמידה שבסיסה ריבוע:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**




גוף מרחבי הבנוי ממצולע כלשהו, המהווה את בסיס הפירמידה, ומקצועות היוצאים מכל קדקודי המצולע ונפגשים בנקודה אחת הנקראת קדקוד הפירמידה.
בפירמידה ישרה כל המקצועות שווים.

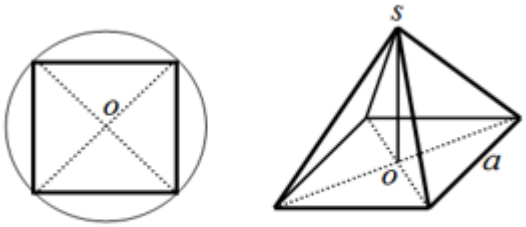
**הגדרה:**

גובה הפירמידה הוא קטע היוצא מקדקוד הראש של הפירמידה ומאונך למישור הבסיס.

**משפט:**

בפירמידה ישרה, גובה הפירמידה תמיד נופל בנקודת מרכז המעגל החוסם את מצולע הבסיס.

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



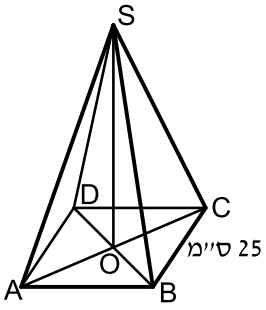

תיאור פירמידה שבסיסה ריבוע. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את הריבוע.

**נפח פירמידה:**

נפח פירמידה ששטח בסיסה הוא $S$ וגובהה $h$ הוא: $V=\frac{S\cdot h}{3}$.

## שאלות:

**1)** נתונה פירמידה מרובעת משוכללת (הבסיס הוא ריבוע) SABCD.
אורך מקצוע הבסיס הוא 25 ס"מ.
הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא זווית בת $35°$.

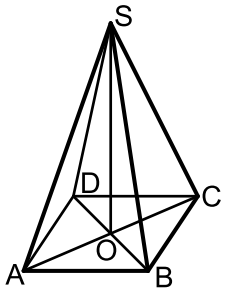



א. חשב את אלכסון הבסיס.

ב. חשב את גובה הפירמידה.

ג. סמן נקודה E כאמצע BC וחשב את הזווית שבין SE לבסיס הפירמידה.

**2)** נתונה פירמידה מרובעת משוכללת SABCD.
אורך מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ.
אורך מקצוע צדדי הוא 20 ס"מ.

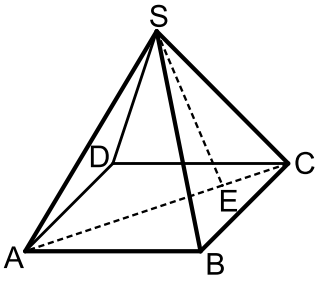



א. חשב אורך גובה של פאה צדדית.

ב. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.

ג. חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

**3)** נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע בעל אורך צלע $a$.
אורך מקצועות הפירמידה הוא $3a$.
מעבירים את האלכסון AC ועליו מסמנים את הנקודה E
המחלקת אותו ביחס של $1:3$ $\left(\frac{CE}{AE}=\frac{1}{3}\right)$.
מהקדקוד S מעבירים את הקטע SE.

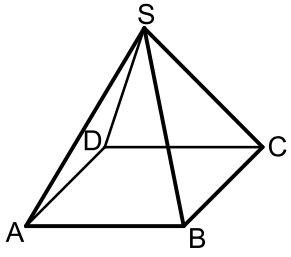


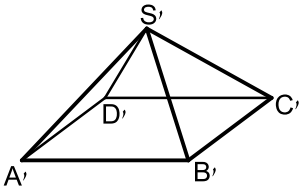

א. הבע באמצעות $a$ את גובה הפירמידה.

ב. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע SE לגובה הפירמידה.

ג. מצא את $a$ אם ידוע כי שטח המעטפת של הפירמידה הוא: $\sqrt{560}$ סמ"ר.

**4)** נתונות שתי פירמידות ריבועיות ישרות: SABCD ו-S'A'B'C'D'.
אורך מקצוע הבסיס בפירמידה הראשונה הוא $a$ וגובהה הוא $2a$.
אורך מקצוע הבסיס בפירמידה השנייה הוא $2a$ וגובהה הוא $a$.




א. קבע לאיזו פירמידה יש נפח גדול יותר.

ב. כעת משנים את הגובה של כל פירמידה כך שנפחן יהיה זהה והוא: $a^3$.
מצא את יחס בין המקצוע הצדדי של הפירמידה SABCD למקצוע הצדדי של הפירמידה S'A'B'C'D'.

ג. דנה טוענת כי מאחר שנפח שתי הפירמידות זהה, הרי גם שטח הפנים שלהן זהה. האם דנה צודקת? הוכח את טענתך באמצעות חישוב מתאים.

**5)** נתונה פירמידה מרובעת משוכללת וישרה.
אורכו של מקצוע הבסיס הוא 10 ס"מ ואורכו של המקצוע הצדדי הוא 16 ס"מ.
חשב את:

א. הזווית שבין המקצוע הצדדי והבסיס.

ב. גובה הפירמידה.

ג. הזווית שבין הפאה הצדדית והבסיס.

ד. נפח הפירמידה.

ה. שטח הפנים של הפירמידה.

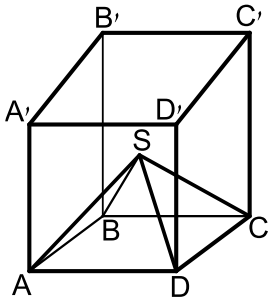
**6)** נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורך מקצוע הבסיס הוא $b$ והזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס היא $\alpha$.
הבע באמצעות $b$ ו- $\alpha$ את נפח הפירמידה ואת שטח המעטפת שלה.

**7)** נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורכו של מקצוע הבסיס הוא $a$ והזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות היא $\beta$.
זווית הבסיס של פאה צדדית היא $\gamma$. הבע באמצעות $\beta$ את $\sin\gamma$.

**8)** נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
הזווית שבין שני מקצועות צדדיים סמוכים היא $2\alpha$ והזווית שבין שני מקצועות צדדיים נגדיים היא $2\beta$. הוכח: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**9)** נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
גובה הפירמידה הוא $h$ והזווית שבין שתי פאות צדדיות היא $\beta$.
הראה כי מקצוע הבסיס של הפירמידה הוא: $\frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}\cdot\sqrt{-2\cos\beta}$.

**10)** בקובייה ABCDA'B'C'D' חסומה פירמידה SABCD שבה כל המקצועות שווים.
בסיס הפירמידה מונח על בסיס הקובייה.
מצא את גודל הזווית שבין המקצוע הצדדי של הפירמידה לפאה צדדית של הקובייה, שלהם קדקוד משותף.



## תשובות סופיות:

1) א. 35.36 ס"מ  ב. $h=12.378$ ס"מ  ג. $44.72°$.

2) א. 19.079 ס"מ  ב. $P=601.89$ ס"מ  ג. $64.896°$.

3) א. $a\sqrt{8.5}$  ב. $6.9°$  ג. $a=2$.

4) א. $V_{SABCD}=\frac{2}{3}a^3 > V_{S'A'B'C'D'}=\frac{4}{3}a^3$  ב. פי $4\sqrt{\frac{19}{82}}$

ג. דנה טועה - $P_{S'A'B'C'D'}=9a^2 \neq P_{SABCD}\approx 7a^2$.

5) א. $63.77°$  ב. $\sqrt{206}$ ס"מ  ג. $70.79°$  ד. 478.42 סמ"ק

ה. 403.97 סמ"ר.

6) $M=2b^2\sqrt{\frac{1}{2}\tan^2\alpha+\frac{1}{4}}$ , $V=\frac{b^3\tan\alpha}{3\sqrt{2}}$.

7) $\sin\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\cos\beta}}$.

8) הוכחה.

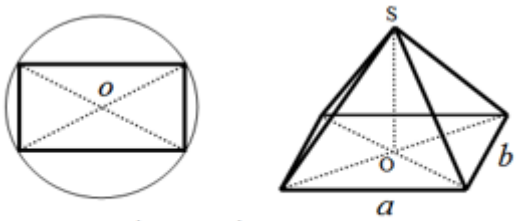
9) הוכחה.

10) $30°$.

# פירמידה שבסיסה מלבן:

## סיכום כללי:

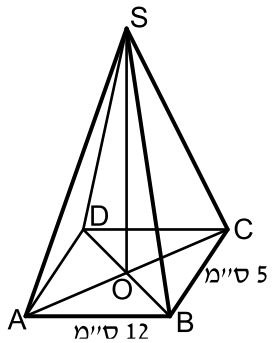
באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.




תיאור פירמידה שבסיסה מלבן. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את המלבן.

## שאלות:

**11)** נתונה פירמידה מרובעת וישרה SABCD שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם: AB = 12 ס"מ , BC = 5 ס"מ.
אורך גובה הפירמידה הוא: SO = 15 ס"מ.

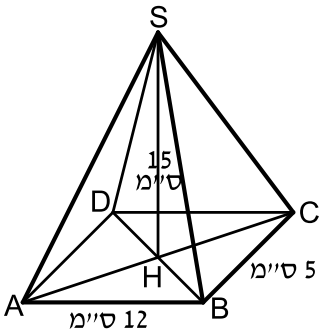



א. חשב את נפח הפירמידה.

ב. חשב את אורך אלכסון הבסיס.

ג. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

**12)** נתונה פירמידה מרובעת ישרה SABCD שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם:
AB = 12 ס"מ , BC = 5 ס"מ.
אורך גובה הפירמידה הוא: SH = 15 ס"מ.



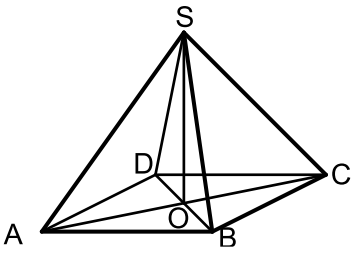

א. חשב את גובה הפאה הצדדית SBC.

ב. חשב את גובה הפאה הצדדית ABS.

ג. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.

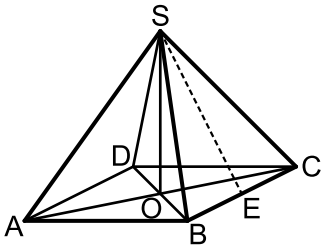
ד. הנקודה E היא אמצע BC.
חשב את הזווית שבין SE לבסיס ABCD.

**13)** נתונה פירמידה ישרה ומרובעת שבסיסה ABCD הוא מלבן.
נתון: אורך אלכסון הבסיס AC הוא 10 ס"מ.
גובה הפירמידה SO הוא 12 ס"מ.



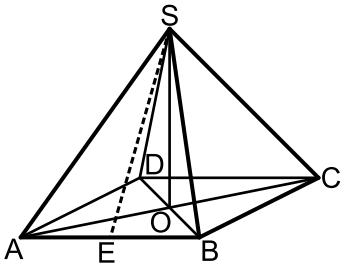

א. חשב את אורך המקצוע הצדדי.
ב. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.
ג. נתון כי זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא $40°$.
חשב את אורך מקצוע הבסיס BC.
חשב את אורך המקצוע AB ואת נפח הפירמידה.

**14)** נתונה פירמידה SABCD, מרובעת וישרה שבסיסה מלבן.
E אמצע BC. $AB = 16$ ס"מ. גובה הפירמידה: $SO = 10$ ס"מ.



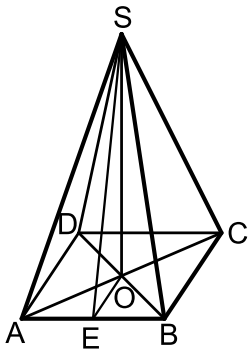

א. חשב את הזווית שבין הקטע SE לבסיס הפירמידה ABCD.
ב. חשב את מקצוע BC אם נתון כי נפח הפירמידה הוא 480 סמ"ק.
ג. סמן ב-F את אמצע המקצוע AB.
חשב את הזווית שבין SF לבסיס הפירמידה.

**15)** נתונה פירמידה SABCD שבסיסה מלבן.
זווית הראש של פאה צדדית SAB היא $56°$.
אורך מקצוע הבסיס AB שווה ל-12 ס"מ.



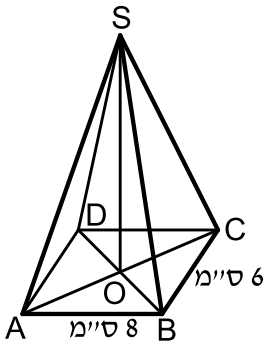

א. חשב את אורך הגובה SE של הפאה SAB.
ב. חשב את אורך המקצוע הצדדי SA.
ג. נתון כי אורך המקצוע AD הוא 8 ס"מ.
חשב את גובה הפירמידה.
ד. חשב את נפח הפירמידה.
ה. חשב את הזווית בין הקטע SE לבסיס הפירמידה.
ו. חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

**16)** נתונה פירמידה SABCD מרובעת וישרה שבסיסה מלבן. אורך המקצוע AB הוא 15 ס"מ.
הגובה SE של הפאה הצדדית SAB הוא 20 ס"מ.
גובה הפירמידה SO הוא 18 ס"מ.




א. חשב את אורך מקצוע הבסיס AD.
ב. חשב את גובה הפאה הצדדית SBC.
ג. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.

**17)** נתונה פירמידה ישרה SABCD.
הבסיס ABCD הוא מלבן שבו: AB = 8 ס"מ , BC = 6 ס"מ.
אורך מקצוע צדדי הוא 17 ס"מ.

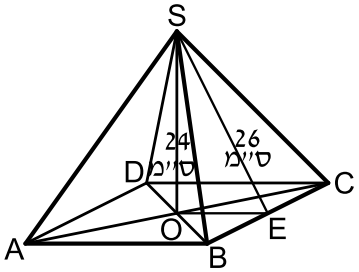



א. חשב את הזווית $\sphericalangle CSA$.

ב. חשב את הזווית $\sphericalangle CSB$.

ג. חשב את נפח הפירמידה.

**18)** נתונה פירמידה SABCD מרובעת וישרה שבסיסה מלבן.
גובה הפירמידה שווה ל-24 ס"מ.
הגובה SE בפאה הצדדית SBC שווה ל-26 ס"מ.
חשב את:



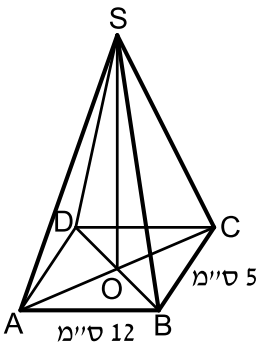

א. אורך המקצוע AB.

ב. הזווית בין הקטע SE לבסיס ABCD.

ג. נפח הפירמידה הוא 2400 סמ"ק.

ד. חשב את אורך המקצוע BC.

**19)** נתונה פירמידה מרובעת וישרה SABCD.
בסיס הפירמידה הוא מלבן.
אורכי צלעות הבסיס הם: BC = 5 ס"מ , AB = 12 ס"מ.
זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא $42°$.

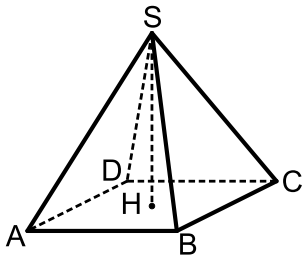



א. חשב אורך מקצוע צדדי.

ב. חשב את שטח הפאה SBC.

ג. חשב את גובה הפירמידה, SO.

**20)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה
ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: AD = 17 ס"מ , AB = 25 ס"מ , SH = 12 ס"מ.

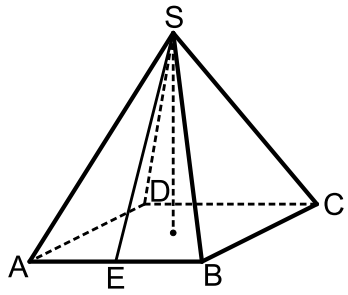



א. חשב את אלכסון הבסיס של הפירמידה.

ב. חשב את המקצוע הצדדי של הפירמידה.

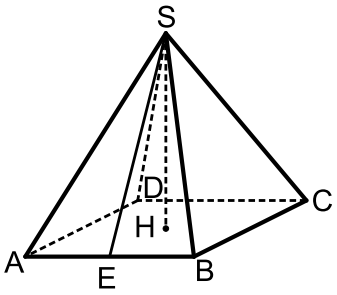
ג. חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבין בסיס הפירמידה.

**21)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AD = 15$ ס"מ , $AB = 20$ ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא 22 ס"מ $= SE$.



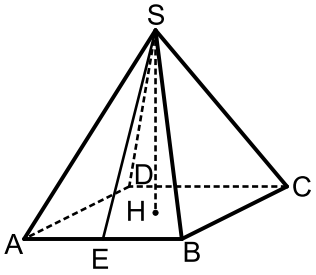

א. חשב את גובה הפירמידה.
ב. חשב את נפח הפירמידה.
ג. חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.

**22)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AD = 16$ ס"מ , $AB = 17$ ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא 12 ס"מ $= SE$.



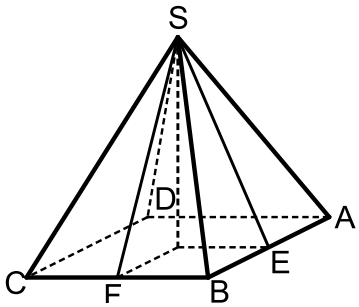

א. חשב את גובה הפירמידה.
ב. חשב את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.
ג. חשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי לבין בסיס הפירמידה.

**23)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AB = 20$ ס"מ , $SH = 8$ ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא 12 ס"מ $= SE$.



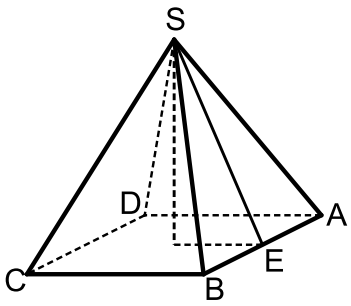

א. חשב את האורך AD.
ב. חשב את אורך DH.
ג. חשב את נפח הפירמידה.

**24)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AB = 15$ ס"מ , $BC = 20$ ס"מ . E היא האמצע של AB.
הזווית שבין הישר SE לבסיס היא בת $55°$.



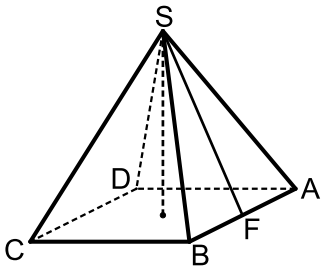

א. חשב את גובה הפירמידה.
ב. F היא האמצע של BC. חשב את זווית שבין הישר SF לבין בסיס הפירמידה.
ג. חשב את גובה הפאה הצדדית SAB.
ד. חשב את שטח הפאה SAB.

**25)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
גובה הפירמידה הוא 17 ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא 22 ס"מ = SE.



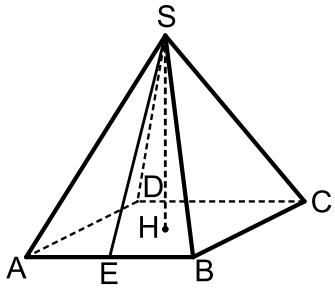

א. חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.
ב. חשב את מקצוע הבסיס, BC.
ג. חשב את מקצוע הבסיס, AB,
אם נפח הפירמידה הוא 1000 סמ"ק.

**26)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: AD = 15 ס"מ , AB = 20 ס"מ.
זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא בת 38°.



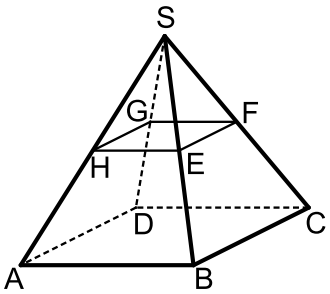

א. חשב את הגובה של הפאה הצדדית SAB.
ב. חשב את הזווית שבין SF לבין בסיס הפירמידה.
ג. חשב את גובה הפירמידה.

**27)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: AD = 15 ס"מ , AB = 20 ס"מ.
זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא בת 38°.



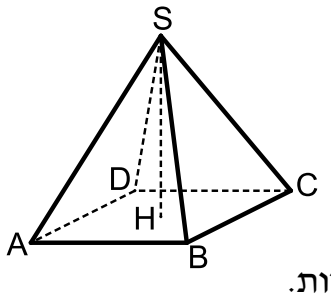

א. חשב את גובה הפאה SAB.
ב. חשב את גובה הפירמידה.
ג. חשב את זווית הראש של הפאה SAD.

**28)** נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן.
מאמצעי המקצועות הצדדיים מעבירים קטעים כך שנוצר המלבן EFGH.
ידוע כי שטח מלבן זה הוא 48 סמ"ר וכי אורך האלכסון שלו הוא 10 ס"מ.
הזווית HSF היא בת 50°.

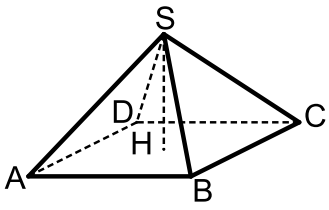



א. מצא את מידות הבסיס ABCD.
ב. מצא את גובה הפירמידה.
ג. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.

**29)** נתונות שתי פירמידות ישרות שבסיסן מלבן:
האחת- SABCD והשנייה- S'A'B'C'D'.
הקטעים SH ו-S'H' הם בהתאמה הגבהים של שתי הפירמידות.
ידוע כי: $AB = 2k$ , $BC = k$ , $HS = 3k$
וכי: $H'S' = 2k$ , $B'C' = k$ , $A'B' = 3k$.



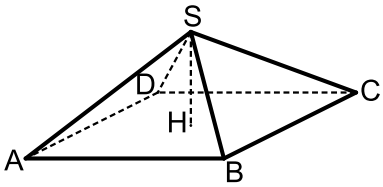

א. לפניך מספר טענות - קבע אלו נכונות ואלו שגויות. נמק.




i. לשתי הפירמידות אותו שטח פנים.
ii. לשתי הפירמידות אותו הנפח.
iii. בשתי הפירמידות הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה שווה.
iv. אורך מקצוע צדדי בפירמידה SABCD גדול יותר מאורך מקצוע צדדי בפירמידה S'A'B'C'D'.

ב. מצא את הערך של $k$ בעבורו סכום הנפחים של שתי הפירמידות יהיה שווה לנפחה של קובייה בעלת אורך מקצוע של 4 ס"מ.

**30)** נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן.
ידוע כי מקצוע הבסיס BC שווה באורכו לגובה הפירמידה ויסומן ב- $t$.
כמו כן נתון כי אלכסון הבסיס AC גדול פי 4 מהמקצוע BC.




א. הבע באמצעות $t$ את אורך המקצוע AB.

ב. הורד גובה SH למקצוע BC במישור הפאה SBC וחשב את הזווית הנוצרת בינו לבין מישור הבסיס ABCD.

ג. חשב את הזויות שבין שני מקצועות צדדיים שאינם סמוכים.

ד. מסמנים את פגישת התיכונים בפאה SBC ב-N.
מעבירים קטע היוצא מנקודת פגישת האלכסונים במישור הבסיס ABCD לנקודה N.
חשב את הזווית שהוא יוצר עם הבסיס.

## תשובות סופיות:

**11)** א. $V=300$ סמ"ק ב. 13 ס"מ ג. $66.57°$.

**12)** א. 16.115 ס"מ ב. 15.207 ס"מ ג. $M=263.26$ סמ"ר ד. $68.2°$.

**13)** א. 13 ס"מ ב. $67.38°$ ג. $BC=8.89$ ס"מ

ד. $AB=4.579$ ס"מ , $V=162.32$ סמ"ק

**14)** א. $51.34°$ ב. $BC=9$ ס"מ ג. $65.77°$.

**15)** א. $SE=11.284$ ס"מ ב. $SA=12.78$ ס"מ ג. $h=10.551$ ס"מ

ד. $V=337.632$ סמ"ק ה. $69.24°$ ו. $55.65°$.

**16)** א. $AD=17.435$ ס"מ ב. $SF=19.5$ ס"מ ג. $M=640$ סמ"ר.

**17)** א. $34.21°$ ב. $20.328°$ ג. $V=260$ סמ"ק.

**18)** א. $AB=20$ ס"מ ב. $67.38°$ ג. $BC=15$ ס"מ.

**19)** א. 6.796 ס"מ ב. $S_{\Delta SBC}=16.282$ סמ"ר ג. $h=2.533$ ס"מ.

**20)** א. 30.23 ס"מ ב. 19.3 ס"מ ג. $38.44°$.

**21)** א. $h=20.68$ ס"מ ב. $V=2068.2$ סמ"ק ג. $70.07°$.

**22)** א. $h=8.94$ ס"מ ב. 14.7 ס"מ ג. $37.45°$.

**23)** א. $AD=17.89$ ב. $DH=13.42$ ס"מ ג. $V=954.1$ סמ"ק.

**24)** א. $h=14.28$ ס"מ ב. $62.29°$ ג. 17.43 ס"מ ד. 130.7 סמ"ר.

**25)** א. $50.6°$ ב. $BC=27.93$ ס"מ ג. $AB=6.32$ ס"מ.

**26)** א. 29.04 ס"מ ב. $75.03°$ ג. $h=28.05$ ס"מ.

**27)** א. 29.04 ס"מ ב. $h=28.05$ ס"מ ג. $28.27°$.

**28)** א. 12 ס"מ ו-16 ס"מ. ב. 21.44 ס"מ. ג. 823 סמ"ר.

**29)** א. i. לא נכון. שטח הפנים הוא שונה: $P_{S'A'B'C'D'}\approx 11.68k^2$ , $P_{SABCD}\approx 11.245k^2$.

ii. נכון. הנפח הוא: $V=2k^3$.

iii. לא נכון. הזוויות המתקבלות הן: $51.67°$ , $69.56°$.

vi. נכון. מתקבל: $k\sqrt{10.25}>k\sqrt{6.5}$.

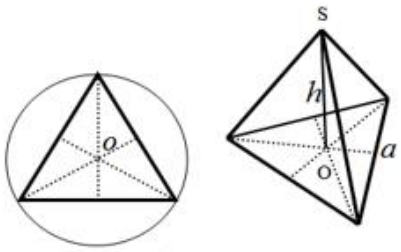
**30)** א. $AB=t\sqrt{15}$ ב. $\sphericalangle SHM=27.31°$ ג. $\sphericalangle ASC=126.86°$

ד. $\sphericalangle NMH=14.47°$.

# פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות:

## סיכום כללי:

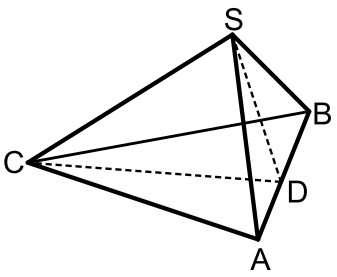
באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.




תיאור פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות.
ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת התיכונים (נקודת מרכז המעגל החוסם את המשולש).

## שאלות:

**31)** נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. מעבירים את הגובה SD בפאה הצדדית ASB וכן את הגובה CD בבסיס ABC. זווית הבסיס של פאה צדדית במנסרה היא $50°$ ושטח המעטפת הוא 89.38 סמ"ר.




א. מצא את אורך מקצוע הבסיס של המנסרה.

ב. מצא את גובה המנסרה.

ג. חשב את הזווית SDC.

ד. חשב את הזווית שבין המקצוע SC לבסיס הפירמידה.

**32)** נתונה פירמידה משולשת, משוכללת וישרה.
אורכו של מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ ואורכו של המקצוע הצדדי הוא 14 ס"מ.

א. חשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי ובסיס הפירמידה.

ב. חשב את גובה פירמידה.

ג. חשב את הזווית שבין הפאה הצדדית ובסיס הפירמידה.

ד. חשב את הזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות בפירמידה.

**33)** נתונה פירמידה משולשת, משוכללת וישרה. הזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות היא $\beta$. זווית הבסיס של פאה צדדית היא $\gamma$.

הוכח: $\sin\gamma\cdot\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}$.

## תשובות סופיות:

**31)** א. 10 ס"מ. ב. 5.21 ס"מ. ג. $61°$ ד. $42°$ .

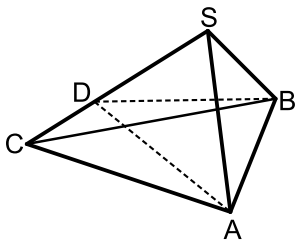
**32)** א. $60.339°$ ב. $\sqrt{148}$ ס"מ. ג. $74.106°$ ד. $67.2°$ .

**33)** הוכחה.

# פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים:

## שאלות:

**34)** נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים $(AC=BC)$. מעבירים גבהים למקצוע SC במישורי הפאות SAC ו-SBC כך שהזווית הנוצרת בין מישורים אלו היא $\sphericalangle ADB=42°$. ידוע כי אורך המקצוע AB הוא 8 ס"מ.




הגובה AD בפאה SAC מחלק את המקצוע SC ביחס: $\frac{DC}{SD}=\frac{2}{3}$.

א. חשב את אורך הגובה AD.

ב. חשב את זווית הראש בפאה SAC.

ג. חשב את שטח משולש הבסיס ABC.

**35)** נתונה פירמידה משוכללת וישרה SABC.

הבסיס הוא משולש שווה שוקיים $(AC=BC)$, אורך שוקו $k$ וזווית הראש שלו היא $2\gamma$. אורך כל מקצוע צדדי בפירמידה גם הוא $k$.

הבע באמצעות $k$ ו- $\gamma$ את נפח הפירמידה.

## תשובות סופיות:

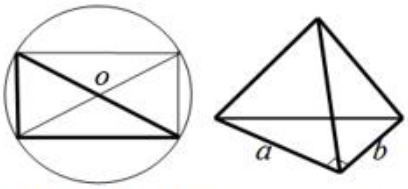
**34)** א. 11.16 ס"מ. ב. $53.13°$ ג. 47.27 סמ"ר.

**35)** $V=\frac{k^3\sin 2\gamma\cdot\sqrt{4\cos^2\gamma-1}}{12\cos\gamma}$.

# פירמידה שבסיסה הוא משולש ישר זווית:

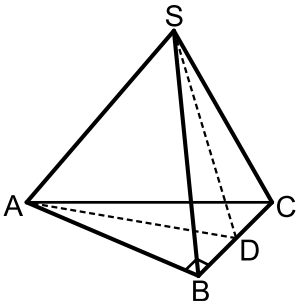
## סיכום כללי:

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.




תיאור פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית.
ניתן לראות כי משולש הבסיס מתקבל ממלבן ע"י העברת אלכסון, לכן נקודת המרכז היא מפגש האלכסונים (בדומה לבסיס מלבני).

## שאלות:




**36)** נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90°)$.
בפירמידה זו מעבירים גובה SD בפאה הצדדית SBC כך שנוצר המשולש SAD.
ידוע כי משולש זה הוא שווה שוקיים ובו נסמן: $SA = AD = 2m$.
הזווית הנוצרת בין הגובה SD והקטע AD תסומן ב- $\sphericalangle SDA = \alpha$.

א. הראה כי הגובה SD בפאה SBC שווה באורכו למקצוע הבסיס AB.

ב. מה ניתן לומר על המשולשים SAB ו-SAD במקרה זה?

ג. הבע באמצעות $m$ , $\alpha$ את גובה הפירמידה.

**37)** נתונה פירמידה משולשת וישרה שבסיסה משולש ישר זווית.
אחד מהניצבים במשולש הוא $c$ והזווית שמולו היא $\alpha$.
הזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס היא $\beta$.
הבע באמצעות $c$ , $\alpha$ ו- $\beta$ את נפח הפירמידה.

## תשובות סופיות:

**36)** א. $SD = AB = 4m\cos\alpha$ ב. המשולשים חופפים. ג. $2\sqrt{3}m\cos\alpha$.

**37)** $V = \dfrac{c^3 \tan\beta}{12\tan\alpha\sin\alpha}$.

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 20 - חקירה פרמטרית - חקירת משוואה ממעלה ראשונה

### תוכן העניינים

1. פתרון משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטר ..... 159
2. חקירת משוואות ממעלה ראשונה ..... 160
3. חקירה של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה ..... 163
4. חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם שורשים ..... 168
5. חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם ערך מוחלט ..... 169

# פתרון משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטר:

## סיכום כללי:

**שלבי עבודה:**

- נפתור את המשוואה.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למשוואה על ידי הצבתו במשוואה המקורית.

## שאלות:

**1)** פתרו את המשוואה: $kx+6k=2x+3k^2$.

**2)** פתרו את המשוואה: $a^2(x-1)=3ax+4(x-a)$.

**3)** פתרו את מערכת המשוואות: $\begin{cases}2kx+5y=2k^2\\2x-y=-10\end{cases}$.

**4)** פתרו את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}bx-(1-2b)y=1\\(2b+1)x+3(by-1)=0\end{cases}$

## תשובות סופיות:

**1)** $x=3k \quad (k\neq 2)$.

**2)** $x=\frac{a}{a+1}$.

**3)** $(k-5,2k)$.

**4)** $\left(\frac{2-b}{b(b+1)},\frac{1}{b+1}\right)$ , $b\neq 0$ , $\pm 1$

# חקירה של משוואה ממעלה ראשונה:

## שאלות:

**1)** נתונה המשוואה הבאה: $m^2(2x-1)=9(x-1)-x(6+5m)$.

מצאו לאילו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ומצאו אותו).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

**2)** נתונה המשוואה: $k^2(5-2x)=3(15-2kx)$.

א. מצאו לאלו ערכי $k$ למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אף פתרון.

iii. אינסוף פתרונות.

ב. מצאו לאלו ערכי $k$ פתרון המשוואה:

i. חיובי.

ii. מקיים את אי-השוויון: $2x-3>x$.

**3)** נתונה המשוואה: $\frac{mx}{m-2}=\frac{2m}{m-5}-\frac{6x}{m^2-7m+10}$.

מצאו לאלו ערכי $m$ למשוואה:

א. פתרון יחיד.

ב. אף פתרון.

ג. אינסוף פתרונות.

**4)** לפניכם המשוואה: $m\cdot\frac{x-1}{x}-\frac{m+6}{m}=\frac{-3}{x}$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. האם עבור ערכי ה-$m$ הנותנים אינסוף פתרונות, כל $x$ יהיה פתרון של המשוואה?

ד. עבור אלו ערכי $m$ יהיה פתרון המשוואה גדול מ-2?

**5)** נתונה המשוואה: $x\left(m^2-9\right)=2\left(m\left(3x+1\right)+1-x\right)$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. חקרו את המשוואה ומצא עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. עבור איזה ערך של $m$ פתרון המשוואה יהיה: $x=2$?

**6)** נתונה המשוואה: $\frac{5}{k-4}-\frac{kx}{3k+15}=\frac{k^2+29}{k^2+k-20}$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. האם קיים ערך של $k$ עבורו יש למשוואה אינסוף פתרונות?

ג. עבור איזה ערך של $k$ פתרון המשוואה הוא: 4-?

**7)** לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{m^2x}{m-5}+\frac{2mx-m^2+1}{m-5}=1$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

**8)** לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{\left(m^2+1\right)x-4}{x-2}=m+1$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

**9)** לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{5m-2}{mx-1}=-3$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

**10)** לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{x+1}{x-m+1}=\frac{x}{x+m+2}$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $m\neq -3$ , $\frac{1}{2}$ , $\frac{m-3}{2m-1}$ ב. $m=-3$ ג. $m=\frac{1}{2}$

**2)** א. 1. $k\neq 0,3$ 2. $k=0$ 3. $k=3$.

ב. 1. $k>0$ או $k<-3$ וגם $k\neq 3$ 2. $0<k<15$ וגם $k\neq 3$.

**3)** א. $m\neq 2,3,5$ ב. $m=2,3,5$ ג. אף $m$.

**4)** א. $m\neq 3$ , $x=\frac{1}{m+2}$ ב. פתרון יחיד: $m\neq 0,-2,3$ , אף פתרון: $m=0,-2$ , אינסוף פתרונות: $m=3$.

ג. לא, רק: $x\neq 0$.

ד. $-2<m<-1.5$.

**5)** א. $m\neq 7,-1$ , $x=\frac{1}{m-7}$ ב. פתרון יחיד: $m\neq 7,-1$ , אף פתרון: $m=7$ ,

אינסוף פתרונות: $m=-1$.

**6)** א. $k\neq 0,4,-5$ , $x=\frac{3}{k}-3$ ב. אף $k$ ג. $k=-3$.

**7)** א. $m\neq 0$ , $-2$ , $5$ ב. אף $m$ ג. $m=0$ , $-2$ , $5$

**8)** א. $m\neq 0$ , $\pm 1$ ב. $m=1$ ג. $m=0$ , $-1$

**9)** א. $m\neq 0$ , $\frac{2}{5}$ ב. אף $m$ ג. $m=\frac{2}{5}$ , $0$

**10)** א. $m\neq 0$ , $-1$ , $-2$ , $-\frac{1}{2}$ ב. אף $m$ ג. $m=0$ , $-1$ , $-2$ , $-\frac{1}{2}$

# חקירה של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

**שלבי עבודה:**

- נפתור את מערכת המשוואות.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למערכת על ידי הצבתו.

**המשמעות הגרפית של חקירת מערכת משוואות ממעלה ראשונה:**

בהינתן מערכת שתי משוואות מהצורה: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ נאמר כי:

אם: $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ אז הישרים נחתכים (כלומר למערכת פתרון יחיד).

אם: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ אז הישרים מקבילים (כלומר למערכת אף פתרון).

אם: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ אז הישרים מתלכדים (כלומר למערכת אינסוף פתרונות).

## שאלות:

**1)** נתונה מערכת המשוואות: $\begin{cases} x+3ay=a \\ ax+3y=4a-3 \end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי $a$ למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אף פתרון.

iii. אינסוף פתרונות.

ב. מצאו לאלו ערכי $a$ נקודת החיתוך בין הישרים (המיוצגים על ידי המשוואות) נמצאת ברביע השלישי.

**2)** נתונות מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}(m+4)x+5y=m+8\\x+my=m+2\end{cases}$.

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למערכת:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. פתרון המערכת מייצג נקודה במערכת צירים.

הוכיחו כי נקודה זו נמצאת על הישר: $y(m-1)=2(m-1)x+4-m$.

ד. עבור אלו ערכי $m$ פתרון המערכת:

i. יהיה ברביע השני.

ii. יהיה מתחת לציר ה-$x$.

iii. יהיה מימין לציר ה-$y$.

**3)** לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-2x+3y=\left(k-\frac{x}{2}\right)^2+4\\x-10=k(1-y)\end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי $k$ יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

**4)** לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}k(x-1)=1-2y\\\frac{2x+3}{k}=3-y\end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי $k$ יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

**5)** לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} k^2(1-x)=k+9x+12y \\ x=1-\dfrac{2(y+1)}{k} \end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי $k$ יש למערכת המשוואות:
   i. פתרון יחיד.
   ii. אינסוף פתרונות.
   iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

**6)** נתונה מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} (2-k)x-y=k \\ 3x+ky=-1 \end{cases}$.

א. מצאו את הערך של $k$ עבורו $(2,7)$ הוא פתרון של מערכת המשוואות.

ב. האם יש למשוואה פתרונות נוספים עבור הערך של $k$ שמצאת בסעיף הקודם?

ג. האם קיים ערך של $k$ עבורו למערכת המשוואות לא יהיו פתרונות כלל?
אם כן מצאו אותו.

**7)** לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} ax+b^2y=a^2 \\ 3x+by=9b \end{cases}$.

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. הראו שכאשר $a=3b$ יש למערכת אינסוף פתרונות.

ג. עבור אלו ערכי $a$ ו- $b$ הפתרון היחיד של המערכת יהיה $(4,3)$?

**8)** לפניך מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} amx+y=m^2 \\ bx+my=-9m \end{cases}$.

א. מצאו ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ אם ידוע כי כאשר $m=4$ פתרון המשוואה הוא $(4,0)$.

ב. הוכיחו את הטענות הבאות:
   i. לכל ערך של $m$ יש למערכת פתרון ממשי.
   ii. פתרון המערכת תמיד יהיה $(m,0)$.

ג. העזרו בסעיף הקודם וקבע איזו משוואה מבין שלושת המשוואות הבאות לא תכיל את הפתרון היחיד הנ"ל:
   i. $7y+2m=2x$.
   ii. $my=2x-m$.
   iii. $m(y-mx)=2x-m(m^2+2)$.

**9)** לפניך הישרים הבאים: $\begin{cases} x+(k-9)y=8 \\ x-\dfrac{14y}{k}=1 \end{cases}$.

א. עבור אלו ערכי $k$ הישרים הללו מקבילים?

ב. הביעו באמצעות $k$ את נקודת החיתוך של הישרים.

ג. עבור איזה ערך של $k$ נקודת החיתוך של הישרים תהיה על הישר: $y=x-8$?

**10)** לפניכם שני הישרים: $\begin{cases} (k^2+6)x+ay=15 \\ kx+ay=3 \end{cases}$, $a,k$ פרמטרים, $a\neq 0$.

א. הוכיחו כי לכל ערך של $k$ הישרים הללו נחתכים.

ב. מצאו את $a$ אם ידוע כי כאשר $k=6$ נקודת החיתוך היא $\left(\frac{1}{3},1\right)$.

ג. עבור איזה ערך של $k$ נקודת החיתוך תהיה $(2,1)$?

ד. הראו כי נקודת החיתוך של הישרים נמצאת על גרף הפונקציה: $\frac{4y}{x}=k^2-5k+6$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. i. $a\neq\pm1$ ii. $a=-1$ iii. $a=1$ ב. $-1<a<0$

**2)** א. $\left(\frac{m-2}{m-1},\frac{m}{m-1}\right)$ , $m\neq1,-5$

ב. פתרון יחיד: $m\neq1,-5$ , אינסוף פתרונות: $m=-5$ , אף פתרון: $m=1$.

ג. הוכחה.

ד. i. $1<m<2$ ii. $0<m<1$ iii. $m\neq-5$ , $m<1$ , $m>2$.

**3)** א. i. $k\neq3,-1$ ii. $k=3$ iii. $k=-1$ ב. $\left(\frac{k^2+3k+10}{k+1},\frac{8}{k+1}\right)$.

**4)** א. i. $k\neq0,\pm2$ ii. $k=2$ iii. $k=0,-2$ ב. $\left(\frac{k-3}{k+2},\frac{3k+1}{k+2}\right)$.

**5)** א. i. $k\neq0,3$ ii. $k=3$ iii. $k=0$ ב. $\left(\frac{k-4}{k-3},\frac{6-k}{2k-6}\right)$.

**6)** א. $k=-1$ ב. כן. ג. $k=3$.

**7)** א. $\left(a+3b,-\frac{3a}{b}\right)$ ג. $b=2$ , $a=-2$.

**8)** א. $a=1$ , $b=-9$ ג. ii

**9)** א. $k=2,7$ ב. $\left(\frac{k^2-9k+112}{k^2-9k+14},\frac{7k}{k^2-9k+14}\right)$ ג. $k=8$

**10)** א. הוכחה. ב. $a=1$ ג. $k=1$.

# חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם שורשים:

## שאלות:

**1)** לפניכם המשוואה: $(m-1)x=\sqrt{m-1}$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

**2)** לפניכם המשוואה: $\frac{x-m}{\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x-2}=\frac{mx}{\sqrt{3x-2}}$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

## תשובות סופיות:

**1)** א. פתרון יחיד: $m>1$ והוא: $x=\frac{1}{\sqrt{m-1}}$ ב. $m=1$ ג. $m<1$.

**2)** א. פתרון יחיד: $\frac{6}{5}<m<4$ והוא: $x=\frac{m+2}{4-m}$. ב. אינסוף: $\varnothing$. ג. אף פתרון: $m\geq 4$ , $m\leq\frac{6}{5}$.

# חקירה של משוואות ממעלה ראשונה עם ערך מוחלט:

## סיכום כללי:

הגדרת ערך מוחלט: $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

- משוואה מהצורה: $|A|=|B|$ תפוצל לשתי משוואות: $A=B$ או: $A=-B$.
  יש לחקור כל מקרה בנפרד ולאחד פתרונות.
- עבור משוואות המכילות ביטויים עם ערכים מוחלטים יש להפריד עבור כל מקרה לפי הגדרת הערך המוחלט. לבסוף יש לאחד פתרונות.
- למשוואה מהצורה: $|x|=k$ (כאשר $x$ הוא המשתנה ו- $k$ הוא פרמטר) יתכנו:
  - שני פתרונות אם $k>0$.
  - פתרון אחד (והוא $x=0$) אם $k=0$.
  - אף פתרון אם $k<0$.

## שאלות:

**1)** חקור את המשוואה הבאה: $|x-2m|=|x+1|$.

**2)** חקור את המשוואה הבאה: $|mx-3x|=|x-m|$.

**3)** חקור את המשוואה הבאה: $\frac{mx^2}{|x|-1}-m|x|=2m+1$.

**4)** נתונה מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}y+|x-2|=3\\ |x+y|=m\end{cases}$.

מצא עבור אלו ערכי $m$ יש למערכת:

א. פתרון אחד בלבד.

ב. שני פתרונות שונים.

ג. אינסוף פתרונות.

## תשובות סופיות:

**1)** פתרון יחיד: $m \neq -\frac{1}{2}$. אף פתרון: $\varnothing$. אינסוף: $m = -\frac{1}{2}$.

**2)** פתרון יחיד: $m = 0$ והוא $x = 0$. אף פתרון: $\varnothing$.

שני פתרונות: $m \neq 0$ והם: $x_{1,2} = -\frac{2m}{3}, \frac{12m}{5}$.

**3)** עבור: $m = -\frac{1}{2}$ יש פתרון יחיד: $x = 0$.

עבור: $m > 0$ , $-\frac{1}{2} < m < 0$ , $m < -1$ יש שני פתרונות.

עבור: $m = 0$ , $-1 < m < -0.5$ אין פתרון כלל.

**4)** א. $m = 0, m > 5$ ב. $0 < m < 5$ ג. $m = 5$.

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 21 - חקירה פרמטרית - חקירת משוואה ממעלה שנייה

### תוכן העניינים

1. פתרון משוואות ממעלה שנייה עם פרמטר ..... 171
2. חקירה של משוואה ממעלה שנייה ..... 172
3. חקירות עם קדקוד פרבולה ..... 181

# פתרון משוואות ממעלה שנייה עם פרמטר:

## סיכום כללי:

משוואות מהצורה: $ax^2+bx+c=0$ המכילות פרמטר כלשהו, $m$, המגולם בתוך הביטויים של המקדמים $a$, $b$ ו-$c$ נקראות משוואות עם פרמטר.

פתרון של משוואה עם פרמטר יתבצע באופן רגיל, אך יכול להכיל את הפרמטר.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואה: $x^2+mx-12m^2=0$.

**2)** פתור את המשוואה: $2x^2+5m^2=(11m+1)x-5m$.

## תשובות סופיות:

**1)** $x_1=3m$ , $x_2=-4m$.

**2)** $x_1=5m$ , $x_2=\frac{m+1}{2}$.

# חקירה של משוואה ממעלה שנייה:

## סיכום כללי:

### המשוואה הריבועית:

תהא המשוואה הריבועית: $ax^2+bx+c=0$ כאשר $a\neq 0$.
נגדיר: $\Delta=b^2-4ac$ ונאמר כי:

- למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים אם: $\Delta>0$.
- למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד אם: $\Delta=0$.
- למשוואה לא יהיו שני פתרונות ממשיים כלל אם: $\Delta<0$.

אם $a=0$ תתקבל משוואה ליניארית מהצורה: $bx+c=0$.

- למשוואה זו יהיה פתרון ממשי אחד אם $b\neq 0$.
- למשוואה לא יהיו פתרונות כלל אם: $b=0$ ו-$c\neq 0$.

אם $b=0$ וגם $c=0$ למשוואה יהיו אינסוף פתרונות ממשיים.

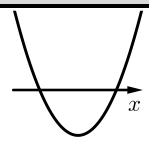
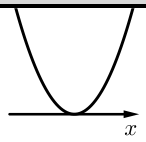
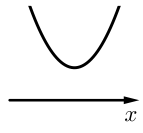
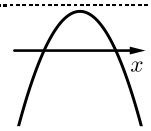
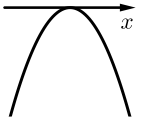
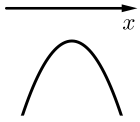
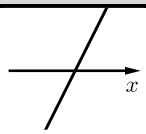
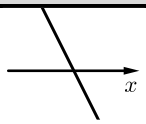
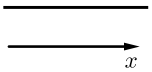
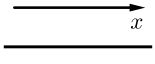
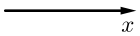
### הפונקציה הריבועית:

תהא הפונקציה הריבועית: $y=ax^2+bx+c$ כאשר $a\neq 0$.
נגדיר: $\Delta=b^2-4ac$ ונאמר כי לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה-$x$ באופן הבא:

- אם $a>0$ תתקבל פרבולה ישרה (מחייכת):
  - עבור $\Delta>0$ הפרבולה תחתוך את ציר ה-$x$ בשתי נקודות שונות.
  - עבור $\Delta=0$ הפרבולה תשיק לציר ה-$x$ (חיתוך בנקודה אחת).
  - עבור $\Delta<0$ הפרבולה תהיה מרחפת (ללא חיתוך עם ציר ה-$x$ כלל).
- אם $a>0$ תתקבל פרבולה הפוכה (עצובה):
  - עבור $\Delta>0$ הפרבולה תחתוך את ציר ה-$x$ בשתי נקודות שונות.
  - עבור $\Delta=0$ הפרבולה תשיק לציר ה-$x$ (חיתוך בנקודה אחת).
  - עבור $\Delta<0$ הפרבולה תהיה מרחפת (ללא חיתוך עם ציר ה-$x$ כלל).

- אם $a=0$ תתקבל פונקציה ליניארית: $y=bx+c$ ולה:
  - עבור $b>0$ יתקבל ישר עולה החותך את ציר ה-$x$ ב-$\left(-\frac{c}{b},0\right)$.
  - עבור $b<0$ יתקבל יורד עולה החותך את ציר ה-$x$ ב-$\left(-\frac{c}{b},0\right)$.
- אם $b=0$ יתקבל ישר $y=c$ וכעת:
  - אם $c>0$ הישר כולו מעל לציר ה-$x$ ומקביל לו.
  - אם $c<0$ הישר כולו מתחת לציר ה-$x$ ומקביל לו.
  - אם $c=0$ הישר מתלכד עם ציר ה-$x$.

ניתן לסכם את כל המקרים באופן הבא:

| פירוט מילולי | תנאים | $\Delta>0$ | $\Delta=0$ | $\Delta<0$ |
|---|---|---|---|---|
| תיאור גרפי של $y=ax^2+bx+c$ עבור $a\neq 0$ | $a>0$ |  |  |  |
| | $a<0$ |  |  |  |
| | | $b>0$ | $b<0$ | |
| תיאור גרפי של $y=bx+c$ כאשר $a=0$ ו-$b\neq 0$ | $a=0$ $b\neq 0$ |  |  | |
| | | $c>0$ | $c<0$ | $c=0$ |
| תיאור גרפי של $y=c$ כאשר $a=0$ ו-$b=0$ | $a=0$ $b=0$ |  |  |  |

## שאלות:

**1)** נתונה המשוואה: $(3-m)x^2+4mx-2m=0$ , $(m\neq 3)$.

מצא לאלו ערכי $m$ למשוואה:

א. שני פתרונות ממשיים שונים.

ב. פתרון ממשי אחד.

ג. אין פתרונות ממשיים כלל.

**2)** נתונה הפונקציה: $y=2mx^2+mx-1$.

מצא לאלו ערכי $m$ הפונקציה אינה חותכת את ציר ה-$x$.

**3)** נתונה הפונקציה: $y=(m^2-9)x^2+(m+3)x+4$ , $(m\neq\pm 3)$.

מצא לאלו ערכי $m$ הפונקציה נמצאת מעל ציר ה-$x$ לכל ערך של $x$.

**4)** נתון אי השוויון: $mx^2>(m+4)(x-1)-x^2$.

מצא לאלו ערכי $m$ אי השוויון מתקיים לכל ערך של $x$.

**5)** נתונה המשוואה הבאה: $-m(x-1)^2+2(m+16)=x(6-x(2m-3))+1$.

א. מצא עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

i. שני פתרונות ממשיים שונים.

ii. פתרון ממשי אחד.

iii. אף פתרון ממשי.

ב. מצא את הפתרון היחיד עבור ערכי ה-$m$ המתאימים במידה והוא קיים.

**6)** נתונה המשוואה הבאה: $m^2x(9x+1)+1=0$.

א. מצא עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

i. שני פתרונות ממשיים שונים.

ii. פתרון ממשי אחד.

iii. אף פתרון ממשי.

ב. מצא את הפתרון היחיד עבור ערכי ה-$m$ המתאימים במידה והוא קיים.

**7)** נתונה המשוואה: $mx^2-(9m+4)x+20m+16=0$.

א. הראה שעבור כל ערך של $m$ יש למשוואה לפחות פתרון ממשי אחד.

ב. פתור את משוואה והראה כי אחד השורשים הוא מספר קבוע שאינו תלוי ב-$m$.

**8)** לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=(m^2-m-2)x^2+2(m-2)x+4$.

ענה על השאלות הבאות:

א. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$x$ בשתי נקודות שונות?

ב. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$x$ בנקודת אחת בלבד?

ג. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה לא חותך את ציר ה-$x$ כלל?

ד. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה חיובי לכל ערך של $x$?

ה. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה שלילי לכל ערך של $x$?

**9)** נתונה הפונקציה: $f(x)=kx^2-5kx+6k+1$.

א. עבור אלו ערכי $k$ גרף הפונקציה יהיה כולו מעל לציר ה-$x$?

ב. עבור איזה ערך של $k$ יתקבל גרף פרבולה הנוגעת בציר ה-$x$?

**10)** עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה: $f(x)=(k^2-5k-6)x^2+(2-3k)x+2$ הוא אי-שלילי לכל ערך של $x$?

**11)** נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2+4x+2m+2$ ו-$g(x)=(1-m)x^2-3mx-1.5$.

א. מצא עבור אלו ערכי $m$ נחתכים הגרפים של הפונקציות:

i. בשתי נקודות שונות.

ii. בנקודה אחת בלבד.

iii. באף נקודה.

ב. מצא לאלו ערכי $m$ יהיה גרף הפונקציה $f(x)$ כולו מתחת לגרף הפונקציה $g(x)$.

**12)** נתונה הפונקציה: $f(x)=2kx^2+6kx+8k+2$.

א. עבור איזה ערך של $k$ גרף הפונקציה יהיה ישר העובר ברביעים הראשון והשני בלבד?

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=kx^2-6x-10$.

ב. האם קיימים ערכי $k$ עבורם גרף הפונקציה $f(x)$ הוא מעל גרף הפונקציה $g(x)$ לכל $x$? הראה חישוב מתאים.

ג. הוכח כי קיים ערך של $k$ עבורו גרפים של שתי הפונקציות משיקים זה לזה ומצא אותו.

**13)** נתונה הפונקציה הריבועית: $f(x)=2x^2-(5m+7)x+3m^2+8m+5$.

א. הראה כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$x$ לפחות פעם אחת לכל ערך של $m$.

ב. מצא את שורשי הפונקציה.

ג. עבור אלו ערכי $m$ סכום השורשים גדול מ-3.5.

ד. מהם שורשי הפונקציה כאשר: $m=0$?

**14)** נתונה המשוואה הבאה: $(k+1)x^2+(k^2-4k-5)x-54=0$.

א. ענה על שני החלקים הבאים:

i. עבור אלו ערכי $k$ יהיו פתרונות המשוואה שני מספרים נגדיים?

ii. מהם פתרונות המשוואה עבור ערכי ה-$k$ שמצאת?

ב. הראה כי לא קיים ערך של $k$ עבורו פתרונות המשוואה:

$(k-4)x^2+(6k-k^2-8)x+5k-10=0$ הם מספרים נגדיים.

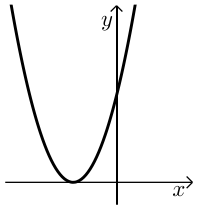
**15)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=mx^2+(m-2)x+m^2+3m-10$.

א. מצא עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ב. מצא את נקודות החיתוך שבין הגרפים המתקבלים עבור כל ערכי ה-$m$ שמצאת בסעיף א'.

**16)** מצא עבור אלו ערכי $m$ למשוואה: $(4-m)x^2+(m+2)x+m^2-12m-28=0$ יהיו שני פתרונות ממשיים שונים שאחד מהם הוא אפס.

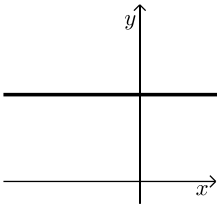
**17)** נתונה משפחת הפרבולות הבאה: $f(x)=2x^2+(m+1)x+m^2+2m-2.5$.




א. מצא ערך של $m$ עבורו גרף הפרבולה השייכת למשפחת הפונקציות הנ"ל היא מהצורה:

ב. עבור ערך ה-$m$ שמצאת בסעיף הקודם מצא את התחום של $k$ עבורו יהיה לגרף הפרבולה ולישר $y=kx-4$ שתי נקודות חיתוך.

**18)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=(m^2-5m+4)x^2+(2m-2)x+1$.



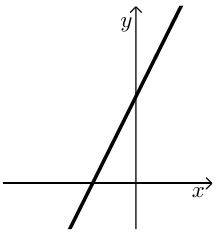

א. עבור אלו ערכים של $m$ הפונקציה תחתוך את ציר ה-$x$ בשתי נקודות שונות?

ב. מצא ערך של $m$ עבורו גרף הפונקציה השייך למשפחת הפונקציות הנ"ל יהיה מהצורה שבצד, וכתוב את משוואת הישר המתקבלת במקרה זה.

ג. הגרף שאת משוואתו מצאת בסעיף הקודם חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות שונות. הראה כי אחת מהן אינה תלויה ב-$m$.

ד. עבור אלו ערכי $m$ נקודת החיתוך שתלויה ב-$m$ תהיה מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם?

**19)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4x(mx+2)+4-m}{4}$, $m$ פרמטר חיובי.




א. הראה כי לכל הגרפים המייצגים את משפחת הפונקציות הנ"ל יש נקודת חיתוך עם ציר ה-$x$ שאינה תלויה ב-$m$ ומצא את נקודה זו.

ב. עבור איזה ערך של $m$ גרף הפונקציה יהיה מיוצג ע"י ישר מהצורה:

ג. הראה כי קיים תחום של $x$ אשר לא תלוי ב-$m$ ובו גרף הפונקציה נמצא תמיד מתחת לישר שמצאת בסעיף הקודם ומצא את תחום זה.

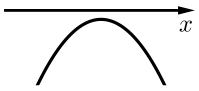
**20)** נתונה הפונקציה: $f(x)=3m^2x^2+4mx+2$.

א. הוכח כי הפונקציה נמצאת תמיד מעל לציר ה-$x$ עבור כל ערך של $m$.

ב. מגדירים פונקציה חדשה באופן הבא: $y=\frac{mx^2+2x(m+2)+m}{3m^2x^2+4mx+2}$.

מצא עבור אלו ערכי $m$ הפונקציה $y$ היא שלילית.

**21)** נתונה הפונקציה: $f(x)=mx^2+(2m+1)x-\frac{1}{4}$.




א. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה השייך למשפחת הפונקציות הנ"ל יהיה מהצורה:

ב. מגדירים פונקציה חדשה באופן הבא: $y=\frac{(m^2-9)x^2+(m+3)x-1}{mx^2+(2m+1)x-\frac{1}{4}}$.

הראה כי הפונקציה $y$ חיובית בתחום שמצאת בסעיף הקודם.

ג. דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $y$ עם ציר ה-$y$ מעבירים ישר המקביל לציר ה-$x$.

i. כתוב את משוואת ישר זה.

ii. מצא עבור אלו ערכים של $m$ גרף הפונקציה חותך את הישר בנקודה שבה: $x=-9$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $m>0$ או $m<-3$ וגם $m\neq 3$ ב. $m=0\ ,\ -3$ ג. $-3<m<0$.

**2)** $-8<m\leq 0$.

**3)** $m>3\frac{2}{5}$ או $m<-3$.

**4)** $m>0$.

**5)** א. i. $m>3$ ii. אף $m$ iii. $m<3$.

ב. לא קיים מקרה בו יש למשוואה פתרון יחיד.

**6)** א. i. $m<-6\ ,\ m>6$ ii. $m=\pm 6$ iii. $m\neq 0\ ,\ -6<m<6$

ב. בשני המקרים יתקבל: $x=-\frac{1}{18}$.

**7)** א. מתקבל: $\Delta=(m+4)^2$ שתמיד אי-שלילי ובמקרה הלא-ריבועי מתקבלת משוואה עם פתרון אחד.

ב. $\frac{5m+4}{m}$, $m_{1,2}=4$.

**8)** א. $-2<m<2\ ,\ m\neq -1$ ב. $m=-1,-2$ ג. $m<-2\ ,\ m\geq 2$

ד. $-2<m<-1\ ,\ m=2$. ה. אף $m$.

**9)** א. $0\leq k<4$ ב. $k=4$.

**10)** $-26\leq k\leq -2$.

**11)** א. i. $m<-8\ ,\ m>-2\ ,\ m\neq 0$ ii. $m=0,-2,-8$ iii. $-8<m<-2$.

ב. $-8<m<-2$.

**12)** א. $k=0$ ב. לא. אין פתרון לאי-שוויון: $f(x)>g(x)$.

ג. עבור אי-השוויון של סעיף ב' מתקבל: $\Delta=4(k+3)^2$ ולכן כאשר $k=-3$ הגרפים נוגעים זה בזה בנקודה אחת.

**13)** א. הוכחה. ב. $x_{1,2}=m+1\ ,\ 1.5m+2.5$

ג. $m>0$ ד. $x_{1,2}=1\ ,\ 2.5$.

**14)** א. i. $k=5$ ii. $x=\pm 3$ ב. הוכחה.

**15)** א. $m=2,-5$ ב. $(-1,2)\ ,\ (0,0)$.

**16)** $m=14$.

**17)** א. $m=1$. כאשר: $m=-3$ נקבל גרף: $y=2x^2-2x+0.5$ המשיק לציר $x$ מימין לראשית ולכן נפסל.

ב. $k<-4\ ,\ k>8$.

**18)** א. $m>1\ ,\ m\neq 4$ ב. $f(x)=1\ ,\ m=1$ ג. הנקודה היא: $(0,1)$

ד. $m\neq 1\ ,\ m<4$.

**19)** א. הנקודה היא: $(-0.5,0)$ ב. $m=0$ ג. $-0.5<x<0.5$.

**20)** א. מתקבל: $\Delta=-8m^2$ ולכן לגרף הפרבולה אין חיתוכים כלל ומכיוון ש-A אי-שלילי הרי שמדובר בפרבולה מרחפת חיובית. במקרה הישר מתקבל ישר המקביל לציר ה-$x$ שגם כן כולו חיובי.

ב. מאחר והמכנה תמיד חיובי (ממקודם) יש לדרוש תנאים שיקיימו מונה שלילי ($a<0$ , $\Delta<0$ - עבור המונה) נקבל: $m<-1$.

**21)** א. $-1<m<-\frac{1}{4}$ ב. הוכחה. ג. i. $y=4$

ii. $-1\frac{7}{9}$ , $m=5$.

# חקירות עם קדקוד פרבולה:

## סיכום כללי:

תהא הפונקציה הריבועית: $y=ax^2+bx+c$ כאשר $a\neq 0$. נגדיר: $\Delta=b^2-4ac$.

התיאור הגרפי של הפונקציה הריבועית הוא פרבולה.

עבור $a\neq 0$ נקבל כי קדקוד הפרבולה הוא: $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

- שאלות העוסקות בקדקוד חיובי/שלילי נדרוש: $-\frac{\Delta}{4a}>0$ או $-\frac{\Delta}{4a}<0$ בהתאמה.
- שאלות העוסקות בקדקוד הנמצא מימין/משמאל לציר ה- $y$ נדרוש $-\frac{b}{2a}>0$ או $-\frac{b}{2a}<0$ בהתאמה.
- שאלות העוסקות בקדקוד שנמצא מעל/מתחת לישר $y=n$ או מימין/משמאל לישר $x=k$ נדרוש $-\frac{\Delta}{4a}\gtrless n$ ו- $-\frac{b}{2a}\gtrless k$ בהתאמה.
- שאלות העוסקות בקדקוד שבאחד הרביעים נדרוש $-\frac{b}{2a}\gtrless 0$ ו- $-\frac{\Delta}{4a}\gtrless 0$ לפי הרביע המבוקש.

## שאלות:

**1)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(m+3)x^2+(3m+14)x+2m+7$.

א. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה הוא פרבולה החותכת את ציר ה- $x$ בשתי נקודות?

ב. הבע באמצעות $m$ את שיעורי קדקוד הפרבולה של גרף הפונקציה הנתונה.

ג. עבור אלו ערכי $m$ קדקוד הפרבולה יהיה וודאי מתחת לישר: $y=-4$?

ד. עבור אלו ערכי $m$ מתקיימים התנאים של סעיף א' ו-ג' יחד?

**2)** נתונה הפרבולה הבאה: $f(x)=x^2-3(m-2)x+2m^2-8m+7$.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. גרף הפרבולה חותך את ציר ה-$x$ בשתי נקודות עבור כל ערך של $m$.

ii. קדקודי כל הפרבולות המיוצגות ע"י תבנית הפונקציה הנתונה נמצאים מתחת לציר ה-$x$.

ב. עבור איזה ערך של $m$ גרף הפרבולה יחתוך את ציר ה-$x$ בשתי נקודות הנמצאות באותו מרחק מראשית הצירים?

ג. עבור ערך ה-$m$ שמצאת בסעיף הקודם מצא את נקודות החיתוך על ציר ה-$x$.

ד. הראה כי קדקוד הפרבולה המתקבלת בעת הצבת ערך ה-$m$ הנ"ל נמצא על ציר ה-$y$.

**3)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(m^2-2m-3)x^2+8x+0.5$.

א. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה הוא פרבולה?

ב. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה הוא פרבולה החותכת את ציר ה-$x$ בשתי נקודות?

ג. הבע באמצעות $m$ את שיעורי קדקוד הפרבולה.

ד. הוכח כי קדקודי כל הפרבולות נמצאים על הישר: $2y=8x+1$ עבור כל ערך של $m$ עבורו מתקבלת פרבולה.

**4)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(k^2-2k+15)x^2+kx+12$.

א. הוכח כי עבור כל ערך של $k$ גרף הפונקציה לא נוגע בציר ה-$x$ כלל.

ב. הוכח כי קדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י התבנית הנ"ל תמיד מעל לציר ה-$x$.

ג. עבור איזה ערך של $k$ קדקוד הפרבולה יהיה על ציר ה-$y$?

ד. מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה במקרה זה.

**5)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=(k^2-9)x^2+(k+3)x-1$.

א. עבור אלו ערכי $k$ גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה-$x$?

ב. הבע באמצעות $k$ את שיעורי קדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י התבנית של $f(x)$.

ג. מצא עבור אלו ערכי $k$ קדקוד הפרבולה יהיה ברביע הראשון.

ד. האם קיים ערך של $k$ עבורו קדקוד הפרבולה נמצא על ציר ה-$y$? נמק את תשובתך.

**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(m^2-4)x^2+5mx+6$.

א. הראה כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$ לפחות פעם אחת עבור כל ערך של $m$.

ב. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה הוא פרבולת מינימום?

ג. הראה כי קדקוד הפרבולה המתקבל עבור ערכי ה-$m$ שמצאת בסעיף הקודם נמצא תמיד מתחת לציר ה-$x$.

**7)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(m^2-8m+12)x^2+(m-2)x+2$.

א. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה יהיה כולו מעל לציר ה-$x$?

ב. עבור אלו ערכי $m$ גרף הפונקציה הוא פרבולה מרחפת חיובית שקדקודה משמאל לישר: $x=-\frac{1}{2}$.

ג. האם ייתכן כי גרף הפונקציה יכול להיות פרבולת מקסימום שקדקודה הוא משמאל לישר: $x=-\frac{1}{2}$? נמק והראה חישוב מתאים.

**8)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=(m^2-4)x^2+2x+1$ , $g(x)=(m+2)x^2+(5-m)x+3$.

א. ענה על השאלות הבאות:

i. מצא ערך של $m$ עבורו הגרפים משיקים זה לזה.

ii. מצא ערך של $m$ עבורו הגרפים חותכים זה את זה בנקודה אחת בלבד.

iii. הסבר מדוע בכל מקרה התקבל ערך $m$ שונה.

ב. עבור אלו ערכי $m$ הגרפים של הפונקציות הם פרבולות מינימום המקיימות שקדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י הפונקציה $f(x)$ נמצא מימין לקדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י $g(x)$?

**9)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=(m^2-9)x^2+7x+5$ , $g(x)=(m-3)x^2+(4m-3)x+1$.

א. עבור אלו ערכי $m$ הגרפים נחתכים בשתי נקודות שונות?

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. עבור איזה ערך של $m$ הגרפים הם פרבולות נוגעות זו בזו?

ii. עבור איזה ערך של $m$ הגרפים חותכים זה את זה בנקודה אחת בלבד.

iii. הסבר את ההבדל בין הערכים של $m$ שהתקבלו בחלק i ובחלק ii.

ג. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ד. עבור אלו ערכי $m$ הסכום של שיעורי ה-$x$ של נקודות קדקודי הפרבולות של שתי הפונקציות יהיה קטן מ-1?

## תשובות סופיות:

**1)** א. $m\neq -3\ ,\ m>-4\ ,\ m<-28$ ב. $\left(\frac{-3m-14}{2m+6},\frac{-m^2-32m-112}{4m+12}\right)$

ג. $m>-3$ ד. $m>-3$.

**2)** א. i. מתקבל: $\Delta=m^2-4m+8$ שחיובי תמיד.

ii שיעור ה-$y$ של הקדקוד הוא: $-\frac{\Delta}{4}$ אשר שלילי תמיד. ב. $m=2$

ג. $(\pm 1,0)$ ד. הקדקוד: $(0,-1)$.

**3)** א. $m\neq -1,3$ ב. $-5<m<7\ ,\ m\neq -1,3$ ג. $\left(\frac{-4}{m^2-2m-3},\frac{m^2-2m-35}{2\left(m^2-2m-3\right)}\right)$

ד. יש להציב את הקדקוד בישר ולקבל שוויון אמת.

**4)** א. המקדם $a$ תמיד חיובי ומתקבל: $\Delta=-47k^2+96k-720$ שתמיד שלילי.

מכאן שמדובר בפרבולה מרחפת עבור כל $k$. ג. $k=0$ ד. $(0,12)$

**5)** א. $-3\le k<1.8$ ב. $\left(\frac{1}{2(3-k)},\frac{9-5k}{4(k-3)}\right)$ ג. $1.8<k<3$.

ד. לא. מכיוון שלא קיים ערך של $k$ עבורו שיעור ה-$x$ של קדקוד הפרבולה יהיה אפס.

**6)** א. מתקבל: $\Delta=m^2+96$ המעיד כי תמיד יש לפונקציה שני חיתוכים וכאשר $m=\pm 2$ מתקבלים שני ישרים החותכים את ציר ה-$x$. ב. $m<-2\ ,\ m>2$.

**7)** א. $m\le 2\ ,\ m>6\frac{4}{7}$. ב. $6\frac{4}{7}<m<7$. ג. לא.

**8)** א. i. $m=-1\frac{4}{9}$ ii. $m=-2$ iii. במקרה i מדובר בפרבולות אשר

יכולות להשיק ובמקרה ii מדובר בשני ישרים אשר רק נחתכים. ב. $3<m<4$.

**9)** א. $m\neq 3,-2\ ,\ m<3\frac{1}{16}$ ב. i. $m=3\frac{1}{16}$ ii. $m=3,-2$

iii. במקרה i מדובר במשוואה ריבועית ובנקודת השקה, ובמקרה ii מדובר במשוואה ליניארית ובנקודת חיתוך.

ג. עבור $m=-2$ מתקבלת: $\left(-\frac{2}{9},3\frac{16}{81}\right)$, עבור: $m=3$ מתקבלת: $(2,19)$.

ד. $m>3\ ,\ -2.72<m<1.22\ ,\ m<-3$.

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 22 - חקירה פרמטרית - נוסחאות וייטה (להעשרה)

### תוכן העניינים

1. הגדרת נוסחאות וייטה וחישובים יסודיים ..... 185
2. חקירת משוואות עם נוסחאות וייטה ..... (ללא ספר)

# הגדרת נוסחאות וייטה וחישובים יסודיים:

## סיכום כללי:

### הגדרה:

נתונה הפונקציה הריבועית: $y=ax^2+bx+c$, כאשר: $\Delta>0$ , $a\neq 0$.

אם $x_1$ ו- $x_2$ הם שורשי המשוואה: $ax^2+bx+c=0$ אז מתקיים: $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ , $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$.

לקשרים אלו קוראים בשם **נוסחאות וייטה** והם תקפים רק במשוואה ריבועית שבה $\Delta>0$.

## שאלות:

**1)** לפניך משוואות ריבועיות. מבלי לפתור, מצא את הסכום ואת מכפלת השורשים שלהם:

א. $x^2+5x-8=0$.

ב. $3x^2-7x+4=0$.

ג. $x^2+9x-14=0$.

ד. $13x-6x^2+7=0$.

**2)** נתונה משוואה ריבועית: $ax^2+3x+5=0$. מצא את $a$ אם ידוע כי למשוואה שני שורשים ממשיים שונים אשר סכומם הוא 3.

**3)** נתונה משוואה ריבועית: $\alpha x^2+(\beta-\alpha)x-16=0$ , ($\alpha$ , $\beta$ פרמטרים).

מצא את ערכי הפרמטרים $\alpha$ ו- $\beta$ אם ידוע כי למשוואה שני שורשים ממשיים שונים אשר סכומם הוא 2- ומכפלתם היא 16-.

**4)** כתוב משוואה ריבועית אשר לה שני שורשים ממשיים שונים, $x_1$ ו- $x_2$ שמקיימים: $x_1+x_2=5$ ו- $x_1\cdot x_2=-2$.

כמה משוואות כאלה תיתכנה? נמק.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x_1+x_2=-5\ ,\ x_1x_2=-8$ ב. $x_1+x_2=2\frac{1}{3}\ ,\ x_1x_2=1\frac{1}{3}$

ג. $x_1+x_2=-9\ ,\ x_1x_2=-14$ ד. $x_1+x_2=\frac{6}{13}\ ,\ x_1x_2=\frac{7}{13}$.

**2)** $a=-1$.

**3)** $\alpha=1\ ,\ \beta=3$.

**4)** אם $a=1$ אז: $x^2-5x-2=0$.

יש אינסוף משוואות מהצורה: $ax^2-5ax-2a=0$.

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 23 - סדרות

### תוכן העניינים

1. סדרה חשבונית ..... (ללא ספר)
2. סדרה הנדסית ..... (ללא ספר)
3. סדרות מעורבות ..... (ללא ספר)
4. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת ..... (ללא ספר)
5. סדרות כלליות וסדרות נסיגה ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 24 - חוקי החזקות והשורשים

### תוכן העניינים

1. חוקי החזקות ..... 187
2. חוקי השורשים ..... 192
3. כתיבה מדעית של מספרים ..... 196

# חוקי החזקות:

## סיכום כללי:

### סיכום חוקי החזקות:

1. $a^0=1$
2. $a^1=a$
3. $a^n\cdot a^m=a^{m+n}$
4. $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
5. $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$
6. $a^m\cdot b^m=\left(a\cdot b\right)^m$
7. $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$
8. $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $a^2a^6$
ב. $t^3t^5t^7$
ג. $b^2b^5b^{12}b^3$
ד. $\frac{k^8}{k^3}$
ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$
ו. $\frac{c^6}{c^2}$
ז. $\frac{a^3a^{19}}{a^{15}}$
ח. $\frac{x^{30}}{x^9x^{18}}$
ט. $\frac{y^3y^{15}}{y^4y^{14}}$
י. $3^23^33^4$
יא. $\frac{2^{16}2^2}{2^{10}}$
יב. $\frac{5^{20}5^35^{16}}{5^45^{22}5^8}$

**2)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $\frac{3^42^7}{2^63^2}$
ב. $\frac{a^{10}b^{13}a^3}{b^4b^6b^2a^{12}}$
ג. $\frac{x^8y^5y^9x^2}{y^4x^4}$

**3)** לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^62^{17}3^32^4}{3^42^33^2}$.

מצא $n$ כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243\cdot2^n$ לבין הביטוי הנתון.

**4)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3\cdot 2^7}{2^4\cdot 2^5}$ ב. $\frac{9^3\cdot 27^2}{3^9\cdot 81}$

ג. $\frac{10^9\cdot 25^5\cdot 8^{-1}}{40^3\cdot 125^5}$ ד. $2^3+2^5$

**5)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$.

א. $\left(a^2\right)^4$ ב. $\left(c^3\right)^{10}$ ג. $\left(x^3x^{10}\right)^2$

ד. $\frac{\left(b^2\right)^3}{b^2b^3}$ ה. $\frac{n^7n^8}{\left(n^3\right)^4}$ ו. $\frac{d^{20}\left(d^4\right)^2}{d^{12}\left(d^3\right)^2}$

ז. $\frac{2^5\left(2^4\right)^2 2^3}{\left(2^32^2\right)^3}$ ח. $\frac{3^6\left(3^33^2\right)^6}{3^{28}\left(3^2\right)^3}$ ט. $\frac{\left(8^3\right)^8 8^{11}}{\left(8^28\right)^3 8^8}$

י. $\frac{\left(2^4\right)^5\left(3^6\right)^7 2^{20}}{3^{35}2^{40}}$ יא. $\frac{\left(3^2\right)^6 5^{31}3^7}{\left(5^2\right)^{10}5^{11}3^{18}}$ יב. $\frac{\left(3^2\right)^7 5^{10}\left(5^3\right)^2}{3^95^{16}}$

**6)** לפניך הביטויים הבאים: $\left(\left(3^2\right)^3\right)^4$ ו- $\left(\left(3^6\right)^n\right)^2$.
מצא $n$ כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

**7)** חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^33^5}{2^23^4}$ ב. $\frac{5^{20}3^{14}3^8}{3^{20}5^{12}5^8}$ ג. $\frac{7^{12}2^22^6}{2^57^{10}7}$

**8)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^29\cdot 81^2$ ב. $64^22^38^2$ ג. $125\cdot 25\cdot 5^5$

ד. $\frac{2^4\cdot 16^5}{8\cdot 512}$ ה. $\frac{\left(4^2\right)^3 16}{64\cdot 2^3}$ ו. $\frac{\left(\left(3^4\right)^4\right)^5}{81^327^43^5}$

**9)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{\left(2a^2b\right)^3\cdot\left(ab^{-3}\right)^2}{4ab^{-2}\cdot\left(\frac{a^2}{b}\right)^4}$

ב. $\frac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\frac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\frac{4^{b+3}}{4^{b+1}+4^{b+2}}$

ד. $\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^{n+3}+x^{n+5}}{x^{n+2}}$

**10)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $\left(ab\right)^n=a^nb^n$ ו-$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

א. $\left(a^2b\right)^3$

ב. $\left(m^4n^3\right)^5$

ג. $\left(x^{12}y^3\right)^3$

ד. $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$

ה. $\left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7$

ו. $\left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$

ז. $\left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6$

ח. $\left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2$

ט. $\left(\frac{\left(b^{12}c\right)^2c^{14}}{c\left(c^3b^5\right)^4b^3}\right)^2$

**11)** חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\left(\frac{3^92^62^2}{3^62^53^2}\right)^2$

ב. $\left(\frac{\left(5^4\right)^23^6}{3^55^7}\right)^2$

ג. $\left(\frac{7^3\cdot16\cdot128\cdot49}{\left(2^27\right)^5}\right)^3$

**12)** בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\frac{1}{4^6}$

ב. $\frac{1}{5^3}$

ג. $\frac{1}{2^{10}}$

ד. $\frac{1}{8}$

ה. $\frac{1}{81}$

ו. $\frac{1}{125}$

**13)** בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\frac{1}{4^{-3}}$

ב. $\frac{1}{3^{-2}}$

ג. $\frac{1}{5^{-3}}$

**14)** חשב את הביטויים הבאים:

א. $3^2\cdot 3^{-5}\cdot 3^7$

ב. $2^{-8}\cdot 512\cdot 2^2$

ג. $5^6\cdot 5^{-3}\cdot 5^{-2}$

ד. $2^{14}\cdot 3^{-6}\cdot 2^{16}\cdot 3^4\cdot 2^{-30}$

ה. $\dfrac{2^{-5}\cdot 5^3\cdot 2^{14}}{5^2\cdot 5^{-10}\cdot 5^8\cdot 2^6}$

ו. $\dfrac{3^{-6}\cdot 7^7\cdot 7^{-4}}{3^{-4}\cdot 3^{-3}\cdot 7^3}$

**15)** פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\dfrac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

ב. $\dfrac{\left(4^4\right)^{-4}3^{-11}}{\left(3^{-2}4^3\right)^{-6}}$

ג. $\dfrac{2^{-3}5^4}{5^4\cdot 125\cdot\left(5^2 2\right)^{-3}\cdot 2^{-4}}$

**16)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{a^{n+2}\cdot a^{2-3n}}{\left(a^3\right)^{n+1}}$

ב. $\dfrac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\dfrac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\dfrac{\left(m^{n+2}\right)^3\cdot m^{-4n-2}}{\dfrac{1}{m^{6n+2}}\cdot\left(m^3\right)^{n-2}}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $a^8$ ב. $t^{15}$ ג. $b^{22}$ ד. $k^5$ ה. $n^5$ ו. $c^4$
ז. $a^7$ ח. $x^3$ ט. 1 י. $3^9$ יא. $2^8$ יב. $5^5$.

**2)** א. 18 ב. $ab$ ג. $x^6y^{10}$.

**3)** $n=16$.

**4)** א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40.

**5)** א. $a^8$ ב. $c^{30}$ ג. $x^{26}$ ד. $b$ ה. $n^3$ ו. $d^{10}$
ז. 2 ח. 9 ט. $8^{18}$ י. $3^7$ יא. 3 יב. $3^5$.

**6)** $n=2$.

**7)** א. 6 ב. 9 ג. 56.

**8)** א. $3^{12}$ ב. $2^{21}$ ג. $5^{10}$ ד. $2^{12}$ ה. $2^7$ ו. $3^{51}$.

**9)** א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. $k$ ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x}+x$.

**10)** א. $a^6b^3$ ב. $m^{20}n^{15}$ ג. $x^{36}y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21}b^3$
ז. $x^{12}y^{18}$ ח. $t^4r^{12}$ ט. $b^2c^6$.

**11)** א. 576 ב. 225 ג. 8

**12)** א. $4^{-6}$ ב. $5^{-3}$ ג. $2^{-10}$ ד. $2^{-3}$ ה. $3^{-4}$ ו. $5^{-3}$.

**13)** א. 64 ב. 9 ג. 125.

**14)** א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3.

**15)** א. $5^{24}\cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3\cdot 2^4$.

**16)** א. $a^{1-5n}$ ב. $k$ ג. $m^{2n+12}$.

# חוקי השורשים:

## סיכום כללי:

### סיכום חוקי השורשים:

1. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
4. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a\cdot b}$
5. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

## שאלות:

**17)** הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

א. $3^{\frac{1}{4}}$ ב. $2^{\frac{3}{5}}$ ג. $6^{\frac{5}{6}}$

ד. $-12^{\frac{2}{7}}$ ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$ ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$

ז. $5^{-\frac{1}{4}}$ ח. $27^{-\frac{1}{3}}$ ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

**18)** חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$ ב. $-\sqrt{25}$ ג. $\sqrt[3]{8}$

ד. $-\sqrt[7]{128}$ ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$ ו. $\left(\sqrt[5]{1024}\right)^2$

ז. $\left(\sqrt[5]{-243}\right)^3$ ח. $\sqrt[4]{-16}$ ט. $\sqrt[4]{-25^2}$

י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

**19)** חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $8^{\frac{2}{3}}$ ב. $32^{-\frac{3}{5}}$ ג. $128^{-\frac{2}{7}}$

ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ז. $81^{\frac{3}{4}}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ ח. $343^{-\frac{2}{3}}\cdot 100^{\frac{1}{2}}$ ט. $16^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

**20)** חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$.

**21)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ ג. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$

ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ ח. $\frac{\sqrt[3]{500}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2}\cdot\sqrt[3]{4}}$ ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2}\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400}\sqrt{2}}$

**22)** הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

א. $3\sqrt{2}$ ב. $5\sqrt{3}$ ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ד. $2\sqrt[3]{3}$ ה. $x\sqrt{x}$

**23)** הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

א. $2\sqrt{5}$ ב. $4\sqrt[3]{2}$ ג. $2\sqrt[5]{3}$

ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ז. $-5\sqrt[3]{2}$ ח. $-5\sqrt[4]{2}$ ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

**24)** הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$

ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

**25)** חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$

ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$

ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

**26)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{18}-\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7}+\sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}$

ד. $\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$

ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160}-\sqrt[5]{5}}$

**27)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{-2.5}\cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{2}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}$

ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}}\cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}}\cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{-\frac{1}{8}}\cdot 2^{-2}}$

## תשובות סופיות:

**17)** א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. $\phi$

ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$.

**18)** א. 7 ב. $-5$ ג. 2 ד. $-2$ ה. 4 ו. 16

ז. $-27$ ח. $\phi$ ט. $\phi$ י. 5.

**19)** א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$

ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$.

**20)** $\sqrt{2}$.

**21)** א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2

ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$.

**22)** א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$.

**23)** א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$

ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$.

**24)** א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$.

**25)** א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$

ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$.

**26)** א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$

ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$.

**27)** א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$.

# כתיבה מדעית של מספרים:

## שאלות:

**28)** בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000
ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000
ד. 23,400,000
ה. 0.0003
ו. 0.00000042
ז. 0.000000042
ח. 0.00000000042

**29)** בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$
ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$
ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$
ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$
ח. $(0.000000007)^3$

## תשובות סופיות:

**28)** א. $1.5\cdot10^{7}$ ב. $1.5\cdot10^{6}$ ג. $1.5\cdot10^{11}$ ד. $2.34\cdot10^{7}$ ה. $3\cdot10^{-4}$
ו. $4.2\cdot10^{-7}$ ז. $4.2\cdot10^{-8}$ ח. $4.2\cdot10^{-10}$.

**29)** א. $9\cdot10^{12}$ ב. $4\cdot10^{12}$ ג. $1.25\cdot10^{11}$ ד. $1.25\cdot10^{14}$ ה. $1.6\cdot10^{-15}$
ו. $6.4\cdot10^{-14}$ ז. $1.25\cdot10^{-16}$ ח. $3.43\cdot10^{-25}$.

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 25 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

### תוכן העניינים

1. משוואות מעריכיות יסודיות ..... 197
2. משוואות עם חיבור וחיסור איברים ..... 199
3. משוואות עם קבוע אוילר ..... 201
4. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס ..... 202
5. משוואות מסכמות שונות ..... 203
6. מערכת משוואות מעריכיות ..... 204
7. אי שוויונים מעריכיים ..... 205

# משוואות מעריכיות יסודיות:

## סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $2^x = 16$

ב. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג. $10^{x-2} = 10000^{x+1}$

ד. $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה. $\left(2^x \cdot 32\right)^3 = 8$

ו. $\left(5^{x^2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז. $\frac{7^x}{343^3} = 1$

ח. $\left(25 \cdot 0.2^{2x}\right)^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

**2)** פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א. $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$

ב. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג. $25\left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$

ב. $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג. $\left(9\sqrt{27}\right)^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$

ד. $\sqrt[x]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה. $2^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8\left(\sqrt{8}\right)^{-\sqrt{x}}$

ו. $5^x \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$

ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$

ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$

ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$

ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$

ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$

ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = \left(2\sqrt{5}\right)^{4-x}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=4$ ב. $x=-\frac{1}{3}$ ג. $x=-2$ ד. $x=2,8$ ה. $x=-4$

ו. $x=1,-\frac{1}{5}$ ז. $x=9$ ח. $x=1$ .

**2)** א. $x=-1$ ב. $x=-2$ ג. $x=3,-2$ .

**3)** א. $x=-\frac{1}{2}$ ב. $x=1$ ג. $x=-\frac{8}{19}$ ד. $x=2,-\frac{2}{3}$ ה. $x=4,9$ ו. $x=25$ .

**4)** א. $x=0$ ב. $x=4$ ג. $x=2$ ד. $x=2$ ה. $x=5$

ו. $x=1.5$ ז. $x=\frac{2}{3}$ .

# משוואות עם חיבור וחיסור איברים:

## סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחיסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב-$t$, למשל במשוואה: $4^x-3\cdot 2^x=4$ נסמן: $2^x=t$.

נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות $t$ ונפתור אותה עבורו.
לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה-$x$ המתאימים.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $2^x+6\cdot 2^x=56$

ב. $8^x+3\cdot 8^x=256$

ג. $5\cdot 3^x-3^{x+1}=162$

ד. $2\cdot 6^x+6^{x+2}-6^{x-1}=227$

**2)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $81^{x+1}+18\cdot 3^{4x-3}=735$

ב. $5^{3x+2}+4\cdot 125^x=29$

ג. $\left(2^{3x+1}\right)^2-64^{x-\frac{1}{3}}=15$

ד. $\sqrt{10000^{x+1}}-\sqrt[4]{10^{8x+1}}=\sqrt[4]{1000}\cdot\left(\sqrt[4]{10^7}-1\right)$

ה. $6^{-x}-5\cdot 36^{-\left(\frac{x}{2}+1\right)}=186$

ו. $5^{-x}+25^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}-5^{-x-1}=145$

ז. $2\cdot 10^{x+1}+10^{x+2}=3\cdot 5^{x+1}$

ח. $4^{x+2}-6\cdot 4^x=7\cdot 12^{x+1}+6\cdot 12^x$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור ממעלה שנייה):

א. $9^x-36\cdot 3^x+243=0$

ב. $16^{x+1}-65\cdot 4^x+4=0$

ג. $6^x-4\cdot 6^{-x}+3=0$

ד. $4^{-x}-3\cdot 4^x+2=0$

ה. $\left(\frac{4}{9}\right)^x-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1}=-\frac{2}{3}$

ו. $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2-5\cdot 2^{\frac{1}{3}x+1}+1=0$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

א. $\frac{20}{9^x+1}=3-\frac{8}{9^x-1}$

ב. $\frac{7^x}{7^x-4}+\frac{8}{7^x+5}=3$

**5)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}}-6\cdot 5^{x-1.5}+1=0$

ב. $3^x-\sqrt{16\cdot 3^{x+1}}=-9$

ג. $36^x-6^{x+1}\cdot 3^x+8\cdot 9^x=0$

ד. $4\cdot 9^x-10\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$

ה. $25\cdot 5^{2x}+16\cdot 15^x=9^{x+1}$

ו. $9^x+4^x-6^x=\frac{7}{6^{1-x}}$

ז. $\frac{8^{2x}-8}{7}=4^x-2$

ח. $2^{3x}-2^{2x+2}-2^x+4=0$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=3$ ב. $x=2$ ג. $x=4$ ד. $x=1$.

**2)** א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=0$ ג. $x=\frac{1}{3}$ ד. $x=\frac{1}{4}$

ה. $x=-3$ ו. $x=-2$ ז. $x=-3$ ח. $x=-2$

**3)** א. $x=2,3$ ב. $x=1,-2$ ג. $x=0$ ד. $x=0$

ה. $x=0,1$ ו. $x=-6,-9$.

**4)** א. $x=1,-\frac{1}{2}$ ב. $x=1$.

**5)** א. $x=\frac{1}{2},1\frac{1}{2}$ ב. $x=1,3$ ג. $x=1,2$ ד. $x=1,0$

ה. $x=-2$ ו. $x=1,-1$ ז. $x=0,\frac{1}{2}$ ח. $x=0,2$.

# משוואות עם קבוע אוילר:

## סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות $e$ וערכו שווה (בערך) ל-2.71828.
למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא $e$ זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

א. $e^{3x}=e^{2x-1}$

ב. $e^{5x-1}=e\cdot e^{6x+1}$

ג. $e^{x-5}=\left(e^{1-x}\right)^3$

ד. $e^x\cdot\sqrt{e^{3x-1}}=\left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$

**2)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

א. $e^2\cdot e^x-e^{x+1}=e-1$

ב. $\sqrt[3]{e^{x+1}}\cdot e^2=e^x\sqrt{e}$

ג. $e^{2x}+e^x-2=0$

ד. $e^{1+x}+e^{1-x}=e^2+1$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

א. $xe^x=\sqrt[4]{e}\cdot x$

ב. $e^{3x}=x\cdot e^{3x}$

ג. $xe^{x^2}=\frac{x}{\sqrt{e^x}}$

ד. $\sqrt[3]{e^{3x-1}}\cdot x=xe^x$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=-1$ ב. $x=-3$ ג. $x=2$ ד. $x=1\ ,\ \frac{1}{6}$.

**2)** א. $x=-1$ ב. $x=\frac{11}{4}$ ג. $x=0$ ד. $x=1\ ,\ -1$.

**3)** א. $x=0\ ,\ \frac{1}{4}$ ב. $x=1$ ג. $x=0\ ,\ -\frac{1}{2}$ ד. $x=0$.

# משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

## סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי.
יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

**הערה:**

יש לבדוק את ערכי ה-$x$ עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

**1)** $\left(\sqrt{3-x}\right)^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^{x}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{3-x}}$.

**2)** $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2+x}=1$.

**3)** $\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}}=|x-3|^{-1}$.

## תשובות סופיות:

**1)** $x=\frac{1}{4}\ ,\ 1\ ,\ 2$

**2)** אין פתרון.

**3)** $x=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,4$

# משוואות מסכמות שונות:

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5\left(2^x-2\right)+2=4^x-2^x$.

2) $\frac{6}{4^{x-1}-1}+\frac{2^{x+1}}{2^x+2}=\frac{2^x+4}{2^x-2}$.

3) $\frac{4^x}{4^x-10}-\frac{4}{2^{2x-1}-3}=\frac{32}{16^x-4^{x+2}+60}$.

4) $3^{2x^2+2}-3^{x^2+3}+9=3^{x^2+1}$.

5) $\sqrt[x]{10}=4\cdot\sqrt[2x]{10}+60$.

6) $\sqrt[x-1]{8\cdot 2^{x+1}}=\left(\sqrt[x]{2}\right)^2\cdot\sqrt[x-1]{\sqrt[x]{32}}$.

7) $10\cdot 4^{x+2}-16\cdot 10^x-90\cdot 6^x+36\cdot 15^x=0$.

## תשובות סופיות:

1) $x=1,2$.
2) $x=3$.
3) $x=1.5$.
4) $x=1,-1$.
5) $x=\frac{1}{2}$.
6) $x=-3$.
7) $x=1,-2$.

# מערכת משוואות מעריכיות:

## שאלות:

**1)** פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} y=3^x \\ y=18-3^x \end{cases}$.

**2)** פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x}-5^y=5^x-25 \\ y-x=2 \end{cases}$.

**3)** פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} \frac{1}{3^y-4}+\frac{3}{3^x-2}-\frac{1}{3^x+2}=3 \\ 4^y=\sqrt{256^x} \end{cases}$.

**4)** פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^x+2^y=13 \\ 2\cdot 5^x-2^y=2 \end{cases}$.

**5)** פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 2\cdot 3^x-3\cdot 2^y=42 \\ 3^{x+1}-2^{y+1}=73 \end{cases}$.

**6)** פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x+1}+8\cdot 10^x-2^{2y+4}=0 \\ \left(\sqrt{3}\right)^y=27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases}$.

**7)** פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 6\cdot 4^x-7\cdot 6^{y-1}+2\cdot 3^{x+y}=6^y \\ \sqrt[4]{5^x}\cdot\sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^y}=\sqrt[4]{125}\cdot 5^x \end{cases}$.

## תשובות סופיות:

**1)** $(2,9)$ **2)** $(0,2)\ ,\ (2,4)$ **3)** $(1,2)$ **4)** $(1,3)$

**5)** $(3,2)$ **6)** $(-1,-2)$ **7)** $(1,2)\ ,\ (-1,0)$

# אי שוויונים מעריכיים:

## סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

## שאלות:

פתור את אי השיוויונים הבאים:

1) $3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x}$

2) $\sqrt{2^x} \le 4^{x^2-1\frac{1}{4}}$

3) $e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x}$

4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \ge \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x}$

5) $25^x + 5 < 6 \cdot 5^x$

6) $e^{2x} - 2e^x + 1 \le 0$

**הערה:**

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

7) $e^x > 3$

8) $e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

## תשובות סופיות:

1) $x < \frac{2}{3}$

2) $x \ge 1\frac{1}{4}$ או $x \le -1$

3) $0 \le x < 1$

4) $x \le \frac{1}{8}$

5) $0 < x < 1$

6) $x = 0$

7) $x > \ln 3$

8) $x > \ln 4$ או $x < 0$

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 26 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

### תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות ..... 206
2. חוקי הלוגריתמים ..... 209
3. חישובים עם חזקה לוגריתמית ..... 213
4. מעבר בין בסיסים ..... 214
5. הלוגריתם הטבעי ..... 216
6. משוואות עם בסיסים שונים ..... 218
7. מערכת משוואות לוגריתמיות ..... 219
8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות ..... 220
9. אי-שוויונים לוגריתמים ..... 221

# הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a \neq 1 \ , \ b > 0 \ , \ a$.

**הסבר:**

לוגריתם על בסיס $a$ של $b$ מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את $a$ על מנת שיהיה שווה ל- $b$. ערך חזקה זו הוא $x$. ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

**כללים יסודיים בלוגריתמים:**

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0 \ , \ a \neq 1$.

## שאלות:

**1)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

**2)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

**3)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_6(4x-2)=1$

ב. $\log_4(4-x)=\frac{1}{2}$

ג. $\log_8(x^4-73)=1$

ד. $\log_3\frac{x+3}{3-3x}=-2$

ה. $\log_x(2x^2+x-12)=2$

ו. $\log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$

**4)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

א. $\log_4(\log_3 x)=1$

ב. $3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$

ג. $\log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2}$

ד. $\log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$

**5)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_2(3^x+37)=6$

ב. $\log_3(3\cdot 2^x-303)=4$

ג. $\log_5(126\cdot 5^x-25)=2x+1$

ד. $3\log_2\left(3\cdot 4^{1+\frac{1}{3}x}-11\cdot 2^{\frac{x}{3}}+3\right)=12+2x$

**6)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

א. $(\log_2 x)^4=10000$

ב. $2(\log_3 x)^2+\log_3 x=10$

ג. $\frac{3\cdot\log_{14}x+1}{(\log_{14}x)^2}=4$

ד. $\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x}+\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x+2}=2$

## תשובות סופיות:

1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
ו. 4 ז. -1.5

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=65,536$ ג. $x=27$ ד. $x=4$
ה. $x=5$ ו. $x=4$

3) א. $x=2$ ב. $x=2$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=-2$ ה. $x=3$ ו. $x=2$

4) א. $x=81$ ב. $x=5$ ג. $x=\pm 4$ ד. $x=\pm 1$

5) א. $x=3$ ב. $x=7$ ג. $x=-1,\ 2$ ד. $x=-6$

6) א. $x=1024,\ \frac{1}{1024}$ ב. $x=9,\ \frac{1}{9\sqrt{3}}$
ג. $x=14,\ \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x=\frac{1}{3}$

# חוקי הלוגריתמים:

## סיכום כללי:

להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a>0\neq 1$ וארגומנטים $x$ ו- $y$ חיוביים:

- מכפלה לסכום: $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$.
- מנה להפרש: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$.
- מקדם למעריך: $\log_a b^n=n\log_a b$ (כאשר $b>0$ ו- $n$ מספר ממשי כלשהו).

## שאלות:

### שאלות חישוב כלליות:

**1)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_3 12+\log_3 2.25$

ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40+\log_{\frac{1}{5}} 12.5+\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}$

ג. $\log_2 200-\log_2 100$

ד. $\log_3 60-\log_3 540$

ה. $\log_4 8+\log_4 12-\log_4 6$

ו. $\log_7 1.5-\log_7 147+\log_7 2$

ז. $3\log_5 2-\log_5 1.6$

ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4+2\log_{\sqrt{4}}\sqrt{10}$

ט. $\frac{1}{2}\left(\log_7\frac{7}{2}+\log_7 2\right)+\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 8$

י. $\frac{1}{4}\log 81-\log 1.5-\frac{1}{2}\log 40$

**2)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$

ב. $\frac{\log_9 62.5+\log_9 2}{\log_9 0.2}$

ג. $\frac{\log_3 5-\log_3 2+\log_3 50}{\log_3 225-2}$

ד. $\frac{2-2\log_3 4+\log_3 8\frac{8}{9}}{4-\log_3 0.01-2\log_3 18}$

**משוואות לוגריתמיות:**

**3)** פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x+\log_2(x-6)=4$

ב. $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$

ג. $\log_2(x+30)-\log_2 x=4$

ד. $\log_5(x+146)-\log_5(x+2)=2$

ה. $2\log_3(2x-1)-\log_3(22x+9)=-1$

ו. $2\log_5(x-2)=\log_5(4x-15)+\log_5 x$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5(4x-3)=\log_5 7$.

ב. $2\log_2(2x-2)-\log_2(16-x)=\log_2(x-1)+1$.

**5)** פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3(3\cdot 5^x+39)=3+\log_3(5^x-3)$.

ב. $\log_2(3-4^{x+1})-\log_2 11=x$.

**6)** פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_4 x\cdot\log_4(16x)=8$.

ב. $\log_2\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\log_2(1024x)=-11$.

ג. $\log_2 x^2\log_2\left(\frac{x}{16}\right)=-\log_2(64x)$.

ד. $(\log_4 4x)^2=\log_4 4x^2+1$.

ה. $\log_3(9x^2)\cdot\log_3(9x^3)=\log_3\left(\frac{81}{x}\right)+2$.

ו. $\frac{\log_2\left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2}+\frac{\log_2(2x)}{\log_2 x}=1\frac{7}{9}$.

**שאלות הבעה:**

**7)** נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות $a$ את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$

ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

**8)** נתון: $\log_2 5 = b$ , $\log_2 3 = a$. הבע באמצעות $a$ ו- $b$ את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

**9)** נתון: $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$.

הבע באמצעות $a$ את $\log_{18} 27$ ואת $\log_{18} 16$.

**שאלות נוספות:**

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

**10)** $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$.

**11)** $2\log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$.

**12)** $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

**13)** $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$.

## תשובות סופיות:

1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2
ו. -2 ז. 1 ח. 6 ט. 1.5 י. -0.5.

2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5.

3) א. $x=8$ ב. $x=3,\frac{1}{27}$ ג. $x=2$ ד. $x=4$ ה. $x=3$ ו. $x=4$.

4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$.

5) א. $x=1$ ב. $x=-2$.

6) א. $x=16,\frac{1}{256}$ ב. $x=2,\frac{1}{512}$ ג. $x=4,\ 2\sqrt{2}$ ד. $x=4,\frac{1}{4}$
ה. $x=\frac{1}{9},\sqrt[6]{3}$ ו. $x=8,\ \sqrt[7]{2^{15}}$.

7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$.

8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}$.

9) $3(1-a)\ ,\ 4(2a-1)$.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

# חישובים עם חזקה לוגריתמית:

## סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x}=x$ כאשר $a>0\neq 1$.

## שאלות:

**1)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$

**2)** נתונה התבנית: $3\cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x=\log_4 7$ ב. $x=\log_4\sqrt{3}$

ג. $x=2\log_4 0.1$ ד. $x=\sqrt{\log_2 5}$

**3)** נתונה התבנית: $\frac{1}{6}\cdot 9^x-2\cdot 3^x+1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x=-1$ ב. $x=\log_3 5$

ג. $x=\log_3\sqrt{6}$

**4)** חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{36}}81}$ ב. $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}}5}}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. 8 ב. 25.

**2)** א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15.

**3)** א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2-2\sqrt{6}$.

**4)** א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{2}{\sqrt[9]{25}}$.

# מעבר בין בסיסים:

## סיכום כללי:

מעבר מבסיס $a$ לבסיס $m$ (כאשר: $a>0\neq 1$ ו-$m>0\neq 1$, וכן: $b>0$)
יתבצע באופן הבא: $\log_a b=\frac{\log_m b}{\log_m a}$.

## שאלות:

### שאלות חישוב כלליות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_4 7\cdot\log_7 4$

ב. $\log_{0.1}3\cdot\log_9 1000$

ג. $\log_{\sqrt{3}}5\cdot\log_{\sqrt{125}}9$

ד. $\log_4 169\cdot\log_{25}64\cdot\log_{13}625$

**2)** הוכח את השוויונים הבאים:

א. $\log_2 25\cdot\log_5 3\cdot\log_9 2=1$.

ב. $\log_{16}9\cdot\log_5 4\cdot\log_3 5=1$

### משוואות לוגריתמיות:

**3)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log_2 x+\log_{32} x=6$

ב. $\log_3 x\cdot\log_{27} x=3$

ג. $\log_2 4x\cdot\log_8\frac{x}{16}=-\frac{5}{3}$

ד. $\log_x 5-6\log_{125} x=1$

### שאלות הבעה:

**4)** נתון: $\log_4 6=a$. הבע באמצעות $a$ את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 3$

ב. $\log_{32}36$

ג. $\log_{216}96$.

**5)** נתון: $\log_3 5=b$ , $\log_2 3=a$. הבע באמצעות $a$ ו- $b$ את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 50$

ב. $\log_2\sqrt{30}$

ג. $\log_5 22.5$

**6)** נתון $\log 9 = 2b$ , $\log_3 7 = a$ . הבע באמצעות $a$ ו- $b$ את:

א. $\log 21$ .

ב. $\log_3\left(\frac{10}{7}\right)$ .

ג. $\log_7 10$ .

ד. $\log_{30} 63$ .

**שאלות נוספות:**

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

**7)** $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$ .

**8)** $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$ .

## תשובות סופיות:

**1)** א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12.

**2)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

**3)** א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$ .

**4)** א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$ .

**5)** א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$ .

**6)** א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$ .

**7)** הוכחה.

**8)** הוכחה.

# הלוגריתם הטבעי:

## סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס $e$ (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \to e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- $b$ מספרים כלשהם.

## שאלות:

**1)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln \frac{1}{e^4}$ ג. $\ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$

**2)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\ln x = 2$ ב. $\ln x = -\frac{1}{2}$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

א. $\ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x$

ב. $3\ln^2 x + \ln x = 2$

ג. $\ln\left(e^2 x^3\right) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln\left(ex^2\right)$

**4)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

א. $x^{\ln x} = e^6 x$ ב. $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$

**5)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $e^{\ln 3}$ ב. $e^{2\ln 3}$

## תשובות סופיות:

1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5.

2) א. $x=e^2$ ב. $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

3) א. $x=0$ ב. $x=\sqrt[3]{e^2},\frac{1}{e}$ ג. $x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}},\frac{1}{e}$.

4) א. $x=e^3,\frac{1}{e^2}$ ב. $x=\sqrt{e},e$.

5) א. 3 ב. 9.

# משוואות עם בסיסים שונים:

## סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$.
במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$.

את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$

ב. $2^x - 9 = 0$

ג. $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$

ד. $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

**2)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x} = 3$

ב. $4 + 3e^x = 9$

ג. $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$

ד. $e\left(e^x + 1\right) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2\left(7 - 5^x\right) = \log_2 \frac{10}{5^x}$

ב. $\log_2\left(4e^{2x} + 6\right) - 1 = \log_2\left(7e^x\right)$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

ג. $x = \log_7 5 = 0.827$ , $x = \log_7 3 = 0.564$ ד. אין פתרון.

**2)** א. $x = \frac{1}{3}\ln 3 = 0.36$ ב. $x = \ln\frac{5}{3} = 0.51$ ג. $x = 0$ , $x = -\ln 3 = -1.09$

ד. $x = \ln 16 = 2.7725$.

**3)** א. $x = 1$ , $x = \log_5 2 = 0.43$ ב. $x_1 = \ln\frac{1}{2} = -0.693$ , $x = \ln 3 = 1.098$

# מערכת משוואות לוגריתמיות:

## שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2 x \\ y=6-\log_2 x \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_6^2 x-\log_6(2y-2)=2 \\ \frac{1}{2}x=y-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_3(x+y)=\log_3(4x+y)-2 \\ \log_5(5x+3y)=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y))=1 \\ \log_5(x+y-11)=\log_{25}x+\frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_5 x+6\log_4 y=11 \\ 10\log_5 x-2\log_4 y=17 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_2 x^2+\log_3\frac{1}{y}=9 \\ \log_2\sqrt{x}+\log_{\sqrt[3]{3}} y=-1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_5 x+2^{\log_2 y}=6 \\ x^y=5^8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} xy=27 \\ x^{\log_3 y}=9 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2^{\log_{\frac{1}{2}}(2x-y)}=7^{\log_7\frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x+\log_3 y=\frac{1}{\log_{28}3} \end{cases}$

## תשובות סופיות:

1) $(8,3)$
2) $(36,19),\left(\frac{1}{6},1\frac{1}{12}\right)$
3) $(8,-5)$
4) $(16,7)$
5) $(25,8)$
6) $\left(16,\frac{1}{3}\right)$
7) $(25,4),(625,2)$
8) $(3,9),(9,3)$
9) $(4,7)$

# מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

## שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

**1)** $\begin{cases} y=\log_2\left(4^x-2\right) \\ y=2x-1 \end{cases}$

**2)** $\begin{cases} 25^y=\left(5\sqrt{5}\right)^{x+1} \\ \log_5\sqrt{x}+\log_5\sqrt{y}=\log_5 3 \end{cases}$

**3)** $\begin{cases} 3y+5\log_6 x=1 \\ 216\cdot x^{2-y}=6^{1-4y} \end{cases}$

**4)** $\begin{cases} x\cdot\log_2 3=\dfrac{y}{\log_9 2} \\ \log_3\left(9^x+27\right)=2y+\log_3 12 \end{cases}$

**5)** $\begin{cases} \left(2^x-1\right)^2-4y+3=0 \\ x=\log_2\left(y+1\right) \end{cases}$

**6)** $\begin{cases} x=\log_4\left(5-9^y\right) \\ \log_2\left(2^x+3\right)=\log_4\left(29-\left(3^y-3\right)^2\right) \end{cases}$

## תשובות סופיות:

**1)** $(1,1)$

**2)** $(3,3)$

**3)** $(36,-3),\left(6,-1\frac{1}{3}\right)$

**4)** $\left(1,\frac{1}{2}\right),(2,1)$

**5)** $(1,1),(2,3)$

**6)** $(1,0)$

# אי-שוויונים לוגריתמים:

## סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\log_2 x < \log_2 (5x - 20)$

2) $\log_6 (x^2 - 5x) < 1$

3) $\log_3 x > \log_9 (15 - 2x)$

4) $\log_{\frac{1}{2}} (1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}} (7 - x)$

5) $\ln x \geq \ln (x^2 - 12)$

6) $\ln x < 3$

7) $\ln^2 x - 6 \ln x < 7$

8) $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$

## תשובות סופיות:

1) $x > 5$

2) $-1 < x < 0 \ , \ 5 < x < 6$

3) $3 < x < 7\frac{1}{2}$

4) $-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$

5) $2\sqrt{3} < x \leq 4$

6) $0 < x < e^3$

7) $\frac{1}{e} < x < e^7$

8) $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ וגם $x \neq 1$

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 27 - בעיות גדילה ודעיכה

### תוכן העניינים

1. שאלות חימום ..... 222
2. שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית ..... 226
3. שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית ..... 227
4. שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה ..... 228
5. שאלות העוסקות במציאת הזמן ..... 229
6. שאלות שונות ..... 230

# שאלות חימום:

## סיכום כללי:

**הגדרת בעיית גדילה ודעיכה מערכית:**

הכמות לאחר פרק זמן $t$, המסומנת $M_t$, כאשר הכמות ההתחלתית היא $M_0$ וקצב הגידול/דעיכה הוא $q$ ניתנת ע"י הנוסחה הבאה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

כאשר הגדילה או הדעיכה נתונים באחוזים נמצא את הבסיס לפי: $q = \frac{100 \pm p}{100}$.

## שאלות:

**1)** מצא את שיעור הגדילה/דעיכה מתוך אחוז הגדילה/דעיכה הנתון בבעיה.

א. מחיר מוצר גדל ב-20% לשנה.

ב. מחיר מוצר יורד ב-40% לשנה.

ג. אוכלוסייה מתרבה ב-5% לשנה.

ד. מחיר דירה עולה ב-15% לשנה.

ה. כמות דבורים גדלה פי 2 כל יום.

ו. מחירו של פסל גדל פי 3 כל שנה.

ז. רכב מאבד רבע מערכו בכל שנה.

ח. מנייה מאבדת מחצית מערכה כל חודש.

**2)** מצא את אחוזי הגדילה/דעיכה מתוך הבסיסים הבאים:

א. $q = 1.2$ ב. $q = 1.6$

ג. $q = 0.85$ ד. $q = 0.72$

**3)** מצא את $M_0$:

א. $107.2 = M_0 \cdot 1.05^6$ ב. $70.8 = M_0 \cdot 1.12^4$

ג. $2213.68 = M_0 \cdot 1.4^8$

**4)** מצא את $q$:

א. $25=10\cdot q^{6}$

ב. $512.36=6\cdot 10^{7}\cdot q^{40}$

ג. $10^{3}=2.4\cdot 10^{6}\cdot q^{25}$

ד. $9.35=7\cdot q^{10.5}$

ה. $6.42\cdot 10^{4}=10^{7}\cdot q^{3\frac{1}{3}}$

ו. $13.25=9.2\cdot q^{12.3}$

**5)** מצא את $t$:

א. $10\cdot 1.05^{t}=70$

ב. $62.08^{t}=39.68$

ג. $7\cdot 10^{7}\cdot 0.82^{t}=10^{5}$

**6)** אוכלוסיית חיידקים מתרבה בכל דקה פי 2.
בשעה 10:30 בדקו במעבדה מדגם ובו 50 חיידקים.

א. כמה חיידקים יהיו כעבור דקה אחת?

ב. כמה חיידקים יהיו כעבור שתי דקות?

ג. כמה חיידקים יהיו בשעה 10:50?

**7)** כמות של חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית בכל שבוע ב-2.8%.
במעבדה נשקלה כמות של 2000 גרם של החומר.

א. מה תהיה כמות החומר כעבור שבועיים?

ב. מה תהיה כמות החומר כעבור שלושה חודשים?

ג. האם תישאר כמות מסוימת מהחומר כעבור שנה בת 52 שבועות?

**8)** מחירו של מוצר לאחר 3 שנים הוא 250 ₪. ערך המוצר יורד ב-25% מדי שנה.
מה היה מחירו ההתחלתי?

**9)** שרון רצה בכל יום מרחק הגדול ב-10% מאשר ביום הקודם.
ידוע כי שרון רצה מרחק של 2.5 ק"מ ביום השביעי.
כמה ק"מ רצה שרון ביום הראשון?

**10)** אוכלוסייה במדינה מסוימת מתרבה בצורה מעריכית ב-3.1% בשנה.
כיום יש במדינה זו 528,000 תושבים.

א. כמה תושבים יהיו במדינה זו בעוד 3 שנים?

ב. כמה תושבים היו במדינה זו לפני 4 שנים?

**11)** כמות אצות באגם מתרבה בצורה מעריכית.
בכל שנה גדלה הכמות פי 4 מאשר בשנה שקדמה לה.
כיום יש באגם $2\cdot10^5$ ק"ג אצות.

א. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים?

ב. מה הייתה כמות האצות לפני שנה?

ג. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים ושלושה חודשים?

**12)** מספר תושבים במדינה מסוימת גדל בשיעור קבוע. במשך 10 שנים גדלה האוכלוסייה במדינה מ-5.4 מיליון תושבים ל-7.2 מיליון תושבים.

א. מה הוא קצב הריבוי בכל שנה במדינה?

ב. אם קצב הגידול של האוכלוסייה יישמר, מה יהיה מספר התושבים כעבור 10 שנים נוספות?

**13)** בגן חיות ספרו את מספר התוכים. בספירה הראשונה נספרו 1200 תוכים.
בספירה השנייה, כעבור 6 חודשים, נספרו 1450 תוכים.

א. מה הוא קצב הגידול החודשי של התוכים?

ב. מה יהיה מספרם של התוכים כעבור שנה וחצי מהספירה הראשונה?

**14)** כמות העצים ביער גדלה בצורה מעריכית. אם כמות העצים ביער בשנת 1950 הייתה $5\cdot10^4$ טון עצים ובשנת 1990 הייתה $10^7$ טון עצים, מה היה אחוז הגידול השנתי (בהנחה שהגידול היה קבוע)?

**15)** כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית. החומר נשקל שלוש פעמים ביום מסוים. בשעה 7:00 בבוקר היה משקל החומר 120 ק"ג.
בשעה 10:30 בבוקר היה משקל החומר 95 ק"ג.

א. מהו קצב התפרקות החומר הרדיואקטיבי לחצי שעה?

ב. מה תהיה כמות החומר בשעה 15:00 אחר הצהריים?

**16)** מכונית מאבדת $\frac{5}{8}$ מערכה במשך 10 שנים.

א. מהו קצב ירידת הערך של המכונית בכל שנה?

ב. איזה אחוז מערכה תאבד המכונית כעבור 15 שנה?

**17)** מספר התושבים במדינה מסוימת גדל פי 3.5 ב-40 שנים.

א. מצא מהו אחוז הריבוי השנתי.

ב. מצא פי כמה יגדל מספר התושבים כעבור 58 שנים?

## תשובות סופיות:

**1)** א. 1.2 ב. 0.6 ג. 1.05 ד. 1.15.
ה. 2. ו. 3. ז. 0.75 ח. 0.5.

**2)** א. 20% גדילה ב. 60% גדילה ג. 15% דעיכה ד. 28% דעיכה.

**3)** א. 80. ב. 45. ג. 150.

**4)** א. 1.165. ב. 0.7469. ג. 0.732. ד. 1.028.
ה. 0.22. ו. 1.03.

**5)** א. 39.88 ב. 0.89 ג. 33.01.

**6)** א. 100. ב. 200. ג. 52,428,800.

**7)** א. 1889.56 גרם. ב. 1422.4 גרם. ג. כן. 456.747 גרם.

**8)** 592.6 ₪.

**9)** 1.41 ק"מ.

**10)** א. 578,642 תושבים. ב. 467,304 תושבים.

**11)** א. 3,200,000 ק"ג ב. 50,000 ק"ג. ג. 4,525,483.4 ק"ג.

**12)** א. 1.029. ב. 9.6 מיליון תושבים.

**13)** א. 1.032. ב. 2117 תוכים.

**14)** 14.16%.

**15)** א. 0.9671. ב. 70.35 גרם.

**16)** א. 0.90657. ב. 77.1%.

**17)** א. 3.18% ב. 6.15.

## שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית:

### שאלות:

**1)** מספר החסידות המגיעות כל שנה לאגם החולה יורד בצורה מעריכית בקצב של 2.4% בשנה. אם מספר החסידות שהגיעו השנה היה 6,000, מה יהיה מספר החסידות שיגיעו עוד 7 שנים?

**2)** מספר התושבים בהרצליה בשנת 1990 היה 80,000. אחוז הגידול באוכלוסיית העיר הוא 3% בשנה. מה יהיה מספר התושבים בהרצליה בשנת 1998?

### תשובות סופיות:

**1)** 5,062 חסידות.

**2)** 101,342 תושבים.

## שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית:

### שאלות:

**3)** מספר הזברות בטנזניה גדל בצורה מעריכית בקצב של 1.6% בשנה.
כיום יש בטנזניה 45,000 זברות. כמה זברות היו בטנזניה לפני 16 שנים?

### תשובות סופיות:

**3)** 34,907 זברות.

## שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה:

### שאלות:

**4)** מספר הלידות בבית החולים "איכילוב" גדל בצורה מעריכית.
לפני 8 שנים היו ב"איכילוב" 500 לידות בחודש והשנה יש 600 לידות בחודש.
מהו אחוז הגידול במספר הלידות החודשי משנה לשנה ב"איכילוב"?

**5)** מספר התושבים ביפן גדל פי 2 תוך 20 שנים.
מה אחוז הגידול השנתי באוכלוסיית יפן?

**6)** מספר החיידקים במבחנה גדל בצורה מעריכית.
אם לפני 6 שעות היו במבחנה 200 חיידקים ועכשיו יש בה 500 חיידקים,
כמה חיידקים יהיו בה בעוד 4 שעות?

### תשובות סופיות:

**4)** 2.3%.

**5)** 3.5%.

**6)** 921 חיידקים.

## שאלות העוסקות במציאת הזמן:

### שאלות:

**7)** הריבית על תכנית חיסכון בבנק מסוים היא 2.4% בשנה.
אדם הפקיד בתוכנית החיסכון 12,000 ₪.
תוך כמה שנים יהיו ברשותו 15,000 ₪?

**8)** אוכלוסיית הדובים בקוטב הצפוני מכפילה את עצמה כל 18 שנה.
אם היום יש בקוטב הצפוני 6,000 דובים, בעוד כמה שנים יהיו 8,000 דובים?

**9)** חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 60% ממשקלו?

**10)** חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית.
אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 50% ממשקלו?

**11)** זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 16 ימים.
תוך כמה ימים יאבד שליש ממשקלו?

**12)** בשעה 08:00 נלקחו שני חומרים רדיואקטיביים. מחומר א' נלקחו 150 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 10 שעות. מחומר ב' נלקחו 117.4 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 18 שעות. באיזו שעה משקל החומרים יהיה זהה?

### תשובות סופיות:

**7)** 9.41 שנים.
**8)** 7.47 שנים.
**9)** 16.43 שעות.
**10)** 12.43 שעות.
**11)** 9.43 ימים.
**12)** 16:00

# שאלות שונות:

## שאלות:

**13)** בנק א' נותן ריבית של 3% כל שנתיים בתוכנית חיסכון מסוימת.
בנק ב' נותן ריבית של 4.5% כל 3 שנים בתוכנית חיסכון אחרת.
אדם מתכוון להפקיד סכום כסף מסוים לתקופה של 18 שנה.
באיזה בנק כדאי לו להשקיע את כספו?

**14)** נתונות שתי תרביות חיידקים, כל אחת גדלה בצורה מעריכית.
בשעה מסוימת בתרבית א' היו 4,000 חיידקים ובתרבית ב' היו 500 חיידקים.
נסמן:
$t_1$ - הזמן שחלף עד שבתרבית א' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבית ב'.
$t_2$ - הזמן שחלף עד שבתרבית ב' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבית א'.
חשב את היחס $\frac{t_1}{t_2}$.

**15)** מספר החיידקים בתרבית גדל ב- $p\%$ בכל שעה.
בשעה מסוימת מספר החיידקים היה $m$. כעבור $t$ שעות הוציאו $m$ חיידקים מהתרבית וכעבור עוד $t$ שעות היו $6m$ חיידקים בתרבית.
הבע את $t$ באמצעות $p$.

**הערה:**
שאלות 16-17 עוסקות בפתרון בעיות קיצון מעריכיות.

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=700\cdot 1.08^x-200x$.
מצא את ערך ה-$x$ של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

**17)** נתונות שתי בריכות דגים. בבריכה א' קצב הריבוי של מספר הדגים הוא 10% בחודש ובבריכה ב' הוא 20% בחודש. כמות הדגים בבריכה א' גדולה פי 5 מכמות הדגים בבריכה ב'. בעוד כמה חודשים לערך ההפרש בין כמות הדגים בבריכה א' לכמות הדגים בבריכה ב' יהיה מקסימלי?

**18)** כמות עצים ביער גדלה בצורה מעריכית לפי אחוז ריבוי של 15% לשנה.
בשנת 1990 נספרו כמות עצים מסוימת ביער. בשנת 2000 כרתו 30,000 עצים ולאחר 5 שנים נוספות, בשנת 2005, נספרו ביער 753365 עצים.
מצא כמה עצים היו ביער בשנת 1990.

**19)** ערכה של דירה יורד מדי שנה באחוז קבוע של 6%. ידוע כי ערך הדירה לאחר 10 שנים מיום מכירתה נמוך ב-35,000 ₪ ממחירה המקורי.

א. מצא את המחיר ההתחלתי של הדירה.

ב. מצא לאחר כמה שנים ערך הדירה ירד מתחת ל-30,000 ₪.

**20)** שני בנקים מציעים שתי תכניות חיסכון כלהלן:
בנק א' מציע תכנית חיסכון ל-8 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-80%.
בנק ב' מציע תכנית חיסכון ל-6 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-60%.

א. באיזה בנק אחוז הריבית השנתית גבוה יותר?

ב. דני משקיע סכום כסף $k$ לפי תכנית חיסכון של בנק א' ובתום התוכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק ב'.
רפי משקיע סכום כסף זהה $k$ לפי תכנית חיסכון של בנק ב' ובתום התכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק א'.
למי יהיה סכום גדול יותר בתום שתי התכניות?
נמק את תשובתך והראה חישוב מתאים.

**21)** שווי שתי מכוניות המוצעות למכירה הוא:
מכונית א' - 60,000 ₪ ומכונית ב'-85,000 ₪.
ידוע כי ערך מכונית ב' יורד ב-4% בכל שנה
וערך מכונית א' יורד ב-2.5% בכל שנה.

א. מצא בעוד כמה שנים יהיו המחירים של שתי המכוניות זהים.

ב. סיגל רוצה לקנות מכונית ולרשותה עומד סכום של 40,000 ₪.
איזו מכונית תוכל לקנות סיגל קודם ולאחר כמה שנים מיום הצעתן?

**22)** כמות אצות בים מתרבה בצורה מעריכית. ידוע כי לאחר 40 שנים כמות אצות מכפילה את עצמה. כדי לצמצם את כמות האצות מבצעים עבודות ניקיון מדי שנה ובהן מנקים כ-200 ק"ג אצות. בחוף מסוים היו בשנת 1990 כ-1200 ק"ג אצות.

א. מצא את קצב גידול האצות השנתי.

ב. מצא כמה אצות יהיו בחוף המסוים בשנת 1993 לאחר הניקיון באותה שנה.

**23)** נתונות שתי כמויות התחלתיות זהות, האחת גדלה בצורה מעריכית והשנייה קטנה בצורה מעריכית. לשתי הכמויות אחוז גדילה/דעיכה קבוע והוא 5%.

א. האם הזמן שבו הכמות הראשונה תגדל לכמות הכפולה מהכמות ההתחלתית שלה שווה לזמן שבו תקטן הכמות השנייה למחצית מהכמות ההתחלתית שלה? נמק והראה חישוב מתאים.

ב. ללא קשר לנתון הקודם, הראה כי כדי ששתי הכמויות יגיעו ליעדיהן באותו הזמן אז הבסיסים שלהן $(q_1, q_2)$ צריכים להיות מספרים הופכיים.

**24)** כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית לפי אחוז קבוע $p$ מדי שעה.
ביום מסוים היו $k$ גרם מהחומר. לאחר 3 שעות הוסיפו עוד $k$ גרם לכמות שנותרה ולאחר 3 שעות נוספות מתברר שנשארו $k$ גרם מהחומר. מצא את $p$.

**25)** ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית.
ידוע כי בשנת 1980 הייתה המנייה שווה $k$ שקלים.
המנייה גדלה באחוז קבוע של 2% לשנה עד לשנת 1992 ומשם צנחה בקצב של 5% לשנה במשך 8 שנים נוספות.
לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010.
אדם הרוצה לקנות את המנייה שנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא $1.5k$.
מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר הצניחה שלה.

**26)** מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של 3% לשנה.
בשנה מסוימת נספרו 2300 עופות בשמורה, לאחר 5 שנים הוסיפו לשמורת הטבע 1000 עופות נוספים.

א. מצא כמה עופות יהיו בשמורה לאחר 5 שנים נוספות.

ב. מצא תוך כמה שנים יהיה מספר העופות בשמורה זהה לזה שמצאת בסעיף א' אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים, אלא אם הייתה גדילה רציפה.

**27)** אדם מפקיד סכום של 120,000 ₪ לפי ריבית דריבית של 12% בשנה.
כעבור $t$ שנים הוא משך את כל הסכום שעמד לרשותו והפקיד אותו ל-$t$ שנים נוספות בתוכנית חיסכון חדשה לפי ריבית דריבית של 15%. בתום תקופה זו עמד לרשותו סכום של 330,252 ₪.

א. מצא את $t$.

לאחר תקופה זו הוא מפקיד את סכום הכסף הסופי בתכנית לפי ריבית דריבית מסוימת. לאחר 5 שנים עמד לרשותו סכום של 821,772 ₪.

ב. מצא את אחוז הריבית החדש.

**28)** ערכן של שתי חלקות אדמה יורד בצורה מעריכית. ידוע כי בזמן שערכה של אדמה א' מגיע למחצית מערכה המקורי, ערכה של אדמה ב' מגיע ל-30% מערכה המקורי. לאחר 50 שנים אדמה א' מאבדת 60% מערכה.

א. מצא את אחוז הדעיכה של אדמה ב'.

ב. ידוע כי לאחר 100 שנים ערכן של שתי האדמות שווה. ערכה המקורי של אדמה ב' הוא 100,000 ₪. מצא את ערכה המקורי של אדמה א'.

**29)** מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של $p$ אחוזים לשנה.
בשנה מסוימת נספרו 3000 עופות בשמורה, לאחר 4 שנים הוסיפו לשמורה 1000 עופות נוספים.

א. מצא את אחוז הגידול השנתי $p$ אם ידוע כי לאחר 4 שנים נוספות היו בשמורת 5647 עופות.

ב. מצא לאחר כמה שנים יהיו 5647 עופות אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים.

**30)** בכוורת דבורים ידוע כי בכל 10 שעות כמות הדבורים גדלה פי 1.5.

א. מצא באיזה אחוז גדלה כמות הדבורים בכל שעה.

ב. מוציאים לאחר 10 שעות 3000 דבורים וידוע כי נשארו 1500 דבורים. חשב כמה דבורים היו בתחילה בכוורת.

**31)** אדם מפקיד $k$ שקלים בתוכנית חיסכון לפי ריבית שנתית של $p\%$. לאחר 5 שנים הוא מושך מהחיסכון $k$ שקלים ולאחר 5 שנים נוספות מתברר כי הצטבר בפיקדון שלו סך הכול $2.5k$ ₪. מצא את $p$.

**32)** ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית.
ידוע כי בשנת 1995 הייתה המנייה שווה $k$ שקלים.
המנייה גדלה באחוז קבוע של 5% לשנה עד לשנת 2000 ושם צנחה בקצב של 8% לשנה במשך 6 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה בשנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא $k$. מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר צניחתה.

## תשובות סופיות:

**13)** בנק א'.

**14)** $\frac{t_1}{t_2}=\frac{1}{2}$

**15)** $t=\frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{100+P}{100}\right)}$

**16)** $x=17.04$ , מינימום.

**17)** 11 חודשים.

**18)** 100,000 עצים.

**19)** א. 75,858.5 ₪ ב. לאחר 15 שנים.

**20)** א. בנק ב' ב. לשניהם אותו הסכום.

**21)** א. לאחר 22.46 שנים. ב. מכונית א' ולאחר 16 שנים.

**22)** א. 1.017 ב. 653.48 ק"ג אצות.

**23)** א. הכמות השנייה תגיע ליעדה לפני הראשונה.

**24)** 14.82%

**25)** ב-5.95%

**26)** א. 4250 עופות. ב. 20.77 שנים.

**27)** א. $t=4$ ב. $p=20\%$

**28)** א. 3.13% ב. 25,909 ₪

**29)** א. 5% ב. 12.96 שנים.

**30)** א. ב-4.1% ב. 3000 דבורים .

**31)** 16.63%

**32)** ב-6.6%

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 28 - פונקציות - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

### תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות ..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה ..... (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 29 - פונקציות - תכונות מתקדמות

### תוכן העניינים

1. תחום הגדרה של פונקציה ..... 235
2. הרכבת פונקציות ..... 237
3. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית ..... 240
4. פונקציה מחזורית ..... 245

# תחום הגדרה של פונקציה

## שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

**1)** $y=x^3-x^2-4x+1$

**2)** $y=\frac{1}{x^2-4}$

**3)** $y=\frac{4x+1}{x^2+1}$

**4)** $y=\frac{1}{x^3-x}$

**5)** $y=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

**6)** $y=\sqrt{x-4}$

**7)** $y=\sqrt{x^2+x-2}$

**8)** $y=\sqrt[3]{x^2+x-1}$

**9)** $y=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

**10)** $y=\ln\left(x^2+x-2\right)$

**11)** $y=\log x+\frac{1}{\log x}$

**12)** $y=e^{x^2+x+1}$

**13)** $y=\log_x\left(x+4\right)$

**14)** $y=\tan\left(10x\right)$

**15)** $y=\cot\left(4x\right)$

**16)** $y=\arctan\left(x+4\right)$

**17)** $y=\arcsin\left(x-4\right)$

**18)** $y=\arccos\left(x+1\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) כל $x$.

2) $x \neq \pm 2$

3) כל $x$.

4) $x \neq 0,1,-1$

5) $x \neq 2,-1$

6) $x \geq 4$

7) $x \leq -2$ , $x \geq 1$

8) כל $x$.

9) $-1 < x < 1$

10) $x < -2$ , $x > 1$

11) $x > 0$ , $x \neq 1$

12) כל $x$.

13) $x > 0$ , $x \neq 1$

14) $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

15) $x \neq \frac{\pi k}{4}$

16) כל $x$.

17) $3 < x < 5$

18) $-2 < x < 0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הרכבת פונקציות

## שאלות

**1)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x-4$ , $g(x)=x^2$ , $h(x)=\frac{4}{x}$.

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$

ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

**2)** נתון: $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$.

חשבו $f(f(x))$ עבור $x=3$.

**3)** נתון: $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$ $g(x)=\frac{5-x}{x-7}$.

חשבו $f(g(x))+g(f(x))$ עבור $x=8$.

**4)** נתון: $f(x)=x^2-7x,\ g(x)=\ln x$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x=e^2$.

**5)** נתון: $f(x)=e^{2x}$ $g(x)=\ln x$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x=2$.

**6)** נתון: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ x^2 & x\le 0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x+3 & x>4\\ 3x & x\le 4\end{cases}$.

חשבו $f(g(x)),\ g(f(x))$.

**7)** נתונות הפונקציות:

$g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<1\\ -x^2-2x-1 & x\ge 1\end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases}2x+4 & x\le -1\\ \sqrt{x+1} & x>-1\end{cases}$.

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x)=g(f(x))$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונות הפונקציות:

$$g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<1\\ -x^2-2x-1 & x\geq 1\end{cases}$$ ו- $$f(x)=\begin{cases}2x+4 & x\leq -1\\ \sqrt{x+1} & x>-1\end{cases}$$.

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x)=f\left(g(x)\right)$.

ב. נתון ש- $n\in\mathbb{Z}$ ו- $h(n)\notin\mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

1. $n\leq -3$
2. $n\geq 1$
3. $n$ אי-זוגי שלילי.
4. אף תשובה אינה נכונה.

**9)** נתון $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

מצאו את $f^n(x)=\underbrace{f(f(f(...(f(x)))))}_{n\text{ times}}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $-3$ ב. $4$ ג. $x^2-4$ ד. $\frac{4}{x-4}$ ה. $x-8$ ו. $x$

**2)** $3$

**3)** $\frac{69}{13}$

**4)** $-10$

**5)** $4$

**6)**
$$f\left(g\left(x\right)\right)=\begin{cases}\frac{1}{x+3} & x>4\\ \frac{1}{3x} & 0<x\le 4\\ \left(3x\right)^2 & x\le 0\end{cases},\quad g\left(f\left(x\right)\right)=\begin{cases}x^2+3 & x<2\\ 3x^2 & -2\le x\le 0\\ \frac{1}{x}+3 & 0<x<\frac{1}{4}\\ 3\frac{1}{x} & x\ge\frac{1}{4}\end{cases}$$

**7)**
$$z(x)=\begin{cases}4x^2+16x+12 & x<-1.5\\ -4x^2-20x-25 & -1.5\le x\le -1\\ x-3 & -1<x<0\\ -x-2-2\sqrt{x+1} & x\ge 0\end{cases}$$

**8)** א. $h(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-3} & x<-\sqrt{3}\\ 2x^2-4 & -\sqrt{3}\le x<1\\ -2x^2-4x+2 & x\ge 1\end{cases}$ ב. $n\le -3$

**9)** $f^n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פונקציה זוגית ואי זוגית

## שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות **1-8** הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

**1)** $y=4x^3$ **2)** $y=x^4+x^{10}$ **3)** $y=1$

**4)** $y=\frac{1}{x}$ **5)** $y=x^2+\sin^2 x$ **6)** $y=2^x$

**7)** $y=\ln x+x^2$ **8)** $y=\sin x\cdot\cos x$

**9)** נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

נסמן: $z(x)=f\left(x^2\right),\ k(x)=-f(x)$.

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות $k,z$, האם היא זוגית או אי-זוגית.

**10)** נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ופונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

נסמן: $z(x)=-g\left(x^3\right)$ ו- $k(x)=-f\left(x^3\right)$.

טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.

טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

**11)** נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונתונה פונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

נסמן: $k(x)=f(-x)+x^{11}g(|x|)$ , $z(x)=-g(-4x)\cdot f\left(x^4\right)$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות $z,k$, האם היא זוגית או אי-זוגית.

**12)** נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$ ומקיימת $|f(x)|<1$.

נתון כי $g(x)$ פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו שהפונקציה $z(x)=g(x)\ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)$ היא אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית

ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

**14)** הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.

ב. מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.

ה. הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ו. הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.

ז. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל $x$ היא פונקציית האפס.

**15)** הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

נגדיר $z(x)=\left(f(x)\right)^n$ כאשר $n>1$ טבעי.

קבעו האם הפונקציה $z$ היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

**16)** נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל $x$.

נגדיר: $f_{odd}(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$, $f_{even}(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$

א. הוכיחו כי $f_{odd}(x)$ היא פונקציה אי-זוגית ו- $f_{even}(x)$ היא פונקציה זוגית.

ב. הוכיחו כי $f(x)=f_{odd}(x)+f_{even}(x)$ והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.

ג. הציגו את הפונקציה $f(x)=x^2+x+1$ כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

**17)** הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $f$ פונקציה אי-זוגית אז $f(0)=0$.

ב. אם $f$ פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב- $x=0$ אז $f(0)=0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18)** הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הפונקציה $f(x)=\cos x$ היא זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)=\sin x$ היא אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)=\tan x$ היא אי-זוגית.

ד. הפונקציה $f(x)=\cot x$ היא אי-זוגית.

**19)** נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע $(-a,a)$ $(a>0)$.

הוכיחו כי גם $f^{-1}$ פונקציה אי-זוגית.

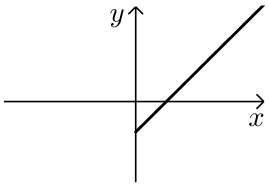
**20)** הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי זוגיות:

א. $y=\arctan x$

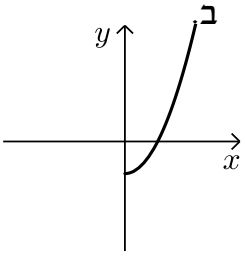
ב. $y=\arcsin x$

**21)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל $x$.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

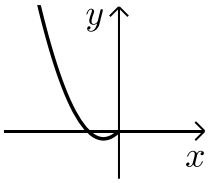
א.



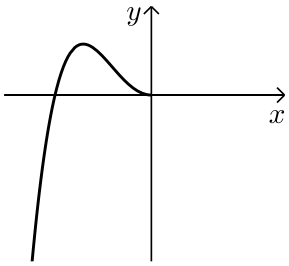

ב.




ג.




ד.

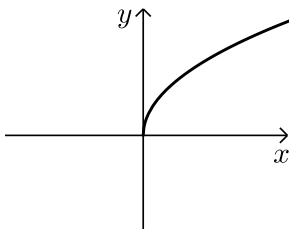




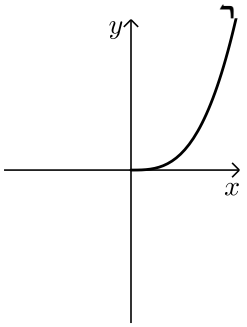
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**22)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל $x$.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

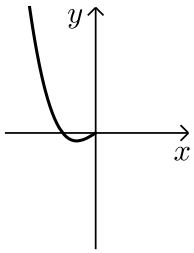
א.



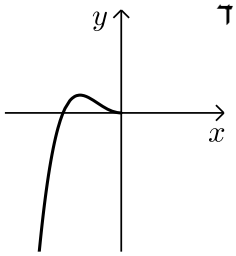

ב



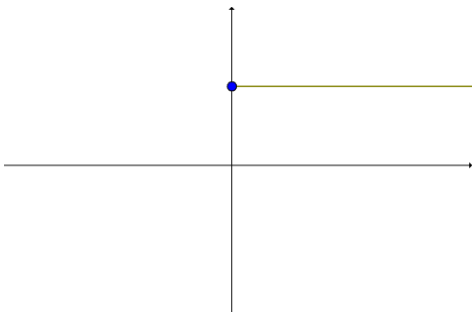

ג.

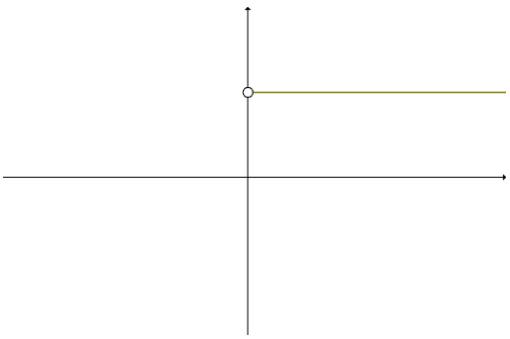



ד




**23)** השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.






לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

שאלות **1-8** : זוגית : **2,3,5,8** ; אי- זוגית : **1,4** ; כללית : **6,7**.

**9)** $k$ אי-זוגית, $z$ זוגית.

**10)** טענה ב'.

**11)** $k$ אי-זוגית, $z$ זוגית.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** כאשר $n$ זוגי – זוגית, וכאשר $n$ אי-זוגי – אי-זוגית.

**16)** א.+ב. שאלת הוכחה. ג. $f(x)=\underbrace{x}_{odd}+\underbrace{x^2+1}_{even}$

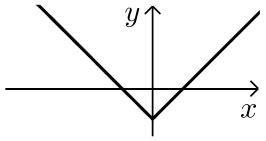
**17)** שאלת הוכחה.

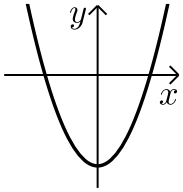
**18)** שאלת הוכחה.

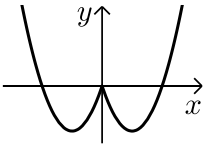
**19)** שאלת הוכחה.

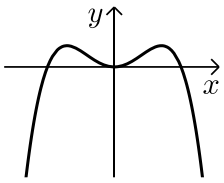
**20)** שאלת הוכחה.

**21)** להלן הגרפים :

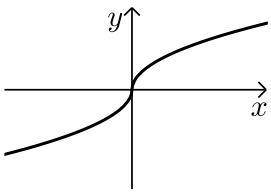
א. 

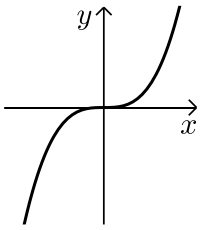

ב. 

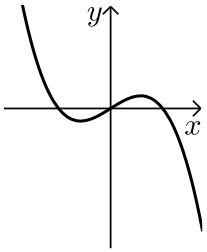

ג. 

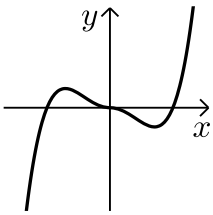

ד. 


**22)** להלן הגרפים :

א. 


ב. 


ג. 


ד. 


**23)** ראו בסרטון.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פונקציה מחזורית

## שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-20**:

**1)** $y=1+10\sin(0.5x+4)$

**2)** $y=1+14\cos 20x$

**3)** $y=-4+20\tan 4x$

**4)** $y=-1+14\sec 2x$

**5)** $y=\sin^2 4x$

**6)** $y=\cos^2 2x$

**7)** $y=\cos^4 x-\sin^4 x$

**8)** $y=(\sin x+\cos x)^2$

**9)** $y=\cos^4 x+\sin^4 x$

**10)** $y=\cot^2 x$

**11)** $y=\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{10}$

**12)** $y=\sin 4x+\sin 14x$

**13)** $y=\sin 4x+\sin 14x+\sin x$

**14)** $y=\cos 2x\cos x$

**15)** $y=\sin^3 x$

**16)** $y=\sin^4 x$

**17)** $y=\frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}$

**18)** $y=|\sin x|$

**19)** $y=\sin^2 x+\cos^2 x$

**20)** $y=\cot x-\tan x$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות **21-26** אינן מחזוריות:

**21)** $y=x+\sin x$

**22)** $y=x+\cos x$

**23)** $y=x\sin x$

**24)** $y=x^2\cos x$

**25)** $y=\frac{\sin x}{x}$

**26)** $y=\cos 5x+\cos\sqrt{5x}$

הערה: בשאלות **21** ו-**22** נדרש ידע בחקירת פונקציה.

**27)** הוכיחו:

אם $f(x)$ מחזורית בעלת מחזור $p$,

אז $y=a+b\cdot f(cx+d)$ מחזורית בעלת מחזור $\frac{p}{c}$.

**28)** הוכיחו: אם $T$ הוא מחזור של $f(x)$, אז לכל $n$ שלם $f(x+nT)=f(x)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**29)** נתון כי $f,g$ מוגדרות לכל $x$ ובעלת מחזור $p_1, p_2$ , בהתאמה.

נתון כי היחס $\frac{p_1}{p_2}$ הוא מספר רציונלי.

הוכיחו כי גם הפונקציות $f \cdot g,\ \frac{f}{g}\ (g \neq 0)$ $f \pm g,$ הן מחזוריות.

**30)** נתונה הפונקציה $f(x) = x - [x]$ .

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?

ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

**31)** נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית $g(x)$ , המוגדרת לכל $x$ ,
שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ בקטע $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור $f$ .

**32)** נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית $g(x)$ , המוגדרת לכל $x$ ,
שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ ב-$[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור $g$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1)** $4\pi$ | **2)** $\frac{\pi}{10}$ | **3)** $\frac{\pi}{4}$ | **4)** $\pi$ | **5)** $\frac{\pi}{4}$ |
| **6)** $\frac{\pi}{2}$ | **7)** $\pi$ | **8)** $\pi$ | **9)** $\frac{\pi}{2}$ | **10)** $\pi$ |
| **11)** $40\pi$ | **12)** $\pi$ | **13)** $2\pi$ | **14)** $2\pi$ | **15)** $2\pi$ |
| **16)** $\pi$ | **17)** $\pi$ | **18)** $\pi$ | | |

**19)** הפונקציה היא למעשה $y=1$ , כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית.
כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

**20)** $\frac{\pi}{2}$

**21)** שאלת הוכחה.

**22)** שאלת הוכחה.

**23)** שאלת הוכחה.

**24)** שאלת הוכחה.

**25)** שאלת הוכחה.

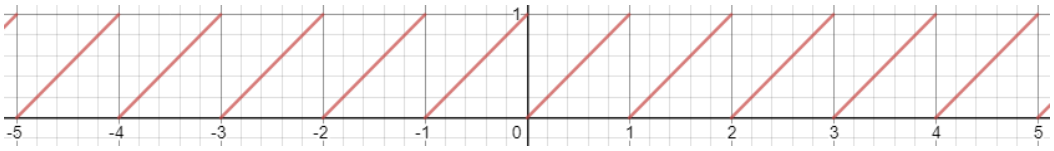
**26)** שאלת הוכחה.

**27)** שאלת הוכחה.

**28)** שאלת הוכחה.

**29)** שאלת הוכחה.

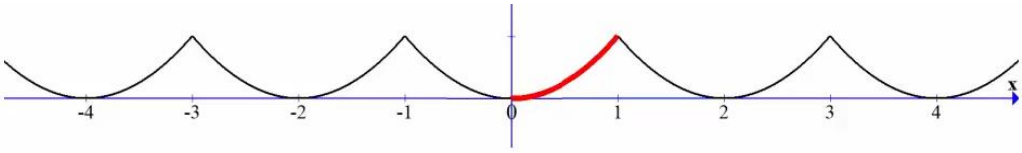
**30)** א.




ב. 1 ג. שאלת הוכחה.

**31)** $g(x)=x-k,\ k-1\le x\le k+1$ עבור $k$ שלם, זוגי.

**32)** $g(x)=(x-k)^2,\ k-1\le x\le k+1$ עבור $k$ שלם, זוגי.





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 30 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

### תוכן העניינים

1. הקדמה כללית ..... (ללא ספר)
2. כללי הגזירה ..... (ללא ספר)
3. שימושי הנגזרת ..... (ללא ספר)

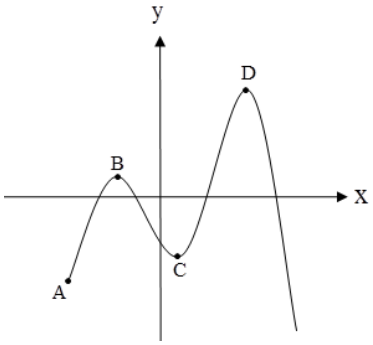
# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 31 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

### תוכן העניינים

1. נקודות קיצון של פונקציות ..... 248
2. חקירת פונקציה פולינומית ..... 251
3. פונקציה זוגית ואי-זוגית ..... 255

# נקודות קיצון של פונקציות:




## סיכום כללי:

**נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):**

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B , C , D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

**נקודות קיצון מקומיות:**

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית. נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

**שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:**

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה-$x$ של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה-$x$ מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה-$y$.
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

## שאלות:

**1)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=10x-x^2$.

**2)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

**3)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$ .

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$ .

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

**5)** לפונקציה $f(x)=ax-x^3-5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-1$ .
מצא את ערכו של הפרמטר $a$ .

**6)** נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$ . ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון.
מצא את הקבוע $a$

**7)** לפונקציה $f(x)=Ax^3+Bx^2-1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה: $(2,3)$ .
מצא את ערכי הפרמטרים A , B.

**8)** לפונקציה $f(x)=Ax^3+Bx^2-4x$ יש נקודת קיצון ב-$x=-1$ ו-$x=4$ .
מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה-$y$ של שתי נקודות הקיצון.

**9)** נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$ . ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.
מצא את הפרמטרים $a$ , $b$ .

**10)** לפונקציה $f(x)=ax^4+bx^2+35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2,3)$ .
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ , $b$ .

## תשובות סופיות:

1) $\max(5,25)$.

2) א. $\max(-2,16)$ , $\min(2,-16)$ ב. עולה: $x>2$ , $x<-2$ יורדת: $-2<x<2$.

3) א. $\max(0,9)$ , $\min(\sqrt{5},-16)$ , $\min(-\sqrt{5},-16)$

ב. עולה: $-\sqrt{5}<x<0$ , $x>\sqrt{5}$ יורדת: $0<x<\sqrt{5}$ , $x<-\sqrt{5}$.

4) א. $\min(3,5)$ ב. עולה: $x>3$ יורדת: $x<3$.

5) $a=3$.

6) $a=-\frac{2}{3}$.

7) $A=-1$ , $B=3$.

8) $\left(4,-18\frac{2}{3}\right)$ , $\left(-1,2\frac{1}{6}\right)$ , $B=-\frac{3}{2}$ , $A=\frac{1}{3}$.

9) $a=-4$ , $b=6$.

10) $a=2$ , $b=-16$.

# חקירת פונקציה פולינומית:

## שאלות:

**11)** נתונה הפונקציה $f(x)=10x-x^2$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**12)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**13)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**14)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**15)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-3ax^2+54x-50$.

א. לאלו ערכים של הפרמטר $a$ עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?

ב. הצב בפונקציה $a=6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$, סרטוט.

**17)** נתונה הפונקציה: $y=-3x^3+6x^2-4x+d$ ($d$ פרמטר).
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה: $x=2$.

א. מצא את $d$.

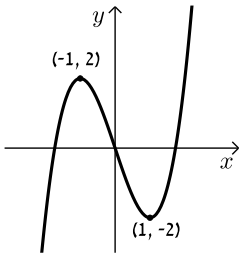
ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?

ג. כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**18)** לפניך גרף הפונקציה $f(x)=x^3-3x$:




א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=5$?

ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=2$?

ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0.5$?

ד. עבור איזה ערך של $k$ למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק פתרון אחד?

ה. עבור איזה ערך של $k$ למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שני פתרונות?

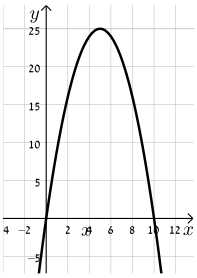
ו. עבור איזה ערך של $k$ למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

ז. האם קיים ערך של $k$ עבורו למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון?

## תשובות סופיות:

**11)** א. כל $x$ ב. $\max(5,25)$ ג. עלייה: $x<5$, ירידה: $x>5$

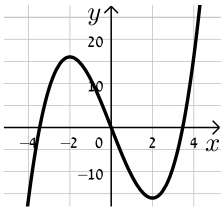
ד. $(10,0)$, $(0,0)$. ה. להלן גרף:



**12)** א. כל $x$ ב. $\max(-2,16)$, $\min(2,-16)$

ג. עלייה: $x>2$, $x<-2$, ירידה: $-2<x<2$

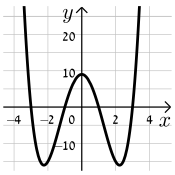
ד. $(-\sqrt{12},0)$, $(\sqrt{12},0)$, $(0,0)$. ה. להלן גרף:



**13)** א. כל $x$ ב. $\min(-\sqrt{5},-16)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\max(0,9)$

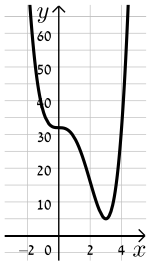
ג. עלייה: $-\sqrt{5}<x<0$, $x>\sqrt{5}$, ירידה: $x<-\sqrt{5}$, $0<x<\sqrt{5}$.

ד. $(\pm 3,0)$, $(\pm 1,0)$, $(0,9)$. ה. להלן גרף:



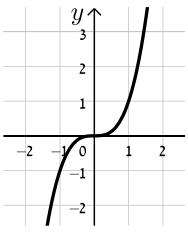
**14)** א. כל $x$ ב. $\min(3,5)$ ג. תחומי עלייה: $x>3$, תחומי ירידה: $x<3$

ד. $(0,32)$. ה. להלן גרף:

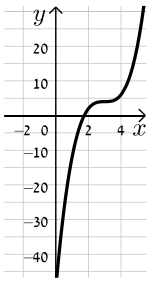


**15)** א. כל $x$ ב. אין. ג. עולה לכל $x$

ד. $(0,0)$. ה. להלן גרף:

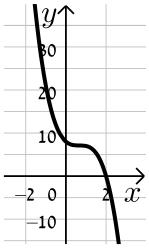


**16)** א. $-6<a<6$ ב. תחום הגדרה: כל $x$, נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל $x$, תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים: $(0,-50)$, להלן גרף:




**17)** א. $d=8$ ב. לא. ג. יורדת בתחום $x\neq\frac{2}{3}$

ד. $(0,8)$. ה. להלן גרף:




**18)** א. 1. ב. 2. ג. 3. ד. $k<-2$ , $k>2$

ה. $k=\pm 2$ ו. $-2<k<2$ ז. לא.

# פונקציה זוגית ואי-זוגית:

## סיכום כללי:

**הגדרות:**

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל $x$ בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x)=f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל $x$ בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x)=-f(x)$.

## שאלות:

**1)** קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x)=3x-5$

ב. $f(x)=3x^2$

ג. $f(x)=2x^3$

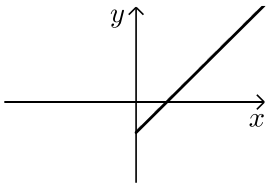
ד. $f(x)=x^3-2x^2$

ה. $f(x)=4x^4-3x^2+1$

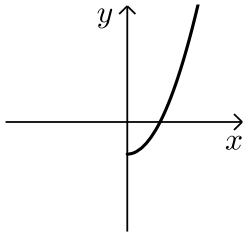
ו. $f(x)=4x^5-3x^3-1$

**2)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל $x$.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

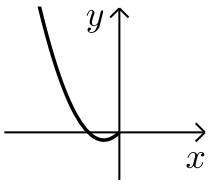
א.



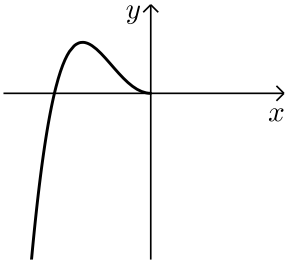

ב.



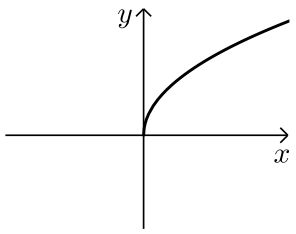

ג.

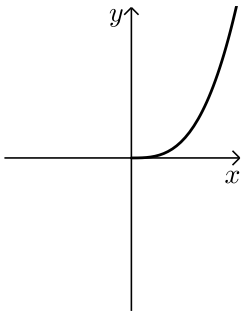


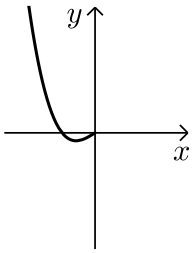

ד.

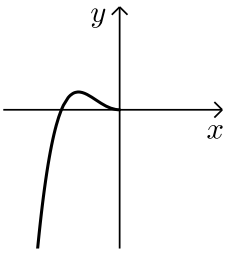


**3)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל $x$.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

א.



ב.



ג.



ד.



**4)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^4-4x^2$ בתחום: $[0:3]$.

א. חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:
   i. תחום הגדרה.
   ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
   iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
   iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
   v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

ג. התבסס על ממצאיך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

**5)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^6-3x^2+3$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- $y$, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.

ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.

ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל $x$ בתחום הגדרתה.

**6)** לפניך הפונקציה: $f(x)=-2x^6+3x^4+a$, $a$ פרמטר.
ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

**7)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=3x^3-9x$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

**8)** לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=5x^3-3x^5+b$ , $b$ פרמטר.
ידוע כי הישר $y=2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות: $f'(x)=0$.

א. מצא את $b$ וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.
נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

**9)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^7-x}{3}$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן
(בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

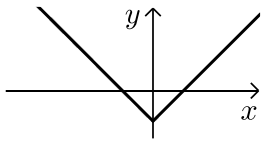
ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?
נמק ע"י חישוב מתאים.

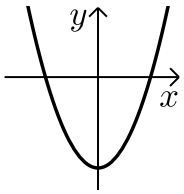
ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

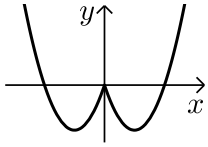
## תשובות סופיות:

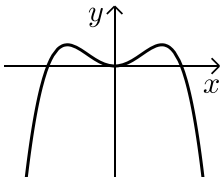
**1)** זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

**2)** להלן הגרפים:

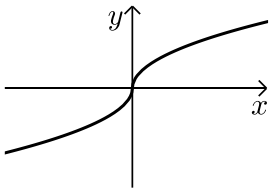
א.


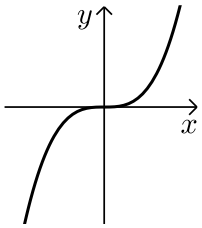

ב.


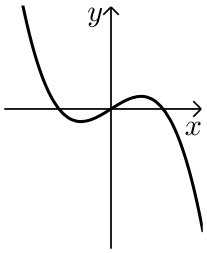

ג.


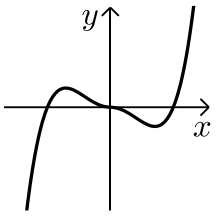

ד.



**3)** להלן הגרפים:

א.



ב.


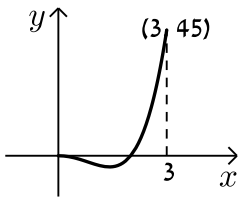

ג.



ד.


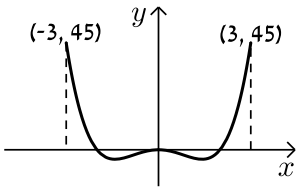

**4)** א. i. $0 \le x \le 3$ ii. $(0,0),(2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min\left(\sqrt{2},-4\right)$,

$\max(0,0)$ קצה. iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$ ב. סעיף הוכחה.

**סרטוט עבור חלק v:**




**סרטוט עבור סעיף ג:**



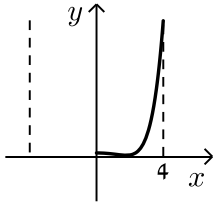

**5)** א. תחום הגדרה: $0 \le x \le 4$, חיתוך עם ציר ה-$y$: $(0,3)$,

נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה,

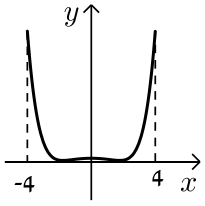
עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$ ב. זוגית.

ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

**סרטוט עבור סעיף א:**

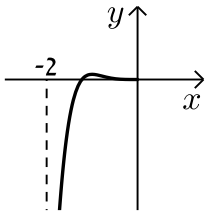



**סרטוט עבור סעיף ג:**

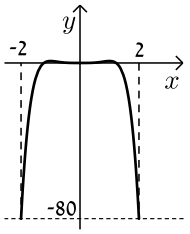


**6)** א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2\le x\le 0$, חיתוך עם הצירים: $(0,0),(-1.225,0)$, נקודות קיצון: $\min(-2,-80)$ קצה, $\max(-1,1)$, $\min(0,0)$ קצה,
עולה: $-2<x<-1$, יורדת: $-1<x<0$. ג. זוגית.

**סרטוט עבור סעיף א:**

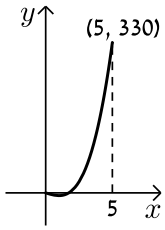



**סרטוט עבור סעיף ד:**

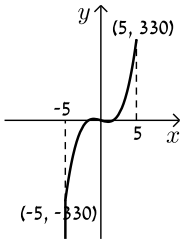



**7)** א. תחום הגדרה: $0\le x\le 5$, חיתוך עם הצירים: $(0,0),\left(\sqrt{3},0\right)$,
נקודות קיצון: $\max(5,330)$ קצה, $\min(1,-6)$, $\max(0,0)$ קצה,
עולה: $1<x<5$, יורדת: $0<x<1$, ב. אי-זוגית.

**סרטוט עבור סעיף א:**

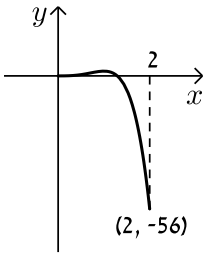



**סרטוט עבור סעיף ג:**

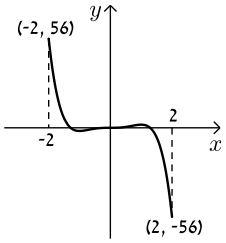



**8)** א. $b=0$ ב. i $0\le x\le 2$ ii. $(0,0),(1.29,0)$ iii. $\min(2,-56)$ קצה,
$\max(1,2)$, $\min(0,0)$ קצה. iv. עולה: $0<x<1$, יורדת: $1<x<2$
ג. אי-זוגית.

**סרטוט עבור חלק v:**

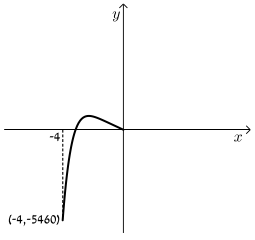



**סרטוט עבור סעיף ד:**

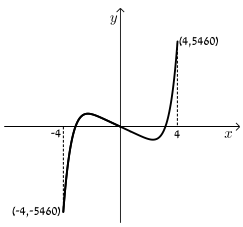



**9)** א. i $-4\le x\le 0$ ii. $(-1,0),(0,0)$ iii. $\min(0,0)$ קצה, $\max(-0.723,0.207)$,
$\min(-4,-5460)$ קצה. iv. עולה: $-4<x<-0.723$,
יורדת: $-0.723<x<0$ ג. אי-זוגית.

**סרטוט עבור חלק v:**




**סרטוט עבור סעיף ד:**



# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 32 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש

### תוכן העניינים

1. מציאת תחום הגדרה ..... 261
2. מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה ..... 263
3. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים ..... 264
4. חקירת פונקצית מנה ..... 269
5. חקירת פונקצית שורש ..... 278
6. תחומי קעירות ונקודות פיתול ..... 286
7. חקירת פונקציה עם פרמטר ..... 292
8. פונקציות ללא תבנית מפורשת ..... 295

# מציאת תחום הגדרה:

## סיכום כללי:

- כל פולינום מוגדר לכל $x$.
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

## שאלות:

**1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x$

ב. $f(x)=4x^3-x^2+\frac{x}{2}+1$

ג. $f(x)=x^3-x^2-4x+1$

ד. $f(x)=\frac{2x}{x-3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

ו. $f(x)=\frac{5x^3+4x}{x^2-1}$

ז. $f(x)=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

ח. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-2x-8}$

ט. $f(x)=\frac{6}{x^2+1}$

י. $f(x)=\frac{4x+1}{x^2+1}$

יא. $f(x)=\frac{1}{x^3-x}$

יב. $f(x)=\frac{x^2}{x^3-4x}$

**2)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=2\sqrt{x-3}$

ג. $f(x)=\sqrt{x-4}$

ד. $f(x)=3x\sqrt{1-2x}$

ה. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-10}$

ו. $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

ז. $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x+4}}$

ח. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

ט. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

י. $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}}$

יא. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

יב. $f(x)=\frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}}$

יג. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

יד. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. כל $x$ ב. כל $x$ ג. כל $x$ ד. $x\neq 3$ ה. $x\neq \pm 2$ ו. $x\neq \pm 1$
ז. $x\neq -1,2$ ח. $x\neq 4,-2$ ט. כל $x$ י. כל $x$ יא. $x\neq \pm 1,0$ יב. $x\neq \pm 2,0$.

**2)** א. $x\geq 0$ ב. $x\geq 3$ ג. $x\geq 4$ ד. $x\leq \frac{1}{2}$ ה. $x\leq -5\ ,\ x\geq 2$
ו. $x\geq 1\ ,\ x\leq -2$ ז. $x>-4$ ח. $x\leq -3\ ,\ -2\leq x<1\ ,\ x>1$ ט. $x\leq -1.5\ ,\ x\geq 1$
י. $-3<x<0\ ,\ x>3$ יא. $-6\leq x<-2\ ,\ x>-2$ יב. $x<1\ ,\ 1<x\leq 2$
יג. $-1<x<1$ יד. $x\geq 7$.

# מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

## שאלות:

**3)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{x^2-10x+9}$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

## תשובות סופיות:

**3)** א. $\max\left(3,-1\frac{1}{2}\right)$, $\min\left(-3,-\frac{3}{8}\right)$.

ב. עולה: $-3<x<3$, $x\neq 1$, יורדת: $3<x\neq 9$, $x<-3$.

# מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

## סיכום כללי:

### אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים: $g(k)=0$ וגם: $f(k)\neq 0$. בצורה מתמטית: אם: $\lim_{x\to k^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$

או: $\lim_{x\to k^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ או שניהם אז הישר: $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $y=\frac{f(x)}{g(x)}$.

### הסבר כללי:

בעבור ערכי $x$ שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית.
כאשר ערך $x$ מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה
(על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם.
אם אחרי הצמצום אותו ערך של $x$ עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית,
אך אם ערך $x$ זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא
נקודת אי הגדרה.

### אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה: $y=n$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים: $\lim_{x\to\infty^+}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או: $\lim_{x\to\infty^-}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^m+\ldots}{bx^n+\ldots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם $m>n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m=n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=\frac{a}{b}$.
- אם $m<n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=0$.

**חוקי גבולות לאינסוף:**

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר $x$ שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף).
עבור ערכי $x$ שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום: $x=\infty$ או $x=-\infty$ בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת $x$ לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}="\frac{1}{\infty}"=0$.
- הגבול: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ ניתן לפיצול לשני מקרים:
  - אם: $x\to 0^+$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון החיובי) אז: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}="\frac{1}{0^+}"=+\infty$.
  - אם: $x\to 0^-$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון השלילי) אז: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}="\frac{1}{0^-}"=-\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty\cdot\infty$ (מכפלת שני ביטויים של $x$ אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty\cdot\infty=\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty+\infty$ (סכום שני ביטויים של $x$ אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty+\infty=\infty$.

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה: $\frac{\infty}{\infty}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת $x$).
- הגבול מהצורה: $\frac{0}{0}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת $x$).
- הגבול מהצורה: $\infty-\infty$ (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת $x$).
במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

## שאלות:

4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x-2}+3$.

5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{5x^2+1}{x^2-9}$.

6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$.

7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{3x}{x^2-2x-15}$.

8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$.

9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+b}{x-b}$.

10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{2x^2-4x}$
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$.

13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x}}$.

**14)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

**15)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{x-\sqrt{x}}$.

**16)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$.

**17)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$.

**18)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$.
האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה נפגשות בנקודה $(-1,2)$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**19)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$.
הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16,2)$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

## תשובות סופיות:

4) $x=2\ ,\ y=3$.

5) $x=\pm 3\ ,\ y=5$.

6) $y=\frac{2}{3}$.

7) $x=-3\ ,\ x=5\ ,\ y=0$.

8) אין.

9) $x=b\ ,\ y=a$.

10) $x=1\ ,\ y=1$, נקודת אי-הגדרה: $(2,4)$.

11) $x=2\ ,\ y=\frac{1}{2}$, נקודת אי-הגדרה: $(0,0)$.

12) $x=2\ ,\ y=0$.

13) $x=4$.

14) $x=1\ ,\ y=-1$.

15) $x=1\ ,\ y=2$.

16) $y=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)\right)=3\ ,\ y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)\right)=-3$.

17) $x=4\ ,\ x=-4\ ,\ y=5\ ,\ y=-5$.

18) $a=2\ ,\ b=-3$.

19) $a=2\ ,\ b=1$.

# חקירת פונקצית מנה:

## שאלות:

**20)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^2-10x+6}{3x^2-10x+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**21)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x+\frac{1}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**22)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**23)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{x^2-5x+4}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**24)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**25)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\frac{2x^2-5x+2}{4x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון.

ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.

ד. חיתוך עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.

ו. סרטוט סקיצה.

**26)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**27)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**28)** לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x=-8$.

א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה.
ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ד. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**29)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3x^2}{2x^2-8}$.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.
ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**30)** נתונה הפונקציה: $y=\frac{a^2x-4}{2x^2-1}$, ($a$ קבוע).
ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$ הוא: $m=4$.

א. מצא את כל הערכים האפשריים עבור $a$.
ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ג. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

**31)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=1.5x-\frac{5x+1}{x+5}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון וסוגן.

ג. תחומי עלייה וירידה.

ד. חיתוך עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה.

**32)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$, $(a\neq 1)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. הבע באמצעות $a$ את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$ ועם ציר ה-$y$.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא עבור אילו ערכים של $a$ הפונקציה $f(x)$ עולה לכל $x$ בתחום ההגדרה.

ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$.
מצא את הערך של $a$ אם נתון כי הפונקציה עולה לכל $x$.

**33)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+ax+6}{x-2}$, ($a$ פרמטר).
ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה-$y$.

א. מצא את הערך של $a$.

ב. הצב את הערך של $a$ שמצאת בסעיף א' ומצא:

i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

ג. עבור אלו ערכי $x$ הפונקציה שלילית?

ד. נתון הישר: $y=k$. עבור אלו ערכי $k$ אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

**34)** נתונה הפונקציה: $y=\frac{x+3}{x-2}+A$ , ($A$ פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה $(3A\ ,\ A)$.

א. מצא את ערך הפרמטר $A$.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל $x$.

ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון הישר: $y=k$.
האם קיים ערך של $k$ עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

**35)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2-20x+28}{x^2+2a}$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה $(3\ ,\ 0.5)$.

א. מצא את ערך הפרמטר $a$ וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של $k$ הישר: $y=k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

**36)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{9-x^2}{x^2-k}$ יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- $y$.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל $x$ אם ידוע כי שיעור ה- $y$ של נקודת הקיצון הוא 3.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ד. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

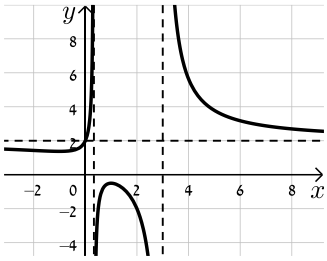
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר $y=-1$.
נמק את תשובתך.

## תשובות סופיות:

**20)** א. $x\neq 3\ ,\ x\neq \frac{1}{3}$ ב. $\max\left(1,-\frac{1}{2}\right)\ ,\ \min\left(-1,1\frac{3}{8}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $-1<x<1$ וגם $x\neq\frac{1}{3}$ , תחומי ירידה: $1<x\neq 3$ או $x<-1$.

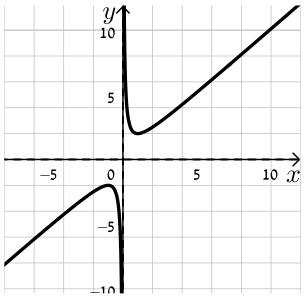
ד. $(0,2)$ ה. $y=2\ ,\ x=\frac{1}{3}\ ,\ x=3$. ו. להלן סקיצה:



**21)** א. $x\neq 0$ ב. $\max(-1,-2)\ ,\ \min(1,2)$

ג. עולה: $x>1$ או $x<-1$ , יורדת: $x\neq 0,\ -1<x<1$ ד. אין

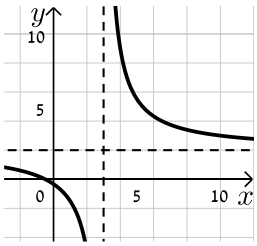
ה. להלן סקיצה:



**22)** א. $x\neq 3$ ב. אין. ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה

ד. $\left(0,-\frac{1}{3}\right)\ ,\ \left(-\frac{1}{2},0\right)$ ה. $x=3\ ,\ y=2$.

ו. להלן סקיצה:

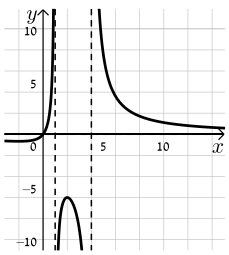


**23)** א. $x\neq 1\ ,\ x\neq 4$ ב. $\max(2,-6)\ ,\ \min\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$

ג. תחומי עלייה: $-2<x<2\ ,\ x\neq 1$ , תחומי ירידה: $x>2\ ,\ x\neq 4$ או $x<-2$

ד. $(0,0)$ (אסימפטוטות: $x=4\ ,\ x=1\ ,\ y=0$).

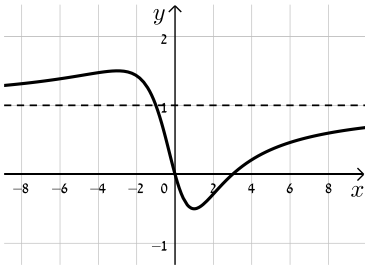
ה. להלן סקיצה:



**24)** א. כל $x$ ב. $\min\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ , $\max\left(-3,1\frac{1}{2}\right)$

ג. עולה: $x>1$ או $x<-3$ , יורדת: $-3<x<1$ ד. $(3,0),(0,0)$ (אסימפטוטה: $y=1$).

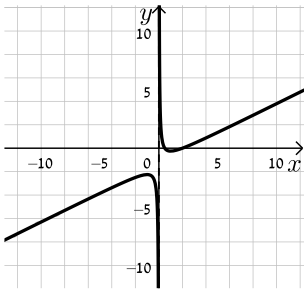
ה. להלן סקיצה:




**25)** א. $x\neq 0$ ב. $\min(1,-0.25)$ , $\max(-1,-2.25)$

ג. עולה: $x>1$ , $x<-1$ , יורדת: $-1<x<1$ , $x\neq 0$ ד. $(0.5,0),(2,0)$ ה. $x=0$.

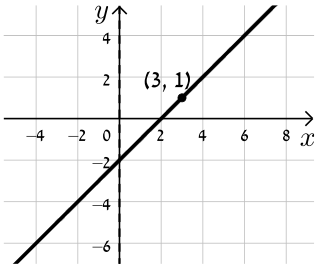
ו. להלן סקיצה:




**26)** א. $x\neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0,-2),(2,0)$ ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $(3,1)$.

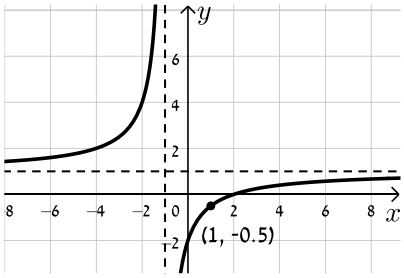
ו. להלן סקיצה:




**27)** א. $x\neq \pm 1$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0,-2),(2,0)$ ה. $x=-1$ , $y=1$ , יש נקודת אי הגדרה: $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

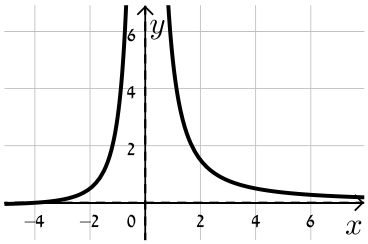
ו. להלן סקיצה:



**28)** א. $a=1$ , $f(x)=\frac{x+4}{x^2}$ ב. עולה: $-8<x<0$ יורדת: $x<-8$ , $x>0$

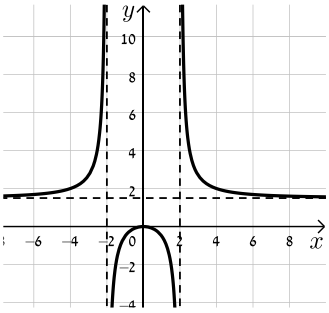
ג. $(-4,0)$ ד. $x=0$ , $y=0$.

ה. להלן סקיצה:




**29)** א. $x\neq\pm2$ ב. $\max(0,0)$ ג. יורדת: $x>0$ , $x\neq2$ , עולה: $x<0$ , $x\neq-2$

ד. $(0,0)$ ה. $x=\pm2$ , $y=1.5$. ו. להלן סקיצה:



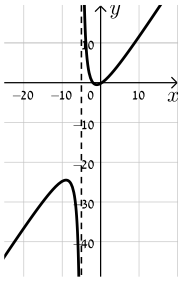

**30)** א. $a=\pm2$ ב. $(0,4)$ , $(1,0)$

ג. המשיק: $y=-4x+4$ אשר עובר בנקודה $(1,0)$. נקודת החיתוך: $(1,0)$.

**31)** א. $x\neq-5$ ב. $\max(-9,-24.5)$ , $\min(-1,-0.5)$

ג. עולה: $x>-1$ , $x<-9$, יורדת: $-9<x<-1$ , $x\neq-5$

ד. $(-2,0),\left(\frac{1}{3},0\right),(0,-0.2)$ ה. $x=-5$. ו. להלן סקיצה:



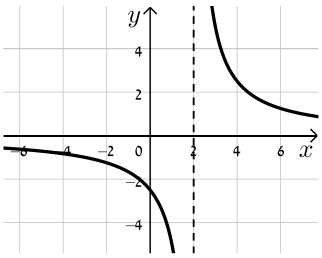

**32)** א. $x\neq1$ ב. $x=1$ , $y=1$ ג. $(a,0),(0,a)$ ד. i. $a>1$ ii. $a=2$.

**33)** א. $a=-3$ ב. i. $x\neq2$ ii. $(0,-3)$ iii. $\max(0,-3)$ , $\min(4,5)$

iv. $x=2$ ג. $x<2$ ד. $-3<k<5$.

**34)** א. A $=-1$ ב. $x\neq2$ ד. $(0,-2.5)$

ה. להלן סקיצה:




ו. לא

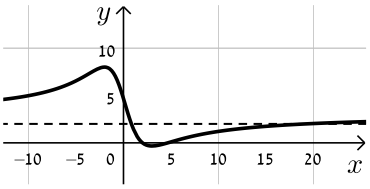
**35)** א. $a=3$ , $f(x)=\frac{3x^2-20x+28}{x^2+6}$ , כל $x$.

ב. $\max(-2,8)$ , $\min\left(3,-\frac{1}{3}\right)$

ג. עולה: $x>3$ , $x<-2$ ; יורדת: $-2<x<3$

ד. $(2,0),\left(0,4\frac{2}{3}\right),\left(4\frac{2}{3},0\right)$

ה. להלן סקיצה:

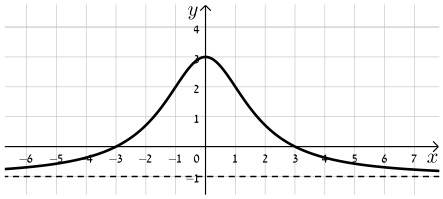



ו. $3$ , $-\frac{1}{3}$ , $k=8$.

**36)** ב. $k=-3$ ג. $(3,0),(-3,0)$ ד. $y=-1$

ה. באף נקודה.

ו. להלן סקיצה:



# חקירת פונקצית שורש:

## שאלות:

**37)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**38)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-4)\sqrt{x-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**39)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{6-x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**40)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**41)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**42)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**43)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה-$x$? נמק והראה חישוב מתאים.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$.

ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

**44)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?

ב. כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה-$x$? מצא אותן.

ג. כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

**45)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**46)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, $a$ פרמטר.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$.

ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y-x=0$.

א. מצא את ערך הפרמטר $a$.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ד. כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

**47)** נתונות שתי הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{\sqrt{x-k}}{x}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+k}}$ ($k$ פרמטר חיובי).

ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x=0.8$.

א. מצא את $k$.

ב. האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה? אם כן מצא אותה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=0.52$.

**48)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$ , $k$ פרמטר חיובי.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות $k$).

ii. מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?

ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של $k$ בתחום הגדרתה.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$. (בטא באמצעות $k$).

ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A. ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה-$x$ והאסימפטוטה הנ"ל הוא: 4 יח"ש $S=$. מצא את ערך הפרמטר $k$.

**49)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+2}{x+4}$. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.

ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.
קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.
הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות תחום הגדרה זהה.

ii. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

iii. שתי הפונקציות חותכות את ציר ה-$x$ באותה נקודה.

iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.

ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה-$y$.

אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:

היות והפונקציה $g(x)$ מוגדרת להיות: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ אזי ניתן למצוא את שיעור ה-$y$ של כל נקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה-$y$ של הנקודה בעלת אותו שיעור $x$ על הגרף של $g(x)$ ונעלה אותה בריבוע.

ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

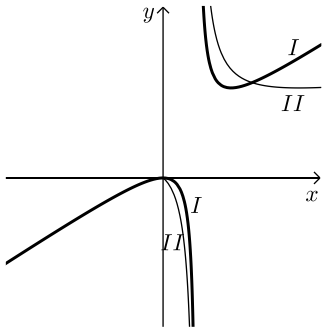
**50)** לפניך הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ , $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$ .

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.
הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר: $y=x$ .

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.




מגדירים פונקציה נוספת והיא: $h(x)=\left(g(x)\right)^2$ .

ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה: $h(x)$ .

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ זהה לשל $g(x)$ ?

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.
קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף
מתאר מבין הפונקציות: $h(x)$ , $g(x)$ , $f(x)$ . נמק את בחירותיך.

**51)** לפניך שלוש פונקציות: $h(x)=\frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$ , $g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$ , $f(x)=x^2\sqrt{k-x^2}$ $(k>0)$ .

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך
באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$ .

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה-$x$ כלל.

iii. הפונקציות: $h(x)$ ו-$g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן
(כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

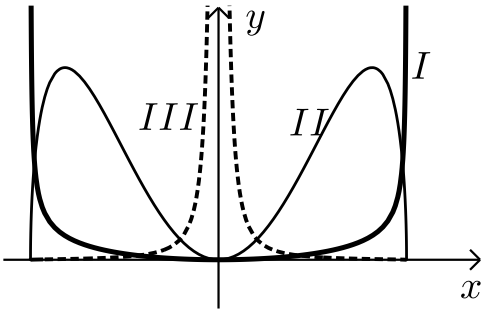
iv. לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A\left(0,\sqrt{12}\right)$ על ציר ה-$y$ . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך
של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-$x$ שאינה בראשית הוא: $d=6$ .

ב. מצא את $k$ .

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף
הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

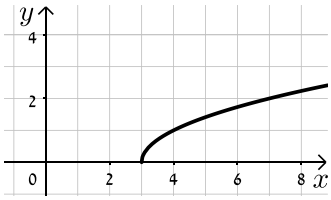
ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של
שלושת הפונקציות.
קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף
שייך לכל פונקציה.



## תשובות סופיות:

**37)** א. $x\geq 3$ ב. $\min(3,0)$ קצה ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה.

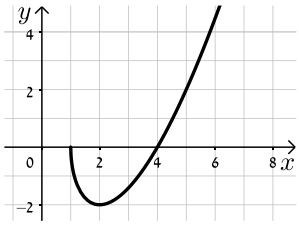
ד. $(3,0)$ ה. אין. ו. להלן סקיצה:




**38)** א. $x\geq 1$ ב. $\min(2,-2)$ , $\max(1,0)$ קצה

ג. עולה: $x>2$ , יורדת: $1<x<2$. ד. $(1,0),(4,0)$ ה. אין.

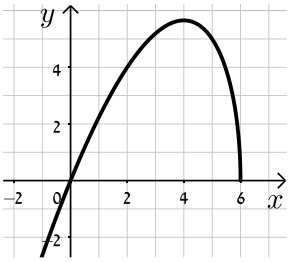
ו. להלן סקיצה:




**39)** א. $x\leq 6$ ב. $\min(6,0)$ , $\max\left(4,4\sqrt{2}\right)$ קצה

ג. עלייה: $x<4$ , ירידה: $4<x<6$ ד. $(6,0),(0,0)$.

ה. להלן סקיצה:




**40)** א. $x\geq 0$ ב. $\min(0,0)$ , $\max(1,1)$ קצה

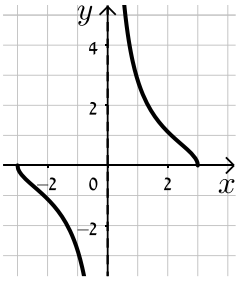
ג. עולה: $0<x<1$ , יורדת: $x>1$ ד. $(0,0)$ ה. $y=0$.

ו. להלן סקיצה:

**41)** א. $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה

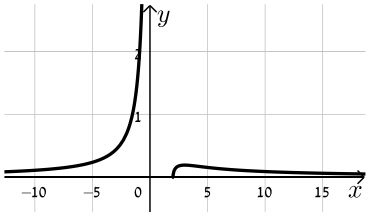
ג. עולה: אף $x$, יורדת: $-3\le x\le 3$ , $x\ne 0$ ד. $(-3,0),(3,0)$

ה. $x=0$. ו. להלן סקיצה:




**42)** א. $x<0$ , $x\ge 2$ ב. $\max\left(3,\frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ , $\min(2,0)$ ג. $(2,0)$.

ד. להלן סקיצה:



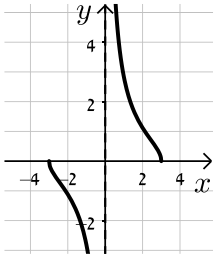

**43)** א. $(2,0)$ ב. לא ג. $y=2\sqrt{2}x-4\sqrt{2}$ ד. $S=4\sqrt{2}$.

**44)** א. $x\ne 1$ , $x\ge 0$ ב. $(9,6)$ ג. $y=6$.

**45)** א. $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה

ג. עולה: אף $x$, יורדת: $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ד. $(-3,0),(3,0)$

ה. $x=0$ ו. להלן סקיצה:




**46)** א. $a=1$ ב. $-3<x<3$ ג. $\left(-1.5,\sqrt{3}\right)$

ד. יורדת: $-3<x<-1.5$ , עולה: $-1.5<x<3$.

**47)** א. $k=0.48$ ב. כן, $(0.6,0.57)$ ג. $y=0.74x+0.1352$.

**48)** א. i. $-\sqrt{k}<x<\sqrt{k}$ ii. $x=\pm\sqrt{k}$ ב. $f'(x)=\frac{k^2}{\left(k-x^2\right)^{1.5}}>0$

ג. $y=\sqrt{k}x$ ד. $k=4$.

**49)** א. $g(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$ ב. i. לא נכון ii. נכון

iii. נכון iv. נכון ג. $f(x):\left(0,\frac{1}{2}\right)$ , $g(x):\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ד. אסף צודק.

**50)** א. i. לא נכון ii. נכון iii. נכון ב. $h(x)=\frac{x^2}{x-1}$

ג. לא, $h(x):x\neq 1$ ד. $\mathrm{I}=h(x)$ , $\mathrm{II}=f(x)$.

**51)** א. i. לא נכון ii. לא נכון iii. נכון iv. נכון

ב. $k=24$ ג. $\max\left(\pm 4,32\sqrt{2}\right)$ , $\min(0,0)$

ד. $\mathrm{I}=g(x)$ , $\mathrm{II}=f(x)$ , $\mathrm{III}=h(x)$.

# תחומי קעירות ונקודות פיתול:

## סיכום כללי:

**תחומי קעירות – הגדרה:**

- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל $x$ בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) < 0$.
- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל $x$ בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) > 0$.

**נקודת פיתול – הגדרות:**

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת: $f''(x) = 0$ כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

## שאלות:

**52)** מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

**53)** מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$.

**54)** מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$.

**55)** מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = x(x-2)^3$.

**56)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{a}{x^2+b}$ , $a,b$ פרמטרים.
הנקודה $(-1\ ,\ 1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה.
מצא את ערכי הפרמטרים $a,b$.

**57)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+2$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**58)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{x-\sqrt{x}}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**59)** חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

i. מציאת תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.
viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

ב. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ג. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ד. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ה. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

ו. $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

ז. $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

ח. $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

**הערה: בסעיפים ו ו-ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.**

## תשובות סופיות:

**52)** $(1,7),(2,16)$, קעירות כלפי מעלה: $x>2$ או $x<1$, קעירות כלפי מטה: $1<x<2$.

**53)** $(2,1)$, קעירות כלפי מעלה: $x>2$, קעירות כלפי מטה: $0\neq x<2$.

**54)** קיצון: $\min(2,4)$, פיתול: $\left(4,\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

**55)** קיצון: $\min\left(\frac{1}{2},-\frac{27}{16}\right)$, פיתול: $(2,0),(1,-1)$.

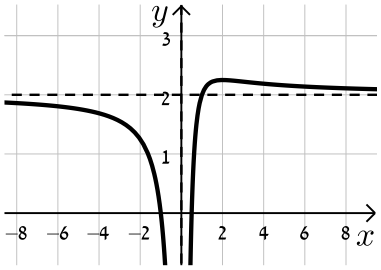
**56)** $a=4$, $b=3$.

**57)** א. $x\neq 0$ ב. $\max\left(2,2\frac{1}{4}\right)$ ג. עולה: $0<x<2$ יורדת: $x>2$, $x<0$

ד. $\left(\frac{1}{2},0\right),(-1,0)$ ה. $x=0$, $y=2$ ו. $\left(3,2\frac{2}{9}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $x>3$, קעירות כלפי מטה: $0\neq x<3$.

ח. להלן סקיצה:

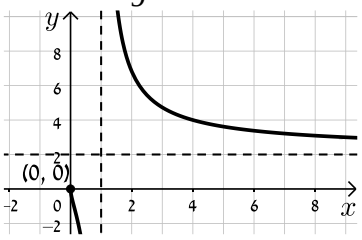



**58)** א. $1\neq x>0$ ב. אין. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.

ד. אין. ה. $x=1$, $y=2$ נקודת אי הגדרה: $(0,0)$. ו. $\left(\frac{1}{9},-1\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $x>1$ או $0<x<\frac{1}{9}$, קעירות כלפי מטה: $\frac{1}{9}<x<1$.

ח. להלן סקיצה:




**59)** א. i. $x\neq 0$ ii. $(1,0)$ iii. $x=0$, $y=0$ iv. $\max(2,0.25)$

v. עולה: $0<x<2$, יורדת: $x<0$, $x>2$ vi. $\left(3,\frac{2}{9}\right)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>3$, קעורה כלפי מטה: $0<x<3$, $x<0$.

ב. i. $x\neq -1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$, $y=2$ iv. $\min(0,0)$

v. עולה: $x<-1$ , $x>0$ , יורדת: $-1<x<0$ vi. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $-1<x<\frac{1}{2}$ , קעורה כלפי מטה: $x<-1$ , $x<\frac{1}{2}$.

ג. i. $x\neq\pm2$ ii. $(0,0)$ iii. $x=\pm2$

iv. $\max\left(-\sqrt{12},-5.2\right)$ , $\min\left(\sqrt{12},5.2\right)$.

v. עולה: $x>\sqrt{12}$ , $x<-\sqrt{12}$ , יורדת: $2<x<\sqrt{12}$ , $-2<x<2$ , $-\sqrt{12}<x<-2$

vi. $(0,0)$.

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>2$ , $-2<x<0$ , קעורה כלפי מטה: $0<x<2$ , $x<-2$.

ד. i. $x\neq-1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$ iv. $\max(-3,-6.75)$

v. עולה: $x>-1$ , $x<-3$ , יורדת: $-3<x<-1$ vi. $(0,0)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>0$ , קעורה כלפי מטה: $-1<x<0$ , $x<-1$.

ה. i. $x\neq1$ ii. $(-1,0),(0,-1)$ iii. $x=1$ , $y=1$ iv. אין.

v. יורדת בכל ת.ה. vi. $\left(-3,\frac{1}{8}\right),(-1,0)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $-3<x<-1$ , $x>1$ , קעורה כלפי מטה: $-1<x<1$ , $x<-3$.

ו. i. $x\neq2,5$ ii. $(0,-0.1),(-1,0),(1,0)$ iii. $x=2$ , $x=5$ , $y=1$

iv. $\max(2.78,-3.89)$ , $\min(0.359,-0.11)$

v. עולה: $2<x<2.78$ , $0.359<x<2$ , יורדת: $x>5$ , $2.78<x<5$ , $x<0.359$.

ז. i. $x\neq\pm2$ ii. $(3,0),(1,0),(0,-0.75)$ iii. $x=\pm2$ , $y=1$

iv. אין. v. יורדת בכל ת.ה.

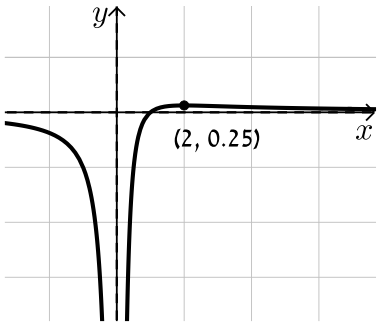
ח. i. $x\neq\pm1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$ iv. $\max(-2,-4)$ , $\min(0,0)$.

v. עולה: $x>0$ , $x<-2$ , $x\neq1$ , יורדת: $-1<x<0$ , $-2<x<-1$

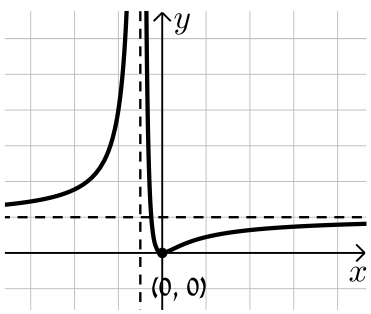
vi. אין. vii. קעורה כלפי מעלה: $x>-1$ , $x\neq1$ , קעורה כלפי מטה: $x<-1$.

**סקיצות:**

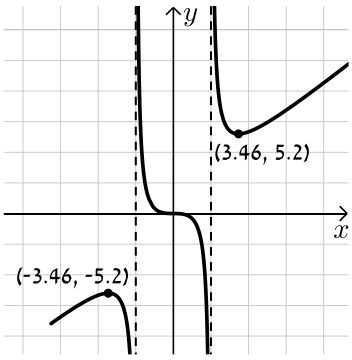
א.



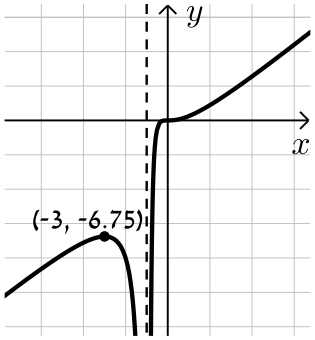

ב.



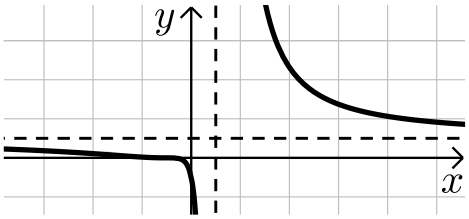

ג.



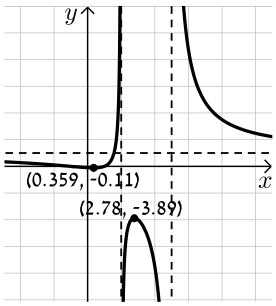

ד.



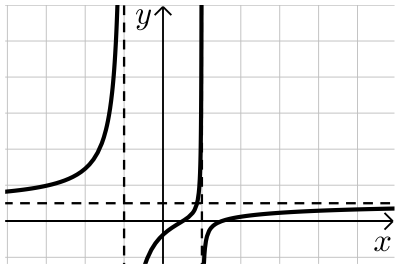

ה.



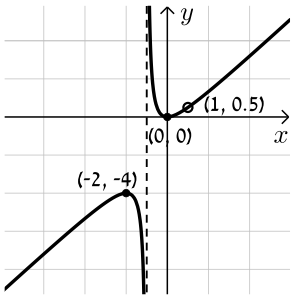

ו.




ז.




ח.



# חקירת פונקציה עם פרמטר:

## סיכום כללי:

סיווג נקודות קיצון באמצעות "$y$" :

אם הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת קיצון אז :

- אם $f''(x_1)>0$ הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת מינימום.
- אם $f''(x_1)<0$ הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת מקסימום.

## שאלות:

**1)** מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x)=x^3-12x$ .

**2)** מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x)=x^2-6x-16$ .

**3)** מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x)=x^3-3b^2x$ , $b>0$ פרמטר.
שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**4)** נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{2x}{a^2+x^2}$ $(a>0)$. חקור לפי הסעיפים הבאים :

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**5)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1-x^2}{(x-b)^2}$ , $(b>1)$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=4x\sqrt{b^2-x^2}$ , $(b>0)$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**7)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-m}{ax-4}$ , $a,m$ פרמטרים קבועים כאשר: $a>0$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$.

א. מצא את הערך של הפרמטר $m$.

ב. הצב את הערך של $m$ שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות $a$ את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות $a$ בסעיף הקודם.

ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- $y$ נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר $a$.

ה. נתון הישר: $y=k$. מצא עבור אילו ערכים של $k$ אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

## תשובות סופיות:

1) $\max(-2,16)$ , $\min(2,-16)$

2) $\min(3,-25)$

3) $\min(b,-2b^3)$ , $\max(-b,2b^3)$

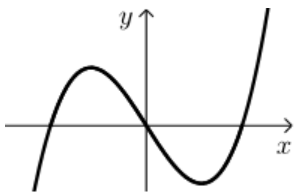
4) א. כל $x$ ב. $\min\left(-a,-\frac{1}{a}\right)$ , $\max\left(a,\frac{1}{a}\right)$.
ג. עולה: $-a<x<a$ יורדת: $x>a$ , $x<-a$.
ד. $(0,0)$ ה. אסימפטוטה אופקית: $y=0$

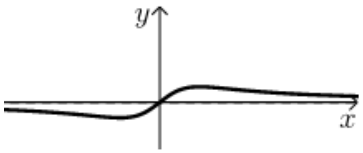
5) א. $x\neq b$ ב. $\max\left(\frac{1}{b},\frac{1}{b^2-1}\right)$ ג. עולה: $x>b$ , $x<\frac{1}{b}$ יורדת: $\frac{1}{b}<x<b$.
ד. $\left(0,\frac{1}{b^2}\right)$ , $(-1,0)$ , $(1,0)$ ה. $x=b$ , $y=-1$.

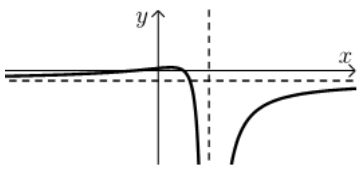
6) א. $-b\le x\le b$ ב. $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}},-2b^2\right)$ , $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}},2b^2\right)$ , $\min(-b,0)$ קצה,
$\max(b,0)$ קצה. ג. עולה: $-\frac{b}{\sqrt{2}}<x<\frac{b}{\sqrt{2}}$, יורדת: $-b<x<-\frac{b}{\sqrt{2}}$ , $\frac{b}{\sqrt{2}}<x<b$.
ד. $(0,0)$ , $(-b,0)$ , $(b,0)$.

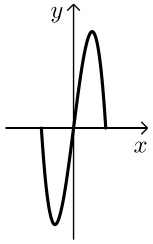
7) א. $m=0$ ב. i. $x\neq\frac{4}{a}$ ii. $\min\left(\frac{8}{a},\frac{16}{a^2}\right)$ , $\max(0,0)$
iii. $x=\frac{4}{a}$ ד. $a=2$ ה. $0<k<4$.

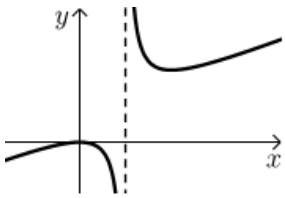
## סקיצות לשאלות:

3)



4)



5)



6)



7)


# פונקציות ללא תבנית מפורשת:

## סיכום כללי:

**הגדרת פונקציה:**

פונקציה $f$ היא התאמה בין ערך $x$ לערך $y$ ומסומנת באופן הבא: $f:x\to y$.
כך שלכל $x$ מתאים ערך אחד בלבד של $y$. סימון אחר: $y=f(x)$.
הנגזרת של פונקציה $f(x)$ מסומנת $f'(x)$.

**כללי הגזירה לפי כלל השרשרת:**

- סימון הנגזרת: $\left(f(x)\right)'=f'(x)$.
- גזירה של פונקציה בחזקה: $\left(f^2(x)\right)'=2f(x)f'(x)$.
- גזירה של הרכבת פונקציות: $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$.

## שאלות:

**1)** הפונקציה $f(x)$ מקיימת: $f(1)=3$ ו- $f'(1)=-2$.
חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $f(1)+4$.

ב. $f'(1)+4$.

ג. $\dfrac{f(1)+1}{f'(1)-1}$.

ד. $\sqrt{f(1)+f'(1)}$.

**2)** נתונה פונקציה $f$ המקיימת: $f(4)=0$ ו- $f'(4)=1$.
מגדירים: $g(x)=2x+f(2x)$.
חשב את $g(2)$ ואת $g'(2)$.

**3)** נתונה פונקציה המקיימת: $f(8)=-1$ ו-$f'(8)=1$.

א. נתון: $g(x)=x^2\sqrt{f(4x)+f'(x+6)}$. חשב את $g(2)$.

ב. נתון: $h(x)=\dfrac{f(x+2)+x+2}{f'(14-x)-14+x}$. חשב את $h(6)$.

**4)** נתונה פונקציה המקיימת: $f(9)=-4$, $f'(9)=3$.

מגדירים: $g(x)=f^2(3x)+f'(x^2)$. חשב את $g(3)$.

**5)** פונקציה $f$ מקיימת: $f(4)=2$, $f'(4)=1$.

מגדירים: $g(x)=f^2(x)+f(x)+x$.

חשב את $g(4)$ ואת $g'(4)$.

**6)** פונקציה $f$ מקיימת: $f(1)=-3$, $f'(1)=3$. מגדירים: $g(x)=\dfrac{x\cdot f(x)}{x+f(x)}$.

חשב את $g(1)$ ואת $g'(1)$.

**7)** פונקציה $f$ מקיימת: $f(-2)=6$, $f'(-2)=2$. מגדירים: $g(x)=\sqrt{f^2(x)+1}$.

חשב את $g(-2)$ ואת $g'(-2)$.

**8)** פונקציה $f$ מקיימת: $f\left(\frac{1}{2}\right)=3$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}$. מגדירים: $g(x)=3x\cdot f(2x)$.

חשב את $g\left(\frac{1}{4}\right)$ ואת $g'\left(\frac{1}{4}\right)$.

**9)** פונקציה $f$ מקיימת: $f(6)=\frac{2}{3}$, $f'(6)=-\frac{3}{2}$. מגדירים: $g(x)=\dfrac{x+3+f(x+3)}{f(2x)+3}$.

חשב את $g(3)$ ואת $g'(3)$.

**10)** נתונה פונקציה המקיימת: $f(8)=-3$. מגדירים: $g(x)=\frac{f(4x)+1}{f(x+6)+2}$.

א. חשב את $g(2)$.

ב. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2)=1$.

ג. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2)=\left(f'(8)\right)^2$ וכי $f'(8)<0$.

**11)** נתונה פונקציה המקיימת: $f(3)=-2$.

מגדירים: $g(x)=\frac{x^2\cdot f(x-2)}{f(2x-7)}$ וידוע כי $g'(5)=-15$.

חשב את $g(5)$ ואת $f'(3)$.

**12)** נתונה פונקציה שמקיימת: $f(4)=\frac{1}{2}$.

מגדירים: $g(x)=x^2\cdot f\left(x^2\right)+f'^2\left(x^2\right)$.

א. הבע את $g'(x)$ באמצעות $f$.

ב. חשב את $g(-2)$ ואת $g(2)$ אם ידוע כי $f'(4)=1$.

ג. חשב את $f'(4)$ אם ידוע כי $g'(2)=11$ ו- $f''(4)=\frac{1}{4}$.

## תשובות סופיות:

1) א. 7 ב. 2 ג. $-\frac{4}{3}$ ד. 1.

2) $g(2)=4\,,\,g'(2)=4$.

3) א. $g(2)=0$ ב. $h(6)=-1$.

4) $g(3)=19$.

5) $g(4)=10\,,\,g'(4)=6$.

6) $g(1)=1.5\,,\,g'(1)=3$.

7) $g(-2)=\sqrt{37}\,,\,g'(2)=\frac{12}{\sqrt{37}}$.

8) $g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}\,,\,g'\left(\frac{1}{4}\right)=11$.

9) $g(3)=1\frac{9}{11}\,,\;g'(3)=\frac{327}{242}=1.351$.

10) א. $g(2)=2$ ב. $f'(8)=-\frac{1}{2}$ ג. $f'(8)=-2$.

11) $g(5)=25\,,\,f'(3)=-2$.

12) א. $g'(x)=2x\,f\left(x^2\right)+2x^3 f'\left(x^2\right)+4x\,f'\left(x^2\right)f''\left(x^2\right)$

ב. $g(2)=3\,,\,g'(-2)=3$ ג. $f'(4)=\frac{1}{2}$.

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 33 - חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון

### תוכן העניינים

1. בעיות קיצון עם מספרים ..... (ללא ספר)
2. בעיות קיצון בהנדסת המישור ..... (ללא ספר)
3. בעיות קיצון בהנדסת המרחב ..... (ללא ספר)
4. בעיות קיצון עם מהירויות ..... (ללא ספר)
5. בעיות קיצון כלכליות ..... (ללא ספר)
6. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 34 - חשבון דיפרנציאלי של פונקציות מעריכיות

### תוכן העניינים

1. גזירה של פונקציות מעריכיות ..... (ללא ספר)
2. שאלות עם משיקים ..... (ללא ספר)
3. חקירת פונקציות מעריכיות ..... (ללא ספר)
4. שאלות שונות מבחינות ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 35 - חשבון דיפרנציאלי של פונקציות לוגריתמיות

### תוכן העניינים

1. גזירה של פונקציות לוגריתמיות ..... (ללא ספר)
2. שאלות עם משיקים ..... (ללא ספר)
3. חקירת פונקציות לוגריתמיות ..... (ללא ספר)
4. שאלות שונות מבחינות ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 36 - טריגונומטריה ב- משוואות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

1. משוואות טריגונומטריות כלליות ..... (ללא ספר)
2. משוואות הנפתרות על ידי טכניקה אלגברית ..... (ללא ספר)
3. משוואות הנפתרות על ידי שימוש בזהויות ..... (ללא ספר)
4. משוואות עם תחום נתון ..... (ללא ספר)
5. משוואות עם זוויות ברדיאנים ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 37 - חשבון דיפרנציאלי של פונקציות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות ..... (ללא ספר)
2. גזירה של פונקציות טריגונומטריות ..... (ללא ספר)
3. שאלות עם משיקים ..... (ללא ספר)
4. מציאת תחום הגדרה של פונקציות טריגונומטריות ..... (ללא ספר)
5. מציאת נקודות קיצון ..... (ללא ספר)
6. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים ..... (ללא ספר)
7. חקירת פונקציות טריגונומטריות ..... (ללא ספר)
8. הזזות ומתיחות של פונקציות טריגונומטריות ..... (ללא ספר)
9. שאלות שונות מבחינות ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 38 - חשבון אינטגרלי

### תוכן העניינים

1. חישובי אינטגרלים ..... (ללא ספר)
2. מציאת פונקציה קדומה ..... (ללא ספר)
3. האינטגרל המסוים ..... (ללא ספר)
4. האינטגרל המסוים וחישובי שטחים ..... (ללא ספר)
5. שאלות עם פרמטר ..... (ללא ספר)
6. שאלות בחישובי שטחים – פונקציה רציונאלית ..... (ללא ספר)
7. שאלות בחישובי שטחים – פונקצית שורש ..... (ללא ספר)
8. חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 39 - חשבון אינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, מעריכיות ולוגריתמיות.

### תוכן העניינים


1. פונקציה טריגונומטרית ..... (ללא ספר)

2. פונקציה מעריכית ..... (ללא ספר)

3. פונקציה לוגריתמית ..... (ללא ספר)

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 40 - הסתברות קלאסית

### תוכן העניינים

1. שאלות יסודיות ..... 299
2. שאלות עם שני ניסויים ..... 301
3. שאלות עם הסתברות מותנית ..... 303
4. שאלות עם נעלמים ..... 305
5. שאלות הנפתרות על ידי טבלה דו-מימדית ..... 306
6. התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות יסודיות ..... 308
7. התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם הסתברות מותנית ..... 309
8. התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם נעלמים ..... 310

# שאלות יסודיות:

## סיכום כללי:

**הגדרות כלליות:**

1. ההסתברות להתרחשות מאורע A: $P(A)=\frac{\text{מספר האפשרויות הרצוי}}{\text{מספר האפשרויות הכולל}}$
2. המאורע המשלים למאורע A: $P(\bar{A})=1-P(A)$.
3. חיתוך ואיחוד מאורעות A ו-B: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
4. מאורעות זרים הם מאורעות שלא יכולים להתקיים בו זמנית.
   עבור מאורעות זרים A ו-B מתקיים: $P(A\cap B)=0$ , $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
5. מאורעות נקראים בלתי תלויים אם קיום האחד מהם לא משפיע על ההסתברות לקיומו של השני.
   עבור מאורעות בלתי תלויים A ו-B מתקיים: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.
6. אם מתקיים: $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$ המאורעות תלויים.
7. הסתברות מותנית של מאורע A בהינתן מאורע B מוגדרת: $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
8. צורה כללית של טבלת הסתברויות עבור מאורעות A ו-B:

| | $\bar{A}$ | A | |
|---|---|---|---|
| $P(B)$ | $P(\bar{A}\cap B)$ | $P(A\cap B)$ | B |
| $P(\bar{B})$ | $P(\bar{A}\cap\bar{B})$ | $P(A\cap\bar{B})$ | $\bar{B}$ |
| 1 | $P(\bar{A})$ | $P(A)$ | |

קשרים מידיים מהטבלה:

- $P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(B)$
- $P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{B})$
- $P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})=P(A)$
- $P(\bar{A}\cap B)+P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})$

9. התפלגות בינומית: חישוב $k$ הצלחות מתוך $n$ ניסיונות בלתי תלויים כאשר ההסתברות להצלחה בניסיון בודד היא $p$ נתונה ע"י: $P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

## שאלות:

**1)** בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים לבנים.
מה ההסתברות להוצאת כדור כחול בהוצאה אקראית של כדור מהכד?

**2)** בכד 2 כדורים כחולים, 3 כדורים אדומים ו-7 כדורים לבנים.
מה ההסתברות שבהוצאה אקראית של כדור מהכד לא ייצא כדור אדום?

**3)** מהי ההסתברות שבסיבוב סביבון לא יתקבל "נס"?

**4)** עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(A)=0.6$ , $P(\overline{B})=0.3$ , $P(A\cap B)=0.4$.
מצא את $P(A\cup B)$.

**5)** עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(\overline{A})=0.2$ , $P(\overline{B})=0.5$ , $P(A\cup B)=0.95$.
מצא את $P(A\cap B)$.

**6)** עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(A)=0.6$ , $P(B)=0.25$ , $P(A\cup B)=0.65$.
קבע האם המאורעות זרים והאם הם תלויים.

**7)** נתון כי שני מאורעות, A ו-B בלתי תלויים.
בנוסף נתון: $P(A)=0.75$ , $P(B)=0.4$. מצא את $P(A\cup B)$.

## תשובות סופיות:

**1)** $\frac{3}{10}$ **2)** $\frac{3}{4}$ **3)** $\frac{3}{4}$

**4)** $P(A\cup B)=0.9$ **5)** $P(A\cap B)=0.35$ **6)** לא זרים ותלויים

**7)** $P(A\cup B)=0.85$

## שאלות עם שני ניסויים:

### שאלות:

**8)** בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור (ללא החזרה של הכדור הראשון).

א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?

**9)** בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?

**10)** בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה).
מה ההסתברות שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים?

**11)** נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.
מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?

**12)** ליואב יש בכיסו הימני 3 גולות כחולות ו-5 שחורות ובכיסו השמאלי 4 גולות כחולות ו-4 שחורות. יואב מוציא גולה מכיסו הימני.
אם היא כחולה הוא מחזיר אותה לכיס הימני ואם היא שחורה הוא מעביר אותה לכיס השמאלי. אחר כך הוא מוציא גולה מכיסו השמאלי.
מה ההסתברות ששתי הגולות שהוציא באותו צבע?

## תשובות סופיות:

8) א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{7}{15}$

9) א. $\frac{9}{100}$ ב. $\frac{19}{50}$ ג. $\frac{31}{50}$

10) $\frac{17}{42}$

11) $\frac{8}{15}$

12) $\frac{77}{144}$

## שאלות עם הסתברות מותנית:

### שאלות:

**13)** בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

**14)** בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

**15)** בחדר 4 גברים ו-5 נשים.
מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה).
ידוע שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים.
מה ההסתברות שכולם גברים?

**16)** נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.

א. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?

ב. ידוע שללואיזה לא יצא אף כדור לבן, מה ההסתברות שבהטלת המטבע יצא "עץ"?

**17)** במשחק מזל הסיכוי להרוויח 10 ₪ הוא 0.3 והסיכוי להרוויח 20 ₪ הוא 0.2.
ישנו סיכוי של 0.5 לא להרוויח כלל. אדם שיחק במשחק פעמיים וידוע שהרוויח יותר מ-20 ₪. מה הסיכוי שהרוויח 40 ₪?

**18)** בכד מספר מסוים של כדורים. 3 כחולים והשאר אדומים.

הסיכוי להוציא שני כדורים אדומים מהכד (בלי החזרה) הוא $\frac{5}{14}$.

כמה כדורים בכד?

## תשובות סופיות:

**13)** א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{1}{8}$

**14)** א. $\frac{9}{100}$ ב. $\frac{19}{50}$ ג. $\frac{9}{38}$

**15)** $\frac{2}{17}$

**16)** א. $\frac{8}{15}$ ב. $\frac{15}{16}$

**17)** $\frac{1}{4}$

**18)** 8 כדורים.

# שאלות עם נעלמים:

## שאלות:

**19)** ההסתברות של צלף לפגוע במטרה בירייה הראשונה היא $p$ והיא גדולה מההסתברות שלו להחטיא. אם הוא פוגע, עולה ההסתברות שלו לפגוע בירייה הבאה ב-0.1 ואם הוא מחטיא היא יורדת ב-0.1. הצלף ירה למטרה פעמיים. ההסתברות שפגע במטרה בדיוק בירייה אחת היא 0.38.

א. מצא את $p$.

ב. מה ההסתברות שהצלף פגע פעמיים במטרה אם ידוע שהוא פגע בה לפחות פעם אחת?

## תשובות סופיות:

**19)** א. $p=0.6$ ב. $\frac{21}{40}$

## שאלות הנפתרות על ידי טבלה דו-מימדית:

### שאלות:

**20)** 70% מאוהדי מכבי ת״א הם גברים והשאר נשים. 40% מהאוהדים מעשנים.
נתון כי 45% מהאוהדים הם גברים שאינם מעשנים.

א. מהו אחוז הנשים המעשנות מבין אוהדי מכבי?

ב. בוחרים באקראי אוהד מכבי. מה ההסתברות שהוא גבר או שהוא מעשן?

ג. בוחרים באקראי אישה שאוהדת מכבי. מה ההסתברות שהיא מעשנת?

ד. האם מין האוהד והעובדה שהוא מעשן הם מאורעות תלויים?

**21)** 65% מהפחיות המיוצרות במפעל משקאות הן רגילות והשאר דיאט.
80% מהפחיות המיוצרות תקינות והשאר פגומות.
נתון כי 7% מהפחיות הן פחיות דיאט פגומות.

א. בוחרים באקראי פחית. מה ההסתברות שהיא פחית רגילה ותקינה?

ב. בוחרים באקראי פחית דיאט. מה ההסתברות שהיא פגומה?

ג. בוחרים באקראי פחית פגומה. מה ההסתברות שהיא דיאט?

ד. האם סוג הפחית ותקינותה הם מאורעות תלויים?

**22)** 80% מהתלמידים בכיתה עברו את המבחן בתנ״ך ו-70% עברו את המבחן בהיסטוריה.
75% מבין התלמידים שעברו את המבחן בתנ״ך עברו גם את המבחן בהיסטוריה.

א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא נכשל בשתי הבחינות?

ב. תלמיד נכשל במבחן בהיסטוריה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן בתנ״ך?

ג. ידוע שתלמיד עבר בדיוק מבחן אחד. מה ההסתברות שזה המבחן בתנ״ך?

**23)** בעיר גדולה ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה.
מבין בעלי רישיון הנהיגה 30% הם גברים.
60% מהגברים הם בעלי רישיון נהיגה. בחרו באקראי שתי נשים מהעיר.
מה ההסתברות שלשתיהן אין רישיון נהיגה?

**24)** 10% מהאנשים באוכלוסייה עיוורי צבעים. קיימת בדיקה הבוחנת אם אדם הוא עיוור צבעים. אם עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 80% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. אם אדם שאינו עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 5% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. מהם אחוזי האמינות של הבדיקה (אחוז המקרים בהם הבדיקה מאבחנת נכונה את הנבדק)?

**25)** בסניף "תנו לחיות לחיות" בירושלים יש כלבים וחתולים בלבד, בעלי פרווה כהה או פרווה בהירה. 55% מהחיות בסניף הם כלבים. אחוז החתולים בעלי הפרווה הכהה גדול פי 3 מאחוז הכלבים בעלי הפרווה הבהירה. מבין בעלי הפרווה הכהה 60% הם כלבים. בוחרים באקראי חתול מהסניף.
מה ההסתברות שהוא בהיר פרווה?

**26)** בית ספר תיכון מציע לתלמידיו 3 מגמות ריאליות לבחירה: פיזיקה, כימיה ומחשבים. 40% מתלמידי מגמות אלה הם בנים. הבנים מהווים $\frac{2}{5}$ מתלמידי הפיזיקה, $\frac{5}{12}$ מתלמידי הכימיה ו-$\frac{1}{3}$ מתלמידי המחשבים. $\frac{1}{4}$ מהבנים הם תלמידי פיזיקה.

א. האם יש תלות בין העובדה שתלמיד לומד פיזיקה למין התלמיד?

ב. מהו אחוז לומדי המחשבים מקרב הבנים?

## תשובות סופיות:

**20)** א. 15% ב. 0.85 ג. 0.5 ד. כן.

**21)** א. 0.52 ב. 0.2 ג. 0.35 ד. בלתי תלויים.

**22)** א. 0.1 ב. $\frac{2}{3}$ ג. $\frac{2}{3}$

**23)** $\frac{1}{225}$

**24)** 93.5%

**25)** $\frac{1}{3}$

**26)** א. בלתי תלויים. ב. 12.5%

# התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות יסודיות:

## שאלות:

**27)** אדם מסובב חמש פעמים סביבון. מה ההסתברות שיקבל פעמיים "נס"?

**28)** מה ההסתברות לקבלת 5 פעמים "נס" בשמונה סיבובי סביבון?

**29)** הסיכוי לעבור את מבחן התיאוריה הוא 0.7. עשרה אנשים ניגשים למבחן התיאוריה. מהי ההסתברות שבדיוק שישה מהם יעברו?

**30)** בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות.
מה ההסתברות שמתוך חמשת הכדורים הוציא:

א. בדיוק ארבע יהיו כחולים?

ב. חמישה יהיו כחולים?

ג. לפחות ארבעה יהיו כחולים?

ד. הרוב יהיו כחולים?

ה. לפחות אחד יהיה כחול?

ו. הראשון והאחרון בלבד יהיו כחולים?

## תשובות סופיות:

**27)** 0.264

**28)** 0.023

**29)** 0.2001

**30)** א. 0.259 ב. 0.078 ג. 0.337 ד. 0.683 ה. 0.98976 ו. 0.023

# התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם הסתברות מותנית:

## שאלות:

**31)** בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות.
ידוע שרוב הכדורים שהוציא כחולים. מה ההסתברות שכולם כחולים?

**32)** יערה מצליחה לקלוע לסל בשלושה מכל ארבעה ניסיונות.
כדי להתקבל לנבחרת הכדורסל של בית הספר עליה להצליח לקלוע ברוב הפעמים מתוך 6 ניסיונות קליעה לסל. ידוע שיערה התקבלה לנבחרת הכדורסל.
מה ההסתברות שהצליחה לקלוע את כל הקליעות?

**33)** בוחרים שלושה גברים באקראי מעיר גדולה.
ההסתברות שכולם מעשנים היא 0.027.
מה ההסתברות שרובם מעשנים?

**34)** בוחרים שלוש נשים מעיר גדולה. ההסתברות ששתיים מהן מעשנות קטנה פי 4 מההסתברות ששתיים מהן לא מעשנות.
מה ההסתברות שכולן מעשנות?

**35)** בכד 10 כדורים, חלקם לבנים והשאר שחורים. נמרוד מוציא 9 פעמים כדור מהכד (עם החזרה). הסיכוי שיצאו פי 2 כדורים שחורים מלבנים גדול פי $3\frac{3}{8}$ מהסיכוי שיצאו פי 2 כדורים לבנים משחורים. מצא כמה כדורים מכל צבע בכד.

## תשובות סופיות:

**31)** 0.114 **32)** 0.214 **33)** 0.216

**34)** 0.008 **35)** 4 לבנים, 6 שחורים.

# התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם נעלמים:

## שאלות:

**36)** בחדר $x$ גברים ו-$3x$ נשים. מוציאים באקראי שני אנשים מהחדר.
ההסתברות שהם יהיו מאותו מין היא 0.6.

א. מצא את גודלו של $x$.

ב. חוזרים על התהליך 4 פעמים.
מה הסיכוי שבשלוש מתוך 4 הפעמים ייצאו מהחדר שתי נשים?

**37)** במבחן רב ברירה עם 5 שאלות שוות ניקוד, לכל שאלה יש $n$ תשובות מהן רק אחת נכונה. ישנו סיכוי של 50% ששי יידע את התשובה הנכונה לשאלה במבחן.
אם שי לא יודע את התשובה לשאלה הוא מנחש.

ההסתברות ששי יקבל במבחן 60 גדולה פי $1\frac{1}{3}$ מההסתברות שיקבל 80.

מצא את ערכו של $n$.

**38)** כדי להתקבל לקורס טיס יש לעבור גיבוש וראיון. כל המועמדים ניגשים גם לראיון וגם לגיבוש. 40% מהניגשים לגיבוש עוברים אותו ו-35% מהניגשים לראיון עוברים אותו. $\frac{5}{17}$ מאלה שלא התקבלו לקורס טיס לא התקבלו בגלל הריאיון בלבד. שלושה חברים ניסו להתקבל לקורס טיס. ידוע שרובם התקבלו.
מה ההסתברות שכולם התקבלו?

## תשובות סופיות:

**36)** א. $x=4$ ב. 0.299

**37)** $n=5$

**38)** $\frac{1}{18}$

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 41 - אינדוקציה מתמטית - נושא בחירה במבחן הסופי

### תוכן העניינים

1. שאלות העוסקות בתכונות התחלקות ..... 311
2. סדרות ..... 314
3. עצרת ..... 316
4. שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים ..... 317
5. שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים ..... 318
6. שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה ..... 319
7. שאלות כוללות ומסכמות ..... 321
8. מושג הסכימה וכתיבה מקוצרת של אינדוקציות ..... 323

# שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

## סיכום כללי:

**מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:**

**בדיקה:**

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור $n=1$ (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור $n=2,3$).

**הנחת האינדוקציה:**

נניח כי עבור $n=k$ ($k$ טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

**הוכחת האינדוקציה:**

נוכיח כי עבור $n=k+1$ טענת האינדוקציה מתקיימת.

**סיכום:**

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל $n$ טבעי.

## שאלות:

**1)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8^n-3^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**2)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $11^n-4^n$ מתחלק ב-7 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**3)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8\cdot 7^n+4^{n+2}$ מתחלק ב-24 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**4)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5\cdot 3^{2n}-5^{n+1}$ מתחלק ב-20 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**5)** $a_n$ הוא האיבר במקום ה-$n$ בסדרה החשבונית: $1,3,5,7,\ldots$ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $2^{a_n}+4$ מתחלק ב-12 ללא שארית לכל $n$ טבעי הגדול מ-1.

**6)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^2+n$ מתחלק ב-2 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**7)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^3+5n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**8)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $3^n-2n-1$ מתחלק ב-4 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**9)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9\left(9^n-1\right)-40n$ מתחלק ב-32 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**10)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n+5^n-2^n\left(2^n+1\right)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**11)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n+2^{2n}$ מתחלק ב-11 ללא שארית לכל $n$ טבעי אי זוגי.

**12)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $a^n-b^n$ מתחלק ב-$(a+b)$ ללא שארית לכל $n$ טבעי זוגי.

**13)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^{n+2}+1$ מותיר שארית 2 בחלוקתו ב- 3 לכל $n$ טבעי.

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

# סדרות:

## סיכום כללי:

**תזכורת:**

- סדרה היא אוסף מספרים: $a_1, a_2, ...., a_n$, כאשר $n$ הוא מיקום האיבר בסדרה ו- $a_n$ הוא ערך האיבר העומד במקום ה- $n$-י בסדרה.
  - סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.
  - סכום $n$ האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- $S_n$ והוא מקיים: $S_n = a_1 + ... + a_n$.

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 + d(n-1)$ כאשר $d$ הפרש הסדרה.
  - סכום $n$ האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$.

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 q^{n-1}$ כאשר $q$ היא מנת הסדרה.
  - סכום $n$ האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$.

## שאלות:

**14)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $1+2+3+4+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$.

**15)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $4+7+10+13+...+(3n+1)=\frac{n}{2}(3n+5)$.

**16)** נתונה סדרה שבה: $a_n=n(n+2)$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $S_n=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$.

**17)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:
$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

**18)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:
$$\frac{6}{1\cdot3\cdot5}+\frac{6}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

**19)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:
$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+...+n\cdot3^{n-1}=\frac{1}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right].$$

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

# עצרת:

## סיכום כללי:

**תזכורת – מושג העצרת:**

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$.

מגדירים: $0!=1$ ותמיד מתקיימים השוויונות: $n!=n\cdot(n-1)!$ , $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$.

## שאלות:

**20)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

**21)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{4}+\frac{3\cdot 4!}{8}+...+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$

**22)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$p!+\frac{(p+1)!}{1!}+\frac{(p+2)!}{2!}+...+\frac{(p+n-1)!}{(n-1)!}=\frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

**23)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)...\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{n!}$$

**24)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1\cdot 4}-\frac{11}{4\cdot 7}+\frac{17}{7\cdot 10}-...+\frac{(-1)^{n-1}(6n-1)}{(3n-2)(3n+1)}=1+\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

### שאלות:

**25)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+...+2n=n(2n+1)$$

**26)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

**27)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+...+3n\cdot 2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

### שאלות:

**28)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=2n(2n+1)$$

**29)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

**30)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+3}\right)...\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

**31)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$$

**32)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

### שאלות:

**33)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{n}{n+1}$$

**34)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 2-\frac{1}{n}$$

**35)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$$

**36)** נתונה סדרה שבה: $a_n=n^n$. נגדיר: $T_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $T_n\le n^{\frac{n}{2}(n+1)}$.

**37)** נתון אי-השוויון: $2^n>n^2$. מצא את ה-$n$ המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי החל מה-$n$ שמצאת.

**38)** נתון אי-השוויון: $4^n>5n^2+1$. מצא את ה-$n$ המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי החל מה-$n$ שמצאת.

**39)** נתון אי-השוויון: $n^3-n<5^{n-1}$. מצא את ה-$n$ המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי החל מה-$n$ שמצאת.

**40)** נתון אי-השוויון: $3^n+4^n+5^n<6^n$. מצא את ה-$n$ המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי החל מה-$n$ שמצאת.

**41)** נתון אי-השוויון: $n^n \geq n!$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

**42)** נתון אי-השוויון: $a^n + b^n < (a+b)^n$ , $(a,b>0)$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי הגדול מ-1.

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות כוללות ומסכמות:

### שאלות:

**43)** נתון השוויון: $4+7+10+13+...=\frac{n}{2}(3n+5)$.

א. מצא את האיבר במקום ה-$n$.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

ג. חשב את הסכום: $37+40+43+...+85$.

**44)** נתון השוויון: $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+...=2-\frac{2n+2}{3^n}$. מצא את האיבר במקום ה-$n$.

**45)** נתון השוויון: $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots=\frac{n}{4n+1}$.

א. מצא את האיבר במקום ה-$n$.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

ג. חשב את הסכום: $\frac{1}{25\cdot29}+\frac{1}{29\cdot33}+\frac{1}{33\cdot37}+\cdots+\frac{1}{89\cdot93}$.

**46)** נתון השוויון: $(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום: $26^2+27^2+28^2+...+48^2$.

**47)** נתון השוויון: $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

ב. הבע באמצעות $n$ את הסכום: $4^2+6^2+8^2+\cdots+(4n)^2$.

**48)** נתונים השוויונים הבאים:

א. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7}{3}(n^2+3n-1)$.

ב. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=n^2+11n-5$.

ג. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7n}{2}(n+1)$.

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל $n$ טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

**49)** נתון השוויון: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=an(2n+b)$.

א. נתון כי השוויון נכון עבור $n=1$ ו- $n=2$. מצא את ערכי $a$ ו- $b$.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

**50)** נתון אי-השוויון: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי הגדול מ-2.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{18}>\frac{1}{2}$.

**51)** נתון אי-השוויון: $n^2<2^n$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי הגדול מ-4.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $5^2\cdot 6^2\cdot 7^2\cdot 8^2\cdot\ldots\cdot 20^2<2^{200}$.

**52)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום $9+27+81+\cdots+3^{3n+1}$ מתחלק ב-117 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**53)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^3+5n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

ב. נתון כי $a+b$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
הוכח כי $a^3+b^3$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

**54)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח את הטענה: אם ל-$n$ טבעי מסוים $3^n+5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם $3^{n+2}+5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.

ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי $3^n+5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל $n$ טבעי אי-זוגי?

ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $3^n+5^n$ מתחלק ב-8 ללא שארית לכל $n$ טבעי אי-זוגי.

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

# מושג הסכימה וכתיבה מקוצרת של אינדוקציות:

## סיכום כללי:

סימון הסכימה (קרי: סיגמה) מוגדר באופן הבא: $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

מקור הסימון נובע מהמילה Sum ומשמעו הוא סכימה של איברים המתחילים בערך המצוין בתחתית הסימון $\left(\sum_{\boxed{k=1}}^{n}\right)$ עד לערך המצוין בחלקו העליון $\left(\sum_{k=1}^{\boxed{n}}\right)$.

### דוגמאות:

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n$.
- $\sum_{k=3}^{12} k^2 = 3^2+4^2+...+12^2$.
- $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{5}+\frac{1}{9}+....+\frac{1}{4n+1}$.

## שאלות:

**1)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

**2)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

**3)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

**4)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n-1)$.

**5)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4^{k-1}}=4-\frac{1}{4^{n-1}}$.

**6)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{3n}k=1\frac{1}{2}n\left(3n+1\right)$.

**7)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{3n}\left(4k-1\right)=3n\left(6n+1\right)$.

**8)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}\left(n+k\right)=\frac{n}{2}\left(3n+1\right)$.

**9)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}3^{n+k}=\frac{3^{n+1}\left(3^{n}-1\right)}{2}$.

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 42 - סימן הסכימה (סיגמה) - נושא בחירה במבחן הסופי

תוכן העניינים

1. כללי ..... 325

# סימן הסכימה (סיגמה):

## שאלות:

**1)** כתוב בפירוט את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$ ב. $\sum_{k=1}^{4} 2k$ ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$

ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$ ה. $\sum_{t=1}^{8} tx^t$ ו. $\sum_{k=4}^{10} na_k$

ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$ ח. $\sum_{k=-1}^{3} \left(k^2+1\right)$ ט. $\sum_{l=1}^{3} \left(l^2 - x_l - 4\right)$

**2)** כתוב את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$

ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$

ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

ד. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8$

ה. $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+...+44\cdot 45$

ו. $3\cdot 2+6\cdot 3+9\cdot 4+12\cdot 5+15\cdot 6+18\cdot 7+21\cdot 8$

ז. $5^2+7^2+...+27^2$

ח. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{10\cdot 11}$

ט. $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\frac{18}{243}$

י. $4+\frac{8}{5}+\frac{12}{25}+\frac{16}{125}+\frac{20}{625}$

**3)** חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$ ב. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k+4k^2\right)$ ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$

ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3-k}{k+1}$ ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$ ו. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k^2+1\right)(k-2)$

* תוכל להיעזר בנוסחאות הבאות: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ , $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

**4)** חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{20}\frac{5\cdot 4^k+8^k}{2^k}$ ב. $\sum_{k=1}^{11}\frac{2\cdot 4^{k+2}+10^k}{0.4^k}$ ג. $\sum_{k=10}^{20}2^{2k+10}$

* תוכל להיעזר בנוסחה הבאה: $\sum_{k=1}^{n}a^k=\frac{a\left(a^n-1\right)}{a-1}\quad(a\neq 1)$.

**5)** חשב את הסכומים הבאים:

א. $1^2+2^2+3^2+...+20^2$ ב. $4^2+5^2+6^2+...+24^2$

ג. $2^2+4^2+6^2+...+22^2$ ד. $1^2+3^2+5^2+...+17^2$

**6)** הוכח כי:

א. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k+4}}{k+2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{2k+6}}{k+3}$

ב. $\sum_{k=4}^{n-3}\frac{4k+17+2^{2k}}{k+1}=\sum_{k=8}^{n+1}\frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$

**7)** חשב את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

א. $\sum_{4}^{11}k^2$ ב. $\sum_{10}^{20}4^{2k}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $4^0+4^1+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+4^8+4^9+4^{10}$

ב. $2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4$

ג. $4a_4+4a_5+4a_6+4a_7+4a_8+4a_9+4a_{10}$

ד. $4\cdot7^2a_7+4\cdot8^2a_8+4\cdot9^2a_9+4\cdot10^2a_{10}+4\cdot11^2a_{11}+4\cdot7^2a_7$

ה. $1x^1+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+7x^7+8x^8$

ו. $na_5+na_6+na_7+na_8+na_9+na_{10}+na_{11}$

ז. $4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n$

ח. $\left((-1)^2+1\right)+\left(0^2+1\right)+\left(1^2+1\right)+\left(2^2+1\right)+\left(3^2+1\right)$

ט. $\left(1^2-x_2-4\right)+\left(2^2-x_4-4\right)+\left(3^2-x_6-4\right)$

**2)** א. $\sum_{k=0}^{7}2^k$ ב. $\sum_{k=1}^{10}2k$ ג. $\sum_{k=0}^{9}(2k+1)$ ד. $\sum_{k=1}^{7}k(k+1)$

ה. $\sum_{k=1}^{22}(2k-1)2k$ ו. $\sum_{k=1}^{7}3k(k+1)$ ז. $\sum_{n=3}^{14}(2n-1)^2$

ח. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$ ט. $\sum_{k=1}^{5}\frac{4k-2}{3^k}$ י. $\sum_{k=1}^{4}\frac{4k}{5^{k-1}}$

**3)** א. 220 ב. 1650 ג. 255 ד. 9160 ה. 28 ו. 4545

**4)** א. $5\cdot\left(2^{21}-2\right)+\frac{4}{3}\left(4^{20}-1\right)$ ב. $32\cdot\frac{10\left(10^{11}-1\right)}{10-1}+\frac{25\left(25^{11}-1\right)}{25-1}$

ג. $2^{10}\left[\frac{4\left(4^{20}-1\right)}{4-1}-\frac{4\left(4^9-1\right)}{4-1}\right]$

**5)** א. 2870 ב. 2856 ג. 2024 ד. 969

**6)** הוכחה.

**7)** א. $9\cdot8+6\cdot\frac{8(8+1)}{2}+\frac{8(8+1)(2\cdot8+1)}{6}$ ב. $4^{18}\cdot\frac{16\left(16^{11}-1\right)}{16-1}$

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 43 - הבינום של ניוטון - נושא בחירה במבחן הסופי

תוכן העניינים

1. כללי ..... 328

# הבינום של ניוטון:

## סיכום כללי:

### מושג העצרת:

מסמנים: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot .....\cdot n$ כאשר $n$ מספר טבעי.
מגדירים: $0!=1$.

### המקדם הבינומי:

הביטוי $\binom{n}{k}$ נקרא המקדם הבינומי ומוגדר ע"י: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ לכל $n,k$ טבעיים כאשר $0\le k\le n$.

### הבינום של ניוטון:

נוסחת הבינום של ניוטון ניתנת לכתיבה באופן הבא: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

לכל $n$ טבעי.

ניתן לחשב את האיבר העומד במקום ה-$k$ ע"י: $T_k=\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k-1}$.

### משולש פסקל:

משולש מספרים שבו כל מספר בשורה מסוימת שווה לסכום המספרים שבשורה שמעליו באופן המתואר:

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
⋰ ⋮ ⋱

## שאלות:

**1)** חשב, ללא מחשבון:

א. $\frac{4!\cdot 7!}{0!\cdot 10!}$.

ב. $\frac{14!\cdot 20!}{10!\cdot 17!}$.

**2)** הוכח את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!\left(n^2-n\right)=n!$

ב. $(n-1)!n^2+n!=(n+1)!$

ג. $\frac{1}{(n-1)!}=\frac{(n+2)^2}{(n+2)!}+\frac{n^2-2}{(n+1)!}$

**3)** חשב:

א. $\binom{5}{3}$ ב. $\binom{4}{1}$ ג. $\binom{10}{0}$ ד. $\binom{14}{11}$

**4)** הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$.

ב. $\frac{k}{n}\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}$.

ג. $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$.

**5)** הוכח באינדוקציה שלכל $n\geq 2$ טבעי מתקיים: $\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-2}=\binom{n}{2}$.

**6)** רשום את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $(a+b)^4$ ב. $(x+2)^5$ ג. $(x-4)^3$

**7)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח $\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$ לכל $0\le k\le n$ , $k,n\in\mathbb{N}$.

ב. נסח והוכח (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

**8)** הוכח שלכל $n\ge 1$ טבעי מתקיים:

א. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$.

ב. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$.

ג. $\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+9\binom{n}{2}-\ldots+3^n\binom{n}{n}=4^n$.

**9)** מצא את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום $\left(\frac{1}{2a}+2a^2\right)^{10}$.

**10)** בפיתוח של $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{a}\right)^{12}$, ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא $a^7$.
מצא את מקום האיבר ואת ערכו.

**11)** מצא, בפיתוח של $\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)^{10}$, איבר שאינו מכיל את $x$, וחשב את ערכו.

**12)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא, בפיתוח של $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a}+\frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$, את המקדם של $\frac{1}{x}$.

ב. חשב את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם $a=b=1$.

**13)** המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום $(a+b)^n$, הוא 15.
מצא את $n$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{1001}{285}$.

**2)** הוכחה.

**3)** א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 364.

**4)** הוכחה.

**5)** הוכחה.

**6)** א. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

ב. $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$.

ג. $(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

**7)** הוכחה.

**8)** הוכחה.

**9)** $T_4 = \frac{15}{2a}$.

**10)** $T_7 = 924a^7$.

**11)** $T_9 = 45$.

**12)** א. $\frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6}$ ב. $2^{18}$.

**13)** $n = 6$.

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 44 - מספרים מרוכבים - נושא בחירה במבחן הסופי

### תוכן העניינים

1. הגדרת המספר המרוכב ..... 332
2. המספר הצמוד ..... 335
3. חקירת משוואה ריבועית מרוכבת ..... 338
4. מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב ..... 339
5. נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב ..... 343
6. שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים ..... 345
7. שאלות שונות עם מספרים מרוכבים ..... 346

# הגדרת המספר המרוכב:

## סיכום כללי:

**הגדרות כלליות:**

ע"י הסימון: $i=\sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z=a+bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי $a$ וחלק מדומה $b$. המספרים $a$ ו- $b$ הם ממשיים.

$a$ נקרא הרכיב הממשי של $z$ ומסומן גם $\mathrm{Re}(z)$ (מלשון: Real).

$b$ נקרא הרכיב המדומה של $z$ ומסומן גם $\mathrm{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

## שאלות:

**1)** רשום עם $i$:

א. $\sqrt{-1}=$ ב. $\sqrt{-4}=$ ג. $\sqrt{-25}=$

ד. $\sqrt{-3}=$ ה. $\sqrt{-5}=$

**2)** חשב:

א. $i=$ ב. $i^2=$ ג. $i^3=$

ד. $i^4=$ ה. $i^5=$ ו. $i^{17}=$

**3)** רשום את ערכם של $a$ ו- $b$ בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. $-4$ ו. $0$

**4)** כתוב מספר מרוכב $z$ לפי הדרישות הבאות:

א. $\mathrm{Re}(z)=-3\ ,\ \mathrm{Im}(z)=2$.

ב. $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**5)** מספר מרוכב מסוים $z$ מקיים: $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=4$ ו-$\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)=-1$.
מצא את $z$.

**6)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2=-1$ ב. $x^2+36=0$ ג. $x^2-2x+5=0$

**7)** פתור את המשוואה הבאה: $x^2+x+1=0$.

**8)** פתור את המשוואה הבאה: $z^2+iz+6=0$.

**9)** נתון: $z_2=5-2i$ , $z_1=2+3i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א. $z_1+z_2=$ ב. $z_1-z_2=$ ג. $z_1\cdot z_2=$

**10)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-2+6i)+(1-i)$ ב. $(4+4i)-\left(3+\frac{1}{2}i\right)$

ג. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ד. $5-(3-2i)$

ה. $(i-3)+6i$ ו. $(i+2)-(3i-2)+(7-5i)$

**11)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(1+4i)\cdot(8-2i)$ ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ג. $(4i-3)\cdot(4i+3)$ ד. $i\cdot(i-1)$

ה. $(2i+3)\cdot i$ ו. $(5i-1)^2$

**12)** נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2 i$ .
ידוע כי $z_1 + z_2$ הוא ממשי וכי $z_1 - z_2$ הוא מדומה.

א. מצא קשר בין $a_1$ ל- $a_2$ וקשר בין $b_1$ ו- $b_2$.

ב. הראה כי המכפלה $z_1 \cdot z_2$ היא ממשית.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $i$ ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$.

**2)** א. $i$ ב. $-1$ ג. $-i$ ד. $1$ ה. $i$ ו. $i$.

**3)** א. $a=2\ ,\ b=5$ ב. $a=3\ ,\ b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}$
ד. $a=0\ ,\ b=7$ ה. $a=-4\ ,\ b=0$ ו. $a=0\ ,\ b=0$.

**4)** א. $z=-3+2i$ ב. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

**5)** $z=1.5+2.5i$.

**6)** א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i\ ,\ 1-2i$.

**7)** $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

**8)** $z=2i\ ,\ -3i$.

**9)** א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$.

**10)** א. $-1+5i$ ב. $1+3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2+2i$ ה. $-3+7i$ ו. $11-7i$

**11)** א. $16+30i$ ב. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ג. $-25$ ד. $-1-i$
ה. $-2+3i$ ו. $-24-10i$.

**12)** א. $a_1=a_2\ ,\ b_1=-b_2$ ב. הוכחה.

# המספר הצמוד:

## סיכום כללי:

**צמוד קומפלקסי (מרוכב):**

לכל מספר מרוכב $z=a+bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$ וערכו: $\bar{z}=a-bi$.

## שאלות:

**13)** רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. $-4$ ו. $0$

**14)** חשב:

א. $\frac{11+2i}{2-i}$ ב. $\frac{3+7i}{2-5i}$ ג. $\frac{19-9i}{2-3i}$

**15)** נתון מספר $z=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$ ב. $\frac{z}{z+3}$ ג. $\frac{z+i}{z-i}$

**16)** המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור. מצא את $a$.

**17)** נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.

הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

**18)** פתור את המשוואה הבאה: $3z-11=iz-7i$.

**19)** פתור את המשוואה הבאה: $iz+5=4i$.

**20)** פתור את מערכת המשוואות הבאה ($z$ ו-$w$ משתנים מרוכבים): $\begin{cases}3z+iw=5-4i\\5iz-2w=5+8i\end{cases}$.

**21)** פתור את המשוואות הבאות שבהן $a$ ו-$b$ ממשיים:

א. $2a-3i=10+bi$ ב. $3a-8+5bi=2b-ai-3i$

**22)** פתור את המשוואה הבאה: $2z+7i=iz+\bar{z}-3$.

**23)** חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$ ב. $\sqrt{8+6i}$

**24)** פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$.

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$.

**25)** פתור את המשוואה הבאה: $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$.

**26)** פתור את המשוואה הבאה: $z^2-i\bar{z}+6=0$.

## תשובות סופיות:

**13)** א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. $-4$ ו. $0$.

**14)** א. $4+3i$ ב. $-1+i$. ג. $5+3i$.

**15)** א. $\frac{5}{29}+\frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17}-\frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i$.

**16)** $a=-\frac{3}{4}$.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** $z=4-i$.

**19)** $z=4+5i$.

**20)** $w=5+i$ , $z=2-3i$.

**21)** א. $a=5$ , $b=-3$ ב. $a=2$ , $b=-1$.

**22)** $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$.

**23)** א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$.

**24)** א. $z_{1,2}=i$ , $1$ ב. $z_{1,2}=-2-i$ , $2-5i$.

**25)** $z_1=-2-5i$ , $z_2=3i$.

**26)** $z_1=-3i$ , $z_2=2i$.

# חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

## שאלות:

**27)** נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2-2(m+2i)z+1=0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב $m$ למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

## תשובות סופיות:

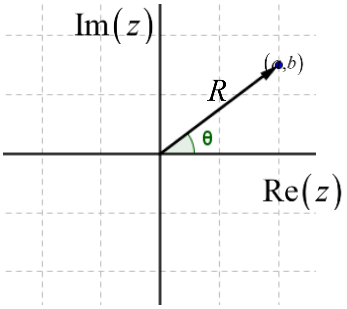
**27)** א. $m=-i$ ב. $m=-2i$.

# מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

## סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב $z$ ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה-$x$ מייצג את $a$, גודל הערך הממשי של $z$, וציר ה-$y$ מייצג את $b$, גודל הערך המדומה של $z$.

מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.




במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג: $(a,b)$

או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ-$(0,0)$)

והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס.

הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב

ויסומן: $(R,\theta)$. מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$z = R\cos\theta + i\cdot R\sin\theta = R(\cos\theta + i\sin\theta) = R\text{cis}\theta$.

### נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $\tan\theta = \frac{b}{a}$ , $R = \sqrt{a^2+b^2}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $a = R\cos\theta$ , $b = R\sin\theta$.
- גודל של מספר מרוכב $z$ יסומן: $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2+b^2}$.

### פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1\cdot z_2 = (R_1\text{cis}\theta_1)\cdot(R_2\text{cis}\theta_2) = R_1R_2\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1\text{cis}\theta_1}{R_2\text{cis}\theta_2} = \frac{R_1}{R_2}\text{cis}(\theta_1-\theta_2)$.

## שאלות:

**28)** כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60°$ ב. $6\text{cis}135°$ ג. $4\text{cis}330°$

ד. $4\text{cis}(-30°)$ ה. $4\text{cis}690°$ ו. $8\text{cis}90°$

ז. $3\text{cis}270°$ ח. $\text{cis}180°$ ט. $\text{cis}0°$

**29)** הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$ ב. $\sqrt{3}-i$ ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ד. $3+4i$ ה. $6i$ ו. $-i$

ז. $4$ ח. $-1$ ט. $1$

י. $0$

**30)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120°\cdot 3\text{cis}60°$ ב. $\text{cis}210°\cdot 5\text{cis}(-40°)$

ג. $\frac{12\text{cis}315°}{3\text{cis}90°}$ ד. $\frac{1}{2\text{cis}40°}$

ה. $6\text{cis}30°+2\text{cis}210°$

**31)** נתון המספר המרוכב $z=R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות $R$ ו-$\theta$ את המספרים:

א. $\overline{z}$ ב. $1/z$ ג. $-z$

ד. $-\frac{1}{z}$ ה. $iz$ ו. $z\cdot\overline{z}$

**32)** הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z+\overline{z}$ ב. $z\cdot\overline{z}$ ג. $\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}$

**33)** הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2-\overline{z}^2$ ב. $\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}$

**34)** הוכח את הטענות הבאות:

א. $z-i\overline{z}=\overline{\overline{z}+iz}$ ב. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$

**35)** מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

**36)** ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1+\sqrt{3}i$.
מצא את קדקודיו האחרים.

**37)** משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס.
אחד מקודקודי המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

**38)** משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא $30°$ חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

**39)** $z$ הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה.
קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. $\overline{z}$ ב. $\frac{1}{z}$ ג. $\frac{z}{\overline{z}}$ ד. $z\cdot\overline{z}$

## תשובות סופיות:

**28)** א. $1+\sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3}-2i$ ד. $2\sqrt{3}-2i$
ה. $2\sqrt{3}-2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1.

**29)** א. $\sqrt{2}\text{cis}45°$ ב. $2\text{cis}330°$ ג. $\text{cis}240°$ ד. $5\text{cis}53.13°$
ה. $6\text{cis}90°$ ו. $\text{cis}270°$ ז. $4\text{cis}0°$ ח. $\text{cis}180°$
ט. $\text{cis}0°$ י. 0.

**30)** א. $-6$ ב. $5\text{cis}170°$ ג. $4\text{cis}225°$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}(-40°)$
ה. $4\text{cis}30°$.

**31)** א. $R\text{cis}(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$ ג. $R\text{cis}(180°+\theta)$
ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180°+\theta)$ ה. $R\text{cis}(90°+\theta)$ ו. $R^2$.

**32)** שאלת הוכחה.

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** שאלת הוכחה.

**35)** $1-i$ , $1-i$ , $-1+i$ , $1+i$.

**36)** $\sqrt{3}-i$ , $-1-\sqrt{3}i$ , $-\sqrt{3}+i$.

**37)** $-2$ , $1-\sqrt{3}i$ , $1+\sqrt{3}i$.

**38)** $2$ , $-1+\sqrt{3}i$ , $1+\sqrt{3}i$.

**39)** א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל ג. על המעגל
ד. מחוץ למעגל.

# נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

## סיכום כללי:

**משפט דה-מואבר:**

כדי להעלות מספר מרוכב $z$ בחזקת $n$ נעזר בקשר: $\left(R\text{cis}\theta\right)^n = R^n\text{cis}\left(n\theta\right)$.

**שורשים של מספר מרוכב:**

כדי להוציא שורש $n$-י של מספר מרוכב $z$ השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

נבצע: $1 \le k \le n$ : $z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 \;/\; \sqrt[n]{\;} \quad \Rightarrow \quad z_k = \sqrt[n]{R_0}\cdot\text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)$.

## שאלות:

**40)** חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $\left(2\text{cis}30°\right)^3$ ב. $\left(2\text{cis}14°\right)^5$ ג. $\left(1+i\right)^4$

ד. $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$ ה. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

**41)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2 = 36\text{cis}120°$ ב. $z^4 = \left(9\text{cis}80°\right)^2$ ג. $z^5 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

**42)** מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

**43)** נתון המספר המרוכב $z = x+iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z| = 2$.

**44)** נתון המספר המרוכב $z=x+iy$ .
מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה : $|z-3i|=5$ .

**45)** נתון המספר המרוכב $z=x+iy$ . מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס
המתקבל בעבור המשוואה : $|z+i|+|\bar{z}+i|=|1+3i|$ .

## תשובות סופיות:

**40)** א. $8i$ ב. $32\text{cis}70°$ ג. 4- ד. $-8i$ ה. 1.

**41)** א. $z_0=6\text{cis}60°$ , $z_1=6\text{cis}240°$ .

ב. $z_0=3\text{cis}40°$ , $z_1=3\text{cis}130°$ , $z_2=3\text{cis}220°$ , $z_3=3\text{cis}310°$ .

ג. $z_0=\text{cis}12°$ , $z_1=\text{cis}84°$ , $z_2=\text{cis}156°$ , $z_3=\text{cis}228°$ , $z_4=\text{cis}300°$ .

**42)** סכום : 0 , מכפלה : 1- .

**43)** $x^2+y^2=4$ .

**44)** $x^2+(y-3)^2=25$ .

**45)** $\frac{2x^2}{3}+\frac{2y^2}{5}=1$ .

# שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

## שאלות:

**46)** בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7=13+3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3=5-9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

**47)** בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5=32+16i$ והאיבר השני הוא $a_2=2-4i$.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.

ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

**48)** נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

## תשובות סופיות:

**46)** $S_{10}=100-15i$.

**47)** א. $a_1=2+i$ , $q=-2i$ ב. $S_5=20+25i$.

**48)** $-2$ , $2i$ , $2$ או $6-8i$ , $4-2i$ , $2$.

# שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

## שאלות:

**49)** פתור את המשוואה: $z-\bar{z}+|z|=|2-i|^2-4i+\mathrm{Im}(z)$.

**50)** פתור את המשוואה: $\left|2-3^{x^2-x-1}i\right|=\sqrt{13}$.

**51)** פתור את המשוואה: $z^3=\bar{z}$.

**52)** הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

**53)** נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים.
הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

**54)** נתון מספר מרוכב $z$, שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.
הוכח כי אם $z-\frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז $z$ על מעגל היחידה.

**55)** הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1\mathrm{cis}\theta_1\cdot R_2\mathrm{cis}\theta_2=R_1R_2\mathrm{cis}(\theta_1+\theta_2)$.

**56)** $z$ הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.
נתון: $\left|z^4-z^3\right|=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

**57)** $z$ הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.
מצא את ערך הביטוי $z+iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

**58)** $z_1$ ו- $z_2$ הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2-2\cos\theta\cdot z+1=0$.
הבע באמצעות $\theta$ את גודל הזווית $\sphericalangle z_1Oz_2$ (O ראשית הצירים).

## תשובות סופיות:

**49)** $z_1=3-4i$ , $z_2=-3-4i$.

**50)** $x=2$ , $-1$.

**51)** $z_1=0$ , $z_2=i$ , $z_3=-i$ , $z_4=1$ , $z_5=-1$.

**52)** שאלת הוכחה.

**53)** שאלת הוכחה.

**54)** שאלת הוכחה.

**55)** שאלת הוכחה.

**56)** $\arg(z)=30°$.

**57)** $z+iz=\sqrt{2}$ , $-\sqrt{2}$.

**58)** $2\theta$.

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 45 - גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה - נושא בחירה במבחן הסופי

### תוכן העניינים

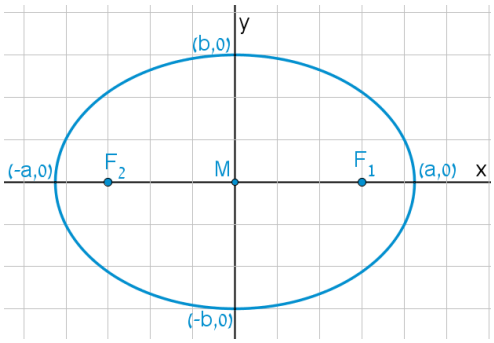
1. האליפסה ..... 348

2. הפרבולה ..... 352

# האליפסה:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**




המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.

**מושגים באליפסה:**

- הציר הגדול: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- $x$.
- הציר הקטן: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- $y$.
- מרכז האליפסה: מפגש צירי האליפסה (ראה איור).
באליפסה קנונית מרכז האליפסה נמצא בראשית הצירים.
- מוקדי האליפסה: שתי נקודות קבועות שבעבורך סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה הוא גודל קבוע השווה ל- $2a$. המוקדים יסומנו ב- $F_1$ ו- $F_2$ ושיעוריהם הם: $F_1(c,0)$ , $F_2(-c,0)$.
- רדיוסי ווקטור: המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים.
אורך הרדיוס מנקודה $(x,y)$ שעל האליפסה למוקד הימני הוא: $r_1 = a - \frac{cx}{a}$.
אורך הרדיוס מנקודה $(x,y)$ שעל האליפסה למוקד השמאלי הוא: $r_2 = a + \frac{cx}{a}$.
- מיתר: קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.
- קוטר: מיתר העובר דרך מרכז האליפסה.

**משוואות וקשרים:**

- משוואת אליפסה קנונית היא: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ או: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
- הקשר בין הפרמטרים של האליפסה הוא: $a^2 - b^2 = c^2$.
- מכפלת שיפועי מיתר באליפסה והקוטר החוצה אותו היא קבועה ושווה ל- $-\frac{b^2}{a^2}$.

## שאלות:

**1)** מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה $x^2+4y^2=36$.

**2)** מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא $2\sqrt{3}$.

**3)** מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה $8\sqrt{2}$.

**4)** מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה $\left(-3\sqrt{3},2\right)$.

**5)** מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו $x^2+y^2=16$ ומוקד אחד שלה הוא בנקודה $\left(\sqrt{10},0\right)$.

**6)** מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- $y$ בנקודה $\left(0,-2\sqrt{5}\right)$ והמרחק בין המוקד הימני לקדקוד הימני בה הוא 2.

**7)** מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות $\left(-2,\sqrt{6}\right)$ ו- $\left(\sqrt{14},1\right)$.

**8)** מצא על האליפסה $3x^2+4y^2=144$ את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.

**9)** מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה $(-3,1)$ ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.

**10)** מצא על האליפסה $x^2+3y^2=12$ את הנקודות שמהן רואים את הקטע שבין שני המוקדים בזווית ישרה.

**11)** מצא את משוואתו של קוטר באליפסה $x^2+4y^2=50$ ששיפועו חיובי ואורכו $\sqrt{56}$.

**12)** נתונים האליפסה $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ והישר $y=2x+k$. מצא לאלו ערכים של הפרמטר $k$ הישר משיק לאליפסה ולאלו ערכים של הפרמטר $k$ הישר חותך את האליפסה.

**13)** מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $3x^2+5y^2=120$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

**14)** מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

**15)** באליפסה $5x^2+9y^2=90$ חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.

**16)** באליפסה $x^2+5y^2=16$ חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קדקודיו האחרים.

**17)** באליפסה חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה וקדקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- $y$.
מצא את משוואת האליפסה אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה $\left(4\sqrt{2},0\right)$.

**18)** מצא באליפסה $2x^2+3y^2=12$ משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא $\left(1.5,1\right)$.

**19)** ישר שמשוואתו $x-y-3=0$ חותך מאליפסה מיתר שאמצעו בנקודה $\left(2,-1\right)$.
מצא את משוואת האליפסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(2\sqrt{2},-2\right)$.

**20)** נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-25}=1$ , $(0<a\neq 5)$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. לאיזה ערך של $a$ המשוואה מייצגת מעגל?

ii. לאלו ערכים של $a$ המשוואה מייצגת אליפסה?

ב. הוכח כי בעבור $a=4$ אין אף נקודה על האליפסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

## תשובות סופיות:

**1)** $2a=12$ , $2b=6$

**2)** $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{3}=1$

**3)** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$

**4)** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

**5)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1$

**6)** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

**7)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

**8)** $(4,\sqrt{24})$ , $(4,-\sqrt{24})$ , $(-4,\sqrt{24})$ , $(-4,-\sqrt{24})$

**9)** $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

**10)** $(\sqrt{6},\sqrt{2})$ , $(-\sqrt{6},\sqrt{2})$ , $(\sqrt{6},-\sqrt{2})$ , $(-\sqrt{6},-\sqrt{2})$

**11)** $y=\sqrt{6}x$

**12)** משיק: $k=\pm 12$ , חותך: $-12<k<12$.

**13)** $S=$ 60 יח"ש

**14)** $S=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

**15)** $S=$ יח"ש $26\frac{2}{3}$

**16)** $(1,\sqrt{3})$ , $(1,-\sqrt{3})$

**17)** $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{16}=1$

**18)** $y=-x+2.5$

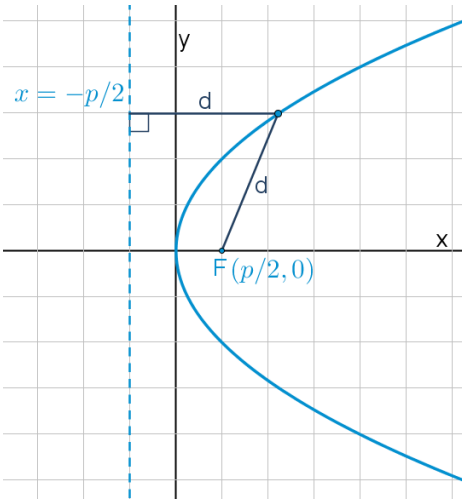
**19)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

**20)** א. i. $a=\sqrt{12.5}$ ii. $a\neq\sqrt{12.5}$

# הפרבולה:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**




המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה.
הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.

**מושגים בפרבולה:**

- מוקד: נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה ממנה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.
- מדריך: ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.
- קדקוד הפרבולה: ראשית הצירים.
- רדיוס: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה: $r=x+\frac{p}{2}$.
- מיתר: קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה.
- קוטר (לא בחומר): ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (ציר ה-$x$ אצלנו).

**משוואת הפרבולה:**

משוואת הפרבולה הקנונית היא: $y^2=2px$ כאשר $p$ הוא פרמטר הפרבולה.

**משיק לפרבולה:**

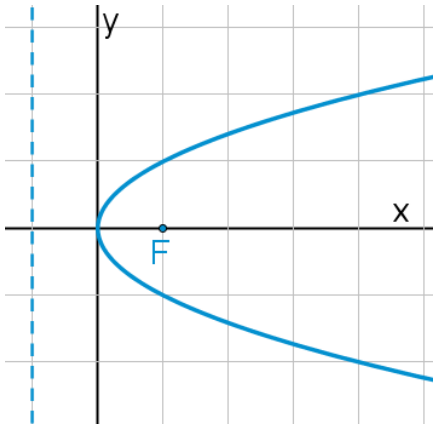
- משוואת המשיק לפרבולה $y^2=2px$ בנקודה $A(x_0,y_0)$ שעליה היא: $yy_0=p(x+x_0)$.
- שיפוע המשיק לפרבולה $y^2=2px$ בנקודה $A(x_0,y_0)$ שעליה הוא: $m=\frac{p}{y_0}$.

**מיתר המחבר שתי נקודות השקה:**

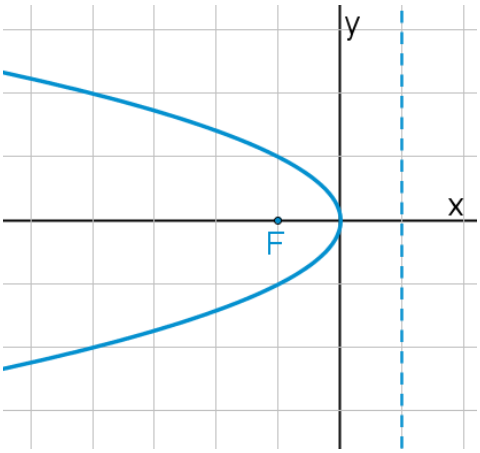
משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה $y^2=2px$ היוצאים מהנקודה $A(x_0,y_0)$ שמחוץ לפרבולה היא: $yy_0=p(x+x_0)$.

**תיאורים גרפיים:**

פרבולה שמשוואתה $y^2=2px$:




פרבולה שמשוואתה $y^2=-2px$:




**שאלות:**

**1)** נתונה הפרבולה $y^2=18x$. מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.

**2)** מצא את משוואתה של פרבולה שהישר $x=-3$ הוא המדריך שלה.

**3)** מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך שלה הוא 5.

**4)** מצא את משוואתה של פרבולה שעוברת בנקודה $(9,-6)$.

**5)** מצא את משוואתה של פרבולה שמוקדה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה $x^2+2y^2=18$.

**6)** מצא נקודות על הפרבולה $y^2=6x$ שמרחקן מהמוקד הוא 4.

**7)** מצא נקודות על הפרבולה $y^2=8x$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

**8)** מצא נקודות על הפרבולה $y^2=2px$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

**9)** מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2=10x$.

**10)** הבע באמצעות $p$ את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2=2px$.

**11)** נתונה הפרבולה $y^2=2px$. הבע באמצעות $p$ את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו מונח על ציר ה-$x$, וקודקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגש תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.

**12)** את נקודה A שעל הפרבולה $y^2=20x$ חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה אנך למדריך. היקף הטרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה-$x$ שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח הטרפז.

**13)** קצות מיתר בפרבולה $y^2=4x$ הם A ו-B. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה-$x$ של נקודה A הוא 4.

**14)** מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2=16x$, שעובר בראשית הצירים ומרחקו מהמוקד הוא $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

**15)** מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2=2x$ , שאמצעו בנקודה $\left(1\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

**16)** נתונה הפרבולה $y^2=4x$ והישר $y=2x+k$ , לאיזה ערך של $k$ הישר משיק לפרבולה?

**17)** נתונה הפרבולה $y^2=6x$ .

א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות שבהן $x=1.5$ .

ב. הוכח שנקודת החיתוך של הנורמלים בנקודות אלה נמצאת על ציר ה-$x$ .

**18)** הנקודות A ו-B נמצאות על הפרבולה $y^2=12x$ . נתון כי $y_A=4$ .
מצא את שיעורי נקודה B אם ידוע שהמשיקים לפרבולה בנקודות הנתונות יוצרים זווית ישרה.

**19)** נקודה A נמצאת על הפרבולה $y^2=28x$ בربיע הרביעי.
אורך הנורמל לפרבולה מנקודה A עד לציר ה-$x$ הוא $7\sqrt{5}$ .
מצא את משוואת הנורמל.

**20)** מרחק המוקד של הפרבולה $y^2=8x$ ממשיק לה ששיפועו חיובי הוא $\sqrt{8}$ .
מצא את משוואת המשיק.

**21)** נתונה הפרבולה $y^2=2px$ . הבע באמצעות $p$ את שיעורי הנקודה שעל הפרבולה ברביע הראשון, שמרחק המשיק בה ממוקד הפרבולה הוא $p$ .

**22)** נתונות שתי פרבולות: I. $y^2=6x$ , II. $y^2=12x$
ישר שעובר בראשית הצירים חותך את הפרבולות בנקודות A ו-B.
הראה כי המשיקים בנקודות A ו-B מקבילים.

**23)** נתונה הפרבולה $y^2=14x$ והנקודה $(-1,-3)$ , ממנה יוצאים שני משיקים לפרבולה. מצא את משוואת המיתר המחבר בין נקודות ההשקה.

**24)** נתונה הפרבולה $y^2=18x$ ונקודה ברביע השלישי, ששיעור ה-$x$ שלה קטן ב-1 משיעור ה-$y$ שלה. מהנקודה יוצאים שני משיקים לפרבולה. המיתר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם הצירים משולש ששטחו 18.
מצא את משוואת המיתר.

**25)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה $y^2=24x$ והוא משיק למדריך שלה.

**26)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה $(8,0)$ והוא משיק לפרבולה $y^2=10x$ בשתי נקודות.

**27)** נתונה הפרבולה $y^2=2px$ ומעגל שמרכזו על ציר ה-$x$ והוא משיק לפרבולה מבפנים בשתי נקודות. הישר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם המשיקים בנקודות אלה משולש שווה צלעות. הבע באמצעות $p$ את משוואת המעגל.

**28)** הנקודה $A(2,3)$ נמצאת על פרבולה. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לפרבולה בנקודה A ומשיק לציר ה-$y$.

**29)** נתונה הפרבולה $y^2=2px$ שבה $p>4$. הישר $x=2$ חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B. הבע באמצעות $p$ את שיעורי קדקוד C של משולש $\Delta ABC$ שמוקד הפרבולה הוא מפגש האנכים האמצעיים בו, אם ידוע שקדקוד C נמצא על ציר ה-$x$.

**30)** אליפסה שמשוואתה $x^2+4y^2=16$ חותכת את הפרבולה $y^2=2px$ בשתי נקודות. המרובע שקדקודיו הם נקודות החיתוך, מרכז האליפסה וקדקודה הימני של האליפסה הוא מעוין. מצא את משוואת הפרבולה.

## תשובות סופיות:

1) $p=9$ , $\mathrm{F}\left(4\frac{1}{2},0\right)$

2) $y^2=12x$

3) $y^2=10x$

4) $y^2=4x$

5) $y^2=12x$

6) $\left(2\frac{1}{2},\sqrt{15}\right)$ , $\left(2\frac{1}{2},-\sqrt{15}\right)$

7) $\left(1,\sqrt{8}\right)$ , $\left(1,-\sqrt{8}\right)$

8) $\left(\frac{p}{4},\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$ , $\left(\frac{p}{4},-\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$

9) $S_{\mathrm{OAB}}=300\sqrt{3}$ יח"ש

10) $S_{\mathrm{ABO}}=12\sqrt{3}p^2$ יח"ש

11) $S_{\mathrm{ABC}}=3\sqrt{3}p^2$ יח"ש

12) $S_{\mathrm{ABCF}}=40\frac{5}{8}$ יח"ש

13) $\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},-1\right)$ או $\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},1\right)$

14) $y=2x$ או $y=-2x$

15) $y=2x-2$

16) $k=\frac{1}{2}$

17) א. $y=x+1\frac{1}{2}$ , $y=-x-1\frac{1}{2}$

18) $\mathrm{B}\left(6\frac{3}{4},-9\right)$

19) $y=\frac{1}{2}x-7\frac{7}{8}$

20) $y=x+2$

21) $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}p,\sqrt{3}p\right)$

22) הוכחה.

23) $7x+3y-7=0$

24) $y=-9x+18$

25) $(x-6)^2+y^2=144$

26) $(x-8)^2+y^2=55$

27) $\left(x-2\frac{1}{2}p\right)^2+y^2=4p^2$

28) $\left(x-1\frac{1}{4}\right)^2+(y-4)^2=\frac{25}{16}$

29) $\mathrm{C}(p+2,0)$

30) $y^2=1\frac{1}{2}x$

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

## פרק 46 - גיאומטריה אנליטית - ההיפרבולה - נושא בחירה במבחן הסופי

### תוכן העניינים

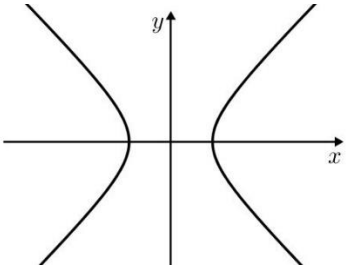
1. הגדרות יסודיות ..... 358
2. הקשר בין הפרמטרים של היפרבולה ..... 359
3. רדיוסים של היפרבולה ..... 360
4. מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה ..... 361
5. אסימפטוטות של היפרבולה ..... 362

# הגדרות יסודיות:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, שהפרש מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא היפרבולה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי ההיפרבולה.




- משוואת היפרבולה קנונית: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
- היפרבולה שבה $a=b$, נקראת היפרבולה שוות שוקיים.
- הקשר בין הפרמטרים: $c^2=a^2+b^2$.

## שאלות:

**1)** מצא את אורך צירי ההיפרבולה שמשוואתה $x^2-4y^2=36$.

**2)** מצא את משוואתה של ההיפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 18 ואורך צירה המדומה הוא $2\sqrt{3}$.

**3)** מצא את משוואתה של היפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 12 והמרחק בין מוקדיה הוא 20.

## תשובות סופיות:

**1)** אורך הציר הממשי: 12, אורך הציר המדומה: 6.

**2)** $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{3}=1$

**3)** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{80}=1$

# הקשר בין הפרמטרים של היפרבולה:

## שאלות:

**4)** מצא את משוואתה של היפרבולה שאורך צירה המדומה הוא $8\sqrt{5}$ והיא עוברת בנקודה $\left(-10,3\sqrt{5}\right)$.

**5)** מצא משוואת היפרבולה שוות שוקיים שהמרחק בין מוקדיה הוא $\sqrt{200}$.

## תשובות סופיות:

**4)** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

**5)** $x^2-y^2=25$

# רדיוסים של היפרבולה:

## סיכום כללי:

| רדיוסים בהיפרבולה | רדיוסים באליפסה |
|---|---|
| $r_1=\left\|\frac{cx}{a}-a\right\|$ | $r_1=a-\frac{cx}{a}$ |
| $r_2=\left\|\frac{cx}{a}+a\right\|$ | $r_2=a+\frac{cx}{a}$ |

## שאלות:

**6)** נתונה היפרבולה שמשוואתה: $6x^2-y^2=18$.
מצא על ההיפרבולה את הנקודות שמכפלת מרחקיהן מהמוקדים הוא 25.

**7)** נתונה היפרבולה שמשוואתה: $7x^2-9y^2=63$.
מצא על ההיפרבולה את הנקודות שסכום ריבועי מרחקיהן מהמוקדים הוא $74\frac{8}{9}$.

**8)** נתונה היפרבולה שמשוואתה $4x^2-y^2=20$. מצא נקודה על ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

**9)** נתונה היפרבולה שמשוואתה $5x^2-4y^2=80$.
מנקודה A שעל ההיפרבולה ברביע הראשון העבירו ישר מקביל לציר ה-$x$, החותך את הענף השמאלי של ההיפרבולה בנקודה B. את נקודה A חיברו עם המוקד הימני $F_1$ של ההיפרבולה ואת הנקודה B חיברו עם המוקד השמאלי של ההיפרבולה $F_2$. נתון כי היקף הטרפז $F_1BAF_2$ הוא 29 יחידות אורך.
מצא את שיעורי הנקודה A.

## תשובות סופיות:

**6)** $\left(\pm2,\pm\sqrt{6}\right)$ **7)** $\left(\pm4,\pm2\frac{1}{3}\right)$

**8)** $(3,-4)$ **9)** $\left(5,\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)$

# מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה:

## סיכום כללי:

מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה, היא: $\frac{a^2}{b^2}$.

## שאלות:

**10)** נתונה היפרבולה שמשוואתה $4x^2-3y^2=24$.

מצא את משוואתו של מיתר בהיפרבולה, שהנקודה $(3,4)$ היא אמצעו.

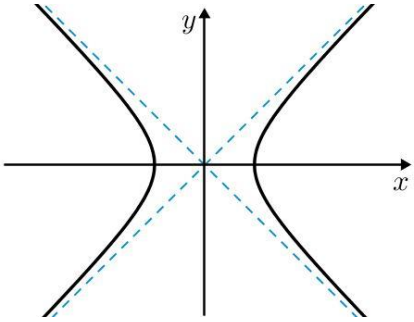
## תשובות סופיות:

**10)** $y=x+1$

# אסימפטוטות של היפרבולה:

## סיכום כללי:

לכל היפרבולה יש שתי אסימפטוטות משופעות, שענפי ההיפרבולה שואפים אליהן.




- משוואות האסימפטוטות הן: $y=\frac{b}{a}x$ , $y=-\frac{b}{a}x$.

## שאלות:

**11)** מצא את משוואת האסימפטוטות של היפרבולה שמשוואתה $4x^2-y^2=48$.

**12)** הישר $y=-\frac{3}{4}x$ הוא אסימפטוטה של היפרבולה, שהמרחק בין מוקדיה הוא 20.
מצא את משוואת ההיפרבולה.

**13)** נתונה היפרבולה שמשוואתה $9x^2-4y^2=k$ ואורך צירה המדומה הוא 6.
מצא נקודה על האסימפטוטה היורדת של ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

**14)** ישר שעובר בנקודה $(-6,8)$ הוא אסימפטוטה של היפרבולה שעוברת בנקודה $\left(9,-8\sqrt{2}\right)$.

א. מצא את משוואת ההיפרבולה.

ב. מצא את מרחק אחד ממוקדי ההיפרבולה מאחת האסימפטוטות שלה.

**15)** מוקדיה של היפרבולה שעוברת בנקודה $(4,-1)$ מתלכדים עם מוקדיה של אליפסה שמשוואתה $16x^2+25y^2=400$. מצא נקודה על הענף השמאלי של ההיפרבולה, שמרחקה מהאסיפמטוטה העולה של ההיפרבולה הוא $1\frac{1}{3}$.

## תשובות סופיות:

**11)** $y=2x,\ y=-2x$

**12)** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$

**13)** $(2,-3)$

**14)** א. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ב. $d=4$

**15)** $\left(-3,\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$