

# מכינה יסודית במתמטיקה



## תוכן העניינים

1	מבוא לאלגברה
47	משוואות אלגבריות
69	אי שוויונים אלגבריים
(ללא ספר)	הפרבולה
85	חוקי החזקות והשורשים
95	משוואות ואי-שוויונים מעריכיים
105	חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים
121	מבוא לגאומטריה של המישור
129	גיאומטריה אוקלידית - משולשים
150	גיאומטריה אוקלידית - מרובעים
174	גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים
188	גיאומטריה אוקלידית - המעגל
213	גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר
238	גיאומטריה אנליטית - המעגל
257	גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה
267	טריגונומטריה במשולש ישר זווית
272	זהויות טריגונומטריות
293	משוואות טריגונומטריות
314	טריגונומטריה במישור

# מכינה יסודית במתמטיקה

## פרק 1 - מבוא לאלגברה

### תוכן העניינים

1	1. מספרים מכוונים
5	2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים
7	3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים
8	4. שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים
14	5. כפל וחילוק שברים
16	6. חיבור וחסור שברים
20	7. בעיות יסודיות באחוזים
22	8. חזרה על תבניות מספר
24	9. כינוס איברים
26	10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים
28	11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר
30	12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים
33	13. פירוק הטרינום
35	14. שברים אלגברים
39	15. כפל וחילוק של שברים אלגברים
41	16. חיבור וחסור של שברים אלגברים
45	17. שברים כפולים

## מספרים מכוונים:

### סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2-, ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

### כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שונים סימן - התוצאה תהיה שלילית.

### הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

## שאלות:

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}, 4, 1\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}, -2$$



(2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $-3-2$

א.  $3+2$

ד.  $-3+2$

ג.  $3-2$

ו.  $7+10$

ה.  $-1-4$

ח.  $-7+3$

ז.  $-6+5$

(3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $5-8-12+17$

א.  $5+7-23+1$

ד.  $-4-11+2+9$

ג.  $3-14+2+6$

ו.  $-7-13+5-3$

ה.  $6-21+3-7$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $4 \cdot (-7)$

א.  $4 \cdot 9$

ד.  $(-5) \cdot (-3)$

ג.  $(-6) \cdot (-5)$

ו.  $(-8) \cdot 5$

ה.  $(-2) \cdot 8$

ח.  $2 \cdot 3 \cdot 3$

ז.  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$

י.  $(-2) \cdot (-3) \cdot 3$

ט.  $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$

יב.  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2)$

יא.  $2 \cdot 3 \cdot (-3)$

יד.  $1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

יג.  $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה :

א.  $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ב.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot (-5)$

ג.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ד.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב.  $(-30) : 3$

א.  $(-25) : (-5)$

ד.  $(-32) : (-4)$

ג.  $40 : (-10)$

ו.  $4 : (-16)$

ה.  $(-6) : 18$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב.  $\frac{42}{-6}$

א.  $\frac{-60}{12}$

ד.  $\frac{-12}{-3}$

ג.  $\frac{32}{-4}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות :

ב.  $(-2) \cdot 0$

א.  $0 : 5$

ד.  $6 : 0$

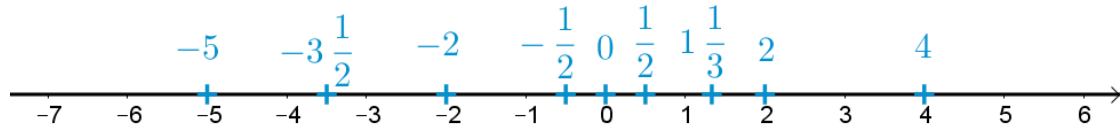
ג.  $0 \cdot (-3) \cdot 4$

ו.  $0 - 4$

ה.  $0 + 4$

## תשובות סופיות:

(1) להלן מערכת הצירים:



- (2) א. 5    ב. -5    ג. 1    ד. -1    ה. -5
- ו. 17    ז. -1    ח. -4
- (3) א. -10    ב. 2    ג. -3    ד. -4    ה. -19    ו. -18
- (4) א. 36    ב. -28    ג. 30    ד. 15    ה. -16
- ו. -40    ז. -18    ח. 18    ט. 18    י. 18
- יא. -18    יב. 36    יג. -16    יד. 16
- (5) א. +    ב. +    ג. -    ד. -
- (6) א. 5    ב. -10    ג. -4    ד. 8    ה.  $-\frac{1}{3}$     ו.  $-\frac{1}{4}$
- (7) א. -5    ב. -7    ג. -8    ד. 4
- (8) א. 0    ב. 0    ג. 0    ד. לא מוגדר    ה. 4    ו. -4

## חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

כאשר  $a$  נקרא הבסיס ו- $n$  נקראת החזקה.

#### הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

#### הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר  $a$  נקרא הבסיס ו- $n$  נקרא סדר השורש.

#### הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

## שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |              |               |
|--------------|---------------|
| א. $3^2$     | ב. $3^3$      |
| ג. $(-3)^3$  | ד. $(-2)^3$   |
| ה. $4^3$     | ו. $3^4$      |
| ז. $(-5)^3$  | ח. $10^4$     |
| ט. $-(-3)^4$ | י. $-5^4$     |
| יא. $-4^3$   | יב. $-(-2)^6$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| א. $\sqrt[3]{-27}$ | ב. $\sqrt[4]{625}$   |
| ג. $\sqrt[4]{-16}$ | ד. $\sqrt[5]{-32}$   |
| ה. $-\sqrt[4]{81}$ | ו. $-\sqrt[3]{1000}$ |

## תשובות סופיות:

- |         |          |             |         |         |         |
|---------|----------|-------------|---------|---------|---------|
| א. 9    | ב. 27    | ג. -27      | ד. -8   | ה. 64   | ו. 81   |
| ז. -125 | ח. 10000 | ט. -81      | י. -625 | יא. -64 | יב. -64 |
| א. -3   | ב. 5     | ג. לא מוגדר | ד. -2   | ה. -3   | ו. -10  |

## סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$(-3)^2 : 9 - 2 \cdot (-4^2)$ (2)	$\sqrt{81} + 3 \cdot 2^3 - 40 : 8$ (1)
$3 + 4 \cdot [-3 + 4 \cdot (-2)] + \sqrt{10 + 6}$ (4)	$\sqrt{144} - 20 : 4 + 3 \cdot (-2)^2$ (3)
$-\sqrt{9} + 5^2 : (-4 - 1) - 24 : 12 \cdot 3$ (6)	$(-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3$ (5)
$\sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3$ (8)	$-2^5 : (-8) + 4^2 - 3 \cdot 5$ (7)
$(8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt[3]{243})$ (10)	$[6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5$ (9)
	$\frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\}$ (11)

תשובות סופיות:

-37 (4)	19 (3)	33 (2)	28 (1)
-21 (8)	5 (7)	-14 (6)	31 (5)
	20 (11)	-44 (10)	-16 (9)

## שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

### סיכום כללי:

### הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

### ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

### שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ... שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים שלמים}}.\underbrace{YYY}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

### אחוזים - הגדרה:

השבר  $\frac{1}{100}$  מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר  $\frac{45}{100}$  יכתב: 45%, והשבר  $\frac{145}{100}$  יכתב: 145%.

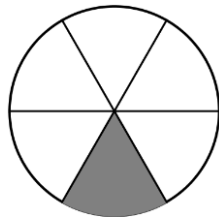
## שאלות:

(1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

ב. צבע  $\frac{1}{6}$  מהעיגולא. צבע  $\frac{1}{2}$  מהעיגולד. צבע  $\frac{2}{5}$  מהעיגולג. צבע  $\frac{3}{8}$  מהעיגול

(2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

ב. שבר:



א. שבר:



ד. שבר:



ג. שבר:



(3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר  $\frac{1}{2}$  לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.ב. השבר  $\frac{3}{5}$  לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.ג. השבר  $\frac{5}{8}$  לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

(4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן :

א. $\frac{25}{30}$	ב. $\frac{10}{30}$	ג. $\frac{6}{24}$	ד. $\frac{4}{20}$
ה. $\frac{35}{56}$	ו. $\frac{24}{42}$	ז. $\frac{36}{48}$	ח. $\frac{33}{121}$

(5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים :

א. $-\frac{20}{3}$	ב. $\frac{19}{4}$	ג. $\frac{12}{5}$	ד. $\frac{22}{5}$
ה. $-\frac{34}{6}$	ו. $-\frac{50}{7}$	ז. $\frac{47}{8}$	ח. $\frac{60}{9}$

(6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים :

א. $1\frac{2}{3}$	ב. $3\frac{5}{6}$	ג. $4\frac{1}{2}$	ד. $6\frac{1}{4}$
ה. $11\frac{3}{4}$	ו. $-2\frac{5}{8}$	ז. $-6\frac{2}{7}$	ח. $12\frac{7}{9}$

(7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים :

א. $\frac{4}{10}$ או $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{7}{6}$ או $\frac{7}{8}$
ג. $\frac{5}{6}$ או $\frac{2}{3}$	ד. $\frac{7}{12}$ או $\frac{5}{18}$

(8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים :

א. 0.7	ב. 0.07	ג. 0.007	ד. 0.34
ה. 0.304	ו. 0.65	ז. 1.2	ח. 1.02
ט. 1.42	י. 3.5	יא. 6.03	יב. 5.125

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{3}{100}$	ג. $\frac{3}{1000}$	ד. $\frac{23}{1000}$
ה. $\frac{1}{2}$	ו. $\frac{3}{4}$	ז. $\frac{2}{5}$	ח. $\frac{4}{25}$
ט. $\frac{7}{50}$	י. $\frac{3}{20}$	יא. $\frac{7}{8}$	יב. $\frac{9}{16}$
יג. $9\frac{1}{10}$	יד. $3\frac{1}{5}$	טו. $4\frac{7}{8}$	טז. $-4\frac{1}{16}$

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית (היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$	ב. $\frac{5}{6}$	ג. $\frac{3}{7}$	ד. $\frac{2}{11}$
------------------	------------------	------------------	-------------------

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25%	ב. 32%	ג. 64%	ד. 80%
ה. 120%	ו. 5%	ז. 300%	ח. 150%

12) המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{4}{5}$	ד. $\frac{7}{20}$
ה. $\frac{11}{40}$	ו. $\frac{70}{125}$	ז. $\frac{5}{6}$	ח. $\frac{4}{9}$

## תשובות סופיות:

- (1) תשובה מודגמת בסרטון.
- (2) א.  $\frac{1}{5}$  ב.  $\frac{1}{6}$  ג.  $\frac{2}{3}$  ד.  $\frac{3}{4}$
- (3) א.  $\frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80}$  ב.  $\frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300}$  ג.  $\frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700}$
- (4) א.  $\frac{5}{6}$  ב.  $\frac{1}{3}$  ג.  $\frac{1}{4}$  ד.  $\frac{1}{5}$  ה.  $\frac{5}{8}$  ו.  $\frac{4}{7}$
- (5) א.  $-6\frac{2}{3}$  ב.  $4\frac{3}{4}$  ג.  $2\frac{2}{5}$  ד.  $4\frac{2}{5}$  ה.  $-5\frac{4}{6}$  ו.  $-7\frac{1}{7}$
- (6) א.  $\frac{5}{3}$  ב.  $\frac{23}{6}$  ג.  $\frac{9}{2}$  ד.  $\frac{25}{4}$  ה.  $\frac{47}{4}$  ו.  $-\frac{21}{8}$
- (7) א.  $\frac{4}{10}$  ב.  $\frac{7}{6}$  ג.  $\frac{5}{6}$  ד.  $\frac{7}{12}$
- (8) א.  $\frac{7}{10}$  ב.  $\frac{7}{100}$  ג.  $\frac{7}{1000}$  ד.  $\frac{17}{50}$  ה.  $\frac{38}{125}$  ו.  $\frac{13}{20}$
- (9) א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75
- א. 0.4 ב. 0.16 ג. 0.14 ד. 0.15 ה. 0.875 ו. 4.0625
- א.  $0.\bar{6}$  ב.  $0.8\bar{3}$  ג. 0.428 ד.  $0.1\bar{8}$
- (10) א.  $\frac{1}{4}$  ב.  $\frac{8}{25}$  ג.  $\frac{16}{25}$  ד.  $\frac{4}{5}$  ה.  $1\frac{1}{5}$  ו.  $\frac{1}{20}$
- (11) א. 3 ב.  $1\frac{1}{2}$

12) א. 75%    ב. 12.5%    ג. 80%    ד. 35%    ה. 27.5%    ו. 56%

ז. 83.333%    ח. 44.444%

## כפל וחילוק שברים:

### סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

### שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10}$ ג.	$\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$ ב.	$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$ א.
$\frac{12}{25} \cdot 5$ ו.	$6 \cdot \frac{2}{3}$ ה.	$3 \cdot \frac{4}{5}$ ד.
$3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{2}{5}$ ט.	$3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$ ח.	$1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$ ז.
$\frac{4^3}{5}$ יב.	$\frac{4}{5^3}$ יא.	$\left(\frac{4}{5}\right)^3$ י.

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$\frac{3}{25} : \frac{7}{10}$ ג.	$\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ ב.	$\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$ א.
$\frac{5}{6} : 3$ ו.	$10 : \frac{2}{3}$ ה.	$8 : \frac{2}{9}$ ד.
$2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{15}$ ט.	$3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$ ח.	$\frac{2}{5} : 5$ ז.

## תשובות סופיות:

א. $\frac{9}{20}$	ב. $\frac{5}{21}$	ג. $\frac{8}{45}$	ד. $2\frac{2}{5}$	ה. 4	ו. $2\frac{2}{5}$
ז. $3\frac{3}{5}$	ח. $15\frac{2}{5}$	ט. $8\frac{8}{35}$	י. $\frac{64}{125}$	יא. $\frac{4}{125}$	יב. $12\frac{4}{5}$
א. $\frac{9}{10}$	ב. $1\frac{1}{2}$	ג. $\frac{6}{35}$	ד. 36	ה. 15	ו. $\frac{5}{18}$
ז. $\frac{2}{25}$	ח. $\frac{2}{3}$	ט. 2			

## חיבור וחסור שברים:

### סיכום כללי:

#### כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים  $a$  ו- $b$ , המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

#### הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחסור של שברים.

#### כללי החיבור והחסור של שברים:

- חיבור וחסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.  
 דוגמא:  $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = \frac{-1}{7}$ ,  $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$
- חיבור וחסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.  
 דוגמא:  $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3-10}{12} = -\frac{7}{12}$ ,  $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$
- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.  
 דוגמא:  $3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$   
 חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.  
 דוגמא:  $3 - \frac{1}{4} = 2\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$   
 דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה:  $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

- חיבור וחסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

$$\text{דוגמא: } 3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} = \frac{17}{5} + \frac{13}{6} = \frac{17 \cdot 6}{30} + \frac{13 \cdot 5}{30} = \frac{102 + 65}{30} = \frac{167}{30} = 5\frac{17}{30}$$

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

$$\text{דוגמא: } 2\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3} = (2 - 5) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = -3 + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = -3 + \frac{5}{12} = -2\frac{7}{12}$$

## שאלות:

- (1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3	ב. 2 ו-4	ג. 3 ו-5	ד. 6 ו-10
ה. 4 ו-10	ו. 4 ו-6	ז. 3, 5 ו-10	ח. 2, 3 ו-8

- (2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$	ב. $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$
ג. $\frac{4}{13} + \frac{9}{13}$	ד. $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$
ה. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$	ו. $\frac{8}{9} - \frac{7}{9}$
ז. $\frac{2}{12} - \frac{5}{12}$	ח. $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}$
ט. $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$	י. $\frac{7}{15} + \frac{8}{15} - \frac{6}{15}$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$

ב.  $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$

ג.  $\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$

ד.  $\frac{3}{6} - \frac{5}{8}$

ה.  $\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$

ו.  $\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$

ז.  $\frac{4}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

ח.  $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{3}{5}$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $2 + \frac{5}{6}$

ב.  $2 - \frac{5}{6}$

ג.  $2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$

ד.  $2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$

ה.  $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$

ו.  $5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$

ז.  $2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$

ח.  $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 2\frac{1}{3}$

ב.  $\frac{3}{14} : \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - \frac{2}{5}$

ג.  $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4} - 6 : \frac{2}{5}$

ד.  $2\frac{4}{5} : \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{6}$

ה.  $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$

## תשובות סופיות:

12 .ו	20 .ה	30 .ד	15 .ג	4 .ב	6 .א (1
				24 .ח	30 .ז
$\frac{1}{9}$ .ו	$\frac{1}{2}$ .ה	$1\frac{3}{4}$ .ד	1 .ג	$\frac{7}{9}$ .ב	$\frac{4}{5}$ .א (2
		$\frac{3}{5}$ .י	$1\frac{5}{8}$ .ט	$-\frac{4}{5}$ .ח	$-\frac{1}{4}$ .ז
$3\frac{5}{6}$ .ו	5 .ה	$-\frac{1}{8}$ .ד	$\frac{7}{12}$ .ג	$\frac{7}{10}$ .ב	$1\frac{5}{6}$ .א (3
				$-\frac{1}{10}$ .ח	$\frac{19}{21}$ .ז
$-\frac{5}{8}$ .ו	$7\frac{11}{12}$ .ה	$1\frac{5}{12}$ .ד	$3\frac{1}{12}$ .ג	$1\frac{1}{6}$ .ב	$2\frac{5}{6}$ .א (4
				$-\frac{1}{20}$ .ח	$2\frac{13}{18}$ .ז
	$3\frac{5}{18}$ .ה	$2\frac{5}{6}$ .ד	$-13\frac{3}{4}$ .ג	$1\frac{1}{10}$ .ב	$2\frac{11}{24}$ .א (5

## בעיות יסודיות באחוזים:

### סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה:  $48 = 120 \cdot \frac{40}{100}$ , כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48.**

### שאלות:

- (1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
  - א. כמה בנות בכיתה?
  - ב. כמה בנים בכיתה?
- (2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
  - א. כמה תלמידים בכיתה?
  - ב. כמה בנים בכיתה?
- (3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
  - א. מהו מחירו בסוף העונה?
  - ב. מה גודל ההנחה?
- (4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
  - א. מה מחירו הסופי?
  - ב. מה גודל ההתייקרות?
- (5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
  - א. מה מחירו בסוף השנה?
  - ב. מה גודל התייקרות?
- (6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
  - א. מה מחירו בסוף השנה?
  - ב. מה גודל התייקרות?

7) ענה על השאלות הבאות:

- א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.  
מה אחוז הבנים בקהל?
- ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.  
מה אחוז הבנות בכיתה?
- ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.  
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.  
בכמה אחוזים הוזל המוצר?
- ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.  
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ו. מחיר מוצר הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.  
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

### תשובות סופיות:

- 1) א. 18 בנות. ב. 12 בנים.
- 2) א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.
- 3) א. 240 ₪. ב. 60 ₪.
- 4) א. 540 ₪. ב. 40 ₪.
- 5) 4.9755 ₪
- 6) 400 ₪
- 7) א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

## חזרה על תבניות מספר:

### סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים). ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של  $x$  פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של  $3 \cdot x$  אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

### שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- $x$  הנתון:

א.  $2x+5$  כאשר  $x=3$       ב.  $x^2+3x$  כאשר  $x=2$

ג.  $-x^2+2x+3$  כאשר  $x=5$       ד.  $-x^2-9x+5$  כאשר  $x=5$

ה.  $x^3+1$  כאשר  $x=-2$       ו.  $4-x^3$  כאשר  $x=-1$

ז.  $(x+1)(2-x)$  כאשר  $x=4$       ח.  $x^2(3x-4)$  כאשר  $x=3$

(2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- $x$  הנתון:

א.  $27x^5-2x^3+x$  כאשר  $x=\frac{1}{3}$

ב.  $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$  כאשר  $x=-\frac{2}{3}$

3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| א. $a^2 + 2ab + b^2$             | עבור: $a = 3, b = -5$                                   |
| ב. $(x-3)^2 + 3x^2b$             | עבור: $x = 5, b = -1$                                   |
| ג. $-x^3 - 2xy + y^4$            | עבור: $x = -2, y = -1$                                  |
| ד. $\frac{(a-2c)^4}{a} - a^2$    | עבור: $a = 2, c = -2$                                   |
| ה. $\frac{4a^2 - 3b}{c}$         | עבור: $a = -1, b = 2, c = -4$                           |
| ו. $\sqrt{c-3a}$                 | עבור: $c = 13, a = -1$ ועבור: $c = 82, a = \frac{1}{3}$ |
| ז. $\frac{p^3 + 2\sqrt{q+1}}{m}$ | עבור: $p = -5, q = 48, m = 3$                           |

### תשובות סופיות:

- |            |                    |        |        |                  |        |
|------------|--------------------|--------|--------|------------------|--------|
| 11. א. (1) | 10. ב.             | ג. -12 | ד. -65 | ה. -7            | ו. 5   |
| ז. -10     | ח. 45              |        |        |                  |        |
| 10. א. (2) | ב. $\frac{22}{27}$ |        |        |                  |        |
| 4. א. (3)  | ב. -71             | ג. 5   | ד. 644 | ה. $\frac{1}{2}$ | ז. -37 |
- ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שנייה: 9

## כינוס איברים:

### סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא:  $3x + 6x - 5x = (3 + 6 - 5)x = 4x$ .  
 איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.  
 כך:  $3x$  שונה מ- $4y$  ושונה מ- $2xy$ . באותו האופן, האיברים  $x$  ו- $x^2$  הם שונים.

### שאלות:

כנס איברים דומים:

- |   |  |
|---|--|
| $9x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x^2$ (2)   | $5x + 7x - 4x$ (1)                             |
| $x^2y - 3yx^2 + x^2y$ (4)   | $-10xy + 15xy + xy - 2yx$ (3)                  |
| $2x^2 - 3m^2 - x^2 + 3m^2$ (6)  | $8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2$ (5)            |
| $mn^2 + 4m^2n + 6n^2m - 10nm^2 + mn^2$ (8)  | $3xy + y - 30y + 6yx - 7y$ (7)                 |
| $y^2 + x^2 - 5x^2 + 5y^2 + 4x^2 - 6y^2$ (10)  | $-6 + x^3 + 4 - 3x^3 + 17x^3 - 17$ (9)         |
| $5xy + 2x - 3yx - x + 1$ (12)   | $7x^2 - 3x - 4x + 2$ (11)                      |
| $x + xy + y - 6yx - 6y - 6x$ (14)   | $3 - x - x^2 + 4x + 5x^2 - 12$ (13)            |
| $ab^2 + 6ba^2 - 6b + 16a^2b + 3b - 6b^2a$ (16)  | $mn + n - 5m + 5nm - 14n + 3m$ (15)            |
| $4x^2z + 6xz^2 - 6 - xz^2 + 12 + 10zx^2$ (18)   | $z^3 - 4z^2 + 7 - z^3 - 8 + 8z^2$ (17)         |
| $x^3 - 3x - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$ (20)  | $2 - x^3 - 3 - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2$ (19) |
| $12x^2y^3 + 13a^2 - 20x^2y^3 + 2a^2$ (22)   | $2a^2b + 3x^2y + 5a^2b + 10x^2y$ (21)          |
| $-2x^3y + 5x^2 - 4yx^3 - 6x^2$ (24)   | $2y^2 - 4x^3y^2 - 10y^2 - x^3y^2$ (23)         |
| $5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2$ (26)  | $2a^2b + 2b + 3a^2 + 5b$ (25)                  |
| $-12x^2 + 2y^2 + 3x^2y + 14xy^2 - 5xy^2 - 6y^2 + 2xy + 11x^2 + x^2y - 9xy$ (27)               |  |
| $21x^3y^3 + x^2y^2 - 3xy^3 + x^3y - 15x^2y^2 - 7x^3y + 12x^3y^3 - 4xy^3 + 4xy^3 - 6x^3y$ (28) |  |

## תשובות סופיות:

- |                           |                        |   |
|---------------------------|------------------------|---|
| $4xy$ (3)                 | $2x^2$ (2)             | $8x$ (1)                                    |
| $x^2$ (6)                 | $4a^2 - a$ (5)         | $-x^2y$ (4)                                 |
| $15x^3 - 19$ (9)          | $8mn^2 - 6nm^2$ (8)    | $9xy - 36y$ (7)                             |
| $2xy + x + 1$ (12)        | $7x^2 - 7x + 2$ (11)   | $0$ (10)                                    |
| $-13n - 2m + 6mn$ (15)    | $-5x - 5y - 5xy$ (14)  | $4x^2 + 3x - 9$ (13)                        |
| $14x^2z + 5xz^2 + 6$ (18) | $4z^2 - 1$ (17)        | $-5ab^2 + 22a^2b - 3b$ (16)                 |
| $7a^2b + 13x^2y$ (21)     | $-3x^2 - x$ (20)       | $-3x^2 + 2x - 3$ (19)                       |
| $-6x^3y - x^2$ (24)       | $-8y^2 - 5x^3y^2$ (23) | $-8x^2y^3 + 15a^2$ (22)                     |
|                           | $25a^2b - 22ab^2$ (26) | $2a^2b + 3a^2 + 7b$ (25)                    |
|                           |                        | $-x^2 - 4y^2 + 4x^2y + 9xy^2 - 7xy$ (27)    |
|                           |                        | $33x^3y^3 - 14x^2y^2 - 3xy^3 - 12x^3y$ (28) |

## פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

### סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

$$\bullet a(b+c) = ab+ac$$

$$\bullet (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x \cdot 3x$	ב. $-4x \cdot (-7x)$	ג. $-2x \cdot (-4x) \cdot (-3)$
ד. $8m^2 \cdot 4m^3$	ה. $3a^3 \cdot (-2a^2)$	ו. $-b \cdot 4b^2 \cdot \frac{b^2}{2}$
ז. $a \cdot 3b$	ח. $4a^2 \cdot 7b^2$	ט. $ab \cdot (-2a^2b)$

(2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$	ב. $2(-3x^2+5x-1)$
ג. $(7x-2)4$	ד. $(1-2x)(-2)$
ה. $a(3a-1)$	ו. $b(b^2-3b+4)$
ז. $2x(5x+3)$	ח. $5x(x^2+2x-3)$
ט. $3t^2(4t-t^2+6)$	י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$	ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$
ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$	ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

$$\text{ה. } (3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$$

$$\text{ו. } 3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7$$

4 פשט את הביטויים הבאים :

$$\text{א. } (x-1)(x+2) \quad \text{ב. } (x+3)(x-7)$$

$$\text{ג. } (3-x)(x+4) \quad \text{ד. } (3x+4)(5x+1)$$

$$\text{ה. } 3(4x+1)(2x-3) \quad \text{ו. } -2(3x-1)(5-2x)$$

5 פשט את ערכי הביטויים הבאים :

$$\text{א. } (x-1)(x+3)+2(3-x)$$

$$\text{ב. } (a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$$

$$\text{ג. } (2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6)$$

$$\text{ד. } -x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2)$$

### תשובות סופיות:

$$\text{(1) א. } 6x^2 \quad \text{ב. } 28x^2 \quad \text{ג. } -24x^2 \quad \text{ד. } 32m^5 \quad \text{ה. } -6a^5 \quad \text{ו. } -2b^5$$

$$\text{ז. } 3ab \quad \text{ח. } 28a^2b^2 \quad \text{ט. } -2a^3b^2$$

$$\text{(2) א. } 6x-8 \quad \text{ב. } -6x^2+10x-2 \quad \text{ג. } 28x-8 \quad \text{ד. } -2+4x$$

$$\text{ה. } 3a^2-a \quad \text{ו. } b^3-3b^2+4b \quad \text{ז. } 10x^2+6x \quad \text{ח. } 5x^3+10x^2-15x$$

$$\text{ט. } 12t^3-3t^4+18t^2 \quad \text{י. } 10d^5-7.5d^2$$

$$\text{(3) א. } 6x-6 \quad \text{ב. } 13x-6 \quad \text{ג. } -6x+11 \quad \text{ד. } x+9 \quad \text{ה. } -3x^2+33x-28$$

$$\text{ו. } 10y^2+32y-27$$

$$\text{(4) א. } x^2+x-2 \quad \text{ב. } x^2-4x-21 \quad \text{ג. } -x^2-x+12$$

$$\text{ד. } 15x^2+23x+4 \quad \text{ה. } 24x^2-30x-9 \quad \text{ו. } 12x^2-34x+10$$

$$\text{(5) א. } x^2+3 \quad \text{ב. } 7 \quad \text{ג. } 18m^2-6m-39 \quad \text{ד. } -3x^5y^3+3x^4y^2$$

## פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

### סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש:  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ .
- נוסחה להפרש ריבועים:  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ .

### שאלות:

#### (1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$	ב. $(x+2)^2$	ג. $(4x+5)^2$
ד. $(6x+2)^2$	ה. $(7x+y)^2$	ו. $(5x+2y)^2$
ז. $(x^2+7)^2$	ח. $(x^2+y^2)^2$	ט. $(x^3+2y^2x)^2$

#### (2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$	ב. $(x-2)^2$	ג. $(5-x)^2$
ד. $(6x-1)^2$	ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$	ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$
ז. $(3m-2n)^2$	ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$	ט. $(x^2y^2-7)^2$

#### (3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$	ב. $(3+x)(x-3)$
ג. $(3x-1)(3x+1)$	ד. $(5-7x)(7x+5)$
ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$	ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$
ז. $(x^2+y)(x^2-y)$	ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$	ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$
ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$	ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$
ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$	
ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$	

## תשובות סופיות:

א. $x^2+10x+25$	ב. $x^2+4x+4$	ג. $16x^2+40x+25$	(1)
ד. $36x^2+24x+4$	ה. $49x^2+14xy+y^2$	ו. $25x^2+20xy+4y^2$	
ז. $x^4+14x+49$	ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$	ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$	
א. $x^2-12x+36$	ב. $x^2-4x+4$	ג. $25-10x+x^2$	(2)
ד. $36x^2-12x+1$	ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$	ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$	
ז. $9m^2-12mn+4n^2$	ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$	ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$	
א. $x^2-25$	ב. $x^2-9$	ג. $9x^2-1$	(3)
ה. $\frac{1}{4}x^2-36$	ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$	ז. $x^4-y^2$	
א. $x^2+2$	ב. $5x^2-24x+13$	ג. $-4x^2-x$	(4)
ד. $18x^2-6xy$	ה. $-6x^2-39x-16$	ו. $-10x^2+17x+321$	

## פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

### סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:

○ הוצאת מספר משותף:  $2x - 8 = 2(x - 4)$

○ הוצאת אות משותפת:  $x^2 - 12x = x(x - 12)$

○ הוצאת מספר ואות יחד:  $3x^2 - 21x = 3x(x - 7)$

- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:

○ נוסחת הבינום של ניוטון:  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

○ נוסחה להפרש ריבועים:  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

### שאלות:

- (1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א.  $3x - 12$       ב.  $6y - 4$

ג.  $20 - 8a$       ד.  $4a^3 + 8b$

ה.  $75m^2 + 25m + 15$       ו.  $40a^2 - 8b^2 + 64c^2$

- (2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א.  $y^2 + 5y$       ב.  $3x - 11x^3$

ג.  $6y^2 + 5y^3 + 4y$       ד.  $\frac{1}{2}a^7 - \frac{1}{4}a^5 + a^3$

3 פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

א. $2x^2 - 8x$	ב. $3t^2 + 12t$
ג. $5n^3 - 20n^2 + 50n$	ד. $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$
ה. $4x^2y^2 + 16x^2y - 20xy^2$	ו. $27mn - 3n^2m + 9n^3m$

4 פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $x^2 + 10x + 25$	ב. $x^2 + 12x + 36$
ג. $y^2 - 18y + 81$	ד. $y^2 - 22y + 121$
ה. $4x^2 + 4x + 1$	ו. $16y^2 - 8y + 1$
ז. $9x^2 - 24x + 16$	ח. $25x^2 + 70x + 49$

5 פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $r^2 - 25$	ב. $x^2 - 81$
ג. $25y^2 - 49$	ד. $121x^2 - 1$
ה. $x^2y^2 - 4$	ו. $9y^4 - 169x^4$

6 פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר :

א. $y - y^3$	ב. $x^3 - 10x^2 + 25x$
ג. $m^4 - 1$	ד. $196x^4 - 140x^3 + 25x^2$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $3(x-4)$     ב.  $2(3y-2)$     ג.  $4(5-2a)$
- ד.  $4(a^3+2b)$     ה.  $5(15m^2+5m+3)$     ו.  $8(5a^2-b^2+8c^2)$
- (2) א.  $y(y+5)$     ב.  $x(3-11x^2)$     ג.  $y(6y+5y^2+4)$
- ד.  $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$
- (3) א.  $2x(x-4)$     ב.  $3t(t+4)$     ג.  $5n(n^2-4n+10)$
- ד.  $2y^2(4+3y-y^2)$     ה.  $4xy(xy+4x-5y)$     ו.  $3mn(9-n-3n^2)$
- (4) א.  $(x+5)^2$     ב.  $(x+6)^2$     ג.  $(y-9)^2$     ד.  $(y-11)^2$
- ה.  $(2x+1)^2$     ו.  $(4y-1)^2$     ז.  $(3x-4)^2$     ח.  $(5x+7)^2$
- (5) א.  $(r+5)(r-5)$     ב.  $(x+9)(x-9)$     ג.  $(5y+7)(5y-7)$
- ד.  $(11x+1)(11x-1)$     ה.  $(xy+2)(xy-2)$     ו.  $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$
- (6) א.  $y(1+y)(1-y)$     ב.  $x(x-5)^2$     ג.  $(m^2+1)(m+1)(m-1)$
- ד.  $x^2(14x-5)^2$

## פירוק הטרינום:

### סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה:  $ax^2 + bx + c$  כאשר  $a, b$  ו- $c$  הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר  $bx$  לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים,  $m_1$  ו- $m_2$ , שמקיימים:  $m_1 \cdot m_2 = ac$  ו- $m_1 + m_2 = b$ .  
לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום:  $ax^2 + bx + c = ax^2 + m_1x + m_2x + c$ .  
השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג:  $ax^2 + \underbrace{m_1x + m_2x} + c$ .

### הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים  $m_1$  ו- $m_2$  באופן

הבא:  $m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,  $m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום

כמכפלה:  $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)(x - m_2)$ . אם קיים פתרון (שורש) אחד  $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$  אז

נכתוב:  $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)^2$  ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

### שאלות:

(1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

- |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| א. $x^2 + 5x + 4$   | ב. $x^2 - 8x + 15$  | ג. $x^2 - 33x + 62$ |
| ד. $2x^2 + 7x - 15$ | ה. $3x^2 - 11x + 6$ | ו. $6x^2 + 5x + 1$  |
| ז. $2x^2 + x - 6$   | ח. $x^2 - 18x + 81$ | ט. $x^2 + 2x + 8$   |

(2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

- |                      |                    |
|----------------------|--------------------|
| א. $6x^2 + 5x + 1$   | ב. $x^2 + 5x + 4$  |
| ג. $4x^2 + 20x + 25$ | ד. $3x^2 - x + 20$ |

**תשובות סופיות:**

1) א.  $(x+1)(x+4)$     ב.  $(x-3)(x-5)$     ג.  $(x-2)(x-31)$

ד.  $(2x-3)(x+5)$     ה.  $(3x-2)(x-3)$     ו.  $(3x+1)(2x+1)$

ז.  $(x+2)(2x-3)$     ח.  $(x-9)^2$     ט. אין פירוק.

2) א.  $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$     ב.  $(x+1)(x+4)$     ג.  $(2x+5)^2$     ד. אין פירוק.

## שברים אלגברים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

$$\text{דוגמא לשברים אלגבריים: } \frac{x+1}{x+2}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{4}{x-x^3}$$

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את

$$\text{הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: } \frac{3x+5}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

#### תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

$$\text{דוגמא: השבר } \frac{1}{x+4} \text{ לא מוגדר כאשר } x = -4 \text{ מכיוון שמתקבל: } \frac{1}{0}$$

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא:  $x \neq -4$  ומשמעו היא ש- $x$  יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט -4, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

#### כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

$$\bullet \text{ צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: } \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: } \frac{3x-15}{x^2-10x+25} = \frac{3(x-5)}{(x-5)^2} = \frac{3 \cdot 1}{x-5} = \frac{3}{x-5}$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י פירוק טרינום: } \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

## שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$	ב. $\frac{5}{x-6}$
ג. $\frac{x+7}{2x-8}$	ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$
ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$	ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$
ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$	ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

(2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$	ב. $\frac{a-x}{a}$
ג. $\frac{a-ax}{a}$	ד. $\frac{x+1}{y+1}$
ה. $\frac{x}{x+y}$	ו. $\frac{6x}{6y}$
ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$	ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$
ט. $\frac{4x^2y}{xy}$	י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

(3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$	ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$
ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$	ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$
ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$	ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$
ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$	ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

$\frac{8n - n^2}{n^2 - 16n + 64} \quad \text{ב.}$	$\frac{x^2 + 10x + 25}{2x + 10} \quad \text{א.}$
$\frac{4m^2 + 20m + 25}{4m^2 + 10m} \quad \text{ד.}$	$\frac{z^3 - 4z^2}{2z^2 - 16z + 32} \quad \text{ג.}$
$\frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2}{3ab + 6b^2} \quad \text{ו.}$	$\frac{18y^2 - 24y + 8}{2y - 3y^2} \quad \text{ה.}$

5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

$\frac{m^2 - 12m + 32}{m - 4} \quad \text{ב.}$	$\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10} \quad \text{א.}$
$\frac{3z^2 + 26z + 16}{3z + 2} \quad \text{ד.}$	$\frac{4y - 10}{2y^2 + y - 15} \quad \text{ג.}$
$\frac{9n^2 - 12n}{4 + 5n - 6n^2} \quad \text{ו.}$	$\frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 9x^2} \quad \text{ה.}$
$\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + x - 56} \quad \text{ח.}$	$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6} \quad \text{ז.}$
$\frac{m^3n - m^2n^2 - m^2 + mn}{2m^2n^3 + mn^2 - 3n} \quad \text{י.}$	$\frac{3a^2b - 10ab^2 + 3b^3}{-3a^3b + 11a^2b^2 - 6ab^3} \quad \text{ט.}$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x \neq -3 \quad \text{ב. } x \neq 6 \quad \text{ג. } x \neq 4 \quad \text{ד. } x \neq 0, x \neq 4$$

$$\text{ה. } x \neq -1 \quad \text{ו. } x \neq -2, x \neq 2 \quad \text{ז. } y \neq 0, y \neq -1, y \neq 1$$

$$\text{ח. } x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$$

$$(2) \quad \text{א. } x \quad \text{ב. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ג. } 1-x$$

$$\text{ד. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ה. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ו. } \frac{x}{y} \quad \text{ז. } \frac{x}{y}$$

$$\text{ח. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ט. } 4x \quad \text{י. לא ניתן לצמצם}$$

$$(3) \quad \text{א. } x \neq -4, 3 \quad \text{ב. } \frac{m}{4}, m \neq -4 \quad \text{ג. } \frac{2}{a}, a \neq 0, 6$$

$$\text{ד. } -\frac{x}{3}, x \neq 5 \quad \text{ה. } -3, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{ו. } \frac{2x^2}{3}, x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{y(y-3)}, y \neq 0, 3 \quad \text{ח. } \frac{3z^2 - 12z + 4}{z+5}, z \neq 0, -5$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{x+5}{2}, x \neq -5 \quad \text{ב. } \frac{n}{8-n}, n \neq 8 \quad \text{ג. } \frac{z^2}{2(z-4)}, z \neq 4$$

$$\text{ד. } \frac{2m+5}{2m}, m \neq 0, -\frac{5}{2} \quad \text{ה. } \frac{2(2-3y)}{y}, y \neq 0, \frac{2}{3} \quad \text{ו. } \frac{a(a+2b)}{3b}, b \neq 0, a \neq -2b$$

$$(5) \quad \text{א. } \frac{1}{x-5}, x \neq 5, -2 \quad \text{ב. } m-8, m \neq 4 \quad \text{ג. } \frac{2}{y+3}, x \neq -3, \frac{5}{2}$$

$$\text{ד. } z+8, z \neq -\frac{2}{3} \quad \text{ה. } \frac{x-4}{x^2}, x \neq 0, -9 \quad \text{ו. } \frac{-3n}{2n+1}, n \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$$

$$\text{ז. } \frac{x+2}{x+3}, x \neq -2, -3 \quad \text{ח. } \frac{x-7}{x+8}, x \neq 7, -8$$

$$\text{ט. } \frac{3a-b}{a(2b-3a)}, a \neq 0, b \neq 0, a \neq 3b, 2b \neq 3a \quad \text{י. } \frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}, mn \neq 1, -\frac{3}{2}, n \neq 0$$

## כפל וחילוק של שברים אלגבריים:

### סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.  
חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

$$\bullet \text{ דוגמא לכפל שברים: } \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3x+3} = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3(x+1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{3x}$$

$$\bullet \text{ דוגמא לחילוק שברים: } \frac{4x}{y} : \frac{12}{y^2+y} = \frac{4x}{y} \cdot \frac{y^2+y}{12} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_3} = \frac{x(y+1)}{3}$$

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8} \quad \text{ב. } \frac{x}{3} \cdot \frac{9}{x^2}$$

$$\text{ג. } 7y \cdot \frac{5}{y^2} \quad \text{ד. } 6x^2 \cdot \frac{3}{40x}$$

$$\text{ה. } (x^2+3x) \cdot \frac{2}{3x+9} \quad \text{ו. } (a^2-25) \cdot \frac{20}{5a+25}$$

$$\text{ז. } \frac{w^2-9}{w} \cdot \frac{w^2}{2w+6} \quad \text{ח. } \frac{y+4}{y^2+16} \cdot \frac{y^2-16}{2y+8}$$

$$\text{ט. } \frac{z^2+30z+225}{6z+90} \cdot \frac{12}{2z-10} \quad \text{י. } \frac{5n^2}{n^2-121} \cdot \frac{2n^2+44n+242}{n+2} \cdot \frac{n^2+4n+4}{n}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8} : \frac{x}{6}$	ב. $\frac{y}{25} : \frac{5}{y}$
ג. $a^2 : \frac{1}{6a}$	ד. $\frac{5}{6a} : a^2$
ה. $(d^2 - 3d) : \frac{5d - 15}{5d}$	ו. $\frac{t}{t+4} : \frac{3t}{t+4}$
ז. $\frac{y^2 + 8y + 16}{8y^2} : \frac{y^2 - 16}{7y^2}$	ח. $\frac{a^2 - 64}{a^2 - 36} : \frac{a+8}{a+6}$

תשובות סופיות:

א. $\frac{x^2}{24}$	ב. $\frac{3}{x}$	ג. $\frac{35}{y}$	ד. $\frac{9x}{20}$	ה. $\frac{2x}{3}$	(1)
ו. $4(a-5)$	ז. $\frac{w(w-3)}{2}$	ח. $\frac{y^2 - 16}{2y^2 + 32}$	ט. $\frac{z+15}{z-5}$	י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$	
א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{y^2}{125}$	ג. $6a^3$	ד. $\frac{5}{6a^3}$	ה. $d^2$	ו. $\frac{1}{3}$
ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$	ח. $\frac{a-8}{a-6}$				

## חיבור וחיסור של שברים אלגבריים:

### סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים. נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים. כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף. לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת. דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{1+(x+1)}{x} = \frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2 + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = \frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-3x} = \frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

## שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{a}{6} + \frac{a-5}{6}$

ג.  $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3+4x}{x+1}$

ב.  $\frac{5}{x} + \frac{4x+3}{x}$

ד.  $\frac{7z}{2z-3} - \frac{4z}{2z-3} - \frac{z+3}{2z-3}$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{ab} - \frac{5}{bc}$

ג.  $\frac{c}{ab} - \frac{ad}{bc} + \frac{2b}{cd}$

ב.  $\frac{1}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xz}$

ד.  $-\frac{5}{x} + \frac{x+1}{xy^2}$

ה.  $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{3}{y+1}$

ו.  $\frac{3}{z(z-3)} - \frac{2}{z(z-2)}$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $1 - \frac{2}{x}$

ג.  $2 + \frac{2}{x+1}$

ב.  $1 + \frac{3}{y^2}$

ד.  $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

ה.  $\frac{a+1}{a^2} - \frac{3-a}{4a} - 3$

ו.  $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x}$

ג.  $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$

ב.  $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y}$

ד.  $\frac{1}{z+3} + \frac{2}{3z} - \frac{3}{z}$

5 פשט את הביטויים הבאים:

$$\frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{(x+4)^2} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{24}{a^2-9} + \frac{4}{a+3} \quad \text{א.}$$

$$\frac{3z}{z^2+4z+3} - \frac{z+0.5}{z^2+2z+1} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{y}{(y-2)^2} + \frac{3y}{4-y^2} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{2a+3}{2a^2+15a+7} + \frac{a+3}{a^2+14a+49} \quad \text{ו.}$$

$$\frac{x-1}{x^2+3x-40} + \frac{2}{-x^2+8x-15} \quad \text{ה.}$$

$$\frac{1}{a-b} + \frac{2}{a+2b} - \frac{3b}{a^2+ab-2b^2} \quad \text{ח.}$$

$$\frac{x}{x-3} + \frac{9-x}{x^2-8x+15} \quad \text{ז.}$$

6 פשט את הביטויים הבאים:

$$\left(\frac{2}{x}+1\right) \cdot \frac{x^2}{7x+14} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{8} + \frac{9}{x+1} \cdot \frac{x+1}{18} \quad \text{א.}$$

$$\left(3x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) : \frac{6x^3+2x-4}{x^2} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{7}{y^2} : \frac{6}{y^3} - \frac{y-4}{63} \cdot \frac{3y-4}{y^2-8y+16} \quad \text{ג.}$$

$$\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3} - \frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right) : \frac{18x+3}{6x^2-13x+6} \quad \text{ה.}$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{2a-5}{6} & \text{ב.} & \frac{4x+8}{x} & \text{ג.} & \frac{5x+1}{x+1} & \text{ד.} & 1 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{c-5a}{abc} & \text{ב.} & \frac{z+5x+4y}{xyz} & \text{ג.} & \frac{c^2d - a^2d^2 + 2ab^2}{abcd} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ד.} & \frac{-5y^2+x+1}{xy^2} & \text{ה.} & \frac{3y+4}{(y+1)^2} & \text{ו.} & \frac{1}{(z-2)(z-3)} \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{x-2}{x} & \text{ב.} & \frac{y^2+3}{y^2} & \text{ג.} & \frac{2x+4}{x+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ד.} & \frac{9x-2}{3x} & \text{ה.} & \frac{-11a^2+a+4}{4a^2} & \text{ו.} & \frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z} \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{4x+1}{x(x+1)} & \text{ב.} & \frac{y-6}{y(y+2)} & \text{ג.} & \frac{a^2+4a+6}{a(a+2)} \end{array}$$

$$\text{ד.} \quad \frac{4z+21}{3z(z+3)}$$

$$(5) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{4}{a-3} & \text{ב.} & \frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2} & \text{ג.} & \frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ד.} & \frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)} & \text{ה.} & \frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)} & \text{ו.} & \frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ז.} & \frac{x-3}{x-5} \\ \text{ח.} & \frac{3}{a+2b} \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{x+1}{2} & \text{ב.} & \frac{x}{7} & \text{ג.} & \frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)} & \text{ד.} & \frac{1}{2} & \text{ה.} & \frac{1}{3(10x+1)} \end{array}$$

## שברים כפולים:

### סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא:  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$  כאשר מתקיים:  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

### שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

$\frac{y+1}{2y+2} \quad (2)$	$\frac{4x}{12} \quad (1)$
$\frac{5}{t^2-81}$	$\frac{x}{5}$
$\frac{9t^2}{6t+54} \quad (4)$	$\frac{t}{30t^2} \quad (3)$
$\frac{4x}{x+1} \quad (6)$	$\frac{3y^3-y^2}{25} \quad (5)$
$\frac{x^2+2x+1}{t^2-t-20}$	$\frac{y^2}{3-y}$
$\frac{16t+8}{25-t^2} \quad (8)$	$\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c} \quad (7)$
$\frac{2t+1}{x^2+2x+1}$	$\frac{15c+15}{1-4+\frac{x}{x+1}} \quad (9)$
	$\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}$

## תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{3} \quad (1)$$

$$2.5 \quad (2)$$

$$\frac{1}{6t^3} \quad (3)$$

$$\frac{t-9}{54t^2} \quad (4)$$

$$\frac{(3y-1)(3-y)}{25} \quad (5)$$

$$\frac{x(x+1)}{2} \quad (6)$$

$$\frac{c}{c-4} \quad (7)$$

$$\frac{t+4}{-8(t+5)} \quad (8)$$

$$\frac{5}{x} \quad (9)$$

# מכינה יסודית במתמטיקה

## פרק 2 - משוואות אלגבריות

### תוכן העניינים

47	1. משוואות ממעלה ראשונה
49	2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה
52	3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון
53	4. משוואה ממעלה שנייה
55	5. משוואות דו-ריבועיות
57	6. משוואות עם פרמטרים
59	7. משוואות עם שורשים
61	8. משוואות עם ערך מוחלט
62	9. מערכת משוואות ממעלה שנייה
64	10. משוואות מתקדמות מסכמות
67	11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית

## משוואה ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה:  $ax = b$  (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא  $x = \frac{b}{a}$  כאשר  $a \neq 0$ .

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

ב.  $7 - 2x = 7$

א.  $6x + 2 = 8$

ד.  $2x + 6 = 8 + x$

ג.  $2x + x = 24$

ו.  $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$

ה.  $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$

ח.  $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$

ז.  $2 - 5x + 7 = -3x + 8$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

ב.  $7x - 4(3 - 4x) = -x$

א.  $3(x - 1) - 4 = 2$

ד.  $5x - (3x - 7)4 = 21$

ג.  $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$

ו.  $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$

ה.  $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4 & \text{ב. } \frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1 \\
 \text{ג. } \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15} & \text{ד. } \frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1 \\
 \text{ה. } \frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2 & \text{ו. } 5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1
 \end{array}$$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0 & \text{ב. } \frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{x} = \frac{1}{x+2} & \text{ד. } \frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2} \\
 \text{ה. } \frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x} & \text{ו. } \frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}
 \end{array}$$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} & \text{ב. } \frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12
 \end{array}$$

### תשובות סופיות:

- 1) א.  $x=1$     ב.  $x=0$     ג.  $x=8$     ד.  $x=2$     ה.  $x=2$     ו.  $x=-3$
- א.  $x=\frac{1}{2}$     ב.  $x=4$
- 2) א.  $x=3$     ב.  $x=\frac{1}{2}$     ג.  $x=2\frac{1}{4}$     ד.  $x=1$     ה.  $x=4$     ו.  $x=-1$
- 3) א.  $x=-18$     ב.  $x=-30$     ג.  $x=-1$     ד.  $x=1$     ה.  $x=-10$     ו.  $x=-21$
- 4) א.  $x=8$     ב.  $x=-1$     ג.  $x=-3$     ד.  $x=-2$     ה.  $x=2$     ו.  $x=\frac{1}{2}$
- 5) א.  $x=-6$     ב.  $x=-7$     ג.  $x=-7$     ד.  $x=6, x \neq 3$

## מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר  $a_1, b_1, c_1$  ו- $a_2, b_2, c_2$  הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x + 3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

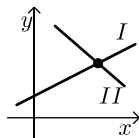
פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

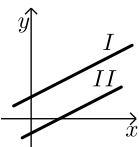
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



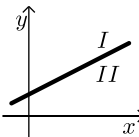
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

### פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה :  
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.  
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
  - פתרון ע"י השוואת מקדמים :
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
  2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
  3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

### הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

### שאלות:

#### 1) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases} \text{ ג.}$	$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \text{ ב.}$	$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases} \text{ א.}$
$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases} \text{ ו.}$	$\begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases} \text{ ה.}$	$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases} \text{ ד.}$

#### 2) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases} \text{ ב.}$	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \text{ א.}$
$\begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases} \text{ ד.}$	$\begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases} \text{ ג.}$

#### 3) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{cases} \text{ ב.}$	$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases} \text{ א.}$
---	--

4 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} & \text{ב.} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y & \text{א.} \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) & \text{ג.} \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

5 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 & \text{ג.} \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 & \text{ב.} \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 & \text{א.} \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$$

6 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} xy = 20 & \text{ב.} \\ y(3x-4) = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 & \text{א.} \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 & \text{ג.} \\ 6x + xy = -20 \end{cases}$$

### תשובות סופיות:

1 א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3)

2 א.  $(4, \frac{1}{3})$  ב.  $(-\frac{4}{5}, 9)$  ג. (4,1.6) ד. (-2,7)

3 א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4 א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2)

5 א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1)

6 א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4)

## משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

### סיכום כללי:

#### משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה:  $ax = b$  יתכן פתרון יחיד אם ורק אם  $a \neq 0$  מכיוון שניתן לחלק ולכתוב:  $x = \frac{b}{a}$ .

כאשר  $a = 0$  מתקבלת המשוואה  $0 \cdot x = b$  ויתכנו שני מצבים:

1. אם  $b = 0$  את המשוואה היא  $0x = 0$  ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם  $b \neq 0$  את המשוואה היא  $0x = b \neq 0$  ואין אף ערך של  $x$  המקיים אותה.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$x + 4 = 6 + x \quad (1) \qquad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2 \quad (2)$$

$$6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (3) \qquad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3 \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

- א. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
- ב. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
- ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
- ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

### תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5) א. -8      ב. -1      ג.  $-7x - 1$   
 ד.  $-7x + k$  כאשר  $k$  הוא מספר כלשהו השונה מ-1.

## משוואה ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

משוואה מהצורה:  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ), נקראת משוואה ריבועית. פתרונות המשוואה יסומנו ב-  $x_1$  ו-  $x_2$  ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**  
 אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.  
 דוגמא:  $x^2 + 5x - 4 = 0$ .
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**  
 אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.  
 דוגמא:  $x^2 + 4x + 4 = 0$ .
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**  
 אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.  
 דוגמא:  $x^2 + x + 4 = 0$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x^2 + 10x - 16 = 0$

ד.  $2x^2 - 6x + 5 = 0$

א.  $x^2 + 3x - 10 = 0$

ג.  $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

ד.  $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

א.  $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ג.  $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $b$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & x^2 - 36 = 0 \\ \text{ב.} & 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג.} & 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 \\ \text{ד.} & (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $c$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & -7x^2 - 14x = 0 \\ \text{ב.} & 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג.} & 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 \\ \text{ד.} & (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} \\ \text{ב.} & \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג.} & \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 \\ \text{ד.} & \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} \text{(1)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -5 \quad \text{ב. } x_1 = 2, x_2 = 8 \\ & \text{ג. } x = \frac{2}{5} \quad \text{ד. אין פתרון.} \\ \text{(2)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1 \quad \text{ב. } x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4} \\ & \text{ג. } x_1 = 1, x_2 = -10 \quad \text{ד. } x_1 = 0.6, x_2 = -2 \\ \text{(3)} & \text{א. } x = \pm 6 \quad \text{ב. } x = \pm \frac{3}{4} \\ & \text{ג. } x = \pm 3 \quad \text{ד. } x = \pm 1 \\ \text{(4)} & \text{א. } x_1 = 0, x_2 = -2 \quad \text{ב. } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5} \\ & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6} \quad \text{ד. } x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8} \\ \text{(5)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1.2 \quad \text{ב. } x = 5, x \neq -3 \\ & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = -5 \quad \text{ד. } x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7} \end{array}$$

## משוואות דו-ריבועיות:

### סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  כאשר הנעלם הוא  $x$ .  
 פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר:  $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$  ומציאתו.  
 לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי  $x$ .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4  
 כגון:  $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$  באמצעות פרמטר:  $t = x^2 - 1$   
 ובכך לפתור משוואה:  $t^2 + 3t - 2 = 0$  ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת  $x$ .  
 דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- |  |   |
|--|---|
| $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (2)   | $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$ (1)   |
| $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$ (4)   | $13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ (3)                               |
| $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$ (6)   | $x^6 + x^3 = 56$ (5)  |
| $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$ (8)   | $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$ (7)  |
| $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$ (10)  | $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$ (9)   |
| $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$ (12)   | $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$ (11)   |
| $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$ (14) | $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$ (13)                 |
| $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$ (16)     | $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$ (15)          |
| $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$ (18)   | $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$ (17) |
| $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$ (20)  | $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$ (19)                                       |

**תשובות סופיות:**

$$x = \pm 1 \quad (1)$$

$$x = \pm 1, \pm \sqrt{2} \quad (2)$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$x = \pm 2, \pm 5 \quad (4)$$

$$x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2 \quad (5)$$

$$x = -2, \sqrt[3]{4} \quad (6)$$

$$x_1 = 4, x_2 = 49 \quad (7)$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1 \quad (8)$$

$$x = 5, -1 \quad (9)$$

$$x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2} \quad (10)$$

$$x = -1 \quad (11)$$

$$x_{1,2} = 1, 3 \quad (12)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06 \quad (13)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2 \quad (14)$$

(15) אין פתרונות.

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}} \quad (16)$$

$$x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3 \quad (17)$$

$$x = -1, 2 \quad (18)$$

$$x = 3, -1 \quad (19)$$

$$x = \pm 1, 4, 6 \quad (20)$$

## משוואות עם פרמטרים:

### סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטרים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה:  $mx=4$  (כאשר  $x$  הוא הנעלם ו- $m$  הוא פרמטר) הוא  $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר  $m$ .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא  $m \neq 0$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b + 1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$\text{(1) א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$\text{(2) א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left( \frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left( m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$\text{(3) א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

## משוואות עם שורשים:

### סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה:  $\sqrt{x} = a$  יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא:  $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$ .

### הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה  $\sqrt{x} = a$  שבה  $a < 0$  אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- |  |   |
|--|---|
| $\sqrt{x+2} = x$ (2)                           | $\sqrt{2x+5} = 7$ (1)                               |
| $\sqrt{2x+7} + 4 = x$ (4)                      | $\sqrt{3x+1} + x = 13$ (3)                          |
| $\sqrt{10x+6} + 9 = x$ (6)                     | $\sqrt{x-1} + 3 = x$ (5)                            |
| $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$ (8)                     | $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$ (7)                           |
| $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$ (10)                   | $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$ (9)                          |
| $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$ (12)      | $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$ (11)                    |
| $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$ (14)           | $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ (13) |
| $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$ (16)            | $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$ (15)               |
| $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ (18) | $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$ (17)        |
|  | $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$ (19)      |

**תשובות סופיות:**

- |                           |               |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2                | $x = 22$ (1   |
| $x = 9$ (4                | $x = 8$ (3    |
| $x = 25$ (6               | $x = 5$ (5    |
| $x = 3.75$ (8             | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10               | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12           | $x = 6$ (11   |
| $x = 5$ (14               | $x = 3$ (13   |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15  |
| $x = 1$ (18               | $x = 6$ (17   |
|                           | $x = 2$ (19   |

## משוואות עם ערך מוחלט:

**סיכום כללי:**

**הגדרה:**

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא:  $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ .

**משוואה עם ערך מוחלט:**

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה:  $|x| = a$ .

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

**שאלות:**

פתור את המשוואות הבאות:

$$|3x-24|=x \quad (2) \qquad |3x+14|=7 \quad (1)$$

$$2x-|8-x|=10 \quad (4) \qquad |12-x|=3x \quad (3)$$

$$|14-3x|=2|x+5| \quad (6) \qquad |4x-5|=|2x+13| \quad (5)$$

$$|x+2|+6=|2x-4| \quad (8) \qquad |x|+7=|2x| \quad (7)$$

$$|10-3x|-|x+4|=|2x-6| \quad (10) \qquad |x+2|+|2x-6|=|4x+8| \quad (9)$$

**תשובות סופיות:**

$$x=6 \quad (4) \qquad x=3 \quad (3) \qquad x=6,12 \quad (2) \qquad x=-\frac{7}{3}, -7 \quad (1)$$

$$x=12, -1\frac{1}{3} \quad (8) \qquad x=\pm 7 \quad (7) \qquad x=24, \frac{4}{5} \quad (6) \qquad x=9, -1\frac{1}{3} \quad (5)$$

$$x=0 \quad (10) \qquad x=0, -12 \quad (9)$$

## מערכת משוואות ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

## תשובות סופיות:

- (2,4), (4,2) **(1)**
- (±2, ±1) **(3)**
- $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$  **(5)**
- (7,4) **(7)**
- $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$  **(9)**
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$  **(11)**
- (±4, -2) **(2)**
- (5, -2), (-5, 2) **(4)**
- $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$  **(6)**
- (5, -3) **(8)**
- $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$  **(10)**
- (4,6) , (-6,-4) , (3,8) , (-8,-3) **(12)**
- (-1.65, 6.35) , (-6.35, 1.65) , (7,4) , (-4,-7) **(13)**
- (5,45) , (-5,-45) , (45,5) , (-45,-5) **(14)**

## משוואות מסכמות מתקדמות:

### סיכום כללי:

### תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.
- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.
- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.
- משוואה עם פרמטרים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטרים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטרים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 x^2 + 5x - \sqrt{x^2 + 5x} - 30 = 0 & \text{(2)} & x + \sqrt{x+6} - 6 = 0 & \text{(1)} \\
 2x^2 + 6x - \sqrt{x^2 + 3x + 5} = 5 & \text{(4)} & 4x^2 + 16x - 4\sqrt{x^2 + 4x} - 3 = 0 & \text{(3)} \\
 x^2 - \sqrt{6x^2 - 15} = 1 & \text{(6)} & x^2 - \sqrt{16x^2 + 48} + 7 = 0 & \text{(5)} \\
 \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5} = \frac{7}{\sqrt{x-1}} & \text{(8)} & \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x & \text{(7)} \\
 \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} & \text{(9)} \\
 \sqrt{x + \sqrt{14x - 49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x - 49}} = \sqrt{14} & \text{(10)} \\
 \sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}} - \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 2 & \text{(11)} \\
 \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x} & \text{(12)}
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות עבור  $a > 0$ :

$$x^2 + ax - 2a\sqrt{3x^2 + 3ax - 9a^2} = 0 \quad \text{(14)} \qquad x^2 + ax - 2a\sqrt{x^2 + ax - a^2} = 0 \quad \text{(13)}$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 |4 - |5 - x|| = |x + 3| & \text{(16)} & |3 - |2 - x| + |x|| = 1 & \text{(15)} \\
 \sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x+1| & \text{(18)} & \left| \frac{x + |3 - x|}{x + 2} \right| = 18 & \text{(17)} \\
 & & \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0 & \text{(19)}
 \end{array}$$

$$\frac{|x+2|}{|x|+2} = |2-x|+2 : \text{הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה:} \quad \text{(20)}$$

**תשובות סופיות:**

(1)  $x = 3$

(2)  $x_1 = 4, x_2 = -9$

(3)  $x_1 = 0.5, x_2 = -4.5$

(4)  $x_1 = 1, x_2 = -4$

(5)  $x_{1,2} = \pm 1$

(6)  $x_{1,2} = \pm 2$

(7)  $x = 1$

(8)  $x = 3$

(9)  $x = 2$

(10)  $3.5 \leq x \leq 7$

(11)  $x = 4$

(12)  $x = 1, x = \frac{9}{16}$

(13)  $x_1 = -2a, x_2 = a$

(14)  $x_1 = -2a, x_2 = 3a$

(15)  $x \leq 0$

(16)  $x = -1$

(17)  $x = -\frac{39}{18}, -\frac{33}{18}$

(18)  $x \leq \frac{5}{4}, x = -\frac{1}{4}$

(19)  $x = -\sqrt{5}$

(20) שאלת הוכחה.

## ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

### סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

### שאלות:

#### פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

$$(2y+5)^3 \quad (2)$$

$$(x-3)^3 \quad (1)$$

$$8y^3 + 343 \quad (4)$$

$$8x^3 - 1 \quad (3)$$

$$x^3y^6z^9 - 1 \quad (6)$$

$$a^6 - 27 \quad (5)$$

$$64mn^4 - 8m^4n^7 \quad (8)$$

$$11 + 88x^{12} \quad (7)$$

$$\frac{x^3 + 64}{x^2 + 4x} \quad (10)$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \quad (9)$$

#### משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

$$125x^3 = 1 - 15x + 75x^2 \quad (12)$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \quad (11)$$

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \quad (14)$$

$$x^3 + x - 30 = 0 \quad (13)$$

#### משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (16)$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad (15)$$

## מערכת משוואות:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad \text{(17) פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad \text{(18) פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

## תשובות סופיות:

$$8y^3 + 60y^2 + 150y + 125 \quad \text{(10)}$$

$$(2y + 7)(4y^2 - 17y + 49) \quad \text{(11)}$$

$$(xy^2z^3 - 1)(x^2y^4z^6 + xy^2z^3 + 1) \quad \text{(12)}$$

$$8mn^4(2 - mn)(4 + 2mn + m^2n^2) \quad \text{(13)}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 16}{x} \quad \text{(14)}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{(15)}$$

$$x_{1,2,3} = -2, -1, 3 \quad \text{(16)}$$

$$x_{1,2,3} = -2.5, -1, 1 \quad \text{(17)}$$

$$(-5, -6), (6, 5) \quad \text{(18)}$$

$$x^3 - 9x + 27x - 27 \quad \text{(1)}$$

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \quad \text{(2)}$$

$$(a^2 - 3)(a^4 + 3a^2 + 9) \quad \text{(3)}$$

$$8(1 + 2x^4)(1 - 2x^4 + 4x^8) \quad \text{(4)}$$

$$\frac{1}{x + 2} \quad \text{(5)}$$

$$x = 4 \quad \text{(6)}$$

$$x = 3 \quad \text{(7)}$$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{2}, 1, 2 \quad \text{(8)}$$

$$(3, 6), (6, 3) \quad \text{(9)}$$

# מכינה יסודית במתמטיקה

פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

69	1. אי שוויונים ממעלה ראשונה
71	2. אי שוויונים ממעלה שנייה
72	3. אי שוויונים ממעלה שלישית
73	4. אי שוויונים עם מנה
75	5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו
76	6. שאלות מסכמות
78	7. אי שוויונים עם שורשים
80	8. מציאת תחום הגדרה
82	9. אי שוויונים עם ערך מוחלט

## אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

#### פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

#### פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$6x > 2(3x-1)$ (2)	$45x - 26 > 109$ (1)
$(x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + 20$ (4)	$2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6)$ (3)
$4(6x-8) < 8(3x-4)$ (6)	$\frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3}$ (5)
$\frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7$ (8)	$\frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x$ (7)

**תשובות סופיות:**

$$x > 3 \quad (1)$$

$$x \text{ כל} \quad (2)$$

$$x \text{ אף} \quad (3)$$

$$x > -2 \quad (4)$$

$$x < 5 \quad (5)$$

$$x \text{ אף} \quad (6)$$

$$x \geq 12 \quad (7)$$

$$x > -13 \quad (8)$$

## אי-שוויונים ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה:  $ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$  כאשר  $a \neq 0$ .

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| $x^2 - 12x > -32$ (2)         | $x^2 < 144$ (1)                        |
| $(x+2)(x+4) < 35$ (4)         | $(x+2)(x+5) < 0$ (3)                   |
| $(x-3)(x-7) \geq 8x - 56$ (6) | $-x^2 + 13x + 30 < 0$ (5)              |
| $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$ (8)  | $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$ (7)            |
| $x^2 - 10x + 25 > 0$ (10)     | $-3x^2 + 12x > 0$ (9)                  |
| $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$ (12)  | $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$ (11) |

### תשובות סופיות:

- |                           |                      |
|---------------------------|----------------------|
| $x < 4, x > 8$ (2)        | $-12 < x < 12$ (1)   |
| $-9 < x < 3$ (4)          | $-5 < x < -2$ (3)    |
| $x \leq 7, x \geq 11$ (6) | $x < -2, x > 15$ (5) |
| $-4 \leq x \leq 0$ (8)    | $-4 < x < 8$ (7)     |
| $x > 5, x < 5$ (10)       | $0 < x < 4$ (9)      |
| $x$ כל (12)               | $x < 3, x > 5$ (11)  |

## אי-שוויונים ממעלה שלישית:

### סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון:  $x^4 + 2x^2 + 1 < 0$ ,  $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 > 0$ . וכי.  
 בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.  
 לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                                      |                                    |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| $x(x^2 + x + 1) > 0$ (2)             | $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ (1)          |
| $x^3 - 25x \geq 0$ (4)               | $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ (3) |
| $(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0$ (6) | $(x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0$ (5)    |
| $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ (8)         | $(x^2 - x - 6)(x - 1) < 0$ (7)     |
| $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ (10)           | $(x^2 + 6)(x+3) > 0$ (9)           |

### תשובות סופיות:

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| $x > 0$ (2)                      | $1 < x < 2, x > 3$ (1)                      |
| $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ (4) | $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ (3) |
| $x \leq 1\frac{2}{3}$ (6)        | $x > 2$ (5)                                 |
| $x \leq 0, x = 3$ (8)            | $x < -2, 1 < x < 3$ (7)                     |
| $x < 1, 2 < x < 4$ (10)          | $x > -3$ (9)                                |

## אי-שוויונים עם מנה:

### סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה:  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  או  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$  נקרא אי-שוויון עם מנה, בו  $f(x)$

ו- $g(x)$  הם פולינומים כלשהם.

למשל:  $\frac{2x+4}{x^2-3x+4} < 0$  בו:  $f(x) = 2x+4$  ו- $g(x) = x^2-3x+4$ .

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של  $f(x)$  ושל  $g(x)$  ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

### הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (2)	$\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (1)
$\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (4)	$\frac{1}{x^2-16} > 0$ (3)
$\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (6)	$\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (5)
$\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (8)	$\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (7)
$\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (10)	$\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (9)

**תשובות סופיות:**

$$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 3, x > 3 \quad (4)$$

$$x > 1 \quad (6)$$

$$2 < x < 3 \quad (8)$$

$$x < 2, x > 6 \quad (10)$$

$$-3 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$x < -4, x > 4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (5)$$

$$x > -2 \quad (7)$$

$$1 \leq x \leq 6 \quad (9)$$

## אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

### סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת יוגם!). למשל במקום לכתוב:  $a < b$  וגם  $b < c$ , ניתן לכתוב:  $a < b < c$ . מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (2)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (1)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (4)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (3)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (6)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (5)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (8)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$x > -3\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 4 \quad (1)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$x > 0 \quad (3)$$

$$x \geq 10 \quad (6)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (5)$$

$$\emptyset \quad (8)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (7)$$

## שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (1)$$

$$\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \leq 0 \quad (3) \quad x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (5) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (4)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (7) \quad x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (6)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (9) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (11) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (13) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (12)$$

$$6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (15) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (14)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (17) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

(18) לאלו ערכי  $x$  נמצאת הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{x-3}$  מעל הפונקציה  $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$  ?

## תשובות סופיות:

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| $x \leq -4$ (2)                           | $-2 < x \leq -\frac{3}{4}$ (1)       |
| $x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5$ (4) | $-4 \leq x < 2, 3 \leq x$ (3)        |
| $x < -3, 0 < x < 2.5$ (6)                 | $-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12$ (5) |
| $2.5 \leq x < 8, x > 8$ (8)               | $x < -1, 2 < x < 6, x > 6$ (7)       |
| $x < -3, 0 < x < 1, x > 4$ (10)           | $x > 3$ (9)                          |
| $x > 7$ (12)                              | $-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3$ (11)  |
| $x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4$ (14)      | $x < -2, 2 < x < 4$ (13)             |
| $x \neq 1$ (16)                           | $x \neq 1$ (15)                      |
| $-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3$ (18)       | $x \geq 7$ (17)                      |

## אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a \geq 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	$0 \leq f(x) < a^2$
$a < 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)} > a$	כל $x$ בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2x-5} \geq 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{x+3} < 7 \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2+x-6} < x-3 \quad (4)$$

$$\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x \quad (3)$$

$$\sqrt{x^2+5x+6} - \sqrt{x^2-x+1} < 1 \quad (6)$$

$$\sqrt{x^2+3x+2} - 1 < \sqrt{x^2-x+1} \quad (5)$$

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2 \quad (8)$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2} \quad (7)$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x} \quad (10)$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 5\sqrt{\frac{x}{x+9}} \geq 4 \quad (12)$$

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \quad (11)$$

**תשובות סופיות:**

(1)  $-3 \leq x < 46$

(2)  $x \geq 3$

(3)  $x < -10, x > 1$

(4)  $\emptyset$

(5)  $x \leq -2, -1 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$

(6)  $x \leq -3, -2 \leq x < \frac{-13 + \sqrt{73}}{16}$

(7)  $\frac{12}{25} < x \leq \frac{1}{2}$

(8)  $x < 2\sqrt{5} - 4$

(9)  $1 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

(10)  $שזה: -2.618 < x \leq 1 - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x \leq 1$

(11)  $2.5 \leq x < 3$

(12)  $x < -9, x > 0$

## תחום הגדרה:

### שאלות:

1 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{3x-4}$	ב. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$
ג. $f(x) = \sqrt{12x - x^2 - x^3}$	ד. $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$
ה. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$	ו. $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

2 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3}$	ב. $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$
ג. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$	ד. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

3 תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{ax - x^2 - 4}$  הוא  $1 \leq x \leq 4$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

4 תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$  הוא  $x \leq -2$ ,  $x > 2$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

5 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$ ,  $a$  פרמטר חיובי.

א. הבע באמצעות  $a$  את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$ .

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר  $a$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x \geq 1\frac{1}{3}$     ב.  $x \leq -1, x \geq 6$     ג.  $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד.  $-5 \leq x < -2, x > 2$     ה.  $-2 \leq x < 2, x > 2$     ו.  $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א.  $x \geq 7$     ב.  $-6 \leq x \neq -2$     ג.  $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד.  $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3)  $a = 5$
- (4)  $a = 2$
- (5) א.  $x \geq a^2 - 6$     ב.  $0 < a \leq 1$

## אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

$ x  > a$	$ x  < a$	מקרה
$x < -a \cap x > a$	$-a < x < a$	פתרון

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

(1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א.  $|x+2| < 3$       ב.  $|2x+1| > 7$   
 ג.  $|6-2x| < x$       ד.  $|2x+1|-3x > 4$

(2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א.  $1 < |4-3x| < 7$       ב.  $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א.  $|x^2 + 6x - 4| < 12$       ב.  $|x^2 + x - 10| > 3x - 2$   
 ג.  $|x^2 - 3x| < 4$       ד.  $|6x^2 - 7x - 4| > 1$   
 ה.  $x^2 - 6|x| + 5 \leq 0$       ו.  $x^2 - 6|x+1| - 1 > 0$

(4) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $ x-3 + 2x+2 >7$	ב. $ x+8 <11- 1-3x $
ג. $ 3-2x -11>4- 6+x $	ד. $ 2x-6 + x+5 >14- 1-x $
ה. $ 5+4x - 3-x +\left 4-\frac{1}{2}x\right \leq 22$	ו. $ x+3 + x^2-5x+4 <19$

(5) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\left \frac{3x-1}{x-2}\right \geq 3$	ב. $1\leq\left \frac{x+2}{x-2}\right \leq 2$
ג. $\frac{ x-6 +8x}{x-12}\leq 12$	ד. $\left \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right >5$

(6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

א. $\sqrt{x^2- x-12 }<x$	ב. $2-\sqrt{1-x}\leq x+2 -3$
ג. $\sqrt{ 2x+1 -x-1}\leq 4- 3x $	ד. $\frac{ x+2 - x }{\sqrt{4-x^3}}>0$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $-5 < x < 1$   
 ג.  $2 < x < 6$
- (2) א.  $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$  או  $-1 < x < 1$   
 ב.  $-5\frac{1}{2} < x < -3$
- (3) א.  $-2 < x < 2$  או  $-8 < x < -4$   
 ג.  $-1 < x < 4$
- ה.  $1 \leq x \leq 5$  או  $-5 \leq x \leq -1$
- (4) א.  $2 < x$  או  $x < -2$   
 ג.  $4 < x$  או  $x < -6$   
 ה.  $-7\frac{3}{7} \leq x \leq 4$
- (5) א.  $\frac{7}{6} \leq x < 2$ ,  $x > 2$   
 ג.  $x < 12$ ,  $x \geq 46$
- (6) א.  $x = -1$ ,  $x \geq 3$ ,  $x \neq 12$   
 ג.  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$
- ב.  $3 < x$  או  $x < -4$   
 ד.  $x < -1$
- ב.  $-\frac{1}{2} < x < -3$   
 ד.  $x < -\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$ ,  $x > \frac{5}{3}$
- ב.  $x < 2$  או  $4 < x$   
 ד.  $x < -5$ ,  $x > 7$
- ב.  $-1 < x < 1$   
 ד.  $x < -1$  או  $4 < x$
- ג.  $-2 < x < 6$
- ב.  $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ ,  $x \geq 6$
- ד.  $\frac{1}{2} < x < 1$ ,  $1 < x < 2$ ,  $2 < x \leq 4$
- ב.  $x \leq \frac{-15 + \sqrt{33}}{2}$   
 ד.  $-1 < x < \sqrt[3]{4}$

# מכינה יסודית במתמטיקה

פרק 4 - הפרבולה

תוכן העניינים

1. הפרבולה ..... (ללא ספר)

# מכינה יסודית במתמטיקה

פרק 5 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

85	.....	1. חוקי החזקות
90	.....	2. חוקי השורשים
94	.....	3. כתיבה מדעית של מספרים

## חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 a^n \cdot a^m = a^{m+n} & .3 & a^1 = a & .2 & a^0 = 1 & .1 \\
 a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m & .6 & (a^n)^m = a^{n \cdot m} & .5 & \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & .4 \\
 \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m & .9 & a^{-m} = \frac{1}{a^m} & .8 & \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & .7
 \end{array}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 b^2 b^5 b^{12} b^3 & .ג & t^3 t^5 t^7 & .ב & a^2 a^6 & .א \\
 \frac{c^6}{c^2} & .ו & \frac{n^{14}}{n^9} & .ה & \frac{k^8}{k^3} & .ד \\
 \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} & .ט & \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & .ח & \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & .ז \\
 \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8} & .יב & \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & .יא & 3^2 3^3 3^4 & .י
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4} & .ג & \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & .ב & \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & .א
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא:  $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין הביטוי  $243 \cdot 2^n$  לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

$\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$ .ב.	$\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$ .א.
$2^3 + 2^5$ .ד.	$\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$ .ג.

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק:  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ .

$(x^3 x^{10})^2$ .ג.	$(c^3)^{10}$ .ב.	$(a^2)^4$ .א.
$\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$ .ו.	$\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$ .ה.	$\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$ .ד.
$\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$ .ט.	$\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$ .ח.	$\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$ .ז.
$\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$ .יב.	$\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$ .יא.	$\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$ .י.

(6) לפניך הביטויים הבאים:  $\left( (3^2)^3 \right)^4$  ו-  $\left( (3^6)^n \right)^2$ .

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

$\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$ .ג.	$\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$ .ב.	$\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$ .א.
---	---	-------------------------------

(8) פשט את הביטויים הבאים:

$125 \cdot 25 \cdot 5^5$ .ג.	$64^2 2^3 8^2$ .ב.	$3^2 9 \cdot 81^2$ .א.
$\frac{\left( (3^4)^4 \right)^5}{81^3 27^4 3^5}$ .ו.	$\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$ .ה.	$\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$ .ד.

9 פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \\ \text{ב.} & \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \\ \text{ג.} & \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} \end{array}$$

10 פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $(ab)^n = a^n b^n$  ו-  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & (a^2b)^3 & \text{ב.} & (m^4n^3)^5 & \text{ג.} & (x^{12}y^3)^3 \\ \text{ד.} & \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 & \text{ה.} & \left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7 & \text{ו.} & \left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3 \\ \text{ז.} & \left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6 & \text{ח.} & \left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2 & \text{ט.} & \left(\frac{(b^{12}c)^2c^{14}}{c(c^3b^5)^4b^3}\right)^2 \end{array}$$

11 חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 & \text{ב.} & \left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2 & \text{ג.} & \left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^2 7)^5}\right)^3 \end{array}$$

12 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^6} & \text{ב.} & \frac{1}{5^3} & \text{ג.} & \frac{1}{2^{10}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{8} & \text{ה.} & \frac{1}{81} & \text{ו.} & \frac{1}{125} \end{array}$$

13 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^{-3}} & \text{ב.} & \frac{1}{3^{-2}} & \text{ג.} & \frac{1}{5^{-3}} \end{array}$$

14) חשב את הביטויים הבאים :

ג.  $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב.  $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א.  $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו.  $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה.  $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד.  $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג.  $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב.  $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$

א.  $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

16) פשט את הביטויים הבאים :

ג.  $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב.  $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א.  $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $a^8$  ב.  $t^{15}$  ג.  $b^{22}$  ד.  $k^5$  ה.  $n^5$  ו.  $c^4$   
 ז.  $a^7$  ח.  $x^3$  ט. 1 י.  $3^9$  יא.  $2^8$  יב.  $5^5$
- (2) א. 18 ב.  $ab$  ג.  $x^6 y^{10}$
- (3)  $n=16$
- (4) א. 2 ב.  $\frac{1}{3}$  ג.  $\frac{5}{8}$  ד. 40
- (5) א.  $a^8$  ב.  $c^{30}$  ג.  $x^{26}$  ד.  $b$  ה.  $n^3$  ו.  $d^{10}$   
 ז. 2 ח. 9 ט.  $8^{18}$  י.  $3^7$  יא. 3 יב.  $3^5$
- (6)  $n=2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א.  $3^{12}$  ב.  $2^{21}$  ג.  $5^{10}$  ד.  $2^{12}$  ה.  $2^7$  ו.  $3^{51}$
- (9) א.  $\frac{2b^3}{a}$  ב.  $k$  ג.  $3\frac{1}{5}$  ד.  $\frac{1}{x} + x$
- (10) א.  $a^6 b^3$  ב.  $m^{20} n^{15}$  ג.  $x^{36} y^9$  ד.  $\frac{a^{12}}{b^8}$  ה.  $\frac{i^{28}}{k^{21}}$  ו.  $a^{21} b^3$
- ז.  $x^{12} y^{18}$  ח.  $t^4 r^{12}$  ט.  $b^2 c^6$  ג. 8
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א.  $4^{-6}$  ב.  $5^{-3}$  ג.  $2^{-10}$  ד.  $2^{-3}$  ה.  $3^{-4}$  ו.  $5^{-3}$
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד.  $\frac{1}{9}$  ה. 1000 ו. 3
- (15) א.  $5^{24} \cdot 3^{12}$  ב.  $\frac{4^2}{3^{23}}$  ג.  $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א.  $a^{1-5n}$  ב.  $k$  ג.  $m^{2n+12}$

## חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} & .3 & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & .2 & \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} & .1 \\
 \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} & .6 & \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} & .5 & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & .4
 \end{array}$$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה:  $\sqrt[n]{a^m}$ .

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } 3^{\frac{1}{4}} & \text{ב. } 2^{\frac{3}{5}} & \text{ג. } 6^{\frac{5}{6}} \\
 \text{ד. } -12^{\frac{2}{7}} & \text{ה. } -(-4)^{\frac{1}{3}} & \text{ו. } -(-3)^{\frac{3}{4}} \\
 \text{ז. } 5^{-\frac{1}{4}} & \text{ח. } 27^{-\frac{1}{3}} & \text{ט. } 64^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \sqrt{49} & \text{ב. } -\sqrt{25} & \text{ג. } \sqrt[3]{8} \\
 \text{ד. } -\sqrt[3]{128} & \text{ה. } \sqrt[3]{(-2)^6} & \text{ו. } (\sqrt[5]{1024})^2 \\
 \text{ז. } (\sqrt[5]{-243})^3 & \text{ח. } \sqrt[4]{-16} & \text{ט. } \sqrt[4]{-25^2} \\
 \text{י. } \sqrt[4]{(-25)^2} & &
 \end{array}$$

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

ג.  $128^{-\frac{2}{7}}$

ב.  $32^{\frac{3}{5}}$

א.  $8^{\frac{2}{3}}$

ו.  $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ה.  $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$

ד.  $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$

ט.  $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

ח.  $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$

ז.  $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא :  $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[3]{128}}$

21) פשט את הביטויים הבאים :

ג.  $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

ב.  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

א.  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

ו.  $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ה.  $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

ד.  $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

ט.  $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$

ח.  $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$

ז.  $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים :

ג.  $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ב.  $5\sqrt{3}$

א.  $3\sqrt{2}$

ה.  $x\sqrt{x}$

ד.  $2\sqrt[3]{3}$

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש :

ג.  $2\sqrt[5]{3}$

ב.  $4\sqrt[3]{2}$

א.  $2\sqrt{5}$

ו.  $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ה.  $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$

ד.  $\frac{\sqrt{24}}{2}$

ט.  $-5\sqrt{-2}$

ח.  $-5\sqrt[4]{2}$

ז.  $-5\sqrt[3]{2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א.  $\sqrt{12}$       ב.  $\sqrt{48}$       ג.  $\sqrt{63}$
- ד.  $\sqrt[3]{54}$       ה.  $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א.  $\sqrt{40}$       ב.  $\sqrt{50}$       ג.  $\sqrt{320}$
- ד.  $\sqrt[3]{108}$       ה.  $\sqrt[3]{56}$       ו.  $\sqrt[3]{160}$
- ז.  $\sqrt[4]{162}$       ח.  $\sqrt[5]{972}$       ט.  $\sqrt[9]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $\sqrt{18} - \sqrt{8}$       ב.  $\sqrt{7} + \sqrt{63}$       ג.  $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד.  $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$       ה.  $\frac{20}{\sqrt{5}}$       ו.  $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז.  $\frac{16}{\sqrt{2}}$       ח.  $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$       ט.  $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$       ב.  $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$       ג.  $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד.  $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$       ה.  $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$       ו.  $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

## תשובות סופיות:

- (17) א.  $\sqrt[4]{3}$     ב.  $\sqrt[5]{2^3}$     ג.  $\sqrt[6]{6^5}$     ד.  $-\sqrt[7]{12^2}$     ה.  $-\sqrt[3]{-4}$     ו.  $\phi$
- ז.  $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$     ח.  $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$  או  $\frac{1}{3}$     ט.  $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$  או  $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7    ב. -5    ג. 2    ד. -2    ה. 4    ו. 16
- ז. -27    ח.  $\phi$     ט.  $\phi$     י. 5
- (19) א. 4    ב.  $\frac{1}{8}$     ג.  $\frac{1}{4}$     ד. 125    ה.  $\frac{32}{243}$     ו.  $\frac{49}{16}$
- ז.  $\frac{27}{4}$     ח.  $\frac{10}{49}$     ט.  $\frac{1}{2}$
- (20)  $\sqrt{2}$
- (21) א. 4    ב. 9    ג. 20    ד. 6    ה. 3    ו. 2
- ז.  $\sqrt{2}$     ח.  $\sqrt{5}$     ט.  $\sqrt{2}$
- (22) א.  $\sqrt{18}$     ב.  $\sqrt{75}$     ג.  $\sqrt{9}$     ד.  $\sqrt[3]{24}$     ה.  $\sqrt{x^3}$
- (23) א.  $\sqrt{20}$     ב.  $\sqrt[3]{128}$     ג.  $\sqrt[5]{96}$     ד.  $\sqrt{6}$     ה.  $\sqrt[3]{3}$
- ו.  $\sqrt[4]{40 \frac{1}{2}}$     ז.  $\sqrt[3]{-250}$     ח.  $-\sqrt[4]{1250}$     ט.  $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א.  $2\sqrt{3}$     ב.  $4\sqrt{3}$     ג.  $3\sqrt{7}$     ד.  $3\sqrt[3]{2}$     ה.  $x^2\sqrt{x}$
- (25) א.  $2\sqrt{10}$     ב.  $5\sqrt{2}$     ג.  $8\sqrt{5}$     ד.  $3\sqrt[3]{4}$     ה.  $2\sqrt[3]{7}$     ו.  $2\sqrt[5]{5}$
- ז.  $3\sqrt[4]{2}$     ח.  $3\sqrt[5]{4}$     ט.  $2\sqrt[6]{3}$
- (26) א.  $\sqrt{2}$     ב.  $4\sqrt{7}$     ג.  $6\sqrt[3]{2}$     ד.  $\sqrt[4]{5}$     ה.  $4\sqrt{5}$     ו.  $\sqrt{2}$
- ז.  $8\sqrt{2}$     ח.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  או  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$     ט.  $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$  או  $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א.  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$     ב.  $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$     ג.  $\sqrt[6]{5^{11}}$     ד. 27    ה.  $\frac{1}{7}$     ו.  $\sqrt[8]{2^5}$

## כתיבה מדעית של מספרים:

### שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000	ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000	ד. 23,400,000
ה. 0.0003	ו. 0.00000042
ז. 0.000000042	ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$	ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$	ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$	ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$	ח. $(0.000000007)^3$

### תשובות סופיות:

28) א. $1.5 \cdot 10^7$	ב. $1.5 \cdot 10^6$	ג. $1.5 \cdot 10^{11}$	ד. $2.34 \cdot 10^7$	ה. $3 \cdot 10^{-4}$
ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$	ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$	ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$		
29) א. $9 \cdot 10^{12}$	ב. $4 \cdot 10^{12}$	ג. $1.25 \cdot 10^{11}$	ד. $1.25 \cdot 10^{14}$	ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$
ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$	ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$	ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$		

# מכינה יסודית במתמטיקה

## פרק 6 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

### תוכן העניינים

95	1. משוואות מעריכיות יסודיות.....
97	2. משוואות עם חיבור וחסור איברים.....
99	3. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס.....
100	4. משוואות מסכמות שונות.....
101	5. משוואות עם קבוע אוילר.....
102	6. מערכת משוואות מעריכיות.....
103	7. אי שוויונים מעריכיים.....
104	8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך.....

## משוואות מעריכיות יסודיות:

### סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה:  $a^x = a^y$  הוא:  $x = y$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = 1$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = 1 = a^0$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = b^x$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = b^x = 1$  ללא תלות בבסיסים.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א.  $2^x = 16$       ב.  $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג.  $10^{x-2} = 10000^{x+1}$       ד.  $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה.  $(2^x \cdot 32)^3 = 8$       ו.  $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז.  $\frac{7^x}{343^3} = 1$       ח.  $(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

(2) פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א.  $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$       ב.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג.  $25 \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א.  $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$       ב.  $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג.  $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$       ד.  $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה.  $2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8(\sqrt{8})^{-\sqrt{x}}$       ו.  $5^x \cdot \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$	ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$
ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$	ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$
ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$	ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$
ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = (2\sqrt{5})^{4-x}$	

### תשובות סופיות:

א. $x = 4$	ב. $x = -\frac{1}{3}$	ג. $x = -2$	ד. $x = 2, 8$	ה. $x = -4$
ו. $x = 1, -\frac{1}{5}$	ז. $x = 9$	ח. $x = 1$		
א. $x = -1$	ב. $x = -2$	ג. $x = 3, -2$		
א. $x = -\frac{1}{2}$	ב. $x = 1$	ג. $x = -\frac{8}{19}$	ד. $x = 2, -\frac{2}{3}$	ו. $x = 25$
א. $x = 0$	ב. $x = 4$	ג. $x = 2$	ד. $x = 2$	ה. $x = 5$
ו. $x = 1.5$	ז. $x = \frac{2}{3}$			

## משוואות עם חיבור וחסור איברים:

### סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- $t$ , למשל במשוואה:  $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$  נסמן:  $2^x = t$ .  
 נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות  $t$  ונפתור אותה עבורו.  
 לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- $x$  המתאימים.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב.  $8^x + 3 \cdot 8^x = 256$

א.  $2^x + 6 \cdot 2^x = 56$

ד.  $2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$

ג.  $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב.  $5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$

א.  $81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$

ד.  $\sqrt{10000^{x+1}} - \sqrt[4]{10^{8x+1}} = \sqrt[4]{1000} \cdot (\sqrt[4]{10^7} - 1)$

ג.  $(2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 15$

ו.  $5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$

ה.  $6^{-x} - 5 \cdot 36^{-\left(\frac{x+1}{2}\right)} = 186$

ח.  $4^{x+2} - 6 \cdot 4^x = 7 \cdot 12^{x+1} + 6 \cdot 12^x$

ז.  $2 \cdot 10^{x+1} + 10^{x+2} = 3 \cdot 5^{x+1}$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

ב.  $16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$

א.  $9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$

ד.  $4^{-x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$

ג.  $6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$

ו.  $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} + 1 = 0$

ה.  $\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

ב.  $\frac{7^x}{7^x-4} + \frac{8}{7^x+5} = 3$

א.  $\frac{20}{9^x+1} = 3 - \frac{8}{9^x-1}$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$	ב. $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$
ג. $36^x - 6^{x+1} \cdot 3^x + 8 \cdot 9^x = 0$	ד. $4 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$
ה. $25 \cdot 5^{2x} + 16 \cdot 15^x = 9^{x+1}$	ו. $9^x + 4^x - 6^x = \frac{7}{6^{1-x}}$
ז. $\frac{8^{2x} - 8}{7} = 4^x - 2$	ח. $2^{3x} - 2^{2x+2} - 2^x + 4 = 0$

### תשובות סופיות:

א. $x=3$	ב. $x=2$	ג. $x=4$	ד. $x=1$
א. $x=\frac{1}{2}$	ב. $x=0$	ג. $x=\frac{1}{3}$	ד. $x=\frac{1}{4}$
ה. $x=-3$	ו. $x=-2$	ז. $x=-3$	ח. $x=-2$
א. $x=2,3$	ב. $x=1,-2$	ג. $x=0$	ד. $x=0$
ה. $x=0,1$	ו. $x=-6,-9$		
א. $x=1, -\frac{1}{2}$	ב. $x=1$		
א. $x=\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	ב. $x=1,3$	ג. $x=1,2$	ד. $x=1,0$
ה. $x=-2$	ו. $x=1,-1$	ז. $x=0, \frac{1}{2}$	ח. $x=0,2$

## משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

### סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי. יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

### הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- $x$  עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(\sqrt{3-x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{3-x})^x \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3-x}} \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}} = |x-3|^{-1} \quad (3)$$

### תשובות סופיות:

$$x = \frac{1}{4}, 1, 2 \quad (1)$$

(2) אין פתרון.

$$x = 0, 1, 2, 4 \quad (3)$$

## משוואות מסכמות שונות:

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$.5(2^x - 2) + 2 = 4^x - 2^x \quad (1)$$

$$\cdot \frac{6}{4^{x-1} - 1} + \frac{2^{x+1}}{2^x + 2} = \frac{2^x + 4}{2^x - 2} \quad (2)$$

$$\cdot \frac{4^x}{4^x - 10} - \frac{4}{2^{2x-1} - 3} = \frac{32}{16^x - 4^{x+2} + 60} \quad (3)$$

$$\cdot 3^{2x^2+2} - 3^{x^2+3} + 9 = 3^{x^2+1} \quad (4)$$

$$\cdot \sqrt{x}{10} = 4 \cdot \sqrt[2]{x}{10} + 60 \quad (5)$$

$$\cdot \sqrt[x-1]{8 \cdot 2^{x+1}} = (\sqrt{x}{2})^2 \cdot \sqrt[x-1]{x}{32} \quad (6)$$

$$\cdot 10 \cdot 4^{x+2} - 16 \cdot 10^x - 90 \cdot 6^x + 36 \cdot 15^x = 0 \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$\cdot x = 1, 2 \quad (1)$$

$$\cdot x = 3 \quad (2)$$

$$\cdot x = 1.5 \quad (3)$$

$$\cdot x = 1, -1 \quad (4)$$

$$\cdot x = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\cdot x = -3 \quad (6)$$

$$\cdot x = 1, -2 \quad (7)$$

## משוואות עם קבוע אוילר:

### סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות  $e$  וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא  $e$  זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

$$\text{א. } e^{3x} = e^{2x-1} \quad \text{ב. } e^{5x-1} = e \cdot e^{6x+1}$$

$$\text{ג. } e^{x-5} = (e^{1-x})^3 \quad \text{ד. } e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

$$\text{א. } e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad \text{ב. } \sqrt[3]{e^{x+1}} \cdot e^2 = e^x \sqrt{e}$$

$$\text{ג. } e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{ד. } e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

$$\text{א. } xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x \quad \text{ב. } e^{3x} = x \cdot e^{3x}$$

$$\text{ג. } xe^{x^2} = \frac{x}{\sqrt{e^x}} \quad \text{ד. } \sqrt[3]{e^{3x-1}} \cdot x = xe^x$$

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = -3 \quad \text{ג. } x = 2 \quad \text{ד. } x = 1, \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = \frac{11}{4} \quad \text{ג. } x = 0 \quad \text{ד. } x = 1, -1$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0, \frac{1}{4} \quad \text{ב. } x = 1 \quad \text{ג. } x = 0, -\frac{1}{2} \quad \text{ד. } x = 0$$

## מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

(1,3) <b>(4)</b>	(1,2) <b>(3)</b>	(0,2) , (2,4) <b>(2)</b>	(2,9) <b>(1)</b>
(1,2) , (-1,0) <b>(7)</b>	(-1,-2) <b>(6)</b>	(3,2) <b>(5)</b>	

## אי שוויונים מעריכיים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $a^x > a^y$  הוא:  $x > y$  עבור:  $a > 1$  ו-  $x < y$  עבור:  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} \quad (2)$$

$$3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} \quad (4)$$

$$e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} \quad (3)$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 \quad (6)$$

$$25^x + 5 < 6 \cdot 5^x \quad (5)$$

### הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ( $\ln$ ) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad (8)$$

$$e^x > 3 \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$x < \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$x \leq \frac{1}{8} \quad (4)$$

$$0 \leq x < 1 \quad (3)$$

$$x = 0 \quad (6)$$

$$0 < x < 1 \quad (5)$$

$$x < 0 \text{ או } x > \ln 4 \quad (8)$$

$$x > \ln 3 \quad (7)$$

## אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

### סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון:  $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$  נדרוש:  $f(x) > 0$ .

דרך הפתרון: אם  $f(x) > 1$  אז  $g(x) > h(x)$ .

אם  $0 < f(x) < 1$  אז  $g(x) < h(x)$ .

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1} \quad (2) \qquad x^{2x-1} > x^{x+2} \quad (1)$$

$$x^{2x^2+2} < x^{5x} \quad (4) \qquad x^{2x-6} < 1 \quad (3)$$

$$(x+1)^{|x|} < x^2 + 2x + 1 \quad (6) \qquad (x^2 - 6x + 13)^{x^2 - 2x} \geq (x^2 - 6x + 13)^3 \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$.0 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$.3 < x < 6 \quad (2)$$

$$.1 < x < 3 \quad (3)$$

$$.0 < x < 0.5, 1 < x < 2 \quad (4)$$

$$.x \leq -1, x \geq 3 \quad (5)$$

$$.0 < x < 2 \quad (6)$$

# מכינה יסודית במתמטיקה

פרק 7 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

105	1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות
108	2. חוקי הלוגריתמים
112	3. חישובים עם חזקה לוגריתמית
113	4. מעבר בין בסיסים
115	5. הלוגריתם הטבעי
117	6. משוואות עם בסיסים שונים
118	7. מערכת משוואות לוגריתמיות
119	8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות
120	9. אי-שוויונים לוגריתמים

## הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא:  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$  כאשר:  $a, b > 0, a \neq 1$ .

#### הסבר:

לוגריתם על בסיס  $a$  של  $b$  מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את  $a$  על מנת שיהיה שווה ל- $b$ .  
 ערך חזקה זו הוא  $x$ . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים  
 ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

### כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי:  $\log_a a = 1$  וכן:  $\log_a 1 = 0$  לכל  $a > 0, a \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א.  $\log_2 32$       ב.  $\log 1000$       ג.  $\log_{25} 5$

ד.  $\log_8 4$       ה.  $\log_4 \frac{1}{16}$       ו.  $\log_a a^4$

ז.  $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א.  $\log_{36} 6 = x$       ב.  $\log_2 x = 16$

ג.  $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$       ד.  $\log_x 64 = 3$

ה.  $\log_x 25 = 2$       ו.  $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \log_6(4x-2)=1 \quad \text{ב. } \log_4(4-x)=\frac{1}{2}$$

$$\text{ג. } \log_8(x^4-73)=1 \quad \text{ד. } \log_3 \frac{x+3}{3-3x} = -2$$

$$\text{ה. } \log_x(2x^2+x-12)=2 \quad \text{ו. } \log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

$$\text{א. } \log_4(\log_3 x)=1 \quad \text{ב. } 3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$$

$$\text{ג. } \log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2} \quad \text{ד. } \log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$$

5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\text{א. } \log_2(3^x+37)=6 \quad \text{ב. } \log_3(3 \cdot 2^x - 303)=4$$

$$\text{ג. } \log_5(126 \cdot 5^x - 25)=2x+1 \quad \text{ד. } 3\log_2\left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x} - 11 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 3\right)=12+2x$$

6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$\text{א. } (\log_2 x)^4 = 10000 \quad \text{ב. } 2(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 10$$

$$\text{ג. } \frac{3 \cdot \log_{14} x + 1}{(\log_{14} x)^2} = 4 \quad \text{ד. } \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x + 2} = 2$$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 5    ב. 3    ג.  $\frac{1}{2}$     ד.  $\frac{2}{3}$     ה. -2
- ו. -1.5    ז. 4
- (2) א.  $x = \frac{1}{2}$     ב.  $x = 65,536$     ג.  $x = 27$     ד.  $x = 4$
- ה.  $x = 5$     ו.  $x = 4$
- (3) א.  $x = 2$     ב.  $x = 2$     ג.  $x = \pm 3$     ד.  $x = -2$     ה.  $x = 3$     ו.  $x = 2$
- (4) א.  $x = 81$     ב.  $x = 5$     ג.  $x = \pm 4$     ד.  $x = \pm 1$
- (5) א.  $x = 3$     ב.  $x = 7$     ג.  $x = -1, 2$     ד.  $x = -6$
- (6) א.  $x = 1024, \frac{1}{1024}$     ב.  $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$
- ג.  $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$     ד.  $x = \frac{1}{3}$

## חוקי הלוגריתמים:

### סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס  $a > 0 \neq 1$  וארגומנטים  $x$  ו- $y$  חיוביים:
- מכפלה לסכום:  $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ .
  - מנה להפרש:  $\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$ .
  - מקדם למעריך:  $\log_a b^n = n \log_a b$  (כאשר  $b > 0$  ו- $n$  מספר ממשי כלשהו).

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- |  |   |
|--|---|
| א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$   | ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$ |
| ג. $\log_2 200 - \log_2 100$   | ד. $\log_3 60 - \log_3 540$   |
| ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$   | ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$   |
| ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$   | ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$                                |
| ט. $\frac{1}{2} \left( \log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$ | י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$                             |

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- |   |  |
|---|--|
| א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$                             | ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$                                     |
| ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 225 - 2}$ | ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8^{\frac{8}{9}}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$ |

## משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א.  $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$       ב.  $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

ג.  $\log_2 (x+30) - \log_2 x = 4$       ד.  $\log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2$

ה.  $2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1$

ו.  $2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א.  $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$

ב.  $2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א.  $\log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3)$

ב.  $\log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א.  $\log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8$

ב.  $\log_2 \left(\frac{x}{4}\right) \cdot \log_2 (1024x) = -11$

ג.  $\log_2 x^2 \log_2 \left(\frac{x}{16}\right) = -\log_2 (64x)$

ד.  $(\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1$

ה.  $\log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left(\frac{81}{x}\right) + 2$

ו.  $\frac{\log_2 \left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9}$

**שאלות הבעה:**

(7) נתון:  $\log_3 2 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_3 16$       ב.  $\log_3 6$

ג.  $\log_3 24$       ד.  $\log_3 1.5$

(8) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_2 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_2 45$       ב.  $\log_2 60$       ג.  $\log_2 \sqrt{7.5}$

(9) נתון:  $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$ .

הבע באמצעות  $a$  את  $\log_{18} 27$  ואת  $\log_{18} 16$ .

**שאלות נוספות:**

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

$$\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64 \quad (10)$$

$$2 \log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2 \quad (11)$$

$$\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2 \quad (12)$$

$$\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2 \quad (13)$$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 3    ב. -3    ג. 1    ד. -2    ה. 2    ו. -0.5
- (2) א.  $\frac{4}{3}$     ב. -3    ג. 1.5    ד. 0.5
- (3) א.  $x=8$     ב.  $x=3, \frac{1}{27}$     ג.  $x=2$     ד.  $x=4$     ה.  $x=3$     ו.  $x=4$
- (4) א.  $x=2.5$     ב.  $x=6$
- (5) א.  $x=1$     ב.  $x=-2$
- (6) א.  $x=16, \frac{1}{256}$     ב.  $x=2, \frac{1}{512}$     ג.  $x=4, 2\sqrt{2}$     ד.  $x=4, \frac{1}{4}$     ה.  $x=\frac{1}{9}, \sqrt[9]{3}$     ו.  $x=8, \sqrt[7]{2^{15}}$
- (7) א.  $4a$     ב.  $a+1$     ג.  $3a+1$     ד.  $1-a$
- (8) א.  $2a+b$     ב.  $2+a+b$     ג.  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (9)  $4(2a-1), 3(1-a)$
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) הוכחה.

## חישובים עם חזקה לוגריתמית:

### סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא:  $a^{\log_a x} = x$  כאשר  $a > 0 \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א.  $6^{\log_6 8}$       ב.  $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית:  $3 \cdot 4^x$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = \log_4 7$       ב.  $x = \log_4 \sqrt{3}$

ג.  $x = 2 \log_4 0.1$       ד.  $x = \sqrt{\log_2 5}$

(3) נתונה התבנית:  $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = -1$       ב.  $x = \log_3 5$

ג.  $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א.  $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{56}} 81}$       ב.  $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}} 5}}$

### תשובות סופיות:

(1) א. 8      ב. 25

(2) א. 21      ב.  $3\sqrt{3}$       ג. 0.03      ד. 15

(3) א.  $\frac{19}{54}$       ב.  $-4\frac{5}{6}$       ג.  $2-2\sqrt{6}$

(4) א.  $\frac{1}{81}$       ב.  $\frac{2}{\sqrt[2]{25}}$

## מעבר בין בסיסים:

### סיכום כללי:

מעבר מבסיס  $a$  לבסיס  $m$  (כאשר:  $a > 0 \neq 1$  ו-  $m > 0 \neq 1$ , וכן:  $b > 0$ )

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$$

יתבצע באופן הבא:

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $\log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000$

א.  $\log_4 7 \cdot \log_7 4$

ד.  $\log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625$

ג.  $\log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9$

(2) הוכח את השוויונים הבאים:

א.  $\log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1$

ב.  $\log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1$

#### משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $\log_3 x \cdot \log_{27} x = 3$

א.  $\log_2 x + \log_{32} x = 6$

ד.  $\log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1$

ג.  $\log_2 4x \cdot \log_8 \frac{x}{16} = -\frac{5}{3}$

### שאלות הבעה:

(4) נתון:  $\log_4 6 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

ג.  $\log_{216} 96$

ב.  $\log_{32} 36$

א.  $\log_2 3$

(5) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_3 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו-  $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

ג.  $\log_5 22.5$

ב.  $\log_2 \sqrt{30}$

א.  $\log_3 50$

6 נתון  $\log_3 7 = a$ ,  $\log 9 = 2b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את:

א.  $\log 21$ .

ב.  $\log_3 \left( \frac{10}{7} \right)$ .

ג.  $\log_7 10$ .

ד.  $\log_{30} 63$ .

**שאלות נוספות:**

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7  $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

8  $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

**תשובות סופיות:**

1 א. 1      ב. -1.5      ג.  $2\frac{2}{3}$       ד. 12.

2 א. שאלת הוכחה.      ב. שאלת הוכחה.

3 א.  $x = 32$       ב.  $x = 27, \frac{1}{27}$       ג.  $x = 8, \frac{1}{2}$       ד.  $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$ .

4 א.  $2a - 1$       ב.  $0.8a$       ג.  $\frac{a+2}{3a}$ .

5 א.  $2b + \frac{1}{a}$       ב.  $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$       ג.  $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$ .

6 א.  $b + ab$       ב.  $\frac{1}{b} - a$       ג.  $\frac{1}{ab}$       ד.  $\frac{ab+2b}{b+1}$ .

7 הוכחה.

8 הוכחה.

## הלוגריתם הטבעי:

### סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס  $e$  (קבוע אוילר) מסומן:  $\log_e \Rightarrow \ln$  והוא נקרא הלוגריתם הטבעי. למשל:  $\ln 3 = \log_e 3$  או  $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$ . לוג זה נקרא בשם לן. מהגדרת הלוגריתם מתקיים:  $\ln a = b \rightarrow e^b = a$  כאשר  $a > 0$  ו- $b$  מספרים כלשהם.

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\ln e^2 \quad \text{א.} \quad \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ב.} \quad \ln \frac{1}{e\sqrt{e}} \quad \text{ג.}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\ln x = 2 \quad \text{א.} \quad \ln x = -\frac{1}{2} \quad \text{ב.}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \ln \left( e^{2x} - \frac{1}{2} \right) + \ln 2 = x \quad \text{א.} \\ 3 \ln^2 x + \ln x = 2 \quad \text{ב.} \\ \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \quad \text{ג.} \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\left( \frac{1}{x} \right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x} \quad \text{ב.} \quad x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{א.}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$e^{\ln 3} \quad \text{א.} \quad e^{2\ln 3} \quad \text{ב.}$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 2 \quad \text{ב. } -4 \quad \text{ג. } -1.5$$

$$(2) \quad \text{א. } x = e^2 \quad \text{ב. } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0 \quad \text{ב. } x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e} \quad \text{ג. } x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$$

$$(4) \quad \text{א. } x = e^3, \frac{1}{e^2} \quad \text{ב. } x = \sqrt{e}, e$$

$$(5) \quad \text{א. } 3 \quad \text{ב. } 9$$

## משוואות עם בסיסים שונים:

### סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון:  $3^x = 4$ . במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך:  $x = \log_3 4$ . את ערך הביטוי  $\log_3 4$  ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10:  $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א.  $3^x = 6$       ב.  $2^x - 9 = 0$

ג.  $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$       ד.  $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א.  $e^{3x} = 3$       ב.  $4 + 3e^x = 9$

ג.  $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$       ד.  $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א.  $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{10}{5^x}$       ב.  $\log_2(4e^{2x} + 6) - 1 = \log_2(7e^x)$

### תשובות סופיות:

(1) א.  $x = \log_3 6 = 1.63$       ב.  $x = \log_2 9 = 3.17$

ג.  $x = \log_7 3 = 0.564$ ,  $x = \log_7 5 = 0.827$       ד. אין פתרון.

(2) א.  $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$       ב.  $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$       ג.  $x = 0$ ,  $x = -\ln 3 = -1.09$

ד.  $x = \ln 16 = 2.7725$

(3) א.  $x = 1$ ,  $x = \log_5 2 = 0.43$       ב.  $x_1 = \ln \frac{1}{2} = -0.693$ ,  $x = \ln 3 = 1.098$

## מערכת משוואות לוגריתמיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (8, -5) \quad (3) & (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) & (8, 3) \quad (1) \\ \left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) & (25, 8) \quad (5) & (16, 7) \quad (4) \\ (4, 7) \quad (9) & (3, 9), (9, 3) \quad (8) & (25, 4), (625, 2) \quad (7) \end{array}$$

## מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2(4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3(9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4(5 - 9^y) \\ \log_2(2^x + 3) = \log_4(29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2(y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$(36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) \quad (3) \quad (3, 3) \quad (2) \quad (1, 1) \quad (1)$$

$$(1, 0) \quad (6) \quad (1, 1), (2, 3) \quad (5) \quad \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \quad (4)$$

## אי-שוויונים לוגריתמים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $\log_a x > \log_a y$  הוא:  $x > y$  עבור:  $a > 1$  ו-  $x < y$  עבור:  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\log_6(x^2 - 5x) < 1$ (2)	$\log_2 x < \log_2(5x - 20)$ (1)
$\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x)$ (4)	$\log_3 x > \log_9(15 - 2x)$ (3)
$\ln x < 3$ (6)	$\ln x \geq \ln(x^2 - 12)$ (5)
$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8)	$\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7)

### תשובות סופיות:

$-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2)	$x > 5$ (1)
$-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4)	$3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3)
$0 < x < e^3$ (6)	$2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5)
וגם $x \neq 1$ $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8)	$\frac{1}{e} < x < e^7$ (7)

# מכינה יסודית במתמטיקה

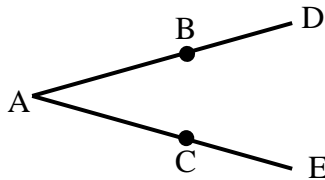
פרק 8 - מבוא לגאומטריה של המישור

תוכן העניינים

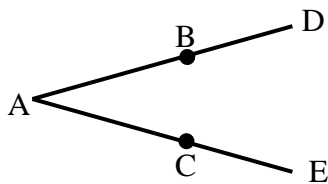
121	1. הגדרות כלליות	(ללא ספר)
122	2. חיבור וחסור קטעים	
124	3. חישובי זוויות וחיבור וחסור זוויות	
126	4. זוויות קדקודיות וזוויות צמודות	
	5. זוויות בין ישרים מקבילים	

## חיבור וחיסור קטעים:

### שאלות:

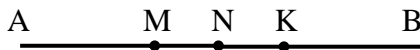


- (1) באיור שלפניך נתון:  $AB = AC$ ,  $BD = CE$ .  
 הוכח:  $AD = AE$ .



- (2) באיור שלפניך נתון:  $AD = AE$ ,  $AB = AC$ .  
 הוכח:  $BD = CE$ .

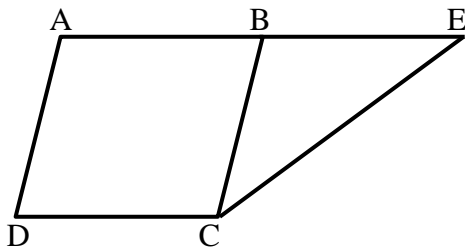
- (3) הנקודות A, M, N, K, B נמצאות על ישר אחד.



- נתון כי:  $AM = KB$ ,  $MN = NK$ .  
 הוכח:  $AN = BN$ .

- (4) בסרטוט שלפניך נתון כי:  $BC = AB$ ,  $BE + BC = 2AB$ .

הוכח:  $AB = BE$ .

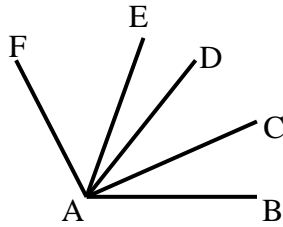


### תשובות סופיות:

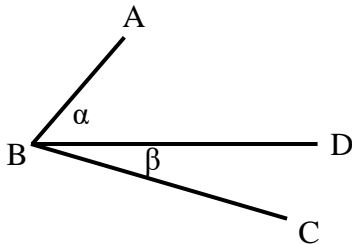
- (1) שאלת הוכחה.  
 (2) שאלת הוכחה.  
 (3) שאלת הוכחה.  
 (4) שאלת הוכחה.

## חישובי זוויות וחיבור וחסור זוויות:

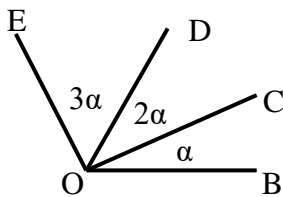
### שאלות:



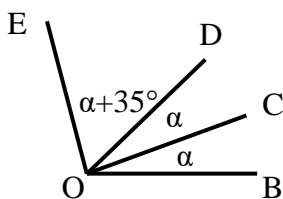
- (5) נתון:  $\angle FAE = 2 \cdot \angle EAD$ ,  $\angle CAB = \angle DAC$ .  
 וכן:  $\angle EAB = 80^\circ$ ,  $\angle FAD = 60^\circ$ .  
 חשב את הזוויות הבאות:  
 $\angle FAB$ ,  $\angle EAC$ ,  $\angle CAB$



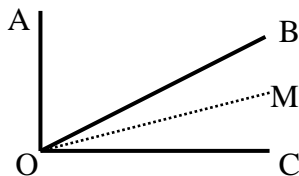
- (6) באיור שלפניך נתון:  $\angle ABC = 69^\circ$ .  
 נתון כי:  $\alpha = 2\beta$  (זוויות סמוכות).  
 מצא את  $\alpha$  ואת  $\beta$ .



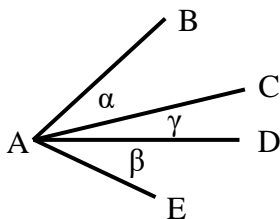
- (7) באיור שלפניך מספר קרניים היוצאים מהנקודה O.  
 הנתונים הם:  $\angle EOB = 138^\circ$ .  
 חשב את הזוויות הבאות:  
 $\angle EOD$ ,  $\angle DOC$ ,  $\angle COB$



- (8) באיור שלפניך נתון:  $\angle EOB = 110^\circ$ .  
 שאר הנתונים מופיעים בתרשים.  
 חשב את הזוויות הבאות:  
 $\angle EOC$ ,  $\angle DOC$



- (9) נתון האיור הבא ובו:  $\angle AOC = 90^\circ$ .  
 OM חוצה את זווית BOC.  
 מתקיים:  $\angle AOB = 3\angle MOC$ .  
 חשב את:  $\angle AOM$ ,  $\angle BOM$



- (10) בסרטוט שלפניך נתון:  $\alpha = \beta$ .  
 הוכח כי:  $\angle BAD = \angle EAC$ .

**תשובות סופיות:**

$$\angle FAB = 120^\circ, \angle EAC = 50^\circ, \angle CAB = 30^\circ \quad (5)$$

$$\alpha = 46^\circ, \beta = 23^\circ \quad (6)$$

$$\angle BOC = 23^\circ, \angle COD = 46^\circ, \angle DOE = 69^\circ \quad (7)$$

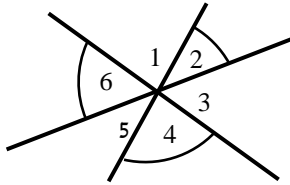
$$\angle EOC = 85^\circ, \angle DOC = 25^\circ \quad (8)$$

$$\angle AOM = 72^\circ, \angle BOM = 18^\circ \quad (9)$$

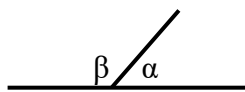
$$(10) \text{ שאלת הוכחה.}$$

## זוויות קדקודיות וזוויות צמודות:

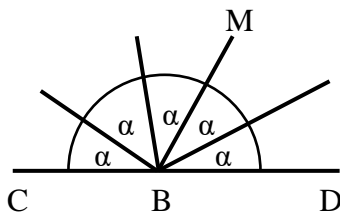
### שאלות:



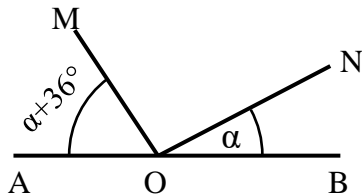
- 11) חשב את סכום הזוויות הבאות (נמק):  
 $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 6$



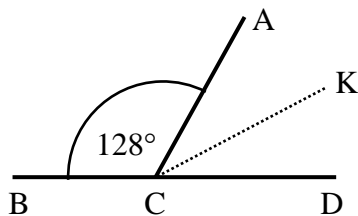
- 12) באיור שלפניך הזוויות  $\alpha$  ו- $\beta$  הן זוויות צמודות.  
 ידוע כי:  $\alpha = 63^\circ$ .  
 מצא את זווית  $\beta$ .



- 13) באיור שלפניך הזווית CBD היא שטוחה.  
 כל הזוויות שוות ל- $\alpha$ .  
 א. חשב את  $\alpha$ .  
 ב. חשב את זווית CBM.



- 14) בסרטוט שלפניך ידוע:  
 הזווית AOB היא שטוחה.  
 נתון:  $\alpha = 27^\circ$ .  
 הוכח כי:  $MO \perp NO$ .



- 15) הזוויות  $\sphericalangle ACB$  ו- $\sphericalangle ACD$  הן צמודות.  
 ידוע כי CK חוצה זווית ACD.  
 כמו כן:  $\sphericalangle ACB = 128^\circ$ .  
 חשב את זווית BCK.

**תשובות סופיות:**

(11)  $.180^\circ$

(12)  $.\beta = 117^\circ$

(13) א.  $\alpha = 36^\circ$  ב.  $\sphericalangle CBM = 108^\circ$

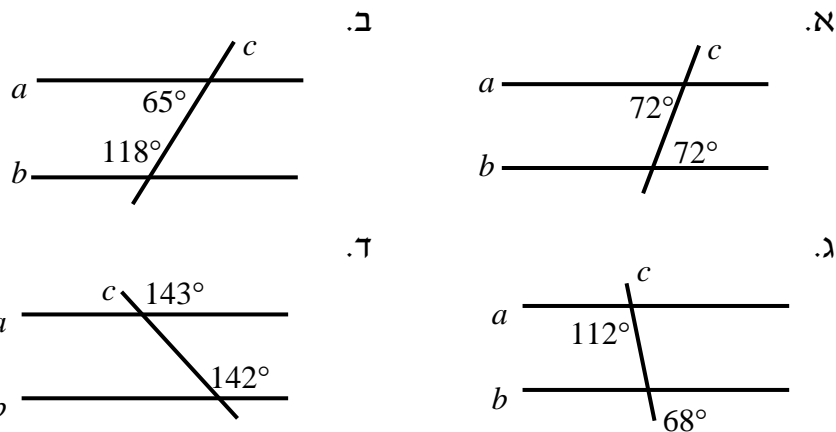
(14) שאלת הוכחה.

(15)  $\sphericalangle BCK = 154^\circ$

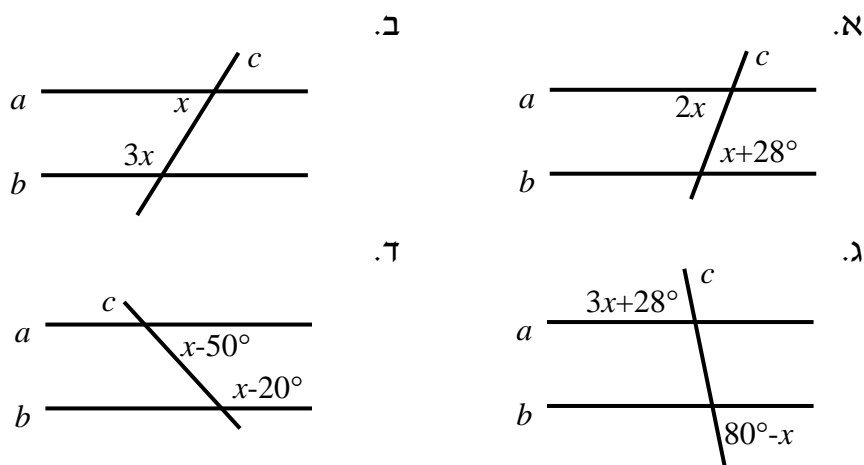
## זוויות בין ישרים מקבילים:

שאלות:

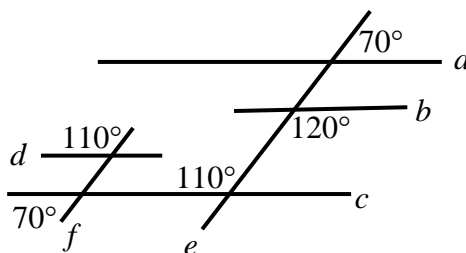
16) קבע בכל מקרה האם הישרים  $a$  ו- $b$  מקבילים או שלא. נמק.

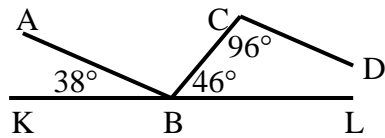


17) הישרים  $a$  ו- $b$  מקבילים. מצא את  $x$  בכל אחד מהמקרים הבאים:

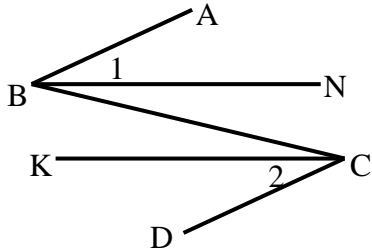


18) מצא את זוויות הישרים המקבילים בסרטוט הבא. נמק.

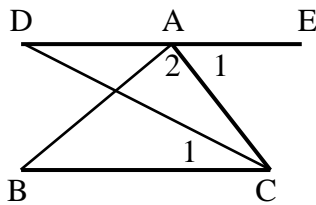




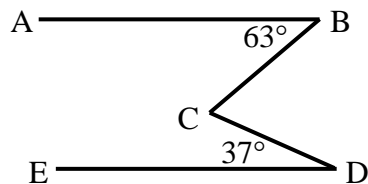
**19** בסרטוט שלפניך נתון כי KL הוא קו ישר.  
שאר הזוויות מופיעות בתרשים.  
הוכח כי:  $AB \parallel CD$ .



**20** באיור שלפניך נתון כי:  
 $\angle B_1 = \angle C_2$ ,  $\angle ABC = \angle BCD$   
הוכח כי:  $BN \parallel CK$ .



**21** באיור שלפניך מופיע קטע ישר DE.  
מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.  
מחברים את BC וידוע כי  $BC \parallel DE$ .  
מעבירים את CD – חוצה זווית C.  
נתון:  $\angle A_1 = 68^\circ$ ,  $\angle A_2 = 85^\circ$ .  
א. חשב את הזווית  $\angle C_1$ .  
ב. חשב את הזווית  $\angle B$ .



**22** בסרטוט שלפניך נתון:  
 $\angle D = 37^\circ$ ,  $\angle B = 63^\circ$ ,  $AB \parallel DE$ .  
חשב את גודל הזווית BCD.

**תשובות סופיות:**

16) א. כן      ב. לא      ג. כן      ד. לא.

17) א.  $28^\circ$       ב.  $45^\circ$       ג.  $13^\circ$       ד.  $125^\circ$ .

18)  $a \parallel c \parallel d, e \parallel f$ .

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) א.  $34^\circ$       ב.  $27^\circ$ .

22)  $\sphericalangle BCD = 100^\circ$ .

# מכינה יסודית במתמטיקה

פרק 9 - גיאומטריה אוקלידית - משולשים

תוכן העניינים

129	1. הגדרות כלליות
131	2. זוויות במשולשים
134	3. משולש שווה שוקיים ושווה צלעות
136	4. חפיפת משולשים
142	5. זווית חיצונית במשולש
143	6. משולש ישר זווית
146	7. קטע אמצעים במשולש
148	8. מפגש תיכונים במשולש

## הגדרות כלליות:

### סוגי משולשים:

ניתן למיין את המשולשים לפי זוויות או לפי צלעות.  
 לפי זוויות:

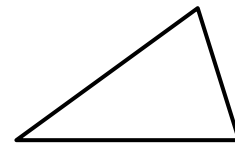
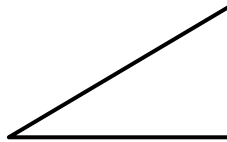
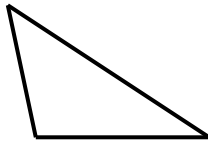
1. משולש חד זווית – משולש שכל זוויותיו חדות.
2. משולש ישר זווית – משולש בעל זווית ישרה.
3. משולש קהה זווית – משולש בעל זווית קהה.

לפי צלעות:

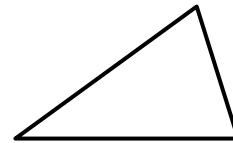
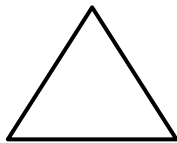
4. משולש שונה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שונות באורכן.
5. משולש שווה שוקיים – משולש שבו שתי צלעות שוות.
6. משולש שווה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שוות באורכן.

### איורים לכל מקרה לפי המספרים:

1. משולש חד זווית:      2. משולש ישר זווית:      3. משולש קהה זווית:



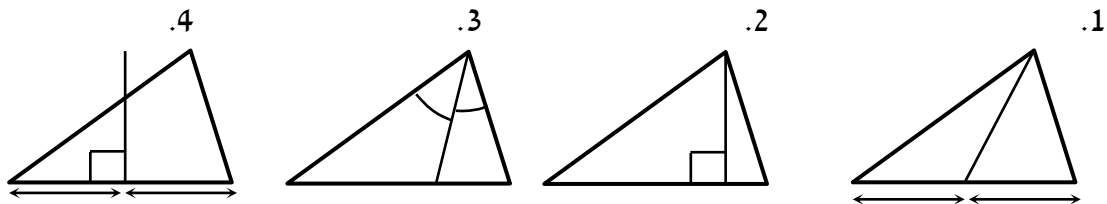
4. משולש שונה צלעות:      5. משולש שווה שוקיים:      6. משולש שווה צלעות:



### קטעים מיוחדים במשולשים:

1. תיכון – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו וחוצה אותה.
2. גובה – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו ומאונך לה.
3. חוצה זווית – קטע היוצא מקדקוד וחוצה את הזווית שממנה הוא יוצא.
4. אנך אמצעי – קטע היוצא מאמצע צלע ומאונך לה.

### איורים לכל מקרה לפי המספרים:



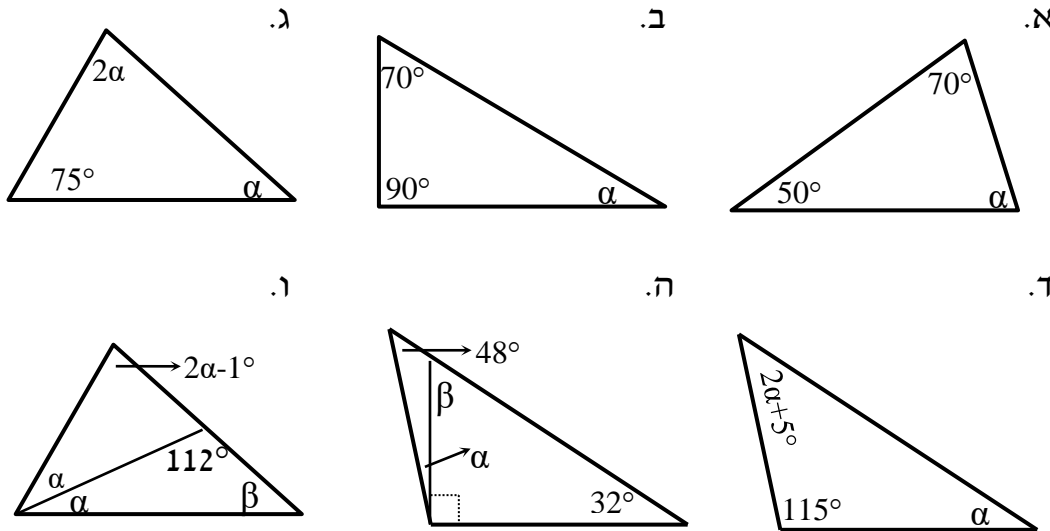
### משפטים כלליים במשולשים:

- סכום הזוויות במשולש הוא  $180^\circ$ .
- סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
- במשולש מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה ולהפך.
- במשולש מול הזווית הקטנה נמצאת הצלע הקטנה ולהפך.
- במשולש מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות ולהפך.

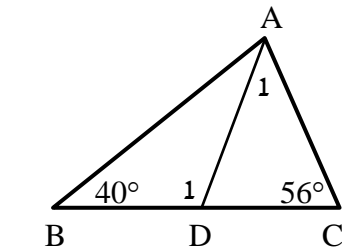
## זוויות במשולשים:

### שאלות:

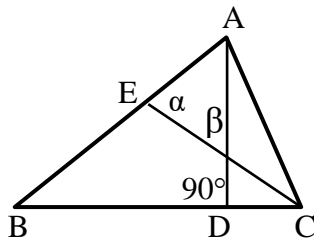
(1) חשב את הזוויות בכל אחד מהמשולשים שלפניך:



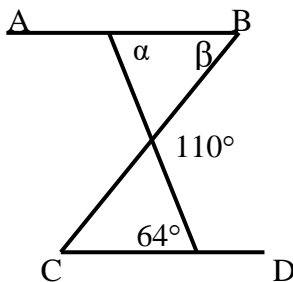
(2) במשולש שלפניך נתון AD חוצה זווית A.  
 נתון:  $\angle B = 40^\circ$ ,  $\angle C = 56^\circ$ .  
 חשב את הזוויות  $\angle A_1$ ,  $\angle D_1$ .



(3) נתון משולש ABC ובו AD גובה לצלע BC.  
 $\angle D = 90^\circ$  הקטע CE חוצה זווית C.  
 כמו כן:  $\alpha = 75^\circ$ ,  $\beta = 63^\circ$ .  
 חשב את זוויות המשולש ABC.

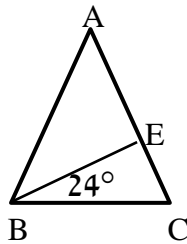
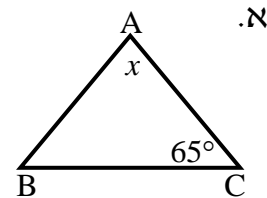
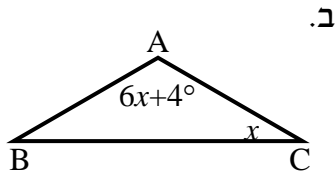


(4) בסרטוט שלפניך נתון:  $AB \parallel CD$ .  
 מצא את הזוויות  $\alpha$  ו- $\beta$ .



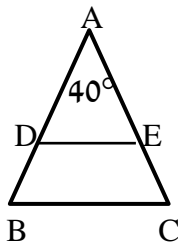
(5) שלוש זוויות המשולש מתייחסות זו לזו כמו: 1:2:6.  
 חשב את זוויות המשולש.

- 6 בסרטטים שלפניך נתונים משולשים שווי שוקיים ( $AB = AC$ ) שאחת מזוויותיהם נתונה. מצא את הגודל  $x$  בכל סרטוט.

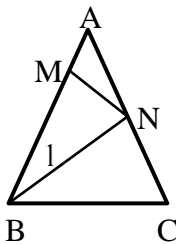


- 7 הגובה לשוק המשולש שווה השוקיים  $ABC$ , ( $AB = AC$ ), יוצר זווית בת  $24^\circ$  עם הבסיס  $BC$ . מצא את זוויות המשולש  $ABC$ .

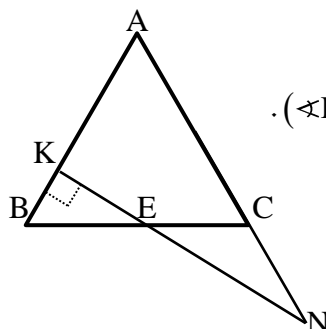
- 8 חשב את זוויות המשולשים בכל אחד מהמקרים הבאים:  
 א. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה פי ארבעה מזווית הראש. מצא את זוויות המשולש.  
 ב. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה ב- $12^\circ$  מזווית הראש. מצא את זוויות המשולש.



- 9 באיור שלפניך נתון:  $AD = AE$ ,  $AB = AC$ ,  $\angle A = 40^\circ$ .  
 א. חשב את הזוויות:  $\angle B$ ,  $\angle C$ ,  $\angle D$ ,  $\angle E$ .  
 ב. הוכח:  $DE \parallel BC$ .



- 10 באיור שלפניך נתון:  $AB = AC$ . מעבירים את הקטעים  $BN$  ו- $MN$  כך שמתקיים:  $BM = BN = BC$ . נתון בנוסף:  $\angle A = 32^\circ$ . חשב את זוויות:  $\angle B_1$ ,  $\angle ANM$ .



- 11 משולש  $ABC$  הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ). בנקודה  $K$  כלשהי על  $AB$  מעלים אנך ל- $AB$  ( $\angle K = 90^\circ$ ). אנך זה חותך את  $BC$  בנקודה  $E$  ואת המשך  $AC$  בנקודה  $N$ . מתקיים:  $CE = CN$ . חשב את זוויות המשולש  $ABC$ .

**תשובות סופיות:**

- (1) א.  $\alpha = 60^\circ$     ב.  $\alpha = 20^\circ$     ג.  $\alpha = 35^\circ$     ד.  $\alpha = 20^\circ$   
 ה.  $\alpha = 10^\circ$ ,  $\beta = 58^\circ$     ו.  $\alpha = 37\frac{2}{3}^\circ$ ,  $\beta = 30\frac{1}{3}^\circ$
- (2)  $\sphericalangle A_1 = 42^\circ$ ,  $\sphericalangle D_1 = 98^\circ$
- (3)  $\sphericalangle A = 78^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 48^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 54^\circ$
- (4)  $\alpha = 64^\circ$ ,  $\beta = 46^\circ$
- (5)  $20^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $120^\circ$
- (6) א.  $x = 50^\circ$     ב.  $x = 22^\circ$
- (7)  $\sphericalangle A = 48^\circ$ ,  $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 66^\circ$
- (8) א.  $20^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $80^\circ$     ב.  $52^\circ$ ,  $64^\circ$ ,  $64^\circ$
- (9) א.  $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = 70^\circ$     ב. שאלת הוכחה
- (10) א.  $\sphericalangle B_1 = 42^\circ$ ,  $\sphericalangle ANM = 37^\circ$
- (11)  $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60^\circ$

## משולש שווה שוקיים ושווה צלעות:

### סיכום כללי:

#### משפטים במשולש שווה שוקיים:

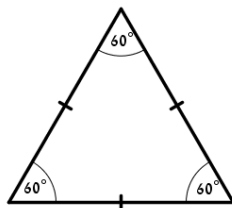
- במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו. (משפט הפוך) משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים.
- במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים. (משפט הפוך) משולש שבו חוצה זווית הוא גם גובה או חוצה זווית הוא גם תיכון או גובה הוא גם תיכון הוא משולש שווה שוקיים.

#### משפטים במשולש שווה צלעות:

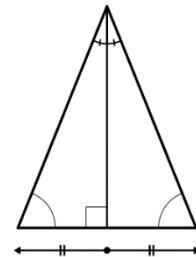
- במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות  $60^\circ$ . (משפט הפוך) משולש שבו כל הזוויות שוות הוא משולש שווה צלעות.

### איורים:

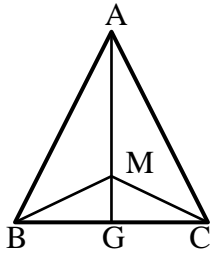
משפט במשולש שווה צלעות



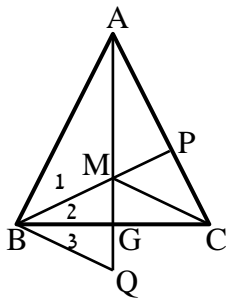
משפט במשולש שווה שוקיים



## שאלות:



- 12** המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים ( $AB=AC$ ).  
 AG חוצה את זווית  $\sphericalangle A$ .  
 M היא נקודה כלשהי על AG.  
 הוכח כי:  $BM = CM$ .



- 13** המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים ( $AB=AC$ ).  
 AG ו-BP חוצים את הזוויות  $\sphericalangle A$  ו- $\sphericalangle ABC$  בהתאמה.  
 הנקודה Q נמצאת על המשך AG.  
 נתון:  $GM = GQ$ .  
 הוכח:  $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_3$ .

## תשובות סופיות:

- 12** שאלת הוכחה.  
**13** שאלת הוכחה.

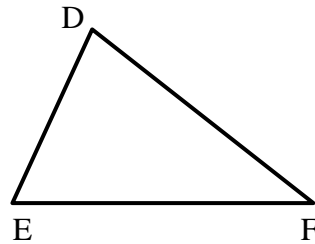
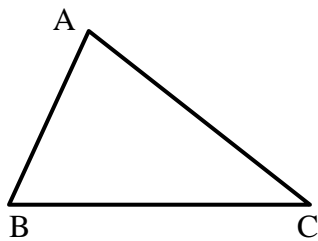
## חפיפת משולשים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

משולשים חופפים הם משולשים ששווים זה לזה בכל צלעותיהם ובכל זוויותיהם בהתאמה.

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} AB = DE, AC = DF, BC = EF \\ \sphericalangle A = \sphericalangle D, \sphericalangle B = \sphericalangle E, \sphericalangle C = \sphericalangle F \end{cases} \text{ סימון מתמטי:}$$

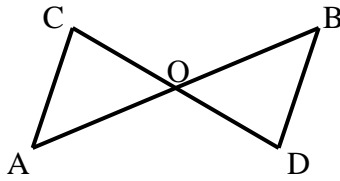


### משפטי החפיפה:

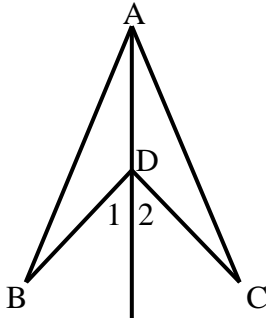
- משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ):  
 אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (ז.צ.ז):  
 אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות והצלע שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ):  
 אם בין שני משולשים שוות שלוש צלעות בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז):  
 אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

## שאלות:

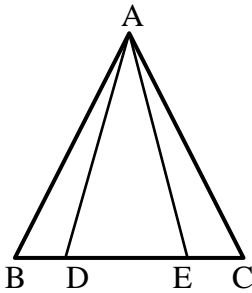
שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-זווית-צלע:



- 14) באיור שלפניך הקטעים AB ו-CD חוצים זה את זה בנקודה O.  
 הוכח:  $\triangle ACO \cong \triangle BDO$ .

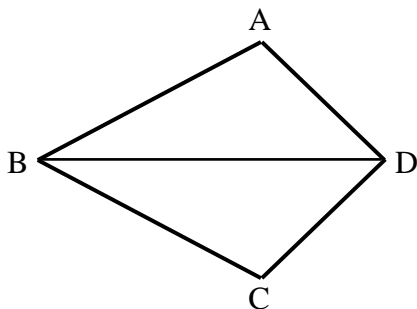


- 15) באיור שלפניך נתון:  $BD = CD$ .  
 כמו כן:  $\angle D_1 = \angle D_2$ .  
 הוכח:  $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ .

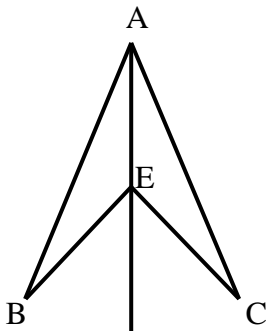


- 16) בסרטוט שלפניך נתון:  
 $AB = AC$ ,  $\angle B = \angle C$ ,  $BE = CD$ .  
 הוכח:  $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ .

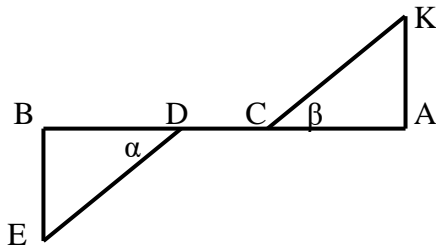
שאלות העוסקות במשפט חפיפה זווית-צלע-זווית:



- 17) במרובע ABCD נתון כי BD חוצה את זוויות B ו-D.  
 הוכח:  $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ .



- 18) בסרטוט שלפניך נתון:  
 AE חוצה את הזוויות BEC ו-BAC.  
 הוכח:  $\triangle ABE \cong \triangle ACE$ .



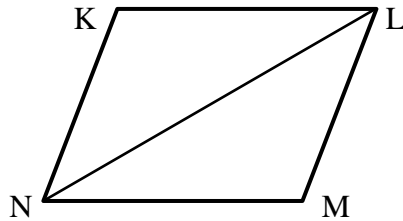
19) בציור שלפניך נתון:

$$AC = BD, \alpha = \beta$$

$$AB \perp BE, AB \perp AK$$

הוכח:  $\triangle AKC \cong \triangle BED$

שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-צלע:

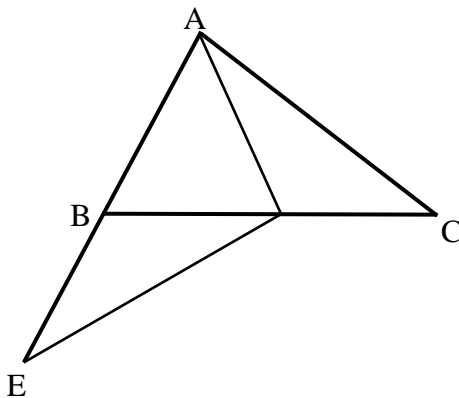


20) באיור שלפניך נתון:

$$KL = MN, KN = LM$$

הוכח:  $\triangle KLN \cong \triangle MLN$

שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-זווית שמול הצלע הגדולה:

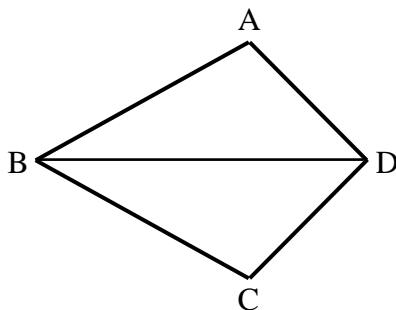


21) בציור שלפניך נתון:

$$AC = DE, AB = BE = AD$$

הוכח כי הנקודה D היא אמצע BC.

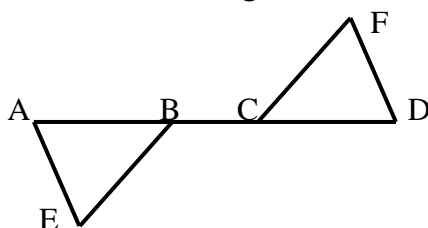
שאלות העוסקות בשלושת משפטי החפיפה יחדיו:



22) במרובע ABCD נתון:

$$AB = BC, AD = CD$$

הוכח:  $\angle A = \angle C$

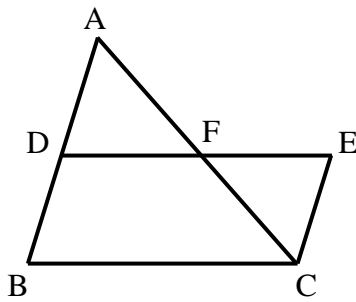


23) הקטע AD הוא קו ישר.

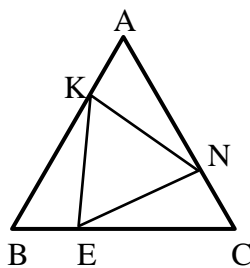
$$AE = DF, AC = BD$$

$$\angle A = \angle D$$

הוכח כי הקטעים BE ו-FC שווים.

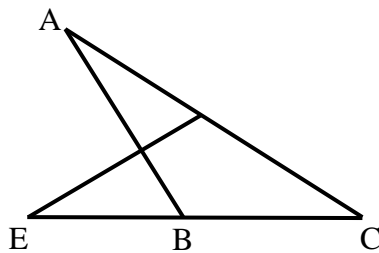


- (24)** באיור שלפניך נתון:  
 הנקודה F היא אמצע הקטע AC.  
 מתקיים:  $\angle BAC = \angle ACE$ .  
 הקטעים BD ו-CE שווים.  
 הוכח את הטענות הבאות:  
 א. F היא אמצע הקטע DE.  
 ב. D היא אמצע הקטע AB.

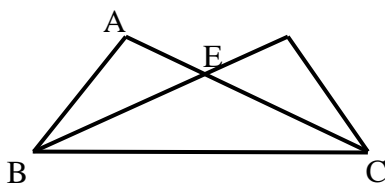


- (25)** המשולש ABC הוא שווה צלעות.  
 נתון:  $AK = BE = CN$ .  
 הוכח כי  $\triangle KEN$  הוא גם משולש שווה צלעות.

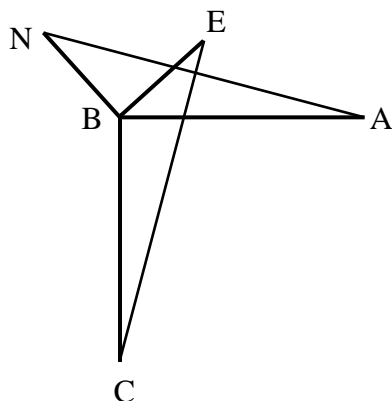
**שאלות העוסקות במשולשים המכסים חלקית זה את זה:**



- (26)** באיור שלפניך נתון:  $AC = CE$ ,  $DC = BC$ .  
 הוכח:  
 א.  $\triangle CDE \cong \triangle CBA$ .  
 ב.  $\angle ADE = \angle ABE$ .



- (27)** באיור שלפניך נתון:  
 $\angle DBC = \angle ACB$ ,  $\angle ABC = \angle DCB$ .  
 הוכח:  $AB = CD$ .



- (28)** באיור שלפניך נתון:  
 $AB = BC$ ,  $BE = BN$   
 $AB \perp BC$ ,  $BE \perp BN$   
 הוכח:  $AN = CE$ .

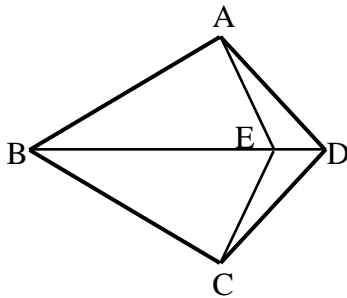
**שאלות העוסקות בשתי חפיפות:**

**(29)** בסרטוט שלפניך נתון כי  $BD$  הוא קו ישר.

מתקיים:  $AD = CD$ ,  $AB = BC$ .

הנקודה  $E$  נמצאת על  $BD$ .

הוכח כי:  $AE = CE$ .



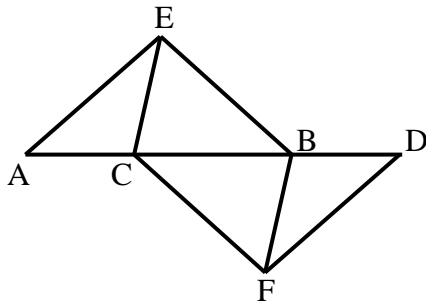
**(30)** בציור שלפניך נתון כי  $AD$  הוא קו ישר. מתקיים:

$\angle AEC = \angle DFB$ ,  $\angle A = \angle D$

וכן  $AE = DF$ . הוכח:

א.  $CE = BF$

ב.  $BE = CF$

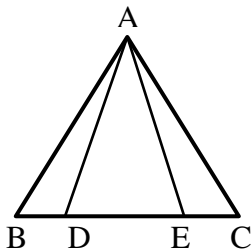


**שאלות העוסקות בחפיפות עם משולש שווה שוקיים:**

**(31)** נתון משולש שווה שוקיים  $\triangle ABC$ ,  $(AB = AC)$ .

מתקיים:  $BD = CE$ .

הוכח:  $AD = AE$ .



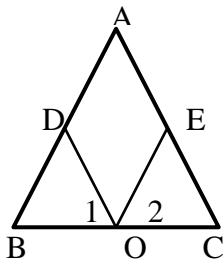
**(32)** בסרטוט שלפניך נתון משולש

שווה שוקיים  $\triangle ABC$ ,  $(AB = AC)$ .

הנקודה  $O$  היא אמצע  $BC$ .

מתקיים:  $\angle O_1 = \angle O_2$ .

הוכח:  $AD = AE$ .

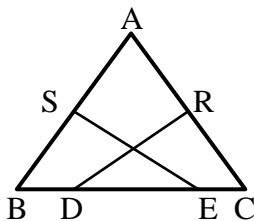


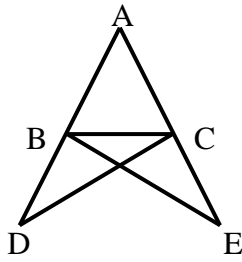
**(33)** במשולש שווה שוקיים  $\triangle ABC$ ,  $(AB = AC)$

הנקודות  $S$  ו- $R$  הן אמצעי השוקיים.

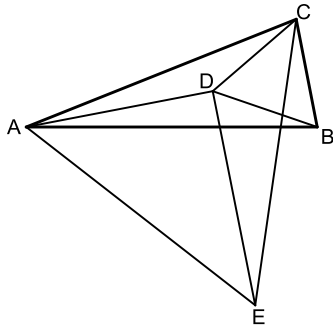
ידוע כי  $BD = CE$ .

הוכח כי:  $SE = RD$ .





34 נתון משולש  $ABC$ . הקטעים  $AD$  ו- $AE$  ישרים ונתון בנוסף כי:  $DC = BE$ ,  $BD = CE$ . הוכח:  $AB = AC$ .



35 המשולש  $ABC$  הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ). על השוק  $AC$  ועל הבסיס  $BC$  בונים משולשים שווים צלעות  $ACE$  ו- $BCD$ . מחברים את הנקודה  $D$  עם הקדקודים  $A$  ו- $E$ .  
 א. הוכח:  $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ .  
 ב. ידוע גם כי:  $DE \parallel BC$ .  
 הוכח:  $\angle ADE = 90^\circ$ .

### תשובות סופיות:

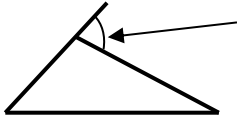
- 14 שאלת הוכחה.
- 15 שאלת הוכחה.
- 16 שאלת הוכחה.
- 17 שאלת הוכחה.
- 18 שאלת הוכחה.
- 19 שאלת הוכחה.
- 20 שאלת הוכחה.
- 21 שאלת הוכחה.
- 22 שאלת הוכחה.
- 23 שאלת הוכחה.
- 24 שאלת הוכחה.
- 25 שאלת הוכחה.
- 26 שאלת הוכחה.
- 27 שאלת הוכחה.
- 28 שאלת הוכחה.
- 29 שאלת הוכחה.
- 30 שאלת הוכחה.
- 31 שאלת הוכחה.
- 32 שאלת הוכחה.
- 33 שאלת הוכחה.
- 34 שאלת הוכחה.
- 35 שאלת הוכחה.

## זווית חיצונית במשולש:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

זווית חיצונית למשולש היא זווית הכלואה בין צלע במשולש להמשך צלע הסמוכה לה.



#### משפט:

זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

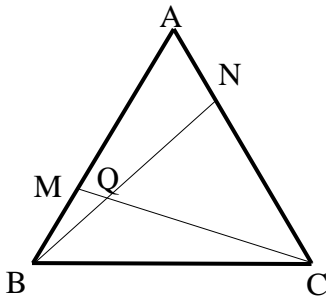
### שאלות:

**36** הוכח את המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

**37** המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה צלעות.

נתון:  $AN = BM$ .

הוכח:  $\angle NQC = 60^\circ$ .



### תשובות סופיות:

**36** שאלת הוכחה.

**37** שאלת הוכחה.

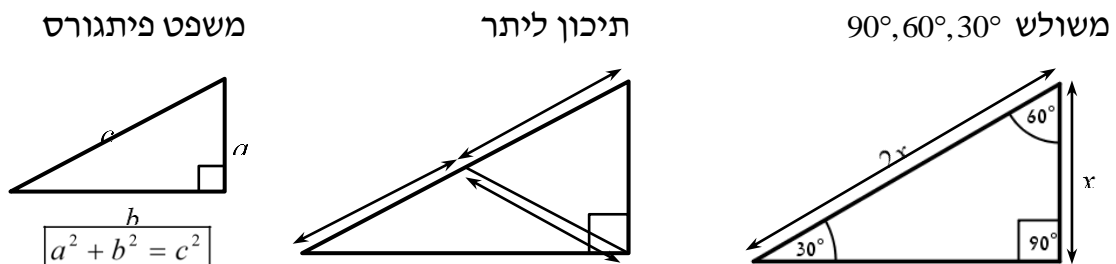
## משולש ישר זווית:

### סיכום כללי:

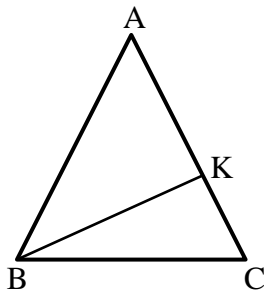
#### משפטים במשולש ישר זווית:

- סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא  $90^\circ$ .
- במשולש שזוויותיו  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $30^\circ$ , הניצב שמול הזווית של ה- $30^\circ$  שווה למחצית היתר. (משפט הפוך ל-2) אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה היא בת  $30^\circ$ .
- במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר. (משפט הפוך ל-4) אם במשולש תיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש ישר זווית (כאשר הזווית ממנה יוצא התיכון היא הזווית הישרה).
- משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר. כלומר:  $(\text{יתר})^2 = (\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2$ .
- (משפט הפוך למשפט פיתגורס) אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית, אז המשולש ישר זווית.

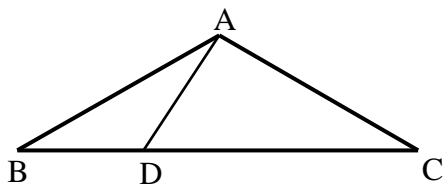
#### איורים:



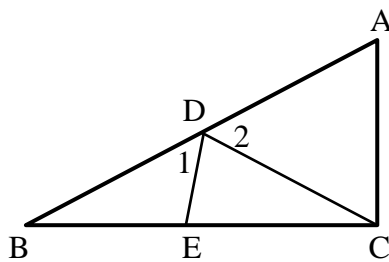
**שאלות:**



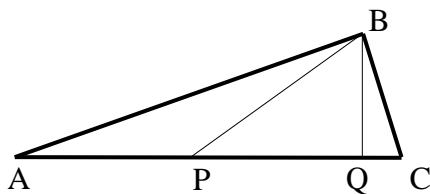
- 38** באיור שלפניך נתון משולש שווה שוקיים  $ABC$  ( $AB = AC$ ).  
 זווית הבסיס:  $\angle C = 75^\circ$   
 וכן:  $16$  ס"מ  $AC =$ . מעבירים גובה  $BK$  לשוק  $AC$ .  
 מצא את אורך הגובה  $BK$ .



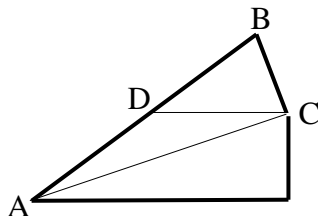
- 39** המשולש  $ABC$  שבציור הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ).  
 נתון:  $\angle ABD = 30^\circ$ ,  $\angle DAC = 90^\circ$ ,  
 $18$  ס"מ  $BC =$ .  
 חשב את אורכו של הקטע  $BD$ .



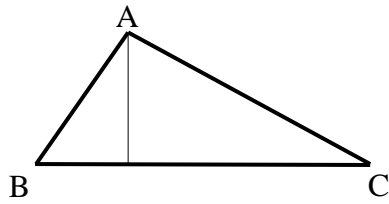
- 40** המשולש  $\triangle ABC$  הוא ישר זווית ( $\angle C = 90^\circ$ ).  
 מעבירים תיכון  $CD$  ליתר  $AB$  במשולש.  
 הנקודה  $E$  נמצאת על  $BC$  כך ש-  $CD = CE$ .  
 ידוע כי:  $\angle CED = 80^\circ$ .  
 מצא את הזוויות:  $\angle D_1$ ,  $\angle D_2$ .



- 41** המשולש  $ABC$  שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle ABC = 90^\circ$ ).  
 $BQ$  הוא הגובה ליתר  $AC$  ו-  $BP$  הוא התיכון ליתר  $AC$ .  
 נתון:  $BQ = \frac{1}{2} BP$ .  
 חשב את גודלה של הזווית  $C$ .



- 42** המשולש  $BCD$  שבציור הוא משולש שווה שוקיים ( $BD = DC$ ).  
 $AC$  חוצה את הזווית  $\angle BAE$ .  
 נתון:  $DC \parallel AE$ .  
 חשב את גודלה של הזווית  $\angle ACB$ .



- (43) AD הוא גובה במשולש ABC.  
 נתון:  $AB = 15$  ס"מ,  $AC = 20$  ס"מ,  $BC = 25$  ס"מ.
- א. מצא את אורכו של AD ואת שטח המשולש ABC.
- ב. האם המשולש ABC ישר זווית? נמק.

### תשובות סופיות:

- (38) 8 ס"מ.
- (39) 6 ס"מ.
- (40)  $\angle D_1 = 60^\circ$ ,  $\angle D_2 = 40^\circ$
- (41)  $75^\circ$
- (42)  $90^\circ$
- (43) א.  $AD = 12$  ס"מ,  $S_{ABC} = 150$  סמ"ר. ב. כן.

## קטע אמצעים במשולש:

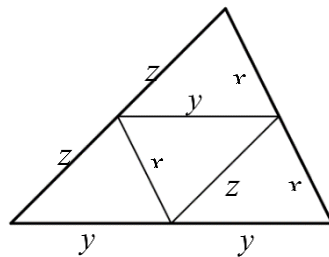
### סיכום כללי:

#### הגדרה:

קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.

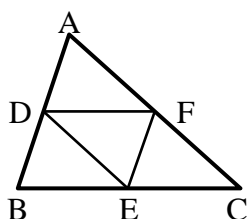
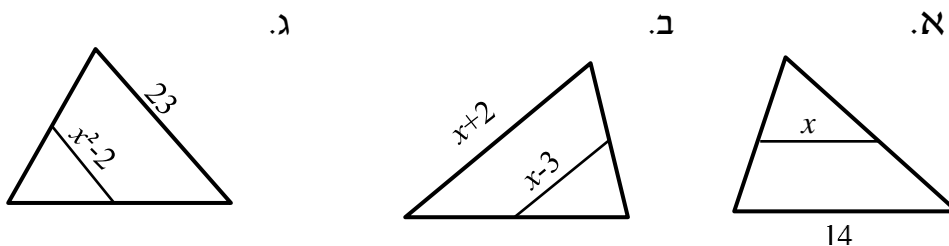
- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- (משפט הפוך 1): קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית חוצה את הצלע השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).
- (משפט הפוך 2): קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

איור – קטע אמצעים במשולש:

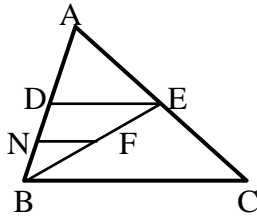


### שאלות:

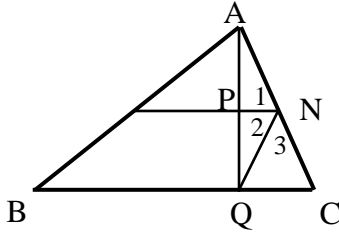
44) לפיך משולשים עם קטע אמצעים בתוכם. מצא את  $x$  בכל אחד מהמקרים:



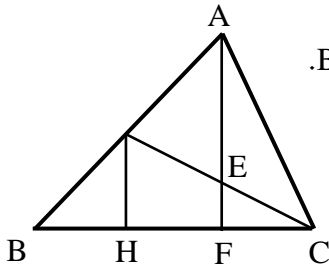
45) הנקודות D, E ו-F הם נקודות האמצע במשולש  $\triangle ABC$ . נתון:  $DE = 9$  ס"מ,  $EF = 12$  ס"מ,  $DF = 10$  ס"מ. חשב את היקף המשולש  $\triangle ABC$ .



- 46) הקטע DE הוא קטע אמצעים במשולש  $\triangle ABC$ .  
 הקטע FN הוא קטע אמצעים במשולש  $\triangle BDE$ .  
 נתון: 3 ס"מ = NF. מצא את אורך הצלע BC.



- 47) הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש  $\triangle ABC$ .  
 AQ הוא גובה לצלע BC.  
 הוכח:  $\sphericalangle N_1 = \sphericalangle N_2$ .



- 48) AF הוא גובה לצלע BC ו-GC הוא תיכון לצלע AB במשולש  $\triangle ABC$ .  
 הקטע GH מאונך לצלע BC.  
 א. הוכח:  $HF = BH$ .  
 ב. נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס"מ.  
 חשב את אורך הקטע EF.

### תשובות סופיות:

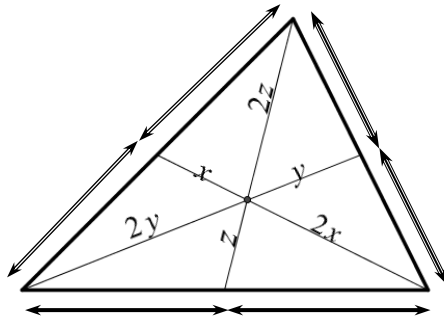
- 44) א.  $x = 7$       ב.  $x = 8$       ג.  $x = \sqrt{13.5}$
- 45) 62 ס"מ.
- 46) 12 ס"מ.
- 47) שאלת הוכחה.
- 48) א. שאלת הוכחה.      ב. 3 ס"מ.

## מפגש תיכונים במשולש:

### סיכום כללי:

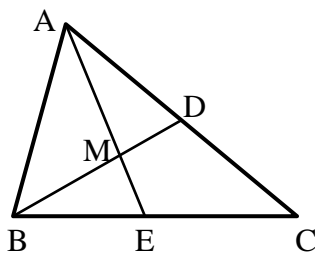
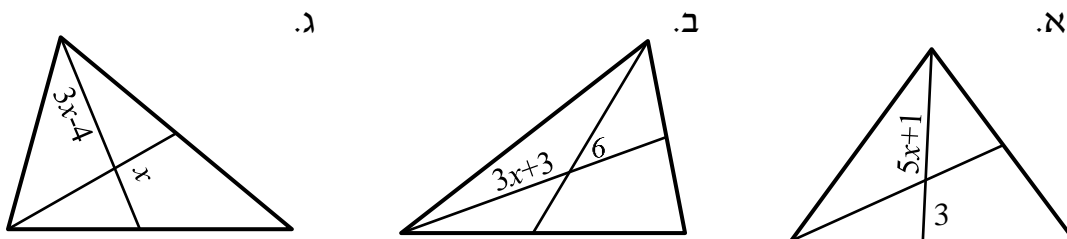
- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון ביחס של 2:1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.
- אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של 2:1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.
- נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.

איור – מפגש תיכונים במשולש:

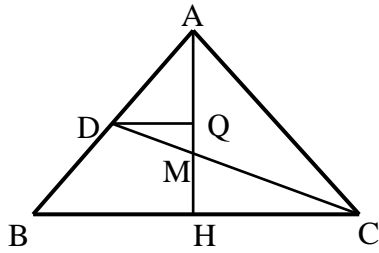


### שאלות:

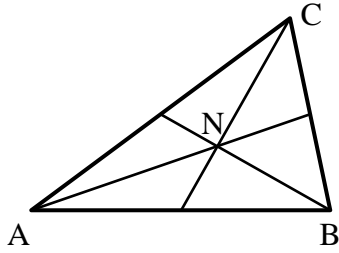
49) הקטעים שבמשולשים הם תיכונים. מצא את  $x$  בכל אחד מהמקרים הבאים:



50) הקטעים AE ו-BD הם תיכונים במשולש  $\triangle ABC$  אשר נחתכים בנקודה M. נתון:  $AD = AM$  וכן:  $AC = 30$  ס"מ. חשב את AE.



- (51)** המשולש  $\triangle ABC$  שבציור הוא מש"ש  
 (  $AB = AC$  ) שבו  $AH$  הוא הגובה לבסיס  $BC$ .  
 $CD$ , התיכון לשוק  $AB$ ,  
 יוצר זווית של  $30^\circ$  עם הבסיס  $BC$ .  
 נתון:  $BC = 12\sqrt{3}$  ס"מ,  $DQ \parallel BC$ .  
 חשב את אורך הקטע  $MQ$ .



- (52)** במשולש  $\triangle ABC$  נחתכים התיכונים בנקודה  $N$ .  
 נתון:  $\angle CNB = 90^\circ$ .  
 הוכח:  $BC = AN$ .

### תשובות סופיות:

- (49)** א.  $x = 1$     ב.  $x = 3$     ג.  $x = 4$   
**(50)** 22.5 ס"מ.  
**(51)** 3 ס"מ.  
**(52)** שאלת הוכחה.

# מכינה יסודית במתמטיקה

פרק 10 - גיאומטריה אוקלידית - מרובעים

תוכן העניינים

150	1. מרובע כללי
152	2. המקבילית
157	3. המלבן
160	4. המעוין
163	5. הריבוע
165	6. הטרפז
171	7. הדלתון
173	8. סיכום משפחת המרובעים

## מרובע כללי:

### סיכום כללי:

**הגדרה:** מרובע הוא מצולע בעל 4 צלעות.

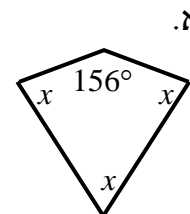
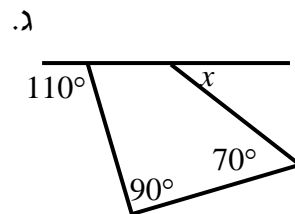
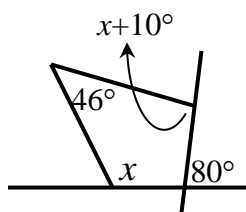
**משפט:** סכום זוויות במרובע הוא  $360^\circ$ .

### שאלות:

1) בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים.

חלק מהזוויות מסומנות ב- $x$ .

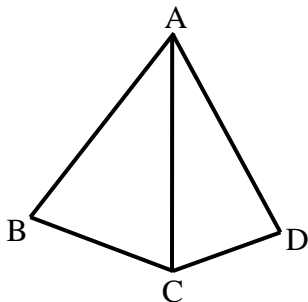
מצא את  $x$  ואת הזוויות של כל מרובע.



2) מצא את זוויות המרובע בכל אחד מהמקרים הבאים:

כל זווית במרובע (פרט לראשונה) גדולה ב- $10^\circ$  מהזווית הקודמת לה.

זוויות המרובע מתייחסות זו לזו כמו: 1: 2: 3: 4.



3) המשולשים ABC ו-ACD שבציור הם משולשים

שווי שוקיים ( $AB = AC = AD$ ).

נתון:  $\angle BAD = 80^\circ$ .

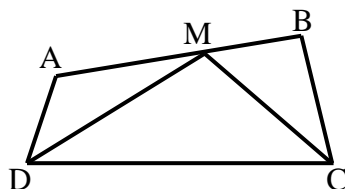
חשב את גודלה של הזווית BCD.

4) בסרטוט שלפניך נתון מרובע ABCD.

CM חוצה את זווית C ו-DM חוצה את זווית D.

ידוע כי:  $CM = DM$ ,  $\angle A = 130^\circ$ ,  $\angle DMC = 110^\circ$ .

מצא את שאר זוויות המרובע ABCD.



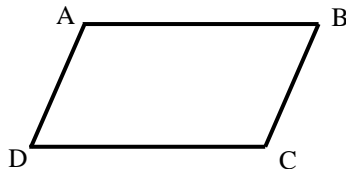
**תשובות סופיות:**

- (1) א.  $x = 68^\circ$       ב.  $x = 50^\circ$       ג.  $x = 102^\circ$
- (2) א.  $75^\circ, 85^\circ, 95^\circ, 105^\circ$       ב.  $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$
- (3)  $140^\circ$
- (4)  $\sphericalangle B = 90^\circ, \sphericalangle C = \sphericalangle D = 70^\circ$

## המקבילית:

### סיכום כללי:

**הגדרה:** מקבילית היא מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.



- במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
- במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות.
- במקבילית סכום כל שתי זוויות סמוכות הוא  $180^\circ$ .
- במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
- היקף מקבילית = סכום הצלעות, שטח מקבילית = צלע · גובה לצלע.

**כדי להוכיח כי מרובע הוא מקבילית נשתמש באחת הדרכים הבאות:**

- מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית.
- מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.
- מרובע שבו זוג צלעות שוות ומקבילות הוא מקבילית.
- מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
- מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

### שאלות:

5) נתונה מקבילית ABCD.

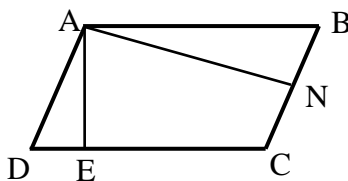
בכל אחד מהסעיפים הבאים הזוויות מיוצגות ע"י תבניות מספר שונות. מצא את זוויות המקבילית בכל מקרה.

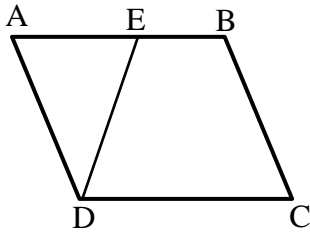


- א.  $\angle A = x$ ,  $\angle B = x - 70^\circ$ .
- ב.  $\angle B = 3x - 130^\circ$ ,  $\angle D = x + 10^\circ$ .
- ג.  $\angle A = x + 20^\circ$ ,  $\angle C = 100^\circ - x$ .

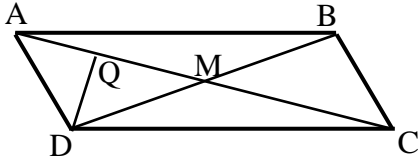
6) המרובע ABCD הוא מקבילית

- ובו:  $AE \perp CD$ ,  $AN \perp BC$ .  
הוכח כי:  $\angle DAE = \angle BAN$ .

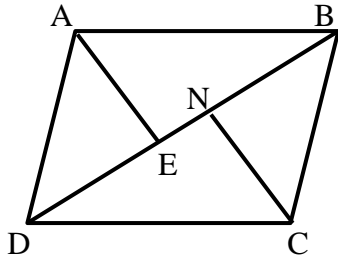




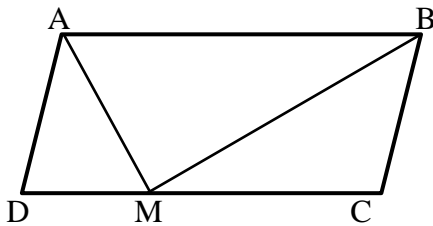
- 7) במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AB כך שמתקיים:  $DE = BC$ . הוכח כי:  $\angle EAD = \angle EDC$ .



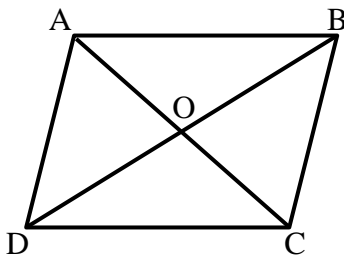
- 8) נתונה מקבילית ABCD שאלכסוניה נפגשים בנקודה M. נתון:  $AC = 20$  ס"מ,  $BC = \frac{1}{2}BD$  ו-  $DQ \perp AC$ . חשב את אורך הקטע AQ.



- 9) הוכח כי במקבילית הקדקודים הנגדיים נמצאים במרחקים שווים מאלכסון המקבילית שאינו עובר דרכם, כלומר הוכח:  $AE = CN$ .

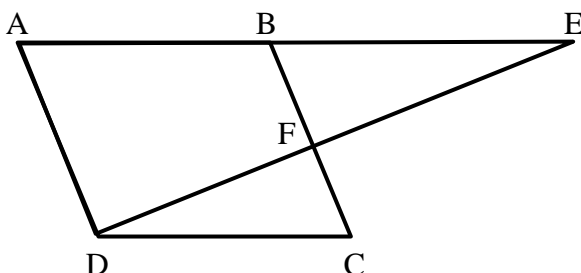


- 10) במקבילית ABCD הקטעים AM ו-BM הם חוצי הזוויות של A ו-B בהתאמה אשר נפגשים בנקודה M שעל הצלע DC. א. הוכח כי:  $AB = 2BC$ . ב. הוכח כי המשולש AMB הוא ישר זווית.



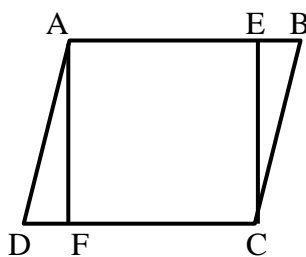
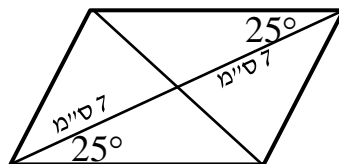
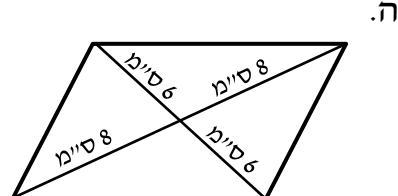
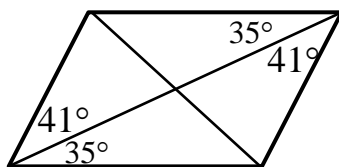
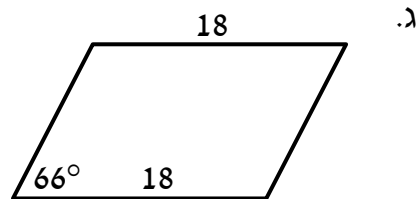
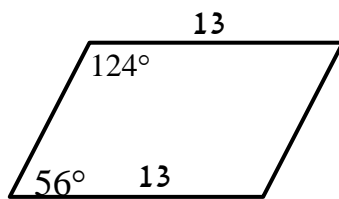
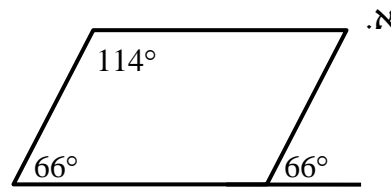
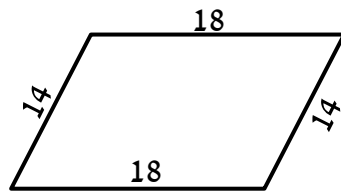
- 11) המרובע ABCD הוא מקבילית. O – פגישת האלכסונים. נתון:  $AO = x + 1$ ,  $BO = x + 8$ ,  $DO = 3x - 10$ . מצא את אורכי האלכסונים AC ו-BD.

- 12) נתונה מקבילית ABCD ובה:  $\angle ADC = 120^\circ$ ,  $\angle BEF = \frac{1}{2} \angle EAD$ .

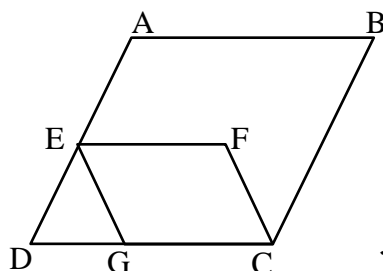


הוכח כי:  $BC \perp ED$ .

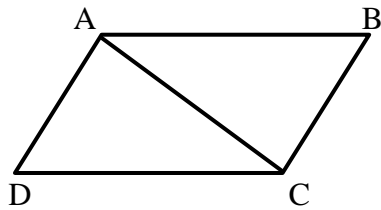
13) בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים.  
 קבע אלו מהם הם מקביליות וציין מדוע.



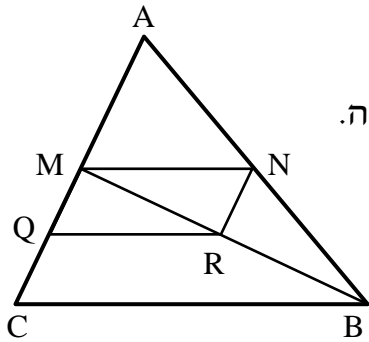
14) במקבילית ABCD הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AB ו-CD בהתאמה.  
 נתון:  $\angle DAF = \angle BCE$ .  
 הוכח כי המרובע AECF הוא מקבילית.



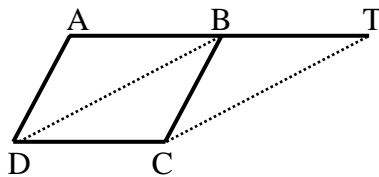
15) במקבילית ABCD הנקודות E ו-G נמצאות על הצלעות AD ו-BC בהתאמה כך שהמשולש DEG הוא שווה צלעות. הנקודה F נמצאת בתוך המקבילית כך שהקטע EF מקביל לצלע AB.  
 א. הוכח:  $\angle DAB = \angle EGC$ .  
 ב. נתון:  $\angle GCF = \angle ABC$ . הוכח כי EFCG מקבילית.



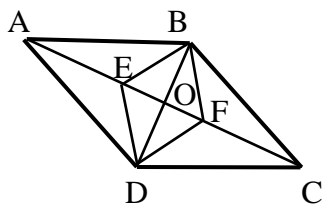
- 16) במרובע ABCD נתון כי הצלעות AB ו-DC שוות.  
 כמו כן:  $AD \perp AC$ ,  $BC \perp AC$ .  
 הוכח כי המרובע ABCD הוא מקבילית.



- 17) נתון משולש ABC ובו הקטע MN הוא קטע אמצעים.  
 הנקודות Q ו-R הן אמצעי הקטעים MC ו-BM בהתאמה.  
 א. הוכח כי המרובע MNRQ הוא מקבילית.  
 ב. ידוע כי הקטע AN שווה לקטע QR.  
 איזה סוג משולש הוא AMB? נמק.



- 18) את הצלע AB במקבילית ABCD האריכו  
 כאורכה עד לנקודה T.  
 הוכח: BTCD מקבילית.  
 הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.



- 19) הנקודה O היא מפגש אלכסוני המקבילית ABCD. E ו-F הן נקודות על האלכסון AC.  
 נתון:  $AE = FC$ .  
 הוכח כי EBFD הוא מקבילית.

### תשובות סופיות:

- 5 א.  $125^\circ, 55^\circ$       ב.  $100^\circ, 80^\circ$       ג.  $120^\circ, 60^\circ$ .
- 6 שאלת הוכחה.
- 7 שאלת הוכחה.
- 8 5 ס"מ.
- 9 שאלת הוכחה.
- 10 שאלת הוכחה.
- 11  $BD = 34$  ס"מ,  $AC = 20$  ס"מ.
- 12 שאלת הוכחה.
- 13 מקביליות: א', ב', ד', ה', ו', ח'      אינן מקביליות: ג', ז'.
- 14 שאלת הוכחה.
- 15 שאלת הוכחה.
- 16 שאלת הוכחה.
- 17 שאלת הוכחה.
- 18 שאלת הוכחה.
- 19 שאלת הוכחה.

## המלבן:

### סיכום כללי:

**הגדרה:** מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות.  
 (מסקנה: מלבן הוא סוג של מקבילית).

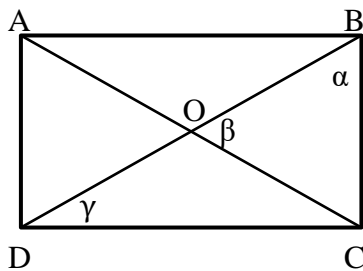
### תכונות המלבן (בנוסף לתכונות המקבילית):

- ארבע זוויות המלבן שוות והן זוויות ישרות.
- האלכסונים במלבן שווים זה לזה
- היקף מלבן סכום הצלעות, שטח מלבן צלע גובה לצלע.

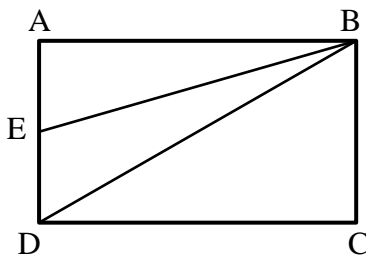
### כדי להוכיח כי מרובע הוא מלבן נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מרובע שבו שלוש זוויות ישרות הוא מלבן.
- מקבילית שבה זווית ישרה היא מלבן.
- מקבילית שבה האלכסונים שווים היא מלבן.

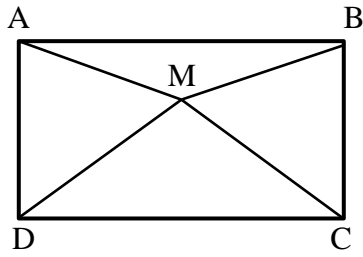
### שאלות:



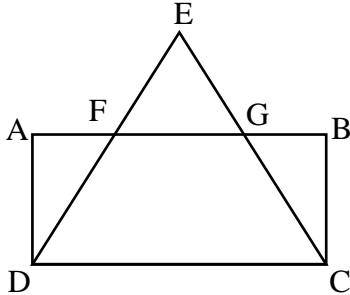
- 20** המרובע ABCD הוא מלבן.  
 מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.  
 חשב את הזוויות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $\gamma$  במקרים הבאים:
- א.  $\beta$  קטנה ב- $15^\circ$  מ- $\alpha$ .
  - ב.  $\alpha = 2\gamma$ .
  - ג.  $\gamma = 28^\circ$ .



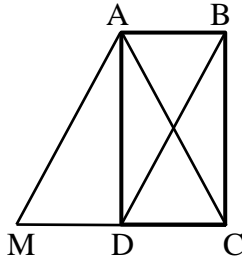
- 21** במלבן ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD.  
 נתון:  $\angle AEB = 70^\circ$ ,  $BD = 2BC$ .  
 חשב את גודלה של הזווית EBD.



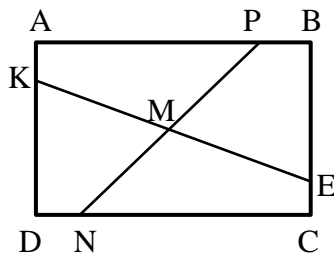
**(22)** נתון מלבן ABCD שבו  $DM = MC$ .  
הוכח:  $\angle MAB = \angle MBA$ .



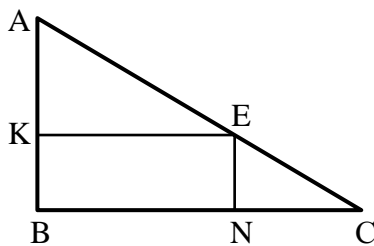
**(23)** המרובע ABCD הוא מלבן.  
המשכי הקטעים DF ו-CG נפגשים  
בנקודה E.  
נתון:  $EF = EG$ .  
הוכח:  $FD = GC$ .



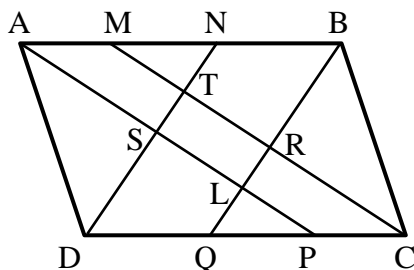
**(24)** המרובע ABCD הוא מלבן.  
המרובע ABDM הוא מקבילית.  
הוכח כי המשולש ACM הוא שווה שוקיים.



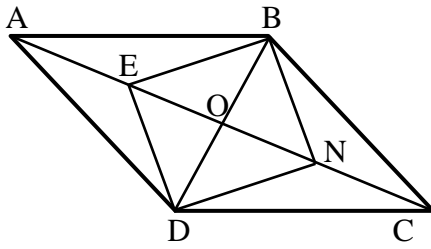
**(25)** מרובע ABCD הוא מלבן.  
נתון:  $AP = CN$ ,  $AK = CE$ .  
הוכח:  $KM = EM$ ,  $PM = NM$ .



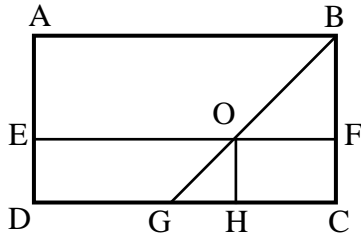
**(26)**  $\triangle ABC$  הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ).  
המרובע KENB חסום במשולש זה.  
נתון כי:  $\angle AEK = \angle C$ ,  $\angle NEC = \angle A$ .  
הוכח כי המרובע KENB הוא מלבן.



**(27)** נתונה מקבילית ABCD  
ובה  $DN$ ,  $CM$ ,  $BQ$ ,  $AP$   
הם חוצי הזוויות  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$ , ו- $\angle D$   
בהתאמה.  
הוכח:  $TRLS$  מלבן.



- (28)** מרובע ABCD הוא מקבילית.  
 מעבירים את האלכסונים AC ו-BD  
 אשר נחתכים בנקודה O.  
 נתון:  $2BD = AC$ .  
 E – אמצע AO. N – אמצע CO.  
 הוכח כי המרובע BNDE הוא מלבן.



- (29)** במלבן ABCD נתון:  
 $OH \perp DC$ ,  $\angle ABO = \angle BOF$ .  
 הוכח: EOHD הוא מלבן.

### תשובות סופיות:

ב.  $\alpha = \beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$

**(20)** א.  $\alpha = 55^\circ$ ,  $\beta = 70^\circ$ ,  $\gamma = 35^\circ$

ג.  $\alpha = 62^\circ$ ,  $\beta = 56^\circ$

**(21)**  $10^\circ$

**(22)** שאלת הוכחה.

**(23)** שאלת הוכחה.

**(24)** שאלת הוכחה.

**(25)** שאלת הוכחה.

**(26)** שאלת הוכחה.

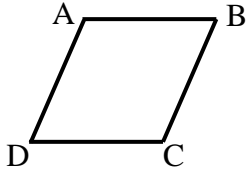
**(27)** שאלת הוכחה.

**(28)** שאלת הוכחה.

**(29)** שאלת הוכחה.

## המעוין:

### סיכום כללי:



**הגדרה:** מעוין הוא מרובע שכל צלעותיו שוות.  
(מסקנה: מעוין הוא סוג של מקבילית).

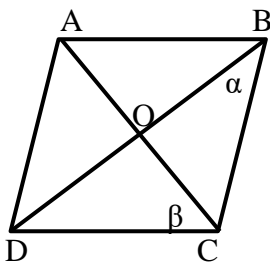
### תכונות המעוין (בנוסף לתכונות המקבילית):

- במעוין כל הצלעות שוות.
- במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
- במעוין האלכסונים הם חוצי זוויות.
- היקף מעוין = צלע  $\cdot 4$ , שטח מעוין = צלע  $\cdot$  גובה לצלע =  $(\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון}) / 2$ .

### כדי להוכיח כי מרובע הוא מעוין נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מרובע שבו כל הצלעות שוות הוא מעוין.
- מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.
- מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.
- מקבילית שבה אלכסון חוצה זווית היא מעוין (מספיק אחד).

### שאלות:



**30** המרובע ABCD הוא מעוין.

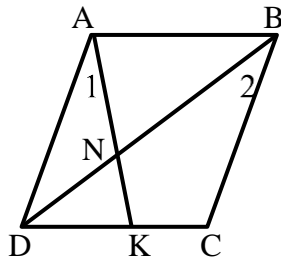
חשב בכל אחד מהמקרים הבאים את  $\alpha$  ו- $\beta$ .

א.  $\angle A = 138^\circ$ .

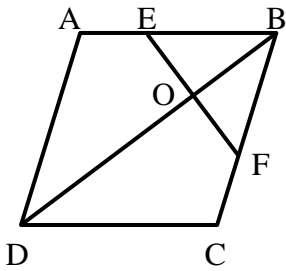
ב.  $\beta = 3.5\alpha$ .

ג.  $\beta = \alpha + 20^\circ$ .

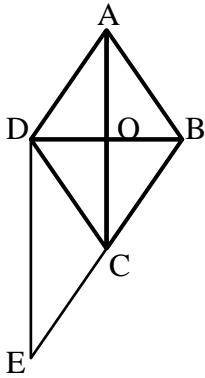
ד.  $\angle B = \beta$ .



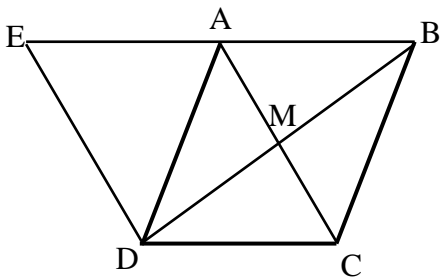
- 31** המרובע ABCD הוא מעוין.  
מעבירים את האלכסון BD ואת הקטע AK  
אשר נחתכים בנקודה N.  
ידוע כי:  $\angle A_1 = \angle B_2$ .  
א. הוכח כי המשולש ADN הוא שווה שוקיים.  
ב. הוכח כי:  $\angle AND = \angle C$ .



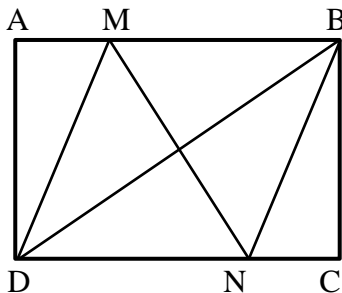
- 32** מעוין ABCD הנקודות E ו-F  
נמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה.  
נתון:  $\angle DCB = 120^\circ$ ,  $EF \perp BD$ .  
הוכח כי משולש EBF הוא שווה צלעות.



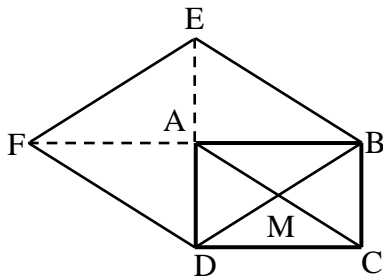
- 33** נתון מעוין ABCD.  
הנקודה E נמצאת על המשך הצלע BC.  
נתון:  $\angle CDE = \angle BCA$ .  
הוכח כי המשולש BDE הוא ישר זווית.



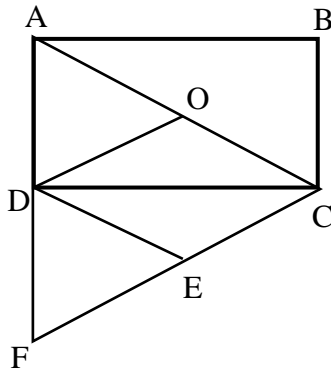
- 34** נתון מעוין ABCD שאלכסונו נפגשים בנקודה M.  
האריכו את הצלע AB עד לנקודה E  
כך שמתקיים:  $DE \perp BD$ .  
הוכח:  $AD = AE$ .



- 35** במלבן ABCD מעבירים את האלכסון BD.  
הנקודות M ו-N נמצאות על הצלעות AB  
ו-DC בהתאמה.  
נתון:  $AM = CN$  ו- $DM = DN$ .  
הוכח כי הקטע MN חוצה את  
הזוויות BMD ו-BND.



**36** נתון מלבן ABCD שאלכסונו נפגשים בנקודה M. האריכו את הצלע AB כאורכה עד לנקודה F ואת הצלע AD כאורכה עד לנקודה E כמתואר בשרטוט. הוכח: המרובע EBDF הוא מעוין.



**37** ABCD הוא מלבן שאלכסונו נחתכים בנקודה O. הנקודה F נמצאת על המשך הצלע AD כך שמתקיים:  $AD = DF$ . נתון:  $FE = CE$ . הוכח כי DOCE הוא מעוין.

**תשובות סופיות:**

ב.  $\alpha = 20^\circ, \beta = 70^\circ$

ד.  $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$

**30** א.  $\alpha = 21^\circ, \beta = 69^\circ$

ג.  $\alpha = 35^\circ, \beta = 55^\circ$

**31** שאלת הוכחה.

**32** שאלת הוכחה.

**33** שאלת הוכחה.

**34** שאלת הוכחה.

**35** שאלת הוכחה.

**36** שאלת הוכחה.

**37** שאלת הוכחה.

## הריבוע:

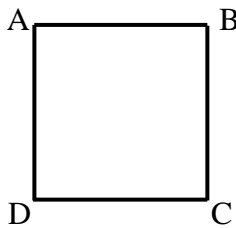
### סיכום כללי:

**הגדרה:** ריבוע הוא מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות.

(מסקנה: ריבוע הוא סוג של מקבילית, סוג של מלבן וסוג של מעוין).

מכאן, שבנוסף לתכונות שבהגדרת הריבוע מתקיים כי אלכסונו הריבוע חוצים זה את זה, שווים זה לזה, מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע.

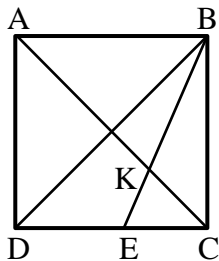
היקף ריבוע = צלע  $\cdot 4$ , שטח ריבוע =  $(צלע)^2 = (אלכסון)^2 / 2$



**כדי להוכיח כי מרובע הוא ריבוע נשתמש באחת הדרכים הבאות:**

- מלבן שבו האלכסונים מאונכים הוא ריבוע.
- מלבן שבו אלכסון חוצה זווית הוא ריבוע.
- מלבן שבו שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.
- מעוין שבו האלכסונים שווים הוא ריבוע.
- מעוין שבו זווית ישרה הוא ריבוע.

### שאלות:

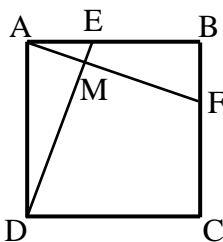


**38** המרובע ABCD הוא ריבוע.

מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.

BE חוצה זווית DBC וחותך את AC בנקודה K.

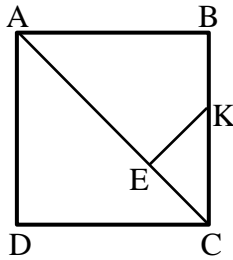
הוכח:  $CE = CK$ .



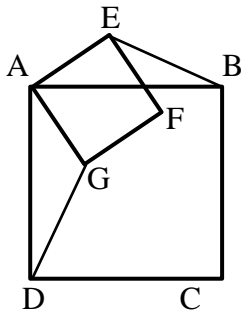
**39** בריבוע ABCD מעבירים את הקטעים AF ו-DE.

נתון כי  $AE = BF$ .

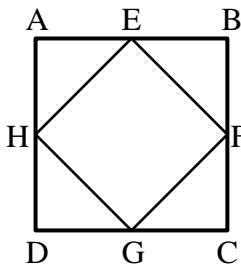
הוכח:  $DE \perp AF$ .



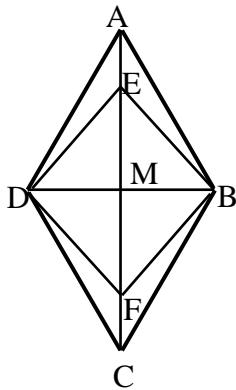
- 40** המרובע ABCD הוא ריבוע.  
מעבירים את האלכסון AC.  
מהנקודה E שעל האלכסון מעבירים את הקטע KE אשר מאונך לאלכסון.  
נתון:  $AE = AB$ .  
הוכח כי:  $CE = KE = BK$ .



- 41** המרובעים ABCD ו-AEFG הם ריבועים.  
הוכח:  $BE = DG$ .



- 42** הנקודות E, F, G, H הן אמצעי צלעות הריבוע ABCD.  
הוכח כי EFGH הוא ריבוע.



- 43** נתון מעוין ABCD שאלכסונו נפגשים בנקודה M.  
נתון:  $\angle EBA = 15^\circ$ ,  $MB = \frac{1}{2} AB$ ,  $AE = FC$ .  
הוכח: המרובע EBFM הוא ריבוע.

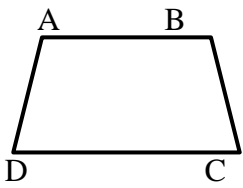
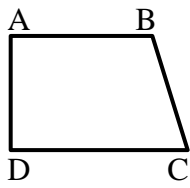
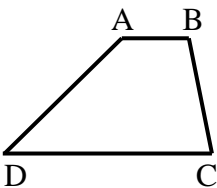
### תשובות סופיות:

- 38** שאלת הוכחה.  
**39** שאלת הוכחה.  
**40** שאלת הוכחה.  
**41** שאלת הוכחה.  
**42** שאלת הוכחה.  
**43** שאלת הוכחה.

## הטרפז:

### סיכום כללי:

**הגדרה:** טרפז הוא מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות.  
 היקף טרפז = סכום הצלעות, שטח טרפז =  $\frac{(\text{גובה} \cdot \text{סכום הבסיסים})}{2}$ .

טרפז שווה שוקיים	טרפז ישר זווית	טרפז כללי	סוג הטרפז
			איור מתאים

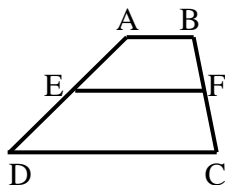
### משפטים הנוגעים לטרפז שווה שוקיים:

- בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
- (משפט הפוך) טרפז שבו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.
- בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
- (משפט הפוך) טרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

### קטע אמצעים בטרפז:

**הגדרה:** קטע אמצעים בטרפז הוא קטע המחבר את אמצעי השוקיים בטרפז.

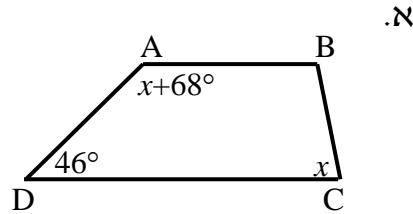
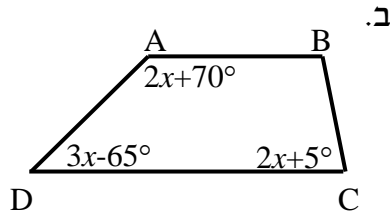
- קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.



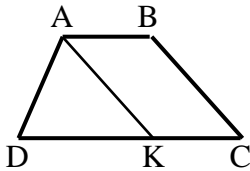
- (משפט הפוך) קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים בטרפז).

**שאלות:**

**44** בסרטוטים שלפניך נתונים טרפזים כלליים  $(AB \parallel CD)$ . מצא את  $x$  ואת זוויות הטרפז בכל מקרה.

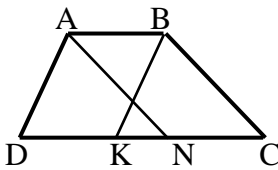


**45** המרובע ABCD הוא טרפז  $(AB \parallel CD)$ .



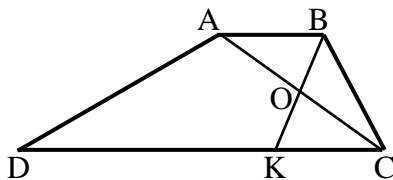
מעבירים את הקטע AK.  
נתון:  $AK = DK$ ,  $AK \parallel BC$ ,  
 $DC = 14$  ס"מ,  $AB = 6$  ס"מ.  
חשב את אורך השוק BC.

**46** המרובע ABCD הוא טרפז  $(AB \parallel CD)$ .



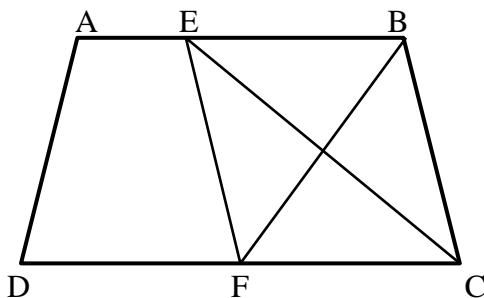
נתון כי:  $AN \parallel BC$ ,  $AD \parallel BK$ .  
הוכח כי:  $DK = CN$ .

**47** המרובע ABCD הוא טרפז  $(AB \parallel CD)$ .

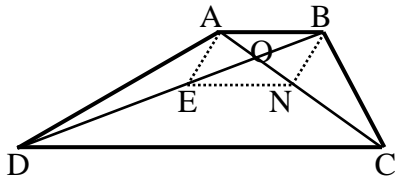


מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע BK אשר חוצים זה את זה בנקודה O.  
ידוע כי:  $\angle C = 60^\circ$ ,  $\angle D = 30^\circ$ .  
א. חשב את אורך DC, הבסיס הגדול,  
אם ידוע כי:  $AB = 7$  ס"מ,  $BC = 9$  ס"מ.  
ב. הוכח כי אם  $AB = BC$  אז:  $DC = 3AB$ .

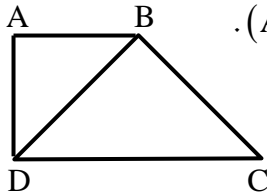
**48** נתון טרפז ABCD  $(AB \parallel CD)$  ובו



הקטעים CE ו-BF חוצים את זוויות הקדקודים C ו-B בהתאמה. הוכח:  
א.  $BF \perp CE$ .  
ב. המשולש EBC הוא שווה שוקיים.  
ג. המרובע EBCF הוא מעויך.

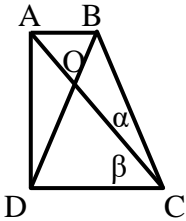


- (49) מרובע ABCD הוא טרפז  $(AB \parallel CD)$ .  
 O - היא נקודת פגישת האלכסונים.  
 נתון:  $BO = EO$ ,  $AO = NO$ .  
 הוכח כי המרובע ENCD הוא טרפז.

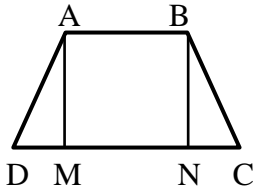


- (50) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית  $(AB \parallel CD, \angle D = 90^\circ)$ .

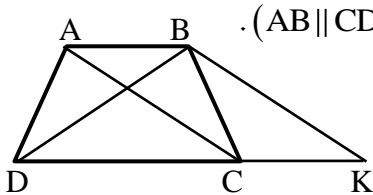
האלכסון BD חוצה את זווית D  
 ונתון בנוסף כי:  $BD = BC$  וכי:  $AD = 15$  ס"מ.  
 חשב את אורכי בסיסי הטרפז.



- (51) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית  
 $(AB \parallel CD, AD \perp DC)$ .  
 נתון כי:  $\beta = 2\alpha$ ,  $\angle DOC = 80^\circ$  ו- $BD = BC$ .  
 חשב את זוויות הטרפז.



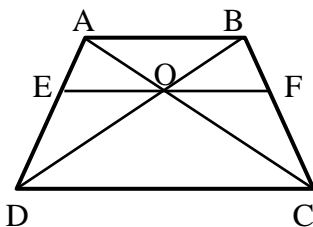
- (52) מרובע ABCD הוא טרפז שווה  
 $(AB \parallel CD, AD = BC)$  שוקיים.  
 נתון כי:  $AM \perp DC$ ,  $BN \perp DC$ .  
 הוכח כי:  $DM = CN$ .



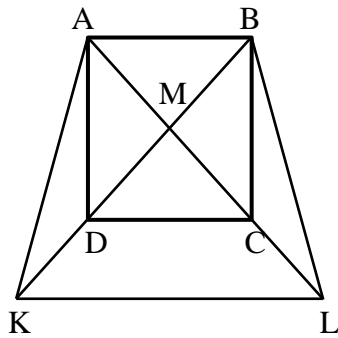
- (53) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים  $(AB \parallel CD, AD = BC)$ .

דרך הנקודה B מעבירים מקביל ל-AC הפוגש את המשך הבסיס DC בנקודה K.  
 הוכח כי משולש BDK הוא שווה שוקיים.

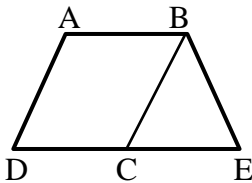
- (54) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים  $(AB \parallel CD, AD = BC)$ .



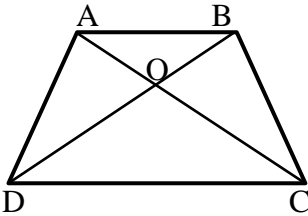
- O היא פגישת האלכסונים.  
 נתון כי:  $EF \parallel DC$  כאשר EF עובר דרך O.  
 הוכח:  
 א.  $\angle BOF = \angle COF$ .  
 ב.  $EO = FO$ .



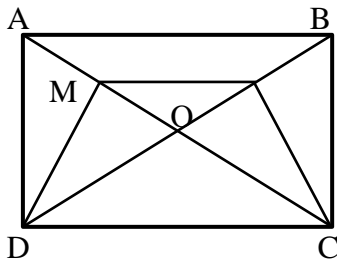
- 55 נתון ריבוע ABCD.
- הנקודה M היא מפגש האלכסונים AC ו-BD. ממשיכים את האלכסונים ויוצרים את הטרפז השווה שוקיים ABLK.
- ידוע גם כי DC הוא קטע אמצעים משולש KML.
- א. קבע אלו מהטענות הבאות ניתן להוכיח:
- המשולש KML הוא ישר זווית ושווה שוקיים.
  - הקטעים BK ו-BL מאונכים זה לזה.
  - המרובע DCLK הוא טרפז שווה שוקיים.
  - הקטעים DK ו-AD שווים זה לזה.
- ב. הוכח כי:  $3DK = AL$ .
- ג. נתון כי  $AD = 8\sqrt{2}$  ס"מ. חשב את היקף הטרפז ABLK.



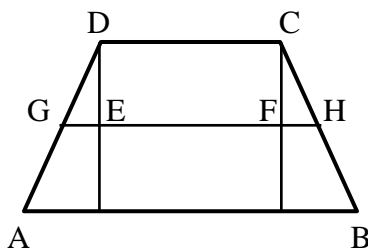
- 56 המרובע ABCD הוא מקבילית.
- הקטע DE הוא קו ישר ונתון כי:  $\angle A + \angle E = 180^\circ$ .
- הוכח כי המרובע ABED הוא טרפז שווה שוקיים.



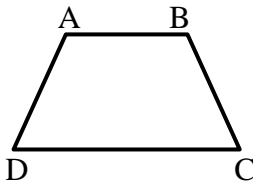
- 57 במרובע ABCD הנקודה O היא פגישת האלכסונים.
- נתון כי:  $CO = DO$ ,  $AO = BO$ .
- הוכח כי מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.



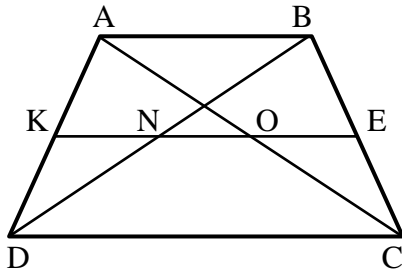
- 58 נתון מלבן ABCD שאלכסונו נפגשים בנקודה O.
- נתון:  $MN \parallel DC$ .
- הוכח: טרפז DMNC שווה שוקיים.



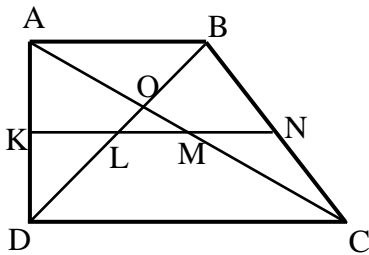
- 59 בטרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ) הורדו מקצות הבסיס הקטן אנכים לבסיס הגדול.
- קטע האמצעים GH חותך גבהים אלה בנקודות E ו-F.
- נתון:  $GE = 3$  ס"מ,  $EF = 12$  ס"מ,  $FH = 2$  ס"מ.
- חשב את בסיסי הטרפז.



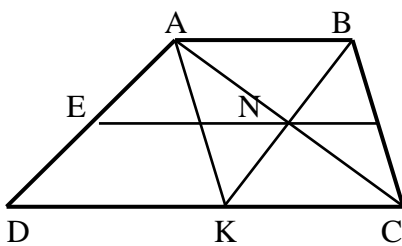
**60** סכום כל אורכי הצלעות של טרפז שווה שוקיים הוא 54 ס"מ.  
אורך קטע האמצעים הוא 13 ס"מ.  
מצא את אורך שוק הטרפז.



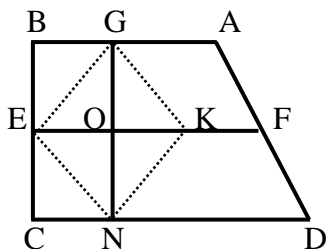
**61** המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ).  
KE הוא קטע אמצעים בטרפז, החותך את אלכסוני הטרפז בנקודות O ו-N.  
א. הוכח כי:  $KN = EO$ .  
ב. בטרפז הנ"ל נתון:  
 $AB = 14$  ס"מ,  $DC = 26$  ס"מ.  
חשב את אורכי הקטעים KN, NO ו-EO.  
ג. בטרפז הנ"ל נתון:  $KE = 13$  ס"מ,  
 $NO = 3$  ס"מ. חשב את בסיסי הטרפז.



**62** KN הוא קטע אמצעים בטרפז ישר זווית ABCD שאלכסוניו ( $AB \parallel CD, AD \perp AB$ ) נפגשים בנקודה O.  
נתון:  $AD = 12$  ס"מ,  $DC = 2AB$ ,  $\angle ADB = 45^\circ$ .  
חשב את אורך הקטע LM והוכח כי:  $KL = LM = MN$ .



**63** מרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ).  
EF הוא קטע אמצעים. AC ו-BK נפגשים בנקודה N הנמצאת על EF.  
א. הוכח כי מרובע ABCK הוא מקבילית.  
ב. נתון:  $EF = 13$  ס"מ,  $EN = 9$  ס"מ.  
חשב את בסיסי הטרפז AB ו-DC ואת הקטע DK.



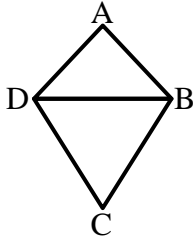
**64** המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ( $AB \parallel CD, \angle B = 90^\circ$ ).  
EF קטע אמצעים בטרפז.  
G ו-N הן נקודות על AB ו-CD בהתאמה המקיימות:  $GN \perp DC$ .  
בנוסף נתון:  $\angle D < 90^\circ, KO = EO$ .  
הוכח כי מרובע GENK הוא מעוין.

### תשובות סופיות:

- (44) א.  $x = 66^\circ$ ;  $46^\circ, 134^\circ, 66^\circ, 114^\circ$     ב.  $x = 35^\circ$ ;  $40^\circ, 140^\circ, 75^\circ, 105^\circ$
- (45) 8 ס"מ.
- (46) שאלת הוכחה.
- (47) א. 25 ס"מ.
- (48) שאלת הוכחה.
- (49) שאלת הוכחה.
- (50) א. 15 ס"מ, 30 ס"מ.
- (51)  $90^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 120^\circ$
- (52) שאלת הוכחה.
- (53) שאלת הוכחה.
- (54) שאלת הוכחה.
- (55) א. ניתן להוכיח את טענות: i, iii.    ב. שאלת הוכחה.
- ג.  $P_{ABLK} = 16\sqrt{5} + 24\sqrt{2} \approx 69.71$  ס"מ
- (56) שאלת הוכחה.
- (57) שאלת הוכחה.
- (58) שאלת הוכחה.
- (59) 22 ס"מ ו-12 ס"מ.
- (60) 14 ס"מ.
- (61) א. שאלת הוכחה.    ב.  $NO = 6$  ס"מ,  $KN = EO = 7$  ס"מ
- ג.  $DC = 16$  ס"מ,  $AB = 10$  ס"מ
- (62) 6 ס"מ.
- (63) 8 ס"מ,  $AB = 18$  ס"מ,  $DC = 10$  ס"מ,  $DK = 10$  ס"מ.
- (64) שאלת הוכחה.

## הדלתון:

### סיכום כללי:



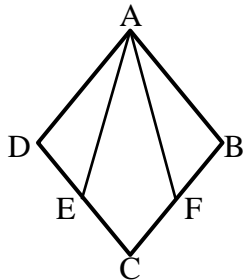
#### הגדרה:

דלתון הוא מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות. (מסקנה: דלתון הוא מרובע שניתן לפרק לשני משולשים שווים שוקיים בעלי בסיס משותף).

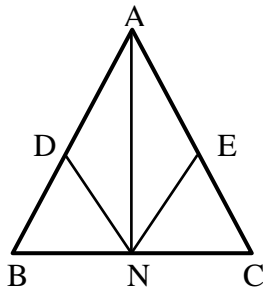
### תכונות האלכסונים בדלתון:

- האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.
- האלכסון הראשי אינו בהכרח גדול מהאלכסון המשני.
- היקף דלתון = סכום הצלעות, שטח דלתון =  $(\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון}) / 2$ .

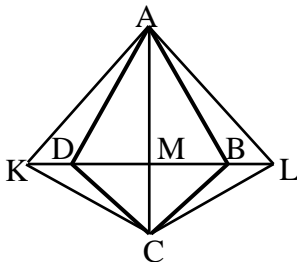
### שאלות:



**65** נתון מעוין ABCD. הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות DC ב-BC בהתאמה כך שהמרובע AFCE הוא דלתון. הוכח:  $\angle DAE = \angle FAB$ .



**66** במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) מקצים נקודות D ו-E על השוקיים. נתון כי:  $AD = AE$ . הנקודה N היא אמצע BC. הוכח כי ADNE הוא דלתון.



**67** בדלתון ABCD האריכו את האלכסון המשני משני צדיו כמתואר בשרטוט כך שמתקיים:  $KD = BL$ . הוכח: המרובע ALCK הוא דלתון.

**תשובות סופיות:**

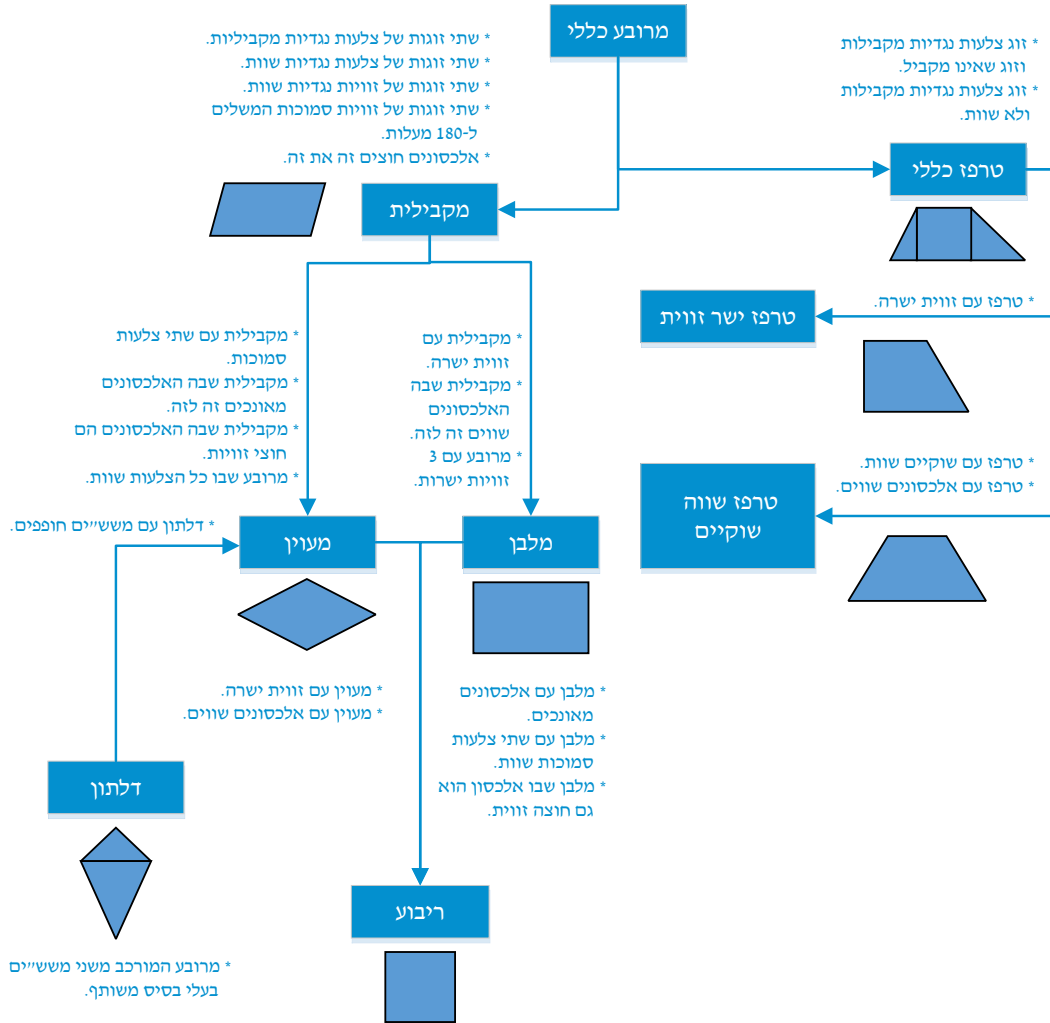
65) שאלת הוכחה.

66) שאלת הוכחה.

67) שאלת הוכחה.

## סיכום משפחת המרובעים:

להלן דיאגרמה מסכמת של כל משפחת המרובעים ותכונותיהם:



# מכינה יסודית במתמטיקה

פרק 11 - גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים

תוכן העניינים

174	1. שטחים והיקפים של משולשים
176	2. שטחים והיקפים של מרובעים
177	3. שאלות עם מקבילית
180	4. שאלות עם מלבן
181	5. שאלות עם מעוין
183	6. שאלות עם ריבוע
185	7. שאלות עם טרפז

## שטחים והיקפים של משולשים:

**סיכום כללי:**

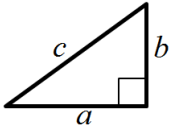
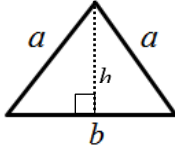
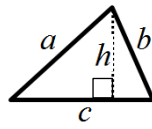
**שטח – הגדרה:**

גודל של תחום מישורי בהשוואה ליחידת מידה קבועה.  
שטח נמדד ביחידות מידה של אורך בריבוע כגון:  
מטר ריבועי ( $m^2$ ), ס"מ ריבועי (סמ"ר  $cm^2$ ).

**היקף – הגדרה:**

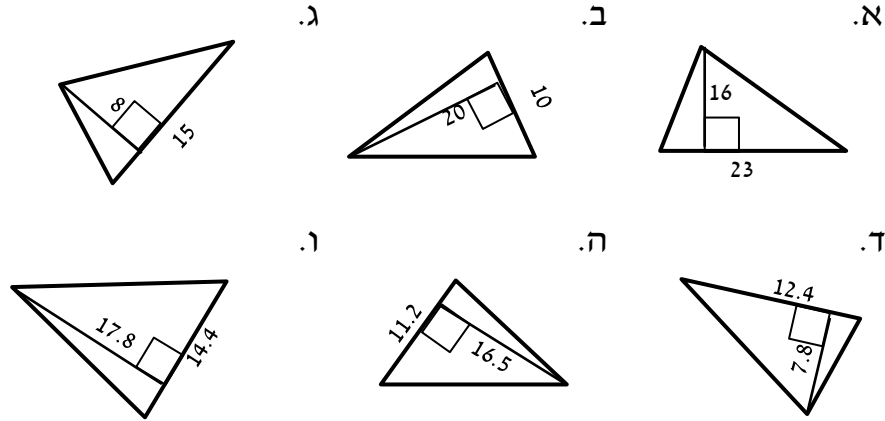
היקף מצולע הוא סכום כל צלעותיו.

**משולשים:**

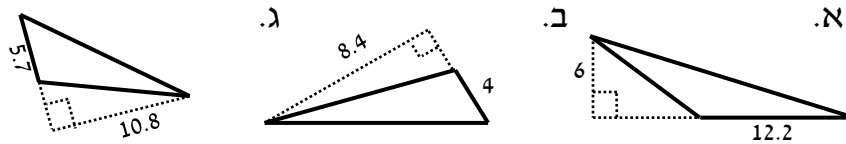
משולש ישר זווית	משולש שווה שוקיים	משולש כללי	סוג
			איור
$S = \frac{a \cdot b}{2}$	$S = \frac{b \cdot h}{2}$	$S = \frac{c \cdot h}{2}$	שטח
$P = a + b + c$	$P = 2a + b$	$P = a + b + c$	היקף

**שאלות:**

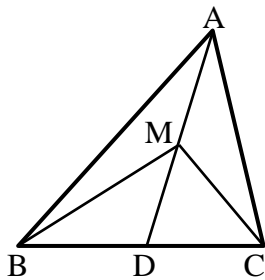
(1) מצא את שטחם של המשולשים הבאים (כל המידות נתונות בס"מ):



(2) מצא את שטחם של המשולשים קהי-הזווית הבאים (כל המידות בס"מ):



(3) הוכח כי אם במשולש ABC, הקטע AD המחבר את הקדקוד A עם הצלע BC יוצר שני משולשים שווים בשטחם אז הוא תיכון ל-BC.



(4) במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC. M היא אמצע AD. הוכח כי:

א. הקטעים AD, MC ו-BM מחלקים את המשולש ABC ל-4 משולשים שווים שטח.

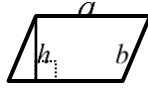
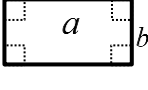
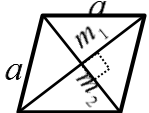

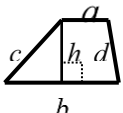
ב.  $S_{MBC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ .

**תשובות סופיות:**

- (1) א. 184 סמ"ר      ב. 100 סמ"ר      ג. 60 סמ"ר      ד. 48.36 סמ"ר
- ה. 92.4 סמ"ר      ו. 128.16 סמ"ר
- (2) א. 36.6 סמ"ר      ב. 16.8 סמ"ר      ג. 30.78 סמ"ר
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.

## שטחים והיקפים של מרובעים:

סיכום כללי:

סוג	מקבילית	מלבן	מעוין	ריבוע	טרפז
איור					
שטח	$S = a \cdot h$	$S = a \cdot b$	$S = a \cdot h$ $S = \frac{m_1 \cdot m_2}{2}$	$S = a^2$	$S = \frac{(a+b)h}{2}$
היקף	$P = 2(a+b)$	$P = 2(a+b)$	$P = 4a$	$P = 4a$	$P = a+b+c+d$

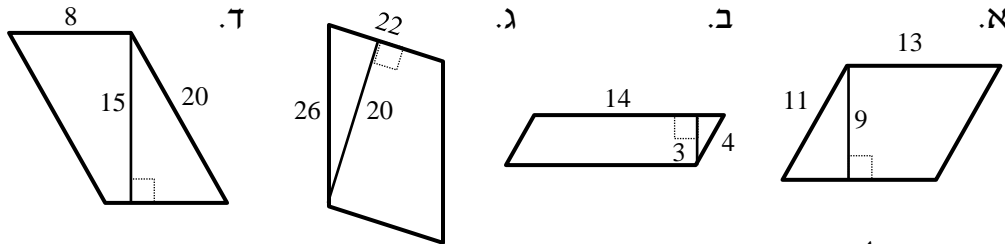
הערות כלליות:

- שטח מקבילית ניתן לחישוב ע"י מכפלת כל צלע בגובה המתאים לה. כך ניתן לקבל את הנוסחה:  $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$  כאשר  $h_a$  ו-  $h_b$  הם הגבהים לצלעות  $a$  ו-  $b$  בהתאמה.
- ניתן לחשב שטח מעוין ע"י מחצית ממכפלת אלכסונים או ע"י מכפלת צלע בגובה שלה (שכן היא סוג של מקבילית).
- עבור טרפז ישר זווית, שבו  $h=c$  נקבל:  $S = \frac{(a+b)c}{2}$ .
- ניתן לחשב שטח של טרפז ע"י הורדת גבהים, חלוקתו למלבן ושני משולשים, חישוב שטחם בנפרד ואיחודם.

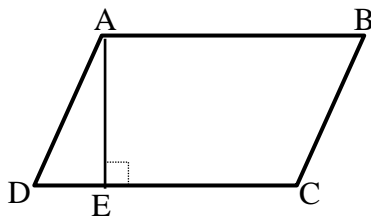
## שאלות עם מקבילית:

### שאלות:

(5) חשב את השטחים וההיקפים של המקבילות הבאות (כל המידות בס"מ):



(6) נתונה מקבילית ABCD.



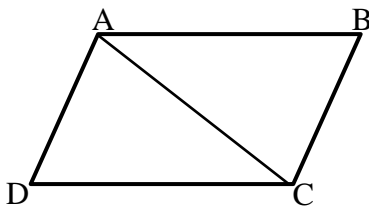
מעבירים גובה AE לצלע CD שאורכו הוא 6 ס"מ. ידוע כי שטח המקבילית הוא 60 סמ"ר.

א. מצא את אורך הצלע AB.

ב. ידוע כי היקף המקבילית הוא 36 ס"מ.

מצא את אורך הצלע BC.

(7) נתונה מקבילית ABCD.

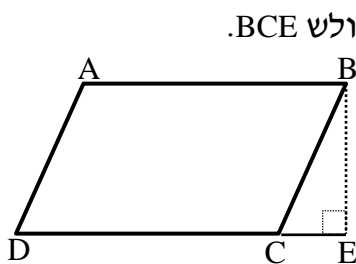


מעבירים את האלכסון AC שאורכו 25 ס"מ.

ידוע כי היקף המשולש ACD הוא 66 ס"מ.

חשב את היקף המקבילית.

(8) נתונה מקבילית ABCD.



מורידים גובה מהקדקוד B לצלע CD כך שנוצר המשולש BCE.

שטח המשולש BCE הוא 24 סמ"ר

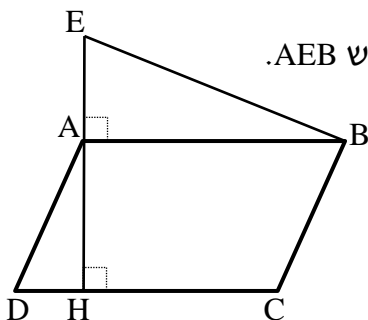
ושטח המקבילית ABCD הוא 112 סמ"ר.

נתון:  $CE = 6$  ס"מ.

א. מצא את אורך הגובה BE.

ב. מצא את אורך הצלע AB של המקבילית.

(9) נתונה מקבילית ABCD.



מעלים אנך מהקדקוד A עד לנקודה E ויוצרים משולש AEB.

מורידים גובה AH לצלע CD שאורכו 12 ס"מ.

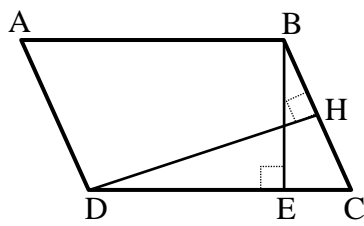
נתון:  $AE = 8$  ס"מ,  $AD = 13$  ס"מ.

שטח כל הצורה AEBCD הוא 256 סמ"ר.

א. מצא את אורך הצלע AB.

ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.

**10** במקבילית ABCD מעבירים את הגבהים BE ו-DH לצלעות CD ו-BC בהתאמה.



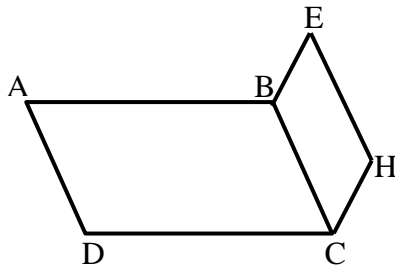
נתון:  $BE = 12$  ס"מ,  $BC = 14.4$  ס"מ,  $DH = 15$  ס"מ.

א. חשב את שטח המקבילית ABCD.

ב. חשב את אורך הצלע AB.

ג. חשב את היקף המקבילית.

**11** נתונה המקבילית ABCD.



על הצלע BC בונים מקבילית נוספת BCHE שהיקפה הוא 44 ס"מ.

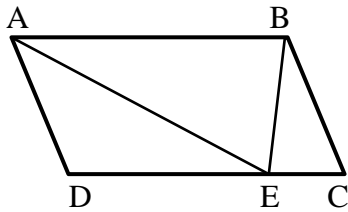
ידוע כי היקף הצורה ABEHCD הוא 94 ס"מ.

נתון:  $BC = 15$  ס"מ.

א. חשב את אורך הצלע AB.

ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.

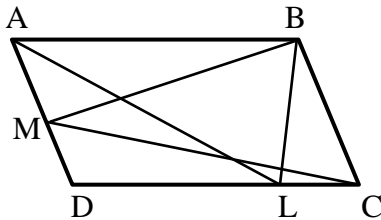
**12** המרובע ABCD הוא מקבילית.



הנקודה E נמצאת על DC.

הוכח כי:  $S_{AEB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ .

**13** המרובע ABCD הוא מקבילית.



הנקודות M ו-L נמצאות על הצלעות

AD ו-DC בהתאמה.

הוכח כי:  $S_{BMC} = S_{ALB}$ .

### תשובות סופיות:

- (5) א. 48 ס"מ  $P$ , 117 סמ"ר  $S$       ב. 36 ס"מ  $P$ , 42 סמ"ר  $S$
- ג. 96 ס"מ  $P$ , 440 סמ"ר  $S$       ד. 56 ס"מ  $P$ , 120 סמ"ר  $S$
- (6) א. 10 ס"מ  $AB$       ב. 8 ס"מ  $BC$
- (7) 82 ס"מ  $P$
- (8) א. 8 ס"מ  $BE$       ב. 14 ס"מ  $AB$
- (9) א. 16 ס"מ  $AB$       ב. 58 ס"מ  $P$
- (10) א. 216 סמ"ר  $S$       ב. 18 ס"מ  $AB$       ג. 64.8 ס"מ  $P$
- (11) א. 25 ס"מ  $AB$       ב. 80 ס"מ  $P$
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.

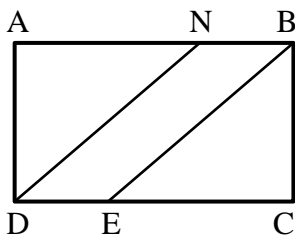
## שאלות עם מלבן:

## שאלות:

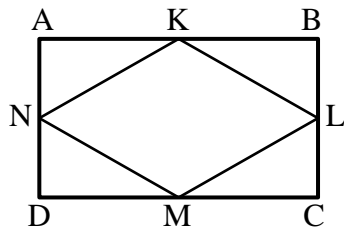
14) במלבן ABCD אורכי הצלעות הם:  $AB = 12$  ס"מ,  $BC = 8$  ס"מ. מצאו את ההיקף של המלבן.

15) במלבן ABCD אורך הצלע AB הוא 10 ס"מ. היקף המלבן הוא 32 ס"מ. מצאו את שטח המלבן.

16) במלבן ABCD נתון:  $DC = 11$  ס"מ,  $AD = 9$  ס"מ. מצאו את האורך של האלכסון AC.



17) המרובע ABCD הוא מלבן. הישרים DN ו-BE מקבילים. נתון:  $AB = 32$  ס"מ,  $DN = 30$  ס"מ ו- $BN = 8$  ס"מ. הוכח כי מרובע NBED הוא מקבילית וחשב את שטחה.



18) הנקודות K, L, M ו-N הן אמצעי הצלעות AB, BC, CD, AD בהתאמה במלבן ABCD. נתון כי היקף המלבן הוא 120 ס"מ וכי שטחו הוא 836 סמ"ר. חשב את שטחו של המרובע KLMN.

## תשובות סופיות:

14) 40 ס"מ.

15) 60 סמ"ר.

16)  $14.21$  ס"מ  $\approx \sqrt{202}$ .

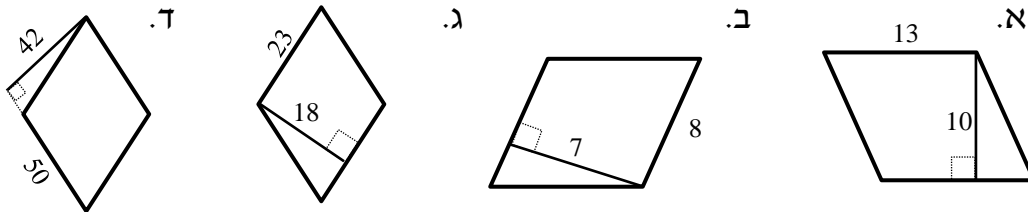
17) 144 סמ"ר.

18) 418 סמ"ר.

## שאלות עם מעוין:

### שאלות:

19) חשב את השטחים וההיקפים של המעוינים הבאים (כל המידות בס"מ):



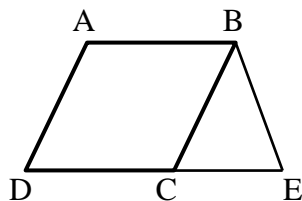
20) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O. נתון: 3 ס"מ = AO, 4 ס"מ = BO. מצא את אורך צלע המעוין.

21) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O. נתון: 12 ס"מ = AB, 8 ס"מ = BO. מצא את AO.

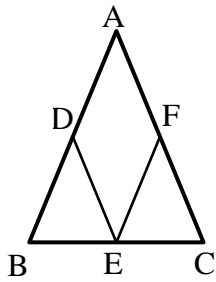
22) במעוין ABCD האלכסון AC שווה באורכו לצלע המעוין. נתון: 20 ס"מ = AB.

- א. חשב את אורך האלכסון BD.  
ב. חשב את שטח המעוין.

23) נתון מעוין ABCD. אורך האלכסון הקצר הוא 7 ס"מ ושטח המעוין הוא 35 סמ"ר. חשב את היקף המעוין.

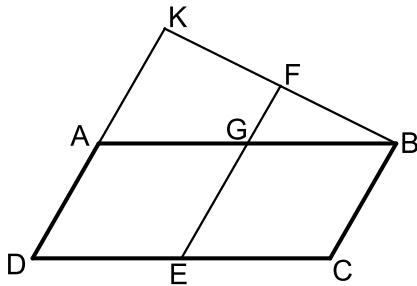


24) נתון מעוין ABCD בעל אורך צלע של 8 ס"מ. מעבירים את הקטע BE השווה באורכו לצלע המעוין כך שנוצר המשולש BCE. ידוע כי: 6 ס"מ = CE.  
א. איזה סוג משולש הוא המשולש BCE? נמק.  
ב. חשב את היקף הצורה ABCE.



- (25)** נתון משולש שווה שוקיים  $ABC$ ,  $(AB = AC)$ . מסמנים את אמצעי צלעות המשולש ב-D, E ו-F ומעבירים את הקטעים DE ו-EF כך שהמרובע ADEF הוא מעוין. נתון:  $BC = 12$  ס"מ, וכי היקף המשולש ABC הוא 48 ס"מ.  
א. מצא את אורך צלע המעוין ADEF.  
ב. חשב את היקף המעוין ADEF.

- (26)** המרובע ABCD הוא מקבילית שבה אורך הצלע AB גדולה פי 2 מהצלע AD. ממשיכים את הצלע AD עד לנקודה K ומחברים אותה לקדקוד B. מעבירים את הקטע FE כך ש-F היא אמצע הקטע BK. EF חותך את הצלע AB בנקודה G ומקביל לצלע AD.



- א. הוכח כי המרובע AGED הוא מעוין.  
ב. שטח המעוין AGED הוא 20 סמ"ר.  
חשב את שטח המרובע DCBK אם ידוע כי A היא אמצע הקטע DK.

### תשובות סופיות:

- (19)** א.  $52$  ס"מ  $P =$ ,  $130$  סמ"ר  $S =$   
ב.  $32$  ס"מ  $P =$ ,  $56$  סמ"ר  $S =$   
ג.  $92$  ס"מ  $P =$ ,  $414$  סמ"ר  $S =$   
**(20)**  $5$  ס"מ.  
**(21)**  $8.94$  ס"מ  $\approx \sqrt{80}$ .  
**(22)** א.  $BD = 20\sqrt{3}$  ס"מ.  
**(23)**  $24.413$  ס"מ.  
**(24)** א. משולש שווה שוקיים, מכיוון ש- $BE=BC$ . ב.  $38$  ס"מ  $P =$ .  
**(25)** א.  $9$  ס"מ. ב.  $36$  ס"מ  $P =$ .  
**(26)** א.  $60$  סמ"ר. ב.  $60$  סמ"ר.

## שאלות עם ריבוע:

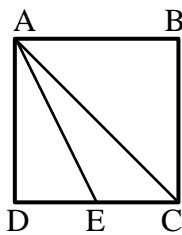
### שאלות:

27) נתון ריבוע ABCD בעל אורך צלע של 6 ס"מ.

- חשב את שטח הריבוע.
- חשב את היקף הריבוע.
- חשב את אורך האלכסון בריבוע.

28) שטחו של ריבוע ABCD הוא 49 סמ"ר.

- מהו אורך צלע הריבוע?
- מהו אורך האלכסון בריבוע?
- מהו היקף הריבוע?



29) בריבוע ABCD מעבירים את הקטע AE כך ש-E היא אמצע

- הצלע DC ואת האלכסון AC. שטח הריבוע הוא 40 סמ"ר.
- מצא את אורך צלע הריבוע.
- מצא את אורך אלכסון הריבוע.
- מצא את אורך הקטע AE.

30) חשב את צלע הריבוע השווה בשטחו לשטח משולש שצלעו 25 ס"מ והגובה לצלע זו הוא 18 ס"מ.

31) נתונים מלבן וריבוע השווים בשטחם. אורכי צלעות המלבן הם 25 ס"מ ו-9 ס"מ. חשב את היקף הריבוע.

32) נתונים מלבן וריבוע השווים בהיקפם. שטח הריבוע הוא 36 ס"מ ואורך המלבן גדול ב-8 ס"מ מרוחבו. חשב את שטח המלבן.

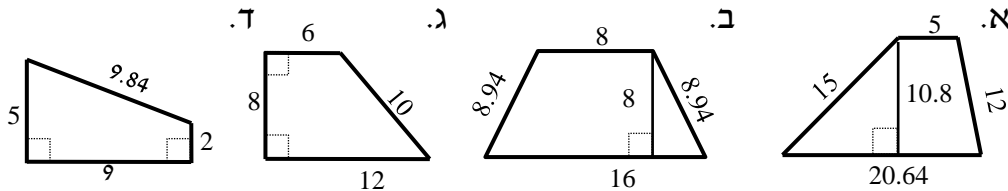
**תשובות סופיות:**

- |              |             |                  |
|--------------|-------------|------------------|
| ג. 8.48 ס"מ. | ב. 24 ס"מ   | (27) א. 36 סמ"ר  |
| ג. 28 ס"מ.   | ב. 9.89 ס"מ | (28) א. 7 ס"מ    |
| ג. 7.07 ס"מ. | ב. 8.94 ס"מ | (29) א. 6.32 ס"מ |
|              |             | (30) 15 ס"מ.     |
|              |             | (31) 60 ס"מ.     |
|              |             | (32) 20 סמ"ר.    |

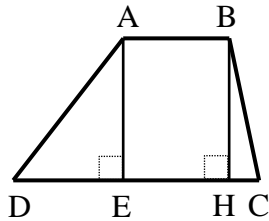
## שאלות עם טרפז:

### שאלות:

33) חשב את השטחים וההיקפים של הטרפזים הבאים (כל המידות בס"מ):

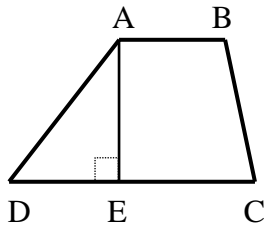


34) נתון טרפז ABCD,  $(AB \parallel CD)$ .



מורידים את הגבהים AE ו-BH שאורכם 8 ס"מ.  
ידוע כי:  $DE = 6$  ס"מ,  $HC = 2$  ס"מ.  
שטח הטרפז הוא 88 סמ"ר.  
מצא את אורך בסיס הטרפז AB.

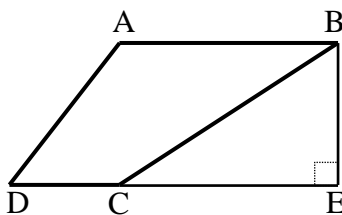
35) נתון טרפז ABCD,  $(AB \parallel CD)$ .



מורידים גובה AE מהקדקוד A.  
היקף הטרפז הוא 68 ס"מ ונתון כי:  
 $AD = 18$  ס"מ,  $BC = 16$  ס"מ,  $AB = 12$  ס"מ.  
א. מצא את אורך הבסיס DC.

ב. מצא את הגובה AE אם ידוע כי שטח הטרפז הוא 255 סמ"ר.

36) נתון טרפז ABCD,  $(AB \parallel CD)$ .

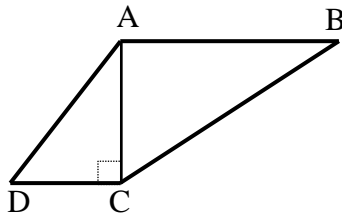


מהקדקוד B מורידים גובה חיצוני לטרפז BE  
כאשר E נמצאת על המשך הבסיס DC.  
ידוע כי:  $AB = 20$  ס"מ,  $DC = 8$  ס"מ.  
וכי שטח הטרפז הוא 196 סמ"ר.

א. מצא את הגובה BE.

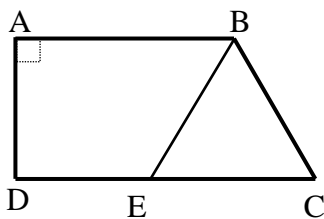
ב. נתון כי:  $\angle D = 60^\circ$ ,  $\angle BCD = 130^\circ$ .

חשב את זווית A ואת זוויות המשולש BCE.



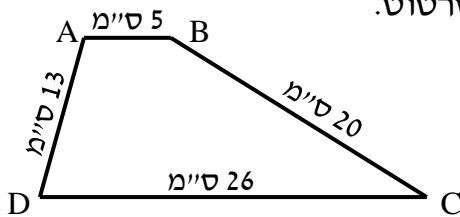
37 נתון טרפז  $ABCD$ ,  $(AB \parallel CD)$ .

- האלכסון  $AC$  הוא גובה בטרפז ואורכו 12 ס"מ.  
ידוע כי:  $AD = AB = 13$  ס"מ,  $BC = 17.7$  ס"מ.  
היקף הטרפז הוא 48.7 ס"מ ו- $\angle B = 42.71^\circ$ .  
א. מצא את אורך הבסיס  $DC$ .  
ב. חשב את שטח הטרפז.  
ג. חשב את זווית  $C$ .

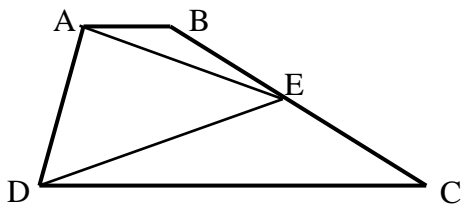


38 הטרפז  $ABCD$ ,  $(AB \parallel CD)$  הוא ישר זווית ( $\angle A = 90^\circ$ ).

- מהנקודה  $E$  שעל הבסיס  $DC$  מעבירים את הקטע  $BE$   
כך שהמשולש  $BCE$  הוא שווה צלעות עם  $BC = 14$  ס"מ.  
היקף הטרפז  $ABCD$  הוא 67 ס"מ ו- $AD$  הוא 10 ס"מ.  
א. מהו היקף הטרפז  $ABED$ ?  
ב. חשב את שטח הטרפז  $ABED$ .



39 נתון טרפז  $ABCD$  שאורכי צלעותיו נתונים בסרטוט.  
חשב את שטח הטרפז (פתור כתרגיל חישוב).



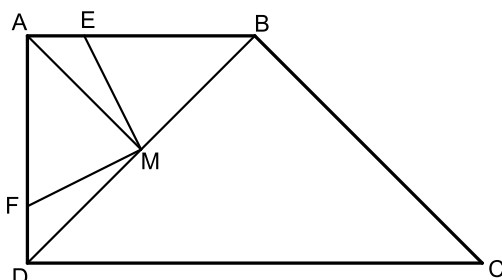
40 המרובע  $ABCD$  הוא טרפז  $(AB \parallel CD)$ .

הנקודה  $E$  היא אמצע השוק  $BC$ .

$$\text{הוכח כי: } S_{ADE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

41 המרובע  $ABCD$  הוא טרפז ישר זווית ( $\angle A = 90^\circ$ ).

- הנקודה  $M$  נמצאת על אמצע האלכסון  $BD$  של הטרפז וממנה מעבירים את הקטעים  $ME$  ו- $MF$  השווים זה לזה ומחברים אותה עם הקדקוד  $A$ .  
נתון כי:  $ME \perp MF$  וכי:  $\angle DFM > 90^\circ$ .



א. הוכח:  $\triangle AMF \cong \triangle BME$ .

ב. נתון כי:  $BC = \sqrt{32}$ ,  $AE = FD = 1$ .

כמו כן:  $AM \parallel BC$ .

i. מצא את אורך הקטע  $BE$ .

ii. חשב את שטח הטרפז  $ABCD$ .

**תשובות סופיות:**

- (33) א.  $S = 52.64$  ס"מ,  $P = 138.456$  סמ"ר  
 ב.  $S = 41.88$  ס"מ,  $P = 96$  סמ"ר  
 ג.  $S = 36$  ס"מ,  $P = 72$  סמ"ר  
 ד.  $S = 25.48$  ס"מ,  $P = 31.5$  סמ"ר
- (34)  $AB = 7$  ס"מ
- (35) א.  $DC = 22$  ס"מ  
 ב.  $AE = 15$  ס"מ
- (36) א.  $BE = 14$  ס"מ  
 ב.  $\angle A = 120^\circ$ ,  $\angle CBE = 40^\circ$ ,  $\angle BCE = 50^\circ$ ,  $\angle E = 90^\circ$
- (37) א.  $DC = 5$  ס"מ  
 ב.  $S = 108$  סמ"ר  
 ג.  $\angle C = 137.29^\circ$
- (38) א.  $P = 53$  ס"מ  
 ב.  $S = 145$  סמ"ר
- (39)  $186$  סמ"ר
- (40) שאלת הוכחה.
- (41) א.  $3$  ס"מ  
 ב. ii.  $24$  סמ"ר

# מכינה יסודית במתמטיקה

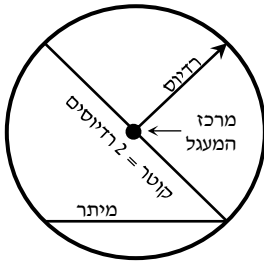
פרק 12 - גיאומטריה אוקלידית - המעגל

תוכן העניינים

188	1. הגדרות
189	2. קשתות ומיתרים במעגל
192	3. אנך אמצעי למיתר
194	4. זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל
198	5. זווית היקפית הנשענת על קוטר
200	6. משיקים למעגל
203	7. משיק ומיתר
205	8. שני מעגלים
207	9. מעגל חוסם ומעגל חסום
210	10. שטחים והיקפים במעגל

## הגדרות:

- מעגל – המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה קבועה קבוע.
- הנקודה הקבועה נקראת מרכז המעגל.
- רדיוס – קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.
- מיתר – קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל.
- קוטר – מיתר העובר במרכז המעגל.
- היקף מעגל  $= 2\pi R$ .
- שטח מעגל  $= \pi R^2$ .
- קשת – חלק מהיקף המעגל.
- גזרה – חלק משטח המעגל.
- זווית מרכזית – זווית שקדקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים.
- זווית היקפית – זווית שקדקודה על היקף המעגל ושוקיה מיתרים.



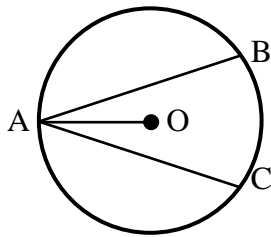
## קשתות ומיתרים במעגל:

### סיכום כללי:

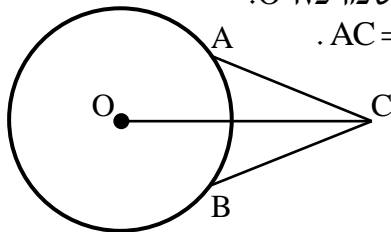
#### משפטים העוסקים במיתרים במעגל:

1. מיתרים שווים נשענים על קשתות שוות ולהפך.
2. על מיתרים שווים נשענות זוויות מרכזיות שוות ולהפך.
3. מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל. (משפט הפוך) מיתרים הנמצאים במרחק שווה ממרכז המעגל שווים.

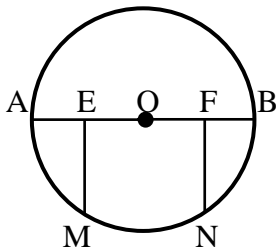
### שאלות:



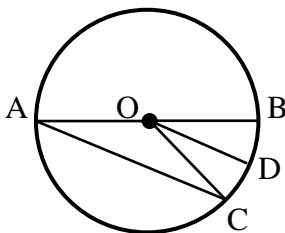
- (1) AB ו-AC הם שני מיתרים שווים במעגל שמרכזו O. הוכח כי AO חוצה את זווית BAC.



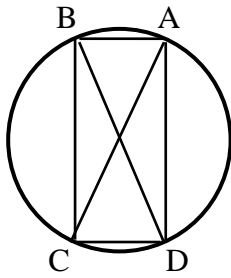
- (2) A ו-B הן שתי נקודות הנמצאות על היקף המעגל שמרכזו O. נקודה C הנמצאת מחוץ למעגל מקיימת כי:  $AC = BC$ . הוכח כי OC חוצה את זווית C.



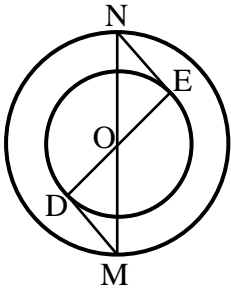
- (3) הקטע AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. נתון כי:  $EO = FO$ ,  $EM \perp AB$ ,  $FN \perp AB$ . הוכח כי  $MN = EF$ .



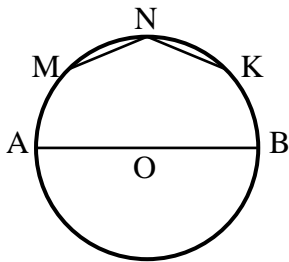
- (4) AB הוא קוטר במעגל שלפניך. AC הוא מיתר ו-O מרכז מעגל. הרדיוס OD חוצה את זווית BOC. הוכח כי DO מקביל ל-AC.



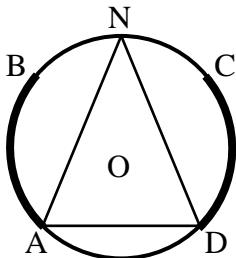
- (5) במעגל שלפניך AC ו-BD הם קטרים. הוכח כי המרובע ABCD הוא מלבן.



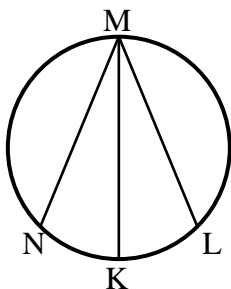
- (6) בשרטוט שלפניך שני מעגלים בעלי מרכז משותף O. הקטע MN הוא קוטר במעגל הגדול והקטע DE הוא קוטר במעגל הקטן. מעבירים את הקטעים MD ו-NE. הוכח כי MD שווה ל-NE.



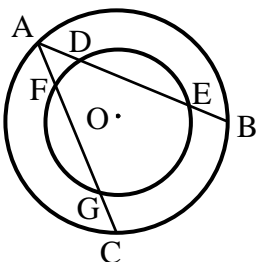
- (7) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. את הקשת העליונה של AB מחלקים ל-4 קשתות שוות, כלומר:  $\widehat{AM} = \widehat{MN} = \widehat{NK} = \widehat{KB}$ . חשב את זווית KNM.



- (8) במעגל שלפניך נתון כי הקשתות המסומנות שוות ז"א:  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ . הנקודה N היא אמצע הקשת  $\widehat{BC}$ . הוכח כי המשולש AND הוא שווה שוקיים.



- (9) המיתרים MN ו-ML שווים זה לזה. המיתר MK חוצה את זווית NML. הוכח כי  $\triangle KNM \cong \triangle KLM$ . הוכח כי MK הוא קוטר במעגל.



- (10) נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O. מעבירים את המיתרים AB ו-AC במעגל הגדול. ידוע כי שני המיתרים שווים זה לזה. מסמנים את נקודות החיתוך של המיתרים עם המעגל הקטן ב-D ו-E עבור המיתר AB, ו-F ו-G עבור המיתר AC. הוכח:  $DE = FG$ .

**תשובות סופיות:**

- 1) שאלת הוכחה.
- 2) שאלת הוכחה.
- 3) שאלת הוכחה.
- 4) שאלת הוכחה.
- 5) שאלת הוכחה.
- 6) שאלת הוכחה.
- 7)  $135^\circ$ .
- 8) שאלת הוכחה.
- 9) שאלת הוכחה.
- 10) שאלת הוכחה.

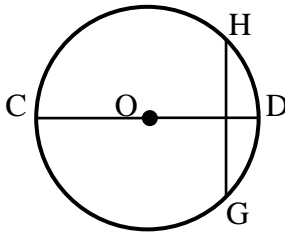
## אנך אמצעי למיתר:

סיכום כללי:

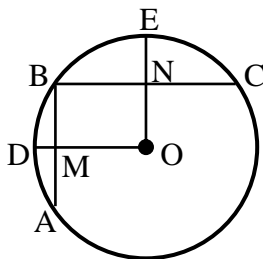
משפט אנך אמצעי למיתר:

1. אנך למיתר ממרכז המעגל חוצה את המיתר. (משפט הפוך ל-4 (1)) רדיוס החוצה מיתר מאונך לו. (משפט הפוך ל-4 (2)) קטע היוצא מאמצע מיתר ומאונך לו, עובר במרכז המעגל.

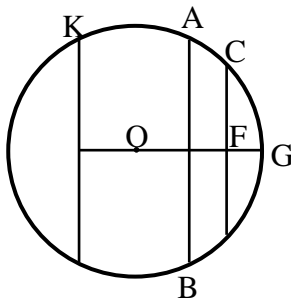
שאלות:



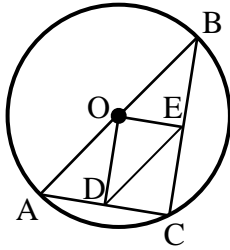
- 11** במעגל שמרכזו O המיתר GH מאונך לקוטר CD. הוכח כי  $GC = HC$ . נתון כי:  $\widehat{HDG} = 80^\circ$ . בת כמה מעלות הקשת  $\widehat{CG}$ ?



- 12** AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O. מעבירים את הרדיוסים OD ו-OE אשר חותכים את המיתרים AB ו-BC בנקודות M ו-N בהתאמה. ידוע כי מרובע ONBM הוא מלבן. נתונות המידות הבאות:  $NE = 9$  ס"מ,  $MD = 8$  ס"מ,  $R = 29$  ס"מ. חשב את אורך כל אחד מהמיתרים AB ו-BC.



- 13** AB ו-KL הם מיתרים במעגל שמרכזו O, והם חותכים את הקטע MG, העובר במרכז המעגל, בנקודות E, F ו-M בהתאמה. נתון  $KL \parallel CD$ ,  $CF = DF$ . הוכח:  $KM = LM$ . נתון בנוסף כי:  $ML = BE$ ,  $AB \perp MG$ . הוכח:  $MO = EO$ .



**14** ABC הוא משולש החסום במעגל O. המיתר AB הוא קוטר במעגל. הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AC ו-BC בהתאמה. מעבירים את הקטעים OD ו-OE וידוע כי:  $OD \perp AC$ ,  $OE \perp BC$ . הוכח כי DE שווה באורכו לרדיוס המעגל.

### תשובות סופיות:

- 11) א. שאלת הוכחה. ב.  $140^\circ$ .  
 12)  $AB = 40$  ס"מ,  $BC = 42$  ס"מ.  
 13) שאלת הוכחה.  
 14) שאלת הוכחה.

## זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל:

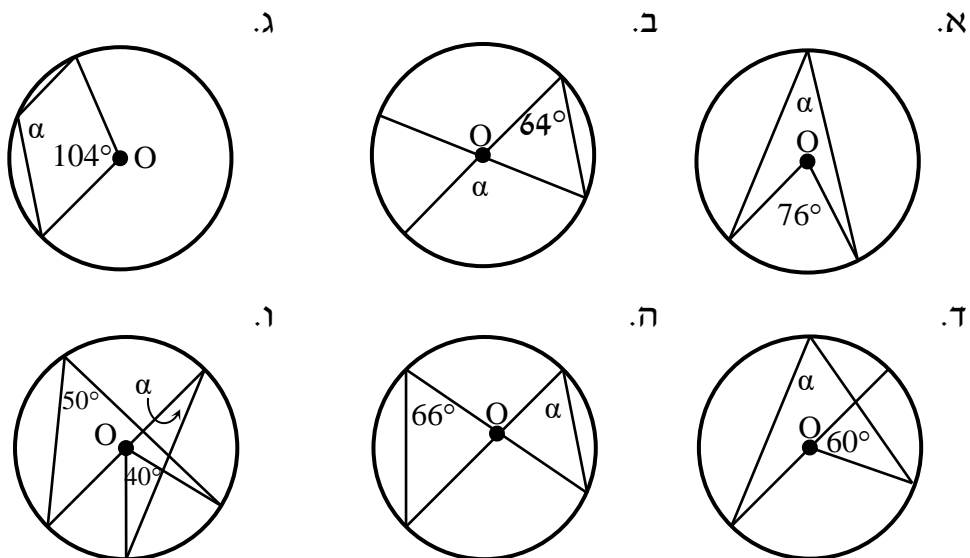
סיכום כללי:

משפטים העוסקים בזוויות במעגל:

- שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת/קשתות שוות, שוות ביניהן. (משפט הפוך ל-5) זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות.
- זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

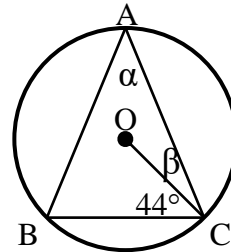
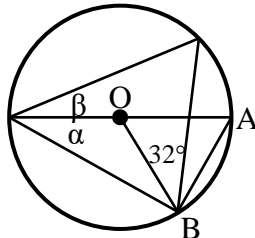
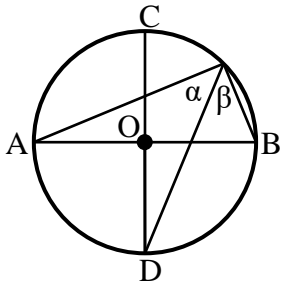
שאלות:

15 נתונים המעגלים הבאים שמרכזם הוא O. חשב את הזווית  $\alpha$  בכל אחד מהמקרים.



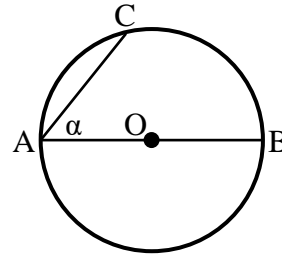
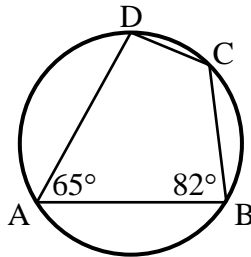
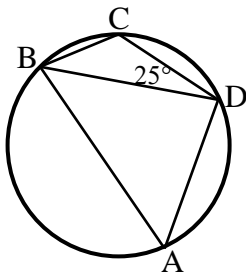
**16** במעגלים הבאים שמרכזם O מופיעים הנתונים לידם.  
חשב את הזוויות  $\alpha$  ו- $\beta$  בכל אחד מהמקרים:

- א.  $AB = AC$ .  
ב.  $\triangle AOB$  - שווה צלעות.  
ג.  $AB, CD$  קטרים מאונכים זה לזה.

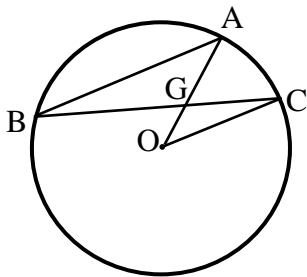


**17** חשב את המבוקש בכל מקרה:

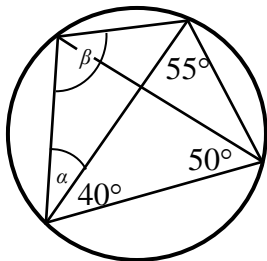
- א.  $AB$  קוטר,  $\widehat{AC} = 84^\circ$ .  
ב.  $\widehat{DC} = 52^\circ$ .  
ג.  $\widehat{DC} = 60^\circ$ .  
חשב את  $\alpha$ .  
חשב  $\widehat{AD}, \widehat{DC}, \widehat{AB}$ .  
חשב  $\angle BAD$ .

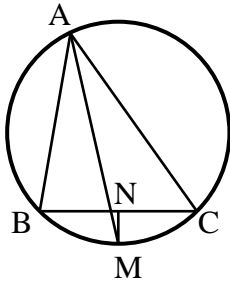


**18**  $AB$  ו- $BC$  הם מיתרים במעגל שמרכזו O.  
נתון:  $AB \parallel CO$ ,  $\angle AGC = 60^\circ$ .  
חשב את גודלה של הזווית  $\angle AOC$ .

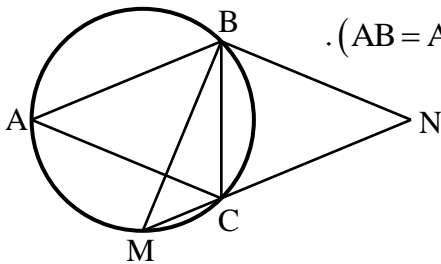


**19** חשב את גודל הזוויות  $\alpha$  ו- $\beta$  במעגל הנתון.

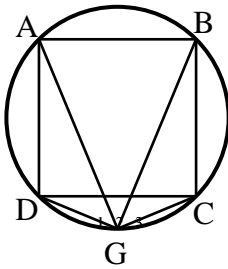




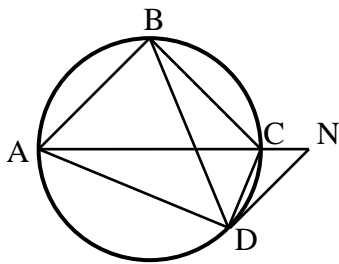
- (20)** המשולש ABC חסום במעגל.  
 המיתר AM חוצה את זווית A.  
 מעבירים אנך מהנקודה M לצלע BC  
 החותך אותה בנקודה N.  
 הוכח:  $BN = CN$ .



- (21)** בסרטוט שלפניך נתון כי המשולשים  
 ABC ו-BMN הם שווים שוקיים ( $AB = AC$ ,  $BM = BN$ ).  
 זווית הראש במשולש BMN היא  $94^\circ$ .  
 חשב את זווית ACB.



- (22)** במעגל שלפניך חסום ריבוע ABCD.  
 הנקודה G נמצאת על היקף המעגל.  
 ממנה מעבירים מיתרים לכל קדקוד  
 כך שנוצרות הזוויות  $\sphericalangle G_1$ ,  $\sphericalangle G_2$ ,  $\sphericalangle G_3$ .  
 הוכח כי  $\sphericalangle G_1 = \sphericalangle G_2 = \sphericalangle G_3$  ומצא אותן.



- (23)** המרובע ABCD חסום במעגל.  
 ממשיכים את האלכסון AC עד לנקודה N  
 ומחברים אותה עם הקדקוד D  
 כך שמתקיים:  $AB \parallel DN$ .  
 הוכח כי זוויות המשולשים  $\triangle ADN$   
 ו- $\triangle BDC$  שוות.

**תשובות סופיות:**

- (15) א.  $38^\circ$     ב.  $128^\circ$     ג.  $128^\circ$     ד.  $60^\circ$     ה.  $66^\circ$     ו.  $30^\circ$
- (16) א.  $\alpha = 46^\circ, \beta = 23^\circ$     ב.  $\alpha = 30^\circ, \beta = 28^\circ$     ג.  $\alpha = \beta = 45^\circ$
- (17) א.  $\alpha = 48^\circ$     ב.  $\widehat{AD} = 112^\circ, \widehat{BC} = 78^\circ, \widehat{AB} = 118^\circ$     ג.  $55^\circ$
- (18)  $40^\circ$
- (19)  $\alpha = 35^\circ, \beta = 95^\circ$
- (20) שאלת הוכחה.
- (21)  $68.5^\circ$
- (22)  $\sphericalangle G_1 = \sphericalangle G_2 = \sphericalangle G_3 = 45^\circ$
- (23) שאלת הוכחה.

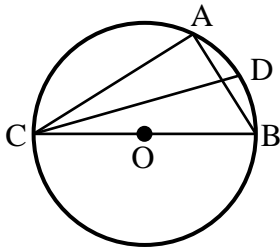
## זווית היקפית הנשענת על קוטר:

סיכום כללי:

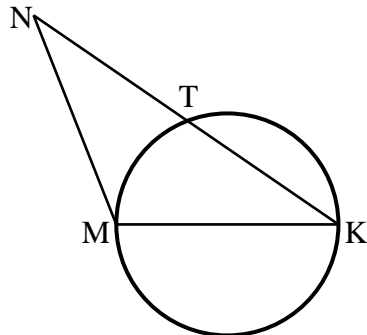
משפט:

1. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.  
(משפט הפוך) מיתר עליו נשענת זווית היקפית ישרה הוא קוטר.

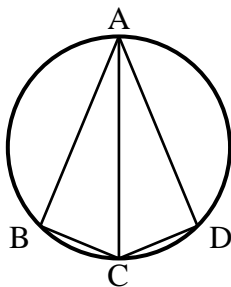
שאלות:



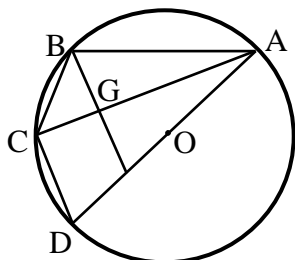
- 24) המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש-BC הוא קוטר. מעבירים את המיתר CD המקיים:  $\angle DCB = 20^\circ$ . מצא את זווית CAD.



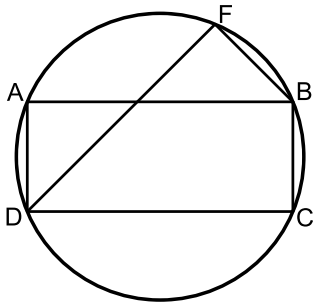
- 25) MK הוא קוטר במעגל שלפניך. הקטע KN חותך את המעגל בנקודה T. מתקיים:  $KT = NT$ . הוכח כי:  $MK = NM$ .



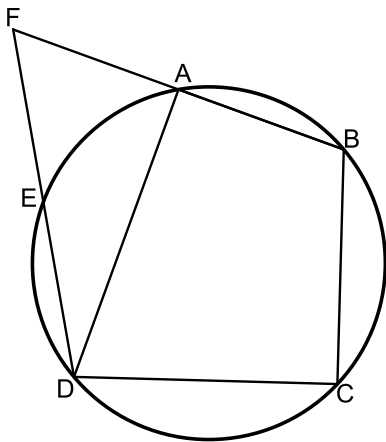
- 26) מרובע ABCD חסום במעגל כאשר האלכסון AC הוא קוטר וחוצה את זווית BCD. הוכח כי ABCD הוא דלתון.



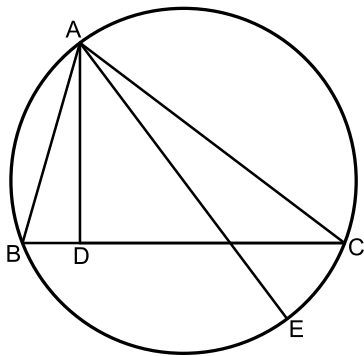
- 27)  $AB, AC, AD, BC$  ו- $CD$  הם מיתרים במעגל שמרכזו O (המיתר AD עובר ב-O). הקטע BE חותך את המיתר AC בנקודה G. נתון:  $BE \parallel CD, BG = GE$ . הוכח:  $BC = CD$ .



- (28)** המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל.  
 מהקדקוד D מעבירים את המיתר DF  
 החותך את הצלע AB בנקודה E.  
 ידוע כי:  $\widehat{AF} = \widehat{CF}$ .  
 הצלע AD של המלבן תסומן ב- $a$ .  
 א. הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים.  
 ב. נתון גם כי:  $BC = BF$ .  
 הבע באמצעות  $a$  את רדיוס המעגל.



- (29)** המרובע ABCD חסום במעגל.  
 המשכי המיתרים AB ו-ED נפגשים בנקודה F.  
 הקטע FD חותך את היקף המעגל בנקודה E  
 כך שמתקיים:  $\widehat{AB} = \widehat{AE}$ .  
 נתון כי הזווית BCD היא ישרה.  
 א. הוכח כי הקטע DF שווה לקוטר המעגל.  
 ב. נתון כי:  $DF = BF$  וכי רדיוס המעגל  
 הוא 12 ס"מ.  
 הוכח כי המרובע AEDB הוא טרפז.  
 ג. חשב את היקף הטרפז AEDB.



- (30)** משולש ABC חסום במעגל.  
 AD גובה לצלע BC ו-AE קוטר במעגל.  
 א. הוכח:  $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$ .  
 נתון גם כי:  $CE = \sqrt{21}, AD = 6, CD = 8$ .  
 ב. חשב את רדיוס המעגל.

**תשובות סופיות:**

- (24)**  $110^\circ$ .  
**(25)** שאלת הוכחה.  
**(26)** שאלת הוכחה.  
**(27)** שאלת הוכחה.  
**(28)** א. שאלת הוכחה. ב.  $R = 1.3a$ .  
**(29)** א. שאלת הוכחה. ב. 5.5.  
**(30)** א.  $\alpha = 135^\circ$ . ב.  $\alpha = 45^\circ$ . ג.  $\alpha = 40^\circ$ .

## משיקים למעגל:

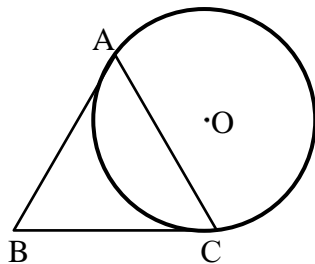
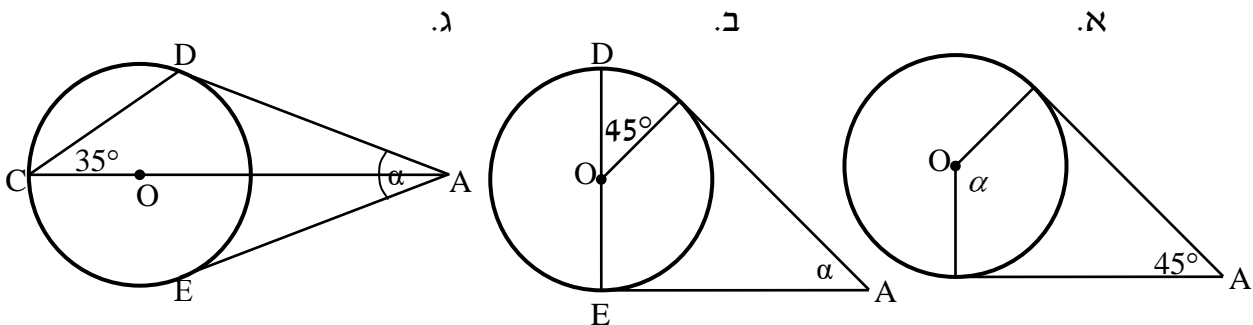
### סיכום כללי:

#### משפטים העוסקים במשיק למעגל ושני משיקים למעגל:

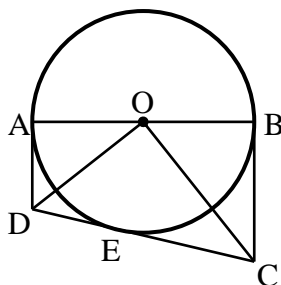
1. משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה. (משפט הפוך ל-8) קטע המאונך לרדיוס בקצהו משיק למעגל.
2. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
3. קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שממנה יוצאים שני משיקים חוצה את הזווית בין המשיקים.

### שאלות:

**31** באיורים שלפניך נתונים שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה A שמחוץ למעגל. מרכזי המעגלים מסומן ב-O. מצא את  $\alpha$  בכל מקרה.



**32** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ). המעגל O משיק לצלעות AB ו-BC בנקודות A ו-C. הוכח כי ABC הוא שווה צלעות.



**33** במעגל O מעבירים קוטר AB ושלושה משיקים AD, CD ו-BC. E היא נקודת ההשקה של CD עם המעגל. הוכח כי:  $\angle COD = 90^\circ$ .



**תשובות סופיות:**

- (31) א.  $\alpha = 135^\circ$   
(32) שאלת הוכחה.  
(33) שאלת הוכחה.  
(34) 48 ס"מ.  
(35) א.  $30^\circ$   
(36) 64 ס"מ.  
(37) א.  $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ . ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.
- ג.  $\alpha = 40^\circ$ .  
ב.  $\alpha = 45^\circ$ .  
ב. 5 ס"מ.

## משיק ומיתר:

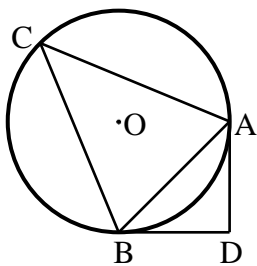
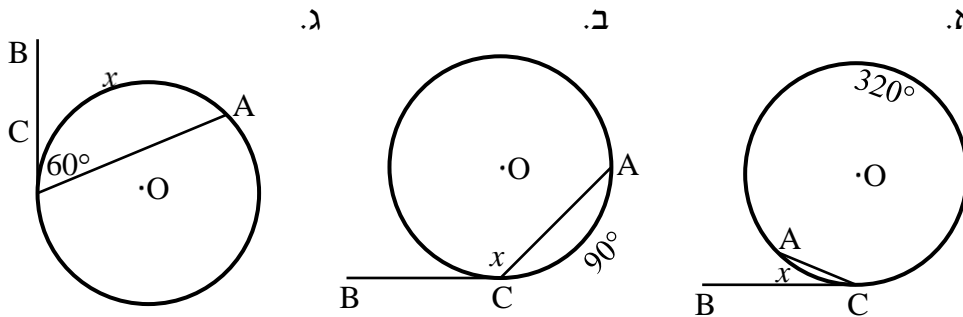
סיכום כללי:

משפט:

1. הזווית הכלואה בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני.

שאלות:

38) באיורים שלפניך נתון מעגל שמרכזו O, מיתר AC ומשיק BC בנקודה C. מצא את x.



39) ABC הוא משולש שווה שוקיים ( $AC = BC$ )

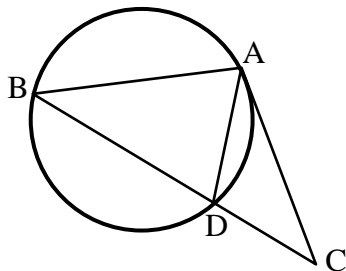
החסום במעגל שמרכזו O.

מהקדקודים A ו-B מעבירים משיקים אשר נחתכים

בנקודה D.

ידוע כי זווית הבסיס במשולש ABC היא  $68^\circ$ .

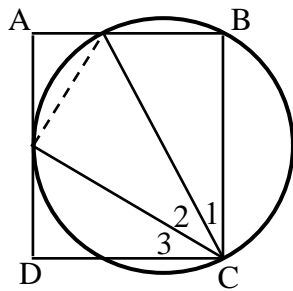
חשב את זווית ADB.



40) AC הוא משיק למעגל בנקודה A.

BC חותך את המעגל בנקודה D.

נתון כי  $AD = CD$ , הוכח:  $AB = AC$ .



- (41)** הקדקודים B ו-C של המלבן ABCD מונחים על מעגל. צלע AD משיקה למעגל בנקודה G והצלע AB חותכת את המעגל בנקודה H.  
 הוכח:  $\sphericalangle C_2 = \sphericalangle C_3$ .  
 (הדרכה: סמן  $\sphericalangle AGH = \alpha$ .)

### תשובות סופיות:

- (38) א.  $x = 20^\circ$       ב.  $x = 135^\circ$       ג.  $x = 120^\circ$
- (39)  $92^\circ$
- (40) שאלת הוכחה.
- (41) שאלת הוכחה.

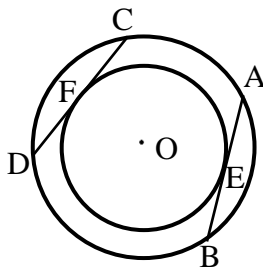
## שני מעגלים:

### סיכום כללי:

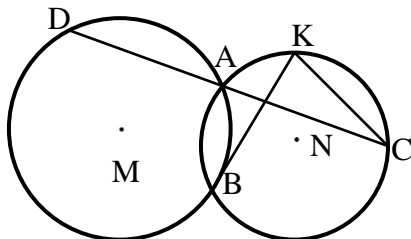
#### משפטים העוסקים בשני מעגלים:

1. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.
2. קטע המרכזים (או המשכו) של שני מעגלים משיקים עובר בנקודת ההשקה.

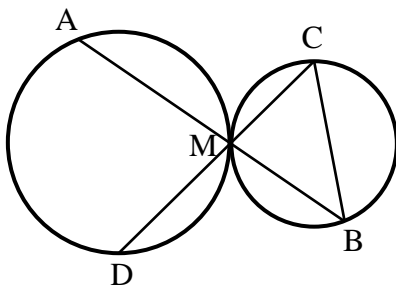
### שאלות:



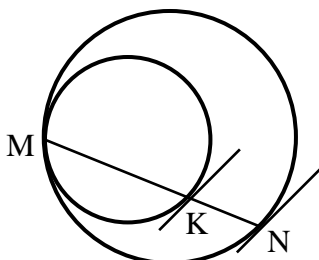
- 42** נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O. דרך שתי נקודות E ו-F שעל היקף המעגל הפנימי מעבירים משיקים אשר חותכים את המעגל החיצוני בנקודות A, B, C ו-D. הוכח כי המיתרים AB ו-CD הנוצרים באופן זה שווים.



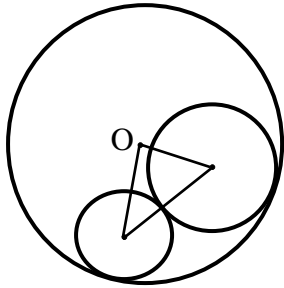
- 43** שני מעגלים M ו-N נחתכים בנקודות A ו-B. הישר CD עובר דרך הנקודה A. מעבירים משיק למעגל M בנקודה B החותך את המעגל N בנקודה K. הוכח כי:  $CK \parallel BD$ .



- 44** שני מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ בנקודה M. דרך הנקודה M מעבירים שני ישרים חותכים. האחד חותך את המעגל השמאלי בנקודה A ואת הימני בנקודה B והאחר חותך את המעגל השמאלי בנקודה D ואת הימני בנקודה C. הוכח כי  $AD \parallel BC$ .

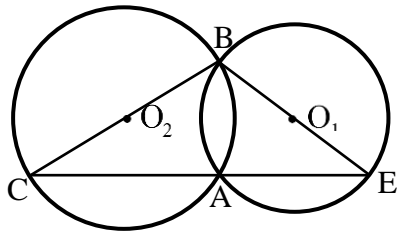


- 45** שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה M. מעבירים מיתר MN במעגל החיצוני אשר חותך את המעגל הפנימי בנקודה K. הוכח כי המשיקים לשני המעגלים בנקודות N ו-K מקבילים זה לזה.



**46** המעגלים שמרכזיהם M ו-G משיקים מבחוץ זה לזה ומשיקים מבפנים למעגל שמרכזו O. נתון כי רדיוס המעגל שמרכזו O הוא 8 ס"מ. חשב את היקף המשולש  $OMG$ .

**47** שני מעגלים שמרכזיהם  $O_1$  ו- $O_2$  נחתכים בנקודות A ו-B.



מעבירים את הקטרים BC ו-BE. א. הוכח כי הנקודות C, A ו-E נמצאות על ישר אחד. ב. הוכח כי  $O_1O_2$  הוא קטע אמצעים במשולש BCE.

**תשובות סופיות:**

- 42 שאלת הוכחה.
- 43 שאלת הוכחה.
- 44 שאלת הוכחה.
- 45 שאלת הוכחה.
- 46 16 ס"מ.
- 47 שאלת הוכחה.

## מעגל חוסם ומעגל חסום:

### סיכום כללי:

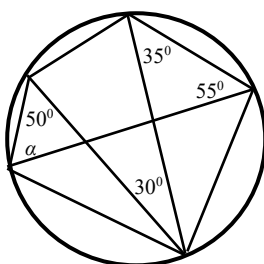
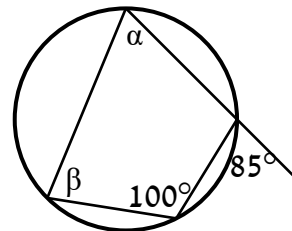
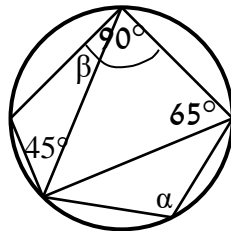
#### משפטים העוסקים במעגל חוסם ומעגל חסום:

1. מרכז מעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים במשולש.
2. מרכז מעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי הזווית במשולש.
3. במרובע החסום במעגל, סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא  $180^\circ$ .  
(משפט הפוך) אם במרובע סכום זוג זוויות נגדיות הוא  $180^\circ$ , המרובע בר חסימה במעגל.
4. במרובע החוסם מעגל סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.  
(משפט הפוך) אם במרובע סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני אז ניתן לחסום בתוכו מעגל.
5. כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל וניתן לחסום בתוכו מעגל.

### שאלות:

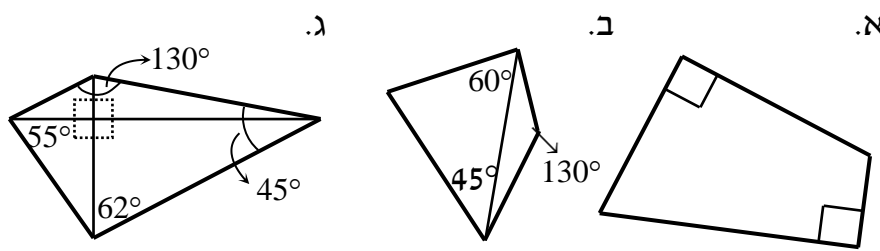
- 48** AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC.  
 א. הוכח: אם מרכז המעגל החסום במשולש ABC נמצא על AD אז המשולש ABC הוא שווה שוקיים.  
 ב. בהמשך לסעיף א', האם מרכז המעגל החוסם את משולש ABC נמצא על AD?

- 49** מצא את הנעלמים בכל אחד מהסרטוטים שלפניך:  
 א.  
 ב.

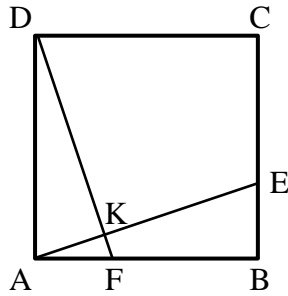


- 50** חשב את גודלה של הזווית  $\alpha$  בסרטוט הבא:

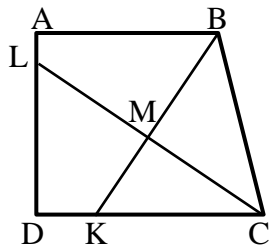
51) קבע אלו מהמרובעים הבאים ניתן לחסום במעגל:



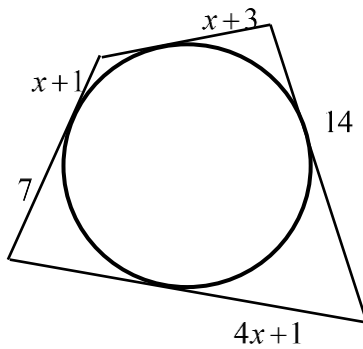
52) בריבוע ABCD נתון כי  $AF = BE$ . הנקודה K היא חיתוך של הקטעים AE ו-DF. הוכח כי את המרובע DKEC ניתן לחסום במעגל.



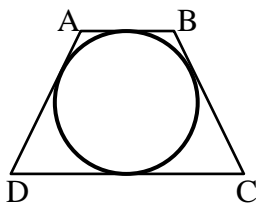
53) בטרפז ישר זווית ABCD שבו השוק AD מאונכת לבסיסים AB ו-DC הנקודות K ו-L נמצאות על הצלעות DC ו-AD בהתאמה, כך שהקטעים BK ו-CL הם חוצי הזוויות B ו-C בהתאמה. חוצי הזוויות נפגשים בנקודה M. הוכח: את המרובע DKML ניתן לחסום במעגל. הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.



54) חשב את גודלו של  $x$  בשרטוט הבא:



55) בטרפז שווה שוקיים ABCD ( $AB \parallel CD$ ) שהיקפו 60 ס"מ וזוויות הבסיס החדות שלו הן  $60^\circ$  חסום מעגל. מצא את אורכי צלעות הטרפז.



**תשובות סופיות:**

(48) שאלת הוכחה.

(49) א.  $\alpha = 80^\circ$ ,  $\beta = 85^\circ$       ב.  $\alpha = 110^\circ$ ,  $\beta = 20^\circ$ .

(50)  $\alpha = 70^\circ$ .

(51) ניתן לחסום את מרובע אי בלבד.

(52) שאלת הוכחה.

(53) שאלת הוכחה.

(54)  $x = 2$

(55) 15 ס"מ, 15 ס"מ, 7.5 ס"מ, 22.5 ס"מ.

## שטחים והיקפים במעגל:

### שאלות:

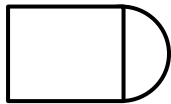
56) ענה על השאלות הבאות:

א. היקפו של עיגול הוא 44 ס"מ. חשב את שטחו.

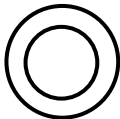


ב. הצורה שבאיור היא  $\frac{3}{4}$  עיגול.

היקף הצורה שווה ל-45 ס"מ.  
חשב את אורך הרדיוס של העיגול.

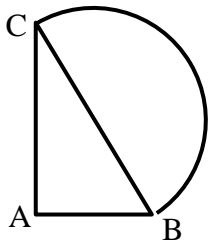


ג. שטח צורה המורכבת מריבוע וחצי עיגול הוא 30 סמ"ר.  
חשב את רדיוס חצי העיגול.



ד. שטח טבעת הוא  $55\pi$  סמ"ר.

הרדיוס הפנימי הוא 3 ס"מ.  
חשב את הרדיוס החיצוני של הטבעת.



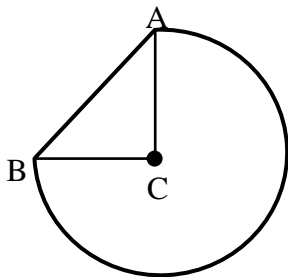
57) נתון משולש ישר זווית ABC, ( $\sphericalangle A = 90^\circ$ ).

על היתר BC בונים חצי עיגול.

נתון:  $AB = 10$  ס"מ,  $AC = 24$  ס"מ,  $BC = 26$  ס"מ.

א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.



58) באיור שלפניך שלושה רבעי עיגול החסומים

ע"י הקטע AB ומשולש ישר זווית ABC (C מרכז העיגול).

ידוע כי רדיוס העיגול הוא 14 ס"מ

וכי אורך הקטע AB הוא 19.8 ס"מ.

א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.

59) באיור שלפניך נתון טרפז שווה שוקיים ABCD, ( $AB \parallel CD, AD = BC$ ).

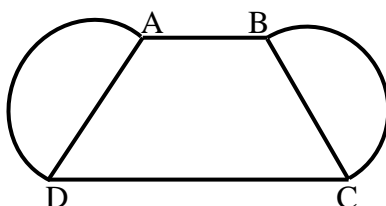
על שוקי הטרפז בונים חצאי עיגולים.

נתון:  $AB = 10$  ס"מ,  $CD = 16$  ס"מ,  $BC = 12$  ס"מ.

אורך גובה הטרפז הוא 11.6 ס"מ.

א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.



**60** נתון טרפז  $ABCD$ ,  $(AB \parallel CD)$ . מעבירים את האלכסון  $AC$  אשר מאונך

לבסיסים  $AB$  ו- $DC$  של הטרפז. על השוק  $BC$  בונים חצי עיגול.

נתון:  $AB = 24$  ס"מ,  $AC = 18$  ס"מ.

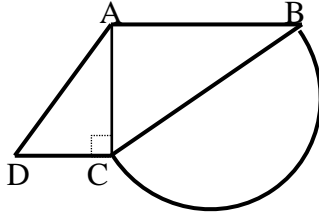
שטח הטרפז הוא  $283.5$  סמ"ר.

א. מצא את הבסיס  $DC$ .

ב. חשב את רדיוס העיגול.

ג. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ד. חשב את שטח הצורה המורכבת.



**61** המרובע  $ABCD$  הוא מקבילית.

על הצלעות  $AD$  ו- $BC$  בונים שני חצאי עיגול זהים בעלי רדיוס  $R$ .

מעבירים את האלכסון  $AC$ .

ידוע כי האלכסון  $AC$  מאונך לצלע  $BC$ .

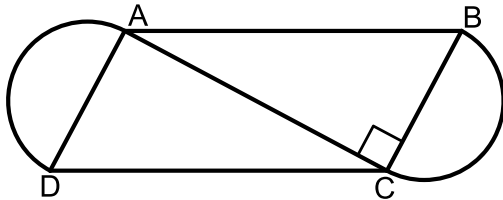
נתון:  $AB = 4R + 1$ ,  $AC = 4R - 1$ .

א. מצא את רדיוס העיגולים,  $R$ .

ב. חשב את היקף המקבילית  $ABCD$ .

ג. חשב את השטח של הצורה המורכבת

מהמקבילית ושני חצאי העיגולים.



**62** נתון מעגל שאורך רדיוסו הוא  $16$  ס"מ.

חשב את אורך הקשת ואת שטח הגזרה המתאימות לזווית מרכזית

בכל אחד מהמקרים הבאים:

א.  $60^\circ$

ב.  $45^\circ$

ג.  $270^\circ$

ד.  $17^\circ$

**63** על הרדיוס  $OA$  של מעגל  $O$  בונים חצי מעגל אשר קוטרו הוא  $OA$ .

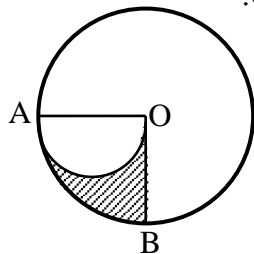
ידוע כי  $\angle BOA = 90^\circ$ .

א. חשב את השטח המקווקו  $OBA$

אם ידוע כי  $OA = 10$  ס"מ.

ב. הוכח באופן כללי כי שטח הגזרה  $OBA$

שווה לשטח חצי מעגל אשר קוטרו הוא  $OA$ .

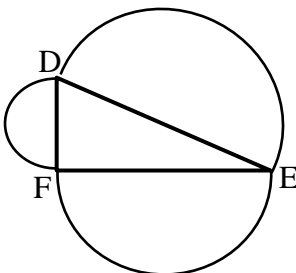


**64** על הצלעות של משולש ישר זווית  $\triangle DEF$  ( $\angle F = 90^\circ$ )

בונים חצאי מעגלים.

הוכח כי שטח חצי המעגל הבנוי על היתר שווה

לסכום שטחי חצאי המעגלים הבנויים על הניצבים.



## תשובות סופיות:

- (56) א.  $S = \frac{484}{\pi}$  סמ"ר  
 ב.  $R = 6.706$  ס"מ  
 ג.  $R = 2.32$  ס"מ  
 ד.  $R = 8$  ס"מ
- (57) א.  $P = 74.84$  ס"מ  
 ב.  $S = 385.46$  סמ"ר
- (58) א.  $P = 85.77$  ס"מ  
 ב.  $S = 559.814$  סמ"ר
- (59) א.  $P = 63.7$  ס"מ  
 ב.  $S = 263.89$  סמ"ר
- (60) א.  $DC = 7.5$  ס"מ  
 ב.  $R = 15$  ס"מ  
 ג.  $P = 98.12$  ס"מ  
 ד.  $S = 636.929$  סמ"ר
- (61) א.  $R = 4$  ס"מ  
 ב.  $P_{ABCD} = 50$  ס"מ  
 ג.  $120 + 16\pi \approx 170.26$  סמ"ר  
 ד.  $S = 120 + 16\pi$  סמ"ר
- (62) א.  $l = 5\frac{1}{3}\pi$  ס"מ,  $S = 42\frac{2}{3}\pi$  סמ"ר  
 ב.  $l = 4\pi$  ס"מ,  $S = 32\pi$  סמ"ר
- (63) א.  $12.5\pi$  סמ"ר  
 ב. שאלת הוכחה.  
 ג.  $l = 24\pi$  ס"מ,  $S = 192\pi$  סמ"ר  
 ד.  $l = 1.51\pi$  ס"מ,  $S = 12.08\pi$  סמ"ר
- (64) שאלת הוכחה.

# מכינה יסודית במתמטיקה

פרק 13 - גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר

תוכן העניינים

213	1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית
217	2. משוואת הישר
222	3. מצבים הדדיים בין ישרים
224	4. מציאת משוואות ישר
225	5. שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר
(ללא ספר)	6. נושאים מתקדמים עם משוואת הישר
231	7. חלוקת קטע ביחס נתון
232	8. מרחק נקודה מישר
234	9. מיקום נקודה ביחס לישר
236	10. מרחק בין ישרים מקבילים

## מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  יחושב לפי:  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .
- אמצע הקטע  $M$  שקצותיו הם:  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  הוא:  $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .

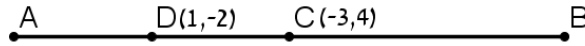
שאלות:

שאלות העוסקות באמצע קטע:

- 1) מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:
- א.  $A(1, 4)$ ,  $B(5, -8)$       ב.  $A(-3, 0)$ ,  $B(3, -2)$
- ג.  $A(4, 5)$ ,  $B(-4, -5)$       ד.  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ ,  $B\left(7\frac{1}{2}, -2\right)$
- ה.  $A(6, -1)$ ,  $B(-3, -1)$       ו.  $A(4, 7)$ ,  $B(4, -12)$
- 2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
- מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:
- א.  $A(4, -2)$ ,  $M(2, 1)$       ב.  $A(-6, -8)$ ,  $M(0, 0)$
- ג.  $A(13, -11)$ ,  $M(4, -7)$       ד.  $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ ,  $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
- 3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
- ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם  $B(2, -4)$ ,  $C(6, 1)$ .
- מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.
- 4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
- ידוע כי:  $A(-2, 1)$ ,  $B(6, 5)$ . מצא את שיעורי הנקודה D.



- (5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC. ידוע כי:  $D(1, -2)$ ,  $C(-3, 4)$ . מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



- (6) הנקודות  $A(2, -7)$ ,  $B(-10, 4)$  ו- $C(6, 11)$  הן שלושה קדקודים של מקבילית ABCD. מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי, D.

### שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:

- (7) מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:
- א.  $A(4, 7)$ ,  $B(-3, 7)$       ב.  $A(6, 2)$ ,  $B(1, 2)$
- ג.  $A(-3, 10)$ ,  $B(0, 6)$       ד.  $A(6, -9)$ ,  $B(1, 3)$
- ה.  $A(4, 7)$ ,  $B(13, -1)$       ו.  $A(6, 6)$ ,  $B(-9, -9)$
- (8) חשב את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם:  $A(3, -2)$ ,  $B(4, 9)$ ,  $C(0, 14)$ .
- (9) נתונות נקודות  $A(14, 4)$ ,  $B(6, y)$  שמרחקן הוא 10 יחידות אורך. מצא את  $y$ .
- (10) נתונות נקודות  $A(x, -12)$ ,  $B(15, -2)$  שמרחקן הוא 26 יחידות אורך. מצא את  $x$ .

- (11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה- $y$  שלה גדול פי 3 משיעור ה- $x$  שלה ומרחקה מהנקודה  $A(-4, 1)$  הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

- (12) במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) ידוע כי אורכי השוקיים הוא  $\sqrt{45}$  יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם  $(0, 4)$  ושיעורי ה- $y$  של הקדקודים B ו-C הוא -2. מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

- (13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא  $d_{AC} = \sqrt{50}$  וידוע כי:  $A(-3, -2)$ ,  $B(-4, 1)$ . מצא את היקף המלבן.

**שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:****14** מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

- א.  $A(5,2)$  ,  $B(4,1)$       ב.  $A(3,-2)$  ,  $B(-3,1)$   
ג.  $A(7,8)$  ,  $B(6,15)$       ד.  $A(0,5)$  ,  $B(7,0)$   
ה.  $A(6,9)$  ,  $B(6,-7)$       ו.  $A(4,-1)$  ,  $B(18,-1)$

**15** מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיוהם:  $A(6,5)$  ,  $B(2,13)$  ,  $C(4,-7)$  מונחים עליהם.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $(3, -2)$     ב.  $(0, -1)$     ג.  $(0, 0)$
- ד.  $\left(4, -\frac{5}{8}\right)$     ה.  $(1.5, -1)$     ו.  $(4, -2.5)$
- (2) א.  $B(0, 4)$     ב.  $B(6, 8)$     ג.  $B(-5, -3)$     ד.  $B\left(1, \frac{2}{3}\right)$
- (3)  $D(4, -1.5)$
- (4)  $D(0, 2)$
- (5)  $A(5, -8)$ ,  $B(-11, 16)$
- (6)  $D(18, 0)$
- (7) א.  $d_{AB} = 7$     ב.  $d_{AB} = 5$     ג.  $d_{AB} = 5$     ד.  $d_{AB} = 13$
- ה.  $d_{AB} = \sqrt{145}$     ו.  $d_{AB} = 15\sqrt{2}$
- (8)  $P_{ABC} \approx 33.862$  יחידות אורך
- (9)  $y = 10$  או  $y = -2$
- (10)  $x = -9$  או  $x = 39$
- (11)  $B(-1, -3)$
- (12)  $B(3, -2)$ ,  $C(-3, -2)$
- (13)  $P_{ABCD} = 6\sqrt{10} \approx 18.97$  יחידות אורך
- (14) א.  $m_{AB} = 1$     ב.  $m_{AB} = -\frac{1}{2}$     ג.  $m_{AB} = -7$     ד.  $m_{AB} = -\frac{5}{7}$
- ה. שיפוע לא מוגדר.    ו.  $m_{AB} = 0$
- (15)  $m_{AB} = -2$ ,  $m_{BC} = -10$ ,  $m_{AC} = 6$

## משוואת הישר:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- שיפוע ישר בין שתי נקודות  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  הוא:  $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ .

שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים:  $m_1 \cdot m_2 = -1$ .
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ :  $m = \tan \alpha$ .

משוואת הישר:

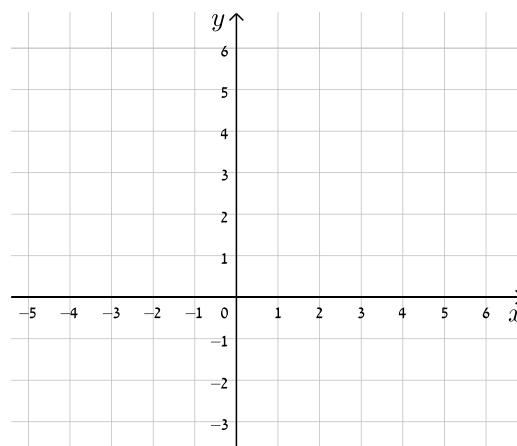
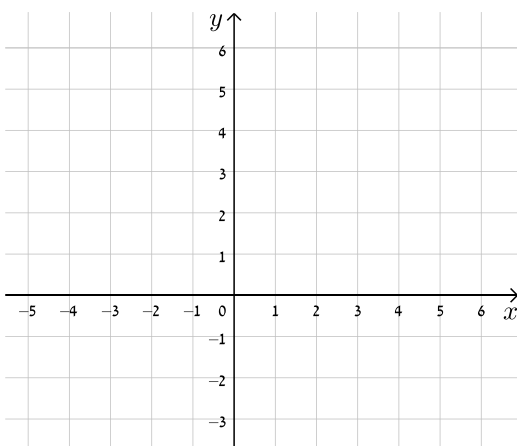
- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה:  $y = mx + n$ .
- כאשר:  $m$  הוא שיפוע הישר ו- $n$  הוא ערך ה- $y$  של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $y$ .
- נוסחה למציאת משוואת ישר:  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .

שאלות:

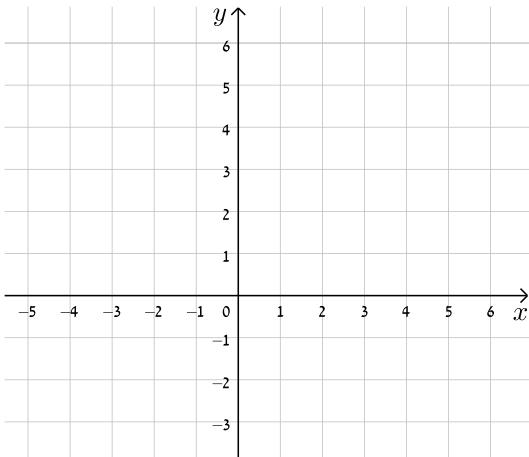
16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

ב.  $y = -x + 5$

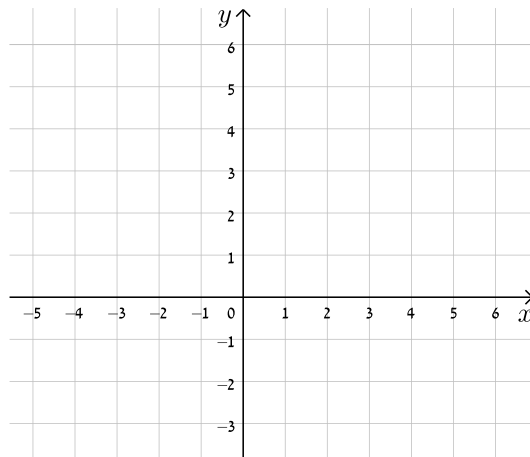
א.  $y = x + 4$



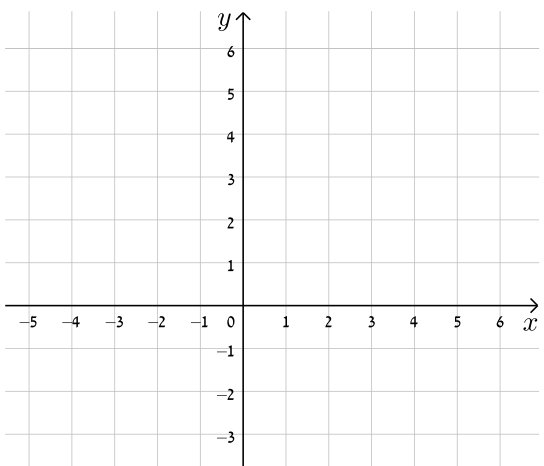
$$y = -3x + 5 \quad \text{ד.}$$



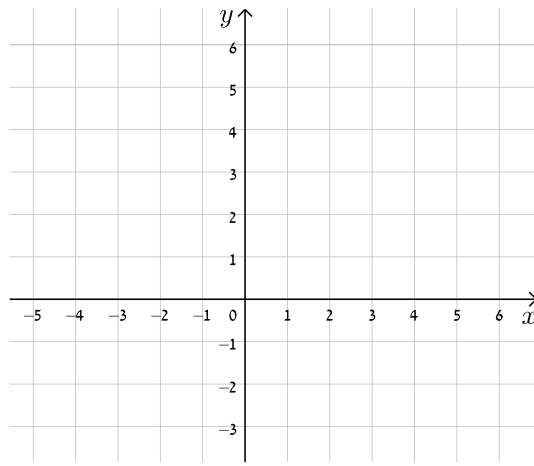
$$y = 2x - 3 \quad \text{ג.}$$



$$y = 8 - 4x \quad \text{ו.}$$

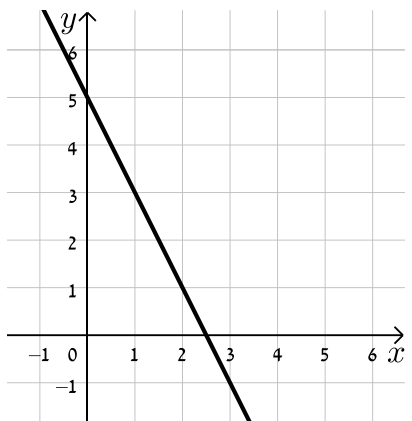


$$y = 3x - 1 \quad \text{ה.}$$

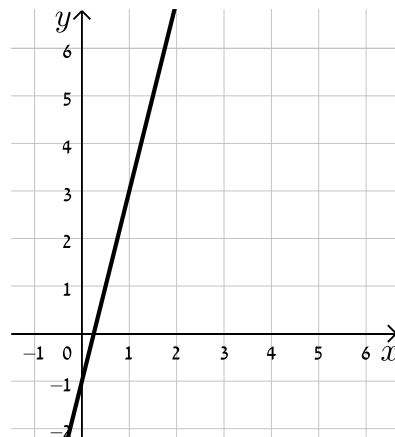


17) כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

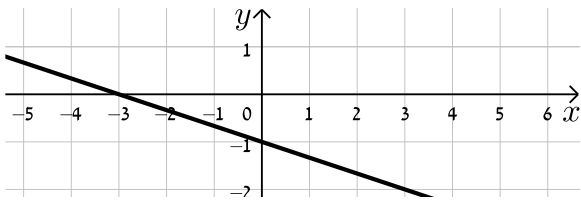
ב.



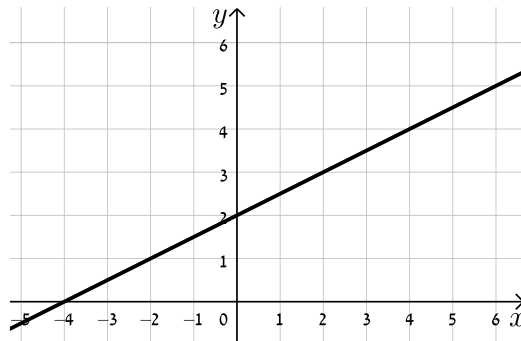
א.



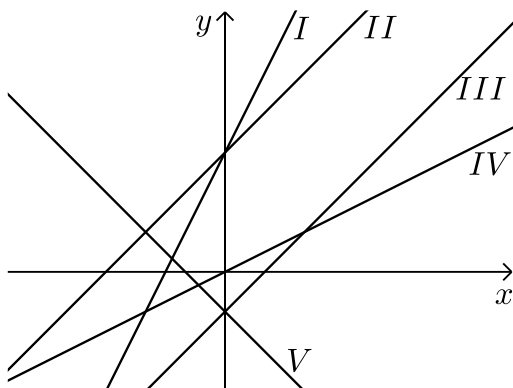
ד.



ג.



18) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:



א.  $y = x + 3$

ב.  $y = -x - 1$

ג.  $y = 2x + 3$

ד.  $y = x - 1$

ה.  $y = \frac{1}{2}x$

19) נתונה משוואה הישר הבאה:  $y = 2x + 3$ . קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות

עליו:  $A(-1, 1)$ ,  $B(3, 3)$ ,  $C(0, 4)$ ,  $D(6, 15)$ .

20) נתונה משוואת הישר הבאה:  $y = mx - 2.5$ . ידוע כי הנקודה  $A(4, 2)$  נמצאת על

הישר. מצא את  $m$  וקבע האם גם הנקודה  $B(7, -2)$  נמצאת עליו.

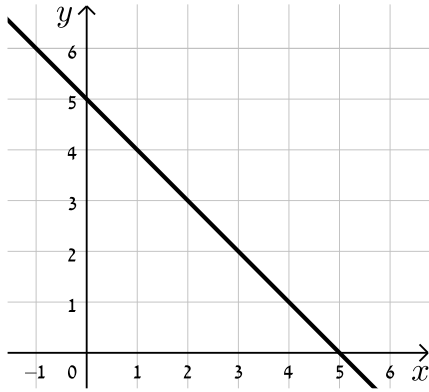
21) הנקודות  $A(5, -3)$ ,  $B(4, 1)$  נמצאות על ישר שמשוואתו היא:  $y = mx + n$ .

מצא את  $m$  ואת  $n$ .

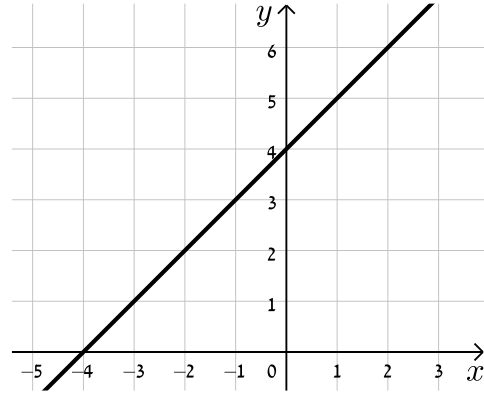
**תשובות סופיות:**

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

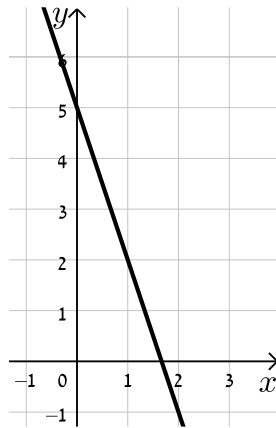
ב.



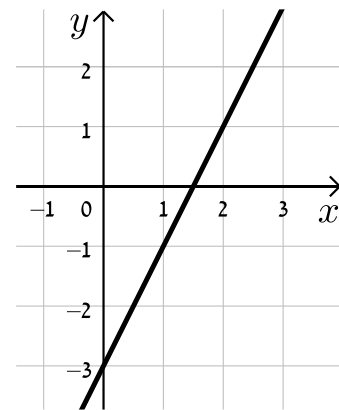
א.



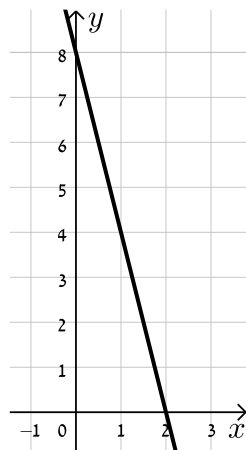
ד.



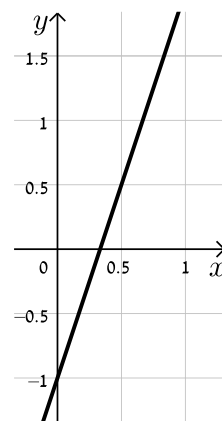
ג.



ו.



ה.



- (17) א.  $y = 4x - 1$     ב.  $y = -2x + 5$     ג.  $y = \frac{1}{2}x + 2$     ד.  $y = -\frac{1}{3}x - 1$
- (18) א. II.    ב. V.    ג. I.    ד. III.    ה. IV.
- (19) נמצאות: A, D. לא נמצאות: B, C.
- (20)  $m = \frac{9}{8}$ , B לא נמצאת.
- (21)  $m = -4$ ,  $n = 17$ .

## מצבים הדדיים בין ישרים:

### סיכום כללי:

#### מצב הדדי בין שני ישרים:

- ישרים מקבילים מקיימים:  $m_1 = m_2, n_1 \neq n_2$ .
- ישרים חותכים מקיימים:  $m_1 \neq m_2$ .
- ישרים מתלכדים מקיימים:  $m_1 = m_2, n_1 = n_2$ .

### שאלות:

22 מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

23 קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

$$\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

24 קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

- (25)** משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא  $y = 6x - 2$ .
- א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?  
 ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?
- (26)** במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים:  $A(5, -1)$ ,  $B(3, 7)$ ,  $C(-5, 5)$ . הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

### תשובות סופיות:

- (22)** א.  $(-1, 1)$       ב.  $(-6, -18)$       ג.  $(10, 16)$
- (23)** א. נחתכים.      ב. מקבילים.      ג. נחתכים.      ד. מתלכדים.
- (24)** מאונכים: ג', ד'.      לא מאונכים: א', ב'.
- (25)** א.  $m_{AB} = m_{CD} = 6$ ,  $m_{BC} = m_{AD} = -\frac{1}{6}$ .
- ב. הכל הפוך:  $m_{BC} = m_{AD} = 6$ ,  $m_{AB} = m_{CD} = -\frac{1}{6}$ .
- (26)** שאלת הוכחה.

## מציאת משוואות ישר:

### שאלות:

27 מצא את משוואות הישרים הבאים:

- א. ישר העובר דרך הנקודה  $A(1,3)$  ושיפועו  $m=2$ .
- ב. ישר העובר דרך הנקודה  $A(0,-4)$  ושיפועו  $m=\frac{1}{3}$ .
- ג. ישר העובר דרך הנקודה  $A(5,9)$  ושיפועו  $m=0$ .
- ד. ישר העובר דרך הנקודות  $A(5,-12)$  ו- $B(6,-6)$ .
- ה. ישר העובר דרך הנקודה  $A(-6,4)$  ומקביל לישר:  $y=2x-3$ .
- ו. ישר העובר דרך הנקודה  $A(3,-5)$  ומקביל לציר ה- $y$ .
- ז. ישר העובר דרך הנקודה  $A(-7,-3)$  ומאונך לישר:  $y=x+3$ .
- ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים:  $y=11x-4$  ו- $y=3x-12$  ומקביל לישר:  $y=7x+5$ .

### תשובות סופיות:

- 27 א.  $y=2x+1$       ב.  $y=\frac{1}{3}x-4$       ג.  $y=9$       ד.  $y=6x-42$
- ה.  $y=2x+16$       ו.  $x=3$       ז.  $y=-x-10$       ח.  $y=7x-8$

## שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר:

### שאלות:

**(28)** במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.

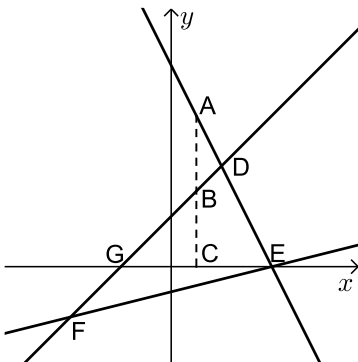
ידוע כי:  $A(3, -2)$ ,  $B(2, 4)$ ,  $D(-2, 2)$ .

- כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.
- מצא את שיעורי הקדקוד C.
- כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

**(29)** נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים A(-9,1) ו-B(5,-7).

משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא  $x + 3y + 6 = 0$ .

- מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.
- מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.



**(30)** שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים

בשרטוט:  $x - y + 2 = 0$ ,  $x - 4y - 4 = 0$ ,  $2x + y - 8 = 0$ .

הקטע AC מקביל לציר ה-y.

- חשב את שטח המשולש DEF.
- נתון:  $d_{BC} = 3$ . חשב את אורך הקטע AB.

**(31)** BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד A(-6,1).

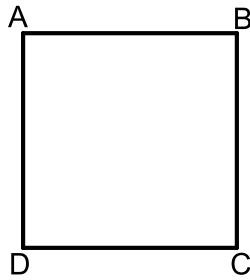
משוואת התיכון BD היא  $x - y = 1$  ומשוואת הצלע BC היא  $3x + 5y = 67$ .

מצא את שיעורי הקדקוד C.

**(32)** נתון טרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ) ובו משוואת השוק BC היא:  $x = 2$ .

משוואת הבסיס CD היא  $2x + 3y = 7$  וידוע כי  $A(-4, 1)$ .

- מצא את משוואת הבסיס AB.
- מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.
- מעבירים את האלכסון AC. הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.



**33** במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3

ושיעורי הנקודה A הם: (1,4).

א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?  
הראה חישוב מתאים.

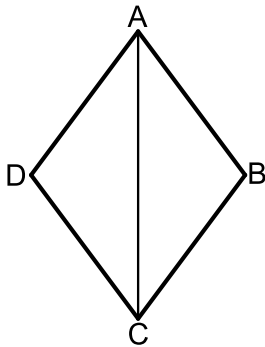
ב. נתון גם:  $D(4,13)$ ,  $m_{CD} = -\frac{1}{3}$  ו- $\sqrt{90}$  ס"מ  $BC =$ .

איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?  
הראה חישוב מתאים.

ג. נתון גם:  $B(-8,7)$ .

איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?  
הראה חישוב מתאים.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.



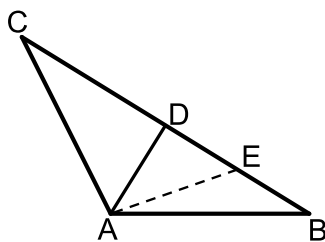
**34** המרובע ABCD הוא מעוין.

ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: (0,6).

כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא:  $y = -1.5x + 6$  ואחת ממשוואות הצלעות היא:  $5y + x = 4$ .

א. מצא את משוואת האלכסון השני.

ב. מצא את שאר קדקודי המעוין.



**35** המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ).

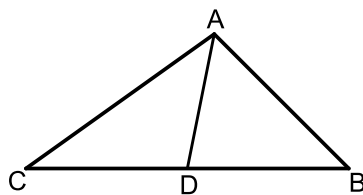
ב- $\triangle ABC$  מעבירים את הגובה AD לבסיס BC

ומסמנים נקודה E כך שמתקיים:  $DE = BE$ .  
קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון

כי:  $D(5,7)$ ,  $E(8.5,2.5)$ .

א. מצא את שיעורי שאר קדקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.



**36** נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC

של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו

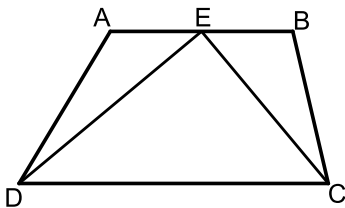
לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD.

הצלע BC מונחת על הישר:  $y = 4$  וידוע כי

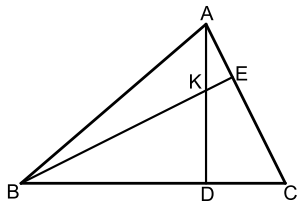
שיעור ה-x של הנקודה C הוא:  $x_C = -1$ .

כמו כן נתון:  $A(7,8)$ ,  $m_{AB} = -2$ .

- א. מצא את משוואת הצלע AB.  
 ב. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?  
 ii. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.  
 ג. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.  
 ii. איזה משולש הוא המשולש ABC?

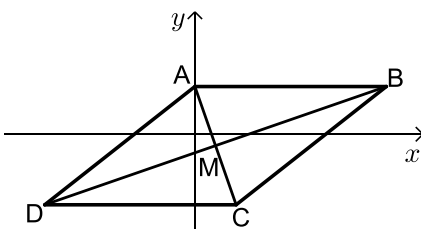


- (37)** המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה-x.  
 שיעורי הנקודה B הם (3, 2) והצלע AD מונחת על הישר:  $x = -5$ . אורך הקטע DE הוא  $\sqrt{80}$ .  
 כך ש- $\angle DEC = 90^\circ$  ברביע השלישי וכן:  
 א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-D.  
 ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.  
 ג. מצא את שיעורי הנקודה C.  
 ד. חשב את שטח המשולש DEC.



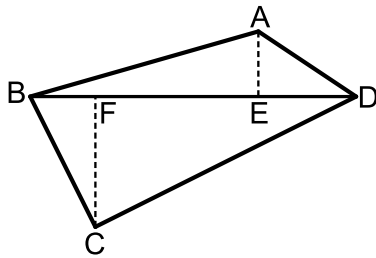
- (38)** AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC.  
 ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: (1, 3).  
 שיעורי הנקודות D ו-E הם:  $D(-2, 4)$ ,  $E(3, 5)$ .  
 א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.  
 ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.  
 ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.  
 ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.

- (39)** נתון מעוין ABCD. ידוע כי הצלע CD מונחת על  $y = -7$ .  
 אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים בנקודה:  $M(-0.5, -3)$ . שיפוע האלכסון AC הוא -4.



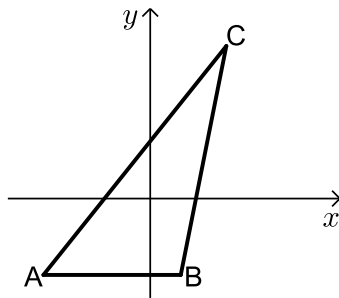
- א. מצא את משוואת האלכסון AC.  
 ב. מצא את שיעורי הנקודה C.  
 ג. חשב את שטח המשולש BMC.

**(40)** נתון מרובע ABCD שקודקודיו הם:  $A(3,13)$ ,  $B(-2,4)$ ,  $C(9,3)$ ,  $D(8,14)$ .



מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.

- מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.
- מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.
- מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.
- חשב את שטח המרובע ABCD.



**(41)** על הישר  $y = -5$  מסמנים את

הנקודות:  $A(-7,-5)$ ,  $B(2,-5)$ .

הנקודה C נמצאת על הישר:  $y = x - 5$ .

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה C ב-t.

א. הבע באמצעות t את שיעור ה-y של הנקודה C.

ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.

הבע באמצעות t את המרחקים של C מ-A ומ-B.

ג. מצא את t ואת אורך הצלע BC.

ד. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB.

ידוע כי D נמצאת ברביע השלישי.

מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח

המשולש DAC יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.

**(42)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = BC$ )

ובו נתון:  $A(-4,12)$ ,  $B(x,6)$  ו-  $C(4,8)$ .

א. מצא את x.

ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת הצלע AC.

ii. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-y ב-D.

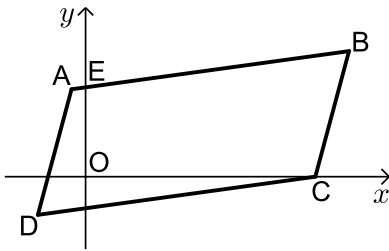
מצא את שיעורי הנקודה D.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא נקודה E ברביע הראשון ( $x_E < 5$ ) כך שהמשולש DCE יהיה גם

שווה שוקיים וישר זווית ( $\sphericalangle C = 90^\circ$ ).

ii. חשב את יחס השטחים בין המשולשים:  $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$ .



43 באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.

ידועים קודקודי המקבילית הבאים:  $A(-1, y)$

ו-  $B(x, 4)$ .  $x$  ו-  $y$  נעלמים).

שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא:  $d_{CD} = \sqrt{104}$ .

א. מצא את  $x$  ו-  $y$  אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה- $x$  בחלקו החיובי

וכי:  $d_{BC} = \sqrt{17}$ . מצא את שיעורי הקדקוד C (מצא שתי אפשרויות).

ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- $y$  ב-E.

שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש. מצא את האפשרות הנכונה עבור

הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

## תשובות סופיות:

$$(28) \quad \text{א. } y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5} \quad \text{ב. } C(-6, 0) \quad \text{ג. } y = -\frac{2}{9}x - \frac{4}{3}$$

$$(29) \quad \text{א. } l_{BD}: y = 3x - 22 \quad \text{ב. } l_{BC}: y = -\frac{1}{8}x - 6\frac{3}{8}$$

$$(30) \quad \text{א. } 18 \text{ יח"ש} = S_{EDF} \quad \text{ב. } 3 \text{ יחידות אורך} = AB$$

$$(31) \quad C(14, 5)$$

$$(32) \quad \text{א. } y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \quad \text{ב. } B(2, -3), C(2, 1) \quad \text{ג. } 12 \text{ יחידות שטח} = S_{ABC}$$

(33) א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.

ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.

ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות. ד.  $90$  יח"ש =  $S$ .

$$(34) \quad \text{א. } y = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3} \quad \text{ב. } (-1, 1), (4, 0), (5, 5)$$

$$(35) \quad \text{א. } B(12, -2), C(-2, 16) \quad \text{ב. } y = -8x$$

$$(36) \quad \text{א. } y = -2x + 22 \quad \text{ב. i. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווי}$$

$$\text{שטח הוא תיכון. ב. ii. } B(9, 4), D(4, 4)$$

ג. ii.  $AD = 5, BC = 10$ . ג. ii. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה

למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

$$(37) \quad \text{א. } D(-5, -8), A(-5, -2), E(-1, 0) \quad \text{ב. } CE: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, CD: y = \frac{1}{2}x - 5\frac{1}{2}$$

$$\text{ג. } C(5, -3) \quad \text{ד. } 30 \text{ יח"ש} = S_{DEC}$$

$$(38) \quad \text{א. } AD: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}, AC: y = -x + 8 \quad \text{ב. } A(7, 1)$$

$$\text{ג. } BE: y = x + 2, BC: y = 3x + 10 \quad \text{ד. } B(-4, -2)$$

$$(39) \quad \text{א. } y = -4x - 5 \quad \text{ב. } C(0.5, -7) \quad \text{ג. } 34 \text{ סמ"ר} = S_{BMC} = S_{DMC}$$

$$(40) \quad \text{א. } d_{BD} = \sqrt{200}, y = x + 6 \quad \text{ב. } E(5, 11), F(3, 9)$$

$$\text{ג. } d_{CF} = \sqrt{72}, d_{AE} = \sqrt{8} \quad \text{ד. } S_{ABCD} = 80$$

$$(41) \quad \text{א. } C(t, t-5) \quad \text{ב. i. } AC = \sqrt{2t^2 + 14t + 49}, BC = \sqrt{2t^2 - 4t + 4}$$

$$\text{ii. } 10 \text{ ס"מ} = BC, t = 8 \quad \text{ג. } D(-20, -5)$$

$$(42) \quad \text{א. } x = -2 \quad \text{ג. i. } y = -0.5x + 10 \quad \text{ii. } D(0, 10) \quad \text{ד. i. } E(2, 4)$$

$$\text{ii. } \frac{S_{DCE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}$$

$$(43) \quad \text{א. } x = 9, y = 2 \quad \text{ב. } C(8, 0), C(10, 0) \quad \text{ג. } C(8, 0)$$

## חלוקת קטע ביחס נתון:

### סיכום כללי:

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  ביחס של  $k:l$  הם:  $x_p = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}$ ,  $y_p = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}$  (בהצלבה).

### שאלות:

(1) הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון:  $A(2, -5)$ ,  $B(-12, 16)$ .

מצא את ערכי הנקודה P, אם נתון כי:  $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5}$ .

(2) קודקודי משולש ABC הם:  $A(-1, 3)$ ,  $B(6, 0)$ ,  $C(4, -12)$ .

מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.  
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

(3) מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC

שקודקודיו הם:  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ .

(4) קודקודי המשולש ABC הם:  $A(5, 1)$ ,  $B(7, -3)$ ,  $C(-1, 4)$ .

מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקודקוד A.

### תשובות סופיות:

(1)  $P(-2, 1)$

(2)  $M(3, -3)$

(3)  $\left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$

(4) 1.697 יחידות אורך.

## מרחק נקודה מישר:

### סיכום כללי:

#### הצגה כללית של ישר ומרחקים:

- הצגה כללית של ישר (צורה סתומה):  $Ax + By + C = 0$ .
- מרחק הנקודה  $A(x_1, y_1)$  מהישר  $Ax + By + C = 0$  הוא:  $d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$ .

כאשר  $B > 0$ :

- אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
- אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

### שאלות:

(5) ענה על הסעיפים הבאים:

- מצא את מרחק הנקודה  $(-2, 4)$  מהישר  $4x + 3y + 11 = 0$ .
- מצא את מרחק הנקודה  $(4, 3)$  מהישר  $y = 3x - 1$ .
- מצא את מרחק הנקודה  $(3, -11)$  מהישר  $x - 5 = 0$ .

(6) מצא את המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון:

- $3x - 4y + 6 = 0$ ,  $A(-5, -1)$     ב.  $12x + 5y - 17 = 0$ ,  $A(-3, 8)$
- $2y + 7 = 0$ ,  $A(11, -2)$     ד.  $3x - 14 = 0$ ,  $A\left(6, -\frac{1}{2}\right)$

(7) מצא את שיעורי הנקודות על הישר  $x + y - 7 = 0$  שמרחקן

מהישר  $2x - y + 5 = 0$  הוא:  $\sqrt{20}$ .

(8) מצא את שטחה של מקבילית ששיעורי קודקודיה

הם:  $A(7, -1)$ ,  $B(-5, 4)$ ,  $C(-1, 7)$ ,  $D(11, 2)$ .

- (9) מצא את שטחו של המשולש  $\triangle ABC$  שבו שיעורי קדקוד A הם  $A(5, -3)$  ושניים מתיכוני המשולש מונחים על הישרים  $x - 4 = 0$  ו-  $2x - y - 1 = 0$ .
- (10) מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם:  $A(2, 2)$ ,  $B(-1, 1)$ ,  $C(-5, -2)$ .
- (11) מצא את שיעורי הנקודות על הישר  $3x - 2y + 6 = 0$ , שמרחקן מהישר:  $2x - y - 14 = 0$  הוא  $3\sqrt{5}$ .
- (12) מצא את שיעורי הנקודות על הישר  $4x + 3y - 20 = 0$ , שמרחקן מהישר:  $3x + 2y + 13 = 0$  הוא  $2\sqrt{13}$ .

### תשובות סופיות:

- (5) א. 3 ב.  $\frac{8}{\sqrt{10}}$  ג. 2
- (6) א. 1 ב. 1 ג.  $1\frac{1}{2}$  ד.  $1\frac{1}{3}$
- (7)  $(4, 3)$ ,  $\left(-2\frac{2}{3}, 9\frac{2}{3}\right)$
- (8)  $S_{ABCD} = 56$  יח"ש
- (9)  $S_{ABC} = 18$  יח"ש
- (10)  $S_{ABC} = 2.5$  יח"ש
- (11)  $(4, 9)$ ,  $(64, 99)$
- (12)  $(-1, 8)$ ,  $(-157, 216)$

## מיקום נקודה ביחס לישר:

### שאלות:

- 13** מצא את שיעורי הנקודה על הישר  $3x - 2y + 6 = 0$ , שמרחקה מהישר:  $2x - y - 14 = 0$  הוא  $3\sqrt{5}$  והיא נמצאת מתחתיו.
- 14** מצא את שיעורי הנקודה על הישר  $4x + 3y - 20 = 0$ , שמרחקה מהישר:  $3x + 2y + 13 = 0$  הוא  $2\sqrt{13}$  והיא נמצאת מעליו.
- 15** נתון משולש ABC שבו נתונים הקודקודים:  $A(1,1)$ ,  $B(13,6)$ . הקדקוד C נמצא על הישר  $2x - y - 19 = 0$  ונמצא מתחת לצלע AB. מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.
- 16** נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:  
 $I: x + 2y + 1 = 0$ ,  $II: x - 2y - 11 = 0$ ,  $III: 2x - y + 6 = 0$   
 מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ומרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.
- 17** מצא את שיעורי מרכז המעגל, החסום במשולש, שצלעותיו מונחות על הישרים:  $I: 4x - 3y + 2 = 0$ ,  $II: 3x - 4y - 51 = 0$ ,  $III: 3x + 4y - 11 = 0$ .
- 18** מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה  $G(7, -3)$  נמצאת מתחתיו ובמרחק  $2\sqrt{10}$  ממנו.
- 19** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(-2, 6)$  ומרחקו מהנקודה  $B(2, 9)$  הוא  $\sqrt{5}$ .
- 20** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(9, 10)$  ומרחקו מהנקודה  $B(8, -3)$  הוא  $5\sqrt{5}$ .
- 21** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(3, 6)$  ומרחקו מהנקודה  $B(-9, 2)$  הוא 4.

- (22) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(1,2)$  ומרחקו מהנקודה  $B(-3,10)$  הוא 4.
- (23) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(10,8)$  ומרחקו מהנקודה  $B(7,-1)$  הוא 3.
- (24) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(-6,1)$  ומרחקו מהנקודה  $B(2,7)$  הוא 10.

### תשובות סופיות:

- |  |  |
|--|--|
| $(-1,8)$ (14)  | $(64,99)$ (13)   |
| $(-1,-4)$ (16)   | $C(11,3)$ (15)   |
| $y = 3x - 4$ (18)  | $(2,-5)$ (17)  |
| $y = -\frac{22}{31}x + 16\frac{12}{31}$ , $y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$ (20) | $y = 2x + 10$ , $y = \frac{2}{11}x + 6\frac{4}{11}$ (19) |
| $x = 1$ או $y = -\frac{3}{4}x + 2\frac{3}{4}$ (22)                               | $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{3}{4}$ , $y = 6$ (21)         |
| $y = -\frac{4}{3}x - 7$ (24)   | $x = 10$ או $y = 1\frac{1}{3}x - 5\frac{1}{3}$ (23)      |

## מרחק בין ישרים מקבילים:

### סיכום כללי:

- מרחק בין שני ישרים מקבילים:  $Ax+By+C_1=0$  ו-  $Ax+By+C_2=0$  כאשר:  $B > 0$

$$\text{הוא: } d = \left| \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \text{ ומתקיים בהעדר הערך המוחלט:}$$

- אם:  $C_1 > C_2$ ,  $(d > 0)$  אז הישר  $Ax+By+C_1=0$  מתחת ל-  $Ax+By+C_2=0$ .
- אם:  $C_1 < C_2$ ,  $(d < 0)$  אז הישר  $Ax+By+C_1=0$  מעל ל-  $Ax+By+C_2=0$ .

### שאלות:

(25) מצא משוואת ישר, המקביל לישר  $3x-4y+8=0$  ונמצא במרחק 4 ממנו.

(26) מצא את המרחק בין הישרים המקבילים:  $5x+12y-14=0$ ,  $5x+12y+25=0$ .

(27) נתונים הישרים:  $y=6x+5$ ,  $12x-2y-15=0$ .  
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

(28) נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן  $AB: 3x+y=0$  ו-  $CD: 3x+y-6=0$ . הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע BC ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

(29) צלע של ריבוע מונחת על הישר  $3x-2y+5=0$ . אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה  $B(1,-1)$ . מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

(30) נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי. מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות  $P(4,1)$  ו-  $Q(7,2)$  וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא  $3\sqrt{10}$ .

**(31)** במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר  $x - y + 3 = 0$  והצלע BP מונחת על הישר  $x + 2y + 3 = 0$ . אורך הגובה לצלע BP הוא  $3\sqrt{5}$  ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

### תשובות סופיות:

$$3 \quad (26) \quad 3x - 4y + 28 = 0, \quad 3x - 4y - 12 = 0 \quad (25)$$

$$(2.1, -3.3), \quad S = \text{יח"ש} \quad 14.4 \quad (28) \quad \frac{25}{\sqrt{148}} \quad (27)$$

$$3x - 2y - 15 = 0, \quad y = -\frac{2}{3}x - 3\frac{2}{3}, \quad y = -\frac{2}{3}x + 3 \quad (29)$$

$$P\left(2, -2\frac{1}{2}\right) \quad (31) \quad y = 3x \quad (30)$$

# מכינה יסודית במתמטיקה

פרק 14 - גיאומטריה אנליטית - המעגל

תוכן העניינים

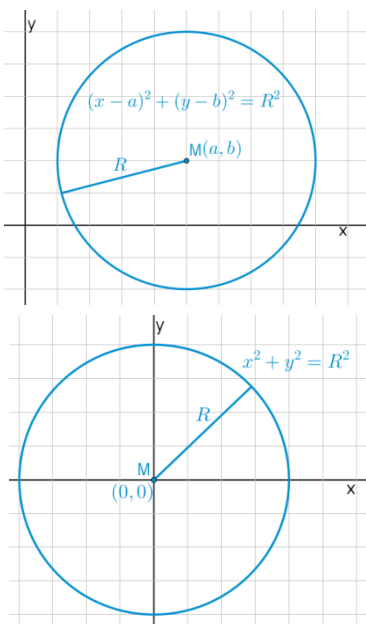
238	1. הכרות עם משוואת המעגל
242	2. מעגל המשיק לצירים
244	3. משיק למעגל
245	4. שאלות יסודיות שונות
(ללא ספר)	5. נושאים מתקדמים במעגל
252	6. כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע
253	7. משוואות המשיקים למעגל
255	8. מיתר המחבר שתי נקודות השקה
256	9. שאלות מסכמות שונות

## הכרות עם משוואת המעגל:

**סיכום כללי:**

**הגדרה:**

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.



**משוואת מעגל:**

משוואת מעגל שמרכזו בנקודה  $M(a, b)$  ורדיוסו  $R$  היא:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ .

**משוואת מעגל קנוני:**

משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים  $M(0, 0)$ ) ורדיוסו  $R$  היא:  $x^2 + y^2 = R^2$ .

**שאלות:**

**1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:**

א.  $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$

ב.  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 10$

ג.  $(x-m)^2 + (y+n)^2 = m^2 + n^2$

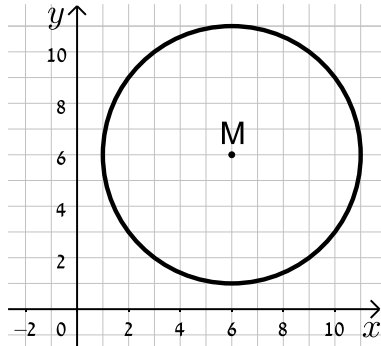
**2) כתוב את משוואות המעגלים שמרכזם  $M$  ורדיוסם  $R$ :**

א.  $M(4, -2), R=3$       ב.  $M(-3, 5), R=10$

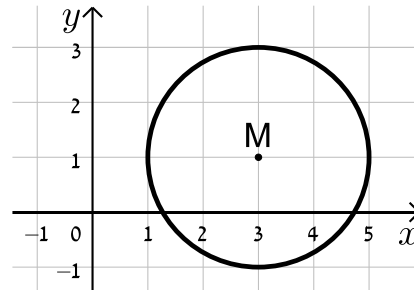
ג.  $M(5, 5), R=\sqrt{40}$       ד.  $M(10, -12), R=\sqrt{30}$

3) כתוב את משוואות המעגלים הבאים בכל מקרה:

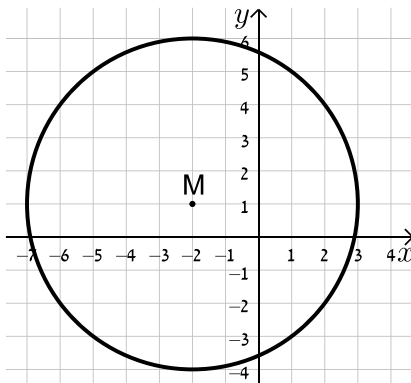
ב.



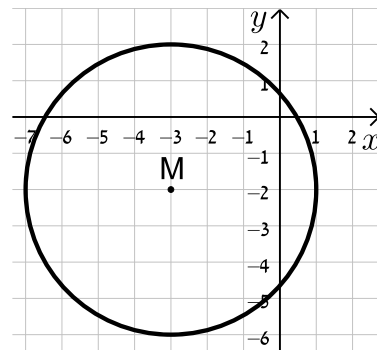
א.



ד.



ג.



4) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה  $A(-4, 5)$  ומרכזו בנקודה  $O(2, -1)$ .

5) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה  $M(-5, 6)$  והוא חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 9$ .

6) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה  $M(0, -7)$  והוא חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 3$ .

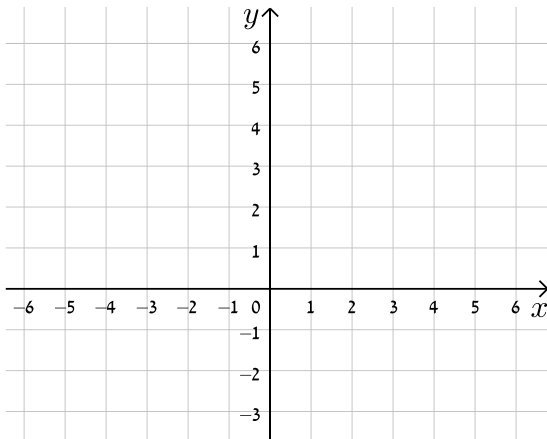
7) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה  $A(11, 2)$ , רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר  $y = 2x - 1$ .

8) מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות  $A(-2, 3)$  ו- $B(4, -3)$  הן קצות הקוטר שלו.

9 מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר  $x=4$ , רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה- $x$  מיתר שאורכו 12.

10 מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו  $M(4, -3)$  אם ידוע כי הישר  $y = -3x + 7$  חותך אותו בשתי נקודות A ו-B כך שאורכו של המיתר AB הוא 4 יחידות אורך.

11 מצא את משוואתו של מעגל החוסם משולש שקודקודיו הם  $A(22, -24)$ ,  $B(-10, 40)$ ,  $C(-30, 28)$ .



12 נתונים שני מעגלים בעלי אותו המרכז  $M(3, -1)$ , האחד הוא בעל רדיוס  $R$  והשני בעל רדיוס של  $2R$ .  
 א. כתוב את המשוואות של שני המעגלים (בטא באמצעות  $R$ ).  
 ב. מה תהיינה המשוואות עבור  $R = 2$ ?  
 ג. צייר את שני המעגלים במערכת הצירים שלפניך.

13 שני מעגלים שמרכזיהם  $M_1(6, 2)$  ו- $M_2(-3, -4)$  חותכים זה את זה בנקודה  $(-2, 3)$ . מצא את משוואות המעגלים.

14 נתונה משוואת המעגל הבאה:  $x^2 + y^2 - 10x - 10y + a = 0$  כאשר  $a$  פרמטר.  
 א. מצא ביטוי של רדיוס המעגל באמצעות  $a$ .  
 ב. איזה מהערכים הבאים יכול להיות הגיוני עבור  $a$ ?  
 נמק ומצא את תחום ההגדרה של  $a$ .  
 i.  $a = 5$   
 ii.  $a = 55$

## תשובות סופיות:

$$\text{ב. } M(-0.5, 0), R = \sqrt{10} \quad \text{א. } M(3, -5), R = 7 \quad (1)$$

$$\text{ג. } M(m, -n), R = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$\text{ב. } (x+3)^2 + (y-5)^2 = 100 \quad \text{א. } (x-4)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad (2)$$

$$\text{ד. } (x-10)^2 + (y+12)^2 = 30 \quad \text{ג. } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 40$$

$$\text{ב. } (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \quad \text{א. } (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad (3)$$

$$\text{ד. } (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25 \quad \text{ג. } (x+3)^2 + (y+2)^2 = 16$$

$$\text{א. } M(3, -3), (x-2)^2 + (y+1)^2 = 72 \quad (4)$$

$$\text{ב. } (x+5)^2 + (y-6)^2 = 232 \quad (5)$$

$$\text{ג. } x^2 + (y+7)^2 = 100 \quad (6)$$

$$\text{א. } (x-7.8)^2 + (y+14.6)^2 = 169 \quad \text{או } (x+1)^2 + (y+3)^2 = 169 \quad (7)$$

$$\text{ב. } (x-1)^2 + y^2 = 18 \quad (8)$$

$$\text{א. } (x-4)^2 + (y+8)^2 = 100 \quad \text{או } (x-4)^2 + (y-8)^2 = 100 \quad (9)$$

$$\text{ב. } (x-4)^2 + (y+3)^2 = 4\frac{2}{5} \quad (10)$$

$$\text{ג. } (x+2)^2 + (y-4)^2 = 1360 \quad (11)$$

$$\text{א. } (x-3)^2 + (y+1)^2 = R^2, (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4R^2 \quad (12)$$

$$\text{ב. } (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4, (x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$$

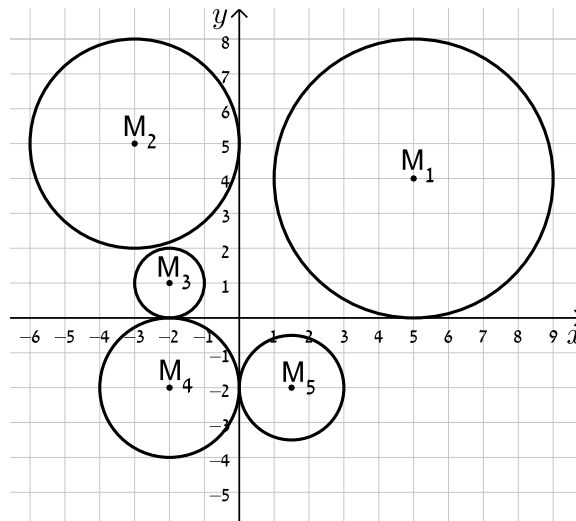
$$\text{א. } (x+3)^2 + (y+4)^2 = 50, (x-6)^2 + (y-2)^2 = 65 \quad (13)$$

$$\text{ב. } a = 5, \text{ ת.ה. } : a < 50 \quad \text{א. } R = \sqrt{50-a} \quad (14)$$

## מעגל המשיק לצירים:

שאלות:

15) כתוב את משוואות המעגלים הבאים:



16) מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

17) מצא את משוואת המעגל שמשיק לציר ה- $x$  ומרכזו בנקודה  $M(16,8)$ .

18) מצא את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על הישר  $2x + 3y + 6 = 0$  והוא משיק לשני הצירים.

19) מצא את משוואתו של מעגל המשיק לציר ה- $y$  ולישר  $y = 6$  ומרכזו על הישר  $y = 3x - 2$  ברביע הראשון.

**תשובות סופיות:**

$$M_1 : (x-5)^2 + (y-4)^2 = 16, M_2 : (x+3)^2 + (y-5)^2 = 9 \quad \mathbf{(15)}$$

$$, M_3 : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1, M_4 : (x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$. M_5 : (x-1.5)^2 + (y+2)^2 = 2\frac{1}{4}$$

$$. (x \pm 4)^2 + (y \pm 4)^2 = 16 \quad \mathbf{(16)}$$

$$. (x-16)^2 + (y-8)^2 = 64 \quad \mathbf{(17)}$$

$$. \left(x+1\frac{1}{5}\right)^2 + \left(y+1\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}, (x-6)^2 + (y+6)^2 = 36 \quad \mathbf{(18)}$$

$$. (x-2)^2 + (y-4)^2 = 4 \quad \mathbf{(19)}$$

## משיק למעגל:

### סיכום כללי:

משוואת המשיק למעגל  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעליו היא:  $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = R^2$ .

### שאלות:

**20** מצא את משוואות המשיקים למעגל  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$  בנקודות על המעגל שבהן  $y = 5$ .

**21** נתונה משוואת המעגל:  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$  ומשוואת הישר  $y = 2x + m$  כאשר  $m$  פרמטר. מצא עבור אלו ערכים של  $m$  הישר ישיק למעגל ולאילו ערכים הישר יחתוך את המעגל.

### תשובות סופיות:

**20**  $4x - 3y + 35 = 0$  ו-  $4x + 3y = 27$ .

**21** משיק:  $m = 11, -9$ , חותך:  $-9 < m < 11$ .

## שאלות יסודיות שונות:

### שאלות:

(22) נתון מעגל שמשוואתו  $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ .

- א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.  
 ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה- $x$ .  
 מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א'  
 ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

- (23) נתון ישר שמשוואתו  $y = 2x - 10$ . הישר חותך את ציר ה- $x$  בנקודה A ואת ציר ה- $y$  בנקודה B. בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו. המשיק חותך את ציר ה- $y$  בנקודה C. מצא את אורך הקטע BC.

- (24) נתון המעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 = 81$ . מסמנים ב-A את נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה- $x$ . הנקודה A היא מרכזו של מעגל נוסף בעל רדיוס של 12. מסמנים את נקודות החיתוך של שני המעגלים ב-B ו-C. מצא את שטח המשולש שנוצר בין הנקודות B, C ו-O (ראשית הצירים).

- (25) נתון ישר שמשוואתו  $y = x$ . הישר חותך מעגל קנוני שמשוואתו  $x^2 + y^2 = 32$  בשתי נקודות, A ו-B, כאשר A ברביע הראשון. בנקודה A עובר מעגל נוסף, המשיק למעגל הקנוני ובעל אותו רדיוס. מצא את משוואת המעגל הנוסף ואת משוואת המשיק המשותף לשני המעגלים העובר בנקודה A.

- (26) הישרים:  $9y + 11x = 94$  ו-  $y = -3x + 14$  נחתכים בנקודה B.

דרך נקודה זו עובר מעגל שמרכזו הוא:  $M(-9, 1)$ .

ידוע כי מעגל זה חותך את הישרים (חוץ מהנקודה B)

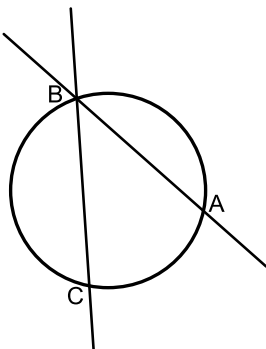
בשתי נקודות A ו-C (ראה איור).

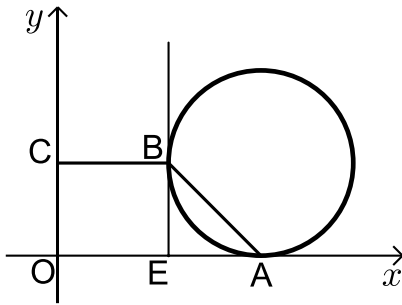
א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את משוואת המעגל.

ג. מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של הישר

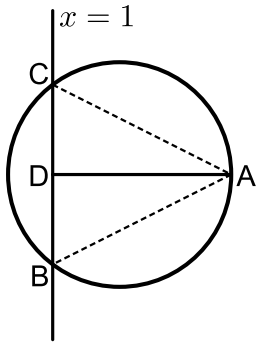
שמשוואתו:  $y = -3x + 14$  עם המעגל.





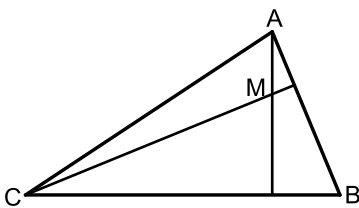
- (27)** נתון מעגל המשיק לציר ה- $x$  בנקודה  $A$ .  
 מהנקודה  $E$  שעל ציר ה- $x$  מעלים אנך המשיק  
 למעגל בנקודה  $B$  (ראה איור).  
 הקטע  $BC$  מקביל לציר ה- $x$  ו- $O$  היא נקודת  
 ראשית הצירים. יוצרים טרפז ישר זווית  $ABCO$   
 ששטחו הוא 170 סמ"ר.  
 ידוע כי:  $C(0,10)$  ו-  $AE = 10$  ס"מ.

- א. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. מצא את שיעורי הנקודה  $B$ .  
 ii. מצא את שיעורי הנקודה  $A$ .  
 ב. כתוב את משוואת המעגל.

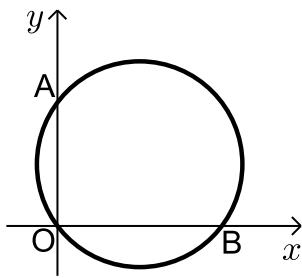


- (28)** הנקודה  $A(17,4)$  נמצאת על המעגל  
 שמשוואתו:  $(x-7)^2 + (y-4)^2 = R^2$ .  
 הישר  $x=1$  חותך את המעגל בשתי נקודות  $B$  ו- $C$  כך  
 ש- $B$  נמצאת ברביע הרביעי. מעבירים את הקטע  $AD$   
 המאונך לישר  $BC$  וידוע כי הנקודה  $D$  היא אמצע  $BC$ .

- א. מצא את רדיוס המעגל.  
 ב. מצא את שיעורי הנקודות  $B$  ו- $C$ .  
 ג. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. חשב את מרחק הנקודה  $A$  מהישר  $x=1$ .  
 ii. חשב את שטח המשולש  $ABC$ .



- (29)** נתון משולש  $ABC$ . משוואות הצלעות  $AB$  ו- $BC$   
 במשולש  $ABC$  הן בהתאמה:  $2y - x = 56$   
 ו-  $8y + x = 104$ .  
 מעבירים גבהים לצלעות  $AB$  ו- $BC$  אשר  
 נחתכים בנקודה  $M(0, -2)$  שבתוך המשולש.  
 א. מצא את משוואות הגבהים.  
 ב. מצא את שיעורי הנקודה  $B$ .  
 ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה  $M$   
 ורדיוסו הוא הקטע  $BM$ .



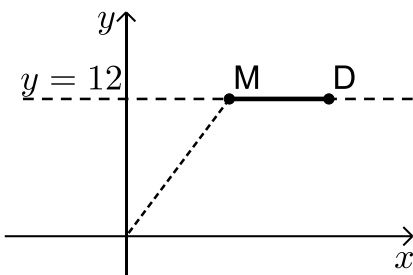
**30** באיור שלפניך מתואר המעגל:  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ .

המעגל חותך את הצירים בנקודות A, B ו-O.

- א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
- ב. מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע הראשון כך שהמרובע ABCO יהיה מלבן.
- ג. חשב את היקף המלבן.

**31** המעגל:  $(x+a)^2 + (y-1)^2 = a+4$ ,  $a > 0$ , חותך את ציר ה-x בנקודה שבה:  $x=1$ .

- א. מצא את a.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$ .
- ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.
- ד. חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.



**32** הנקודות M ו-D נמצאות על הישר  $y=12$  ידוע כי שיעור

ה-x של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של הנקודה M מראשית הצירים גדול ב-6 מהמרחק בין הנקודות M ו-D (ראה איור).  
בוניס מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו הוא האורך DM.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.
- ii. מצא את שיעור ה-x של הנקודה D.
- ב. כתוב את משוואת המעגל.
- ג. האם המעגל הזה חותך את הצירים? הראה חישוב מתאים לטענתך.

**33** מעגל שמרכזו בנקודה M(15,12) משיק לציר ה-y

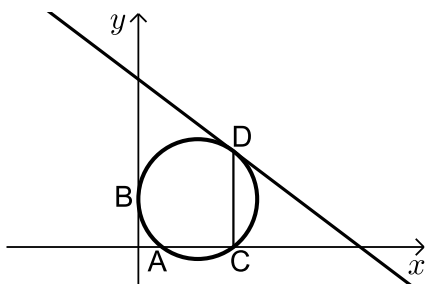
בנקודה B וחותך את ציר ה-x בשתי נקודות A ו-C כמתואר באיור.

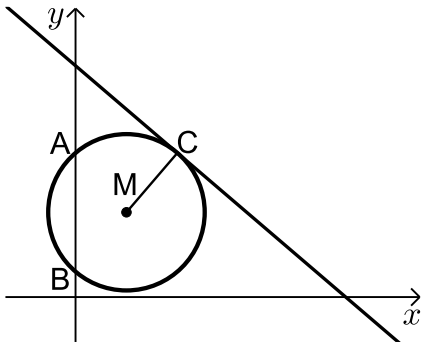
א. כתוב את משוואת המעגל.

מהנקודה C מעלים אנך לציר ה-x שחותך את המעגל בנקודה נוספת D.  
דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.

ב. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.

ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.





34) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M.

המעגל חותך את ציר ה- $y$  בנקודות A ו-B.

מעבירים משיק למעגל:  $6x + 7y = 191$

דרך הנקודה:  $C(12, 17)$ .

א. כתוב את משוואת הרדיוס MC.

ב. ידוע כי הנקודה M נמצאת על הישר  $y = 10$ .

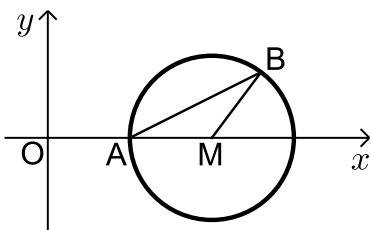
i. מצא את שיעורי הנקודה M.

ii. מצא את אורך רדיוס המעגל.

iii. כתוב את משוואת המעגל.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- $y$ .

ד. חשב את שטח המשולש AMB.



35) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M הנמצאת על

ציר ה- $x$ . המעגל חותך את ציר ה- $x$  בנקודה A.

מסמנים את ראשית הצירים ב-O.

ידוע כי A היא אמצע הקטע MO ושיעוריה הם:  $A(5, 0)$ .

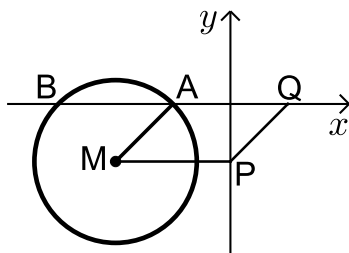
א. מצא את משוואת המעגל.

ב. כתוב את משוואת הישר שעובר דרך הנקודה A ושיפועו הוא 0.5.

ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של הישר שמצאת עם המעגל.

ד. סמן את הנקודה שמצאת בסעיף הקודם ב-B וחשב

את שטח המשולש AMB.



36) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו

$$\text{היא: } (x+4)^2 + (y+2)^2 = 8$$

מסמנים את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- $x$

ב-A ו-B (ראה איור).

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

מעבירים אנך לציר ה- $y$  מנקודת מרכז המעגל M

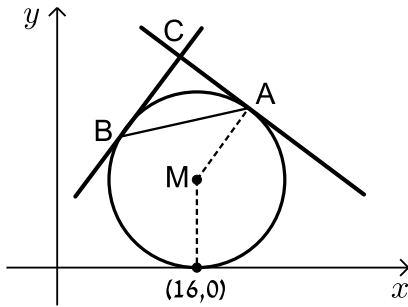
ומסמנים את חיתוכם ב-P.

ב. מצא נקודה Q כך שהמרובע AMPQ יהיה מקבילית. נמק.

ג. כתוב את משוואת הישר PQ.

ד. הוכח כי הישר שמצאת בסעיף הקודם משיק למעגל

בנקודה  $(-2, -4)$ .



**37** נתון מעגל שרדיוסו  $R$  ( $R < 16$ ) ומשיק לציר ה- $x$

בנקודה שבה:  $x = 16$ .

א. הבע באמצעות  $R$  את משוואת המעגל וציין האם הוא חותך את ציר ה- $y$  או לא. נמק.

מהנקודה  $A(22,18)$  שעל המעגל מעבירים משיק.

ב. מצא את  $R$  וכתוב את משוואת המעגל.

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל בנקודה  $A$ .

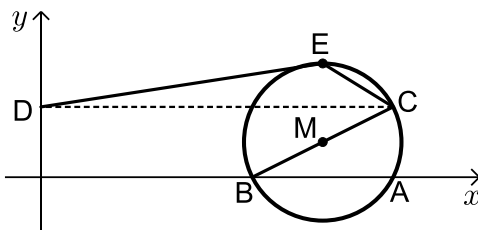
ד. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה  $B$  שבה  $x_B < x_M$

אם ידוע כי הוא המאונך למשיק הקודם.

ה. המשיקים נחתכים בנקודה  $C$ .

i. מצא את שיעורי הנקודה  $C$ .

ii. מצא את שטח המשולש  $ABC$ .



**38** באיור שלפניך נתון מעגל

שמשוואתו:  $(x+a)^2 + (y-1)^2 = 5$ , פרמטר  $a$ .

ידוע כי המעגל חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $A(10,0)$ .

א. מצא את  $a$  אם ידוע כי  $a > -10$ .

ב. מצא את הנקודה  $B$  - נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה- $x$ .

ג. כתוב את משוואת הקוטר העובר דרך הנקודה  $B$  ומרכז המעגל  $M$ .

ד. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הקוטר עם המעגל.

ה. מעבירים אנך מנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם לציר ה- $y$  בנקודה  $D$ .

הנקודה  $E$  היא הנקודה בעלת שיעור ה- $y$  הגדול ביותר על המעגל.

מחברים את הנקודות  $D$  ו- $E$  כך שנוצר המחומש  $DECBO$ . חשב את שטחו.

**39** באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו:  $(x-5)^2 + (y-3)^2 = R^2$ , רדיוס המעגל.

ידוע כי המעגל עובר בראשית הצירים.

א. מצא את רדיוס המעגל

וכתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את הנקודות  $A$  ו- $B$  - החיתוך של

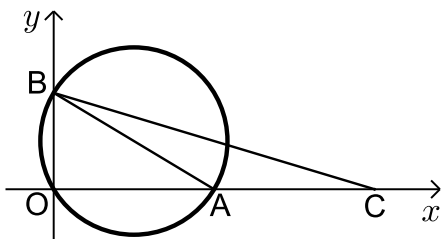
המעגל עם הצירים (ראה איור).

ג. מסמנים נקודה  $C$  על ציר ה- $x$

כך ש- $A$  היא אמצע הקטע  $CO$ .

i. מצא את שיעורי הנקודה  $C$ .

ii. חשב את שטח המשולש  $ABC$ .



## תשובות סופיות:

(22) א.  $(0, -8)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(0, 0)$  ב. 27 יח"ש.

(23) 12.5 יחידות אורך.

(24)  $S_{ABOC} = \sqrt{80}$  יח"ש

(25)  $y = -x + 8$ ,  $(x - 8)^2 + (y - 8)^2 = 32$

(26) א.  $(2, 8)$  ב.  $(x + 9)^2 + (y - 1)^2 = 170$  ג.  $(4, 2)$

(27) א. i.  $B(12, 10)$  ii.  $A(22, 0)$  ב.  $(x - 22)^2 + (y - 10)^2 = 100$

(28) א.  $R = 10$  ב.  $B(1, -4)$ ,  $C(1, 12)$  ג. i.  $d = 16$

ii.  $S = 128$

(29) א.  $y = 8x - 2$ ,  $y = -2x - 2$  ב.  $(-24, 16)$  ג.  $x^2 + (y + 2)^2 = 900$

(30) א.  $O(0, 0)$ ,  $A(0, 6)$ ,  $B(8, 0)$  ב.  $C(8, 6)$  ג. 28 יח"ש  $P =$

(31) א.  $a = 1$  ב.  $(0, -1)$ ,  $(-2, 3)$  ג.  $y = -2x - 1$

ד.  $S = \frac{1}{4}$

(32) א. i.  $d = 15$  ii.  $x = 18$  ב.  $(x - 9)^2 + (y - 12)^2 = 81$

ג. המעגל אינו חותך את ציר ה- $x$  - כאשר מציבים ב- $y$  אפס מתקבלת משוואה ריבועיתללא פתרון. המעגל חותך את ציר ה- $x$  בנקודה אחת- $(12, 0)$ .

(33) א.  $(x - 15)^2 + (y - 12)^2 = 225$  ב.  $C(24, 0)$ ,  $D(24, 24)$  ג.  $y = -\frac{3}{4}x + 42$

(34) א.  $y = \frac{7}{6}x + 3$  ב. i.  $M(6, 10)$  ii.  $\sqrt{85}$

iii.  $(x - 6)^2 + (y - 10)^2 = 85$  ג.  $A(0, 17)$ ,  $B(0, 3)$  ד. 42 יח"ש

(35) א.  $(x - 10)^2 + y^2 = 25$  ב.  $y = 0.5x - 2.5$  ג.  $B(13, 4)$

ד. 10 יח"ש  $S_{AMB} =$

(36) א.  $A(-2,0)$ ,  $B(-6,0)$  ב.  $Q(2,0)$  ג.  $y = x - 2$ .

(37) א.  $(x-16)^2 + (y-R)^2 = R^2$ , המעגל אינו חותך את ציר ה- $y$ .

ב.  $(x-16)^2 + (y-10)^2 = 100$ ,  $R = 10$  ג.  $y = -\frac{3}{4}x + 34\frac{1}{2}$ .

ד.  $y = \frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$  ה. i.  $C(14,24)$  ii. 50 יח"ש.

(38) א.  $a = -8$  ב.  $B(6,0)$  ג.  $y = 0.5x - 3$ .

ד.  $(10,2)$  ה.  $11 + 5\sqrt{5}$  יח"ש  $S_{DECB0} =$ .

(39) א.  $\sqrt{34}$  יחידות אורך  $R =$ ,  $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 34$  ב.  $A(10,0)$ ,  $B(0,6)$ .

ג. i.  $C(20,0)$  ii. 30 יח"ש  $S_{ABC} =$ .

## כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע:

### שאלות:

(1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א.  $x^2 + 10x + y^2 + 6y - 2 = 0$       ב.  $x^2 - 2x + y^2 + 20y + 1 = 0$

ג.  $x^2 - 8x + y^2 - 14y = 0$       ד.  $x^2 + y^2 + 2y = 0$

ה.  $x^2 + x + y^2 - 3\frac{3}{4} = 0$       ו.  $x^2 - 2mx + y^2 + 6my + m^2 = 0$

(2) משוואתו של מעגל היא  $x^2 + y^2 - 6mx - 2(m+2)y + 4m + 4 = 0$ .

מצא את ערכו של  $m$  אם ידוע שמרכז המעגל נמצא על הישר  $y = 2x + 7$ .

(3) משוואתו של מעגל היא  $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 48 = 0$ .

מצא את אורכו של המיתר שחותך הישר  $y = 2x - 4$  מהמעגל בלי למצוא את נקודות הקצה של המיתר.

### תשובות סופיות:

(1) א.  $M(-5, -3), R = 6$       ב.  $M(1, -10), R = 10$

ג.  $M(4, 7), R = \sqrt{65}$       ד.  $M(0, -1), R = 1$

ה.  $M\left(-\frac{1}{2}, 0\right), R = 2$       ו.  $M(m, -3m), R = 3m$

(2)  $m = -1$

(3)  $2\sqrt{80}$

## משוואות המשיקים למעגל:

### שאלות:

- (4) מצא משוואת מעגל העובר בנקודה  $(1, 8)$  המשיק לשני הצירים.
- (5) מצא את אורך המשיק למעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 37 = 0$  היוצא מהנקודה  $A(10, -3)$ .
- (6) מצא את משוואת המשיק ואת משוואת הנורמל למעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$  בנקודה  $A(5, -4)$ .
- (7) מצא את נקודת החיתוך של המשיקים למעגל שמשוואתו  $x^2 + (y-1)^2 = 5$  בנקודות שבהן  $x = -1$ .
- (8) נתון מעגל שמרכזו בנקודה  $(-2, 6)$  והוא עובר בראשית הצירים. המעגל חותך את הצירים בשתי נקודות נוספות, A ו-B.  
 א. הוכח כי המשיקים למעגל בנקודות A ו-B מקבילים זה לזה.  
 ב. הוכח את סעיף א' בלי למצוא את משוואות המשיקים או את שיפועיהם.
- (9) נתון המעגל  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$  והישר  $y = 2x + m$ .  
 לאלו ערכים של הפרמטר  $m$  הישר משיק למעגל ולאלו ערכים של  $m$  הישר חותך את המעגל?

**תשובות סופיות:**

$$(4) \quad (x-13)^2 + (y-13)^2 = 169 \text{ או } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$$

$$(5) \quad .8$$

$$(6) \quad \text{משיק: } y = 3x - 19, \text{ נורמל: } x + 3y + 7 = 0$$

$$(7) \quad .(-5,1)$$

$$(8) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(9) \quad \text{משיק: } m = -9, 11, \text{ חותך: } -9 < m < 11$$

## מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

### סיכום כללי:

משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים

למעגל  $(x-a)^2 = (y-b)^2 = R^2$  היוצאים מהנקודה  $A(x_1, y_1)$  שמחוץ

למעגל היא:  $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = R^2$ .

### שאלות:

10) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ ,

המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה  $A(-3, 8)$

ב. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו  $x^2 + (y-1)^2 = 5$ , המחבר

את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה  $A(-5, 1)$ .

11) נתון מעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 + 16x + 48 = 0$  ונקודה P, שנמצאת על החלק

החיובי של ציר ה-y. הישר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים

היוצאים למעגל מנקודה P חותך את ציר ה-y בנקודה Q. נתון:  $PQ = 14$ .

מצא את שיעורי הנקודה Q.

### תשובות סופיות:

10) א.  $x - 4y + 11 = 0$ . ב.  $x = -1$ .

11)  $Q(0, -8)$  או  $Q(0, -6)$ .

## שאלות מסכמות שונות:

### שאלות:

**12** נתון מעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 + 16x - 12y + 64 = 0$ . המעגל משיק מבחוץ למעגל קנוני. מצא את משוואת המעגל הקנוני, את נקודת ההשקה בין המעגלים ואת משוואת המשיק המשותף העובר בנקודה זו.

**13** המעגלים  $x^2 + y^2 + 22x - 6y = m$  ו-  $x^2 + y^2 = 26$  נחתכים בזווית ישרה. מצא את ערכו של  $m$ .

**14** בטרפז שווה שוקיים ABCD נתון כי הבסיס הגדול, DC, מונח על הישר:  $3x - y - 9 = 0$  והשוק AD מונחת על הישר  $x + y - 3 = 0$ . שיעורי הקודקוד B הם  $(3, -8)$ . מצא את משוואת המעגל החוסם את הטרפז ABCD.

**15** מצא את משוואתו של מעגל החוסם ריבוע, שאחד מקדקודיו נמצא בראשית הצירים ומשוואת אחד מאלכסונו היא  $3x - y + 10 = 0$ .

### תשובות סופיות:

**12**  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $A(-3.2, 2.4)$ ,  $4x - 3y + 20 = 0$

**13**  $m = -26$

**14**  $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 20$

**15**  $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10$

# מכינה יסודית במתמטיקה

פרק 15 - גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה

תוכן העניינים

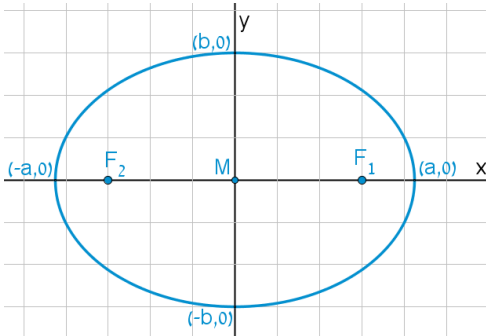
257	.....	1. האליפסה
261	.....	2. הפרבולה

## האליפסה:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.



#### מושגים באליפסה:

- הציר הגדול: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- $x$ .
- הציר הקטן: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- $y$ .
- מרכז האליפסה: מפגש צירי האליפסה (ראה איור).
- באליפסה קנונית מרכז האליפסה נמצא בראשית הצירים.
- מוקדי האליפסה: שתי נקודות קבועות שבעבורן סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה הוא גודל קבוע השווה ל- $2a$ . המוקדים יסומנו ב- $F_1$  ו- $F_2$  ושיעוריהם הם:  $F_1(c,0)$ ,  $F_2(-c,0)$ .
- רדיוסי ווקטור: המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים. אורך הרדיוס מנקודה  $(x, y)$  שעל האליפסה למוקד הימני הוא:  $r_1 = a - \frac{cx}{a}$ .
- אורך הרדיוס מנקודה  $(x, y)$  שעל האליפסה למוקד השמאלי הוא:  $r_2 = a + \frac{cx}{a}$ .
- מיתר: קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.
- קוטר: מיתר העובר דרך מרכז האליפסה.

#### משוואות וקשרים:

- משוואת אליפסה קנונית היא:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  או  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ .
- הקשר בין הפרמטרים של האליפסה הוא:  $a^2 - b^2 = c^2$ .
- מכפלת שיפועי מיתר באליפסה והקוטר החוצה אותו היא קבועה ושווה ל- $-\frac{b^2}{a^2}$ .

## שאלות:

- (1) מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה  $x^2 + 4y^2 = 36$ .
- (2) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא  $2\sqrt{3}$ .
- (3) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה  $8\sqrt{2}$ .
- (4) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה  $(-3\sqrt{3}, 2)$ .
- (5) מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 = 16$  ומוקד אחד שלה הוא בנקודה  $(\sqrt{10}, 0)$ .
- (6) מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- $y$  בנקודה  $(0, -2\sqrt{5})$  והמרחק בין המוקד הימני לקדקוד הימני בה הוא 2.
- (7) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות  $(-2, \sqrt{6})$  ו- $(\sqrt{14}, 1)$ .
- (8) מצא על האליפסה  $3x^2 + 4y^2 = 144$  את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.
- (9) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה  $(-3, 1)$  ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.
- (10) מצא על האליפסה  $x^2 + 3y^2 = 12$  את הנקודות שמהן רואים את הקטע שבין שני המוקדים בזווית ישרה.

- 11** מצא את משוואתו של קוטר באליפסה  $x^2 + 4y^2 = 50$  ששיפועו חיובי ואורכו  $\sqrt{56}$ .
- 12** נתונים האליפסה  $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$  והישר  $y = 2x + k$ . מצא לאלו ערכים של הפרמטר  $k$  הישר משיק לאליפסה ולאלו ערכים של הפרמטר  $k$  הישר חותך את האליפסה.
- 13** מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה  $3x^2 + 5y^2 = 120$  כך שצלעותיו מקבילות לצירים.
- 14** מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  כך שצלעותיו מקבילות לצירים.
- 15** באליפסה  $5x^2 + 9y^2 = 90$  חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.
- 16** באליפסה  $x^2 + 5y^2 = 16$  חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קדקודיו האחרים.
- 17** באליפסה חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה וקדקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- $y$ . מצא את משוואת האליפסה אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה  $(4\sqrt{2}, 0)$ .
- 18** מצא באליפסה  $2x^2 + 3y^2 = 12$  משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא  $(1.5, 1)$ .
- 19** ישר שמשוואתו  $x - y - 3 = 0$  חותך מאליפסה מיתר שאמצעו בנקודה  $(2, -1)$ . מצא את משוואת האליפסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $(2\sqrt{2}, -2)$ .

$$(20) \text{ נתונה המשוואה } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 25} = 1, (0 < a \neq 5).$$

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. לאיזה ערך של  $a$  המשוואה מייצגת מעגל?

ii. לאלו ערכים של  $a$  המשוואה מייצגת אליפסה?

ב. הוכח כי בעבור  $a = 4$  אין אף נקודה על האליפסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad 2a = 12, 2b = 6$$

$$(2) \quad \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(3) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$(4) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$(5) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{6} = 1$$

$$(6) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

$$(7) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$$(8) \quad (4, \sqrt{24}), (4, -\sqrt{24}), (-4, \sqrt{24}), (-4, -\sqrt{24})$$

$$(9) \quad \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$(10) \quad (\sqrt{6}, \sqrt{2}), (-\sqrt{6}, \sqrt{2}), (\sqrt{6}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$$

$$(11) \quad y = \sqrt{6}x$$

$$(12) \text{ משיק: } k = \pm 12, \text{ חותך: } -12 < k < 12.$$

$$(13) \quad S = 60 \text{ יח"ש}$$

$$(14) \quad S = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

$$(15) \quad S = 26 \frac{2}{3} \text{ יח"ש}$$

$$(16) \quad (1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3})$$

$$(17) \quad \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$(18) \quad y = -x + 2.5$$

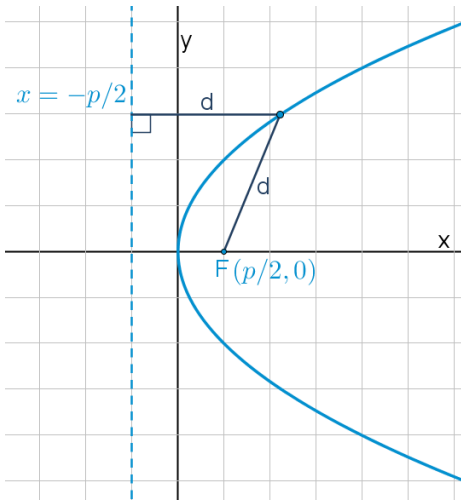
$$(19) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$$(20) \text{ א. } a = \sqrt{12.5} \text{ .ii } a \neq \sqrt{12.5}$$

## הפרבולה:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:



המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה. הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.

#### מושגים בפרבולה:

- מוקד: נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה ממנה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.
- מדריך: ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.
- קדקוד הפרבולה: ראשית הצירים.
- רדיוס: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה:  $r = x + \frac{p}{2}$ .
- מיתר: קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה.
- קוטר (לא בחומר): ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (ציר ה- $x$  אצלנו).

#### משוואת הפרבולה:

משוואת הפרבולה הקנונית היא:  $y^2 = 2px$  כאשר  $p$  הוא פרמטר הפרבולה.

### משיק לפרבולה:

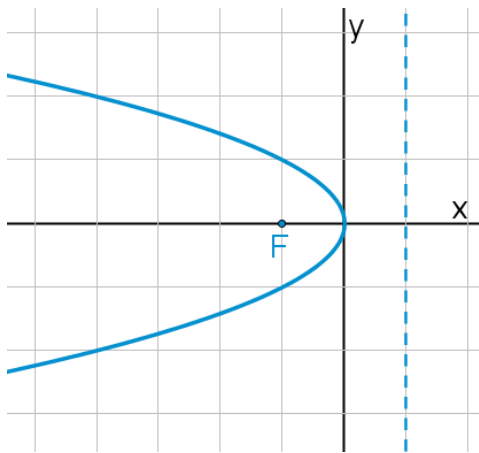
- משוואת המשיק לפרבולה  $y^2 = 2px$  בנקודה  $A(x_0, y_0)$  שעליה היא:  $yy_0 = p(x + x_0)$ .
- שיפוע המשיק לפרבולה  $y^2 = 2px$  בנקודה  $A(x_0, y_0)$  שעליה הוא:  $m = \frac{p}{y_0}$ .

### מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

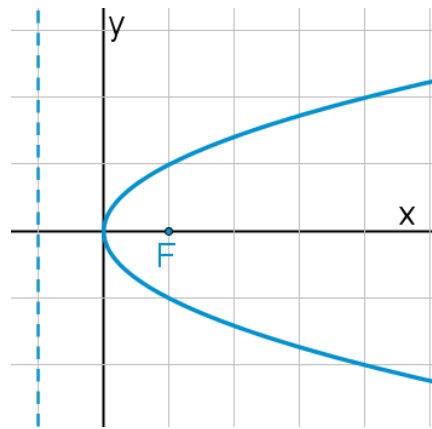
- משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה  $y^2 = 2px$  היוצאים מהנקודה  $A(x_0, y_0)$  שמחוץ לפרבולה היא:  $yy_0 = p(x + x_0)$ .

### תיאורים גרפיים:

פרבולה שמשוואתה  $y^2 = -2px$ :



פרבולה שמשוואתה  $y^2 = 2px$ :



### שאלות:

- (1) נתונה הפרבולה  $y^2 = 18x$ . מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.
- (2) מצא את משוואתה של פרבולה שהישר  $x = -3$  הוא המדריך שלה.
- (3) מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך שלה הוא 5.

- (4) מצא את משוואתה של פרבולה שעוברת בנקודה  $(-6, 9)$ .
- (5) מצא את משוואתה של פרבולה שמוקדה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה  $x^2 + 2y^2 = 18$ .
- (6) מצא נקודות על הפרבולה  $y^2 = 6x$  שמרחקן מהמוקד הוא 4.
- (7) מצא נקודות על הפרבולה  $y^2 = 8x$  שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.
- (8) מצא נקודות על הפרבולה  $y^2 = 2px$  שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.
- (9) מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה  $y^2 = 10x$ .
- (10) הבע באמצעות  $p$  את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה  $y^2 = 2px$ .
- (11) נתונה הפרבולה  $y^2 = 2px$ . הבע באמצעות  $p$  את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו מונח על ציר ה- $x$ , וקדקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגש תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.
- (12) את נקודה A שעל הפרבולה  $y^2 = 20x$  חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה אנך למדריך. היקף הטרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה- $x$  שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח הטרפז.
- (13) קצות מיתר בפרבולה  $y^2 = 4x$  הם A ו-B. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה- $x$  של נקודה A הוא 4.
- (14) מצא משוואת מיתר בפרבולה  $y^2 = 16x$ , שעובר בראשית הצירים ומרחקו מהמוקד הוא  $\frac{8}{\sqrt{5}}$ .

**(15)** מצא משוואת מיתר בפרבולה  $y^2 = 2x$ , שאמצעו בנקודה  $\left(1\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ .

**(16)** נתונה הפרבולה  $y^2 = 4x$  והישר  $y = 2x + k$ , לאיזה ערך של  $k$  הישר משיק לפרבולה?

**(17)** נתונה הפרבולה  $y^2 = 6x$ .

- א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות שבהן  $x = 1.5$ .  
 ב. הוכח שנקודת החיתוך של הנורמלים בנקודות אלה נמצאת על ציר ה- $x$ .

**(18)** הנקודות A ו-B נמצאות על הפרבולה  $y^2 = 12x$ . נתון כי  $y_A = 4$ . מצא את שיעורי נקודה B אם ידוע שהמשיקים לפרבולה בנקודות הנתונות יוצרים זווית ישרה.

**(19)** נקודה A נמצאת על הפרבולה  $y^2 = 28x$  ברביע הרביעי. אורך הנורמל לפרבולה מנקודה A עד לציר ה- $x$  הוא  $7\sqrt{5}$ . מצא את משוואת הנורמל.

**(20)** מרחק המוקד של הפרבולה  $y^2 = 8x$  ממשיק לה ששיפועו חיובי הוא  $\sqrt{8}$ . מצא את משוואת המשיק.

**(21)** נתונה הפרבולה  $y^2 = 2px$ . הבע באמצעות  $p$  את שיעורי הנקודה שעל הפרבולה ברביע הראשון, שמרחק המשיק בה ממוקד הפרבולה הוא  $p$ .

**(22)** נתונות שתי פרבולות: I.  $y^2 = 6x$ , II.  $y^2 = 12x$ . ישר שעובר בראשית הצירים חותך את הפרבולות בנקודות A ו-B. הראה כי המשיקים בנקודות A ו-B מקבילים.

**(23)** נתונה הפרבולה  $y^2 = 14x$  והנקודה  $(-1, -3)$ , ממנה יוצאים שני משיקים לפרבולה. מצא את משוואת המיתר המחבר בין נקודות ההשקה.

- (24)** נתונה הפרבולה  $y^2 = 18x$  ונקודה ברביע השלישי, ששיעור ה- $x$  שלה קטן ב-1 משיעור ה- $y$  שלה. מהנקודה יוצאים שני משיקים לפרבולה. המיתר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם הצירים משולש ששטחו 18. מצא את משוואת המיתר.
- (25)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה  $y^2 = 24x$  והוא משיק למדריך שלה.
- (26)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה  $(8,0)$  והוא משיק לפרבולה  $y^2 = 10x$  בשתי נקודות.
- (27)** נתונה הפרבולה  $y^2 = 2px$  ומעגל שמרכזו על ציר ה- $x$  והוא משיק לפרבולה מבפנים בשתי נקודות. הישר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם המשיקים בנקודות אלה משולש שווה צלעות. הבע באמצעות  $p$  את משוואת המעגל.
- (28)** הנקודה  $A(2,3)$  נמצאת על פרבולה. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לפרבולה בנקודה  $A$  ומשיק לציר ה- $y$ .
- (29)** נתונה הפרבולה  $y^2 = 2px$  שבה  $p > 4$ . הישר  $x = 2$  חותך את הפרבולה בנקודות  $A$  ו- $B$ . הבע באמצעות  $p$  את שיעורי קדקוד  $C$  של משולש  $\triangle ABC$  שמוקד הפרבולה הוא מפגש האנכים האמצעיים בו, אם ידוע שקדקוד  $C$  נמצא על ציר ה- $x$ .
- (30)** אליפסה שמשוואתה  $x^2 + 4y^2 = 16$  חותכת את הפרבולה  $y^2 = 2px$  בשתי נקודות. המרובע שקדקודיו הם נקודות החיתוך, מרכז האליפסה וקדקודה הימני של האליפסה הוא מעויך. מצא את משוואת הפרבולה.

## תשובות סופיות:

- (1)  $p = 9, F\left(4\frac{1}{2}, 0\right)$
- (2)  $y^2 = 12x$
- (3)  $y^2 = 10x$
- (4)  $y^2 = 4x$
- (5)  $y^2 = 12x$
- (6)  $\left(2\frac{1}{2}, \sqrt{15}\right), \left(2\frac{1}{2}, -\sqrt{15}\right)$
- (7)  $(1, \sqrt{8}), (1, -\sqrt{8})$
- (8)  $\left(\frac{p}{4}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{p}{4}, -\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$
- (9)  $S_{OAB} = 300\sqrt{3}$  יח"ש
- (10)  $S_{ABO} = 12\sqrt{3}p^2$  יח"ש
- (11)  $S_{ABC} = 3\sqrt{3}p^2$  יח"ש
- (12)  $S_{ABCF} = 40\frac{5}{8}$  יח"ש
- (13)  $B\left(\frac{1}{4}, 1\right)$  או  $B\left(\frac{1}{4}, -1\right)$
- (14)  $y = -2x$  או  $y = 2x$
- (15)  $y = 2x - 2$
- (16)  $k = \frac{1}{2}$
- (17)  $y = x + 1\frac{1}{2}, y = -x - 1\frac{1}{2}$  .א
- (18)  $B\left(6\frac{3}{4}, -9\right)$
- (19)  $y = \frac{1}{2}x - 7\frac{7}{8}$
- (20)  $y = x + 2$
- (21)  $A\left(\frac{3}{2}p, \sqrt{3}p\right)$
- (22) הוכחה.
- (23)  $7x + 3y - 7 = 0$
- (24)  $y = -9x + 18$
- (25)  $(x - 6)^2 + y^2 = 144$
- (26)  $(x - 8)^2 + y^2 = 55$
- (27)  $\left(x - 2\frac{1}{2}p\right)^2 + y^2 = 4p^2$
- (28)  $\left(x - 1\frac{1}{4}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{25}{16}$
- (29)  $C(p + 2, 0)$
- (30)  $y^2 = 1\frac{1}{2}x$

# מכינה יסודית במתמטיקה

פרק 16 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

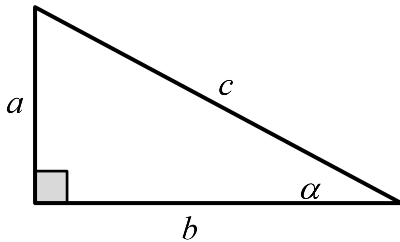
תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית..... 267

## משולש ישר זווית:

### סיכום כללי:

#### הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

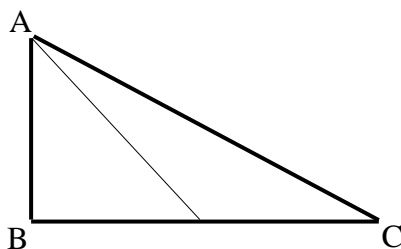
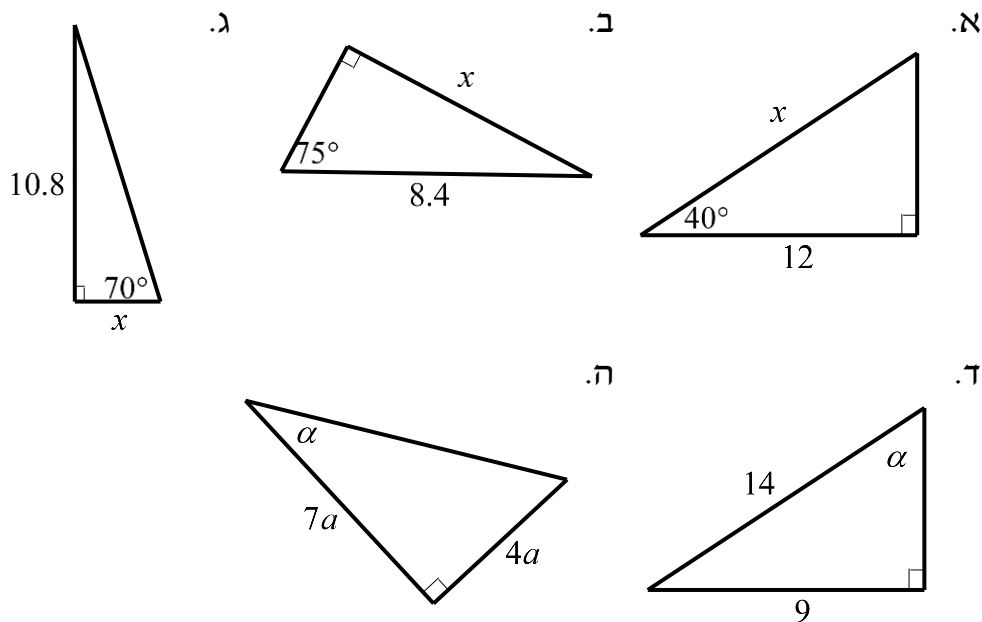
$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

$$a^2 + b^2 = c^2: \text{משפט פיתגורס}$$

### שאלות:

1) מצא את ערכו של  $\alpha/x$  במשולשים ישרי הזווית הבאים:



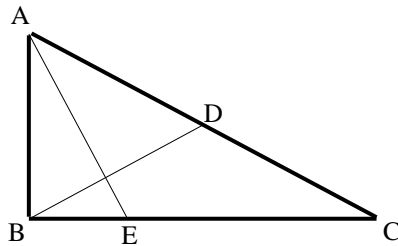
2) המשולש ABC שבציור הוא משולש

ישר זווית ( $\sphericalangle B = 90^\circ$ ).

AD הוא התיכון לניצב BC.

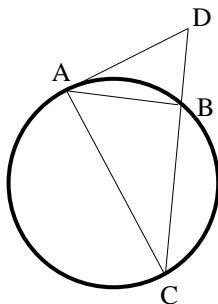
נתון:  $\sphericalangle C = 28^\circ$ ,  $AB = 6$  ס"מ.

מצא את AD ואת  $\sphericalangle BAD$ .



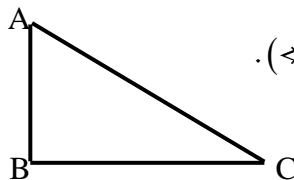
- (3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). BD הוא התיכון ליתר ו-AE הוא חוצה הזווית  $\angle A$ . נתון:  $BC = 8$  ס"מ,  $BD = 5.6$  ס"מ. מצא את BE ואת  $\angle BAE$ .

- (4) מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסונו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

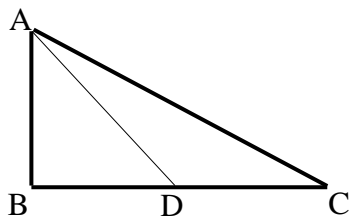


- (5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל. המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D. נתון:  $\angle DAB = 32^\circ$ ,  $BD = 4$  ס"מ. מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

- (6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא  $34.92^\circ$ . מצא את שטח המשולש.

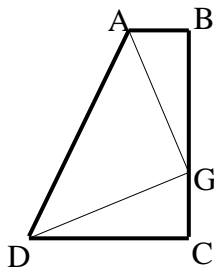


- (7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). נתון:  $AB = a$ ,  $\angle A = \alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $a$  את היקף המשולש.

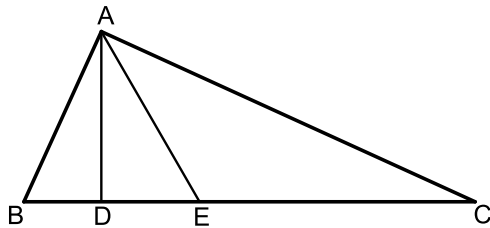


- (8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). AD הוא התיכון לניצב BC. נתון:  $AB = b$ ,  $\angle C = \alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $b$  את אורכי הקטעים AD ו-BD.

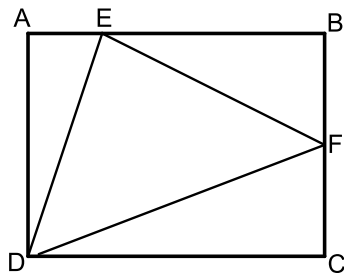
- (9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא  $\alpha$  ואורך חוצה הזווית זו הוא  $k$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $k$  את שטח המשולש ואת אורך היתר.



- 10** טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית ( $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ). הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$ . נתון:  $\angle BAG = \beta$ ,  $AG = DG = m$ . הבע באמצעות  $\beta$  ו- $m$  את שטח הטרפז.



- 11** המשולש ABC הוא ישר זווית ( $\angle A = 90^\circ$ ). הקטעים AD ו-AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית. מסמנים:  $\angle DAE = \alpha$ ,  $DE = k$ .  
 א. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABC.  
 ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי:  $\alpha = 30^\circ$  ו- $k = 2$ .

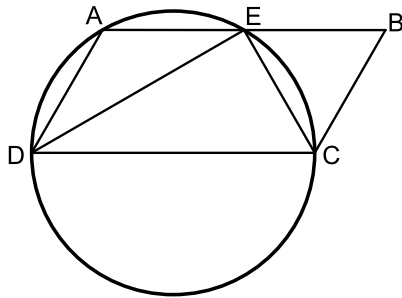


- 12** במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו-F הנמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה כך ש-E מקיימת:  $3AE = BE$  ו-F היא אמצע הצלע BC. אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE. מעבירים את הקטעים EF, DF ו-DE כך שנוצר במשולש DEF.  
 א. סמן ב- $t$  את אורך הקטע AE והבע באמצעות  $t$  את אורכי צלעות המשולש DEF.  
 ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

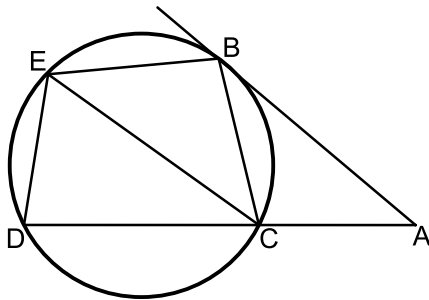
- 13** משולש שווה שוקיים שאורך שוקו  $k$  וזווית הבסיס שלו היא  $\beta$  חוסם מעגל. הבע באמצעות  $\beta$  ו- $k$  את רדיוס המעגל.

- 14** בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא  $b$  והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא  $\alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $b$  את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:



- 15) דרך הקודקודים A, C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E,  $(AE = BE)$ . נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.
- הוכח כי המיתר CE חוצה את זוויות C.
  - רדיוס המעגל יסומן ב-R. הבע באמצעות R את היקף המקבילית.
  - מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא  $16\sqrt{3}$  סמ"ר.



- 16) מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD. מעבירים את המיתרים BC ו-BE אשר זהים באורכם. כמו כן מעבירים את המיתר DE. אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.
- הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.
  - הוכח כי:  $\angle BEC = 2 \cdot \angle EDC$ .
  - נתונים:  $\angle A = 40^\circ$ ,  $AC = 6$  ס"מ,  $AB = 9$  ס"מ,  $CE = 8$  ס"מ. חשב את שטח המרובע ABEC.

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = 15.665 \quad \text{ב. } x = 8.114 \quad \text{ג. } x = 3.931 \quad \text{ד. } \alpha = 40.005^\circ \quad \text{ה. } \alpha = 29.745^\circ$$

$$(2) \quad AD = 8.236 \text{ ס"מ}, \quad \sphericalangle BAD = 43.24^\circ$$

$$(3) \quad BE = 3.294 \text{ ס"מ}, \quad \sphericalangle BAE = 22.792^\circ$$

$$(4) \quad 73.74^\circ, 73.74^\circ, 106.26^\circ, 106.26^\circ$$

$$(5) \quad R = 6.04 \text{ ס"מ}$$

$$(6) \quad S = 28.618 \text{ סמ"ר}$$

$$(7) \quad P = a \left( 1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$(8) \quad AD = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4 \tan^2 \alpha}}, \quad BD = \frac{b}{2 \tan \alpha}$$

$$(9) \quad AC = \frac{k \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}, \quad S = \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2}$$

$$(10) \quad \frac{(m \sin \beta + m \cos \beta)^2}{2}$$

$$(11) \quad \text{א. } S = \frac{k^2}{\cos 2\alpha \tan^2 \alpha} \quad \text{ב. } 24 \text{ סמ"ר}$$

$$(12) \quad \text{א. } DE = t\sqrt{10}, \quad EF = t\sqrt{11.25}, \quad DF = t\sqrt{18.25} \quad \text{ב. } 81.86^\circ, 51^\circ, 47.14^\circ$$

$$(13) \quad R = k \cos \beta \tan \frac{\beta}{2}$$

$$(14) \quad \frac{1}{2} b \sin \alpha + \frac{\frac{1}{2} b \sin \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2}}, \quad S = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)$$

$$(15) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. } 6R \quad \text{ג. } 4 \text{ ס"מ}$$

$$(16) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג. } 32.78 \text{ סמ"ר}$$

# מכינה יסודית במתמטיקה

פרק 17 - זהויות טריגונומטריות

תוכן העניינים

272	1. זהויות יסוד
276	2. ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות
278	3. מעגל היחידה
281	4. סכום והפרש זוויות
285	5. זווית כפולה
288	6. סכום והפרש פונקציות
291	7. מכפלת פונקציות

## זהויות יסוד:

### סיכום כללי:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	קשרים בין פונקציות
$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$	זוויות משלימות ל- $90^\circ$
$\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$	$\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$	
$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	קשרים בין פונקציות

### שאלות:

#### הוכחת זהויות יסודיות:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 \quad (2)$$

$$\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos^2 \alpha \quad (4)$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 \quad (6)$$

$$\sin^2(\alpha + 45^\circ) + \sin^2(45^\circ - \alpha) = 1 \quad (8)$$

$$\frac{\sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \tan^3 \alpha \quad (10)$$

$$\cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = 1 \quad (12)$$

$$\frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha \quad (14)$$

$$\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha \quad (16)$$

$$\tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \quad (1)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \tan \alpha \quad (3)$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 \quad (5)$$

$$\frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad (7)$$

$$\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \tan \alpha \quad (9)$$

$$\frac{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \cot \alpha \quad (11)$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \cot \alpha \quad (13)$$

$$\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha \quad (15)$$

## הוכחות מתקדמות:

$$(17) \quad \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = 2 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(18) \quad \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(19) \quad (\cot \alpha - \tan \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = (1 + \cot^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(20) \quad \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \cot^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(21) \quad 1 - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) = \cos^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(22) \quad \left( \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \right)^2 = 4 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(23) \quad \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(24) \quad \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \tan \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

## הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:

$$(25) \quad \text{נתון כי: } \sin \alpha + \cos \alpha = k$$

הבע באמצעות  $k$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

ב.  $\sin \alpha - \cos \alpha$

ג.  $\tan \alpha + \cot \alpha$

ד.  $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

$$(26) \quad \text{נתון כי: } \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

מבלי למצוא את  $\alpha$  חשב את:  $\tan^2 \alpha - 2 \cot^2 \alpha$

(27) נתון כי:  $\tan \alpha = \sqrt{7}$ .

מבלי למצוא את  $\alpha$  חשב את:  $\frac{\sqrt{7} \sin \alpha + 6 \cos \alpha}{\sqrt{28} \sin \alpha - \cos \alpha}$ .

(28) חשב את ערך המכפלה הבאה:  $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$ .

**תשובות סופיות:**

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) שאלת הוכחה.
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) שאלת הוכחה.
- (22) שאלת הוכחה.
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) שאלת הוכחה.

$$(25) \text{ א. } \frac{k^2 - 1}{2} \quad \text{ב. } \pm\sqrt{2 - k^2} \quad \text{ג. } \frac{2}{k^2 - 1} \quad \text{ד. } \frac{k}{2}(3 - k^2)$$

$$(26) -7.75$$

$$(27) 1$$

$$(28) 1$$

## ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

**סיכום כללי:**

$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 0^\circ$	
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin \alpha$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos \alpha$
$\phi$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\tan \alpha$
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\phi$	$\cot \alpha$

**הערות:**

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של  $0^\circ$  ו- $90^\circ$  תלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי:  $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$  אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל. עבור שורת ה- $\cos \alpha$  יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי  $\tan \alpha$  ולסובב עבור ערכי  $\cot \alpha$ .

**שאלות:**

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

$$1) \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$$

$$2) \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$3) \tan 45^\circ + \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$$

$$\cdot \frac{1 + \cos 60^\circ}{2 \sin 60^\circ} \quad (4)$$

$$\cdot \cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ \quad (5)$$

$$\cdot \frac{\tan^2 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}{4 \left( \sin^2 60^\circ - \frac{1}{4} \right)} \quad (7)$$

$$\cdot \frac{27 \cot^4 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ} \quad (8)$$

### תשובות סופיות:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

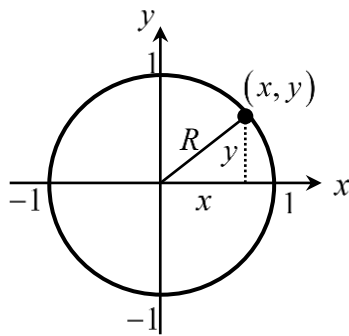
$$-\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$2\sqrt{6} \quad (8)$$

## מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

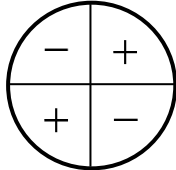
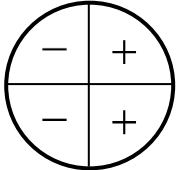
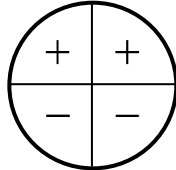
### סיכום כללי:

#### הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות  $(0, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  מתאימות לזוויות של  $270^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $0^\circ$ .

#### הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

טנגנס	קוסינוס	סינוס	רביע
$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	II
$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	III
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	VI
			סימנים

#### זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha} \quad \boxed{\tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha}$$

$$\boxed{\cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha} \quad \boxed{\cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha}$$

כאשר  $k$  הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

## שאלות:

(1) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון. אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120^\circ$	ב. $\cos 150^\circ$
ג. $\tan 160^\circ$	ד. $\cot 130^\circ$
ה. $\sin 215^\circ$	ו. $\cos 245^\circ$
ז. $\tan 230^\circ$	ח. $\cot 200^\circ$
ט. $\sin 300^\circ$	י. $\cos 310^\circ$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150^\circ$	ב. $\cos 210^\circ$	ג. $\tan 120^\circ$
ד. $\sin 330^\circ$	ה. $\tan 225^\circ$	ו. $\sin 315^\circ$
ז. $\cos 120^\circ$	ח. $\tan(-30^\circ)$	ט. $\cos(-45^\circ)$
י. $\sin 510^\circ$	יא. $\cos 930^\circ$	יב. $\tan(-225^\circ)$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

$$\begin{aligned} \text{א. } & (\sin 240^\circ \cdot \tan 150^\circ + \cos(-60^\circ))^2 \\ \text{ב. } & 8\sin^2 150^\circ \cdot \tan 135^\circ - 2 \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos(-135^\circ) \\ \text{ג. } & \frac{\cot 225^\circ}{\sin(-225^\circ) - \cos 135^\circ} + \tan^2 210^\circ \end{aligned}$$

(4) הוכח כי אם  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $\gamma$  הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

$$\begin{aligned} \text{א. } & \sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma \\ \text{ב. } & \sin\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

**תשובות סופיות:**

(1) א.  $\sin 60^\circ$     ב.  $-\cos 30^\circ$     ג.  $-\tan 20^\circ$     ד.  $-\cot 50^\circ$

ה.  $-\sin 35^\circ$     ו.  $-\cos 65^\circ$     ז.  $\tan 50^\circ$     ח.  $\cot 20^\circ$

ט.  $-\sin 60^\circ$     י.  $\cos 50^\circ$

(2) א.  $\frac{1}{2}$     ב.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     ג.  $-\sqrt{3}$     ד.  $-\frac{1}{2}$

ה. 1    ו.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$     ז.  $-\frac{1}{2}$     ח.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ט.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     י.  $\frac{1}{2}$     יא.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     יב. -1

(3) א. 1    ב. -1    ג.  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}$

(4) שאלת הוכחה.

## סכום והפרש זוויות:

### סיכום כללי:

סכום והפרש עבור  $\sin(\alpha \pm \beta)$  ו- $\cos(\alpha \pm \beta)$  יחושב לפי:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

סכום והפרש עבור  $\tan(\alpha \pm \beta)$  ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha} \end{aligned}$$

### הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור  $\tan(\alpha \pm \beta)$  ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$ .

### שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

- |                       |                     |                       |
|-----------------------|---------------------|-----------------------|
| א. $\sin 75^\circ$    | ב. $\sin 15^\circ$  | ג. $\sin 105^\circ$   |
| ד. $\sin(-15^\circ)$  | ה. $\cos 75^\circ$  | ו. $\cos 15^\circ$    |
| ז. $\cos(-105^\circ)$ | ח. $\cos 165^\circ$ | ט. $\cos(-195^\circ)$ |

2) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

- א.  $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ$   
 ב.  $5 \cos 50^\circ \cos 20^\circ + 5 \sin 50^\circ \sin 20^\circ$

(3) הוכח את הזהויות הבאות :

א.  $\sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) = \sqrt{3} \cos \alpha$

ב.  $\cos(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \sin \alpha$

ג.  $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

ד.  $\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

(4) נתון:  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \beta = \frac{8}{17}$  ו- $\alpha, \beta$  זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של  $\alpha$  ו- $\beta$  חשב :

א.  $\sin(\alpha + \beta)$

ב.  $\cos(\alpha + \beta)$

ג.  $\tan(\alpha + \beta)$

(5) הוכח את הזהות:  $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$

(6) הוכח את הזהות:  $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \sin 3\alpha + \cos \alpha$

(7) הוכח את הזהות:  $\tan 7\alpha - \tan 5\alpha - \tan 2\alpha = \tan 7\alpha \tan 5\alpha \tan 2\alpha$

(8) הוכח את הזהות:  $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

(9) הוכח את הזהות:  $\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$

(10) הוכח את הזהות הבאה :

$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta + \gamma)$

(11) הוכח כי מתקיים:  $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$ .

(12) הוכח כי מתקיים:  $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$ .

(13) נתון כי:  $\sin 76^\circ = m$ . הבע את  $\sin 31^\circ$  באמצעות  $m$ .

(14) הזוויות  $\alpha$  ו- $\beta$  הן זוויות חדות.

נתון כי:  $\tan \beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$  ו-  $\tan \alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$ .

הראה כי מתקיים:  $\alpha + \beta = 60^\circ$ .

(15) היעזר בנוסחה:  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$  ומצא את  $\tan x$  ו-  $\tan y$ .

אם ידוע כי:  $\tan(x+y) = -3$  ו-  $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$ . הבחן בין שני מקרים.

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ב. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \text{ג. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ד. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \text{ו. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ז. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{ח. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ט. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \text{י. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{יא. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \text{יב. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{יג. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 1 & \text{ב. } \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{84}{85} & \text{ב. } -\frac{13}{85} \\ \text{ג. } -6\frac{6}{13} & \end{array}$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

$$(14) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (m - \sqrt{1-m^2})$$

(15) שאלת הוכחה.

$$(16) \quad 1 \text{ ו-} 2 \text{ או } -\frac{1}{2} \text{ ו-} -1$$

## זווית כפולה:

### סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

### שאלות:

(1) הוכח את הזהויות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & 4\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha \\ \text{ב.} & (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha \\ \text{ג.} & (\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha \\ \text{ד.} & \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha \\ \text{ה.} & \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha \\ \text{ו.} & \frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha \\ \text{ז.} & \cos^2 2\alpha = 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 1 \\ \text{ח.} & \cos 4\alpha = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1 \end{array}$$

(2) הוכח את הזהות:  $\sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$  ע"י כתיבה של  $\sin 3\alpha$

לפי:  $\sin(\alpha + 2\alpha)$  ושימוש בזהויות שנלמדו.

(3) הוכח את הזהות:  $\cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$  ע"י כתיבה של  $\cos 3\alpha$

לפי:  $\cos(\alpha + 2\alpha)$  ושימוש בזהויות שנלמדו.

(4) נתונה זווית חדה  $\alpha$  המקיימת:  $\sin \alpha = \frac{40}{41}$ . מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א.  $\cos \alpha$

ב.  $\tan \alpha$

ג.  $\sin 2\alpha$

ד.  $\cos 2\alpha$

ה.  $\tan 2\alpha$

(5) נתונה זווית חדה  $\alpha$  המקיימת:  $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ . מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א.  $\sin \alpha$ .

ב.  $\cos \alpha$ .

ג.  $\sin 2\alpha$ .

ד.  $\cos 2\alpha$ .

(6) נתונה זווית  $\alpha$  ברביע הראשון וזווית  $\beta$  ברביע השני המקיימות:  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

ו- $\cos \beta = -0.8$ . מבלי למצוא את  $\alpha$  ו- $\beta$  חשב את הביטויים הבאים:

א.  $\sin(\alpha + \beta)$ .

ב.  $\cos(\alpha + \beta)$ .

ג.  $\sin(2\alpha + \beta)$ .

(7) נתון כי  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1.2$  עבור  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . חשב את  $\sin 2\alpha$ .

(8) פשט את הביטוי הבא:  $\sqrt{\frac{1 + \cos 8\alpha}{2}}$

(9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{\sin 16^\circ \cos 16^\circ}{3 - 6 \sin^2 29^\circ}$

(10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{\sin^2 78^\circ - \cos^2 78^\circ}{\sin 66^\circ}$

(11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{5 \tan 15^\circ (1 - 2 \cos^2 15^\circ)}{1 - \tan^2 15^\circ}$

## תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{9}{41} & \text{ב. } 4\frac{4}{9} \\ \text{ג. } \frac{720}{1681} & \text{ד. } -\frac{1519}{1681} \end{array}$$

$$\text{ה. } -\frac{720}{1519}$$

$$(5) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{5}{13} & \text{ב. } \frac{12}{13} \\ \text{ג. } \frac{120}{169} & \text{ד. } \frac{119}{169} \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{16}{65} & \text{ב. } -\frac{63}{65} \\ \text{ג. } -\frac{123}{845} & \end{array}$$

(7) .0.44

(8)  $\cos 4\alpha$ .

(9)  $\frac{1}{6}$ .

(10) .1

(11) .-1.25

## סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

### סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

### הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

### שאלות:

- (1) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos \alpha$
- (2) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 7\alpha - \sin 2\alpha = 2 \sin 2.5\alpha \cos 4.5\alpha$
- (3) הוכח את הזהות הבאה:  $\cos \alpha + \cos 5\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 3\alpha$
- (4) הוכח את הזהות הבאה:  $\cos 5\alpha - \cos 2\alpha = -2 \sin 3.5\alpha \cos 1.5\alpha$
- (5) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha$
- (6) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$
- (7) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin(2\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \sin \beta$
- (8) הוכח את הזהות הבאה:  $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha} = 2 \cos \alpha$

$$(9) \quad \frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = 2 \sin \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(10) \quad \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \tan 2\alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(11) \quad \tan \alpha + \tan 3\alpha = \frac{2 \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(12) \quad \text{פשט את הביטוי: } \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} \quad \text{ומצא את ערכו מבלי להיעזר}$$

$$\text{במחשבון אם ידוע כי } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$$

$$(13) \quad \text{נתון כי } \alpha \text{ ו-} \beta \text{ הן זוויות חדות המקיימות: } \sin \alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \text{ ו-} \sin \beta = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + n^2}$$

$$\text{הראה כי: } \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$(14) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי: } \cos 6\alpha \cos 2\alpha - \cos 5\alpha \cos \alpha = -\sin 7\alpha \sin \alpha$$

$$(15) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי: } \sin 4\alpha \sin 2\alpha - \sin 5\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha \cos \alpha = \cos 2\alpha$$

$$(16) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: } \sin 52.5^\circ \cdot \sin 7.5^\circ$$

$$(17) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: } \frac{\sin 35^\circ \sin 55^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ} - 0.25$$

$$(18) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: } \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

$$(19) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: } \sin 5^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 85^\circ$$

### תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12)  $-\frac{7}{9}$ .

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16)  $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ .

(17) .1

(18)  $\frac{1}{8}$ .

(19)  $\frac{1}{64}$ .

## מכפלת פונקציות:

### סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \end{array} \right.$$

### שאלות:

- (1) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 7\alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}(\sin 8\alpha + \sin 6\alpha)$
- (2) הוכח את הזהות הבאה:  $\cos 11\alpha \sin 3\alpha = \frac{1}{2}(\sin 14\alpha - \sin 8\alpha)$
- (3) הוכח את הזהות הבאה:  $\cos 4\alpha \cos 10\alpha = \frac{1}{2}(\cos 6\alpha + \cos 14\alpha)$
- (4) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 3\alpha \sin 7\alpha = \frac{1}{2}(\cos 4\alpha - \cos 10\alpha)$
- (5) הוכח את הזהות הבאה:  $2 \sin 7\alpha \sin 2\alpha + \cos 9\alpha = \cos 5\alpha$
- (6) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 7\alpha \cos 4\alpha - \sin 4\alpha \cos \alpha = \sin 3\alpha \cos 8\alpha$
- (7) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin \alpha \sin 3\alpha = \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \cos \alpha$
- (8) הוכח את הזהות הבאה:  $2(\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha - \cos 2\beta$
- (9) הוכח את הזהות הבאה:  $\frac{2}{\cot \beta - \tan \alpha} = \tan(\alpha + \beta) - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$

**תשובות סופיות:**

- 1) הוכחה.
- 2) הוכחה.
- 3) הוכחה.
- 4) הוכחה.
- 5) הוכחה.
- 6) הוכחה.
- 7) הוכחה.
- 8) הוכחה.
- 9) הוכחה.

# מכינה יסודית במתמטיקה

## פרק 18 - משוואות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

293	1. משוואות טריגונומטריות כלליות
296	2. משוואות הנפתרות עי טכניקה אלגברית
298	3. משוואות הנפתרות על ידי זהויות יסוד
300	4. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של מעגל היחידה
301	5. משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס
302	6. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות
303	7. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של זווית כפולה
304	8. משוואות מהצורה $a \sin(x) + b \cos(x) = c$
305	9. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש פונקציות
307	10. משוואות עם תחום נתון
308	11. משוואות עם זוויות ברדיאנים
312	12. אי שוויונים טריגונומטריים

## משוואות טריגונומטריות כלליות:

### סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות כאשר  $x$  הוא משתנה ו- $\alpha$  היא זווית נתונה/ידועה:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 360^\circ k$ , $x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \pm \alpha + 360^\circ k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$

כאשר  $k$  מספר שלם.

### שאלות:

(1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

$$\text{א. } \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{ב. } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ג. } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ד. } \sin x = -\frac{1}{2}$$

(2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

$$\text{א. } \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{ב. } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

$$\text{א. } \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ב. } \tan x = -1$$

(4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית):

א.  $\sin x = 0.7$       ב.  $\cos x = -0.6$       ג.  $\tan x = 5$

(5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות):

א.  $\sin 3x = \frac{1}{2}$       ב.  $2 \cos 2x = -\sqrt{3}$

ג.  $\tan 5x = -1$       ד.  $3 \sin 2x = 2$

ה.  $3 \cos 3x = 1$       ו.  $2 \tan 4x = 1$

(6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב):

א.  $\sin(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$       ב.  $\cos(75^\circ - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$       ג.  $\tan(50^\circ - x) = 1.3$

(7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים):

א.  $\sin x = \sin 3x$       ב.  $\sin 2x = \sin(x + 30^\circ)$

ג.  $\sin x = \sin(120^\circ - x)$       ד.  $\cos x = \cos 3x$

ה.  $\cos x = \cos(40^\circ - x)$       ו.  $\tan x = \tan 3x$

ז.  $\tan 2x = \tan(60^\circ - x)$

(8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות):

א.  $\sin x = 0$       ב.  $\sin x = 1$

ג.  $\sin x = -1$       ד.  $\cos x = 0$

ה.  $\cos x = 1$       ו.  $\cos x = -1$

ז.  $\tan x = 0$       ח.  $\tan x = 1$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$     ב.  $x_1 = 45^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 135^\circ + 360^\circ k$
- ג.  $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 240^\circ + 360^\circ k$     ד.  $x_1 = -30^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 210^\circ + 360^\circ k$
- (2) א.  $x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$     ב.  $x_{1,2} = \pm 150^\circ + 360^\circ k$
- (3) א.  $x = 30^\circ + 180^\circ k$     ב.  $x = 135^\circ + 180^\circ k$
- (4) א.  $x_1 = 44.427^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 135.573^\circ + 360^\circ k$     ב.  $x_{1,2} = 126.87^\circ + 360^\circ k$
- ג.  $x = 78.69^\circ + 180^\circ k$
- (5) א.  $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$ ,  $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$     ב.  $x_1 = 75^\circ + 180^\circ k$ ,  $x_2 = -75^\circ + 180^\circ k$
- ג.  $x = -9^\circ + 36^\circ k$     ד.  $x_1 = 20.9^\circ + 180^\circ k$ ,  $x_2 = 69.09^\circ + 180^\circ k$
- ה.  $x_{1,2} = \pm 23.5^\circ + 120^\circ k$     ו.  $x = 6.64^\circ + 45^\circ k$
- (6) א.  $x_1 = 105^\circ + 180^\circ k$ ,  $x_2 = -45^\circ + 180^\circ k$     ב.  $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$ ,  $x_2 = 40^\circ + 120^\circ k$
- ג.  $x = 60^\circ + 180^\circ k$     ד.  $x = -2.431^\circ + 180^\circ k$
- (7) א.  $x_1 = 180^\circ k$ ,  $x_2 = 45^\circ + 90^\circ k$     ב.  $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$
- ג.  $x = 20^\circ + 180^\circ k$     ד.  $x = 90^\circ k$
- ה.  $x = 20^\circ + 180^\circ k$     ו.  $x = 180^\circ k$
- (8) א.  $x = 180^\circ k$     ב.  $x = 90^\circ + 360^\circ k$     ג.  $x = 180^\circ + 360^\circ k$
- ד.  $x = 90^\circ + 180^\circ k$     ה.  $x = 360^\circ k$     ו.  $x = 180^\circ + 360^\circ k$
- ז.  $x = 180^\circ k$     ח.  $x = 45^\circ + 180^\circ k$

## משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

### סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

### טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע"י הוצאת גורם משותף, ע"י נוסחאות הכפל המקוצר וע"י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \quad (2) \qquad \cos^2 x = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\sin x \cos 3x = 0 \quad (4) \qquad \tan^2 2x = 3 \quad (3)$$

$$2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0 \quad (6) \qquad \sin 2x - 2 \sin^2 2x = 0 \quad (5)$$

$$3 \sin^2 x - \sin x = 2 \quad (8) \qquad 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (7)$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x = 3 \quad (10) \qquad 6 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (9)$$

$$\tan^2 x = 4 \tan x - 1 \quad (12) \qquad \tan^2 x - 3 \tan x - 4 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0 \quad (14) \qquad \cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0 \quad (15)$$

## תשובות סופיות:

$$\cdot x_{1,2} = \pm 30^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$\cdot x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = 330^\circ + 360^\circ k, x_4 = 210^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$\cdot x_1 = 30^\circ + 90^\circ k, x_2 = -30^\circ + 90^\circ k \quad (3)$$

$$\cdot x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 60^\circ k \quad (4)$$

$$\cdot x_1 = 90^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k, x_3 = 75^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$\cdot x_1 = 90^\circ + 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (6)$$

$$\cdot x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = 210^\circ + 360^\circ k, x_3 = -30^\circ + 360^\circ k \quad (7)$$

$$\cdot x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = -41.8^\circ + 360^\circ k, x_3 = 221.8^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$\cdot x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = -19.4^\circ + 360^\circ k, x_4 = 199.4^\circ + 360^\circ k \quad (9)$$

$$\cdot x = 360^\circ k \quad (10)$$

$$\cdot x_1 = -45^\circ + 180^\circ k, x_2 = 75.964^\circ + 180^\circ k \quad (11)$$

$$\cdot x_1 = 75^\circ + 180^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k \quad (12)$$

$$\cdot x = 360^\circ k \quad (13)$$

$$\cdot x = 180^\circ + 360^\circ k \quad (14)$$

$$\cdot x = 45^\circ + 90^\circ k, x \neq -45^\circ + 180^\circ k \quad (15)$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	קשרים בין פונקציות
$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$	זוויות משלימות ל- $90^\circ$
$\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$	$\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$	
$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	קשרים בין פונקציות

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x = \cos(x + 45^\circ) \quad (2)$$

$$\sin x = \cos x \quad (1)$$

$$2 \cos^2 x = 3 \sin x \quad (4)$$

$$\cos x = \frac{2}{3} \sin^2 x \quad (3)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \quad (6)$$

$$\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$\sin x - \tan x = 0 \quad (8)$$

$$\sin^2 x + 2 \cos^2 x = 1.5 \quad (7)$$

**תשובות סופיות:**

$$\cdot x = 45^\circ + 180^\circ k \quad \text{(1)}$$

$$\cdot x = 22.5^\circ + 180^\circ k \quad \text{(2)}$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad \text{(3)}$$

$$\cdot x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad \text{(4)}$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad \text{(5)}$$

$$x_1 = 30^\circ + 120^\circ k, x_2 = -90^\circ + 360^\circ k \quad \text{(6)}$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 45^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 135^\circ + 360^\circ k \quad \text{(7)}$$

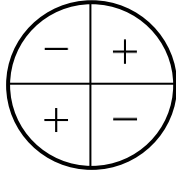
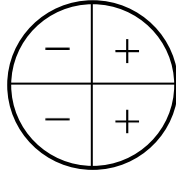
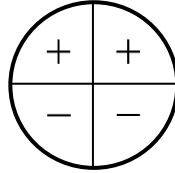
$$\cdot x = 180^\circ k \quad \text{(8)}$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:

טנגנס	קוסינוס	סינוס	רביע
$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	I II III
			סימנים

### זהויות עבור זויות הגדולות מ-360 מעלות:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{array}}, \quad \boxed{\begin{array}{l} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{array}}$$

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \cos 2x = -\cos 3x & \text{(2)} \\ \sin 3x = -\cos(180^\circ - x) & \text{(4)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \sin x = -\sin 3x & \text{(1)} \\ \sin(x + 30^\circ) = -\cos x & \text{(3)} \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 180^\circ + 360^\circ k, x_2 = 36^\circ + 72^\circ k & \text{(2)} \\ x_1 = 22.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 45^\circ + 180^\circ k & \text{(4)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_1 = 90^\circ k, x_2 = -90^\circ + 180^\circ k & \text{(1)} \\ x = 120^\circ + 180^\circ k & \text{(3)} \end{array}$$

## משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

### סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה:  $\sin x = a \cos x$  לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע"י חלוקה ב- $\cos x$  (בתנאי ש- $\cos x \neq 0$ ). כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a \cos x \quad / : \cos x \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = a \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = a$$

$$x = \tan^{-1}(a) + 180^\circ k$$

### הערה:

יש לבדוק האם ערכי  $x$  שמקיימים  $\cos x = 0$  מהווים פתרון למשוואה. אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$3 \sin x = \cos x \quad (2)$$

$$\sin x = 2 \cos x \quad (1)$$

$$2 \sin x = -5 \cos x \quad (4)$$

$$4 \sin x = 7 \cos x \quad (3)$$

$$3 \sin^2 x = \cos^2 x \quad (6)$$

$$\sin^2 x = 8 \cos^2 x \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$. x = 63.43^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 18.43^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 60.25^\circ + 180^\circ k \quad (3)$$

$$. x = -68.19^\circ + 180^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 70.52^\circ + 180^\circ k, x_2 = -70.52^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 180^\circ k, x_2 = -30^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

## משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$	סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin(x + 45^\circ) \sin(x - 45^\circ) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$3 \cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x \quad (4)$$

$$2 \sin x = \sin(60^\circ - x) \quad (1)$$

$$\frac{\cos 3x}{\sin x} - \frac{\sin 3x}{\cos x} = 2 \quad (3)$$

### תשובות סופיות:

$$. x = 19.11^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 90^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 15^\circ + 60^\circ k \quad (3)$$

$$. x_{1,2} = \pm 60^\circ + 180^\circ k, x_3 = 90^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	סינוס זווית כפולה
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$	קוסינוס זווית כפולה

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 \sqrt{2} \sin x + \sin 2x = 0 & \text{(2)} & \sin x - \sin 2x = 0 & \text{(1)} \\
 2 \cos 2x + \sin 4x = 0 & \text{(4)} & 4 \cos x = \sin 2x & \text{(3)} \\
 \cos 2x = 2 \sin x & \text{(6)} & 3 \cos x - \cos 2x = 0 & \text{(5)} \\
 2 \sin^2 x = \cos 2x + 2 & \text{(8)} & \sin x + \cos 2x = 1 & \text{(7)}
 \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 135^\circ + 360^\circ k & \text{(2)} & x_1 = 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 120^\circ k & \text{(1)} \\
 x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 135^\circ + 180^\circ k & \text{(4)} & x = 90^\circ + 180^\circ k & \text{(3)} \\
 x_1 = 21.1^\circ + 360^\circ k, x_2 = 158.9^\circ + 360^\circ k & \text{(6)} & x_{1,2} = \pm 106.307^\circ + 360^\circ k & \text{(5)} \\
 x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 360^\circ k, x_3 = 150^\circ + 360^\circ k & \text{(7)} & & \\
 x_1 = -60^\circ + 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 120^\circ + 360^\circ k, x_4 = 240^\circ + 360^\circ k & \text{(8)} & &
 \end{array}$$

## משוואות מהצורה: $a \sin(x) + b \cos(x) = c$

### סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה:  $a \sin x + b \cos x = c$  לצורה:  $\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$ .

מציאת זווית  $\alpha$  המקיימת:  $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$  תאפשר לכתוב:  $\sin x + \tan \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a}$ .

שימוש בזהות:  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  ובזהות:  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$  יובילו:

$$\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \quad / \cdot \cos \alpha$$

$$\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

אם נסמן:  $\frac{c}{a} \cos \alpha = k$  נקבל את המשוואה:  $\sin(x + \alpha) = k$  כאשר  $\alpha$  ו- $k$  ידועים. מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5 \cos x - 6 \sin x = 1 \quad (2)$$

$$10 \sin x + 3 \cos x = 5 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \sin 2x + 3 \cos 2x = \sqrt{12} \quad (3)$$

$$\cos x + \cos(60^\circ + x) = \sqrt{2} + \cos(60^\circ - x) \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$x_1 = 11.91^\circ + 360^\circ k, x_2 = 134.69^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$x = 15^\circ + 180^\circ k \quad (3) \quad x_1 = 227.156^\circ + 360^\circ k, x_2 = 32.44^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = -60^\circ + 720^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = -105^\circ + 360^\circ k, x_2 = 15^\circ + 360^\circ k \quad (5)$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$	<b>סכום והפרש פונקציות עבור סינוס</b>
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	<b>סכום והפרש פונקציות עבור קוסינוס</b>

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x + \sin 3x = \sin 2x \quad (1)$$

$$\cos 2x - \cos 6x = \sin 2x \quad (2)$$

$$\sin x + \sin 3x = 4 \sin^3 x \quad (3)$$

$$\sin 6x - \sin 4x = 1 - \cos 2x \quad (4)$$

$$(\sin 5x + \sin 7x)^2 = (\cos 5x + \cos 7x)^2 \quad (5)$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos 3x + \cos 5x = 1 \quad (6)$$

$$1 + \sin x + \sin 7x = \cos 8x \quad (7)$$

$$2 \sin 3x (\cos 2x + \cos x) = \sin x + \sin 2x \quad (8)$$

$$\sin(x + 60^\circ) - \sin x = \sin(2x + 60^\circ) - \sin 2x \quad (9)$$

$$\cos^2 3x - \cos^2 x = \sin x \cos x \quad (10)$$

$$\sin 8x \sin 2x + \cos 10x = 0 \quad (11)$$

$$\cos x + 3 \sin x = 1 + 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (12)$$

$$4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0 \quad (13)$$

$$4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1 \quad (14)$$

### תשובות סופיות:

$$x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (1)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 180^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = 37.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (3)$$

$$x_1 = 15^\circ + 60^\circ k, x_2 = 180^\circ k, x_3 = -22.5^\circ + 90^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = 36^\circ k, x_2 = \left(\frac{180}{7}\right)^\circ + \left(\frac{180}{7}\right)^\circ k \quad (5)$$

$$x_{1,2} = \pm 30^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

$$x_1 = -\left(12\frac{6}{7}\right)^\circ k + \left(51\frac{3}{7}\right)^\circ k, x_2 = 45^\circ k \quad (7)$$

$$x_1 = 40^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$x_1 = -20^\circ + 120^\circ k, x_2 = 360^\circ k \quad (9)$$

$$x_1 = 52.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = -7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (10)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 11.25^\circ + 22.5^\circ k \quad (11)$$

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad (12)$$

$$x_1 = 7.5^\circ + 15^\circ k, x_2 = 90^\circ k \quad (13)$$

$$x_1 = 60^\circ + 180^\circ k, x_2 = 22.5^\circ + 45^\circ k \quad (14)$$

## משוואות עם תחום נתון:

### סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- $k$  ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

### שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

$$[0^\circ : 180^\circ], 8 \sin x - 4 = 0 \quad (1)$$

$$[-90^\circ : 90^\circ], \sin 2x = \sin(x + 60^\circ) \quad (2)$$

$$[-90^\circ : 90^\circ], 3 \cos(2x + 30^\circ) + 1 = 0 \quad (3)$$

$$[0^\circ : 360^\circ], \cos(50^\circ - x) = -\cos x \quad (4)$$

$$[-30^\circ : 30^\circ], 2 \sin 3x - 5 \cos 3x = 0 \quad (5)$$

$$[0^\circ : 180^\circ], 2 \cos^2 3x = \sin 6x + 1 \quad (6)$$

$$[-180^\circ : 180^\circ], \cos 4x + 1 = 3 \sin 2x \quad (7)$$

$$[-180^\circ : 180^\circ], \cos 2x + \cos^2 x + \sin x = 0 \quad (8)$$

### תשובות סופיות:

$$x = 30^\circ, 150^\circ \quad (1)$$

$$x = -80^\circ, 40^\circ, 60^\circ \quad (2)$$

$$x = 39.736^\circ, -69.736^\circ \quad (3)$$

$$x = 115^\circ, 295^\circ \quad (4)$$

$$x = 22.733^\circ \quad (5)$$

$$x = 7.5^\circ, 37.5^\circ, 67.5^\circ, 97.5^\circ, 127.5^\circ, 157.5^\circ \quad (6)$$

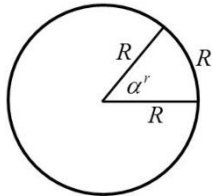
$$x = -165^\circ, -105^\circ, 15^\circ, 75^\circ \quad (7)$$

$$x = -138.19^\circ, -41.81^\circ, 90^\circ \quad (8)$$

## משוואות עם זוויות ברדיאנים:

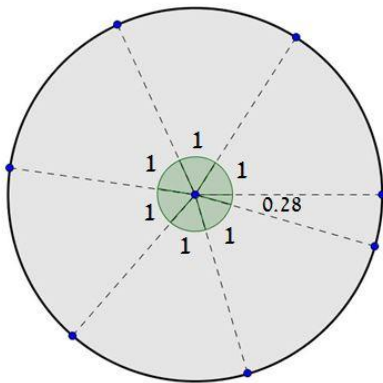
**סיכום כללי:**

**הגדרת הרדיאן:**



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו  $R$ , תימצאנה  $2\pi$  רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא  $P = 2\pi \cdot R$ .



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל- $2\pi = 6.28$  קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל. הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד, כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן. מקבלים  $2\pi$  רדיאנים.

**קשר בין רדיאנים למעלות:**

- נוסחת מעבר מזווית  $\alpha^\circ$  (במעלות) לזווית  $\alpha^r$  (ברדיאנים):  $\alpha^r = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$
- נוסחת מעבר מזווית  $\alpha^r$  (ברדיאנים) לזווית  $\alpha^\circ$  (במעלות):  $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha^r$

**פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:**

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריונומטריות היסודיות כאשר  $x$  הוא משתנה ו- $\alpha$  היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 2\pi k$ , $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \pm \alpha + 2\pi k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + \pi k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + \pi k$

כאשר  $k$  מספר שלם.

**שאלות:**

**(1)** המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

- |                |                |                 |                  |
|----------------|----------------|-----------------|------------------|
| א. $30^\circ$  | ב. $90^\circ$  | ג. $75^\circ$   | ד. $120^\circ$   |
| ה. $210^\circ$ | ו. $315^\circ$ | ז. $18^\circ$   | ח. $285^\circ$   |
| ט. $-15^\circ$ | י. $-80^\circ$ | יא. $510^\circ$ | יב. $-390^\circ$ |

**(2)** המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

- |                       |                       |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| א. $\pi$              | ב. $2\pi$             | ג. $4\pi$             | ד. $1.5\pi$           |
| ה. $\frac{1}{2}\pi$   | ו. $\frac{\pi}{4}$    | ז. $\frac{\pi}{6}$    | ח. $\frac{1}{18}\pi$  |
| ט. $\frac{13}{18}\pi$ | י. $\frac{19}{12}\pi$ | יא. $1\frac{1}{6}\pi$ | יב. $2\frac{1}{4}\pi$ |

**(3)** פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

- |   |   |
|---|---|
| א. $\left[0:\frac{1}{3}\pi\right], 2\sin 3x=1$                            | ב. $[0:\pi], \sqrt{3}+2\cos x=0$  |
| ג. $[0:2\pi], 3-3\tan\frac{x}{2}=0$                                       | ד. $[0:\pi], \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$                            |
| ה. $\left[0:\frac{1}{2}\pi\right], 4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2=0$ | ו. $\left[-\frac{5\pi}{18}:\frac{5\pi}{18}\right], \sin x=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2x\right)$ |
| ז. $\left[0:\frac{\pi}{3}\right], 5-5\tan(4x-0.1\pi)=0$                   | ח. $\left[-\frac{\pi}{4}:\frac{\pi}{4}\right], \sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0.7$         |

**(4)** פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

- |  |   |
|--|---|
| א. $\left[0:\frac{\pi}{2}\right], \sin^2 x=\frac{3}{4}$                  | ב. $\left[-\frac{\pi}{8}:\frac{\pi}{8}\right], 16\cos^2 2x-1=0$         |
| ג. $[0:\pi], 2\tan^2 x-18=0$   | ד. $\left[-\frac{\pi}{3}:\frac{\pi}{3}\right], 3\sin x\cos x+3\cos x=0$ |
| ה. $\left[-\frac{\pi}{2}:\frac{\pi}{2}\right], \sin^2 x-5\sin x\cos x=0$ | ו. $[-\pi:\pi], 2\sin^2 x-5\sin x+2=0$                                  |
| ז. $[-\pi:0], 4\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x-1=0$                              | ח. $[0:2\pi], \tan^2 x-7\tan x+10=0$                                    |

(5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א.  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ב.  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $\tan x = 4 \sin x$

ג.  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $2 \sin^2 x = 3 \cos x$

(6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א.  $[-\pi : \pi]$ ,  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב.  $[0 : \pi]$ ,  $\sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג.  $[0 : \pi]$ ,  $\sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד.  $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\tan x = -\tan 2x$

(7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א.  $-\pi \leq x \leq \pi$ ,  $\sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב.  $[-\pi : \pi]$ ,  $\cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$

ג.  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד.  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $\cos 4x + \sin^2 x = 1$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\frac{\pi}{6}$  ב.  $\frac{\pi}{2}$  ג.  $\frac{5\pi}{12}$  ד.  $\frac{2\pi}{3}$  ה.  $\frac{7\pi}{6}$   
 ו.  $\frac{7\pi}{4}$  ז.  $\frac{\pi}{10}$  ח.  $\frac{19\pi}{12}$  ט.  $-\frac{\pi}{12}$  י.  $-\frac{4\pi}{9}$   
 יא.  $\frac{17\pi}{6}$  יב.  $-\frac{13\pi}{6}$
- (2) א.  $180^\circ$  ב.  $360^\circ$  ג.  $720^\circ$  ד.  $270^\circ$  ה.  $90^\circ$   
 ו.  $45^\circ$  ז.  $30^\circ$  ח.  $10^\circ$  ט.  $130^\circ$  י.  $285^\circ$   
 יא.  $210^\circ$  יב.  $405^\circ$
- (3) א.  $\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}$  ב.  $x = \frac{5\pi}{6}$  ג.  $x = \frac{\pi}{2}$  ד.  $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$   
 ה.  $x = 0$  ו.  $x = \frac{2\pi}{9}$  ז.  $x = 0.0875\pi$  ח.  $x = 0.224\pi$
- (4) א.  $x = \frac{\pi}{3}$  ב.  $\phi$  ג.  $x = 0.398\pi, 0.602\pi$  ד.  $\phi$   
 ה.  $x = 0, 0.437\pi$  ו.  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$   
 ז.  $x = -\frac{\pi}{4}, -0.615\pi$  ח.  $x = 0.352\pi, 0.437\pi, 1.352\pi, 1.437\pi$
- (5) א.  $x = \frac{\pi}{8}$  ב.  $x = 0, 0.42\pi, \pi$  ג.  $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
- (6) א.  $x = \frac{\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}$  ב.  $x = \frac{23\pi}{72}, \frac{59\pi}{72}$
- ג.  $x = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{10}$  ד.  $x = \pm \frac{\pi}{3}, 0$
- (7) א.  $x = \pm \frac{\pi}{2}, -0.148\pi, 0.852\pi$  ב.  $x = -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$   
 ג.  $x = \pm \frac{\pi}{3}$  ד.  $x = 0, 0.38\pi, 0.61\pi, \pi$

## אי שוויונים טריגונומטריים:

### סיכום כללי:

- כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:
1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
  2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
  3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
    - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
    - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
  4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

### הערה:

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$[0, 1.5\pi] \quad 2 \cos x - \sqrt{3} \geq 0 \quad \text{(2)} \qquad [0, 180^\circ] \quad \sin x < \frac{1}{2} \quad \text{(1)}$$

$$[0, \pi] \quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0 \quad \text{(4)} \qquad (-90^\circ, 90^\circ) \quad 2 \cos^2 x + \sin x \geq 1 \quad \text{(3)}$$

$$(0 < x < \pi) \quad \sin x + \sqrt{3} \cos x \geq 1 \quad \text{(6)} \qquad [0^\circ, 180^\circ] \quad 1 < 2 \sin(x + 10^\circ) < \sqrt{3} \quad \text{(5)}$$

$$(-\pi < x < \pi) \quad |\tan(x)| > \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{(8)} \qquad [0, 2\pi] \quad \tan x + \cot x > 0 \quad \text{(7)}$$

**תשובות סופיות:**

$$. 0^\circ \leq x < 30^\circ, 150^\circ \leq x \leq 180^\circ \quad (1)$$

$$. 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$. -30^\circ \leq x < 90^\circ \quad (3)$$

$$. \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3} \quad (4)$$

$$. 20^\circ < x < 50^\circ, 110^\circ < x < 140^\circ \quad (5)$$

$$. 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

$$. 0 < x < \frac{\pi}{2}, \pi < x < \frac{3}{2}\pi \quad (7)$$

$$. -\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}, x \neq -\frac{\pi}{2} : \text{או} \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}, x \neq \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

# מכינה יסודית במתמטיקה

פרק 19 - טריגונומטריה במישור

תוכן העניינים

- 314 ..... 1. שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים
- 322 ..... 2. שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש
- 331 ..... 3. שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה
- 335 ..... 4. שאלות מסכמות

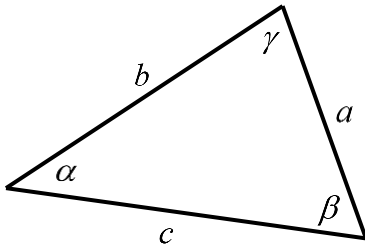
## שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים:

### סיכום כללי:

#### משפט הסינוסים:

במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



#### משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן

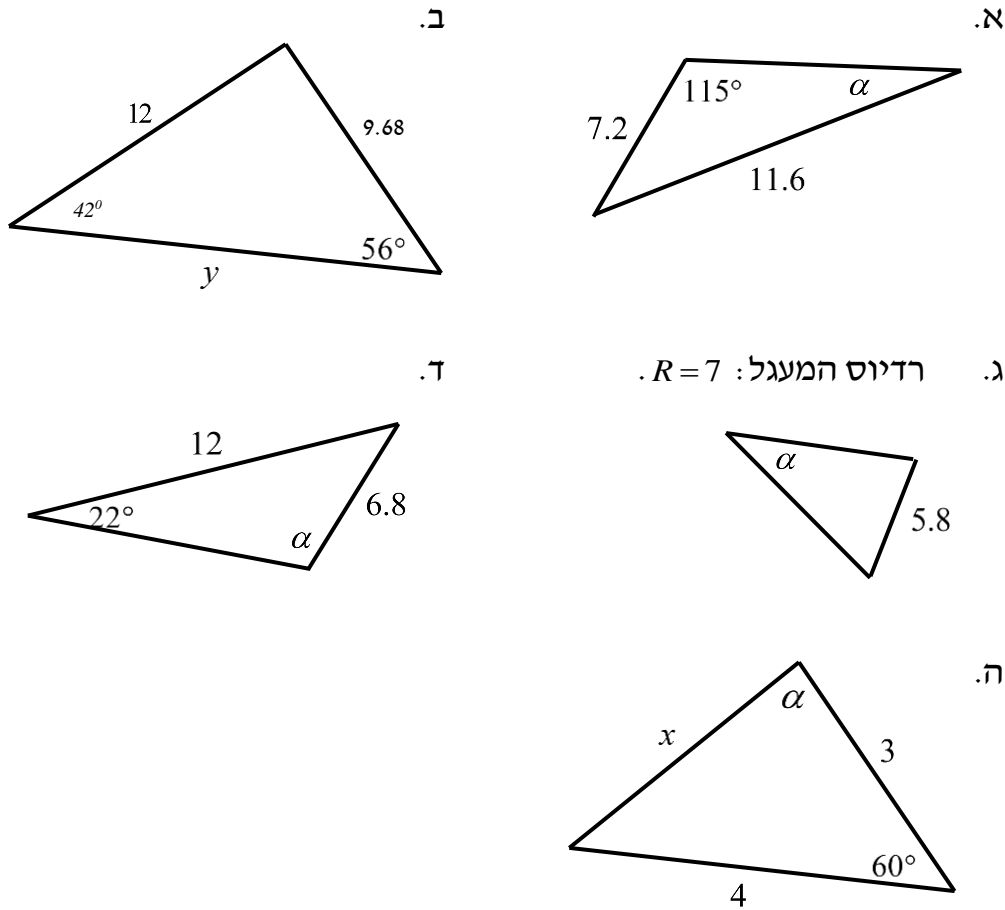
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{או} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

#### מתי נשתמש בכל משפט:

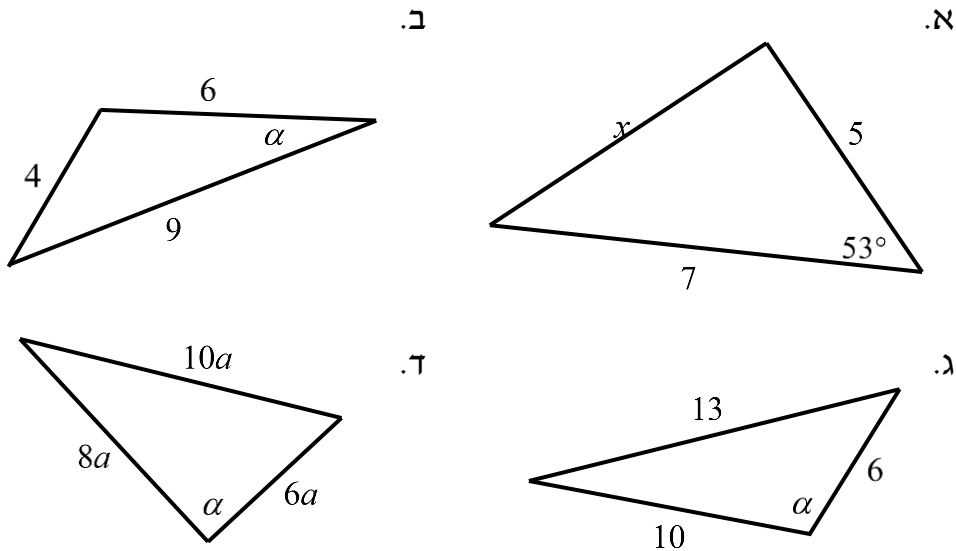
- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
  - א. נתונות שתי זוויות וצלע.
  - ב. נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
  - ג. נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
  - א. נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
  - ב. נתונות שלוש צלעות.
- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

**שאלות:**

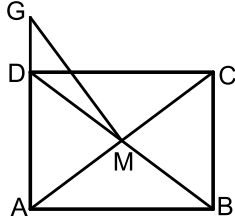
1 מצא את ערכו של  $a/x/y$  במשולשים הבאים (R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):



2 מצא את ערכו של  $\alpha/x$  במשולשים הבאים:

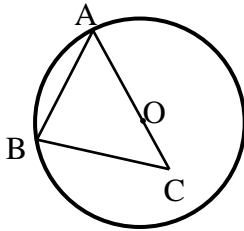


- (3) נתון משולש שווה שוקיים  $ABC$  ( $AB=AC$ ) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ וגודלה של זווית הבסיס בו הוא  $70^\circ$ .  $CD$  הוא חוצה זווית הבסיס  $C$ . מצא את אורכו של הקטע  $AD$ .



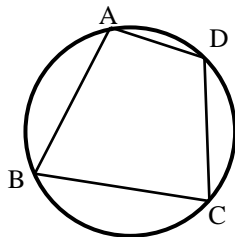
- (4) אלכסוני המלבן  $ABCD$  נפגשים בנקודה  $M$ . הנקודה  $G$  נמצאת על המשך הצלע  $AD$ . נתון:  $AD = 3$  ס"מ,  $AB = 4$  ס"מ,  $DG = 1.2$  ס"מ. מצא את גודלו של הקטע  $GM$ .

- (5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ. חשב את זוויות המרובע.

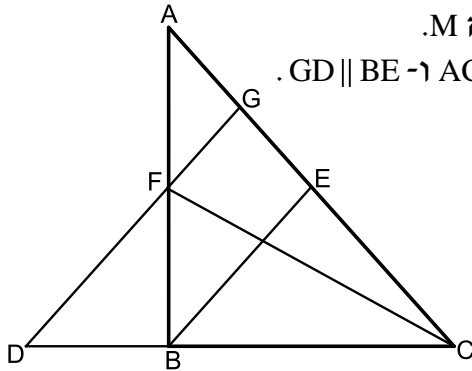


- (6) הצלע  $AB$  במשולש  $ABC$  היא מיתר במעגל שמרכזו  $O$ . הצלע  $AC$  עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט. נתון:  $BC = 9$  ס"מ,  $OC = 3$  ס"מ,  $\angle BAC = 38^\circ$ . מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע  $AB$ .

- (7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של  $30^\circ$  עם צלע אחת של המקבילית וזווית של  $61.05^\circ$  עם הצלע הסמוכה לה. אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה. חשב את היקף המקבילית.



- (8) המרובע  $ABCD$  חסום במעגל. נתון:  $AB = 6$  ס"מ,  $BC = 9$  ס"מ,  $CD = 10$  ס"מ ו- $AD = 4$  ס"מ. מצא את אורכם של האלכסון  $AC$  ושל רדיוס המעגל.



9) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.

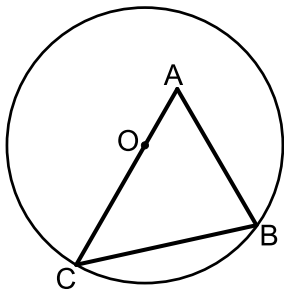
מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים:  $AC = DC$  ו-  $GD \parallel BE$ .

א. הוכח:  $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$ .

ב. נתון כי:  $ME = 4$  ס"מ. חשב את אורך הקטע DG.

ג. נתון כי:  $\angle ACD = 48.189^\circ$ . הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.

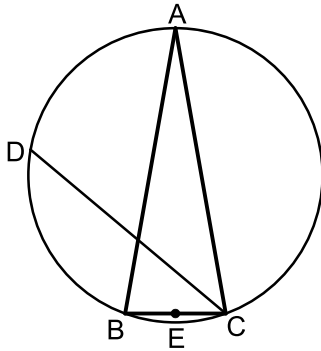
10) נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא  $60^\circ$ .



א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD כך שנוצר המשולש ADB. חשב את זווית ADB.

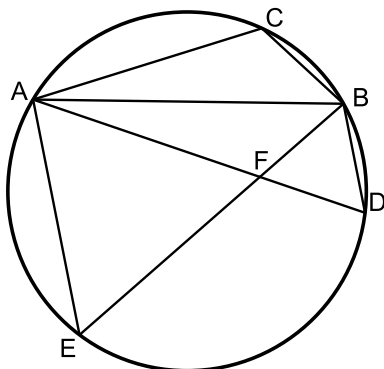
11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ) החסום במעגל שרדיוסו R. הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D היא אמצע הקשת  $\widehat{AB}$ . ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא  $80^\circ$ .



א. הבע באמצעות R את הקטעים CD ו-DE.

ב. r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED. הבע באמצעות R את r.

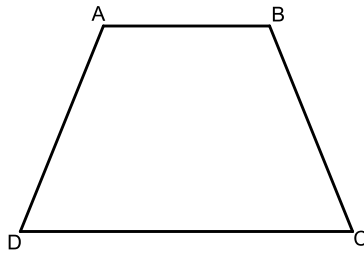
12) AC, AB ו-AD הם מיתרים במעגל המקיימים:  $\widehat{BC} = \widehat{BD}$ . מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את המיתרים BE ו-AE. המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F. נתון כי:  $AC = AF = EF$ .



א. הוכח:  $\triangle ABF \cong \triangle ABC$ .

ב. נתון גם:  $\angle CAB = 3 \cdot \angle DAE$ . הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.

**13** המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ( $AB \parallel CD, AD = BC$ ).

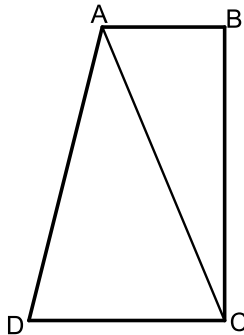


מידות הטרפז הן:

$AB = 6$  ס"מ,  $BC = 8$  ס"מ,  $CD = 12$  ס"מ.

- מצא את זווית C (עגל למספר שלם).
- מצא את אורך אלכסון הטרפז.
- חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

**14** המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ( $AB \parallel CD, \angle B = 90^\circ$ ).

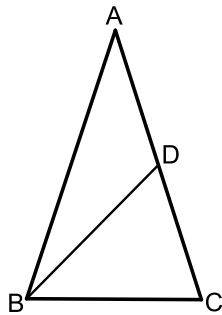


מסמנים את הבסיס:  $AB = t$  וידוע כי:  $AD = 3t, DC = 1.6t$ .  
היקף הטרפז הוא: 40 ס"מ.

- הבע באמצעות  $t$  את אורך האלכסון AC.
- ידוע גם כי:  $\angle D = 60^\circ$ .
- i. חשב את אורך הקטע AC.
- ii. חשב את שטח הטרפז.

**15** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ) בעל זווית

ראש  $36^\circ$  החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.



א. מצא את אורך הבסיס BC במשולש.

ב. חשב את אורך התיכון BD.

ג. מסמנים:

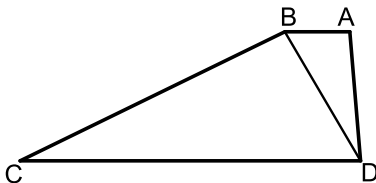
$r_1$  - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.

$r_2$  - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

$$\frac{r_1}{r_2} = 2 \cos 36^\circ$$

הוכח את היחס הבא:

**16** המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ).



מעבירים את האלכסון BD המקיים:  $\angle BCD = \angle ADB$ .

נתון כי:  $AB = 5$  ס"מ,  $AD = 10$  ס"מ,  $CD = 20$  ס"מ.

כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.

א. הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.

ב. חשב את זווית C.

ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.

חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

17 באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.

ידוע כי:  $\angle D = 90^\circ$ .

נסמן את הצלעות באופן הבא:  $AB = 6x$ ,  $BC = 5x$ ,  $CD = 8x$ ,  $AD = 3x$ .

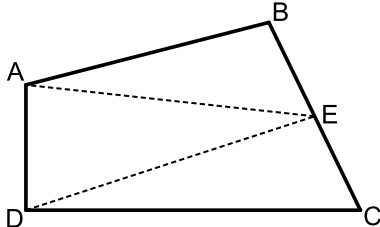
א. חשב את זווית BCD.

ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.

מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך

ש-DE מקביל ל-AB.

חשב את היחס הבא:  $\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}$ .



18 מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA, OB, OC ו-OD.

ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- $\alpha$ .

המשולש COD הוא ישר זווית  $\angle CDO = 90^\circ$ .

נתונים האורכים:  $BO = 9$ ,  $DO = 10$ .

מסמנים:  $BC = 1.4m$ ,  $CD = 1.5m$ .

א. הבע באמצעות m את  $\sin \alpha$ .

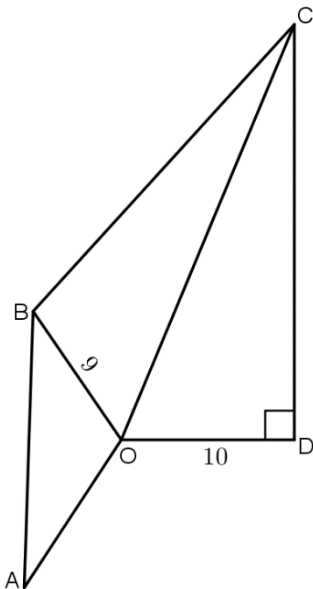
(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי:  $AB = m$ .

מצא את m אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם

את המשולש AOB הוא  $8\frac{2}{3}$ .

ג. חשב את זווית BOC.



19 במשולש ABC הזווית A היא בת  $60^\circ$ .

מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית:  $\angle ADB = 60^\circ$ .

ידוע כי  $AB = \sqrt{28}$  וכי הצלע AD במשולש ABD

גדולה פי 1.5 מהצלע BD.

א. מצא את אורך הצלע BD.

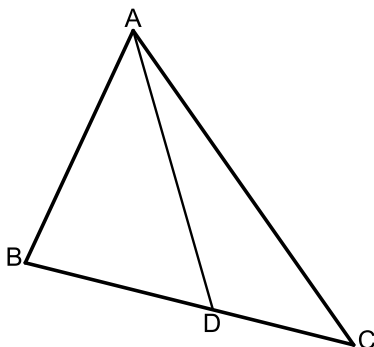
ב. היקף המשולש ABC הוא:  $P = 5\sqrt{7} + 7$ .

i. סמן:  $DC = t$  והבע באמצעות t

את אורך הצלע AC.

ii. מצא את t.

ג. חשב את שטח המשולש ABC.



**(20)** מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.

הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.

הנקודות C, E ו-F נמצאות על אותו הישר.

ידוע כי המשולשים ABD, DEF ו-DCE הם

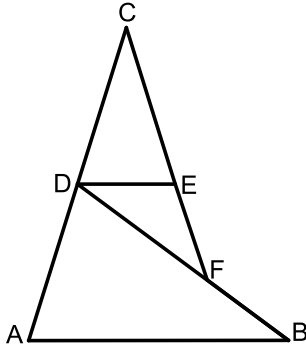
שווי שוקיים ( $AB = BD, DC = CE, EF = DE$ ).

נתון כי:  $AD = 8$ .

א. חשב את אורך הקטע BF.

ב. מחברים את הנקודות B ו-C.

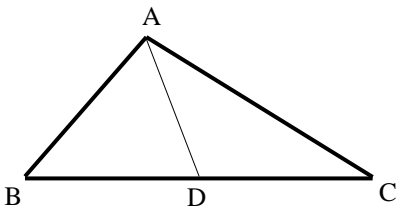
חשב את אורך הצלע BC.



**(21)** בשרטוט נתון:  $AB = 6$  ס"מ,  $AC = 8$  ס"מ,

$AD = 5$  ס"מ. הנקודה D היא אמצע הצלע BC.

חשב את אורך הקטע BC.



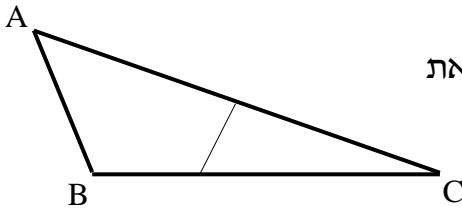
**(22)** הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.

הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת

על הצלע BC כך שמתקיים  $DC = 2BD$ .

נתון:  $BC = b, AB = a$ .

הבע באמצעות a ו-b את אורך הקטע DE.

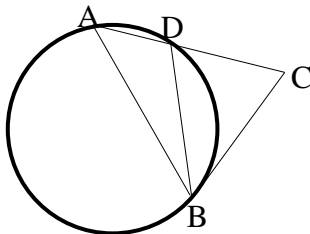


**(23)** המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R.

המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B

נפגשים בנקודה C. נתון:  $\angle C = \alpha, \angle ADB = \beta$ .

הבע באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורך הקטע BC.

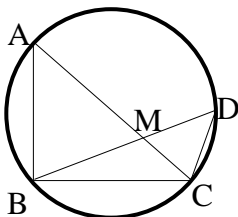


**(24)** AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R,

שנפגשים בנקודה M. זווית  $\angle B$  היא זווית ישרה.

נתון:  $DC = q, DM = p, AB = k$ .

הבע באמצעות R, k, p ו-q את אורך הקטע MC.



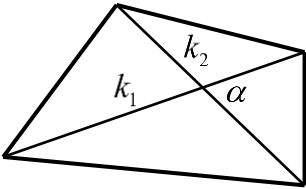
## תשובות סופיות:

- א.  $\alpha = 34.231^\circ$     ב.  $14.33$  ס"מ =  $y$     ג.  $\alpha = 155.526^\circ$  או  $\alpha = 24.474^\circ$     (1)
- ד.  $\alpha = 41.382^\circ$  או  $\alpha = 138.618^\circ$     ה.  $3.606$  ס"מ =  $x$ ,  $\alpha = 73.898^\circ$
- א.  $5.646$  ס"מ =  $x$     ב.  $\alpha = 20.742^\circ$     ג.  $\alpha = 105.962^\circ$     ד.  $\alpha = 90^\circ$     (2)
- AD =  $13.064$  ס"מ    (3)
- GM =  $3.360$  ס"מ    (4)
- $66.444^\circ$ ,  $113.556^\circ$ ,  $41.810^\circ$ ,  $138.190^\circ$     (5)
- $R = 9.242$  ס"מ,  $AB = 14.56$  ס"מ    (6)
- $P = 22$  ס"מ    (7)
- $R = 5.395$  ס"מ,  $AC = 10.790$  ס"מ    (8)
- $DG = 18$     (9)
- א.  $10.5$  ס"מ =  $R$     ב.  $24.32^\circ$     (10)
- א.  $DE = 1.48R$ ,  $CD = R\sqrt{3}$     ב.  $r = 1.15R$     (11)
- א.  $68^\circ$     ב.  $11.66$  ס"מ    ג.  $6.29$  ס"מ =  $R$     (13)
- א.  $AC = \sqrt{32.36t^2 - 448t + 1600}$     ב. i.  $13$  ס"מ    ii.  $78$  סמ"ר    (14)
- א.  $9.4$  ס"מ    ב. i.  $10$  ס"מ    (15)
- א.  $\sphericalangle C = 28.9^\circ$     ב.  $R = 13.77$     ג.    (16)
- א.  $64.04^\circ$     ב.  $\frac{S_{ABE}}{S_{ECD}} = 0.817$     (17)
- א.  $\sin \alpha = \frac{1.5m}{\sqrt{100 + 2.25m^2}}$     ב.  $m = 16$     ג.  $56.94^\circ$     (18)
- א.  $4$     ב. i.  $1.5\sqrt{28} + 3 - t$     ii.  $3$     ג.  $S = 18.18$     (19)
- א.  $4.94$  ס"מ    ב.  $17.19$  ס"מ    (20)
- BC =  $10$  ס"מ    (21)
- $DE = \sqrt{\frac{1}{9}b^2 - a^2}$     (22)
- $MC = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{pqk}{R}}$     (24)
- $BC = \frac{2R \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha}$     (23)

## שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש:

סיכום כללי:

שטחים של משולשים ומרובעים:

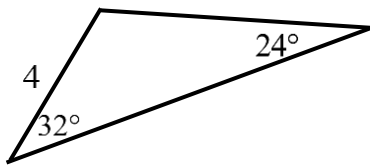


- שטח משולש ניתן לחישוב ע"י:  $S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסונו:  $S = \frac{k_1 k_2 \sin \alpha}{2}$

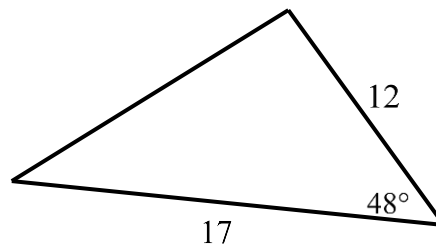
שאלות:

25) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

ב.



א.



26) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של 15° עם הבסיסים.

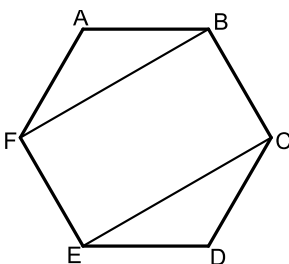
27) אורכו של מלבן הוא  $m$  ורוחבו  $n$ . הזווית שבין אלכסונו המלבן היא  $\theta$ .

$$\sin \theta = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \text{ : הוכח כי מתקיים}$$

28) במשולש ישר זווית  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ),  $BD$  חוצה את הזווית  $\angle B$ .

נתון:  $\angle A = \alpha$ ,  $AB = m$ .

הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $m$  את שטח המשולש  $BCD$ .



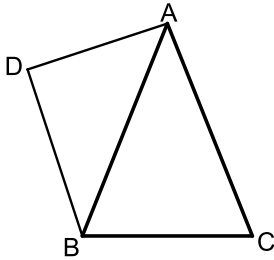
29) באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא  $S$ .

א. הבע באמצעות  $S$  את אורך צלע המשושה.

ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן  $BFEC$ .

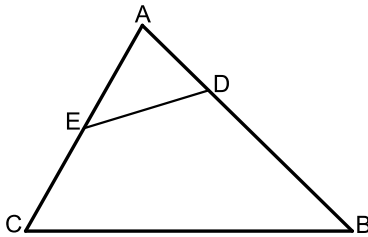
הבע באמצעות  $S$  את שטח המלבן.

**30** המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש  $\alpha$ ,  $(AB = AC)$ . אורך הבסיס BC הוא  $k$ .



- על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו  $\angle D = 90^\circ$ .
- הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את אורך שוק המשולש ABC.
  - הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$ .
  - וכי:  $\angle ABD = 40^\circ$ . מצא את זוויות המשולש ABC.
  - חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי  $k = 6$ .

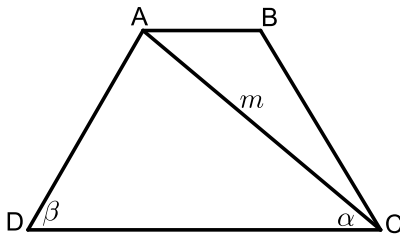
**31** במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.



- הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D מקיימת:  $AD = 3$  ס"מ.
- ידוע כי:  $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$ .

- מצא את אורך הקטע DE.
- חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
- חשב את שטח המרובע BCED.

**32** המרובע ABCD הוא טרפז  $(AB \parallel CD)$ . הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.



מסמנים:  $AC = m$ ,  $\angle ACD = \alpha$ ,  $\angle ADC = \beta$ .

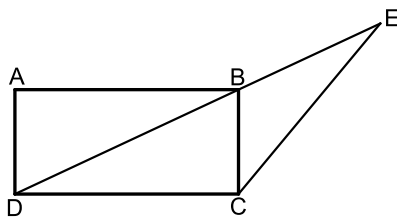
- הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $m$  את אורך הבסיס הגדול DC.

ב. נתון כי האלכסון AC מקיים:  $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = 3$ .

הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $m$  את הבסיס AB.

ג. חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי:  $\beta = 60^\circ$ ,  $\alpha = 40^\circ$  ו- $m = 8$ .

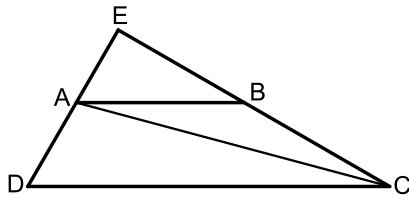
**33** המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.



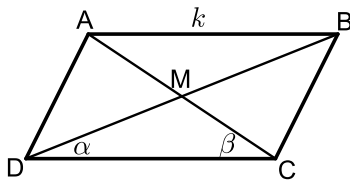
מחברים את הנקודה E עם הקודקוד C.

ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא  $115^\circ$ .

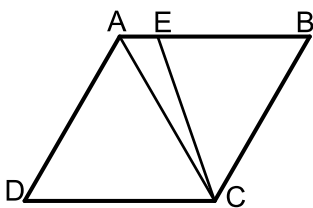
- מצא את אורך הקטע CE.
- מצא את אורך האלכסון BD.
- חשב את שטח המשולש DCE.



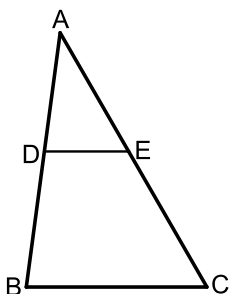
- (34)** המרובע ABCD הוא טרפז  $(AB \parallel CD)$ . ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם בנקודה E. ידוע כי:  $DE \perp CE$ . מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C. מסמנים את הבסיס הגדול DC ב- $k$  ואת:  $\angle ACD = \alpha$ .
- הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את הבסיס הקטן AB.
  - הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABC.
  - חשב את שטח המשולש ABC כאשר:  $\alpha = 15^\circ$ ,  $k = 12$  ס"מ.



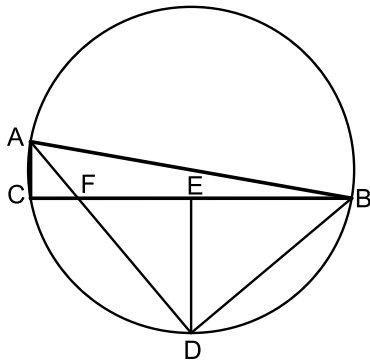
- (35)** נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים בנקודה M כמתואר באיור. מסמנים:  $AB = k$ ,  $\angle BDC = \alpha$ ,  $\angle ACD = \beta$ .
- הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים:  $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ .
  - ענה על השאלות הבאות:
    - הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $k$  את שטח המשולש DMC.
    - הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $k$  את שטח המקבילית ABCD.
  - נתון כי:  $\frac{AC}{BD} = 2$ . הראה כי שטח המקבילית הוא:  $\frac{4k^2 \sin^2 \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ .



- (36)** המרובע ABCD הוא מעוין ובו  $\angle D = 60^\circ$ . מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת אותה ביחס:  $\frac{BE}{AE} = 4$ .
- חשב את זווית AEC.
  - נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.



- (37)** הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור. נתון כי:  $BC = 15$ ,  $CE = 13$ ,  $BD = \sqrt{129}$ . ידוע כי זווית AED היא  $60^\circ$ .
- חשב את אורך הקטע DE אם ידוע.
  - כי הוא קטן מ-10 ס"מ.
  - חשב את שטח המשולש ADE.



**(38)** המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.

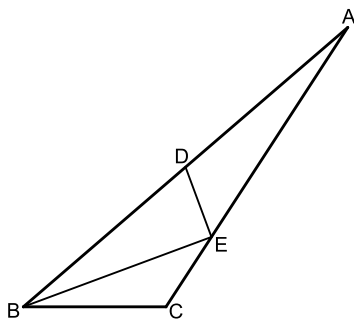
הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים גובה DE לצלע BC.

מסמנים:  $DE = k$  ונתון כי:  $\angle ABC = 10^\circ$ .

א. הבע באמצעות  $k$  את רדיוס המעגל.

ב. הבע באמצעות  $k$  את שטח המשולש ABF.

ג. מצא את  $k$  אם ידוע כי שטח המשולש ABF הוא 15.363 סמ"ר.



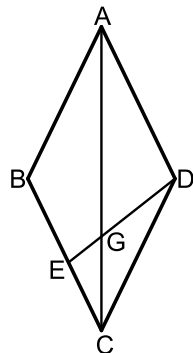
**(39)** במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.

הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת:  $DE = CE$ .

ידוע כי:  $BC = 6$ ,  $BE = 8$ ,  $BD = 9$ .

א. מצא את זווית B.

ב. חשב את שטח המשולש ADE.



**(40)** נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.

א. חשב את זוויות המעוין.

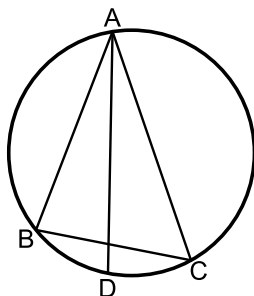
ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא  $m$ .

הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.

הזווית EDC תסומן ב- $\alpha$ .

i. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את אורך הקטע CE.

ii. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש EGC.



**(41)** המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.

מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.

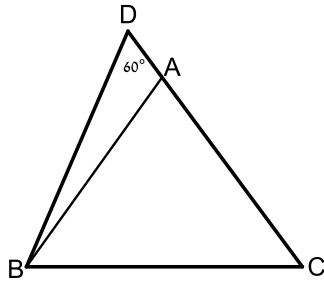
ידוע כי:  $\angle ACB = 60^\circ$ ,  $\angle BAC = 40^\circ$ .

מסמנים:  $AD = k$ .

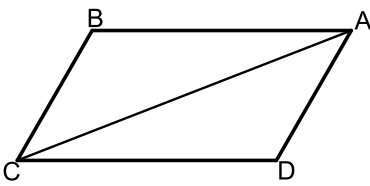
א. הבע באמצעות  $k$  את אורך המיתר BD.

ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.

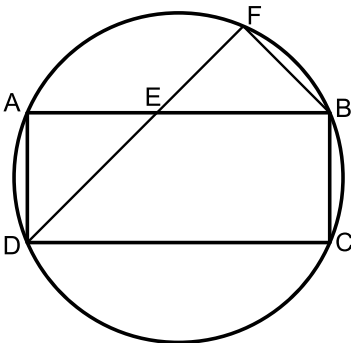
מצא את  $k$  (עגל למספר שלם).



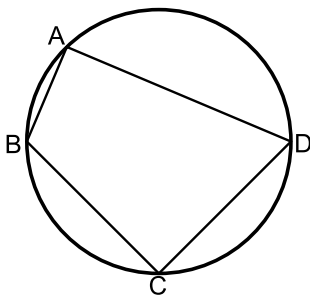
- (42)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ). ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD. ידוע כי:  $\angle D = 60^\circ$ . אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ.  
א. מצא את אורך הקטע AD.  
ב. חשב את שטח המשולש ABC.



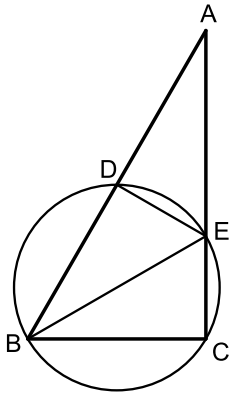
- (43)** במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא  $\sqrt{79}$  ס"מ. היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי:  $\angle B = 120^\circ$ .  
א. מצא את אורכי צלעות המקבילית.  
ב. חשב את שטח המקבילית.  
ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.



- (44)** המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל. מהקודקוד D מעבירים את המיתר DF החותך את הצלע AB בנקודה E. ידוע כי:  $\widehat{AF} = \widehat{CF}$ . הצלע AD של המלבן תסומן ב- $a$ .  
א. הוכח כי המשולש DAE שווה שוקיים.  
ב. נתון גם כי:  $BC = BF$ .  
i. הבע באמצעות  $a$  את רדיוס המעגל.  
ii. חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות:  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$ . (אין צורך לסרטט אותן).



- (45)** המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור. ידוע כי:  $AB = b$ ,  $BC = a$ ,  $CD = a$ ,  $AD = 3b$ .  
א. הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את  $\cos \angle BCD$ .  
ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים:  $a = b\sqrt{5}$ .  
ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ. הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.

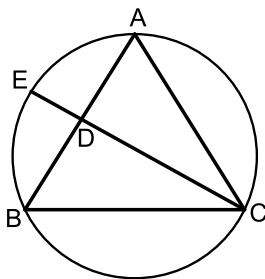


- (46)** המשולש ABC הוא ישר זווית  $\sphericalangle C = 90^\circ$  ובו:  $\sphericalangle B = 2\alpha$ .  
 מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקודקודים B ו-C אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E.  
 המיתר BE חוצה את זווית B.  
 א. הבע באמצעות R ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABE.  
 ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.  
 חשב את שטח המשולש ABE.

- (47)** במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו היא  $\beta$ , BE חוצה את זווית B ו-CD הוא הגובה לשוק AB.

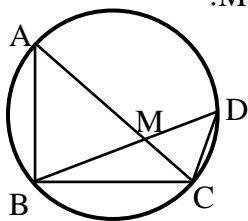
הוכח כי שטח המשולש ADE הוא:

$$S_{ADE} = -\frac{k^2 \sin \frac{\beta}{2} \sin 4\beta}{4 \sin \frac{3\beta}{2}}$$



- (48)** נתון משולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) החסום במעגל. מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D. ידוע כי E היא אמצע הקשת  $\widehat{AB}$  והיחס בין הקטעים BD ו-CD הוא 4:7. מסמנים:  $\sphericalangle ACD = \alpha$ .

- א. מצא את זוויות המשולש ABC (עגל למספרים שלמים).  
 ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.



- (49)** AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R, שנפגשים בנקודה M. זווית B היא זווית ישרה. נתון:  $\sphericalangle MCB = \beta$ ,  $\sphericalangle MBC = \alpha$ .

א. הבע באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$  את שטח המשולש BDC.

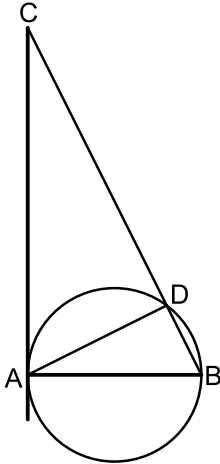
ב. נתון:  $\beta = 2\alpha$ ,  $S_{BDC} = \frac{1}{2}R^2$ .

חשב את  $\alpha$ .

**(50)** בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא  $b$  והזווית שליד הבסיס הגדול היא  $\gamma$  נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות  $\gamma$  ו- $b$  את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את  $\gamma$  אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי  $\sqrt{3}$  מהבסיס הקטן.



**(51)** המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו  $R$  ו-AD הוא מיתר.

ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.

המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C.

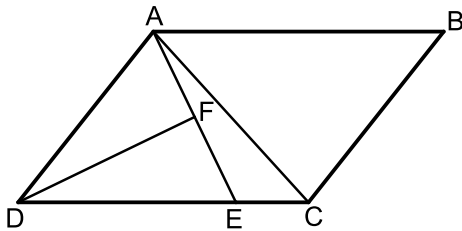
מסמנים:  $\angle BAD = \alpha$ .

א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $R$  את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $R$  את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את  $\alpha$  אם ידוע כי שטח המשולש ABD

קטן פי 4 משטח המשולש ACD.



**(52)** המרובע ABCD הוא מקבילית.

הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים

המקיימים:  $3CE = DE$ .

מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.

ידוע כי:  $\angle ADF = \angle CDF = \alpha$ .

מסמנים:  $CE = k$ .

א. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.

הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא  $4.5k$ . מצא את  $\alpha$ .

**תשובות סופיות:**

(25) א.  $S = 75.801$  סמ"ר ב.  $S = 8.641$  סמ"ר

(26)  $S = 16$  סמ"ר

(27) 
$$S_{ABCD} = \frac{m^2 \tan^2 \alpha \sin 45^\circ \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)}$$

(28) א.  $\sqrt{\frac{2S}{\sqrt{27}}} \approx 0.62S$  ב.  $\frac{2}{3}S$

(29) א.  $\frac{k}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$  ב.  $44.4^\circ, 67.78^\circ, 67.78^\circ$  ג.  $S = 37.18$

(30) א.  $DE = \sqrt{1.6} = 1.26$  ב.  $R = 2$  ג.  $S = 21.48$

(31) א.  $DC = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$  ב.  $AB = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{3 \sin \beta}$  ג.  $S_{ABCD} = 31.2$

(32) א. 12.75 ס"מ ב. 14.19 ס"מ ג. 63.05 ס"מ

(33) א.  $\frac{k \tan \alpha}{\tan 2\alpha}$  ב.  $\frac{k^2 \tan \alpha \sin 2\alpha}{2 \tan^2 2\alpha}$  ג.  $S = 7.754$  ס"מ

(34) א.  $\frac{k^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$  ב.  $\frac{2k^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$  ii.

(35) א.  $109.1^\circ$  ב.  $S = 86.6$

(36) א. 7 ס"מ ב. 34.48 סמ"ר

(37) א.  $R = \frac{k}{2 \sin^2 40} = 1.21k$  ב.  $S = \frac{k^2 \sin 10}{2 \sin 50 \sin^3 40}$  ג.  $k = 6$

(38) א.  $40.72^\circ$  ב.  $S = 12.52$

(39) א.  $128.32^\circ; 51.68^\circ$  ב.  $1.27m \sin \alpha$  ג.  $\frac{0.35m^2 \sin^2 \alpha \sin(128.32 - \alpha)}{\sin(25.84 + \alpha)}$

(40) א.  $BD = \frac{k \sin 20}{\sin 100}$  ב.  $k = 7$

(41) א. 5 ס"מ ב.  $S = 172.77$

(42) א.  $AB = 3$  ס"מ  $BC = 7$  ס"מ ב.  $S = 18.18$  סמ"ר ג.  $R = \sqrt{\frac{37}{3}}$

ב.ii.  $45^\circ, 135^\circ$

(43) ב.i.  $R = a\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1.3a$

ג.  $S = 14.4$  סמ"ר

(44) א.  $\cos \sphericalangle BCD = \frac{a^2 - 5b^2}{a^2 + 3b^2}$

ב.  $S = 36\sqrt{3}$  סמ"ר

(45) א.  $S = R^2 \tan 2\alpha$

ב.  $BE = 7.75$

(48) א.  $58^\circ, 58^\circ, 64^\circ$

ב.  $\alpha = 22.5^\circ$

(49) א.  $S = 2R^2 \sin \alpha \cos \beta \sin(90^\circ - \alpha + \beta)$

ב.  $\gamma = 75^\circ$

(50) א.  $\frac{b \sin(135^\circ - \gamma)}{\sin 45^\circ}, \frac{b \sin(\gamma - 45^\circ)}{\sin 45^\circ}$

ג.  $\alpha = 26.56^\circ$

ב.  $S = \frac{2R^2 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha}$

(51) א.  $S = R^2 \sin 2\alpha$

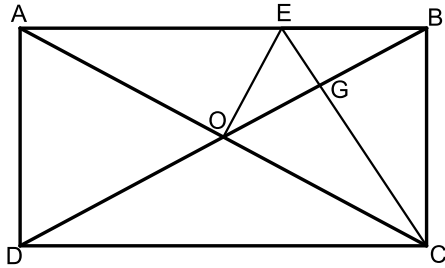
ב.  $P_{ACE} = k + 6k \sin \alpha + k\sqrt{25 - 24 \cos 2\alpha}$

(52) א.  $AE = 6k \sin \alpha$

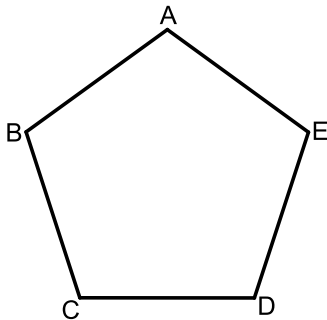
ג.  $\alpha = 14.47^\circ$

## שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה:

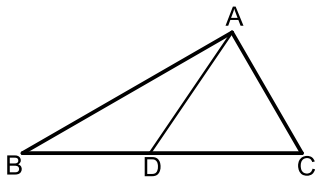
### שאלות:



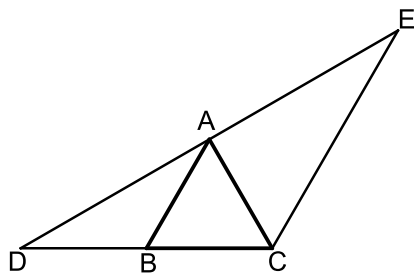
- 53) המרובע ABCD הוא מלבן.  
 מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.  
 הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן ומחלקת אותה כך ש-  $2BE = AE$ .  
 ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC ושווה ל-BE.  
 הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.  
 א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.  
 ב. הוכח כי מתקיים:  $4GE = AE$ .  
 ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.  
 חשב את שטח המלבן ABCD.



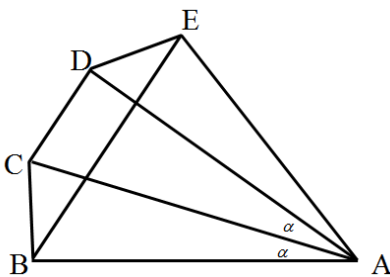
- 54) באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE (כל זוויותיו הן  $108^\circ$ ) בעל אורך צלע  $\alpha$ .  
 א. הבע באמצעות  $\alpha$  את אלכסון המחומש AD.  
 ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את רדיוס המעגל החוסם את המחומש.  
 ג. הבע באמצעות  $\alpha$  את שטח המחומש.  
 ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.  
 חשב את שטח המחומש.



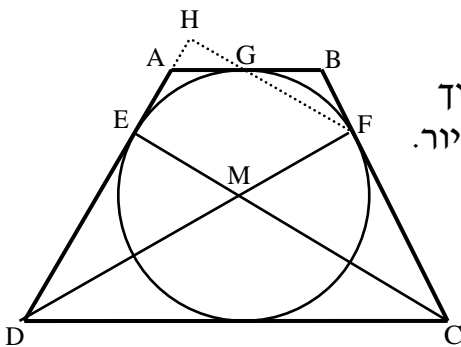
- 55) במשולש ABC הזווית C היא  $60^\circ$ .  
 מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים המשולשים ABD ו-ACD.  
 ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא:  $R_1 = \sqrt{3}$  ס"מ.  
 כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא:  $R_2 = 3$  ס"מ.  
 א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.  
 ב. היקף המשולש ABC הוא:  $12 + 4\sqrt{3}$  ס"מ = P.  
 חשב את שטח המשולש.



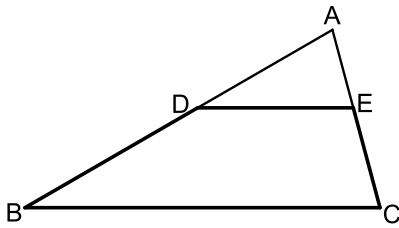
- (56)** המשולש ABC הוא שווה צלעות.  
 הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים שני משולשים ABD ו-ACE.  
 ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.  
 א. הוכח:  $AB \parallel CE$ .  
 ב. הוכח:  $BC \cdot DE = DC \cdot AE$ .  
 ג. נתון:  $DC = 8$  ס"מ וכי:  $AC \perp DE$ .  
 i. חשב את שטח המשולש DCE.  
 ii. חשב את שטח המשולש ABD.



- (57)** מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB, AC, AD ו-AE כך שמתקיים:  $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$  ו-  $AB = AE$ .  
 מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE מתקיים:  $BE \parallel CD$ .  
 ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה.  
 א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים.  
 ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש ( $AC = AD$ ). הוכח כי:  $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ .  
 ג. ידוע כי:  $\angle ADC = 3\alpha + 2.5$  ו-  $\angle ADE = 3\alpha - 10$ . הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית.  
 ד. נסמן:  $AB = m$ .  
 i. הבע באמצעות m את צלעות הטרפז BCDE.  
 ii. הבע באמצעות m את שטח המחומש ABCDE.  
 iii. מצא את m אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).

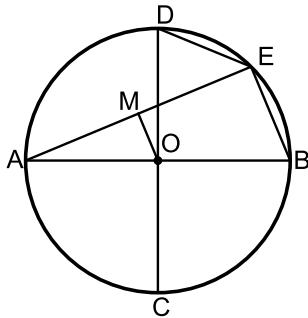


- (58)** הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F, G ו-H כמתואר באיור. הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז ונחתכים בנקודה M.  
 א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.  
 ב. חשב את זוויות הטרפז.  
 ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.  
 חשב את היחס  $\frac{EM}{FH}$ .

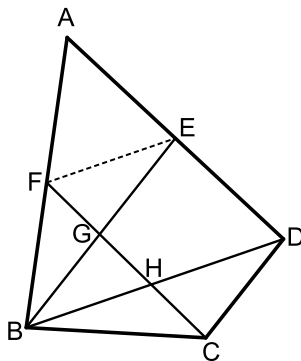


- (59)** המרובע BDEC הוא טרפז  $BC \parallel DE$ . המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = BC$ ). נתון:  $AB = 18$  ס"מ,  $\angle ADE = 30^\circ$ .
- סמן את אורך הבסיס DE ב- $x$ . ואת שטח הטרפז BDEC ב- $S$ . הבע את  $S$  באמצעות  $x$ .
  - על הקטע AD בונים ריבוע. ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ"ר משטח הטרפז BDEC.

חשב את היחס:  $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$ .



- (60)** במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו-CD המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף המעגל המקיימת:  $BE + DE = 15$  ס"מ. מעבירים את המיתר AE. הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE.
- הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.
  - מצא את אורך המיתר BE.
  - נתון כי שטח הטרפז הוא 90 סמ"ר. מצא את רדיוס המעגל.
  - חשב את זווית B.



- (61)** BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD. הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי הצלעות AD ו-AB במרובע. מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש- $BE \parallel CD$ . נתון כי הזוויות  $\angle A$  ו- $\angle BFE$  משלימות ל- $180^\circ$ .
- הוכח:  $\triangle ABCD \sim \triangle BFE$ .
  - נתון כי:  $BE = 7.5$  וכי:  $GE - HD = 17 \frac{1}{15}$ . חשב את אורך הקטע FE.
  - נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED הוא:  $R = 4.001$  ס"מ. מצא את זווית  $\angle EBD$ .

## תשובות סופיות:

(53) ג. 120 סמ"ר

(54) א.  $1.618\alpha$

(55) ב.  $S = 8\sqrt{3}$

(56) ג. i.  $S_{CDE} = 16\sqrt{3}$

ג. ii.  $S_{ABD} = 4\sqrt{3}$

(57) ד. i.  $BC = 0.4663m$ ,  $DE = 0.4663m$ ,  $CD = 0.4776m$ ,  $BE = 1.2175m$

(62) ד. ii.  $0.7232m^2$

ד. iii.  $m = 8$  ס"מ

ג.  $\frac{2}{3}$

(58) ב.  $60^\circ$ ,  $120^\circ$

ב.  $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{16}{81}$

(59) א.  $S = 81 - 0.25x^2$

ג.  $R = 13$

(60) ב.  $BE = 10$

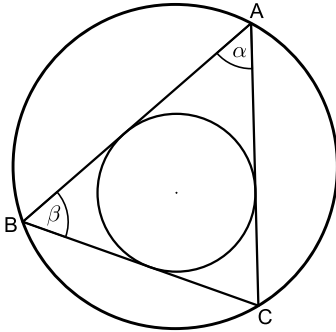
ד.  $\sphericalangle B = 67.38^\circ$

ג.  $16.73^\circ$

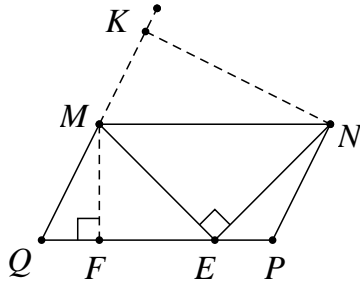
(61) ב.  $FE = 4$

## שאלות מסכמות:

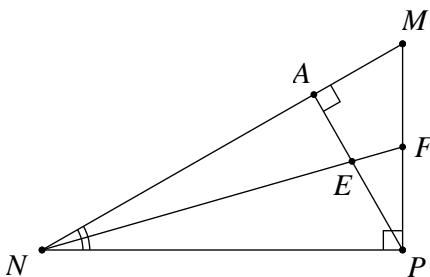
### שאלות:



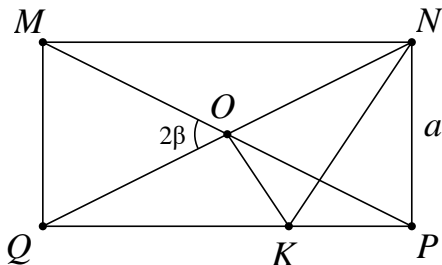
- (1) המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו  $R$ . נתון כי  $\sphericalangle A = \alpha$ ,  $\sphericalangle B = \beta$ .  
 א. הבע את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת  $R$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .  
 ב. נתון כי:  $\alpha = \beta = 60^\circ$ . חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת  $R$ .



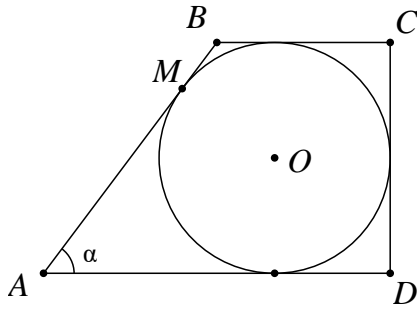
- (2) במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על הצלע PQ כך ש- $\sphericalangle MEN = 90^\circ$  (ראה ציור). נתון:  $12$  ס"מ  $MQ$ ,  $\sphericalangle MNE = 40^\circ$ ,  $\sphericalangle MQP = 70^\circ$ . מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



- (3) במשולש ישר-זווית MNP, ( $\sphericalangle P = 90^\circ$ ) PA הוא גובה ליתר ו-NF חוצה את הזווית  $\sphericalangle MNP$ .  
 PA ו-NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור). נתון:  $24$  ס"מ  $NP$ ,  $\sphericalangle MNP = 40^\circ$ .  
 א. מצא את אורך הקטע NA.  
 ב. מצא את אורך הקטע EF.



- (4) אלכסוני המלבן MNPQ נחתכים בנקודה O. מנקודה O מעלים אנך ל-QN החותך את QP בנקודה K (ראה ציור). נתון:  $NP = a$ ,  $\sphericalangle MOQ = 2\beta$ .  
 א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות  $\beta$  ו- $a$ .  
 ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות  $\beta$  ו- $a$ .



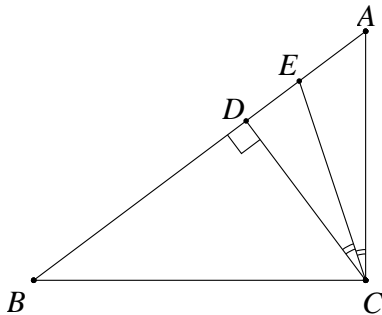
5) בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.

הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.

נתון:  $AM = 12$  ס"מ,  $\angle BAD = \alpha$ .

א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת  $\alpha$ .

ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת  $\alpha$ .



6) במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון:

$\angle ABC = \beta$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC = 8$  ס"מ.

CD הוא הגובה ליתר.

CE הוא חוצה-הזווית  $\angle C$ .

הבע את אורך הקטע AE באמצעות  $\beta$ .

7) נתון מעגל שרדיוסו R. מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה.

מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חסום בתוך מעגל זה.

חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

8)  $\triangle ABC$  הוא משולש שווה-שוקיים ( $AB = AC$ ) שאורך בסיסו 12 ס"מ.

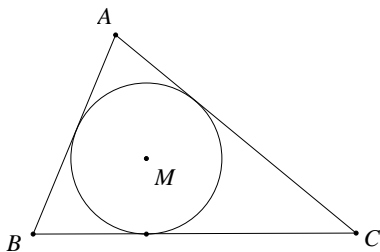
AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB.

שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון:  $\angle ABC = \alpha$  ( $\alpha > 45^\circ$ ).

א. הבע את היחס  $AO : DO$  באמצעות  $\alpha$ .

ב. הראה כי בעבור  $\alpha = 60^\circ$  הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות

הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.



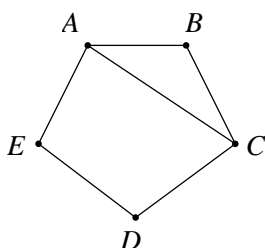
9) במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M

ורדיוסו r (ראה ציור).

נתון:  $\angle B = 62^\circ$ ,  $\angle C = 46^\circ$ .

א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC.

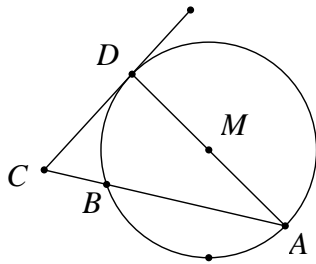
ב. נתון:  $BC = 16$  ס"מ. מצא את r.



10) במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)

אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.

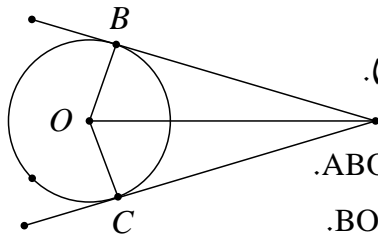
חשב את שטח המחומש.



**11** מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחוטך CBA למעגל (ראה ציור).

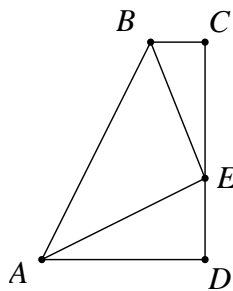
נתון:  $CD = \frac{3}{5}R$ .

- א. מצא את זוויות המשולש CAD.
- ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש BCD.



**12** מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור). נתון:  $\angle BAC = 2\alpha$ ,  $AO = 10$  ס"מ.

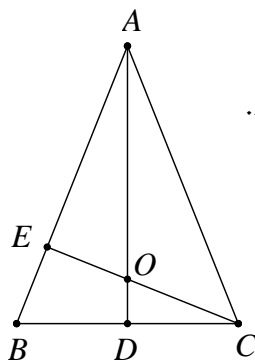
- א. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $S_1$ , שטח המרובע ABOC.
- ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $S_2$ , שטח המשולש BOC.
- ג. הראה שאם  $\alpha = 30^\circ$ , אזי:  $S_1 = 4 \cdot S_2$ .



**13** ABCD הוא טרפז ישר-זווית ( $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ). נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור). נתון:  $\angle AEB = 90^\circ$ ,  $AE = BE = k$  ו- $\angle CBE = \beta$ . הבע באמצעות k ו- $\beta$  את שטח הטרפז.

**14** ענה על השאלות הבאות:

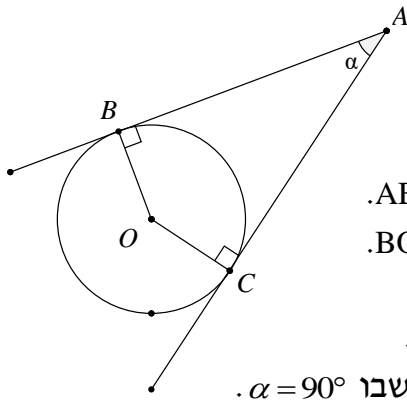
- א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל. מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.
- ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'. מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.



**15** ABC הוא משולש שווה-שוקיים ( $AB = AC$ ) שבו זווית הראש היא זווית חדה. נתון כי זווית הבסיס היא  $\beta$  ואורך הבסיס BC הוא  $2\alpha$ . AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).

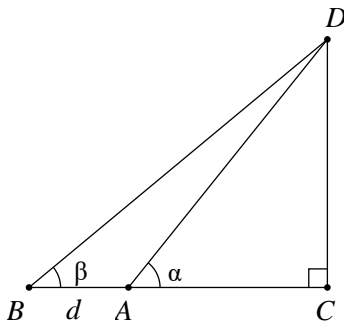
- א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורכי הקטעים CO ו-CE.
- ב. הבע באמצעות  $\beta$  את היחס  $\frac{CO}{CE}$ .

ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר  $\beta = 60^\circ$ , והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.

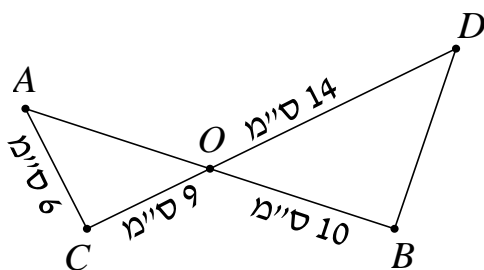


16) מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם  $m$  (כלומר:  $AB = AC = m$ ). נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא  $\angle BAC = \alpha$  (ראה ציור).

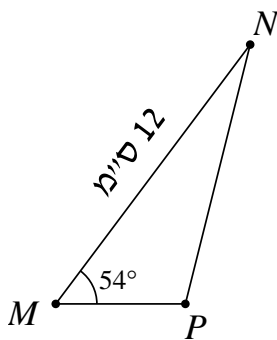
- הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABC.
- הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש BOC.
- הבע באמצעות  $\alpha$  את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.
- בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו  $\alpha = 90^\circ$ .



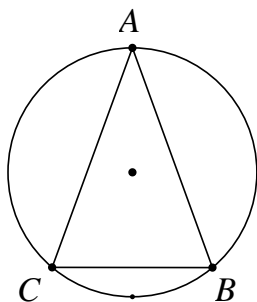
17) במשולש ישר-זווית DAC נתון  $\angle DAC = \alpha$ . מאריכים את הניצב AC כך ש-  $AB = d$ . נתון כי:  $\angle DBA = \beta$  (ראה ציור). סמן:  $AC = x$ . הבע את  $x$  באמצעות  $d$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .



18) הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O. נתון כי:  $\angle OAC = 60^\circ$ ,  $AC = 6$  ס"מ,  $CO = 9$  ס"מ,  $OB = 10$  ס"מ,  $OD = 14$  ס"מ. חשב את  $\angle ODB$ .

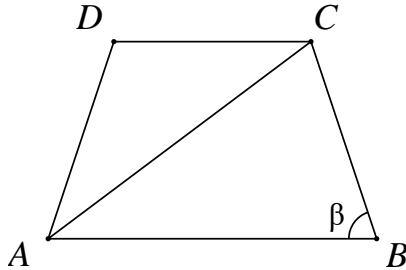


19) במשולש MNP גודל הזווית M הוא  $54^\circ$ . נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ (ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP. א. חשב את אורך הצלע NP. ב. PA הוא תיכון לצלע MN. חשב את שטח המשולש PAN.

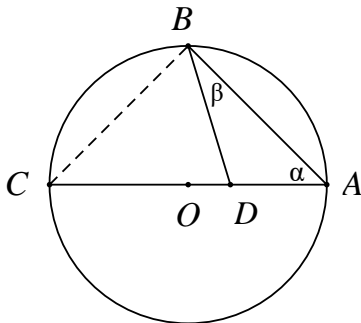


20) המשולש השווה-שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) חסום במעגל (ראה ציור). נתון:  $\angle ABC = \beta$ . כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ. א. הבע בעזרת  $\beta$  את שטח המשולש ABC. ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור  $\beta = 45^\circ$ .

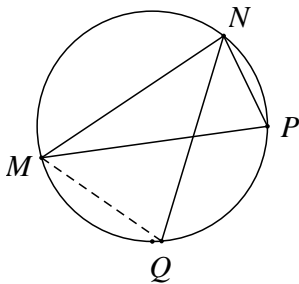
**(21)** במשולש ABC הזווית  $\sphericalangle C$  היא בת  $60^\circ$ , אורך הצלע AB הוא  $\sqrt{13}$  ס"מ, והיקף המשולש הוא  $7 + \sqrt{13}$  ס"מ. חשב את שטח המשולש.



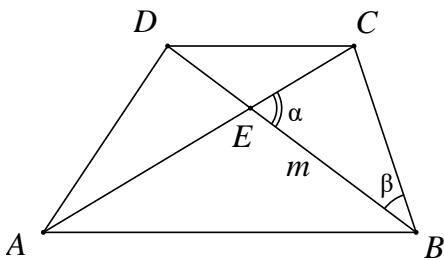
**(22)** בטרפז שווה-שוקיים ABCD ( $AD = BC$ ) אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון. זווית הבסיס היא  $\beta$  ( $\beta > 60^\circ$ ), (ראה ציור). הבע באמצעות  $\beta$  את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



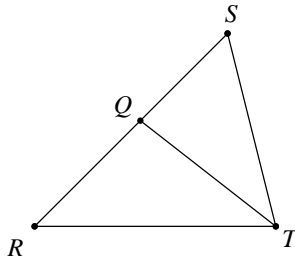
**(23)** הקודקודים A ו-B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O. הקודקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA. א. הבע בעזרת  $\alpha$  ו- $\beta$  את שטח המשולש ABD. ב. הבע בעזרת  $\alpha$  ו- $\beta$  את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.



**(24)** משולש MNP חסום במעגל. המיתר NQ חוצה את הזווית  $\sphericalangle MNP$ . נתון:  $\sphericalangle MPN = 70^\circ$ ,  $\sphericalangle MNP = 80^\circ$ ,  $NP = 12$  ס"מ. חשב את אורך המיתר MQ.



**(25)** נתון טרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ). הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז. נתון:  $BE = m$ ,  $DC = BC$ ,  $\sphericalangle CEB = \alpha$ ,  $\sphericalangle CBD = \beta$  (ראה ציור). הבע את אורכי בסיס הטרפז: AB ו-CD באמצעות  $m$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .



26 במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית  $\angle RTS$

(ראה ציור),  $RQ = \sqrt{2}$ ,  $QS = m$ ,

$\angle TRQ = 45^\circ$ ,  $\angle RST = \alpha$ .

א. הבע את  $\sin \alpha$  באמצעות  $m$ .

ב. נתון כי:  $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

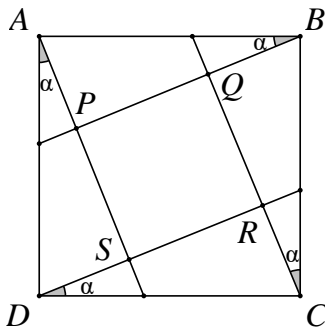
חשב את זוויות המשולש RST.

27 במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

28 נתון משולש שצלעותיו  $t$ ,  $2t$ ,  $kt$

א. לאיזה ערכים של הקבוע  $k$  המשולש הוא קהה זווית?

ב. נתון  $k = \sqrt{7}$ . הבע ע"י  $t$  את אורך חוצה הזווית הקהה.



29 בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה

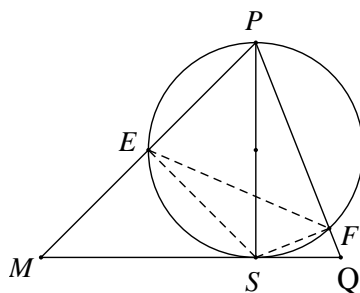
קטעים היוצרים את אותה זווית  $\alpha$

עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע

פנימי PQRS.

א. הוכח כי:  $\frac{PQ}{AB} = \cos \alpha - \sin \alpha$ .

ב. לאיזו זווית  $\alpha$  מתקיים:  $PR = AB$ ?



30 PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).

נתון  $PS = h$ ,  $\angle MPS = \alpha$ ,  $\angle SPQ = \beta$ .

א. הבע את שטח המשולש PMQ

באמצעות  $h$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את

הצלעות PM ו-PQ בנקודות E

ו-F בהתאמה (ראה ציור).

i. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את  $\angle ESF$ .

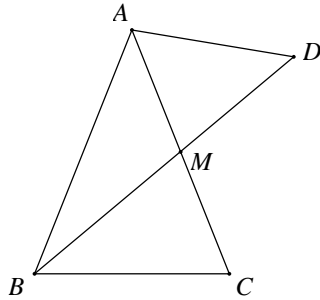
ii. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את היחס בין

שטח המשולש ESF לשטח המשולש PMQ.

**31** במשולש ABC הצלעות הן  $a$ ,  $b$  ו- $c$  והזוויות שמונחות מולן הן:  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $\gamma$  בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון  $m_a$  (התיכון לצלע  $a$ ) באמצעות הצלעות  $b$  ו- $c$  והזווית  $\alpha$ .

ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.



**32** במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ),

BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש

ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\angle BAC = 50^\circ$ .

א. מצא את גודל הזווית  $\angle BMC$ .

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D,

כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

מצא את שטח המשולש AMD.

**33** משולש שווה שוקיים BCE ( $BC = BE$ ) חסום במעגל שרדיוסו R.

זווית הבסיס של המשולש BCE היא  $\alpha$ .

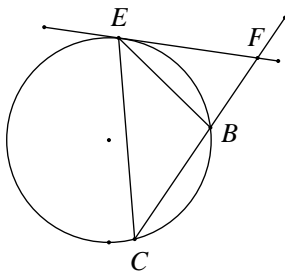
בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את

המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

א. בטא את שטח המשולש BEF באמצעות R ו- $\alpha$ .

ב. מצא את הערך של  $\alpha$  שבעבורו שטח

המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.

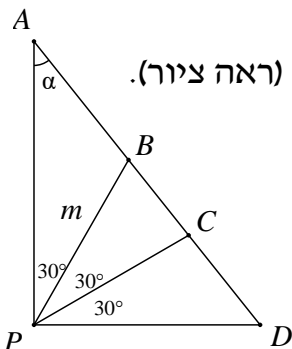


**34** בטרפז BCDE ( $BC \parallel ED$ ) אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ.

הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא  $80^\circ$ .

אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית  $\angle CBE$ .

חשב את היקף הטרפז.



**35** במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית הישרה  $\angle P$

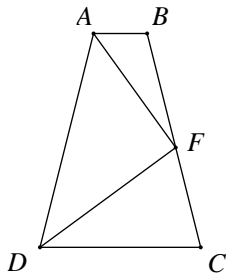
לשלוש זוויות שוות, כלומר  $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = 30^\circ$  (ראה ציור).

נתון כי:  $PB = m$ ,  $\angle PAD = \alpha$ .

א. היעזר במשפט הסינוסים,

והבע את AB, AC, BD ו-CD באמצעות m ו- $\alpha$ .

ב. הוכח כי:  $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$

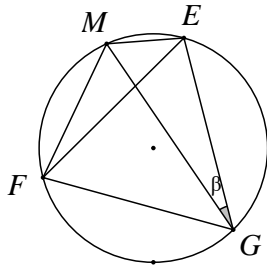


**(36)** בטרפז שווה שוקיים  $ABCD$  ( $AD = BC$ ,  $AB \parallel DC$ ),

$F$  היא נקודה על השוק  $BC$ , כך ש- $DF$  חוצה את הזווית  $\sphericalangle CDA$  ו- $AF$  חוצה את הזווית  $\sphericalangle DAB$  (ראה ציור).

נתון:  $\sphericalangle FAB = \beta$ ,  $AB = b$ .

הבע באמצעות  $b$  ו- $\beta$  את אורך הבסיס  $DC$ .

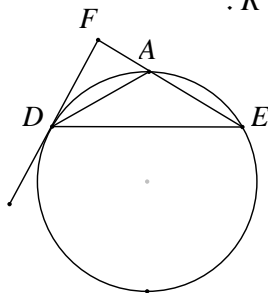


**(37)** משולש שווה צלעות  $EFG$  חסום במעגל שרדיוסו  $R$ .

$M$  היא נקודה על המעגל. נתון:  $\sphericalangle MGE = \beta$  (ראה ציור).

א. הוכח כי:  $ME + MF = MG$ .

ב. אם  $ME = R$  מה תוכל לומר על  $\sphericalangle MGE$ ?



**(38)** משולש שווה שוקיים  $ADE$  ( $AD = AE$ ) חסום במעגל שרדיוסו  $R$ .

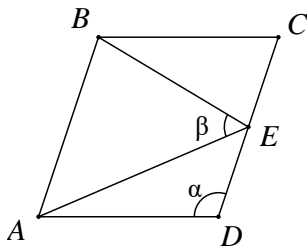
ישר המשיק למעגל בנקודה  $D$  חותך את המשך הצלע  $AE$  בנקודה  $F$  (ראה ציור).

נתון:  $\sphericalangle AEF = \alpha$  ( $60^\circ < \alpha < 180^\circ$ ).

א. הבע את שטח המשולש  $ADF$  באמצעות  $R$  ו- $\alpha$ .

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את היחס שבין שטח המשולש  $ADE$  ובין שטח המשולש  $ADF$ .

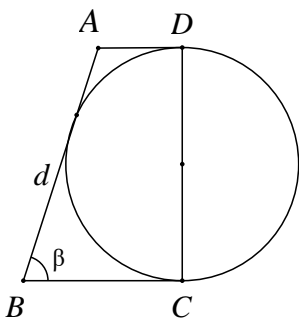
ג. חשב את  $\alpha$  אם שטח המשולש  $ADE$  שווה לשטח המשולש  $ADF$ .



**(39)** במעוין  $ABCD$  הנקודה  $E$  היא אמצע הצלע  $CD$ .

נתון:  $\sphericalangle AEB = \beta$ ,  $\sphericalangle ADC = \alpha$  (ראה ציור).

הוכח כי:  $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{25 - 16 \cos^2 \alpha}}$ .



**(40)** נתון טרפז  $ABCD$  ונתון מעגל. השוק  $DC$  הוא קוטר המעגל.

השוק  $AB$  משיקה למעגל, והבסיסים  $AD$  ו- $BC$  משיקים גם הם למעגל בנקודות  $D$  ו- $C$  בהתאמה (ראה ציור).

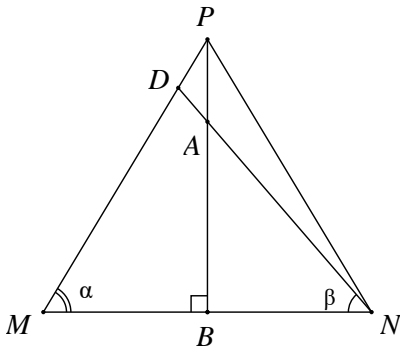
נתון כי:  $AB = d$ ,  $\sphericalangle B = \beta$ .

א. הבע באמצעות  $d$  את סכום בסיסיו של הטרפז.

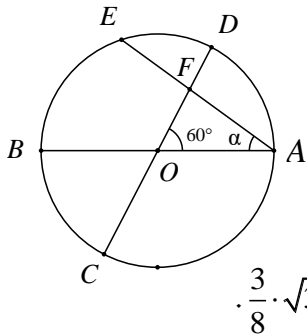
ב. הבע באמצעות  $d$  ו- $\beta$  את היקף הטרפז ואת השטח של הטרפז.

ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר.

חשב את הזווית החדה  $\beta$ .



- (41)** במשולש שווה שוקיים  $PMN$  ( $PM = PN$ ),  
 $A$  היא נקודה על הגובה  $PB$ , כך ש-  $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$ .  
 הישר  $NA$  חותך את השוק  $PM$  בנקודה  $D$  (ראה ציור).  
 נתון:  $\angle DNB = \beta$ ,  $\angle DNM = \alpha$ , ו-  $BN = \alpha$ .  
 א. חשב את היחס  $\tan \beta : \tan \alpha$ .  
 ב. חשב את היחס  $PM:DM$ .



- (42)** במעגל שמרכזו  $O$  ורדיוסו  $R$  מעבירים שני קטרים  $AB$  ו-  $CD$  הנחתכים בזווית של  $60^\circ$ .  
 מיתר  $AE$ , היוצר זווית  $\alpha$  עם הקוטר  $AB$ ,  
 חותך את הקוטר  $CD$  בנקודה  $F$  (ראה ציור).  
 א. הבע את שטח המשולש  $ACF$  באמצעות  $R$  ו-  $\alpha$ .  
 ב. הוכח שכאשר  $\alpha = 30^\circ$ , שטח המשולש  $ACF$  הוא  $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$ .

**תשובות סופיות:**

$$\frac{1}{2}R \quad \text{ב.} \quad r = \frac{2R \sin(\alpha + \beta) \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}} = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$KN = 21.52 \text{ ס"מ} , MF = 11.28 \text{ ס"מ} \quad (2)$$

$$EF = 5.975 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad NA = 18.385 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\frac{a}{2 \sin \beta} \cdot \left[ 1 + \tan \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right] \quad \text{ב.} \quad OK = \frac{a}{2 \cos \beta} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$24 \cdot \left( 1 + \tan \frac{\alpha}{2} \right)^2 \quad \text{ב.} \quad 12 \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$AE = 8 \sin \beta \cdot \left[ \tan \beta - \tan \left( \frac{1}{2} \beta \right) \right] = 8 \tan \beta \cdot \tan \left( \frac{1}{2} \beta \right) \quad (6)$$

$$2 \cdot \frac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{\cos^2 20^\circ} \approx 1.132 \quad (7)$$

$$-2 \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan 2\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha - 1 \quad \text{א.} \quad (8)$$

ב. מתקיים:  $AO = 2 \cdot DO$  (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

$$r = \frac{16}{\tan 59^\circ + \tan 67^\circ} \approx 3.98 \quad \text{ב.} \quad BC = r \cdot (\tan 59^\circ + \tan 67^\circ) \approx 4.02 \cdot r \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$S = 147.86 \text{ סמ"ר} \quad (10)$$

$$S \approx 0.0495 \cdot R^2 \quad \text{ב.} \quad \sphericalangle C = 73.3^\circ , \sphericalangle D = 90^\circ , \sphericalangle A = 16.7^\circ \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$S_1 = 100 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 50 \cdot \sin 2\alpha \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$S_2 = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \quad \text{ב.}$$

$$\text{ב. 27 יח"ש.} \quad S = \frac{1}{2} k^2 \cdot (1 + 2 \sin \beta \cos \beta) \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$S \approx 90.45 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad r \approx 5.548 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$\frac{CO}{CE} = \frac{1}{2 \sin^2 \beta} \quad \text{ב.} \quad CE = 2a \cdot \sin \beta , CO = \frac{a}{\sin \beta} \quad \text{א.} \quad (15)$$

ג. היחס הוא:  $\frac{2}{3}$  (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

$$S_{\triangle ABOC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \quad \text{א.} \quad (16)$$

$$\text{ג. יחס השטחים: } \tan^2 \frac{\alpha}{2}$$

ד. במקרה זה  $\triangle ABOC$  הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 ( $\tan^2 45^\circ = 1$ ).

$$AC = x = d \cdot \frac{\tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} \quad (17)$$

$$\sphericalangle ODB \approx 44.7^\circ \quad (18)$$

$$S_{\triangle PAN} = 8.2 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad NP = 10.38 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$S = 800 \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin 2\beta \quad \text{א.} \quad (20) \quad \text{ב. } 400 \text{ סמ"ר}$$

$$S_{\triangle ABC} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5.196 \text{ סמ"ר} \quad (21)$$

$$(22) \quad \text{יחס השטחים הוא: } 1 - 4 \cos^2 \beta = \left( -\frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} \right) \quad \text{או כל תשובה שקולה.}$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cdot \cos \alpha} \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle ABD} = 288 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{א.} \quad (23)$$

$$MQ \approx 15.43 \text{ ס"מ} \quad (24)$$

$$DC = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad AB = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \quad (25)$$

$$45^\circ, 60^\circ, 75^\circ \text{ או } 45^\circ, 120^\circ, 15^\circ \quad \text{ב.} \quad \sin \alpha = \frac{1}{m} \quad \text{א.} \quad (26)$$

$$\alpha \approx 20.7^\circ \quad (27)$$

$$\frac{2}{3} \cdot t \approx 0.667t \quad \text{ב.} \quad 1 < k < \sqrt{3} \text{ או } \sqrt{5} < k < 3 \quad \text{א.} \quad (28)$$

$$\alpha = 15^\circ \quad (29)$$

$$\sphericalangle ESF = 180^\circ - (\alpha + \beta) \quad \text{ב. i.} \quad S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot (\tan \alpha + \tan \beta) \quad \text{א.} \quad (30)$$

$$S_{\triangle EFS} : S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{4} \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \quad \text{ב. ii.}$$

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \quad \text{ב.} \quad m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha} \quad \text{א.} \quad (31)$$

$$S_{\triangle AMD} = 54.1 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad \sphericalangle BMC = 79.5^\circ \quad \text{א.} \quad (32)$$

$$\alpha = 45^\circ \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle BEF} = \frac{2R^2 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} \quad \text{א. (33)}$$

$$P_{BCDE} = 51.09 \quad \text{(34)}$$

$$, BD = \frac{\sqrt{3} \cdot m}{2 \cdot \cos \alpha}, AB = \frac{m}{2 \cdot \sin \alpha}, AC = \frac{\sqrt{3} \cdot m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha} \quad \text{א. (35)}$$

$$\text{ב. הוכחה.} \quad CD = \frac{m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha}$$

$$DC = \frac{-b \cdot \tan \beta}{\tan 3\beta} \quad \text{(36)}$$

$$\text{ב. MG הוא קוטר במעגל. (37)}$$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADF}} = -\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)} \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle ADF} = \frac{-2R^2 \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{\cos(1.5\alpha)} \quad \text{א. (38)}$$

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{ג.}$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \beta, P = 2d + d \sin \beta \quad \text{ב.} \quad AD + BC = d \quad \text{א. (40)}$$

$$\beta = 30^\circ \quad \text{ג.}$$

$$PM : DM = \frac{9}{8} = 1.125 \quad \text{ב.} \quad \tan \beta : \tan \alpha = \frac{4}{5} = 0.8 \quad \text{א. (41)}$$

$$. S = \frac{3R^2 \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{4 \cdot \sin(60^\circ + \alpha)} \quad \text{א. (42)}$$