מכינה במתמטיקה



תוכן העניינים

1. מבוא לאלגברה 1
2. משוואות אלגבריות 47
3. מבוא לפונקציות ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה הקווית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
6. אי שוויונים אלגבריים 69
7. חוקי החזקות והשורשים 85
8. משוואות ואי-שוויונים מעריכיים 95
9. חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים 105
10. סדרות 121
11. סימן הסכימה (סיגמה) 145
12. אינדוקציה מתמטית 148
13. בעיות מילוליות 162
14. מבוא לגיאומטריה של המישור 187
15. גיאומטריה - משולשים ..... (ללא ספר)
16. גיאומטריה - מרובעים ..... (ללא ספר)
17. גיאומטריה - שטחים והיקפים ..... (ללא ספר)
18. טריגונומטריה במשולש ישר זווית 193
19. זהויות טריגונומטריות 198
20. משוואות טריגונומטריות 219
21. מספרים מרוכבים 240
22. גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר 256
23. חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית 281

תוכן העניינים

24. חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים 285
25. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום 300
26. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש 313
27. חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת ..... (ללא ספר)
28. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות 347
29. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות 365
30. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות 381

מכינה במתמטיקה

פרק 1 - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

1. מספרים מכוונים 1
2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים 5
3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים 7
4. שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים 8
5. כפל וחילוק שברים 14
6. חיבור וחיסור שברים 16
7. בעיות יסודיות באחוזים 20
8. חזרה על תבניות מספר 22
9. כינוס איברים 24
10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים 26
11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר 28
12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים 30
13. פירוק הטרינום 33
14. שברים אלגברים 35
15. כפל וחילוק של שברים אלגברים 39
16. חיבור וחיסור של שברים אלגברים 41
17. שברים כפולים 45

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2- ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שוני סימן - התוצאה תהיה שלילית.

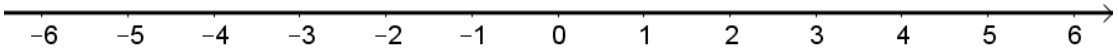
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ -5\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -2$$



2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3+2$

ב. $-3-2$

ג. $3-2$

ד. $-3+2$

ה. $-1-4$

ו. $7+10$

ז. $-6+5$

ח. $-7+3$

3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $5+7-23+1$

ב. $5-8-12+17$

ג. $3-14+2+6$

ד. $-4-11+2+9$

ה. $6-21+3-7$

ו. $-7-13+5-3$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $4\cdot 9$

ב. $4\cdot(-7)$

ג. $(-6)\cdot(-5)$

ד. $(-5)\cdot(-3)$

ה. $(-2)\cdot 8$

ו. $(-8)\cdot 5$

ז. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)$

ח. $2\cdot 3\cdot 3$

ט. $(-2)\cdot 3\cdot(-3)$

י. $(-2)\cdot(-3)\cdot 3$

יא. $2\cdot 3\cdot(-3)$

יב. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)$

יג. $(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

יד. $1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה:

א. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot(-4)\cdot(-2)$

ב. $(-5)\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ג. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ד. $5\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-5):(-25)$

ב. $(-30):3$

ג. $40:(-10)$

ד. $(-32):(-4)$

ה. $(-6):18$

ו. $4:(-16)$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{-60}{12}$

ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות:

א. $0:5$

ב. $(-2)\cdot 0$

ג. $0\cdot(-3)\cdot 4$

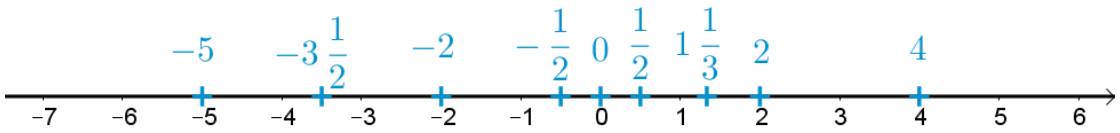
ד. $6:0$

ה. $0+4$

ו. $0-4$

תשובות סופיות:

1) להלן מערכת הצירים:



2) א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5
ו. 17 ז. -1 ח. -4.

3) א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18.

4) א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16
ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18
יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16.

5) א. + ב. + ג. - ד. -.

6) א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$.

7) א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4.

8) א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4.

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. 3^2
ב. 3^3
ג. $(-3)^3$
ד. $(-2)^3$
ה. 4^3
ו. 3^4
ז. $(-5)^3$
ח. 10^4
ט. $-(-3)^4$
י. -5^4
יא. -4^3
יב. $-(-2)^6$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt[3]{-27}$
ב. $\sqrt[4]{625}$
ג. $\sqrt[4]{-16}$
ד. $\sqrt[5]{-32}$
ה. $-\sqrt[4]{81}$
ו. $-\sqrt[3]{1000}$

תשובות סופיות:

1) א. 9 ב. 27 ג. -27 ד. -8 ה. 64 ו. 81
ז. -125 ח. 10000 ט. -81 י. -625 יא. -64 יב. -64

2) א. -3 ב. 5 ג. לא מוגדר ד. -2 ה. -3 ו. -10

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

1) $\sqrt{81}+3\cdot 2^3-40:8$

2) $(-3)^2:9-2\cdot\left(-4^2\right)$

3) $\sqrt{144}-20:4+3\cdot(-2)^2$

4) $3+4\cdot\left[-3+4\cdot(-2)\right]+\sqrt{10+6}$

5) $(-3)^4:(-9)-5\cdot(-2)^3$

6) $-\sqrt{9}+5^2:(-4-1)-24:12\cdot 3$

7) $-2^5:(-8)+4^2-3\cdot 5$

8) $\sqrt[3]{-27}+4\cdot 3^2-2\cdot 3^3$

9) $\left[6\cdot(-1)^4-10\cdot(-1)^3\right]\cdot(-1)^5$

10) $\left(8-\sqrt[3]{64}\right)\cdot\left(2\cdot(-4)-\sqrt[5]{243}\right)$

11) $\dfrac{3^2\cdot(8-2\cdot 3)^3}{\left(5^2\cdot 3-72\right)\cdot(-4)}+2\cdot\left\{15-20:(4+3\cdot 2)\right\}$

תשובות סופיות:

1) 28	**2)** 33	**3)** 19	**4)** -37
5) 31	**6)** -14	**7)** 5	**8)** -21
9) -16	**10)** -44	**11)** 20	

שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ...
שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{X\,X}_{\text{שלמים}}.\underbrace{Y\,Y\,Y}_{\text{שברים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

אחוזים - הגדרה:

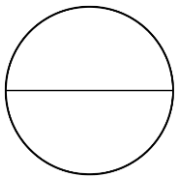
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45% , והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

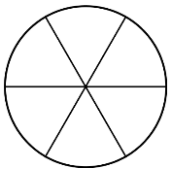
שאלות:

1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

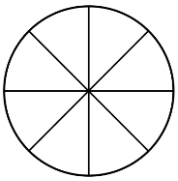
א. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגול



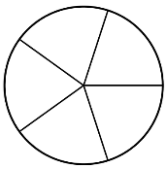
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגול



ג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

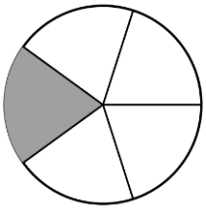


ד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגול

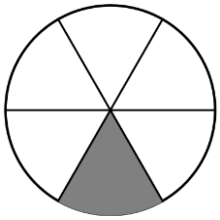


2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

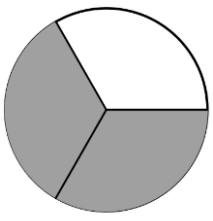
א. שבר:



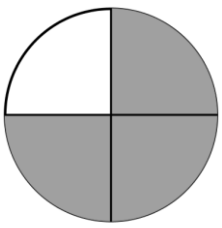
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן:

א. $\frac{25}{30}$ ב. $\frac{10}{30}$ ג. $\frac{6}{24}$ ד. $\frac{4}{20}$

ה. $\frac{35}{56}$ ו. $\frac{24}{42}$ ז. $\frac{36}{48}$ ח. $\frac{33}{121}$

5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים:

א. $-\frac{20}{3}$ ב. $\frac{19}{4}$ ג. $\frac{12}{5}$ ד. $\frac{22}{5}$

ה. $-\frac{34}{6}$ ו. $-\frac{50}{7}$ ז. $\frac{47}{8}$ ח. $\frac{60}{9}$

6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים:

א. $1\frac{2}{3}$ ב. $3\frac{5}{6}$ ג. $4\frac{1}{2}$ ד. $6\frac{1}{4}$

ה. $11\frac{3}{4}$ ו. $-2\frac{5}{8}$ ז. $-6\frac{2}{7}$ ח. $12\frac{7}{9}$

7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $\frac{3}{10}$ או $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{8}$ או $\frac{7}{6}$

ג. $\frac{2}{3}$ או $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{5}{18}$ או $\frac{7}{12}$

8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים:

א. 0.7 ב. 0.07 ג. 0.007 ד. 0.34

ה. 0.304 ו. 0.65 ז. 1.2 ח. 1.02

ט. 1.42 י. 3.5 יא. 6.03 יב. 5.125

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$ ב. $\frac{3}{100}$ ג. $\frac{3}{1000}$ ד. $\frac{23}{1000}$

ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{3}{4}$ ז. $\frac{2}{5}$ ח. $\frac{4}{25}$

ט. $\frac{7}{50}$ י. $\frac{3}{20}$ יא. $\frac{7}{8}$ יב. $\frac{9}{16}$

יג. $9\frac{1}{10}$ יד. $3\frac{1}{5}$ טו. $4\frac{7}{8}$ טז. $-4\frac{1}{16}$

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית
(היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$ ב. $\frac{5}{6}$ ג. $\frac{3}{7}$ ד. $\frac{2}{11}$

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25% ב. 32% ג. 64% ד. 80%

ה. 120% ו. 5% ז. 300% ח. 150%

12) המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{4}{5}$ ד. $\frac{7}{20}$

ה. $\frac{11}{40}$ ו. $\frac{70}{125}$ ז. $\frac{5}{6}$ ח. $\frac{4}{9}$

תשובות סופיות:

1) תשובה מודגמת בסרטון.

2) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$

3) א. $\frac{40}{80},\frac{18}{36},\frac{4}{8}$ ב. $\frac{180}{300},\frac{75}{125},\frac{30}{50}$ ג. $\frac{440}{700},\frac{160}{256},\frac{80}{128}$

4) א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$
ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$

5) א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$
ז. $5\frac{7}{8}$ ח. $6\frac{2}{3}$

6) א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$
ז. $-\frac{44}{7}$ ח. $\frac{115}{9}$

7) א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$

8) א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$
ז. $1\frac{1}{5}$ ח. $1\frac{1}{50}$ ט. $1\frac{21}{50}$ י. $3\frac{1}{2}$ יא. $6\frac{3}{100}$ יב. $5\frac{1}{8}$

9) א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75
ז. 0.4 ח. 0.16 ט. 0.14 י. 0.15 יא. 0.875
יב. 0.5625 יג. 9.1 יד. 3.2 טו. 4.875 טז. -4.0625

10) א. $0.\overline{6}$ ב. $0.8\overline{3}$ ג. 0.428 ד. $0.\overline{18}$

11) א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$
ז. 3 ח. $1\frac{1}{2}$

12) א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$ ב. $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$ ג. $\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{10}$

ד. $3\cdot\frac{4}{5}$ ה. $6\cdot\frac{2}{3}$ ו. $\frac{12}{25}\cdot 5$

ז. $1\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{4}$ ח. $3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{2}{5}$ ט. $3\frac{3}{7}\cdot 2\frac{2}{5}$

י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ יא. $\frac{4}{5^3}$ יב. $\frac{4^3}{5}$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5}:\frac{4}{9}$ ב. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ ג. $\frac{3}{25}:\frac{7}{10}$

ד. $8:\frac{2}{9}$ ה. $10:\frac{2}{3}$ ו. $\frac{5}{6}:3$

ז. $\frac{2}{5}:5$ ח. $3\frac{3}{4}:5\frac{5}{8}$ ט. $2\frac{2}{5}:1\frac{3}{15}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. 4 ו. $2\frac{2}{5}$

ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$

2) א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. 36 ה. 15 ו. $\frac{5}{18}$

ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. 2

חיבור וחיסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b, המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.

  דוגמא: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$, $\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2-3}{7}=\frac{-1}{7}$.

- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.

  דוגמא: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$, $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{3-10}{12}=-\frac{7}{12}$.

- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.

  דוגמא: $3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$.

  חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.

  דוגמא: $3-\frac{1}{4}=2\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$.

  דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

דוגמא: $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{6}=\frac{17}{5}+\frac{13}{6}=\frac{17\cdot 6}{30}+\frac{13\cdot 5}{30}=\frac{102+65}{30}=\frac{167}{30}=5\frac{17}{30}$.

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

דוגמא: $2\frac{3}{4}-5\frac{1}{3}=(2-5)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=-3+\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=-3+\frac{5}{12}=-2\frac{7}{12}$.

שאלות:

1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3 ב. 2 ו-4 ג. 3 ו-5 ד. 6 ו-10

ה. 4 ו-10 ו. 4 ו-6 ז. 3, 5 ו-10 ח. 2, 3 ו-8

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$ ב. $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$

ג. $\frac{4}{13}+\frac{9}{13}$ ד. $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$

ה. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$ ו. $\frac{8}{9}-\frac{7}{9}$

ז. $\frac{2}{12}-\frac{5}{12}$ ח. $\frac{2}{5}-\frac{6}{5}$

ט. $\frac{2}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}$ י. $\frac{7}{15}+\frac{8}{15}-\frac{6}{15}$

3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6}-\frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6}-\frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+\frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{3}{5}$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2+\frac{5}{6}$

ב. $2-\frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3}+4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8}-6\frac{1}{2}$

ז. $2+\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+\frac{8}{20}$

5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14}:\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11}\cdot 2\frac{3}{4}-6:\frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5}:\frac{9}{10}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{4}$

תשובות סופיות:

1) א. 6 ב. 4 ג. 15 ד. 30 ה. 20 ו. 12
ז. 30 ח. 24

2) א. $\frac{4}{5}$ ב. $\frac{7}{9}$ ג. 1 ד. $1\frac{3}{4}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{1}{9}$
ז. $-\frac{1}{4}$ ח. $-\frac{4}{5}$ ט. $1\frac{5}{8}$ י. $\frac{3}{5}$

3) א. $1\frac{5}{6}$ ב. $\frac{7}{10}$ ג. $\frac{7}{12}$ ד. $-\frac{1}{8}$ ה. 5 ו. $3\frac{5}{6}$
ז. $\frac{19}{21}$ ח. $-\frac{1}{10}$

4) א. $2\frac{5}{6}$ ב. $1\frac{1}{6}$ ג. $3\frac{1}{12}$ ד. $1\frac{5}{12}$ ה. $7\frac{11}{12}$ ו. $-\frac{5}{8}$
ז. $2\frac{13}{18}$ ח. $-\frac{1}{20}$

5) א. $2\frac{11}{24}$ ב. $1\frac{1}{10}$ ג. $-13\frac{3}{4}$ ד. $2\frac{5}{6}$ ה. $3\frac{5}{18}$

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $\frac{40}{100}\cdot 120 = 48$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48**.

שאלות:

1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
א. כמה בנות בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
א. כמה תלמידים בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
א. מהו מחירו בסוף העונה?
ב. מה גודל ההנחה?

4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
א. מה מחירו הסופי?
ב. מה גודל ההתייקרות?

5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

7) ענה על השאלות הבאות:

א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.
מה אחוז הבנים בקהל?

ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.
מה אחוז הבנות בכיתה?

ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

תשובות סופיות:

1) א. 18 בנות. ב. 12 בנים.

2) א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.

3) א. 240 ₪ ב. 60 ₪

4) א. 540 ₪ ב. 40 ₪

5) 4.9755 ₪

6) 400 ₪

7) א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).
ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3\cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה-x הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$

ב. x^2+3x כאשר $x=2$

ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$

ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$

ה. x^3+1 כאשר $x=-2$

ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$

ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$

ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה-x הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$.

ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$.

3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

א. $a^2+2ab+b^2$ עבור: $a=3\ ,\ b=-5$.

ב. $(x-3)^2+3x^2b$ עבור: $x=5\ ,\ b=-1$.

ג. $-x^3-2xy+y^4$ עבור: $x=-2\ ,\ y=-1$.

ד. $\frac{(a-2c)^4}{a}-a^2$ עבור: $a=2\ ,\ c=-2$.

ה. $\frac{4a^2-3b}{c}$ עבור: $a=-1\ ,\ b=2\ ,\ c=-4$.

ו. $\sqrt{c-3a}$ עבור: $a=-1\ ,\ c=13$ ועבור: $a=\frac{1}{3}\ ,\ c=82$.

ז. $\frac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ עבור: $m=3\ ,\ q=48\ ,\ p=-5$.

תשובות סופיות:

1) א. 11 ב. 10 ג. -12 ד. -65 ה. -7 ו. 5

ז. -10 ח. 45

2) א. $\frac{10}{27}$ ב. $5\frac{22}{27}$

3) א. 4 ב. -71 ג. 5 ד. 644 ה. $\frac{1}{2}$

ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שניה: 9 ז. -37

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x+6x-5x=(3+6-5)x=4x$.

איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.

כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

כנס איברים דומים:

1) $5x+7x-4x$

2) $9x^2-2x^2-3x^2-2x^2$

3) $-10xy+15xy+xy-2yx$

4) $x^2y-3yx^2+x^2y$

5) $8a^2+10a-5a^2-11a+a^2$

6) $2x^2-3m^2-x^2+3m^2$

7) $3xy+y-30y+6yx-7y$

8) $mn^2+4m^2n+6n^2m-10nm^2+mn^2$

9) $-6+x^3+4-3x^3+17x^3-17$

10) $y^2+x^2-5x^2+5y^2+4x^2-6y^2$

11) $7x^2-3x-4x+2$

12) $5xy+2x-3yx-x+1$

13) $3-x-x^2+4x+5x^2-12$

14) $x+xy+y-6yx-6y-6x$

15) $mn+n-5m+5nm-14n+3m$

16) $ab^2+6ba^2-6b+16a^2b+3b-6b^2a$

17) $z^3-4z^2+7-z^3-8+8z^2$

18) $4x^2z+6xz^2-6-xz^2+12+10zx^2$

19) $2-x^3-3-4x^2+2x+x^3+x^2-2$

20) $x^3-3x-4x^2+2x+x^3+x^2-2x^3$

21) $2a^2b+3x^2y+5a^2b+10x^2y$

22) $12x^2y^3+13a^2-20x^2y^3+2a^2$

23) $2y^2-4x^3y^2-10y^2-x^3y^2$

24) $-2x^3y+5x^2-4yx^3-6x^2$

25) $2a^2b+2b+3a^2+5b$

26) $5a^2b-8ab^2+20a^2b-14ab^2$

27) $-12x^2+2y^2+3x^2y+14xy^2-5xy^2-6y^2+2xy+11x^2+x^2y-9xy$

28) $21x^3y^3+x^2y^2-3xy^3+x^3y-15x^2y^2-7x^3y+12x^3y^3-4xy^3+4xy^3-6x^3y$

תשובות סופיות:

(1) $8x$

(2) $2x^2$

(3) $4xy$

(4) $-x^2y$

(5) $4a^2-a$

(6) x^2

(7) $9xy-36y$

(8) $8mn^2-6nm^2$

(9) $15x^3-19$

(10) 0

(11) $7x^2-7x+2$

(12) $2xy+x+1$

(13) $4x^2+3x-9$

(14) $-5x-5y-5xy$

(15) $-13n-2m+6mn$

(16) $-5ab^2+22a^2b-3b$

(17) $4z^2-1$

(18) $14x^2z+5xz^2+6$

(19) $-3x^2+2x-3$

(20) $-3x^2-x$

(21) $7a^2b+13x^2y$

(22) $-8x^2y^3+15a^2$

(23) $-8y^2-5x^3y^2$

(24) $-6x^3y-x^2$

(25) $2a^2b+3a^2+7b$

(26) $25a^2b-22ab^2$

(27) $-x^2-4y^2+4x^2y+9xy^2-7xy$

(28) $33x^3y^3-14x^2y^2-3xy^3-12x^3y$

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

- $a(b+c)=ab+ac$.
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x\cdot 3x$ ב. $-4x\cdot(-7x)$ ג. $-2x\cdot(-4x)\cdot(-3)$

ד. $8m^2\cdot 4m^3$ ה. $3a^3\cdot(-2a^2)$ ו. $-b\cdot 4b^2\cdot\frac{b^2}{2}$

ז. $a\cdot 3b$ ח. $4a^2\cdot 7b^2$ ט. $ab\cdot(-2a^2b)$

2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$ ב. $2(-3x^2+5x-1)$

ג. $(7x-2)4$ ד. $(1-2x)(-2)$

ה. $a(3a-1)$ ו. $b(b^2-3b+4)$

ז. $2x(5x+3)$ ח. $5x(x^2+2x-3)$

ט. $3t^2(4t-t^2+6)$ י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$ ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$

ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$ ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

ה. $(3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$

ו. $3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+2)$ ב. $(x+3)(x-7)$

ג. $(3-x)(x+4)$ ד. $(3x+4)(5x+1)$

ה. $3(4x+1)(2x-3)$ ו. $-2(3x-1)(5-2x)$

5) פשט את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+3)+2(3-x)$

ב. $(a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$

ג. $(2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6)$

ד. $-x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2)$

תשובות סופיות:

1) א. $6x^2$ ב. $28x^2$ ג. $-24x^2$ ד. $32m^5$ ה. $-6a^5$ ו. $-2b^5$

ז. $3ab$ ח. $28a^2b^2$ ט. $-2a^3b^2$

2) א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$

ה. $3a^2-a$ ו. b^3-3b^2+4b ז. $10x^2+6x$ ח. $5x^3+10x^2-15x$

ט. $12t^3-3t^4+18t^2$ י. $10d^5-7.5d^2$

3) א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$

ו. $10y^2+32y-27$

4) א. x^2+x-2 ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$

ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$

5) א. x^2+3 ב. 7 ג. $18m^2-6m-39$ ד. $-3x^5y^3+3x^4y^2$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$ ב. $(x+2)^2$ ג. $(4x+5)^2$

ד. $(6x+2)^2$ ה. $(7x+y)^2$ ו. $(5x+2y)^2$

ז. $(x^2+7)^2$ ח. $(x^2+y^2)^2$ ט. $(x^3+2y^2x)^2$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$ ב. $(x-2)^2$ ג. $(5-x)^2$

ד. $(6x-1)^2$ ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$ ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$

ז. $(3m-2n)^2$ ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ ט. $\left(x^2y^2-7\right)^2$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$ ב. $(3+x)(x-3)$

ג. $(3x-1)(3x+1)$ ד. $(5-7x)(7x+5)$

ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$

ז. $(x^2+y)(x^2-y)$ ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$

ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$

ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$

ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$

ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$

ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

תשובות סופיות:

1) א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$

ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$

ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$

2) א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$

ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$

ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$

3) א. x^2-25 ב. x^2-9 ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$

ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. x^4-y^2 ח. $9a^4b^6-16$

4) א. x^2+2 ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$

ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:
  - הוצאת מספר משותף: $2x-8=2(x-4)$.
  - הוצאת אות משותפת: $x^2-12x=x(x-12)$.
  - הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2-21x=3x(x-7)$.
- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:
  - נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
  - נוסחה להפרש ריבועים: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x-12$ ב. $6y-4$

ג. $20-8a$ ד. $4a^3+8b$

ה. $75m^2+25m+15$ ו. $40a^2-8b^2+64c^2$

2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. y^2+5y ב. $3x-11x^3$

ג. $6y^2+5y^3+4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7-\frac{1}{4}a^5+a^3$

3) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $2x^2-8x$

ב. $3t^2+12t$

ג. $5n^3-20n^2+50n$

ד. $8y^2+6y^3-2y^4$

ה. $4x^2y^2+16x^2y-20xy^2$

ו. $27mn-3n^2m+9n^3m$

4) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $x^2+10x+25$

ב. $x^2+12x+36$

ג. $y^2-18y+81$

ד. $y^2-22y+121$

ה. $4x^2+4x+1$

ו. $16y^2-8y+1$

ז. $9x^2-24x+16$

ח. $25x^2+70x+49$

5) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. r^2-25

ב. x^2-81

ג. $25y^2-49$

ד. $121x^2-1$

ה. x^2y^2-4

ו. $9y^4-169x^4$

6) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר:

א. $y-y^3$

ב. x^3-10x^2+25x

ג. m^4-1

ד. $196x^4-140x^3+25x^2$

תשובות סופיות:

1) א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$

ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$

2) א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$

ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$

3) א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$

ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$

4) א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$

ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$

5) א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$

ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$

6) א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$

ד. $x^2(14x-5)^2$.

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: ax^2+bx+c כאשר a, b ו-c הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו-m_2, שמקיימים: $m_1\cdot m_2=ac$ ו-$m_1+m_2=b$.

לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2+bx+c=ax^2+m_1x+m_2x+c$.

השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2+m_1x}+\underbrace{m_2x+c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו-m_2 באופן הבא: $m_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $m_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום כמכפלה: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)\left(x-m_2\right)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד אז $m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$ נכתוב: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. x^2+5x+4 ב. $x^2-8x+15$ ג. $x^2-33x+62$

ד. $2x^2+7x-15$ ה. $3x^2-11x+6$ ו. $6x^2+5x+1$

ז. $2x^2+x-6$ ח. $x^2-18x+81$ ט. x^2+2x+8

2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

א. $6x^2+5x+1$ ב. x^2+5x+4

ג. $4x^2+20x+25$ ד. $3x^2-x+20$

תשובות סופיות:

1) א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$

ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$

ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.

2) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

דוגמא לשברים אלגבריים: $\frac{4}{x-x^3}$, $\frac{3x}{x^2+1}$, $\frac{x+1}{x+2}$.

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: $\frac{3x+5}{4}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

דוגמא: השבר $\frac{1}{x+4}$ לא מוגדר כאשר $x=-4$ מכיוון שמתקבל: $\frac{1}{0}$.

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x\neq -4$ ומשמעו היא ש-x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט 4-, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים.
במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

- צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: $\frac{2x+8}{x+4}=\frac{2\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=\frac{2\cdot 1}{1}=2$.
- צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: $\frac{3x-15}{x^2-10x+25}=\frac{3\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}}}=\frac{3\cdot 1}{x-5}=\frac{3}{x-5}$.
- צמצום ע"י פירוק טרינום: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$.

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$

ב. $\frac{5}{x-6}$

ג. $\frac{x+7}{2x-8}$

ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$

ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$

ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$

ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$

ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$

ב. $\frac{a-x}{a}$

ג. $\frac{a-ax}{a}$

ד. $\frac{x+1}{y+1}$

ה. $\frac{x}{x+y}$

ו. $\frac{6x}{6y}$

ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$

ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

ט. $\frac{4x^2y}{xy}$

י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$

ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$

ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$

ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$

ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$

ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$

ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$

ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2+10x+25}{2x+10}$

ב. $\frac{8n-n^2}{n^2-16n+64}$

ג. $\frac{z^3-4z^2}{2z^2-16z+32}$

ד. $\frac{4m^2+20m+25}{4m^2+10m}$

ה. $\frac{18y^2-24y+8}{2y-3y^2}$

ו. $\frac{a^3+4a^2b+4ab^2}{3ab+6b^2}$

5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$

ב. $\frac{m^2-12m+32}{m-4}$

ג. $\frac{4y-10}{2y^2+y-15}$

ד. $\frac{3z^2+26z+16}{3z+2}$

ה. $\frac{x^2+5x-36}{x^3+9x^2}$

ו. $\frac{9n^2-12n}{4+5n-6n^2}$

ז. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

ח. $\frac{x^2-14x+49}{x^2+x-56}$

ט. $\frac{3a^2b-10ab^2+3b^3}{-3a^3b+11a^2b^2-6ab^3}$

י. $\frac{m^3n-m^2n^2-m^2+mn}{2m^2n^3+mn^2-3n}$

תשובות סופיות:

1) א. $x\neq -3$ ב. $x\neq 6$ ג. $x\neq 4$ ד. $x\neq 0\ ,\ x\neq 4$

ה. $x\neq -1$ ו. $x\neq 2\ ,\ x\neq -2$ ז. $y\neq 0\ ,\ y\neq -1\ ,\ y\neq 1$

ח. $x\neq 0\ ,\ x\neq 1\ ,\ x\neq 4$

2) א. x ב. לא ניתן לצמצם ג. $1-x$

ד. לא ניתן לצמצם ה. לא ניתן לצמצם ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$

ח. לא ניתן לצמצם ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם

3) א. $3\ ,\ x\neq -4$ ב. $\frac{m}{4}\ ,\ m\neq -4$ ג. $\frac{2}{a}\ ,\ a\neq 0,6$

ד. $-\frac{x}{3}\ ,\ x\neq 5$ ה. $-3\ ,\ y\neq \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ ו. $\frac{2x^2}{3}\ ,\ x\neq \frac{1}{2}$

ז. $\frac{3}{y(y-3)}\ ,\ y\neq 0,3$ ח. $\frac{3z^2-12z+4}{z+5}\ ,\ z\neq 0,-5$

4) א. $\frac{x+5}{2}\ ,\ x\neq -5$ ב. $\frac{n}{8-n}\ ,\ n\neq 8$ ג. $\frac{z^2}{2(z-4)}\ ,\ z\neq 4$

ד. $\frac{2m+5}{2m}\ ,\ m\neq 0,-\frac{5}{2}$ ה. $\frac{2(2-3y)}{y}\ ,\ y\neq 0,\frac{2}{3}$ ו. $\frac{a(a+2b)}{3b}\ ,\ b\neq 0,\ a\neq -2b$

5) א. $\frac{1}{x-5}\ ,\ x\neq 5,-2$ ב. $m-8\ ,\ m\neq 4$ ג. $\frac{2}{y+3}\ ,\ x\neq -3,\frac{5}{2}$

ד. $z+8\ ,\ z\neq -\frac{2}{3}$ ה. $\frac{x-4}{x^2}\ ,\ x\neq 0,-9$ ו. $\frac{-3n}{2n+1}\ ,\ n\neq -\frac{1}{2},\frac{4}{3}$

ז. $\frac{x+2}{x+3}\ ,\ x\neq -2,-3$ ח. $\frac{x-7}{x+8}\ ,\ x\neq 7,-8$

ט. $\frac{3a-b}{a(2b-3a)}\ ,\ a\neq 0\ ,\ b\neq 0,\ a\neq 3b\ ,\ 2b\neq 3a$ י. $\frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}\ ,\ mn\neq 1,-\frac{3}{2},n\neq 0$

כפל וחילוק של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.

חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3x+3}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3(x+1)}=\frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{3x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}}=\frac{1}{3x}$.

- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y}:\frac{12}{y^2+y}=\frac{4x}{y}\cdot\frac{y^2+y}{12}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}x}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}(y+1)}{\underset{3}{\cancel{12}}}=\frac{x(y+1)}{3}$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{8}$

ב. $\frac{x}{3}\cdot\frac{9}{x^2}$

ג. $7y\cdot\frac{5}{y^2}$

ד. $6x^2\cdot\frac{3}{40x}$

ה. $\left(x^2+3x\right)\cdot\frac{2}{3x+9}$

ו. $\left(a^2-25\right)\cdot\frac{20}{5a+25}$

ז. $\frac{w^2-9}{w}\cdot\frac{w^2}{2w+6}$

ח. $\frac{y+4}{y^2+16}\cdot\frac{y^2-16}{2y+8}$

ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90}\cdot\frac{12}{2z-10}$

י. $\frac{5n^2}{n^2-121}\cdot\frac{2n^2+44n+242}{n+2}\cdot\frac{n^2+4n+4}{n}$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8}:\frac{x}{6}$

ב. $\frac{y}{25}:\frac{5}{y}$

ג. $a^2:\frac{1}{6a}$

ד. $\frac{5}{6a}:a^2$

ה. $\left(d^2-3d\right):\frac{5d-15}{5d}$

ו. $\frac{t}{t+4}:\frac{3t}{t+4}$

ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2}:\frac{y^2-16}{7y^2}$

ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36}:\frac{a+8}{a+6}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$ ה. $\frac{2x}{3}$

ו. $4\left(a-5\right)$ ז. $\frac{w\left(w-3\right)}{2}$ ח. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$ ט. $\frac{z+15}{z-5}$ י. $\frac{10n\left(n+11\right)\left(n+2\right)}{n-11}$

2) א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{y^2}{125}$ ג. $6a^3$ ד. $\frac{5}{6a^3}$ ה. d^2 ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{7\left(y+4\right)}{8\left(y-4\right)}$ ח. $\frac{a-8}{a-6}$

חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים.

נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים.

כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף.
לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת.

דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x}=\frac{1+(x+1)}{x}=\frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)+3}{x+2}=\frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x(x+1)}=\frac{x+x+1}{x(x+1)}=\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-3x}=\frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{3}{(x-3)^2}-\frac{2}{(x-3)(x+3)}=\frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}=\frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6}+\frac{a-5}{6}$

ב. $\frac{5}{x}+\frac{4x+3}{x}$

ג. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3+4x}{x+1}$

ד. $\frac{7z}{2z-3}-\frac{4z}{2z-3}-\frac{z+3}{2z-3}$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab}-\frac{5}{bc}$

ב. $\frac{1}{xy}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xz}$

ג. $\frac{c}{ab}-\frac{ad}{bc}+\frac{2b}{cd}$

ד. $-\frac{5}{x}+\frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)}-\frac{2}{z(z-2)}$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $1-\frac{2}{x}$

ב. $1+\frac{3}{y^2}$

ג. $2+\frac{2}{x+1}$

ד. $3-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}$

ה. $\frac{a+1}{a^2}-\frac{3-a}{4a}-3$

ו. $\frac{x}{9yz}+\frac{z}{3y^2x}+\frac{3-y}{12xz}-3\frac{1}{2}$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x}$

ב. $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y}$

ג. $\frac{a+1}{a+2}+\frac{3}{a}$

ד. $\frac{1}{z+3}+\frac{2}{3z}-\frac{3}{z}$

5) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{24}{a^2-9}+\frac{4}{a+3}$

ב. $\frac{3}{x^2-16}+\frac{2}{(x+4)^2}$

ג. $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{3y}{4-y^2}$

ד. $\frac{3z}{z^2+4z+3}-\frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$

ה. $\frac{x-1}{x^2+3x-40}+\frac{2}{-x^2+8x-15}$

ו. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7}+\frac{a+3}{a^2+14a+49}$

ז. $\frac{x}{x-3}+\frac{9-x}{x^2-8x+15}$

ח. $\frac{1}{a-b}+\frac{2}{a+2b}-\frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

6) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{4}{x}\cdot\frac{x^2}{8}+\frac{9}{x+1}\cdot\frac{x+1}{18}$

ב. $\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot\frac{x^2}{7x+14}$

ג. $\frac{7}{y^2}:\frac{6}{y^3}-\frac{y-4}{63}\cdot\frac{3y-4}{y^2-8y+16}$

ד. $\left(3x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right):\frac{6x^3+2x-4}{x^2}$

ה. $\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3}-\frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right):\frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1

2) א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d-a^2d^2+2ab^2}{abcd}$

ד. $\frac{-5y^2+x+1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$

3) א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$

ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2+a+4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z}$

4) א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$

ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$

5) א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$

ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$

ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$

6) א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

1) $\frac{\frac{4x}{12}}{x}$

2) $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5}$

3) $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2}$

4) $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54}$

5) $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{\frac{y^2}{3-y}}$

6) $\frac{\frac{4x}{x+1}}{\frac{8}{x^2+2x+1}}$

7) $\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{\frac{40}{15c+15}}$

8) $\frac{\frac{t^2-t-20}{16t+8}}{\frac{25-t^2}{2t+1}}$

9) $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}}$

תשובות סופיות:

1) $\frac{x^2}{3}$

2) 2.5

3) $\frac{1}{6t^3}$

4) $\frac{t-9}{54t^2}$

5) $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$

6) $\frac{x(x+1)}{2}$

7) $\frac{c}{c-4}$

8) $\frac{t+4}{-8(t+5)}$

9) $\frac{5}{x}$

מכינה במתמטיקה

פרק 2 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

1. משוואות ממעלה ראשונה 47
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה 49
3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון 52
4. משוואה ממעלה שנייה 53
5. משוואות דו-ריבועיות 55
6. משוואות עם פרמטרים 57
7. משוואות עם שורשים 59
8. משוואות עם ערך מוחלט 61
9. מערכת משוואות ממעלה שנייה 62
10. משוואות מתקדמות מסכמות 64
11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית 67

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $6x+2=8$

ב. $7-2x=7$

ג. $2x+x=24$

ד. $2x+6=8+x$

ה. $-7x+5+2x=4x-13$

ו. $6x-3+5-7x=x-5x-7$

ז. $2-5x+7=-3x+8$

ח. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$

ב. $7x-4(3-4x)=-x$

ג. $6(4-x)-(6-x)=3x$

ד. $5x-(3x-7)4=21$

ה. $x(x-5)=x^2-7x+8$

ו. $(7-x)(1-x)-(x-3)^2=0$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1$

ג. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ד. $\frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1$

ה. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

ו. $5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0$

ב. $\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0$

ג. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ד. $\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2}$

ה. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ו. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12$

תשובות סופיות:

1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$

ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$.

2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$.

3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$.

4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$.

5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6$, $x\neq 3$.

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1 , b_1 , c_1 ו- a_2 , b_2 , c_2 הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=3x-1 \\ \frac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

פתרון של מערכת משוואות:

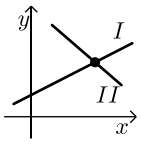
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

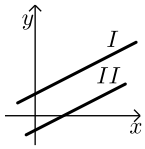
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

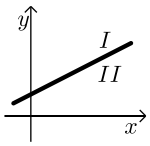
- הישרים נחתכים:
במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:
במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:
במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}3x+y=11\\y=5\end{cases}$ ב. $\begin{cases}y=x-3\\y=2x+4\end{cases}$ ג. $\begin{cases}-3x+2y=-16\\x=5y+14\end{cases}$

ד. $\begin{cases}5x-2y=-2\\x+4y=4\end{cases}$ ה. $\begin{cases}-5x+7y=-26\\x+3y=-8\end{cases}$ ו. $\begin{cases}2x+3y=5\\5x+7y=11\end{cases}$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+3y=5\\x-3y=3\end{cases}$ ב. $\begin{cases}5x+2y=14\\5x+3y=23\end{cases}$

ג. $\begin{cases}5y=2x\\4x=5y+8\end{cases}$ ד. $\begin{cases}4x=3y-29\\5y=9-13x\end{cases}$

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+2y=1\\4x+8y=5\end{cases}$ ב. $\begin{cases}2(x-y)+4y=1+x\\2-7y+x=3(x-y)\end{cases}$.

4) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases}$.

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases}$

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) א. $(2,5)$ ב. $(-7,-10)$ ג. $(4,-2)$ ד. $(0,1)$ ה. $(1,-3)$ ו. $(-2,3)$.

2) א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$.

3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4) א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$ ג. $(7,2)$.

5) א. $(1,1)$ ב. $(-3,1)$ ג. $(1,1)$.

6) א. $(-1,-3)$ ב. $(2,10)$ ג. $(-2,4)$.

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0\cdot x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+4=6+x$

2) $3x+6-x=4+2x+2$

3) $6(x-2)=2x+5+4x$

4) $5x-3+x=4x+2x-3$

5) נתונה המשוואה: $\square+5x=3-2(x+2)$.

א. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

1) אף פתרון.

2) אינסוף פתרונות.

3) אין פתרון.

4) אינסוף פתרונות.

5) א. -8 ב. -1 ג. $-7x-1$

ד. $-7x+k$ כאשר k הוא מספר כלשהו השונה מ- -1.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.

פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.

2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.

3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$ ב. $-x^2+10x-16=0$

ג. $25x^2-20x+4=0$ ד. $2x^2-6x+5=0$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $4x^2-5x+7=4-x^2+13$ ב. $-x(x-5)=(1-3x)(1-x)+4$

ג. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$ ד. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

א. $x^2-36=0$ ב. $32x^2-18=0$

ג. $4x-x(x+2)=3(x-1)-x-6$ ד. $(2x-1)^2+(2x+1)^2=10$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

א. $-7x^2-14x=0$ ב. $5x^2-x=0$

ג. $6x(x-2)-1=4x-3(x+1)+2$ ד. $(5x-2)^2=(x-2)(x+3)+10$

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$ ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$ ד. $\frac{x}{2x^2-72}+\frac{2}{x^2+12x+36}=\frac{8x-15}{24-4x}+2$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x_1=2\ ,\ x_2=8$ ג. $x=\frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.

2) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1$ ב. $x_1=1\ ,\ x_2=1\frac{1}{4}$ ג. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$

ד. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$.

3) א. $x=\pm 6$ ב. $x=\pm\frac{3}{4}$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=\pm 1$

4) א. $x_1=0\ ,\ x_2=-2$ ב. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=2\frac{1}{6}$

ד. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{7}{8}$.

5) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq -3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$

ד. $x_1=-7.6\ ,\ x_2=-4\frac{2}{7}$.

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא x.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t\rightarrow at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5x^4+3x^2-8=0$

2) $x^4-3x^2+2=0$

3) $13x^2\left(3x^2-1\right)-2=3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

4) $x^2\left(x^2+1\right)=10\left(3x^2-10\right)$

5) $x^6+x^3=56$

6) $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

7) $x-9\sqrt{x}+14=0$

8) $x^8-4x^4-50=31x^4-84$

9) $125x^6-1=124\left(x^6+x^3+1\right)$

10) $\left(2x^2-x\right)^2-4\left(2x^2-x\right)+3=0$

11) $\left(x^2+2x\right)^2+7x^2+14x=-6$

12) $\frac{21}{x^2-4x+10}=6+x^2-4x$

13) $\frac{12}{x^2+2x-8}=1+\frac{7.5}{x^2+2x-3}$

14) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

15) $\frac{3}{3x^2-15}+\frac{1}{x^2+5}=\frac{10}{x^4-25}$

16) $\frac{x^2-1}{4x^2-28}+2=\frac{9}{x^4-8x^2+7}+\frac{x^2}{2x^2-2}$

17) $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^2+35=12\left(2x+\frac{3}{x}\right)$

18) $\frac{3x^4}{\left(x+2\right)^2}+\frac{3x^2}{x+2}=6$

19) $\left(2x-x^2+3\right)\left(2x-x^2-2\right)=0$

20) $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x-8\right)=-24$

תשובות סופיות:

1) $x=\pm 1$
2) $x=\pm 1,\pm\sqrt{2}$
3) $x=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3}$
4) $x=\pm 2,\pm 5$
5) $x_1=\sqrt[3]{7}\ ,\ x_2=-2$
6) $x=-2,\sqrt[3]{4}$
7) $x_1=4\ ,\ x_2=49$
8) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{34}\ ,\ x_{3,4}=\pm 1$
9) $x=5,-1$
10) $x_1=1.5\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=1\ ,\ x_4=-\frac{1}{2}$
11) $x=-1$
12) $x_{1,2}=1,3$
13) $x_1=0\ ,\ x_2=-2\ ,\ x_3=3.06\ ,\ x_4=-5.06$
14) $x_1=0\ ,\ x_2=-2$
15) אין פתרונות.
16) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$
17) $x=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},3$
18) $x=-1,2$
19) $x=3,-1$
20) $x=\pm 1,4,6$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים.
את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות.
פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x=\frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצאות הפרמטר m.

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m\neq 0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{1}{3}(a-3x)=\frac{1}{a}(ax-3)$

ג. $(x-2a)(x-2b)=x^2-2(a^2+b^2)$

ד. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

ה. $\frac{x}{a^2-a}-\frac{1}{2a}=\frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a}-\frac{2}{a^3-2a^2+a}$

2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+my=1\\x+y=m\end{cases}$

ב. $\begin{cases}ax+y=2\\x+ay=4\end{cases}$

ג. $\begin{cases}\frac{x}{m}+y=m\\x-m^2y=1\end{cases}$

ד. $\begin{cases}(m-1)x-(2m+3)y=5\\(m+2)x-(2m-1)y=10m\end{cases}$

ה. $\begin{cases}(2a+b)x-(2a-b)y=8ab\\(2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2\end{cases}$

3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2-2x+4a=a^2+3$

ג. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

ד. $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}=0$

ה. $(m^2+1)x^2-m^2x-1=0$

ו. $\frac{a}{x}+\frac{1}{b}=\frac{x}{a}+b$

ז. $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=\frac{b-6}{2-b}\ ,\ b\neq 2$ ב. $x=\frac{a^2+9}{6a}\ ,\ a\neq 0$ ג. $x=a+b$ ד. $x=-m$ ה. $x=a+1$

2) א. $m\neq 1\ ,\ (m+1,-1)$ ב. $a\neq\pm 1\ ,\ \left(\frac{2a-4}{a^2-1},\frac{4a-2}{a^2-1}\right)$

ג. $m\neq 0-1\ ,\ \left(m^2-m+1,\frac{m-1}{m}\right)$ ד. $m\neq 1,-2\ ,\ (2m+1,m-2)$

ה. $b\neq\pm 2a\ ,\ (2a+b,2a-b)$

3) א. $x=m+1,\mathrm{m}-1$ ב. $x=a-1,3-a$ ג. $x=m-5,-2m$

ד. $a\neq 0\ ,\ x\neq\pm a\ ,\ x=\pm a\sqrt{3}$ ה. $x=1,-\frac{1}{m^2+1}$

ו. $a,b\neq 0\ ,\ x=\frac{a}{b},-ab$ ז. $a\neq\pm b\ ,\ x=\frac{a+b}{a-b},\frac{a-b}{a+b}$.

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x}=a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x=a^2 \rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=\left(a\right)^2$.

הערות:

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$ שבה $a<0$ אין פתרון.
3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$
2) $\sqrt{x+2}=x$
3) $\sqrt{3x+1}+x=13$
4) $\sqrt{2x+7}+4=x$
5) $\sqrt{x-1}+3=x$
6) $\sqrt{10x+6}+9=x$
7) $\sqrt{x+6}-2=2x$
8) $\sqrt{24-x}+3=2x$
9) $\sqrt{x+16}+4=2x$
10) $2x=16-3\sqrt{x-1}$
11) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$
12) $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$
13) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-5}=\sqrt{11-x^2}$
14) $\sqrt{2x-1}+3=\sqrt{7x+1}$
15) $\sqrt{9x-8}-3\sqrt{x+4}=-2$
16) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$
17) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$
18) $\sqrt{2x-2}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x-2}$
19) $3\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}$

תשובות סופיות:

1) $x=22$
2) $x=2$
3) $x=8$
4) $x=9$
5) $x=5$
6) $x=25$
7) $x=0.25$
8) $x=3.75$
9) $x=4.25$
10) $x=5$
11) $x=6$
12) $x=4,-3$
13) $x=3$
14) $x=5$
15) $x=12$
16) $x=2,2\frac{8}{9}$
17) $x=6$
18) $x=1$
19) $x=2$

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x|=a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $|3x+14|=7$

2) $|3x-24|=x$

3) $|12-x|=3x$

4) $2x-|8-x|=10$

5) $|4x-5|=|2x+13|$

6) $|14-3x|=2|x+5|$

7) $|x|+7=|2x|$

8) $|x+2|+6=|2x-4|$

9) $|x+2|+|2x-6|=|4x+8|$

10) $|10-3x|-|x+4|=|2x-6|$

תשובות סופיות:

1) $x=-\frac{7}{3},\ -7$

2) $x=6,12$

3) $x=3$

4) $x=6$

5) $x=9,-1\frac{1}{3}$

6) $x=24,\frac{4}{5}$

7) $x=\pm 7$

8) $x=12,-1\frac{1}{3}$

9) $x=0,-12$

10) $x=0$

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ x^2+3y=10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-2y^2=17 \\ xy=-10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 \\ x+6y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2-2xy+8y^2=8 \\ 3xy-2y^2=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-y^2=33 \\ x+y=11 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 16x^2-y^2=391 \\ 4x-y=23 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4xy+x=-15 \\ \frac{3}{y}-2x=16 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{4}{y}-\frac{1}{x}=-19 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=21 \\ \frac{8}{x}-\frac{1}{y}=13 \end{cases}$

12) $\begin{cases} xy=24 \\ (y-x)^2-7(y-x)+10=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2y-xy^2=84 \\ x^2-2xy+y^2+5x-5y=24 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3} \\ x^2+y^2=9xy+25 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(2,4),(4,2)$

2) $(\pm 4,-2)$

3) $(\pm 2,\pm 1)$

4) $(5,-2),(-5,2)$

5) $\left(-2,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{11},\frac{1}{11}\right)$

6) $\left(3,\frac{1}{2}\right),\left(-3,-\frac{1}{2}\right),(2,1),(-2,-1)$

7) $(7,4)$

8) $(5,-3)$

9) $\left(-5,\frac{1}{2}\right)$, $\left(-24,-\frac{3}{32}\right)$

10) $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

11) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

12) $(4,6)$, $(-6,-4)$, $(3,8)$, $(-8,-3)$

13) $(-1.65,6.35)$, $(-6.35,1.65)$, $(7,4)$, $(-4,-7)$

14) $(5,45)$, $(-5,-45)$, $(45,5)$, $(-45,-5)$

משוואות מסכמות מתקדמות:

סיכום כללי:

תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.

- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.

- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.

- משוואה עם פרמטר/ים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטר/ים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטר/ים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+\sqrt{x+6}-6=0$

2) $x^2+5x-\sqrt{x^2+5x}-30=0$

3) $4x^2+16x-4\sqrt{x^2+4x}-3=0$

4) $2x^2+6x-\sqrt{x^2+3x+5}=5$

5) $x^2-\sqrt{16x^2+48}+7=0$

6) $x^2-\sqrt{6x^2-15}=1$

7) $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

8) $\frac{\sqrt{x^2+4x-12}}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+5}=\frac{7}{\sqrt{x-1}}$

9) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$

10) $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$

11) $\sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}}-\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}=2$

12) $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}$

פתור את המשוואות הבאות עבור $a>0$:

13) $x^2+ax-2a\sqrt{x^2+ax-a^2}=0$

14) $x^2+ax-2a\sqrt{3x^2+3ax-9a^2}=0$

פתור את המשוואות הבאות:

15) $\left|3-\left|2-x\right|+\left|x\right|\right|=1$

16) $\left|4-\left|5-x\right|\right|=\left|x+3\right|$

17) $\left|\frac{x+\left|3-x\right|}{x+2}\right|=18$

18) $\sqrt{25+\left|16x^2-25\right|}=4+4\left|x+1\right|$

19) $\frac{x^3-5x}{\sqrt{2x^2-4x-1}-\left|x\right|+2}=0$

20) הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה: $\frac{\left|x+2\right|}{\left|x\right|+2}=\left|2-x\right|+2$.

תשובות סופיות:

1) $x=3$
2) $x_1=4\ ,\ x_2=-9$
3) $x_1=0.5\ ,\ x_2=-4.5$
4) $x_1=1\ ,\ x_2=-4$
5) $x_{1,2}=\pm 1$
6) $x_{1,2}=\pm 2$
7) $x=1$.
8) $x=3$.
9) $x=2$.
10) $3.5\le x\le 7$.
11) $x=4$.
12) $x=1\ ,\ x=\frac{9}{16}$.
13) $x_1=-2a\ ,\ x_2=a$
14) $x_1=-2a\ ,\ x_2=3a$
15) $x\le 0$.
16) $x=-1$.
17) $x=-\frac{39}{18},-\frac{33}{18}$.
18) $x=-\frac{1}{4}\ ,\ x\le\frac{5}{4}$.
19) $x=-\sqrt{5}$.
20) שאלת הוכחה.

ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

שאלות:

פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

1) $(x-3)^3$

2) $(2y+5)^3$

3) $8x^3-1$

4) $8y^3+343$

5) a^6-27

6) $x^3y^6z^9-1$

7) $11+88x^{12}$

8) $64mn^4-8m^4n^7$

9) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^3+6x^2+12x+8}$

10) $\dfrac{x^3+64}{x^2+4x}$

משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

11) $x^3-12x^2+48x-64=0$

12) $125x^3=1-15x+75x^2$

13) $x^3+x-30=0$

14) $x^3-7x-6=0$

משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

15) $2x^3-7x^2+7x-2=0$

16) $2x^3+5x^2-2x-5=0$

מערכת משוואות:

17) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x^3+y^3=243 \\ x+y=9 \end{cases}$.

18) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x^3-y^3=91 \\ x^2y-xy^2=30 \end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x^3-9x+27x-27$

2) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$

3) $(a^2-3)(a^4+3a^2+9)$

4) $8(1+2x^4)(1-2x^4+4x^8)$

5) $\frac{1}{x+2}$

6) $x=4$

7) $x=3$

8) $x_{1,2,3}=\frac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ 2$

9) $(3,6)\ ,\ (6,3)$

10) $8y^3+60y^2+150y+125$

11) $(2y+7)(4y^2-17y+49)$

12) $(xy^2z^3-1)(x^2y^4z^6+xy^2z^3+1)$

13) $8mn^4(2-mn)(4+2mn+m^2n^2)$

14) $\frac{x^2-4x+16}{x}$

15) $x=\frac{1}{-}$

16) $x_{1,2,3}=-2\ ,\ -1\ ,\ 3$

17) $x_{1,2,3}=-2.5\ ,\ -1\ ,\ 1$

18) $(-5,-6)\ ,\ (6,5)$

מכינה במתמטיקה

פרק 3 - מבוא לפונקציות

תוכן העניינים

1. מהי פונקציה ..... (ללא ספר)
2. מערכת הצירים ..... (ללא ספר)
3. אורכי קטעים ושטחים יסודיים ..... (ללא ספר)
4. השתנות של פונקציה ..... (ללא ספר)
5. קצב השתנות של פונקציה ..... (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה

פרק 4 - הפונקציה הקווית

תוכן העניינים

1. ייצוג גרפי של פונקצית הקו הישר ..... (ללא ספר)
2. שיפוע ישר ..... (ללא ספר)
3. הקו הישר הכללי ..... (ללא ספר)
4. שיפוע דרך שתי נקודות ..... (ללא ספר)
5. משוואת ישר עם שיפוע ונקודה ..... (ללא ספר)
6. משוואת ישר המקביל לישר נתון ..... (ללא ספר)
7. משוואת ישר דרך שתי נקודות ..... (ללא ספר)
8. ישרים המקבילים לצירים ..... (ללא ספר)
9. חיתוך של ישר עם הצירים ..... (ללא ספר)
10. חיוביות ושליליות של קו ישר ..... (ללא ספר)
11. חישובי שטחים עם הפונקציה הקווית ..... (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה

פרק 5 - הפונקציה הריבועית

תוכן העניינים

1. הפונקציה הריבועית היסודית y=x^2 ..... (ללא ספר)
2. משפחת הפרבולות מהצורה y=x^2+c ..... (ללא ספר)
3. משפחת הפרבולות מהצורה y=(x-p)^2 ..... (ללא ספר)
4. משפחת הפרבולות מהצורה y=(x-p)^2+k ..... (ללא ספר)
5. משפחת הפרבולות עם מקדם a כללי ..... (ללא ספר)
6. משפחת הפרבולות מהצורה y=a(x-p)^2+k ..... (ללא ספר)
7. הצגה סטנדרטית של הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
8. סרטוט של גרף הפונקציה הריבועית הכללית ..... (ללא ספר)
9. מציאת נקודות האפס של פונקציה ריבועית עם a כללי ..... (ללא ספר)
10. ייצוגים שונים של פונקציה ריבועית ..... (ללא ספר)
11. חיתוך בין ישר ופרבולה ..... (ללא ספר)
12. חיתוך בין שתי פרבולות ..... (ללא ספר)
13. שאלות מסכמות ..... (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה

פרק 6 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

1. אי שוויונים ממעלה ראשונה 69
2. אי שוויונים ממעלה שנייה 71
3. אי שוויונים ממעלה שלישית 72
4. אי שוויונים עם מנה 73
5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו 75
6. שאלות מסכמות 76
7. אי שוויונים עם שורשים 78
8. מציאת תחום הגדרה 80
9. אי שוויונים עם ערך מוחלט 82

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $45x-26>109$

2) $6x>2(3x-1)$

3) $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

4) $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

5) $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

6) $4(6x-8)<8(3x-4)$

7) $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\geq 12-x$

8) $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

תשובות סופיות:

1) $x>3$
2) כל x
3) אף x
4) $x>-2$
5) $x<5$
6) אף x
7) $x\geq 12$
8) $x>-13$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2+bx+c\begin{matrix}>\\<\end{matrix}0$ כאשר $a\neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x^2<144$

2) $x^2-12x>-32$

3) $(x+2)(x+5)<0$

4) $(x+2)(x+4)<35$

5) $-x^2+13x+30<0$

6) $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

7) $(x-5)^2+x(x+2)<89$

8) $(5x+6)^2\leq 4(x-3)^2$

9) $-3x^2+12x>0$

10) $x^2-10x+25>0$

11) $(x-3)^2>(x-1)(x+6)-x^2-3x$

12) $2x^2+2x+24\geq 0$

תשובות סופיות:

1) $-12<x<12$

2) $x<4\ ,\ x>8$

3) $-5<x<-2$

4) $-9<x<3$

5) $x<-2\ ,\ x>15$

6) $x\leq 7\ ,\ x\geq 11$

7) $-4<x<8$

8) $-4\leq x\leq 0$

9) $0<x<4$

10) $x>5\ ,\ x<5$

11) $x<3\ ,\ x>5$

12) כל x

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3-4x^2+4x+1>0$, $x^4+2x^2+1<0$ וכו'.

בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.

לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

2) $x(x^2+x+1)>0$

3) $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

4) $x^3-25x\ge 0$

5) $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

6) $(x^2+8x+20)(3x-5)\le 0$

7) $(x^2-x-6)(x-1)<0$

8) $x^3-6x^2+9x\le 0$

9) $(x^2+6)(x+3)>0$

10) $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

תשובות סופיות:

1) $1<x<2$, $x>3$

2) $x>0$

3) $-2\le x\le -1$, $x\ge \frac{1}{2}$

4) $-5\le x\le 0$, $x\ge 5$

5) $x>2$

6) $x\le 1\frac{2}{3}$

7) $x<-2$, $1<x<3$

8) $x\le 0$, $x=3$

9) $x>-3$

10) $x<1$, $2<x<4$

אי-שוויונים עם מנה:

סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (או $\frac{f(x)}{g(x)}<0$) נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$ ו-$g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4}<0$ בו: $f(x)=2x+4$ ו-$g(x)=x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

2) $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

3) $\frac{1}{x^2-16}>0$

4) $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

5) $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

6) $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

7) $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

8) $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

9) $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

10) $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

תשובות סופיות:

1) $-3<x<1\ ,\ x>3$

2) $x<-\frac{2}{3}\ ,\ x\geq-\frac{1}{2}$

3) $x<-4\ ,\ x>4$

4) $2<x<3\ ,\ x>3$

5) $\frac{1}{2}\leq x<5$

6) $x>1$

7) $x>-2$

8) $2<x<3$

9) $1\leq x\leq 6$

10) $x<2\ ,\ x>6$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שיוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a<b$ וגם $b<c$, ניתן לכתוב: $a<b<c$.

מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שיוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $3<x+1<5$

2) $0<\frac{1}{x+4}<2$

3) $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

4) $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

5) $6x-38\le x-3\le 5x+7$

6) $6<\frac{2x+10}{3}\le\frac{7x-20}{5}$

7) $-1\le\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

8) $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

תשובות סופיות:

1) $2<x<4$

2) $x>-3\frac{1}{2}$

3) $x>0$

4) $x<2\frac{2}{5}\ ,\ x>2\frac{2}{3}$

5) $-2.5\le x\le 7$

6) $x\ge 10$

7) $1\le x<13$

8) ϕ

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x \le -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \le 5 \cup 0 < x < 8\}$

2) $x(x+5)-3x+15 \le 2x-1-x(4-x)$

3) $\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \le 0$

4) $\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$

5) $\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \ge 0$

6) $x(x+3)(2x-5) < 0$

7) $\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$

8) $\frac{5-2x}{(x-8)^2} \le 0$

9) $\frac{x-3}{x^2+2} > 0$

10) $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$

11) $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$

12) $\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$

13) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$

14) $\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \ge \frac{x}{x-4}-\frac{x}{x-2}$

15) $6 < 5x-x^2 \cap x^2 > 3x+10$

16) $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$

17) $1 < \frac{x-1}{x-4} \le 2$

18) לאלו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה: $g(x)=\frac{x+1}{x+3}$?

תשובות סופיות:

1) $-2 < x \le -\frac{3}{4}$

2) $x \le -4$

3) $-4 \le x < 2 \ , \ 3 \le x$

4) $x < -7 \ , \ -\frac{1}{3} < x < 2 \ , \ x > 5$

5) $-1 < x \le 1.5 \ , \ 4 < x \le 12$

6) $x < -3 \ , \ 0 < x < 2.5$

7) $x < -1 \ , \ 2 < x < 6 \ , \ x > 6$

8) $2.5 \le x < 8 \ , \ x > 8$

9) $x > 3$

10) $x < -3 \ , \ 0 < x < 1 \ , \ x > 4$

11) $-1 < x < 0 \ , \ 1 < x < 3 \ , \ x > 3$

12) $x > 7$

13) $x < -2 \ , \ 2 < x < 4$

14) $x \le 0 \ , \ 1 \le x < 2 \ , \ x > 4$

15) אף x

16) $x \ne 1$

17) $x \ge 7$

18) $-3 < x < -\frac{3}{5} \ , \ x > 3$

אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a\geq 0$	$\sqrt{f(x)}<a$	$0\leq f(x)<a^2$
$a<0$	$\sqrt{f(x)}<a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)}>a$	כל x בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $\sqrt{x+3}<7$

2) $\sqrt{2x-5}\geq 1$

3) $\sqrt{2x^2+5x-6}>2-x$

4) $\sqrt{x^2+x-6}<x-3$

5) $\sqrt{x^2+3x+2}-1<\sqrt{x^2-x+1}$

6) $\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x^2-x+1}<1$

7) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>\frac{3}{2}$

8) $\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$

9) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$

10) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x}$

11) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$

12) $\sqrt{1+\frac{9}{x}}+5\sqrt{\frac{x}{x+9}}\geq 4$

תשובות סופיות:

1) $-3 \le x < 46$.
2) $x \ge 3$.
3) $x < -10 \ , \ x > 1$.
4) $\varnothing$.
5) $-1 \le x < \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \ , \ x \le -2$.
6) $-2 \le x < \frac{-13+\sqrt{73}}{16} \ , \ x \le -3$.
7) $\frac{12}{25} < x \le \frac{1}{2}$.
8) $x < 2\sqrt{5} - 4$.
9) $1 < x \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.
10) $-\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \le 1$ שזה: $-2.618 < x \le 1$.
11) $2.5 \le x < 3$.
12) $x < -9 \ , \ x > 0$.

תחום הגדרה:

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-4}$

ב. $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

ג. $f(x)=\sqrt{12x-x^2-x^3}$

ד. $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$

ה. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$

ו. $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1\le x\le 4$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x>2\ ,\ x\le -2$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, (a פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.
ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים.
מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a.

תשובות סופיות:

1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1 \, , \, x \geq 6$ ג. $x \leq -4 \, , \, 0 \leq x \leq 3$

ד. $x > 2 \, , \, -5 \leq x < -2$ ה. $x > 2 \, , \, -2 \leq x < 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3} \, , \, 1 \leq x < \frac{3}{2} \, , \, x > \frac{3}{2}$

2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2} \, , \, x \geq 1$

ד. $-2 \leq x \neq 1 \, , \, x \leq -3$.

3) $a = 5$.

4) $a = 2$.

5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$.

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

מקרה	$\lvert x\rvert < a$	$\lvert x\rvert > a$
פתרון	$-a < x < a$	$x < -a \cap x > a$

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\lvert x+2\rvert < 3$ ב. $\lvert 2x+1\rvert > 7$

ג. $\lvert 6-2x\rvert < x$ ד. $\lvert 2x+1\rvert - 3x > 4$

2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1 < \lvert 4-3x\rvert < 7$ ב. $\lvert 2x+3\rvert < 8 < \lvert 5-x\rvert$

3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\lvert x^2+6x-4\rvert < 12$ ב. $\lvert x^2+x-10\rvert > 3x-2$

ג. $\lvert x^2-3x\rvert < 4$ ד. $\lvert 6x^2-7x-4\rvert > 1$

ה. $x^2-6\lvert x\rvert+5 \le 0$ ו. $x^2-6\lvert x+1\rvert-1 > 0$

4) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x-3|+|2x+2|>7$

ב. $|x+8|<11-|1-3x|$

ג. $|3-2x|-11>4-|6+x|$

ד. $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

ה. $|5+4x|-|3-x|+\left|4-\frac{1}{2}x\right|\le 22$

ו. $|x+3|+|x^2-5x+4|<19$

5) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\ge 3$

ב. $1\le\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\le 2$

ג. $\frac{|x-6|+8x}{x-12}\le 12$

ד. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|>5$

6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

א. $\sqrt{x^2-|x-12|}<x$

ב. $2-\sqrt{1-x}\le|x+2|-3$

ג. $\sqrt{|2x+1|-x-1}\le 4-|3x|$

ד. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$

תשובות סופיות:

1) א. $-5<x<1$ ב. $3<x$ או $x<-4$

ג. $2<x<6$ ד. $x<-1$.

2) א. $1\frac{2}{3}<x<3\frac{2}{3}$ או $-1<x<1$ ב. $-5\frac{1}{2}<x<-3$

3) א. $-2<x<2$ או $-8<x<-4$ ב. $4<x$ או $x<2$

ג. $-1<x<4$ ד. $x<-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$, $x>\frac{5}{3}$

ה. $1\le x\le 5$ או $-5\le x\le -1$ ו. $x<-5$, $x>7$

4) א. $2<x$ או $x<-2$ ב. $-1<x<1$

ג. $4<x$ או $x<-6$ ד. $4<x$ או $x<-1$

ה. $-7\frac{3}{7}\le x\le 4$ ו. $-2<x<6$.

5) א. $2<x$, $\frac{7}{6}\le x<2$ ב. $x\ge 6$, $0\le x\le\frac{2}{3}$

ג. $x<12$, $x\ge 46$ ד. $\frac{1}{2}<x<1$, $1<x<2$, $2<x\le 4$

6) א. $x=-1$, $x\ge 3$, $x\ne 12$ ב. $x\le\frac{-15+\sqrt{33}}{2}$

ג. $0\le x\le 1$, $-1\le x\le -\frac{2}{3}$ ד. $-1<x<\sqrt[3]{4}$

מכינה במתמטיקה

פרק 7 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

1. חוקי החזקות 85
2. חוקי השורשים 90
3. כתיבה מדעית של מספרים 94

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

1. $a^0=1$
2. $a^1=a$
3. $a^n\cdot a^m=a^{m+n}$
4. $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
5. $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$
6. $a^m\cdot b^m=\left(a\cdot b\right)^m$
7. $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$
8. $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. a^2a^6
ב. $t^3t^5t^7$
ג. $b^2b^5b^{12}b^3$
ד. $\frac{k^8}{k^3}$
ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$
ו. $\frac{c^6}{c^2}$
ז. $\frac{a^3a^{19}}{a^{15}}$
ח. $\frac{x^{30}}{x^9x^{18}}$
ט. $\frac{y^3y^{15}}{y^4y^{14}}$
י. $3^23^33^4$
יא. $\frac{2^{16}2^2}{2^{10}}$
יב. $\frac{5^{20}5^35^{16}}{5^45^{22}5^8}$

2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $\frac{3^42^7}{2^63^2}$
ב. $\frac{a^{10}b^{13}a^3}{b^4b^6b^2a^{12}}$
ג. $\frac{x^8y^5y^9x^2}{y^4x^4}$

3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^62^{17}3^32^4}{3^42^33^2}$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243\cdot2^n$ לבין הביטוי הנתון.

4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3\cdot 2^7}{2^4\cdot 2^5}$ ב. $\frac{9^3\cdot 27^2}{3^9\cdot 81}$

ג. $\frac{10^9\cdot 25^5\cdot 8^{-1}}{40^3\cdot 125^5}$ ד. 2^3+2^5

5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$.

א. $\left(a^2\right)^4$ ב. $\left(c^3\right)^{10}$ ג. $\left(x^3x^{10}\right)^2$

ד. $\frac{\left(b^2\right)^3}{b^2b^3}$ ה. $\frac{n^7n^8}{\left(n^3\right)^4}$ ו. $\frac{d^{20}\left(d^4\right)^2}{d^{12}\left(d^3\right)^2}$

ז. $\frac{2^5\left(2^4\right)^2 2^3}{\left(2^32^2\right)^3}$ ח. $\frac{3^6\left(3^33^2\right)^6}{3^{28}\left(3^2\right)^3}$ ט. $\frac{\left(8^3\right)^8 8^{11}}{\left(8^28\right)^3 8^8}$

י. $\frac{\left(2^4\right)^5\left(3^6\right)^7 2^{20}}{3^{35}2^{40}}$ יא. $\frac{\left(3^2\right)^6 5^{31}3^7}{\left(5^2\right)^{10}5^{11}3^{18}}$ יב. $\frac{\left(3^2\right)^7 5^{10}\left(5^3\right)^2}{3^95^{16}}$

6) לפניך הביטויים הבאים: $\left(\left(3^2\right)^3\right)^4$ ו- $\left(\left(3^6\right)^n\right)^2$.
מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^33^5}{2^23^4}$ ב. $\frac{5^{20}3^{14}3^8}{3^{20}5^{12}5^8}$ ג. $\frac{7^{12}2^22^6}{2^57^{10}7}$

8) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^29\cdot 81^2$ ב. $64^22^38^2$ ג. $125\cdot 25\cdot 5^5$

ד. $\frac{2^4\cdot 16^5}{8\cdot 512}$ ה. $\frac{\left(4^2\right)^3 16}{64\cdot 2^3}$ ו. $\frac{\left(\left(3^4\right)^4\right)^5}{81^327^43^5}$

9) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{\left(2a^2b\right)^3\cdot\left(ab^{-3}\right)^2}{4ab^{-2}\cdot\left(\frac{a^2}{b}\right)^4}$

ב. $\frac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\frac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\frac{4^{b+3}}{4^{b+1}+4^{b+2}}$

ד. $\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^{n+3}+x^{n+5}}{x^{n+2}}$

10) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $\left(ab\right)^n=a^nb^n$ ו-$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

א. $\left(a^2b\right)^3$

ב. $\left(m^4n^3\right)^5$

ג. $\left(x^{12}y^3\right)^3$

ד. $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$

ה. $\left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7$

ו. $\left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$

ז. $\left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6$

ח. $\left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2$

ט. $\left(\frac{\left(b^{12}c\right)^2c^{14}}{c\left(c^3b^5\right)^4b^3}\right)^2$

11) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\left(\frac{3^92^62^2}{3^62^53^2}\right)^2$

ב. $\left(\frac{\left(5^4\right)^23^6}{3^55^7}\right)^2$

ג. $\left(\frac{7^3\cdot16\cdot128\cdot49}{\left(2^27\right)^5}\right)^3$

12) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\frac{1}{4^6}$

ב. $\frac{1}{5^3}$

ג. $\frac{1}{2^{10}}$

ד. $\frac{1}{8}$

ה. $\frac{1}{81}$

ו. $\frac{1}{125}$

13) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\frac{1}{4^{-3}}$

ב. $\frac{1}{3^{-2}}$

ג. $\frac{1}{5^{-3}}$

14) חשב את הביטויים הבאים:

א. $3^2\cdot 3^{-5}\cdot 3^7$

ב. $2^{-8}\cdot 512\cdot 2^2$

ג. $5^6\cdot 5^{-3}\cdot 5^{-2}$

ד. $2^{14}\cdot 3^{-6}\cdot 2^{16}\cdot 3^4\cdot 2^{-30}$

ה. $\frac{2^{-5}\cdot 5^3\cdot 2^{14}}{5^2\cdot 5^{-10}\cdot 5^8\cdot 2^6}$

ו. $\frac{3^{-6}\cdot 7^7\cdot 7^{-4}}{3^{-4}\cdot 3^{-3}\cdot 7^3}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

ב. $\frac{\left(4^4\right)^{-4}3^{-11}}{\left(3^{-2}4^3\right)^{-6}}$

ג. $\frac{2^{-3}5^4}{5^4\cdot 125\cdot\left(5^2 2\right)^{-3}\cdot 2^{-4}}$

16) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a^{n+2}\cdot a^{2-3n}}{\left(a^3\right)^{n+1}}$

ב. $\frac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\frac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\frac{\left(m^{n+2}\right)^3\cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}}\cdot\left(m^3\right)^{n-2}}$

תשובות סופיות:

1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5.

2) א. 18 ב. ab ג. x^6y^{10}.

3) $n=16$.

4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40.

5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5.

6) $n=2$.

7) א. 6 ב. 9 ג. 56.

8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}.

9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x}+x$.

10) א. a^6b^3 ב. $m^{20}n^{15}$ ג. $x^{36}y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21}b^3$
ז. $x^{12}y^{18}$ ח. t^4r^{12} ט. b^2c^6.

11) א. 576 ב. 225 ג. 8

12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}.

13) א. 64 ב. 9 ג. 125.

14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3.

15) א. $5^{24}\cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3\cdot 2^4$.

16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}.

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

1. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
4. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a\cdot b}$
5. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

א. $3^{\frac{1}{4}}$ ב. $2^{\frac{3}{5}}$ ג. $6^{\frac{5}{6}}$

ד. $-12^{\frac{2}{7}}$ ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$ ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$

ז. $5^{-\frac{1}{4}}$ ח. $27^{-\frac{1}{3}}$ ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$ ב. $-\sqrt{25}$ ג. $\sqrt[3]{8}$

ד. $-\sqrt[7]{128}$ ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$ ו. $\left(\sqrt[5]{1024}\right)^2$

ז. $\left(\sqrt[5]{-243}\right)^3$ ח. $\sqrt[4]{-16}$ ט. $\sqrt[4]{-25^2}$

י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $8^{\frac{2}{3}}$ ב. $32^{-\frac{3}{5}}$ ג. $128^{-\frac{2}{7}}$

ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ ח. $343^{-\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$ ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$.

21) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$ ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2}\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400}\sqrt{2}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

א. $3\sqrt{2}$ ב. $5\sqrt{3}$ ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ד. $2\sqrt[3]{3}$ ה. $x\sqrt{x}$

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

א. $2\sqrt{5}$ ב. $4\sqrt[3]{2}$ ג. $2\sqrt[5]{3}$

ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ז. $-5\sqrt[3]{2}$ ח. $-5\sqrt[4]{2}$ ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$

ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$

ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$

ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{18}-\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7}+\sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}$

ד. $\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$

ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160}-\sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{-2.5}\cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{2}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}$

ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}}\cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}}\cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{-\frac{1}{8}}\cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ

ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$.

18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16

ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5.

19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$

ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$.

20) $\sqrt{2}$.

21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2

ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$.

22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$.

23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$

ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$.

24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$.

25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$

ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$.

26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$

ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$.

27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$.

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000
ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000
ד. 23,400,000
ה. 0.0003
ו. 0.00000042
ז. 0.000000042
ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$
ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$
ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$
ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$
ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

28) א. $1.5\cdot10^{7}$ ב. $1.5\cdot10^{6}$ ג. $1.5\cdot10^{11}$ ד. $2.34\cdot10^{7}$ ה. $3\cdot10^{-4}$
ו. $4.2\cdot10^{-7}$ ז. $4.2\cdot10^{-8}$ ח. $4.2\cdot10^{-10}$.

29) א. $9\cdot10^{12}$ ב. $4\cdot10^{12}$ ג. $1.25\cdot10^{11}$ ד. $1.25\cdot10^{14}$ ה. $1.6\cdot10^{-15}$
ו. $6.4\cdot10^{-14}$ ז. $1.25\cdot10^{-16}$ ח. $3.43\cdot10^{-25}$.

מכינה במתמטיקה

פרק 8 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

1. משוואות מעריכיות יסודיות 95
2. משוואות עם חיבור וחיסור איברים 97
3. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס 99
4. משוואות מסכמות שונות 100
5. משוואות עם קבוע אוילר 101
6. מערכת משוואות מעריכיות 102
7. אי שוויונים מעריכיים 103
8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך 104

משוואות מעריכיות יסודיות:

סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $2^x = 16$

ב. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג. $10^{x-2} = 10000^{x+1}$

ד. $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה. $\left(2^x \cdot 32\right)^3 = 8$

ו. $\left(5^{x^2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז. $\frac{7^x}{343^3} = 1$

ח. $\left(25 \cdot 0.2^{2x}\right)^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

2) פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א. $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$

ב. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג. $25\left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$

ב. $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג. $\left(9\sqrt{27}\right)^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$

ד. $\sqrt[x]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה. $2^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8\left(\sqrt{8}\right)^{-\sqrt{x}}$

ו. $5^x \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$

ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$

ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$

ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$

ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$

ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$

ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = \left(2\sqrt{5}\right)^{4-x}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=4$ ב. $x=-\frac{1}{3}$ ג. $x=-2$ ד. $x=2,8$ ה. $x=-4$

ו. $x=1,-\frac{1}{5}$ ז. $x=9$ ח. $x=1$.

2) א. $x=-1$ ב. $x=-2$ ג. $x=3,-2$.

3) א. $x=-\frac{1}{2}$ ב. $x=1$ ג. $x=-\frac{8}{19}$ ד. $x=2,-\frac{2}{3}$ ה. $x=4,9$ ו. $x=25$.

4) א. $x=0$ ב. $x=4$ ג. $x=2$ ד. $x=2$ ה. $x=5$

ו. $x=1.5$ ז. $x=\frac{2}{3}$.

משוואות עם חיבור וחיסור איברים:

סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחיסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב-t, למשל במשוואה: $4^x-3\cdot 2^x=4$ נסמן: $2^x=t$.

נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.
לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה-x המתאימים.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $2^x+6\cdot 2^x=56$

ב. $8^x+3\cdot 8^x=256$

ג. $5\cdot 3^x-3^{x+1}=162$

ד. $2\cdot 6^x+6^{x+2}-6^{x-1}=227$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $81^{x+1}+18\cdot 3^{4x-3}=735$

ב. $5^{3x+2}+4\cdot 125^x=29$

ג. $\left(2^{3x+1}\right)^2-64^{x-\frac{1}{3}}=15$

ד. $\sqrt{10000^{x+1}}-\sqrt[4]{10^{8x+1}}=\sqrt[4]{1000}\cdot\left(\sqrt[4]{10^7}-1\right)$

ה. $6^{-x}-5\cdot 36^{-\left(\frac{x}{2}+1\right)}=186$

ו. $5^{-x}+25^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}-5^{-x-1}=145$

ז. $2\cdot 10^{x+1}+10^{x+2}=3\cdot 5^{x+1}$

ח. $4^{x+2}-6\cdot 4^x=7\cdot 12^{x+1}+6\cdot 12^x$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור ממעלה שנייה):

א. $9^x-36\cdot 3^x+243=0$

ב. $16^{x+1}-65\cdot 4^x+4=0$

ג. $6^x-4\cdot 6^{-x}+3=0$

ד. $4^{-x}-3\cdot 4^x+2=0$

ה. $\left(\frac{4}{9}\right)^x-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1}=-\frac{2}{3}$

ו. $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2-5\cdot 2^{\frac{1}{3}x+1}+1=0$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

א. $\frac{20}{9^x+1}=3-\frac{8}{9^x-1}$

ב. $\frac{7^x}{7^x-4}+\frac{8}{7^x+5}=3$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}}-6\cdot 5^{x-1.5}+1=0$

ב. $3^x-\sqrt{16\cdot 3^{x+1}}=-9$

ג. $36^x-6^{x+1}\cdot 3^x+8\cdot 9^x=0$

ד. $4\cdot 9^x-10\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$

ה. $25\cdot 5^{2x}+16\cdot 15^x=9^{x+1}$

ו. $9^x+4^x-6^x=\frac{7}{6^{1-x}}$

ז. $\frac{8^{2x}-8}{7}=4^x-2$

ח. $2^{3x}-2^{2x+2}-2^x+4=0$

תשובות סופיות:

1) א. $x=3$ ב. $x=2$ ג. $x=4$ ד. $x=1$.

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=0$ ג. $x=\frac{1}{3}$ ד. $x=\frac{1}{4}$

ה. $x=-3$ ו. $x=-2$ ז. $x=-3$ ח. $x=-2$

3) א. $x=2,3$ ב. $x=1,-2$ ג. $x=0$ ד. $x=0$

ה. $x=0,1$ ו. $x=-6,-9$.

4) א. $x=1,-\frac{1}{2}$ ב. $x=1$.

5) א. $x=\frac{1}{2},1\frac{1}{2}$ ב. $x=1,3$ ג. $x=1,2$ ד. $x=1,0$

ה. $x=-2$ ו. $x=1,-1$ ז. $x=0,\frac{1}{2}$ ח. $x=0,2$.

משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי.
יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

הערה:

יש לבדוק את ערכי ה-x עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\left(\sqrt{3-x}\right)^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^{x}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{3-x}}$.

2) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2+x}=1$.

3) $\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}}=|x-3|^{-1}$.

תשובות סופיות:

1) $x=\frac{1}{4}\ ,\ 1\ ,\ 2$

2) אין פתרון.

3) $x=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,4$

משוואות מסכמות שונות:

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5\left(2^x-2\right)+2=4^x-2^x$.

2) $\frac{6}{4^{x-1}-1}+\frac{2^{x+1}}{2^x+2}=\frac{2^x+4}{2^x-2}$.

3) $\frac{4^x}{4^x-10}-\frac{4}{2^{2x-1}-3}=\frac{32}{16^x-4^{x+2}+60}$.

4) $3^{2x^2+2}-3^{x^2+3}+9=3^{x^2+1}$.

5) $\sqrt[x]{10}=4\cdot\sqrt[2x]{10}+60$.

6) $\sqrt[x-1]{8\cdot 2^{x+1}}=\left(\sqrt[x]{2}\right)^2\cdot\sqrt[x-1]{\sqrt[x]{32}}$.

7) $10\cdot 4^{x+2}-16\cdot 10^x-90\cdot 6^x+36\cdot 15^x=0$.

תשובות סופיות:

1) $x=1,2$.
2) $x=3$.
3) $x=1.5$.
4) $x=1,-1$.
5) $x=\frac{1}{2}$.
6) $x=-3$.
7) $x=1,-2$.

משוואות עם קבוע אוילר:

סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828.
למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

א. $e^{3x}=e^{2x-1}$

ב. $e^{5x-1}=e\cdot e^{6x+1}$

ג. $e^{x-5}=\left(e^{1-x}\right)^3$

ד. $e^x\cdot\sqrt{e^{3x-1}}=\left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

א. $e^2\cdot e^x-e^{x+1}=e-1$

ב. $\sqrt[3]{e^{x+1}}\cdot e^2=e^x\sqrt{e}$

ג. $e^{2x}+e^x-2=0$

ד. $e^{1+x}+e^{1-x}=e^2+1$

3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

א. $xe^x=\sqrt[4]{e}\cdot x$

ב. $e^{3x}=x\cdot e^{3x}$

ג. $xe^{x^2}=\frac{x}{\sqrt{e^x}}$

ד. $\sqrt[3]{e^{3x-1}}\cdot x=xe^x$

תשובות סופיות:

1) א. $x=-1$ ב. $x=-3$ ג. $x=2$ ד. $x=1\ ,\ \frac{1}{6}$.

2) א. $x=-1$ ב. $x=\frac{11}{4}$ ג. $x=0$ ד. $x=1\ ,\ -1$.

3) א. $x=0\ ,\ \frac{1}{4}$ ב. $x=1$ ג. $x=0\ ,\ -\frac{1}{2}$ ד. $x=0$.

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

1) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} y=3^x \\ y=18-3^x \end{cases}$.

2) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x}-5^y=5^x-25 \\ y-x=2 \end{cases}$.

3) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} \frac{1}{3^y-4}+\frac{3}{3^x-2}-\frac{1}{3^x+2}=3 \\ 4^y=\sqrt{256^x} \end{cases}$.

4) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^x+2^y=13 \\ 2\cdot 5^x-2^y=2 \end{cases}$.

5) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 2\cdot 3^x-3\cdot 2^y=42 \\ 3^{x+1}-2^{y+1}=73 \end{cases}$.

6) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x+1}+8\cdot 10^x-2^{2y+4}=0 \\ \left(\sqrt{3}\right)^y=27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases}$.

7) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 6\cdot 4^x-7\cdot 6^{y-1}+2\cdot 3^{x+y}=6^y \\ \sqrt[4]{5^x}\cdot\sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^y}=\sqrt[4]{125}\cdot 5^x \end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $(2,9)$ **2)** $(0,2)\ ,\ (2,4)$ **3)** $(1,2)$ **4)** $(1,3)$

5) $(3,2)$ **6)** $(-1,-2)$ **7)** $(1,2)\ ,\ (-1,0)$

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השיוויונים הבאים:

1) $3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x}$

2) $\sqrt{2^x} \le 4^{x^2-1\frac{1}{4}}$

3) $e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x}$

4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \ge \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x}$

5) $25^x + 5 < 6 \cdot 5^x$

6) $e^{2x} - 2e^x + 1 \le 0$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

7) $e^x > 3$

8) $e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

תשובות סופיות:

1) $x < \frac{2}{3}$

2) $x \ge 1\frac{1}{4}$ או $x \le -1$

3) $0 \le x < 1$

4) $x \le \frac{1}{8}$

5) $0 < x < 1$

6) $x = 0$

7) $x > \ln 3$

8) $x > \ln 4$ או $x < 0$

אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x) > 0$.

דרך הפתרון: אם: $f(x) > 1$ אז: $g(x) > h(x)$.

אם: $0 < f(x) < 1$ אז: $g(x) < h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $x^{2x-1} > x^{x+2}$

2) $(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1}$

3) $x^{2x-6} < 1$

4) $x^{2x^2+2} < x^{5x}$

5) $(x^2-6x+13)^{x^2-2x} \geq (x^2-6x+13)^3$

6) $(x+1)^{|x|} < x^2+2x+1$

תשובות סופיות:

1) $x > 3$, $0 < x < 1$.
2) $3 < x < 6$.
3) $1 < x < 3$.
4) $1 < x < 2$, $0 < x < 0.5$.
5) $x \geq 3$, $x \leq -1$.
6) $0 < x < 2$.

מכינה במתמטיקה

פרק 9 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות 105
2. חוקי הלוגריתמים 108
3. חישובים עם חזקה לוגריתמית 112
4. מעבר בין בסיסים 113
5. הלוגריתם הטבעי 115
6. משוואות עם בסיסים שונים 117
7. מערכת משוואות לוגריתמיות 118
8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות 119
9. אי-שוויונים לוגריתמים 120

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a \neq 1 \ , \ b > 0 \ , \ a$.

הסבר:

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b. ערך חזקה זו הוא x. ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0 \ , \ a \neq 1$.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_6(4x-2)=1$

ב. $\log_4(4-x)=\frac{1}{2}$

ג. $\log_8(x^4-73)=1$

ד. $\log_3\frac{x+3}{3-3x}=-2$

ה. $\log_x(2x^2+x-12)=2$

ו. $\log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

א. $\log_4(\log_3 x)=1$

ב. $3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$

ג. $\log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2}$

ד. $\log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$

5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_2(3^x+37)=6$

ב. $\log_3(3\cdot 2^x-303)=4$

ג. $\log_5(126\cdot 5^x-25)=2x+1$

ד. $3\log_2\left(3\cdot 4^{1+\frac{1}{3}x}-11\cdot 2^{\frac{x}{3}}+3\right)=12+2x$

6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

א. $(\log_2 x)^4=10000$

ב. $2(\log_3 x)^2+\log_3 x=10$

ג. $\frac{3\cdot\log_{14}x+1}{(\log_{14}x)^2}=4$

ד. $\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x}+\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x+2}=2$

תשובות סופיות:

1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
ו. 4 ז. -1.5

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=65,536$ ג. $x=27$ ד. $x=4$
ה. $x=5$ ו. $x=4$

3) א. $x=2$ ב. $x=2$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=-2$ ה. $x=3$ ו. $x=2$

4) א. $x=81$ ב. $x=5$ ג. $x=\pm 4$ ד. $x=\pm 1$

5) א. $x=3$ ב. $x=7$ ג. $x=-1,\ 2$ ד. $x=-6$

6) א. $x=1024,\ \frac{1}{1024}$ ב. $x=9,\ \frac{1}{9\sqrt{3}}$
ג. $x=14,\ \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x=\frac{1}{3}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a>0\neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:

- מכפלה לסכום: $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$.
- מנה להפרש: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$.
- מקדם למעריך: $\log_a b^n=n\log_a b$ (כאשר $b>0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_3 12+\log_3 2.25$

ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40+\log_{\frac{1}{5}} 12.5+\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}$

ג. $\log_2 200-\log_2 100$

ד. $\log_3 60-\log_3 540$

ה. $\log_4 8+\log_4 12-\log_4 6$

ו. $\log_7 1.5-\log_7 147+\log_7 2$

ז. $3\log_5 2-\log_5 1.6$

ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4+2\log_{\sqrt{4}}\sqrt{10}$

ט. $\frac{1}{2}\left(\log_7\frac{7}{2}+\log_7 2\right)+\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 8$

י. $\frac{1}{4}\log 81-\log 1.5-\frac{1}{2}\log 40$

2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$

ב. $\frac{\log_9 62.5+\log_9 2}{\log_9 0.2}$

ג. $\frac{\log_3 5-\log_3 2+\log_3 50}{\log_3 225-2}$

ד. $\frac{2-2\log_3 4+\log_3 8\frac{8}{9}}{4-\log_3 0.01-2\log_3 18}$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x+\log_2(x-6)=4$

ב. $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$

ג. $\log_2(x+30)-\log_2 x=4$

ד. $\log_5(x+146)-\log_5(x+2)=2$

ה. $2\log_3(2x-1)-\log_3(22x+9)=-1$

ו. $2\log_5(x-2)=\log_5(4x-15)+\log_5 x$

4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5(4x-3)=\log_5 7$.

ב. $2\log_2(2x-2)-\log_2(16-x)=\log_2(x-1)+1$.

5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3(3\cdot 5^x+39)=3+\log_3(5^x-3)$.

ב. $\log_2(3-4^{x+1})-\log_2 11=x$.

6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_4 x\cdot\log_4(16x)=8$.

ב. $\log_2\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\log_2(1024x)=-11$.

ג. $\log_2 x^2\log_2\left(\frac{x}{16}\right)=-\log_2(64x)$.

ד. $(\log_4 4x)^2=\log_4 4x^2+1$.

ה. $\log_3(9x^2)\cdot\log_3(9x^3)=\log_3\left(\frac{81}{x}\right)+2$.

ו. $\frac{\log_2\left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2}+\frac{\log_2(2x)}{\log_2 x}=1\frac{7}{9}$.

שאלות הבעה:

7) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$

ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

8) נתון: $\log_2 5 = b$, $\log_2 3 = a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

9) נתון: $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$.

הבע באמצעות a את $\log_{18} 27$ ואת $\log_{18} 16$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

10) $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$.

11) $2\log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$.

12) $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

13) $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$.

תשובות סופיות:

1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2
ו. -2 ז. 1 ח. 6 ט. 1.5 י. -0.5.

2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5.

3) א. $x=8$ ב. $x=3,\frac{1}{27}$ ג. $x=2$ ד. $x=4$ ה. $x=3$ ו. $x=4$.

4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$.

5) א. $x=1$ ב. $x=-2$.

6) א. $x=16,\frac{1}{256}$ ב. $x=2,\frac{1}{512}$ ג. $x=4,\ 2\sqrt{2}$ ד. $x=4,\frac{1}{4}$
ה. $x=\frac{1}{9},\sqrt[6]{3}$ ו. $x=8,\ \sqrt[7]{2^{15}}$.

7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$.

8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}$.

9) $3(1-a)\ ,\ 4(2a-1)$.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

חישובים עם חזקה לוגריתמית:

סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x}=x$ כאשר $a>0\neq 1$.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$

2) נתונה התבנית: $3\cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x=\log_4 7$ ב. $x=\log_4\sqrt{3}$

ג. $x=2\log_4 0.1$ ד. $x=\sqrt{\log_2 5}$

3) נתונה התבנית: $\frac{1}{6}\cdot 9^x-2\cdot 3^x+1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x=-1$ ב. $x=\log_3 5$

ג. $x=\log_3\sqrt{6}$

4) חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{36}}81}$ ב. $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}}5}}$

תשובות סופיות:

1) א. 8 ב. 25.

2) א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15.

3) א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2-2\sqrt{6}$.

4) א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{2}{\sqrt[9]{25}}$.

מעבר בין בסיסים:

סיכום כללי:

מעבר מבסיס a לבסיס m (כאשר: $a>0\ \neq 1$ ו-$m>0\neq 1$, וכן: $b>0$)
יתבצע באופן הבא: $\log_a b=\frac{\log_m b}{\log_m a}$.

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_4 7\cdot\log_7 4$

ב. $\log_{0.1}3\cdot\log_9 1000$

ג. $\log_{\sqrt{3}}5\cdot\log_{\sqrt{125}}9$

ד. $\log_4 169\cdot\log_{25}64\cdot\log_{13}625$

2) הוכח את השוויונים הבאים:

א. $\log_2 25\cdot\log_5 3\cdot\log_9 2=1$.

ב. $\log_{16}9\cdot\log_5 4\cdot\log_3 5=1$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log_2 x+\log_{32} x=6$

ב. $\log_3 x\cdot\log_{27} x=3$

ג. $\log_2 4x\cdot\log_8\frac{x}{16}=-\frac{5}{3}$

ד. $\log_x 5-6\log_{125} x=1$

שאלות הבעה:

4) נתון: $\log_4 6=a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 3$

ב. $\log_{32}36$

ג. $\log_{216}96$.

5) נתון: $\log_3 5=b$, $\log_2 3=a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 50$

ב. $\log_2\sqrt{30}$

ג. $\log_5 22.5$

6) נתון $\log 9 = 2b$, $\log_3 7 = a$. הבע באמצעות a ו- b את:

א. $\log 21$.

ב. $\log_3\left(\frac{10}{7}\right)$.

ג. $\log_7 10$.

ד. $\log_{30} 63$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7) $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$.

8) $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$.

תשובות סופיות:

1) א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12.

2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

3) א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$.

4) א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$.

5) א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$.

6) א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$.

7) הוכחה.

8) הוכחה.

הלוגריתם הטבעי:

סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \to e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- b מספרים כלשהם.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln \frac{1}{e^4}$ ג. $\ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\ln x = 2$ ב. $\ln x = -\frac{1}{2}$

3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

א. $\ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x$

ב. $3\ln^2 x + \ln x = 2$

ג. $\ln\left(e^2 x^3\right) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln\left(ex^2\right)$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

א. $x^{\ln x} = e^6 x$ ב. $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$

5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $e^{\ln 3}$ ב. $e^{2\ln 3}$

תשובות סופיות:

1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5.

2) א. $x=e^2$ ב. $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

3) א. $x=0$ ב. $x=\sqrt[3]{e^2},\frac{1}{e}$ ג. $x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}},\frac{1}{e}$.

4) א. $x=e^3,\frac{1}{e^2}$ ב. $x=\sqrt{e},e$.

5) א. 3 ב. 9.

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$.
במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$.

את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$

ב. $2^x - 9 = 0$

ג. $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$

ד. $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x} = 3$

ב. $4 + 3e^x = 9$

ג. $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$

ד. $e\left(e^x + 1\right) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2\left(7 - 5^x\right) = \log_2 \frac{10}{5^x}$

ב. $\log_2\left(4e^{2x} + 6\right) - 1 = \log_2\left(7e^x\right)$

תשובות סופיות:

1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

ג. $x = \log_7 5 = 0.827$, $x = \log_7 3 = 0.564$ ד. אין פתרון.

2) א. $x = \frac{1}{3}\ln 3 = 0.36$ ב. $x = \ln\frac{5}{3} = 0.51$ ג. $x = 0$, $x = -\ln 3 = -1.09$

ד. $x = \ln 16 = 2.7725$.

3) א. $x = 1$, $x = \log_5 2 = 0.43$ ב. $x_1 = \ln\frac{1}{2} = -0.693$, $x = \ln 3 = 1.098$

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2 x \\ y=6-\log_2 x \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_6^2 x-\log_6(2y-2)=2 \\ \frac{1}{2}x=y-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_3(x+y)=\log_3(4x+y)-2 \\ \log_5(5x+3y)=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2\left(\log_3(x-y)\right)=1 \\ \log_5(x+y-11)=\log_{25}x+\frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_5 x+6\log_4 y=11 \\ 10\log_5 x-2\log_4 y=17 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_2 x^2+\log_3\frac{1}{y}=9 \\ \log_2\sqrt{x}+\log_{\sqrt[3]{3}} y=-1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_5 x+2^{\log_2 y}=6 \\ x^y=5^8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} xy=27 \\ x^{\log_3 y}=9 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2^{\log_{\frac{1}{2}}(2x-y)}=7^{\log_7\frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x+\log_3 y=\frac{1}{\log_{28}3} \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(8,3)$

2) $(36,19),\left(\frac{1}{6},1\frac{1}{12}\right)$

3) $(8,-5)$

4) $(16,7)$

5) $(25,8)$

6) $\left(16,\frac{1}{3}\right)$

7) $(25,4),(625,2)$

8) $(3,9),(9,3)$

9) $(4,7)$

מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2\left(4^x-2\right) \\ y=2x-1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 25^y=\left(5\sqrt{5}\right)^{x+1} \\ \log_5\sqrt{x}+\log_5\sqrt{y}=\log_5 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y+5\log_6 x=1 \\ 216\cdot x^{2-y}=6^{1-4y} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x\cdot\log_2 3=\dfrac{y}{\log_9 2} \\ \log_3\left(9^x+27\right)=2y+\log_3 12 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \left(2^x-1\right)^2-4y+3=0 \\ x=\log_2\left(y+1\right) \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=\log_4\left(5-9^y\right) \\ \log_2\left(2^x+3\right)=\log_4\left(29-\left(3^y-3\right)^2\right) \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(1,1)$

2) $(3,3)$

3) $(36,-3),\left(6,-1\frac{1}{3}\right)$

4) $\left(1,\frac{1}{2}\right),(2,1)$

5) $(1,1),(2,3)$

6) $(1,0)$

אי-שוויונים לוגריתמים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\log_2 x < \log_2 (5x - 20)$

2) $\log_6 (x^2 - 5x) < 1$

3) $\log_3 x > \log_9 (15 - 2x)$

4) $\log_{\frac{1}{2}} (1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}} (7 - x)$

5) $\ln x \geq \ln (x^2 - 12)$

6) $\ln x < 3$

7) $\ln^2 x - 6 \ln x < 7$

8) $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$

תשובות סופיות:

1) $x > 5$

2) $-1 < x < 0 \ , \ 5 < x < 6$

3) $3 < x < 7\frac{1}{2}$

4) $-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$

5) $2\sqrt{3} < x \leq 4$

6) $0 < x < e^3$

7) $\frac{1}{e} < x < e^7$

8) $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ וגם $x \neq 1$

מכינה במתמטיקה

פרק 10 - סדרות

תוכן העניינים

1. הקדמה כללית ..... (ללא ספר)
2. סדרה חשבונית 121
3. סדרה הנדסית 128
4. סדרות מעורבות 133
5. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת 135
6. סדרת נסיגה 141

סדרה חשבונית:

סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר a_1 והפרשה הוא d

נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה חשבונית:**

כלל נסיגה של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1

נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

- **נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:**

סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים: $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$.

שאלות:

1) נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7...$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.

2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.

3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, ..., 49.5$.

4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24.
מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.

5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?

6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?

7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $82,85,88,91,...$.

8) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3,3x-4,x^2-1$.

9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+3 \\ a_1=5 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

10) בסדרה חשבונית $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.

א. הוכח: $a_5=0$.

ב. נתון: $a_3-a_{11}=24$. מצא את a_1 ואת d.

ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n=2a_n-3$.
מצא את ערך האיבר השלילי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.

11) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3,2,7,12,...$.

12) נתונה הסדרה החשבונית: $5,-1,-7,-13,\ldots$.
כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?

13) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?

14) נתונה הסדרה החשבונית: $-63,-67,-71,\ldots$.
כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?

15) נתונה הסדרה החשבונית: $31,22,13,4,\ldots$.
בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.

16) נתונה הסדרה החשבונית: $599,\ldots,19,14,9,4$.
מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.

17) סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב- 1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.

א. בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d.

ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?

18) נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.

א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

19) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5 , ה-7 וה- 16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.

ב. מצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה.

ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

20) נתונים שני טורים חשבוניים: $\begin{cases}150,144,138,...\\90,93,96,...\end{cases}$.

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

ב. מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

21) נתונות שתי סדרות חשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה הוא d_2. ידוע כי: $d_1=-2d_2$.

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n.

א. מצא את הפרש הסדרה a_n - d_1.

ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50}.

מצא את a_1 ואת b_1.

22) נתונה הסדרה החשבונית: $-13,-17,-21,...$.

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

23) בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.

הוכח כי $nd=60$.

24) בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

25) לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את x.

ii. מצא את הפרש הסדרה.

ב. ידוע כי: $a_{12}=0$. מצא את a_1.

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=308$.

מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

26) בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6.
האיבר הראשון אינו אפס.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. $a_1=-4d$.

ii. $S_9=0$.

ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.
מצא את a_1 ואת d.

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

27) בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח כי $nd=66$.

ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים הראשונים.

ג. סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

28) אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.
ההצעה הראשונה:
לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.
ההצעה השנייה:
לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.
ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.

א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.

ב. מה מחיר הרכב?

תשובות סופיות:

1) $a_{43}=-235$.

2) $a_1=-5\,,\,d=4$.

3) 20 איברים.

4) 48 איברים.

5) 15 קפיצות.

6) 58 מספרים.

7) 31 איברים חיוביים.

8) $x=1\,,\,x=4$.

9) $a_{19}=59$.

10) א. הוכחה. ב. $a_1=12\,,\,d=-3$ ג. $b_5=-3$.

11) $S_{14}=413$.

12) 21 איברים.

13) 16 דקות.

14) 37 איברים.

15) 3647.

16) 23920.

17) א. $n=\sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.

18) א. $a_1=6\,,\,a_2=10\,,\,a_3=14$ ב. $d=4$.

19) א. $a_1=50\,,\,d=-6$ ב. $a_{10}=-4$ ג. $n=6$.

20) א. $n=81$ ב. $n=16$.

21) א. $d_1=4$ ב. $a_1=-52\,,\,b_1=95$.

22) אי-זוגיים: $S=99$ זוגיים: $S=135$.

23) שאלת הוכחה.

24) 29 איברים.

25) א. i. $x=-50$ ii. $d=11$ ב. $a_1=-121$ ג. $S=2156$.

26) א. הוכחה. ב. $a_1=-8\,,\,d=2$ ג. $n=36$.

27) א. הוכחה. ב. $S=22a_1+693$ ג. $a_9=1$.

28) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 ₪.

סדרה הנדסית:

סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר a_1 ומנתה היא q
נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה הנדסית:**

כלל נסיגה של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1
נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:**

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$.

שאלות:

1) נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

2) מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{64}{81}$.

3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?

7) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית: $x-6,\ x+4,\ 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.

8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n \\ a_1=3 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.

9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: $5,\ 10,\ 20,\ 40,\ldots$.

10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?

11) סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?

12) בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.

13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב- 120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

14) המספרים: $2x-3\ ,\ x-9\ ,\ x-13$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

א. מצא את x.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.

ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.

ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=5^{11}$.
מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

15) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: a_{n+1} ,....., 36 , 12 , 4. מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1=a_1+\frac{a_2}{6}\ \ ,\ \ b_2=a_2+\frac{a_3}{6}\ \ ,\ \ b_3=a_3+\frac{a_4}{6}\ \ ,\ .....\ ,\ \ b_n=a_n+\frac{a_{n+1}}{6}.$$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n
ובין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ-a_8.

16) נתונה הסדרה ההנדסית: $7,14,28,...$.
בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

17) בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

18) נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים.
בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

19) בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

20) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.

בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.

ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

21) בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

22) באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה:

תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת,
כנגד השנייה - שתי אבנים,
כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...
המלך הסכים להצעה.

א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?

ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.

ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים, כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

תשובות סופיות:

1) $a_9 = 729$.

2) $n = 7$.

3) $a_1 = \pm\frac{1}{4}, q = \pm 2$.

4) $a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3$.

5) $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5$.

6) 5 דקות.

7) $x = 11 \to q = 3$, $x = -\frac{2}{3} \to q = -\frac{1}{2}$.

8) $a_8 = 384$.

9) $S_9 = 2555$.

10) 5 דקות.

11) $n = 4$, יש 12 איברים בסדרה.

12) $q = 2$.

13) $n = 6$.

14) א. $x = 14$ ב.i. $a_n = 5^{n-1}$ ב.ii. a_7 , a_6 ג. $S_7^* = 61,034,375$.

15) א. $q = 3$. ג. b_6 , b_5

16) אי-זוגיים: $S = 595$, זוגיים: $S = 1190$.

17) $q = 4$.

18) $\frac{q+1}{q}$.

19) $a_1 = \frac{3}{8}$.

20) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$ ב. $a_n = 3^{n-1}$ ג. a_6 , a_5.

21) א. $q = 2$ ב. $a_1 = 1$ ג. $S_{6(p)} = 2730$.

22) א. $a_{25} = 16,777,216$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו לו 20,000,000 אבנים.

ג. $4,16,64,...,2^{24}$, $S_n = 22,369,620$.

סדרות מעורבות:

שאלות:

1) נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 3.
אם נכפול את המספר הראשון ב-3, נוסיף למספר השני 4 ונחסיר מהמספר השלישי 4 תתקבל סדרה חשבונית. מצא את המספרים.

2) נתונות שתי סדרות שמתחילות במספר 2 ובשתיהן 3 איברים.
סדרה אחת היא חשבונית והשנייה הנדסית. האיבר השלישי בשתי הסדרות זהה והאיבר השני בסדרה ההנדסית קטן ב-4 מהאיבר השני בסדרה החשבונית.
מצא את מנת הסדרה ההנדסית.

3) נתונים ארבעה מספרים בעלי התכונות הבאות:
הראשון, השני והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 2.
הראשון, השלישי והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית וסכומם $22\frac{1}{2}$. מצא את ארבעת המספרים.

4) ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה.
האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.

א. מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.

ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום 60.

ג. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.

5) נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 , ...$
וסדרה הנדסית: $b_1 , b_2 , b_3 , ...$. ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.

א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.

ב. נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.

ג. בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212-. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

תשובות סופיות:

1) המספרים הם: 18, 6, 2.

2) $q=-1$ או $q=3$.

3) המספרים הם: 12 , 7.5 , 6 , 3.

4) א. 12, 10, 8 ב. 5 ג. 6.

5) א. $q=-2$ ג. $a_1=2$.

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

סיכום כללי:

- **הגדרה:**

סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q|<1$, $(q\neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

מתקבל הכלל הבא: $S=\frac{a_1}{1-q}$.

- **סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה: $S_n=\frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה באופן הבא: $S_n=\frac{a_k\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

שאלות:

1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ \ldots$

2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32.
מצא את האיבר הראשון בסדרה.

3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

***הערה: שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.**

5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n שמנתה q , $\left(q\neq 0\ ,\ |q|<1\right)$
מגדירים שלוש סדרות חדשות: b_n , c_n ו- d_n באופן הבא:

הסדרה:	b_n	c_n	d_n
הכלל:	$b_1=a_1$ $b_2=a_1+a_2$ $b_3=a_1+a_2+a_3$ $\vdots$ $b_n=a_1+a_2+a_3+..+a_n=S_{a(n)}$	$c_1=a_2^2-a_1^2$ $c_2=a_3^2-a_2^2$ $c_3=a_4^2-a_3^2$ $\vdots$ $c_n=a_{n+1}^2-a_n^2$	$d_1=S_a+a_1$ $d_2=S_a+a_2$ $d_3=S_a+a_3$ $\vdots$ $d_n=S_a+a_n$

הסכום S_a הוא סכום הסדרה a_n , והסכום: $S_{a(n)}$ הוא סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n.

א. קבע אלו מבין הסדרות b_n , c_n ו- d_n הן הנדסיות והבע את מנתן ע"י q.

ב. הבע באמצעות a_1 בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.

ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א' ב- $S_{(S)}$. הוכח כי לא קיים ערך של q עבורו סכום ריבועי האיברים $S_{(S)}$, שווה לסכום הסדרה הנ"ל בריבוע.

6) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: a_n שמנתה q.
מגדירים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q} \quad , b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q} \quad , b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q} \quad ,..., b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q} \quad ,..$$

כאשר: S_n^* מייצג את סכום הסדרה a_n החל מהאיבר a_n (ועד אינסוף).

א. הוכח כי הסדרה b_n היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות a_1 ו- q.

ב. ידוע כי סכום הסדרה b_n הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה a_n גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה b_n. מצא את a_1 ו- q.

ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים: $b_2 + b_3 + ... + b_n + ... = 42$.

ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n.

ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n.

ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^*. חשב את סכום הסדרה b_n^*.

ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^{**}. חשב את סכום הסדרה b_n^{**}.

ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה b_n. מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(S)}$ (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית b_n ב- S_b.
הראה כי: $S_b^2 \neq S_{(S)}$.

ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה a_n וסכום איברי הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, a_4+a_5, \ldots$.

א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.

ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.
מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

8) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

מחברים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n.

ב. הוכח כי הסדרה b_n גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.

ג. הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n.

ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n.

9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \ldots$ שמנתה היא q, $(0<q<1)$.
נגדיר את הסכומים הבאים: $V=a_3+a_7+a_{11}+\ldots$, $T=a_1+a_2+a_5+a_6+a_9+a_{10}+\ldots$.
נתון כי: $T=6V$.

א. מצא את מנת הסדרה q.

ב. פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?

ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.

10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ שמנתה היא q.
בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_{2n}^2$.

א. הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.
בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ב. מצא את מנת הסדרה.

ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו.
ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר a_n.

11) נתונה סדרה הנדסית אינסופית ..... a_1 , a_2 , a_3 שמנתה היא q , $(q \neq 0 , |q|<1)$.

נגדיר את הסכומים הבאים: $V = a_2 + a_7 + a_{12} + ... , .. , T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13}$.

נתון כי: $V = 0.3T$.

א. מצא את מנת הסדרה q.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.

ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.

ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

תשובות סופיות:

1) $S=18$.

2) $a_1=24$.

3) $a_1=50\ ,\ q=\frac{1}{5}$ או $a_1=12\frac{1}{2}\ ,\ q=\frac{4}{5}$.

4) $S=18\frac{2}{3}$.

5) א. הסדרה b_n :
$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{q-1}}{\frac{a_n\left(q^n-1\right)}{q-1}}=\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{a_n\left(q^n-1\right)}=q\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q^n-1}$$
היות והיא תלויה ב-n היא אינה הנדסית.

הסדרה c_n הנדסית :
$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{n+2}^2-a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^4-a_n^2q^2}{a_n^2q^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^2\left(q^2-1\right)}{a_n^2\left(q^2-1\right)}=q^2\ .$$

הסדרה d_n :
$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S+a_{n+1}}{S+a_n}=\frac{\frac{a_1}{1-q}+a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q}+a_n}=\frac{a_1+(1-q)a_{n+1}}{a_1+(1-q)a_n}=\frac{a_1\left(1+(1-q)q^n\right)}{a_1\left(1+(1-q)q^{n-1}\right)}=\frac{q^n-q^{n+1}+1}{q^{n-1}-q^n+1}$$

היות והיא תלויה ב-n היא אינה הנדסית. ב. $-a_1^2$.
$$S_{(c_n)}=\frac{c_1}{1-q_c}=\frac{a_2^2-a_1^2}{1-q^2}=\frac{a_1^2\left(q^2-1\right)}{1-q^2}=-a_1^2\ .$$

ג. מההשוואה : $S_{(s)}=S^2$ מקבלים כי פתרון המשוואה הוא : $q=0,\pm1$.
כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה a_n היא שבר.
עבור $|q|>1$ הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של q עבורו השוויון יתקיים. מש"ל.

6) א. $b_n=\frac{a_1}{1-q}q^{n-1}$ ב. $a_1=56\ ,\ q=\frac{1}{3}$ ג. הוכחה. ד. 31.5
ה. 94.5 ו. -63 ז. 63 ח. 7938
ט. הסכום : S^2 משמעו : $\left(b_1+b_2+...+b_n+..\right)^2$.
הסכום : $S_{(s)}$ משמעו : $b_1^2+b_2^2+...+b_n^2+..$. ברור כי הביטויים אינם שווים.

7) א. הוכחה. ב. $a_1=16\ ,\ q=\frac{1}{3}$.

8) א. $q=0.6$ ב. $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n-1}+a_{2n}}=q^2$ ד. $a_1=200$

9) א. $q=\frac{1}{2}$ ב. פי 5 ג. $a_1=1024$

10) א. הוכחה. ב. $q=0.5$ ג. $a_5=20$.

11) א. $q=\frac{1}{3}$ ב. $a_1=-16$ ג. $S=288$.

סדרת נסיגה:

שאלות:

1) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2n-11 \\ a_1=-6 \end{cases}$.

א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.

ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את a_{14} ו- a_{12}.

ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא k.
הבע באמצעות k את a_{32} ו- a_{30}.

ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 133.

ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

2) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2n \\ a_1=0 \end{cases}$.

נתון כי $a_k=72$. הבע באמצעות k את a_{k+2}.

3) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+n^2-31 \\ a_7=t \end{cases}$

מצא את ערכו של t שבעבורו האיברים a_7, a_8, a_9 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

4) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=a_n+6n-2$
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n=a_{n+1}-a_n$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את b_1.

5) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=3a_n+4$.
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n=a_n+2$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון: $b_5=162$. חשב את a_1.

6) סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_1=3\ ,\ a_{n+1}=3a_n+10n-5$.
מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל n טבעי: $b_n=a_n+5n$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

ב. חשב את האיבר b_5.

ג. חשב את הסכום: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{12}$.

7) סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הנוסחה: $a_1=k\ ,\ a_{n+1}=8n-a_n+3$.

א. הבע באמצעות k את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.

ג. חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

8) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1=2\ ,\ a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+3}$.

מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n=\dfrac{4-7a_n}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את הסכום הבא: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{22}$.

9) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1=1\ ,\ a_{n+1}=3n-a_n-7$.

א. חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.

ב. הוכח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+2}=a_n+3$.

ג. כתוב נוסחה לסכום n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ד. חשב את הסכום הבא: $a_1+a_3+a_5+.....+a_{17}$.

10) סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=a_n+2\cdot 3^n+2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע את a_{n+2} באמצעות a_n.

ii. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.

ב. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא: $S_n=1.5\cdot 3^n+n^2+n-1.5$.

חשב את הסכום הבא: $a_6+a_7+a_8+....+a_{11}$.

ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

11) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה: $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+5}$, $a_1=6$.

מגדירים סדרה חדשה b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n=\frac{a_n+3}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית ומצא את מנתה.

ב. כתוב נוסחה ל- b_n באמצעות n בלבד.

ג. חשב את הסכום הבא: $b_1-b_2+b_3-b_4+.....-b_{10}$.

תשובות סופיות:

1) א. $a_3=-22$ ב. $a_{14}=33\ ,\ a_{12}=5$ ג. $a_{32}=k+51\ ,\ a_{30}=k-49$

ד. a_{62}, a_{63}

2) $a_{k+2}=74+4k$

3) $t=-33$

4) א. $d=6$ ב. $b_1=4$

5) א. $q=3$ ב. $a_1=0$

6) א. $b_{n+1}=3b_n$ ב. $b_5=648$ ג. $S=1594320$

7) א. $a_1=k\ ,\ a_2=11-k\ ,\ a_3=k+8\ ,\ a_4=19-k$ ב. 8

ג. 830

8) ב. $S_{11(p)}=267\frac{2}{3}$

9) א. $a_1=1\ ,\ a_2=-5\ ,\ a_3=4\ ,\ a_4=-2\ ,\ a_5=7$ ג. $S_{n(o)}=1.5n^2-0.5n$

ד. $S_{9(o)}=117$

10) א. i. $a_{n+2}=a_n+8\cdot 3^n+4$ ii. a_4

ב. $S_{6-11}=265458$ ג. $a_1=5$.

11) א. $q=2.5$ ב. $b_n=1.5\cdot 2.5^{n-1}$ ג. $S_{10}^{*}=-4086.74$

מכינה במתמטיקה

פרק 11 - סימן הסכימה (סיגמה)

תוכן העניינים

1. כללי 145

סימן הסכימה (סיגמה):

שאלות:

1) כתוב בפירוט את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$ ב. $\sum_{k=1}^{4} 2k$ ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$

ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$ ה. $\sum_{t=1}^{8} tx^t$ ו. $\sum_{k=4}^{10} na_k$

ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$ ח. $\sum_{k=-1}^{3} \left(k^2+1\right)$ ט. $\sum_{l=1}^{3} \left(l^2 - x_l - 4\right)$

2) כתוב את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$

ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$

ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

ד. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8$

ה. $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+...+44\cdot 45$

ו. $3\cdot 2+6\cdot 3+9\cdot 4+12\cdot 5+15\cdot 6+18\cdot 7+21\cdot 8$

ז. $5^2+7^2+...+27^2$

ח. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{10\cdot 11}$

ט. $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\frac{18}{243}$

י. $4+\frac{8}{5}+\frac{12}{25}+\frac{16}{125}+\frac{20}{625}$

3) חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$ ב. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k+4k^2\right)$ ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$

ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3-k}{k+1}$ ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$ ו. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k^2+1\right)(k-2)$

* תוכל להיעזר בנוסחאות הבאות: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

4) חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{20}\frac{5\cdot 4^k+8^k}{2^k}$ ב. $\sum_{k=1}^{11}\frac{2\cdot 4^{k+2}+10^k}{0.4^k}$ ג. $\sum_{k=10}^{20}2^{2k+10}$

* תוכל להיעזר בנוסחה הבאה: $\sum_{k=1}^{n}a^k=\frac{a\left(a^n-1\right)}{a-1}\quad(a\neq 1)$.

5) חשב את הסכומים הבאים:

א. $1^2+2^2+3^2+...+20^2$ ב. $4^2+5^2+6^2+...+24^2$

ג. $2^2+4^2+6^2+...+22^2$ ד. $1^2+3^2+5^2+...+17^2$

6) הוכח כי:

א. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k+4}}{k+2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{2k+6}}{k+3}$

ב. $\sum_{k=4}^{n-3}\frac{4k+17+2^{2k}}{k+1}=\sum_{k=8}^{n+1}\frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$

7) חשב את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

א. $\sum_{4}^{11}k^2$ ב. $\sum_{10}^{20}4^{2k}$

תשובות סופיות:

1) א. $4^0+4^1+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+4^8+4^9+4^{10}$

ב. $2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4$

ג. $4a_4+4a_5+4a_6+4a_7+4a_8+4a_9+4a_{10}$

ד. $4\cdot7^2a_7+4\cdot8^2a_8+4\cdot9^2a_9+4\cdot10^2a_{10}+4\cdot11^2a_{11}+4\cdot7^2a_7$

ה. $1x^1+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+7x^7+8x^8$

ו. $na_5+na_6+na_7+na_8+na_9+na_{10}+na_{11}$

ז. $4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n$

ח. $\left((-1)^2+1\right)+\left(0^2+1\right)+\left(1^2+1\right)+\left(2^2+1\right)+\left(3^2+1\right)$

ט. $\left(1^2-x_2-4\right)+\left(2^2-x_4-4\right)+\left(3^2-x_6-4\right)$

2) א. $\sum_{k=0}^{7}2^k$ ב. $\sum_{k=1}^{10}2k$ ג. $\sum_{k=0}^{9}(2k+1)$ ד. $\sum_{k=1}^{7}k(k+1)$

ה. $\sum_{k=1}^{22}(2k-1)2k$ ו. $\sum_{k=1}^{7}3k(k+1)$ ז. $\sum_{n=3}^{14}(2n-1)^2$

ח. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$ ט. $\sum_{k=1}^{5}\frac{4k-2}{3^k}$ י. $\sum_{k=1}^{4}\frac{4k}{5^{k-1}}$

3) א. 220 ב. 1650 ג. 255 ד. 9160 ה. 28 ו. 4545

4) א. $5\cdot\left(2^{21}-2\right)+\frac{4}{3}\left(4^{20}-1\right)$ ב. $32\cdot\frac{10\left(10^{11}-1\right)}{10-1}+\frac{25\left(25^{11}-1\right)}{25-1}$

ג. $2^{10}\left[\frac{4\left(4^{20}-1\right)}{4-1}-\frac{4\left(4^9-1\right)}{4-1}\right]$

5) א. 2870 ב. 2856 ג. 2024 ד. 969

6) הוכחה.

7) א. $9\cdot8+6\cdot\frac{8(8+1)}{2}+\frac{8(8+1)(2\cdot8+1)}{6}$ ב. $4^{18}\cdot\frac{16\left(16^{11}-1\right)}{16-1}$

מכינה במתמטיקה

פרק 12 - אינדוקציה מתמטית

תוכן העניינים

1. שאלות העוסקות בתכונות התחלקות 148
2. סדרות 151
3. עצרת 153
4. שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים 154
5. שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים 155
6. שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה 156
7. שאלות כוללות ומסכמות 158
8. מושג הסכימה וכתיבה מקוצרת של אינדוקציות 160

שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

סיכום כללי:

מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:

בדיקה:

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור $n=1$ (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור $n=2,3$).

הנחת האינדוקציה:

נניח כי עבור $n=k$ (k טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

הוכחת האינדוקציה:

נוכיח כי עבור $n=k+1$ טענת האינדוקציה מתקיימת.

סיכום:

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

שאלות:

1) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 8^n-3^n מתחלק ב-5 ללא שארית לכל n טבעי.

2) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 11^n-4^n מתחלק ב-7 ללא שארית לכל n טבעי.

3) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8\cdot 7^n+4^{n+2}$ מתחלק ב-24 ללא שארית לכל n טבעי.

4) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5\cdot 3^{2n}-5^{n+1}$ מתחלק ב-20 ללא שארית לכל n טבעי.

5) a_n הוא האיבר במקום ה-n בסדרה החשבונית: $1,3,5,7,\ldots$ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $2^{a_n}+4$ מתחלק ב-12 ללא שארית לכל n טבעי הגדול מ-1.

6) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^2+n מתחלק ב-2 ללא שארית לכל n טבעי.

7) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

8) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n-2n-1 מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.

9) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9\left(9^n-1\right)-40n$ מתחלק ב-32 ללא שארית לכל n טבעי.

10) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n+5^n-2^n\left(2^n+1\right)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

11) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 7^n+2^{2n} מתחלק ב-11 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.

12) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי a^n-b^n מתחלק ב-$(a+b)$ ללא שארית לכל n טבעי זוגי.

13) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^{n+2}+1$ מותיר שארית 2 בחלוקתו ב- 3 לכל n טבעי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

סדרות:

סיכום כללי:

תזכורת:

- סדרה היא אוסף מספרים: $a_1, a_2, ..., a_n$, כאשר n הוא מיקום האיבר בסדרה ו- a_n הוא ערך האיבר העומד במקום ה- n-י בסדרה.
  - סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.
  - סכום n האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- S_n והוא מקיים: $S_n = a_1 + ... + a_n$.

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 + d(n-1)$ כאשר d הפרש הסדרה.
  - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$.

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 q^{n-1}$ כאשר q היא מנת הסדרה.
  - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$.

שאלות:

14) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $1+2+3+4+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$.

15) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $4+7+10+13+...+(3n+1)=\frac{n}{2}(3n+5)$.

16) נתונה סדרה שבה: $a_n=n(n+2)$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$.

17) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

18) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$\frac{6}{1\cdot3\cdot5}+\frac{6}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

19) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+...+n\cdot3^{n-1}=\frac{1}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right].$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

עצרת:

סיכום כללי:

תזכורת – מושג העצרת:

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$.

מגדירים: $0!=1$ ותמיד מתקיימים השוויונות: $n!=n\cdot(n-1)!$, $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$.

שאלות:

20) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

21) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{4}+\frac{3\cdot 4!}{8}+...+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$

22) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$p!+\frac{(p+1)!}{1!}+\frac{(p+2)!}{2!}+...+\frac{(p+n-1)!}{(n-1)!}=\frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

23) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)...\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{n!}$$

24) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1\cdot 4}-\frac{11}{4\cdot 7}+\frac{17}{7\cdot 10}-...+\frac{(-1)^{n-1}(6n-1)}{(3n-2)(3n+1)}=1+\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

שאלות:

25) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+...+2n=n(2n+1)$$

26) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

27) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+...+3n\cdot 2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

שאלות:

28) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=2n(2n+1)$$

29) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

30) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+3}\right)...\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

31) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$$

32) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

שאלות:

33) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{n}{n+1}$$

34) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 2-\frac{1}{n}$$

35) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$$

36) נתונה סדרה שבה: $a_n=n^n$. נגדיר: $T_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $T_n\le n^{\frac{n}{2}(n+1)}$.

37) נתון אי-השוויון: $2^n>n^2$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

38) נתון אי-השוויון: $4^n>5n^2+1$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

39) נתון אי-השוויון: $n^3-n<5^{n-1}$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

40) נתון אי-השוויון: $3^n+4^n+5^n<6^n$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

41) נתון אי-השוויון: $n^n \geq n!$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי.

42) נתון אי-השוויון: $a^n + b^n < (a+b)^n$, $(a,b>0)$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-1.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות כוללות ומסכמות:

שאלות:

43) נתון השוויון: $4+7+10+13+...=\frac{n}{2}(3n+5)$.

א. מצא את האיבר במקום ה-n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג. חשב את הסכום: $37+40+43+...+85$.

44) נתון השוויון: $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+...=2-\frac{2n+2}{3^n}$. מצא את האיבר במקום ה-$n$.

45) נתון השוויון: $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots=\frac{n}{4n+1}$.

א. מצא את האיבר במקום ה-n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג. חשב את הסכום: $\frac{1}{25\cdot29}+\frac{1}{29\cdot33}+\frac{1}{33\cdot37}+\cdots+\frac{1}{89\cdot93}$.

46) נתון השוויון: $(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום: $26^2+27^2+28^2+...+48^2$.

47) נתון השוויון: $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $4^2+6^2+8^2+\cdots+(4n)^2$.

48) נתונים השוויונים הבאים:

א. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7}{3}(n^2+3n-1)$.

ב. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=n^2+11n-5$.

ג. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7n}{2}(n+1)$.

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל n טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

49) נתון השוויון: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=an(2n+b)$.

א. נתון כי השוויון נכון עבור $n=1$ ו- $n=2$. מצא את ערכי a ו- b.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

50) נתון אי-השוויון: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-2.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{18}>\frac{1}{2}$.

51) נתון אי-השוויון: $n^2<2^n$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-4.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $5^2\cdot 6^2\cdot 7^2\cdot 8^2\cdot\ldots\cdot 20^2<2^{200}$.

52) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום $9+27+81+\cdots+3^{3n+1}$ מתחלק ב-117 ללא שארית לכל n טבעי.

53) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

ב. נתון כי $a+b$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
הוכח כי a^3+b^3 מתחלק ב-6 ללא שארית.

54) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח את הטענה: אם ל-n טבעי מסוים 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם $3^{n+2}+5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.

ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל n טבעי אי-זוגי?

ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n+5^n מתחלק ב-8 ללא שארית לכל n טבעי אי-זוגי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

מושג הסכימה וכתיבה מקוצרת של אינדוקציות:

סיכום כללי:

סימון הסכימה (קרי: סיגמה) מוגדר באופן הבא: $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

מקור הסימון נובע מהמילה Sum ומשמעו הוא סכימה של איברים המתחילים בערך המצוין בתחתית הסימון $\left(\sum_{\boxed{k=1}}^{n}\right)$ עד לערך המצוין בחלקו העליון $\left(\sum_{k=1}^{\boxed{n}}\right)$.

דוגמאות:

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n$.
- $\sum_{k=3}^{12} k^2 = 3^2+4^2+...+12^2$.
- $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{5}+\frac{1}{9}+....+\frac{1}{4n+1}$.

שאלות:

1) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

2) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

3) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

4) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n-1)$.

5) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4^{k-1}}=4-\frac{1}{4^{n-1}}$.

6) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{3n}k=1\frac{1}{2}n(3n+1)$.

7) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{3n}(4k-1)=3n(6n+1)$.

8) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\frac{n}{2}(3n+1)$.

9) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}3^{n+k}=\frac{3^{n+1}(3^n-1)}{2}$.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

מכינה במתמטיקה

פרק 13 - בעיות מילוליות

תוכן העניינים

1. בעיות תנועה ללא אחוזים 162
2. בעיות תנועה עם אחוזים 165
3. בעיות תנועה עם משפט פיתגורס 166
4. בעיות תנועה מהירות מושפעת מזרמים 167
5. בעיות תנועה מהירות ממוצעת 168
6. בעיות קנייה ומכירה בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים 169
7. בעיות קנייה ומכירה עם אחוזים בנעלם אחד ושניים 170
8. בעיות קנייה ומכירה שונות 171
9. בעיות יסודיות במרובעים 177
10. בעיות במשולשים כולל משפט פיתגורס 179
11. בעיות במעגל – ללא אחוזים ללא משפט פיתגורס 181
12. בעיה במעגל – ללא אחוזים וכולל משפט פיתגורס 182
13. בעיה במעגל – כולל אחוזים 183
14. בעיות בהנדסת המרחב 184

בעיות תנועה בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים:

שאלות:

1) מכונית נוסעת מ-A ל-B במהירות של 90 קמ"ש. בדרך חזרה נסעה המכונית במהירות של 60 קמ"ש. בסה"כ נמשכה הנסיעה הלוך וחזור 20 שעות.

א. כמה שעות נסעה המכונית לכל כיוון?

ב. מהי הדרך שעברה המכונית?

2) אוטובוס ומשאית יוצאים בו זמנית משני יישובים A ו-B בהתאמה.
מהירות האוטובוס היא 60 קמ"ש ומהירות המשאית היא 80 קמ"ש.
האוטובוס הגיע ליישוב B שעה ו-40 דקות מאוחר יותר מהזמן שלקח למשאית להגיע ליישוב A.

א. כמה זמן נסע האוטובוס וכמה זמן נסעה המשאית?

ב. מהו המרחק בין שתי הערים?

3) הולכת רגל יצאה לטיול במהירות מסוימת. לאחר שעה וחצי יצא בעקבותיה מאותו מקום הולך רגל נוסף במהירות הגדולה ממהירותה ב-4.5 קמ"ש.
הולך הרגל השיג את הולכת הרגל שעה לאחר שיצא לדרכו.

א. מהי מהירות ההליכה של הולכת הרגל?

ב. מהו המרחק שעברו עד שנפגשו?

4) שני רוכבי אופניים יוצאים בו זמנית מעיר א' לעיר ב'. הרוכב הראשון נוסע במהירות קבועה ומגיע לעיר ב' לאחר 5 שעות. הרוכב השני נוסע במשך השעתיים הראשונות במהירות הקטנה ב-2 קמ"ש ממהירות הרוכב הראשון.
לאחר מכן הוא מגביר את מהירותו ב-14 קמ"ש ומגיע לעיר ב' שעה ו-20 דקות לפני הרוכב הראשון.

א. באיזו מהירות נסע הרוכב הראשון?

ב. איזו דרך עבר הרוכב השני בכל חלק?

5) משאית נוסעת מרחק של 245 ק״מ בכל יום במהירות קבועה.
יום אחד נסעה המשאית במשך שעתיים וחצי במהירות הרגילה, לאחר מכן עצרה לתדלוק במשך 24 דקות ואז המשיכה בנסיעה במהירות הגדולה ב-70 קמ״ש ממהירותה הקודמת.
המשאית הגיעה ליעדה שעה לפני השעה שהיא מגיעה בכל יום.

א. באיזו מהירות נוסעת המשאית בכל יום?

ב. כמה זמן לוקח למשאית להגיע ליעדה בכל יום?

6) אוטובוס נוסע מעיר א׳ לעיר ב׳ הרחוקה ממנה ב-800 ק״מ. לאחר שעבר האוטובוס 135 ק״מ במהירות קבועה הוא עצר להתרעננות במשך חצי שעה.
לאחר מכן המשיך האוטובוס את נסיעתו במהירות הגדולה ב-43 קמ״ש ממהירותו הקודמת עד לעיר ב׳.
סך כל הזמן שהיה האוטובוס בדרך הוא 7 שעות.

א. מה הייתה המהירות ההתחלתית של האוטובוס?

ב. מה היה המרחק שעבר האוטובוס אחרי ההתרעננות עד לעיר ב׳?

7) רוכב אופניים יצא בשעה 06:00 לרכיבה במהירות 24 קמ״ש.
בשעה 07:00 יצא מאותו מקום רוכב אופנוע באותו כיוון ובמהירות של 40 קמ״ש.
באיזו שעה ובאיזה מרחק מנקודת היציאה ישיג רוכב האופנוע את רוכב האופניים?

8) המרחק בין ת״א לנצרת הוא 103 ק״מ. בשעה 08:00 יצאה מכונית מנצרת לת״א במהירות 90 קמ״ש. בשעה 08:20 יצאה משאית מת״א לנצרת במהירות 56 קמ״ש.
באיזו שעה ייפגשו המכונית והמשאית?

9) משאית נסעה מדימונה לאילת, מרחק של 200 ק״מ. 50 דקות אחריה יצאה מכונית מדימונה לאילת במהירות הגבוהה ב-30 קמ״ש והגיעה לאילת 40 דקות לפני המשאית.
מצא את מהירות המכונית.

תשובות סופיות:

1) א. 8 שעות הלוך ו-12 שעות חזור. ב. 1440 ק״מ.
2) א. אוטובוס-6 שעות ו-40 דקות, משאית-5 שעות. ב. 400 ק״מ.
3) א. 3 קמ״ש. ב. 7.5 קמ״ש.
4) א. 12 קמ״ש. ב. 20 ק״מ ו-40 ק״מ.
5) א. 50 קמ״ש. ב. 4 שעות ו-54 דקות.
6) א. 90 קמ״ש. ב. 665 ק״מ.
7) 8:30, 60 קמ״ש.
8) 8:50.
9) 80 קמ״ש.

בעיות תנועה עם אחוזים:

שאלות:

10) מכונית נוסעת מעיר א' לעיר ב' מרחק של 480 ק"מ במהירות קבועה.
בדרכה חזרה נסעה המכונית במשך שעה במהירות הקבועה. לאחר מכן עצרה להתרעננות של 36 דקות ואז הגבירה את מהירותה ב-25% ממהירותה הקודמת והגיעה בחזרה לעיר א' 24 דקות פחות מהזמן שלקח לה להגיע לעיר ב'.
באיזו מהירות נסעה המכונית מעיר א' לעיר ב'?

11) רכבת משא ורכבת נוסעים יוצאות מעיר א' לעיר ב' מרחק של 360 ק"מ.
מהירות רכבת הנוסעים גדולה ב-20% ממהירות רכבת המשא.
רכבת הנוסעים התעכבה 40 דקות בתחנה, ולכן יצאה באיחור מהתחנה של עיר א'.
עם זאת היא הגיעה לעיר ב' 20 דקות לפני רכבת המשא.

א. מה הן המהירויות של שתי הרכבות?

ב. מה זמן נסעה רכבת הנוסעים מעיר א' לעיר ב'?

12) מכונית ומונית נוסעות מנקודה A לנקודה B. המכונית נוסעת במהירות קבועה ומגיעה לנקודה B כעבור 4 שעות. המונית נוסעת במשך 3 שעות המהירות הקטנה ב-10 קמ"ש ממהירות המכונית ולאחר מכן מגבירה את מהירותה ב-50% ומגיעה לנקודה B יחד עם המכונית.

א. מהי מהירות המכונית?

ב. מהו המרחק בין נקודה A לנקודה B?

תשובות סופיות:

10) 80 קמ"ש.

11) א. 60 קמ"ש ו-72 קמ"ש. ב. 5 שעות.

12) א. 90 קמ"ש. ב. 360 ק"מ.

בעיות תנועה עם משפט פיתגורס:

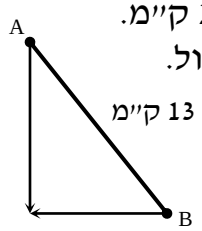
שאלות:

13) שתי מכוניות יצאו מהעיר, האחת לכיוון מזרח והשנייה לכיוון צפון.
לאחר שלוש שעות המרחק בין שתי המכוניות היה 300 ק"מ.
מהירות מכונית אחת גדולה ב-20 קמ"ש ממהירות המכונית השנייה.

א. מהן המהירויות של שתי המכוניות?

ב. מה היה המרחק של כל מכונית מהעיר לאחר שלוש שעות?

14) שני הולכי רגל יוצאים משני יישובים A ו-B המרוחקים זה מזה 13 ק"מ.
היישוב A ממוקם בצפון מערב ביחס ליישוב B כמתואר באיור ממול.
הולך הרגל מיישוב A הולך דרומה והולך הרגל מיישוב B הולך מערבה. הולך הרגל מיישוב A יוצא שעתיים לפני הולך הרגל השני. לאחר שלוש שעות מיציאתו נפגשו שני הולכי הרגל. מהירות הולך הרגל מיישוב B גדולה ב-25% ממהירות הולך הרגל השני.
באיזו מהירות הלך כל אחד משני הולכי הרגל?



15) רוכב אופנוע יצא מביתו מזרחה במהירות מסוימת ונסע במשך חצי שעה.
לאחר מכן, פנה צפונה, הגדיל את מהירותו ב-20% ונסע כך שעה נוספת.
לאחר שעה זו פנה חזרה לכיוון ביתו, העלה את מהירותו ל-65 קמ"ש ונסע (בקו ישר) עד שהגיע חזרה לביתו.

א. מצא את מהירותו של רוכב האופנוע ביציאה מביתו אם ידוע שעבר בסה"כ 150 ק"מ.

ב. מה הייתה מהירותו הממוצעת של רוכב האופנוע (בכל חלקי הדרך)?

תשובות סופיות:

13) א. 60 קמ"ש ו-80 קמ"ש. ב. 180 ק"מ ו-240 ק"מ.

14) א. 4 קמ"ש ו-5 קמ"ש.

15) א. 50 קמ"ש. ב. 60 קמ"ש.

בעיות תנועה מהירות מושפעת מזרמים:

שאלות:

16) סירה שטה בנהר שבו מהירות הזרם היא 3 קמ״ש עם כיוון זרם המים.
לאחר חצי שעה החליטו אנשי הסירה לשנות את כיוונם וחזרו במשך שעתיים לנקודת המוצא שלהם.
מהירות הסירה במים עומדים קבועה במשך כל השייט.

א. מצא את מהירות הסירה.

ב. מהו המרחק הכולל ששטה הסירה?

תשובות סופיות:

16) א. 5 קמ״ש. ב. 8 קמ״ש.

בעיות תנועה מהירות ממוצעת:

שאלות:

17) מכונית נוסעת 3 שעות במהירות קבועה של 140 קמ״ש ולאחר מכן במשך שעתיים נוספות במהירות קבועה של 100 קמ״ש.

א. מה סך הדרך שעברה המכונית?

ב. מהי המהירות הממוצעת של המכונית?

18) מכונית נוסעת 4 שעות במהירות של 130 קמ״ש ולאחר מכן מספר שעות נוספות במהירות של 70 קמ״ש.
ידוע כי מהירותה הממוצעת היא 110 קמ״ש.
כמה שעות נסעה המכונית במהירות של 70 קמ״ש?

19) אופנוע עובר מרחק של 200 ק״מ במהירות מסוימת.
לאחר מכן מאיץ האופנוע ומגדיל את מהירותו ב-40%.
הוא נוסע במהירות זו ועובר מרחק של 280 ק״מ.
המהירות הממוצעת של האופנוע היא 96 קמ״ש.

א. כמה זמן נסע האופנוע?

ב. באיזו מהירות התחיל האופנוע את נסיעתו?

תשובות סופיות:

17) א. 620 ק״מ. ב. 125 קמ״ש.

18) שעתיים.

19) א. 5 שעות . ב. 80 קמ״ש.

בעיות קנייה ומכירה בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים:

שאלות:

1) מחיר כניסה למוזיאון המדע למבוגר גדול ב-15 ₪ ממחיר הכניסה לילד.
יוסי נסע עם אשתו ושבעת ילדיו ליום כיף במוזיאון המדע ושילם בעבור הכניסה סכום כולל של 210 שקלים.
מה המחיר לילד ומה המחיר למבוגר?

2) המחיר של 3 ק"ג אגסים גדול ב-3 שקלים מהמחיר של 2 ק"ג תפוחים.
שרון קנתה 4 ק"ג אגסים ו-5 ק"ג תפוחים ושילמה סכום כולל של 73 שקלים.
מה המחיר של ק"ג מכל סוג?

3) דן קנה מחברות בסכום כולל של 224 שקלים.
אם ירד המחיר למחברת ב-10 שקלים יוכל דן לקנות 40 מחברות יותר מאשר קנה בתחילה באותו הסכום.
כמה מחברות קנה דן ומה המחיר של כל מחברת?

4) סוחר קנה 60 כיסאות זהים במחיר זהה לכיסא.
5 כיסאות נשברו לו ואת שאר הכיסאות הוא מכר במחיר הגדול ב-40 ₪ מהמחיר שקנה אותם. בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 1950 ₪.
באיזה מחיר קנה הסוחר כל כיסא?

תשובות סופיות:

1) 20 ₪ ו-35 ₪.

2) 7 ₪ ו-9 ₪.

3) 16 ב-14 ₪.

4) 50 ₪.

בעיות קנייה ומכירה עם אחוזים בנעלם אחד ושניים:

שאלות:

5) משכורתו של אלון גדולה ב-200 ₪ ממשכורתו של רן.
אם אלון יקבל תוספת של 16% למשכורתו ורן יקבל תוספת של 30% למשכורתו אז המשכורת של רן תהיה גדולה משל אלון ב-300 ₪.
מהי המשכורת של כל אחד מהם?

6) עקב ביקוש רב מחירו של מקרר "אמנה" עלה ב-5%. לאחר שנה ירד הביקוש למקרר "אמנה" ולכן הוזל מחירו ב-10%. מחיר המקרר הסופי הוא 1,323 ₪.

א. מה היה מחיר המקרר ההתחלתי?

ב. כמה אחוזים ממחיר המקרר המקורי מהווה מחיר המקרר הסופי?

7) המחיר של שמיכה וזוג כריות הוא 380 ₪. לאחר שנה מחיר השמיכה הוזל ב-20%, אך מחיר הכריות התייקר ב-20%. כעת המחיר של 5 כריות ו-2 שמיכות הוא 888 ₪.

א. מה היה המחיר הראשוני של כרית?

ב. כמה עולה שמיכה לאחר ההוזלה?

8) סוחר קנה שולחנות במחיר כולל של 18,000 ₪. 10 שולחנות הוא מכר ברווח של 60% לשולחן, 20 שולחנות הוא מכר ללא רווח ואת שאר השולחנות הוא מכר בהפסד של 15% לשולחן. סה"כ הרוויח הסוחר בעסקאות אלו 450 ₪.

א. כמה שולחנות קנה הסוחר?

ב. מה המחיר ששילם הסוחר עבור כל שולחן?

תשובות סופיות:

5) א. 1,400 ₪. ב. 94.5%.

6) א. 100 ₪. ב. 144 ₪.

7) א. 60 שולחנות. ב. 300 ₪.

8) א. 250 מרצפות . ב. 88 ₪. ג. 156,000.

בעיות קנייה ומכירה שונות:

שאלות:

9) קבלן רכש x מרצפות רצפה בסכום כולל של 22,000 ₪. 20 מרצפות נשברו בהובלה ולכן לא נמכרו. את שאר המרצפות מכר הקבלן ברווח של 50%. סה"כ הרוויח הקבלן בעסקה 8,360 ₪.

א. כמה מרצפות קנה הקבלן?

ב. כמה כסף שילם הקבלן עבור כל מרצפה?

10) שמואל קנה מחשב ומדפסת במכרז ושילם עבורם סכום כולל של 3,600 ₪. לאחר חודש ימים, מכר שמואל את המדפסת בהפסד של 10% ואת המחשב ברווח של 40%.
ידוע כי שמואל מכר את שני המוצרים במחיר כולל של 4,740 ₪.
בכמה כסף קנה שמואל את המחשב ובכמה כסף קנה את המדפסת?

11) חוואי קנה 15 סוסי פוני במחיר זהה לסוס. לאחר שנה מכר החוואי 3 סוסים ברווח של 35%, שניים מתו ממחלה נדירה ואת שאר הסוסים הוא מכר ללא רווח. סה"כ הפסיד החוואי 1710 ₪.

א. כמה שילם החוואי עבור כל סוס פוני?

ב. אם רק סוס אחד היה מת, האם היה החוואי מרוויח מהעסקה? אם לא נמק, אם כן בכמה היה מרוויח?

12) מכונת כביסה עולה 4,000 ₪. לאחר שנה עלה מחיר מכונת הכביסה ב-20% ושנה לאחר מכן עלה מחירה בעוד 20%.

א. מה מחיר מכונת הכביסה לאחר שנתיים?

ב. בכמה אחוזים מהמחיר המקורי התייקרה מכונת הכביסה?

ג. בחנות למוצרי חשמל מוכרים מכונות כביסה במחיר מסוים.
רפי קנה 3 מכונות כביסה למכבסה שברשותו. ידוע כי לאחר שנה חלה התייקרות ב- p אחוזים וכך גם בשנה שאחריה. בתום השנתיים, החליט רפי לקנות 2 מכונות כביסה נוספות. מבדיקה שערך רפי, גילה כי המחיר הכולל ששילם בקנייה השנייה שווה למחיר ששילם בקנייה הראשונה.
מהו p ?

13) המחיר של שמיכה וזוג כריות הוא 380 ₪. לאחר שנה מחיר השמיכה הוזל ב-20% אך מחיר הכריות התייקר ב-20%.
כעת המחיר של 5 כריות ו-2 שמיכות הוא 888 ₪.

א. מה היה המחיר הראשוני של כרית?

ב. כמה עולה שמיכה לאחר ההוזלה?

ג. אכסניית נוער מעוניינת לרכוש שמיכות וכריות עבור מיטות יחיד למספר חדרים (מספר זהה של שמיכות וכריות).
האם כדאי להנהלת האכסניה לרכוש את השמיכות והכריות במחירים המקוריים או לאחר שנה? נמק.

14) המחיר של 6 שרפרפים גדול ב-20 שקלים מהמחיר של כיסא.
לאחר שמחיר השרפרפים התייקר ב-35% ומחיר הכיסא הוזל ב-19%, המחיר של 3 שרפרפים היה זהה למחיר של כיסא אחד.

א. מה המחיר של כיסא והמחיר של שרפרף לפני ההוזלה וההתייקרות?

ב. בכמה אחוזים גדול המחיר של הכיסא לאחר ההוזלה מהמחיר של השרפרף לאחר ההתייקרות?

ג. לרשות בית ספר תקציב מסוים המיועד לרכישת כיסאות ושרפרפים.
ידוע כי בית הספר מעוניין לרכוש פי 4 יותר שרפרפים מאשר כיסאות.
האם כדאי לבית הספר לבצע את הרכישה במחירים המקוריים או לאחר השינויים אם ברצונו לרכוש יותר פריטים?

15) סוחר קנה 60 כיסאות זהים במחיר זהה לכיסא. 5 כיסאות נשברו לו ואת שאר הכיסאות הוא מכר במחיר הגדול ב-40 ₪ מהמחיר שקנה אותם.
בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 1950 ₪.

א. באיזה מחיר קנה הסוחר כל כיסא?

ב. בעסקה אחרת, קנה הסוחר 60 כיסאות אחרים במחיר זהה לכיסא.
ידוע כי המחיר של כיסא בודד גדול ב-30% מהמחיר של כיסא בודד שרכש הסוחר בעסקה הראשונה. במהלך ההובלה נגנבו 8 כיסאות.
הסוחר רוצה להרוויח ממכירת הכיסאות הנותרים לפחות 2000 ₪ בעסקה זו. נסמן ב- p את אחוז ההתייקרות שבו צריך למכור הסוחר כיסא בודד. מצא את p המינימלי עבורו יעמוד הסוחר ביעדו.

16) סוכן של חברת רהיטים קנה מיטות במחיר כולל של 60,000 ₪.
רבע מכמות המיטות שקנה הוא מכר ברווח של 4.80% מיטות הוא מכר ללא רווח כלל ואת שאר המיטות הוא מכר בהפסד של 10% למיטה.
בסה"כ הרוויח הסוכן 9,500 ₪.

א. כמה מיטות קנה הסוכן?

ב. כמה שילם הסוכן עבור כל מיטה?

ג. בהנחה שהסוכן רוכש עבור החברה פעם נוספת כמות מיטות זהה ממקום אחר, ומוכר באותם התנאים, כמה עליו לשלם עבור מיטה בודדת כדי שהרווח שלו יהיה לפחות 10,000 ₪? (עגל את תשובתך לשקלים שלמים).

17) יצרנית מוצרי חשמל מוכרת מקררים במחיר של x ₪ ליחידה.
עם השקת מקרר חדש הוחלט להעלות את מחירו ב-5% עקב הביקוש הרב.
בשנה הראשונה להשקתו נקנו מספר מקררים. שנה לאחר מכן ירד הביקוש ולכן מחיר המקרר הוזל ב-10% (ביחס למחירו בשנה הראשונה).
כעת נמכרו מספר כפול של יחידות ביחס לשנה הקודמת.

א. מצא את המחיר המקורי של מקרר אם ידוע כי סך כל הרווחים של יצרנית המקרר בשנתיים הנ"ל זהה לסכום שהייתה מרוויחה אם היו קונים את אותו מספר המקררים שנרכשו בשנה הראשונה במחיר של 4116 ₪ ליחידה.

ב. היצרנית הרוויחה בשנה השנייה 235,200 ₪ יותר מאשר בשנה הראשונה.
מצא כמה מקררים נמכרו בשנה הראשונה.

18) בחנות מסוימת, מחיר כובע גדול ב-40% מהמחיר של זוג כפפות.
לאחר חודש התייקר הכובע ב-50% והכפפות הוזלו ב- p אחוזים.

א. מצא את p עבורו קנייה של 16 כובעים ו-2 זוגות כפפות לפני השינויים תשתווה לקנייה של 4 כובעים ו-20 זוגות כפפות לאחר השינויים.

ב. מצא את p עבורו ההפרש בין קניית 5 כובעים ו-4 זוגות כפפות במחירים לאחר השינויים, לבין קניית 3 כובעים ו-2 זוגות כפפות במחירים המקוריים יהיה שווה למחיר של קניית 5 זוגות כפפות במחירים המקורי.

ג. מצא את p עבורו המחיר של כובע אחד ו-10 זוגות כפפות לאחר השינויים יהווה 80% מהמחיר של קניית אותם הפריטים במחירים המקוריים.

19) סוחר רוכש מנורות בסכום כולל של 4,000 ₪. 26 מהמנורות מכר הסוחר ברווח של 20 ₪ למנורה ואת השאר הוא מכר בהפסד של 5 ₪ למנורה.
בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 400 ₪.

א. כמה מנורות קנה הסוחר ברכישה הראשונה ובאיזה מחיר למנורה?

ב. בעסקה אחרת רכש הסוחר כמות מנורות מסוימת בהנחה של 20% ביחס למחיר ששילם בתחילה. הסוחר מכר אותם לבית עסק ברווח של 50% למנורה. ידוע כי הרוויח הסוחר בעסקה 3200 ₪.
כמה מנורות רכש הסוחר בעסקה השנייה?

20) סוחר קנה 450 תיקים. הוא מכר 150 מהם ברווח של 15% ואת השאר בהפסד של 5 שקלים. בסה"כ הפסיד הסוחר בעסקה 600 ₪.

א. בכמה כסף קנה הסוחר כל תיק?

ב. אם הסוחר היה מוכר את שאר התיקים בהפסד של 2 שקלים במקום 5 שקלים, האם עדיין הוא היה מפסיד מהעסקה?

ג. התיקים שמכר הסוחר ברווח של 15% נקנו ע"י חנות מרכזית.
בחודש הראשון למכירת התיקים, מכרה החנות כל תיק ברווח של 50%.
לאחר חודש העלתה החנות את המחיר של תיק ב-20% נוספים ופרסמה מבצע שבמסגרתו כל הקונה שני תיקים יקבל את השני בהנחה של 40%.
חן הגיעה לחנות בחודש הראשון וקנתה שני תיקים ואחותה, שרית, הגיעה לחנות לאחר חודש וקנתה שני תיקים במסגרת המבצע.
מי משתי האחיות שילמה מחיר נמוך יותר בממוצע על תיק?

21) בית קפה רכש 120 ק"ג מוצרי שוקולד. 10 ק"ג נהרסו מיד עם הגעתם למקום עקב תנאי תחזוקה רעועים, 40 ק"ג נמכרו ברווח של 3 ₪ לק"ג ואת שאר הכמות מכר בית הקפה בהפסד של 2 ₪ לק"ג. בסה"כ הפסיד בית הקפה בעסקה 60 ₪.

א. מהו המחיר של ק"ג מוצרי שוקולד?

ב. בהזמנה נוספת רכש בית הקפה כמות מסוימת של מוצרי שוקולד ושילם עבור ק"ג אחד את המחיר שמצאת שסעיף הקודם.
ידוע כי 10% מהכמות מכר בית הקפה ברווח של 50% לק"ג ו-20% מהכמות מכר בית הקפה בהפסד של 25%.
מצא באיזה מחיר צריך למכור בית הקפה את הכמות הנותרת על מנת שירוויח 70% מהסכום שהוציא.

22) בעל מזנון פלאפל קנה 12 ק"ג גרגירי חומוס להכנת כדורי פלאפל ו-8 ק"ג קמח לאפיית פיתות. ידוע כי המחיר של 2 ק"ג גרגירי חומוס גבוה ב-2 ₪ מהמחיר של 1 ק"ג קמח. בעל המזנון קיבל הנחה של 25% על כל 1 ק"ג גרגירי חומוס והנחה של 20% על כל 1 ק"ג קמח. לאחר ההנחה שילם בעל המזנון 74.4 ₪ בעבור קנייתו.

א. מה הם המחירים של 1 ק"ג גרגירי חומוס ו-1 ק"ג קמח?

ב. ידוע כי כל מנת פלאפל נמכרת במחיר זהה ולהכנתה דרושים 300 גרם גרגירי חומוס ו-x גרם קמח.
בעל המזנון ניצל בצורה מלאה את כל הרכיבים שברשותו ולאחר מכירת כל המנות שהכין נשאר עם רווח של 245.6 ₪.
מצא את x ואת המחיר של מנת פלאפל.

23) בעל גלידריה קנה 30 ליטרים חלב ו-18 ק"ג אבקת שוקולד להכנת גלידות שוקולד. על כל 1 ליטר חלב קיבל 5% הנחה ועל כל 1 ק"ג אבקה קיבל 10% הנחה. ידוע כי המחיר ששילם על כל כמות החלב שרכש גדולה ב-77.7 ₪ מהמחיר ששילם על כל האבקה שרכש.

א. מצא את המחיר של 1 ליטר חלב ו-1 ק"ג אבקת שוקולד אם ידוע כי הוא שילם 207.3 ₪ בעבור כל הקנייה.

ב. כדי לייצר כדור שוקולד אחד דרושים 300 מ"ל חלב ו-180 גרם אבקת שוקולד. בעל הגלידריה ניצל את כל המוצרים שקנה ופרסם כי המחיר של כדור שוקולד אחד הוא 10 ₪ וכי בקניית שני כדורי שוקולד תינתן הנחה של שקל. בעל הגלידריה מכר את כל הכדורים שברשותו והרוויח סה"כ בעסקה 762.7 ₪.
מצא כמה לקוחות קנו כדור בודד וכמה קנו שני כדורים.

24) סוכן כלי כתיבה רכש בקנייה מרוכזת 40 חבילות עטים ו-60 חבילות עפרונות.
חבילת עטים מכילה 12 עטים וחבילת עפרונות מכילה 10 עפרונות.
הסוכן קיבל הנחה של 10% לעט ו-15% הנחה לעפרון. בסה"כ שילם הסוכן 3102 ₪.
ידוע כי אילולא היה מקבל הסוכן את ההנחות, אז המחיר הכולל שהיה נדרש לשלם עבור כל העטים היה גדול פי 4.8 מהמחיר שהיה משלם עבור כל העפרונות.

א. מצא מה המחירים המקוריים של עט בודד ושל עפרון בודד.

ב. חנות "כותבים בכיף" קנתה כמות מסוימת של עטים ועפרונות מהסוכן והכינה מארזים לתחילת שנה שכל אחד מכיל 2 עטים ו-3 עפרונות.
הסוכן מכר לחנות את העפרונות והעטים במחירים המקוריים שלהם ואילו החנות מכרה את המארזים במחיר הגדול ב-40% מעלות ההכנה שלהם.
מצא כמה עפרונות וכמה עטים רכשה החנות מהסוכן אם ידוע כי הרוויחה מעסקה זו (לאחר שמכרה את כל המארזים שהכינה) סה"כ 72 ₪.

תשובות סופיות:

9) א. 250 מרצפות. ב. 88 ₪. ג. 156,000.

10) מחשב-3000 ₪, מדפסת-600 ₪.

11) א. 1800 ₪. ב. היה מרוויח 90 ₪.

12) א. 5760 ₪. ב. 44%. ג. 22.4%.

13) א. 100 ₪. ב. 144 ₪.
ג. כדאי לקנות לאחר שנה, ללא תלות במספר החדרים.

14) א. 100₪ ו-20 ₪. ב. ב-200% (פי 3). ג. במחירים המקוריים.

15) א. 50 ₪. ב. 74.5%.

16) א. 12 מיטות. ב. 5,000 ₪ .
ג. המחיר המדויק הוא: 5263.15 ₪ ולכן נעגל ונדרוש: 5264 ₪ למיטה.

17) א. 1400 ₪ $x=$. ב. 200 יחידות.

18) א. 20%. ב. 82.5%. ג. 29.8%.

19) א. 50 נורות ב-80 ₪ למנורה. ב. 100 מנורות.

20) א. 40 ₪. ב. לא. ג. שרית (66.24 ₪).

21) א. 4 ₪. ב. 8 ₪

22) א. 1 ק"ג גרגירי חומוס-4 ₪, 1 ק"ג קמח-6 ₪.
ב. 200 גרם $x=$, מנת פלאפל-8 ₪.

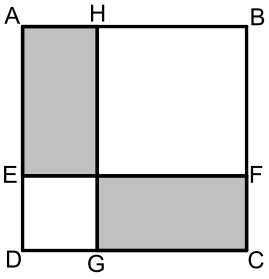
23) א. 1 ליטר חלב-5 ₪, 1 ק"ג אבקה-4 ₪.
ב. 30 קנו שני כדורים ו-40 קנו כדור בודד.

24) א. עט-6 ₪, עפרון-1 ₪.
ב. 12 מארזים ולכן 24 עטים ו-36 עפרונות.

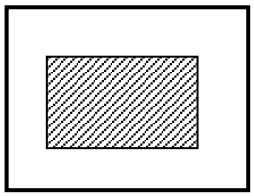
בעיות יסודיות במרובעים:

שאלות:

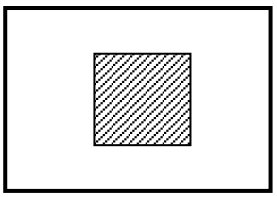
1) המרובע ABCD הוא ריבוע (ראה איור).
הקטע EF מקביל לצלעות הריבוע ומחלק את הצלעות AD ו-BC באופן כזה כך ש-DE ו-CF מהוות 30% מצלע הריבוע. הקטע GH מקביל לצלעות AD ו-BC ומרחקו מהצלע AD הוא 2 ס"מ.
ידוע שסכום השטחים של המלבנים המקווקוים מהווה 50% מסכום שטחי המלבנים הלבנים.
מצא את אורך צלע הריבוע.



2) היקף חלקה מלבנית הוא 30 ק"מ. רוצים לבנות בניין מלבני (המקווקו באיור) במרכז החלקה ששטחו הכולל הוא 10 קמ"ר.
ידוע ששטח הבניין מהווה 20% משטח החלקה.
מצא את מידות החלקה.



3) במרכז חלקה מלבנית שצלע אחת שלה גדולה ב-10 ק"מ מהצלע הסמוכה לה בונים בניין ריבועי (המקווקו באיור).
ידוע כי אורך הצלע שלו היא שליש מאורך הצלע הקטנה של החלקה. מחיר קמ"ר אחד משטח הבניין הוא 1,000 ₪ ומחיר קמ"ר אחד משטח החלקה הוא 100 ₪.
קבלן בניה שילם עבור כל השטח סכום כולל של 60,000 ₪.
מצא את מידות החלקה.

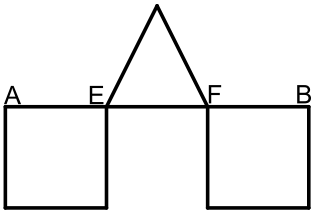


4) לרפי מטבח מלבני שמידותיו הם: 12×18 מטרים. רפי מחלק את המטבח לשני מלבנים כך ששטח אחד גדול פי 2 מהשטח של השני. רפי רוצה לרצף את השטח הקטן ברצפת שיש יוקרתית (השטח הימני) לעומת השטח הגדול שאותו ירצף רפי ברצפה רגילה (השטח השמאלי).
ידוע שהמחיר של מ"ר אחד מהרצפה הרגילה הוא 60% מהמחיר של מ"ר אחד מרצפת השיש היוקרתית.
רפי השקיע בריצוף המטבח סכום כולל של 3168 ₪.
כמה עולה מ"ר מכל סוג?

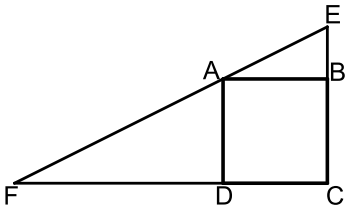


בעיות במרובעים ובמשולשים ללא משפט פיתגורס:

5) על הקטע AB מקצים את הנקודות E ו-F כך ששלושת הקטעים AE , EF ו-BF שווים. על הקטעים BF ו-AE בונים ריבועים ועל הקטע EF בונים משולש שווה שוקיים. ידוע כי הגובה במשולש שווה לאורך הבסיס EF וכי סכום שטחי שני המרובעים והמשולש הוא 90 סמ"ר. מצא את אורך צלע הריבוע.



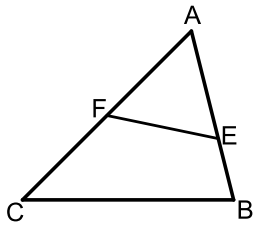
6) נתון ריבוע ABCD. בונים משולש ישר זווית EFC כך ש-E ו-F הן נקודות על המשכי הצלעות BC ו-DC של הריבוע בהתאמה.
הנקודה A נמצאת על יתר המשולש EF.
הקטע BE מהווה 50% מצלע הריבוע והקטע DF גדול פי 2 מצלע הריבוע. ידוע כי שטח המשולש EFC הוא 81 סמ"ר.
מצא את אורך צלע הריבוע.



7) הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו-AC של המשולש ABC.
ידוע כי שטח המשולש AEF הוא 22 סמ"ר.
שטח המרובע BCFE מהווה 60% משטח המשולש ABC.

א. מצא את שטח המרובע BCFE.

ב. מצא את שטח המשולש ABC.



תשובות סופיות:

1) 24 ס"מ.

2) 10 ס"מ ו-5 ס"מ.

3) 15 ק"מ ו-25 ק"מ.

4) 20 ₪ ו-12 ₪.

5) 6 ס"מ.

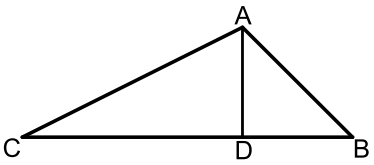
6) 6 ס"מ.

7) א. $S=33$ ב. $S=55$

בעיות במשולשים כולל משפט פיתגורס:

שאלות:

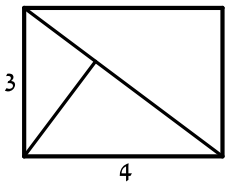
8) במשולש ABC מורידים גובה AD לצלע BC המחלק אותו לשני משולשים ADC ו-ABD כך שמתקיים: $S_{ADC}=2S_{ABD}$.



א. נתון שאורך הקטע BD הוא 12 ס"מ.
מצא את אורך הקטע CD.

ב. נתון שאורך הצלע AC הוא 25 ס"מ.
חשב את: S_{ABD}.

9) במלבן שצלעותיו הן 3 ו-4 ס"מ מעבירים אלכסון ומעלים לו גובה מהקדקוד התחתון לו.

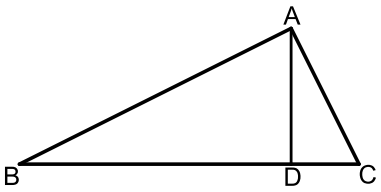


א. מצא את אורך האלכסון.

ב. מצא את אורך הגובה.

ג. מצא את אורכי שני הקטעים שהגובה מחלק את האלכסון.

10) במשולש ABC מורידים גובה AD לצלע BC כך שהקטע BD גדול פי 4.5 מהקטע CD.
אורך הצלע AB הוא 13 ס"מ ואורך הצלע AC הוא $5\frac{2}{3}$ ס"מ.

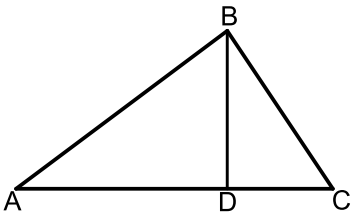


א. מצא את האורכים BD ו- CD.

ב. מצא את אורך הגובה AD.

ג. חשב את שטח המשולש ABC.

11) BD הוא גובה ליתר במשולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle B=90°)$.
היתר AC גדול ב-25% מהניצב AB.
ידוע כי אורך הניצב BC הוא 18 ס"מ.



א. מצא את אורכי הניצב AB והיתר AC.

ב. מהם האורכים AD ו-DC?

תשובות סופיות:

8) א. 24 ס"מ. ב. $S_{ABD}=42$.

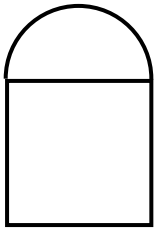
9) א. 5 ס"מ. ב. 2.4 ס"מ. ג. 3.2 ס"מ ו-1.8 ס"מ.

10) א. 12 ס"מ ו-$2\frac{2}{3}$ ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S=36\frac{2}{3}$.

11) א. 24 ס"מ ו-30 ס"מ. ב. 19.2 ס"מ ו-10.8 ס"מ.

בעיות במעגל – ללא אחוזים ללא משפט פיתגורס:

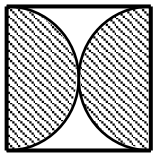
שאלות:



12) בבניין של רפי השכן יש חלון מרכזי המורכב ממלבן וחצי עיגול.
ידוע כי בסיס החלון קטן פי 2 מגובה המלבן.
שטח החלון הכולל הוא: $200+12.5\pi$.

א. מצא את מידות המלבן.

ב. מצא את היקף החלון.



13) בריבוע שלפניך חסומים שני חצאי עיגולים הפוכים זה לזה.
ידוע כי סכום ההיקפים של שני החצאים יחדיו הוא 10π.

א. מצא את אורך צלע הריבוע.

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. מצא את סכום השטחים של שני חצאי העיגולים (השטח המקווקו).

ii. מצא את השטח הכלוא בין העיגולים והריבוע (השטח הלבן).

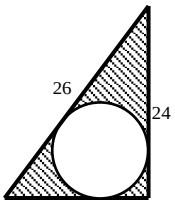
תשובות סופיות:

12) א. 10 ס"מ. ב. i. $S=25\pi$. ii. $S=100-25\pi=21.4$.

13) א. 10 ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S=120-25\pi=41.4$.

בעיה במעגל – ללא אחוזים וכולל משפט פיתגורס:

שאלות:



14) באיור שלפניך מתואר משולש ישר זווית שבתוכו כלוא עיגול.
ידוע כי אורך היתר במשולש הוא 26 ס"מ וכי אורך הניצב האנכי הוא 24 ס"מ.

א. מצא את אורך הניצב השני.

ב. שטח המעגל הוא 25π. מצא את רדיוס המעגל.

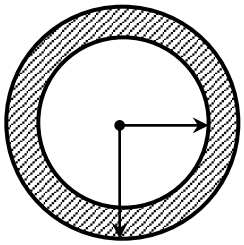
ג. מצא את השטח הכלוא בין המשולש למעגל (השטח המקווקו).

תשובות סופיות:

14) א. 10 ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S=120-25\pi=41.4$.

בעיה במעגל – כולל אחוזים:

שאלות:



15) באיור שלפניך מתוארת טבעת המורכבת משני מעגלים בעלי אותו מרכז ששטחה הוא 63π. ידוע כי רדיוס המעגל הפנימי קטן ב-25% מרדיוס המעגל החיצוני.
מצא את הרדיוסים של שני המעגלים.

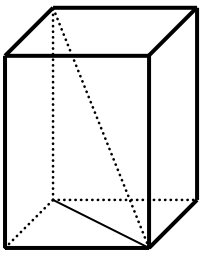
תשובות סופיות:

15) 12 ו-9.

בעיות בהנדסת המרחב:

שאלות:

1) נתונה תיבה שבסיסה מלבן.
ידוע כי אורך צלע אחת של בסיס התיבה קטנה ב-25% מהצלע הסמוכה לה וכי גובה התיבה גדול פי 3 מהצלע הגדולה.
אורך אלכסון הבסיס הוא 10 ס"מ.

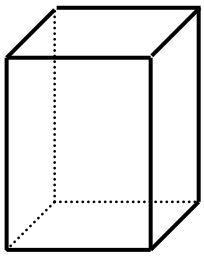


א. מצא את מידות בסיס התיבה.

ב. מצא את נפח התיבה.

ג. חשב את אורך אלכסון התיבה.

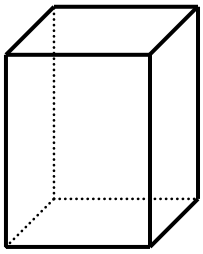
2) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן וגובהה הוא 10 ס"מ.
ידוע כי נפח התיבה הוא 280 סמ"ק וכי שטח הפנים שלה הוא 276 סמ"ר.



א. מצא את מידות בסיס התיבה.

ב. מה יהיה אורך אלכסון התיבה?

3) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן.
ידוע כי צלע אחת של המלבן גדולה ב-50% מהצלע הסמוכה לה.
כמו כן גובה התיבה גדול ב-50% מצלע המלבן הגדולה.
סכום ארבעת הגבהים של התיבה גדול ב-32 ס"מ מהיקף בסיס המלבן.

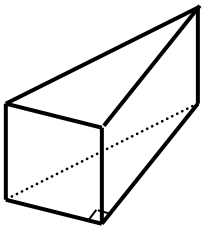


א. מצא את מידות מלבן הבסיס של התיבה.

ב. חשב את שטח המעטפת של התיבה.

ג. חשב את נפח התיבה.

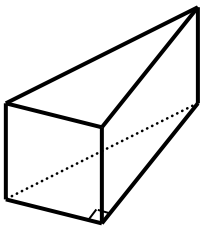
4) נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש ישר זווית.
ידוע כי אורך היתר במשולש הבסיס הוא 17 ס"מ.
גובה המנסרה שווה לאורך ניצב המשולש הקטן.
הניצב השני של המשולש גדול ב-7 ס"מ מהניצב הקטן.



א. חשב אורכי הניצבים ואת גובה המנסרה.

ב. חשב את נפח המנסרה.

5) נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש ישר זווית.
הניצב הגדול, גדול ב-4 ס״מ מהניצב קטן, וקטן ב-4 ס״מ מאורך היתר. נפח המנסרה הוא 2880 סמ״ק.

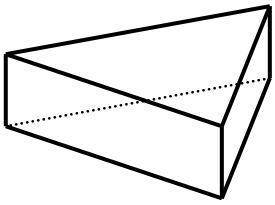


א. מצא את מידות משולש הבסיס.

ב. מצא את גובה המנסרה.

ג. מצא את שטח המעטפת של המנסרה.

6) נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים.
ידוע כי שטח הפאה הבנויה על מקצוע הבסיס של המשולש מהווה 80% משטח הפאה הסמוכה לה.
כמו כן ידוע כי אורך השוק במשולש בסיס גדול ב-4 ס״מ מאורך הבסיס במשולש זה. אורך גובה המנסרה הוא 4 ס״מ.

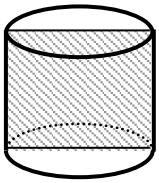


א. מצא את מידות משולש הבסיס.

ב. מה יהיה שטח המעטפת של המנסרה?

ג. מה יהיה סכום כל מקצועות המנסרה?

7) שטח החתך הצירי של גליל הוא 30 סמ״ר.
רדיוס הגליל וגובהו מקיימים: $2h-3r=1$.

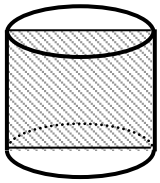


א. מצא את רדיוס הגליל ואת גובהו.

ב. חשב את שטח עיגול הבסיס של הגליל.

ג. חשב את נפח הגליל.

8) נתון גליל שרדיוסו הוא 4 ס״מ.
מעבירים חתך צירי בגליל.
ידוע כי היקף המלבן של החתך הצירי גדול פי 4 מאורך גובה הגליל.



א. ענה על השאלות הבאות:

i. מצא את גובה הגליל.

ii. איזה מרובע הוא המלבן של החתך הצירי?

ב. חשב את שטח הפנים של הגליל.

ג. חשב את נפח הגליל.

תשובות סופיות:

1) א. 6 ס"מ ו-8 ס"מ. ב. $V=1152$. ג. 26 ס"מ.

2) א. 4 ס"מ ו-7 ס"מ. ב. $\sqrt{165}=12.84$ ס"מ.

3) א. $8\times12\times18$ ס"מ. ב. $S=720$. ג. $V=1728$.

4) א. 8 ס"מ, 8 ס"מ ו-15 ס"מ. ב. $V=480$.

5) א. 12 ס"מ, 16 ס"מ ו-20 ס"מ. ב. 30 ס"מ. ג. $S=1440$.

6) א. 16 ס"מ ו-20 ס"מ. ב. $S=224$. ג. 124 ס"מ.

7) א. $r=3\ ,\ h=5$. ב. $S=9\pi$. ג. $V=45\pi$.

8) א.i. 8 ס"מ. א.ii. ריבוע. ב. $S=96\pi$.
ג. $V=128\pi$.

מכינה במתמטיקה

פרק 14 - מבוא לגיאומטריה של המישור

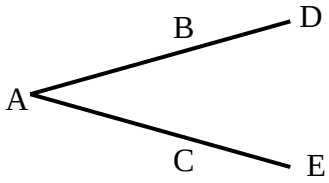
תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות ..... (ללא ספר)
2. חיבור וחיסור קטעים 187
3. חישובי זוויות וחיבור וחיסור זוויות 188
4. זוויות קדקודיות וזוויות צמודות 190
5. זוויות בין ישרים מקבילים 191

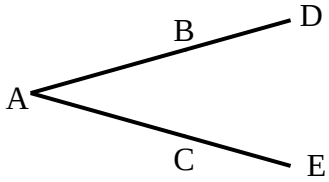
חיבור וחיסור קטעים:

שאלות:

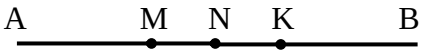
1) באיור שלפניך נתון:
$AB = AC \ , \ BD = CE$.
הוכח: $AD = AE$.



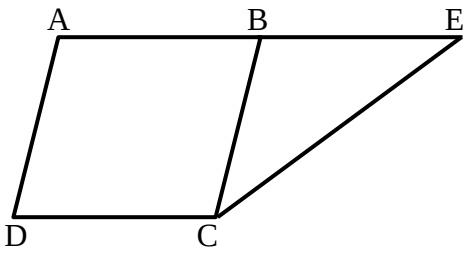
2) באיור שלפניך נתון:
$AD = AE \ , \ AB = AC$.
הוכח: $BD = CE$.



3) הנקודות $A \ , M \ , N \ , K \ , B$ נמצאות על ישר אחד.
נתון כי: $AM = KB \ , \ MN = NK$.
הוכח: $AN = BN$.



4) בסרטוט שלפניך נתון כי:
$BC = AB \ , \ BE + BC = 2AB$.
הוכח: $AB = BE$.



תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

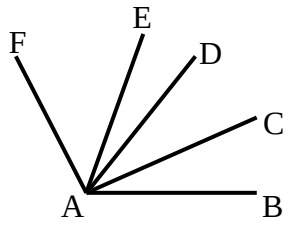
3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה.

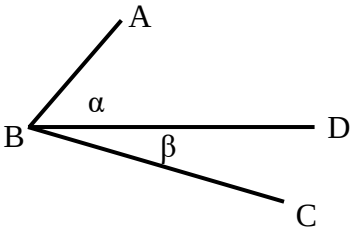
חישובי זוויות וחיבור וחיסור זוויות:

שאלות:

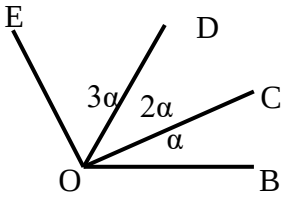
5) נתון: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAC$, $\sphericalangle FAE = 2 \cdot \sphericalangle EAD$.
וכן: $\sphericalangle FAD = 60°$, $\sphericalangle EAB = 80°$.
חשב את הזויות הבאות:
$\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle EAC$, $\sphericalangle FAB$.



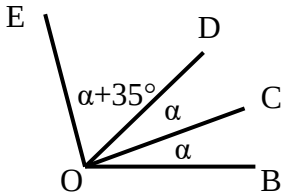
6) באיור שלפניך נתון: $\sphericalangle ABC = 69°$.
נתון כי: $\alpha = 2\beta$ (זוויות סמוכות).
מצא את α ואת β.



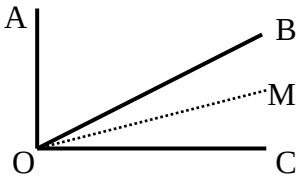
7) באיור שלפניך מספר קרניים היוצאים מהנקודה O.
הנתונים הם: $\sphericalangle EOB = 138°$.
חשב את הזוויות הבאות:
$\sphericalangle COB$, $\sphericalangle DOC$, $\sphericalangle EOD$.



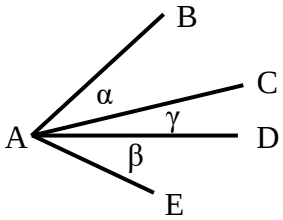
8) באיור שלפניך נתון: $\sphericalangle EOB = 110°$.
שאר הנתונים מופיעים בתרשים.
חשב את הזוויות הבאות:
$\sphericalangle DOC$, $\sphericalangle EOC$.



9) נתון האיור הבא ובו: $\sphericalangle AOC = 90°$.
OM חוצה את זוית BOC.
מתקיים: $\sphericalangle AOB = 3\sphericalangle MOC$.
חשב את: $\sphericalangle BOM$, $\sphericalangle AOM$.



10) בסרטוט שלפניך נתון: $\alpha = \beta$.
הוכח כי: $\sphericalangle EAC = \sphericalangle BAD$.



תשובות סופיות:

5) $\sphericalangle CAB = 30^\circ$, $\sphericalangle EAC = 50^\circ$, $\sphericalangle FAB = 120^\circ$.

6) $\alpha = 46^\circ$, $\beta = 23^\circ$.

7) $\sphericalangle DOE = 69^\circ$, $\sphericalangle COD = 46^\circ$, $\sphericalangle BOC = 23^\circ$.

8) $\sphericalangle DOC = 25^\circ$, $\sphericalangle EOC = 85^\circ$.

9) $\sphericalangle BOM = 18^\circ$, $\sphericalangle AOM = 72^\circ$.

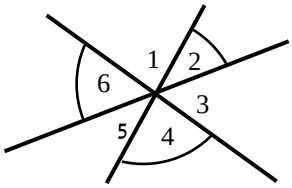
10) שאלת הוכחה.

זוויות קדקודיות וזוויות צמודות:

שאלות:

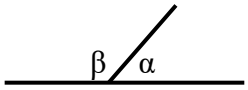
11) חשב את סכום הזויות הבאות (נמק):

$\sphericalangle 2+\sphericalangle 4+\sphericalangle 6$



12) באיור שלפניך הזויות α ו- β הן זויות צמודות.

ידוע כי: $\alpha=63°$. מצא את זוית β.

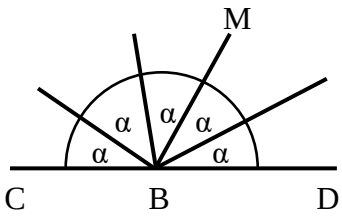


13) באיור שלפניך הזוית CBD היא שטוחה.

כל הזוויות שוות ל- α.

א. חשב את α.

ב. חשב את זוית CBM.

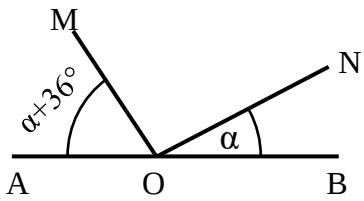


14) בסרטוט שלפניך ידוע:

הזווית AOB היא שטוחה.

נתון: $\alpha=27°$.

הוכח כי: $MO\perp NO$.

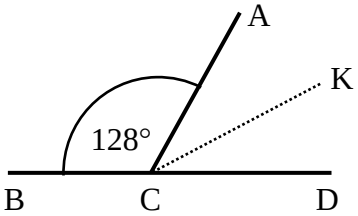


15) הזוויות $\sphericalangle ACD$ ו- $\sphericalangle ACB$ הן צמודות.

ידוע כי CK חוצה זווית ACD.

כמו כן: $\sphericalangle ACB=128°$.

חשב את זוית BCK.



תשובות סופיות:

11) $180°$.

12) $\beta=117°$.

13) א. $\alpha=36°$ ב. $\sphericalangle CBM=108°$.

14) שאלת הוכחה.

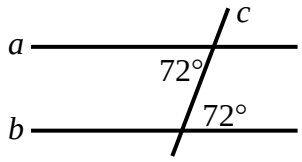
15) $\sphericalangle BCK=154°$.

זוויות בין ישרים מקבילים:

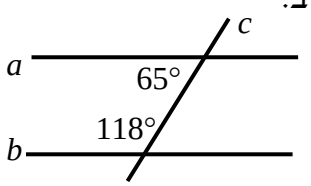
שאלות:

16) קבע בכל מקרה האם הישרים a ו-b מקבילים או שלא. נמק.

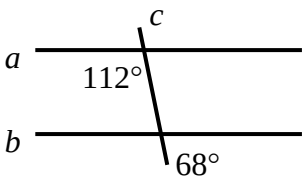
א.



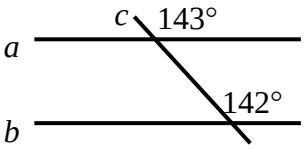
ב.



ג.

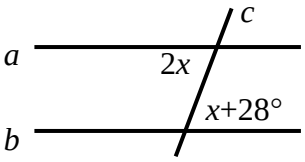


ד.

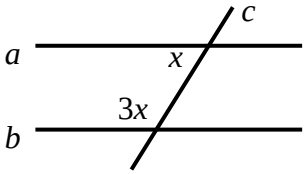


17) הישרים a ו-b מקבילים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:

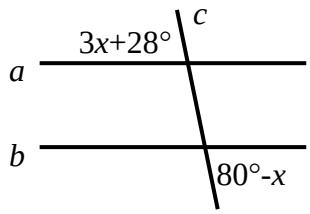
א.



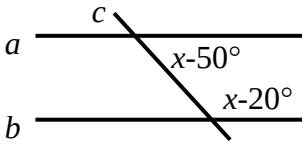
ב.



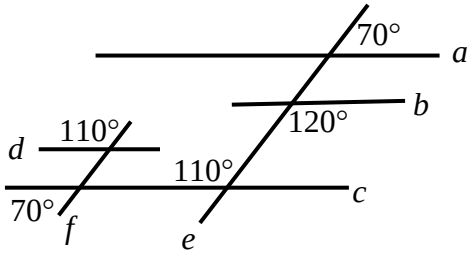
ג.



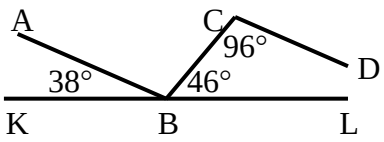
ד.



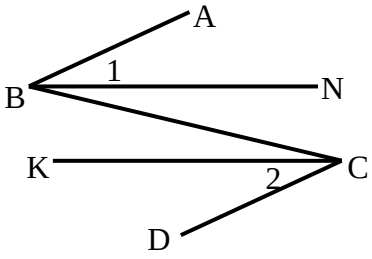
18) מצא את זוגות הישרים המקבילים בסרטוט הבא. נמק.



19) בסרטוט שלפניך נתון כי KL הוא קו ישר.
שאר הזוויות מופיעות בתרשים.
הוכח כי: $AB \parallel CD$.



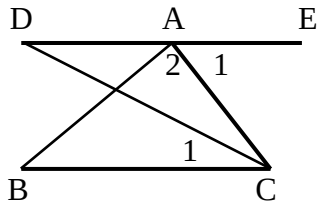
20) באיור שלפניך נתון כי:
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$, $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle C_2$.
הוכח כי: $BN \parallel CK$.



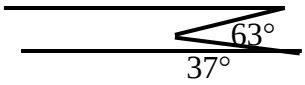
21) באיור שלפניך מופיע קטע ישר DE.
מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
מחברים את BC וידוע כי $BC \parallel DE$.
מעבירים את CD – חוצה זווית C.
נתון: $\sphericalangle A_2 = 85°$, $\sphericalangle A_1 = 68°$.

א. חשב את הזווית $\sphericalangle C_1$.

ב. חשב את הזווית $\sphericalangle B$.



22) בסרטוט שלפניך נתון:
$AB \parallel DE$, $\sphericalangle B = 63°$, $\sphericalangle D = 37°$.
חשב את גודל הזווית BCD.



תשובות סופיות:

16) א. כן ב. לא ג. כן ד. לא.

17) א. 28° ב. 45° ג. 13° ד. 125°.

18) $a \parallel c \parallel d$, $e \parallel f$.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) א. 34° ב. 27°.

22) $\sphericalangle BCD = 100°$.

מכינה במתמטיקה

פרק 15 - גיאומטריה - משולשים

תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות ..... (ללא ספר)
2. זוויות במשולשים ..... (ללא ספר)
3. משולש שווה שוקיים ..... (ללא ספר)
4. חפיפת משולשים ..... (ללא ספר)
5. זווית חיצונית במשולש ..... (ללא ספר)
6. משולש ישר זווית ..... (ללא ספר)
7. קטע אמצעים במשולש ..... (ללא ספר)
8. מפגש תיכונים במשולש ..... (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה

פרק 16 - גיאומטריה - מרובעים

תוכן העניינים

1. מרובע כללי ..... (ללא ספר)
2. המקבילית ..... (ללא ספר)
3. המלבן ..... (ללא ספר)
4. המעוין ..... (ללא ספר)
5. הריבוע ..... (ללא ספר)
6. הטרפז ..... (ללא ספר)
7. הדלתון ..... (ללא ספר)
8. סיכום משפחת המרובעים ..... (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה

פרק 17 - גיאומטריה - שטחים והיקפים

תוכן העניינים

1. שטחים והיקפים של משולשים ..... (ללא ספר)
2. שטחים והיקפים של מרובעים ..... (ללא ספר)
3. שאלות עם מקבילית ..... (ללא ספר)
4. שאלות עם מלבן ..... (ללא ספר)
5. שאלות עם מעוין ..... (ללא ספר)
6. שאלות עם ריבוע ..... (ללא ספר)
7. שאלות עם טרפז ..... (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה

פרק 18 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

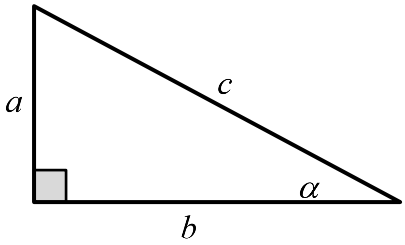
תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית 193

משולש ישר זווית:

סיכום כללי:

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

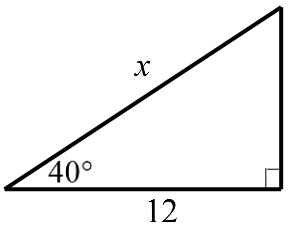
$$\tan\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

משפט פיתגורס: $a^2+b^2=c^2$

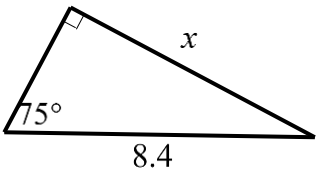
שאלות:

1) מצא את ערכו של α / x במשולשים ישרי הזווית הבאים:

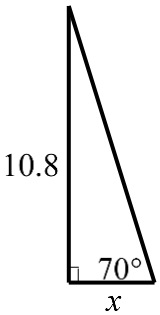
א.



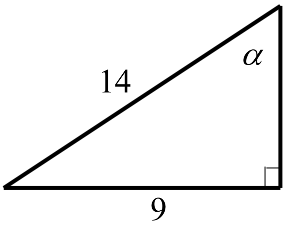
ב.



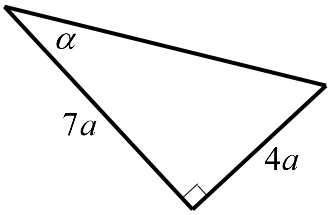
ג.



ד.



ה.

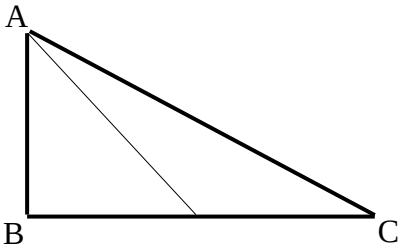


2) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90°)$.

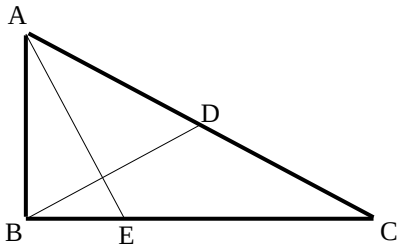
AD הוא התיכון לניצב BC.

נתון: $\sphericalangle C = 28°$, 6 ס"מ = AB.

מצא את AD ואת $\sphericalangle BAD$.

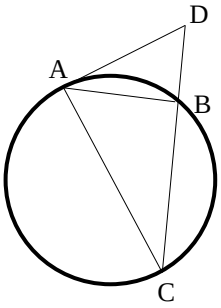


3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90°)$. BD הוא התיכון ליתר ו-AE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle A$.
נתון: BD = 5.6 ס"מ , BC = 8 ס"מ.
מצא את BE ואת $\sphericalangle BAE$.



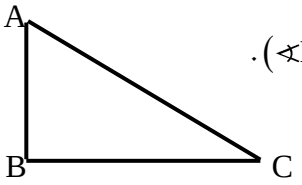
4) מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסוניו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל.
המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D.
נתון: BD=4 ס"מ , $\sphericalangle DAB=32°$.
מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

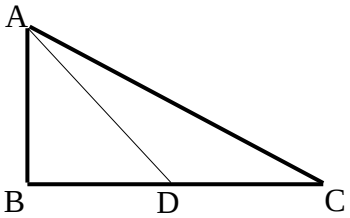


6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא $34.92°$. מצא את שטח המשולש.

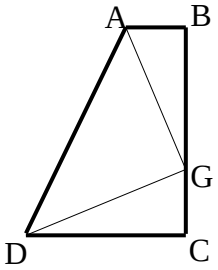
7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90°)$.
נתון: $\sphericalangle A=\alpha$, $AB=a$.
הבע באמצעות α ו-a את היקף המשולש.



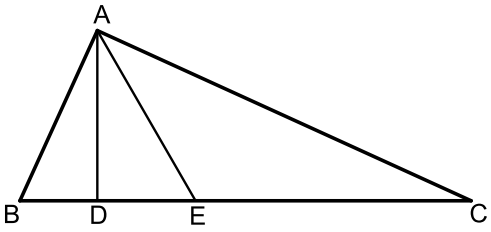
8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90°)$.
AD הוא התיכון לניצב BC.
נתון: $\sphericalangle C=\alpha$, $AB=b$.
הבע באמצעות α ו-b את אורכי הקטעים BD ו-AD.



9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה זווית זו הוא k.
הבע באמצעות α ו-k את שטח המשולש ואת אורך היתר.



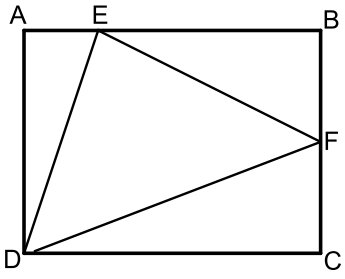
10) טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית $(\sphericalangle B=\sphericalangle C=90°)$.
הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG\perp DG$.
נתון: $AG=DG=m$, $\sphericalangle BAG=\beta$.
הבע באמצעות β ו- m את שטח הטרפז.



11) המשולש ABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle A=90°)$.
הקטעים AD ו-AE הם בהתאמה גובה
ליתר וחוצה זווית.
מסמנים: $DE=k$, $\sphericalangle DAE=\alpha$.

א. הבע באמצעות k ו- α
את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC
אם ידוע כי: $\alpha=30$ ו- $k=2$.



12) במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו-F
הנמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה כך ש-E
מקיימת: $3AE=BE$ ו-F היא אמצע הצלע BC.
אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE.
מעבירים את הקטעים DF , EF ו-DE כך
שנוצר במשולש DEF.

א. סמן ב- t את אורך הקטע AE והבע
באמצעות t את אורכי צלעות המשולש DEF.

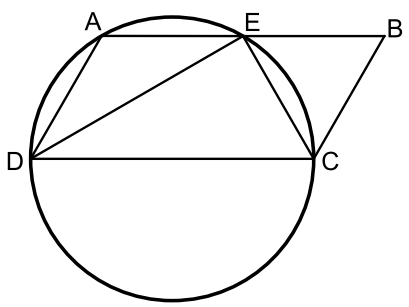
ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

13) משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k וזווית הבסיס שלו היא β חוסם מעגל.
הבע באמצעות β ו- k את רדיוס המעגל.

14) בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא b והזווית
שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא α.
הבע באמצעות α ו- b את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:

15) דרך הקודקודים A , C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E, $(AE = BE)$.



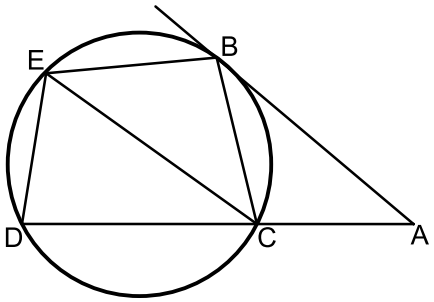
נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.

א. הוכח כי המיתר CE חוצה את זוויות C.

ב. רדיוס המעגל יסומן ב- R.
הבע באמצעות R את היקף המקבילית.

ג. מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.

16) מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD.
מעבירים את המיתרים BC ו-BE אשר זהים באורכם.
כמו כן מעבירים את המיתר DE.
אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.



א. הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.

ב. הוכח כי: $2\cdot\sphericalangle BEC = \sphericalangle EDC$.

ג. נתונים: $\sphericalangle A = 40°$, AC = 6 ס"מ, AB = 9 ס"מ , CE = 8 ס"מ.
חשב את שטח המרובע ABEC.

תשובות סופיות:

1) א. $x=15.665$ ב. $x=8.114$ ג. $x=3.931$ ד. $\alpha=40.005°$ ה. $\alpha=29.745°$.

2) $AD=$ ס"מ 8.236 , $\sphericalangle BAD=43.24°$.

3) $BE=$ ס"מ 3.294 , $\sphericalangle BAE=22.792°$.

4) $106.26°$, $106.26°$, $73.74°$, $73.74°$.

5) $R=$ ס"מ 6.04.

6) $S=$ סמ"ר 28.618.

7) $P=a\left(1+\tan\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)$.

8) $BD=\dfrac{b}{2\tan\alpha}$, $AD=\sqrt{b^2+\dfrac{b^2}{4\tan^2\alpha}}$.

9) $S=\dfrac{k^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\tan\alpha}{2}$, $AC=\dfrac{k\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

10) $\dfrac{\left(m\sin\beta+m\cos\beta\right)^2}{2}$.

11) א. $S=\dfrac{k^2}{\cos 2\alpha\tan^2\alpha}$ ב. 24 סמ"ר.

12) א. $DF=t\sqrt{18.25}$, $EF=t\sqrt{11.25}$, $DE=t\sqrt{10}$ ב. $47.14°$, $51°$, $81.86°$.

13) $R=k\cos\beta\tan\dfrac{\beta}{2}$.

14) $S=\dfrac{1}{2}b^2\sin\alpha\left(1+\sin\alpha\right)$, $\dfrac{1}{2}b\sin\alpha+\dfrac{\frac{1}{2}b\sin\alpha}{\tan\frac{\alpha}{2}}$.

15) א. שאלת הוכחה. ב. $6R$ ג. 4 ס"מ.

16) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 32.78 סמ"ר.

מכינה במתמטיקה

פרק 19 - זהויות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. זהויות יסוד 198
2. ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות 202
3. מעגל היחידה 204
4. סכום והפרש זוויות 207
5. זווית כפולה 211
6. סכום והפרש פונקציות 214
7. מכפלת פונקציות 217

זהויות יסוד:

סיכום כללי:

קשרים בין פונקציות	$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$
זוויות משלימות ל- $90°$	$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$	$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$
	$\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$	$\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$
קשרים בין פונקציות	$\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

שאלות:

הוכחת זהויות יסודית:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

1) $\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$

2) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$

3) $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\tan\alpha$

4) $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=1+\cos^2\alpha$

5) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=2$

6) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

7) $\frac{\cos(90°-\alpha)}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

8) $\sin^2(\alpha+45°)+\sin^2(45°-\alpha)=1$

9) $\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\tan\alpha$

10) $\frac{\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha}=\tan^3\alpha$

11) $\frac{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\cot\alpha$

12) $\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=1$

13) $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\cot\alpha$

14) $\frac{\sin^3\alpha}{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}=\tan\alpha$

15) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$

16) $\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$

הוכחות מתקדמות:

17) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=2+4\cot^2\alpha$.

18) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

19) הוכח את הזהות הבאה: $(\cot\alpha-\tan\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=(1+\cot^2\alpha)(1+\tan\alpha)(1-\tan\alpha)$.

20) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\cot^4\alpha$.

21) הוכח את הזהות הבאה: $1-\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha)=\cos^4\alpha$.

22) הוכח את הזהות הבאה: $\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)^2=4+4\cot^2\alpha$.

23) הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

24) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\tan\alpha\tan\beta$.

הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:

25) נתון כי: $\sin\alpha+\cos\alpha=k$.

הבע באמצעות k את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

ב. $\sin\alpha-\cos\alpha$.

ג. $\tan\alpha+\cot\alpha$.

ד. $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

26) נתון כי: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

מבלי למצוא את α חשב את: $\tan^2\alpha-2\cot^2\alpha$.

27) נתון כי: $\tan\alpha=\sqrt{7}$.

מבלי למצוא את α חשב את: $\dfrac{\sqrt{7}\sin\alpha+6\cos\alpha}{\sqrt{28}\sin\alpha-\cos\alpha}$.

28) חשב את ערך המכפלה הבאה: $\tan1^\circ\cdot\tan2^\circ\cdot\tan3^\circ\cdot\dots\cdot\tan88^\circ\cdot\tan89^\circ$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) שאלת הוכחה.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) שאלת הוכחה.
22) שאלת הוכחה.
23) שאלת הוכחה.
24) שאלת הוכחה.
25) א. $\frac{k^2-1}{2}$ ב. $\pm\sqrt{2-k^2}$ ג. $\frac{2}{k^2-1}$ ד. $\frac{k}{2}\left(3-k^2\right)$
26) -7.75
27) 1
28) 1

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

סיכום כללי:

	$\alpha=0°$	$\alpha=30°$	$\alpha=45°$	$\alpha=60°$	$\alpha=90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ϕ
$\cot\alpha$	ϕ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של $0°$ ו-$90°$ תִּלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי: $\frac{\sqrt{4}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{1}}{2},\frac{\sqrt{0}}{2}$
אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל.
עבור שורת ה-$\cos\alpha$ יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי $\tan\alpha$ ולסובב עבור ערכי $\cot\alpha$.

שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

1) $\sin 30°+\cos 30°$.

2) $\frac{\sin 30°\cdot\cos 30°}{\sin 60°}$.

3) $\tan 45°+\frac{\sin 45°}{\cos 45°}$.

4) $\frac{1+\cos 60^\circ}{2\sin 60^\circ}$.

5) $\cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ$.

6) $\frac{\tan^2 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ}$.

7) $\frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}{4\left(\sin^2 60^\circ - \frac{1}{4}\right)}$.

8) $\frac{27\cot^4 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2) $\frac{1}{2}$

3) 2

4) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

5) $\frac{3}{4}$

6) 9

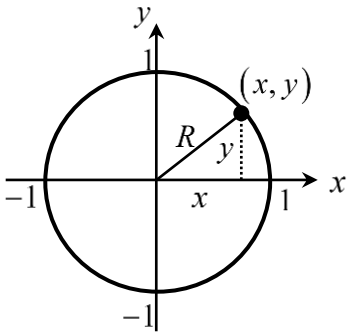
7) $-\frac{1}{3}$

8) $2\sqrt{6}$

מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

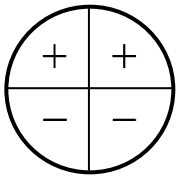
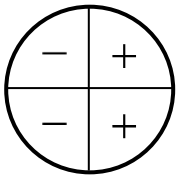
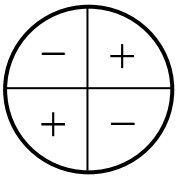
סיכום כללי:

הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ מתאימות לזוויות של $0°$, $90°$, $180°$, $270°$.

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
II III VI	$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ $\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$ $\sin(-a)=-\sin\alpha$	$\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(180^o+\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(180^o-\alpha)=-\tan\alpha$ $\tan(180^o+\alpha)=\tan\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
סימנים			

זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+360°k)&=\sin\alpha\\ \cos(\alpha+360°k)&=\cos\alpha\end{aligned}} \quad , \quad \boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha+180°k)&=\tan\alpha\\ \cot(\alpha+180°k)&=\cot\alpha\end{aligned}}$$

כאשר k הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

שאלות:

1) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120°$ ב. $\cos 150°$

ג. $\tan 160°$ ד. $\cot 130°$

ה. $\sin 215°$ ו. $\cos 245°$

ז. $\tan 230°$ ח. $\cot 200°$

ט. $\sin 300°$ י. $\cos 310°$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150°$ ב. $\cos 210°$ ג. $\tan 120°$

ד. $\sin 330°$ ה. $\tan 225°$ ו. $\sin 315°$

ז. $\cos 120°$ ח. $\tan(-30°)$ ט. $\cos(-45°)$

י. $\sin 510°$ יא. $\cos 930°$ יב. $\tan(-225°)$

3) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

א. $\left(\sin 240° \cdot \tan 150° + \cos(-60°)\right)^2$.

ב. $8\sin^2 150° \cdot \tan 135° - 2 \cdot \sin 135° \cdot \cos(-135°)$.

ג. $\dfrac{\cot 225°}{\sin(-225°) - \cos 135°} + \tan^2 210°$.

4) הוכח כי אם α, β ו- γ הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

א. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$.

ב. $\sin\left(\dfrac{\gamma + \beta}{2}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\sin 60°$ ב. $-\cos 30°$ ג. $-\tan 20°$ ד. $-\cot 50°$
ה. $-\sin 35°$ ו. $-\cos 65°$ ז. $\tan 50°$ ח. $\cot 20°$
ט. $-\sin 60°$ י. $\cos 50°$

2) א. $\frac{1}{2}$ ב. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ג. $-\sqrt{3}$ ד. $-\frac{1}{2}$
ה. 1 ו. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ז. $-\frac{1}{2}$ ח. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
ט. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ י. $\frac{1}{2}$ יא. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ יב. -1

3) א. 1 ב. -1 ג. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$.

4) שאלת הוכחה.

סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

סכום והפרש עבור $\sin(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cos(\alpha\pm\beta)$ יחושב לפי:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta)&=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha\\ \cos(\alpha\pm\beta)&=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

סכום והפרש עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha\pm\beta)&=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\\ \cot(\alpha\pm\beta)&=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}\end{aligned}}$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

א. $\sin75°$	ב. $\sin15°$	ג. $\sin105°$
ד. $\sin(-15°)$	ה. $\cos75°$	ו. $\cos15°$
ז. $\cos(-105°)$	ח. $\cos165°$	ט. $\cos(-195°)$

2) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin65°\cos25°+\sin25°\cos65°$.

ב. $5\cos50°\cos20°+5\sin50°\sin20°$.

3) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\sin(60°+\alpha)+\sin(60°-\alpha)=\sqrt{3}\cos\alpha$.

ב. $\cos(45°-\alpha)-\cos(45°+\alpha)=\sqrt{2}\sin\alpha$.

ג. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

ד. $\tan\alpha-\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

4) נתון: $\cos\beta=\dfrac{8}{17}$, $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ ו- α,β זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של α ו- β חשב:

א. $\sin(\alpha+\beta)$.

ב. $\cos(\alpha+\beta)$.

ג. $\tan(\alpha+\beta)$.

5) הוכח את הזהות: $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$.

6) הוכח את הזהות: $(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin2\alpha+\cos2\alpha)=\sin3\alpha+\cos\alpha$.

7) הוכח את הזהות: $\tan7\alpha-\tan5\alpha-\tan2\alpha=\tan7\alpha\tan5\alpha\tan2\alpha$.

8) הוכח את הזהות: $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

9) הוכח את הזהות: $\cot\alpha-\cot\beta=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

10) הוכח את הזהות הבאה:

$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

11) הוכח כי מתקיים: $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$.

12) הוכח כי מתקיים: $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$.

13) נתון כי: $\sin 76^\circ = m$. הבע את $\sin 31^\circ$ באמצעות m.

14) הזוויות α ו- β הן זוויות חדות.
נתון כי: $\tan \alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$ ו- $\tan \beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$.
הראה כי מתקיים: $\alpha + \beta = 60^\circ$.

15) היעזר בנוסחה: $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ ומצא את $\tan x$ ו- $\tan y$
אם ידוע כי: $\tan(x+y) = -3$ ו- $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$. הבחן בין שני מקרים.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ב. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ג. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ד. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ה. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
ו. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ז. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ח. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ט. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) א. 1 ב. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

3) שאלת הוכחה.

4) א. $\frac{84}{85}$ ב. $-\frac{13}{85}$ ג. $-6\frac{6}{13}$

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(m-\sqrt{1-m^2}\right)$.

15) שאלת הוכחה.

16) 1 ו-2 או $-\frac{1}{2}$ ו- 1-.

זווית כפולה:

סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

שאלות:

1) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$

ב. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$

ג. $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$

ד. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

ה. $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\cot 2\alpha$

ו. $\frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2}\cot 2\alpha$

ז. $\cos^2 2\alpha = 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha + 1$

ח. $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

2) הוכח את הזהות: $\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\sin 3\alpha$ לפי: $\sin(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

3) הוכח את הזהות: $\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\cos 3\alpha$ לפי: $\cos(\alpha + 2\alpha)$ ושימשו בזהויות שנלמדו.

4) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\sin\alpha = \frac{40}{41}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\cos\alpha$.

ב. $\tan\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

ה. $\tan 2\alpha$.

5) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\tan\alpha=\frac{5}{12}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\sin\alpha$.

ב. $\cos\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

6) נתונה זווית α ברביע הראשון וזווית β ברביע השני המקיימות: $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ ו- $\cos\beta=-0.8$. מבלי למצוא את α ו- β חשב את הביטויים הבאים:

א. $\sin(\alpha+\beta)$.

ב. $\cos(\alpha+\beta)$.

ג. $\sin(2\alpha+\beta)$.

7) נתון כי $\sin\alpha+\cos\alpha=1.2$ עבור $0°<\alpha<90°$. חשב את $\sin 2\alpha$.

8) פשט את הביטוי הבא: $\sqrt{\frac{1+\cos 8\alpha}{2}}$.

9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 16°\cos 16°}{3-6\sin^2 29°}$.

10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin^2 78°-\cos^2 78°}{\sin 66°}$.

11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{5\tan 15°\left(1-2\cos^2 15°\right)}{1-\tan^2 15°}$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) א. $\frac{9}{41}$ ב. $4\frac{4}{9}$ ג. $\frac{720}{1681}$ ד. $-\frac{1519}{1681}$
ה. $-\frac{720}{1519}$
5) א. $\frac{5}{13}$ ב. $\frac{12}{13}$ ג. $\frac{120}{169}$ ד. $\frac{119}{169}$
6) א. $\frac{16}{65}$ ב. $-\frac{63}{65}$ ג. $-\frac{123}{845}$
7) 0.44.
8) $\cos 4\alpha$.
9) $\frac{1}{6}$.
10) 1.
11) -1.25.

סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

שאלות:

1) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 5\alpha+\sin 3\alpha=2\sin 4\alpha\cos\alpha$.

2) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha-\sin 2\alpha=2\sin 2.5\alpha\cos 4.5\alpha$.

3) הוכח את הזהות הבאה: $\cos\alpha+\cos 5\alpha=2\sin 2\alpha\cos 3\alpha$.

4) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 5\alpha-\cos 2\alpha=-2\sin 3.5\alpha\cos 1.5\alpha$.

5) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha$.

6) הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

7) הוכח את הזהות הבאה: $\sin(2\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin\beta$.

8) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\sin 4\alpha-\sin 2\alpha}=2\cos\alpha$.

9) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = 2\sin\alpha$.

10) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \tan 2\alpha$.

11) הוכח את הזהות הבאה: $\tan\alpha + \tan 3\alpha = \frac{2\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}$.

12) פשט את הביטוי: $\frac{1+\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}$ ומצא את ערכו מבלי להיעזר במחשבון אם ידוע כי $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$.

13) נתון כי α ו- β הן זוויות חדות המקיימות: $\sin\alpha = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ ו- $\sin\beta = \frac{n^2-m^2}{m^2+n^2}$.
הראה כי: $\alpha + \beta = 90°$.

14) היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\cos 6\alpha\cos 2\alpha - \cos 5\alpha\cos\alpha = -\sin 7\alpha\sin\alpha$.

15) היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\sin 4\alpha\sin 2\alpha - \sin 5\alpha\sin\alpha + \cos 3\alpha\cos\alpha = \cos 2\alpha$.

16) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 52.5°\cdot\sin 7.5°$.

17) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 35°\sin 55°}{\cos 40°\cos 20° - 0.25}$.

18) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$.

19) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 5°\cdot\sin 25°\cdot\sin 35°\cdot\sin 55°\cdot\sin 65°\cdot\sin 85°$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) $-\frac{7}{9}$.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.
17) 1.
18) $\frac{1}{8}$.
19) $\frac{1}{64}$.

מכפלת פונקציות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום:

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right]\\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]\\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$$

שאלות:

1) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(\sin 8\alpha+\sin 6\alpha\right)$.

2) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 11\alpha\sin 3\alpha=\frac{1}{2}\left(\sin 14\alpha-\sin 8\alpha\right)$.

3) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 4\alpha\cos 10\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos 6\alpha+\cos 14\alpha\right)$.

4) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 3\alpha\sin 7\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos 4\alpha-\cos 10\alpha\right)$.

5) הוכח את הזהות הבאה: $2\sin 7\alpha\sin 2\alpha+\cos 9\alpha=\cos 5\alpha$.

6) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cos\alpha=\sin 3\alpha\cos 8\alpha$.

7) הוכח את הזהות הבאה: $\sin\alpha\sin 3\alpha=\cos 2\alpha-\cos 3\alpha\cos\alpha$.

8) הוכח את הזהות הבאה: $2\left(\sin^2\beta-\sin^2\alpha\right)=\cos 2\alpha-\cos 2\beta$.

9) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{2}{\cot\beta-\tan\alpha}=\tan\left(\alpha+\beta\right)-\frac{\sin\left(\alpha-\beta\right)}{\cos\left(\alpha+\beta\right)}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.

מכינה במתמטיקה

פרק 20 - משוואות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. משוואות טריגונומטריות כלליות 219
2. משוואות הנפתרות עי טכניקה אלגברית 222
3. משוואות הנפתרות על ידי זהויות יסוד 224
4. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של מעגל היחידה 226
5. משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס 227
6. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות 228
7. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של זווית כפולה 229
8. משוואות מהצורה $a\sin(x)+b\cos(x)=c$ 230
9. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש פונקציות 231
10. משוואות עם תחום נתון 233
11. משוואות עם זוויות ברדיאנים 234
12. אי שוויונים טריגונומטריים 238

משוואות טריגונומטריות כלליות:

סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות
כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית נתונה/ידועה:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin\alpha$	$x_1 = \alpha + 360°k \ , \ x_2 = 180° - \alpha + 360°k$
$\cos x = \cos\alpha$	$x_{1,2} = \pm\alpha + 360°k$
$\tan x = \tan\alpha$	$x = \alpha + 180°k$
$\cot x = \cot\alpha$	$x = \alpha + 180°k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

א. $\sin x = \frac{1}{2}$ ב. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ד. $\sin x = -\frac{1}{2}$

2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

א. $\cos x = \frac{1}{2}$ ב. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

א. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ב. $\tan x = -1$

4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית):

א. $\sin x = 0.7$ ב. $\cos x = -0.6$ ג. $\tan x = 5$

5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות):

א. $\sin 3x = \frac{1}{2}$ ב. $2\cos 2x = -\sqrt{3}$

ג. $\tan 5x = -1$ ד. $3\sin 2x = 2$

ה. $3\cos 3x = 1$ ו. $2\tan 4x = 1$

6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב):

א. $\sin(2x+30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. $\cos(75° - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\tan(50° - x) = 1.3$

7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים):

א. $\sin x = \sin 3x$ ב. $\sin 2x = \sin(x+30°)$

ג. $\sin x = \sin(120° - x)$ ד. $\cos x = \cos 3x$

ה. $\cos x = \cos(40° - x)$ ו. $\tan x = \tan 3x$

ז. $\tan 2x = \tan(60° - x)$

8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות):

א. $\sin x = 0$ ב. $\sin x = 1$

ג. $\sin x = -1$ ד. $\cos x = 0$

ה. $\cos x = 1$ ו. $\cos x = -1$

ז. $\tan x = 0$ ח. $\tan x = 1$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1=30°+360°k\ ,\ x_2=150°+360°k$ ב. $x_1=45°+360°k\ ,\ x_2=135°+360°k$

ג. $x_1=-60°+360°k\ ,\ x_2=240°+360°k$ ד. $x_1=-30°+360°k\ ,\ x_2=210°+360°k$.

2) א. $x_{1,2}=\pm 60°+360°k$ ב. $x_{1,2}=\pm 150°+360°k$.

3) א. $x=30°+180°k$ ב. $x=135°+180°k$.

4) א. $x_1=44.427°+360°k\ ,\ x_2=135.573°+360°k$

ב. $x_{1,2}=126.87°+360°k$ ג. $x=78.69°+180°k$.

5) א. $x_1=10°+120°k\ ,\ x_2=50°+120°k$ ב. $x_1=75°+180°k\ ,\ x_2=-75°+180°k$

ג. $x=-9°+36°k$ ד. $x_1=20.9°+180°k\ ,\ x_2=69.09°+180°k$

ה. $x_{1,2}=\pm 23.5°+120°k$ ו. $x=6.64°+45°k$.

6) א. $x_1=105°+180°k\ ,\ x_2=-45°+180°k$

ב. $x_1=10°+120°k\ ,\ x_2=40°+120°k$ ג. $x=-2.431°+180°k$.

7) א. $x_1=180°k\ ,\ x_2=45°+90°k$ ב. $x_1=30°+360°k\ ,\ x_2=50°+120°k$

ג. $x=60°+180°k$ ד. $x=90°k$

ה. $x=20°+180°k$ ו. $x=180°k$ ז. $x=20°+60°k$.

8) א. $x=180°k$ ב. $x=90°+360°k$ ג. $x=180°+360°k$

ד. $x=90°+180°k$ ה. $x=360°k$ ו. $x=180°+360°k$

ז. $x=180°k$ ח. $x=45°+180°k$.

משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע"י הוצאת גורם משותף, ע"י נוסחאות הכפל המקוצר וע"י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

1) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

2) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

3) $\tan^2 2x = 3$

4) $\sin x \cos 3x = 0$

5) $\sin 2x - 2\sin^2 2x = 0$

6) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$

7) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

8) $3\sin^2 x - \sin x = 2$

9) $6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

10) $\cos^2 x + 2\cos x = 3$

11) $\tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0$

12) $\tan^2 x = 4\tan x - 1$

13) $\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0$

14) $\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0$

15) $\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0$

תשובות סופיות:

1) $x_{1,2}=\pm 30^\circ+360^\circ k$, $x_{3,4}=\pm 150^\circ+360^\circ k$.

2) $x_1=30^\circ+360^\circ k$, $x_2=150^\circ+360^\circ k$, $x_3=330^\circ+360^\circ k$, $x_4=210^\circ+360^\circ k$.

3) $x_1=30^\circ+90^\circ k$, $x_2=-30^\circ+90^\circ k$.

4) $x_1=180^\circ k$, $x_2=30^\circ+60^\circ k$.

5) $x_1=90^\circ k$, $x_2=15^\circ+180^\circ k$, $x_3=75^\circ+180^\circ k$.

6) $x_1=90^\circ+180^\circ k$, $x_{2,3}=\pm 150^\circ+360^\circ k$.

7) $x_1=90^\circ+360^\circ k$, $x_2=210^\circ+360^\circ k$, $x_3=-30^\circ+360^\circ k$.

8) $x_1=90^\circ+360^\circ k$, $x_2=-41.8^\circ+360^\circ k$, $x_3=221.8^\circ+360^\circ k$.

9) $x_1=30^\circ+360^\circ k, x_2=150^\circ+360^\circ k, x_3=-19.4^\circ+360^\circ k, x_4=199.4^\circ+360^\circ k$.

10) $x=360^\circ k$.

11) $x_1=-45^\circ+180^\circ k$, $x_2=75.964^\circ+180^\circ k$.

12) $x_1=75^\circ+180^\circ k$, $x_2=15^\circ+180^\circ k$.

13) $x=360^\circ k$.

14) $x=180^\circ+360^\circ k$.

15) $x=45^\circ+90^\circ k$, $x\neq -45^\circ+180^\circ k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:

קשרים בין פונקציות	$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$
זוויות משלימות ל- $90°$	$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$	$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$
	$\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$	$\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$
קשרים בין פונקציות	$\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x=\cos x$

2) $\sin x=\cos(x+45°)$

3) $\cos x=\frac{2}{3}\sin^2 x$

4) $2\cos^2 x=3\sin x$

5) $\sin^2 x-\cos x=\frac{1}{4}$

6) $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x$

7) $\sin^2 x+2\cos^2 x=1.5$

8) $\sin x-\tan x=0$

תשובות סופיות:

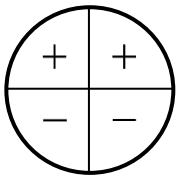
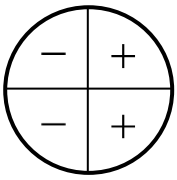
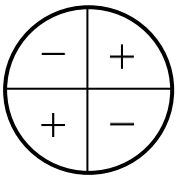
1) $x = 45° + 180°k$.
2) $x = 22.5° + 180°k$.
3) $x_{1,2} = \pm 60° + 360°k$.
4) $x_1 = 30° + 360°k$, $x_2 = 150° + 360°k$.
5) $x_{1,2} = \pm 60° + 360°k$.
6) $x_1 = 30° + 120°k$, $x_2 = -90° + 360°k$
7) $x_{1,2} = \pm 45° + 360°k$, $x_{3,4} = \pm 135° + 360°k$.
8) $x = 180°k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
I II III	$\sin(180^o-\alpha)=\sin\alpha$ $\sin(180^o+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(180^o+\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(180^o-\alpha)=-\tan\alpha$ $\tan(180^o+\alpha)=\tan\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
סימנים			

זהויות עבור זוויות הגדולות מ-360 מעלות:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+360°k)&=\sin\alpha\\ \cos(\alpha+360°k)&=\cos\alpha\end{aligned}} \quad , \quad \boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha+180°k)&=\tan\alpha\\ \cot(\alpha+180°k)&=\cot\alpha\end{aligned}}$$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x=-\sin 3x$

2) $\cos 2x=-\cos 3x$

3) $\sin(x+30°)=-\cos x$

4) $\sin 3x=-\cos(180°-x)$

תשובות סופיות:

1) $x_1=90°k\ ,\ x_2=-90°+180°k$

2) $x_1=180°+360°k\ ,\ x_2=36°+72°k$

3) $x=120°+180°k$

4) $x_1=22.5°+90°k\ ,\ x_2=45°+180°k$

משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה: $\sin x = a\cos x$ לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע"י חלוקה ב-$\cos x$ (בתנאי ש-$\cos x \neq 0$).
כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a\cos x \quad /:\cos x \neq 0$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = a\frac{\cos x}{\cos x}$$
$$\tan x = a$$
$$x = \tanh^{-1}(a) + 180°k$$

הערה:

יש לבדוק האם ערכי x שמקיימים $\cos x = 0$ מהווים פתרון למשוואה.
אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x = 2\cos x$
2) $3\sin x = \cos x$
3) $4\sin x = 7\cos x$
4) $2\sin x = -5\cos x$
5) $\sin^2 x = 8\cos^2 x$
6) $3\sin^2 x = \cos^2 x$

תשובות סופיות:

1) $x = 63.43° + 180°k$.
2) $x = 18.43° + 180°k$.
3) $x = 60.25° + 180°k$.
4) $x = -68.19° + 180°k$.
5) $x_1 = 70.52° + 180°k$, $x_2 = -70.52° + 180°k$.
6) $x_1 = 30° + 180°k$, $x_2 = -30° + 180°k$.

משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:

סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס	$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס	$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ $\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $2\sin x=\sin(60°-x)$

2) $\sin(x+45°)\sin(x-45°)=\frac{1}{2}$

3) $\frac{\cos 3x}{\sin x}-\frac{\sin 3x}{\cos x}=2$

4) $3\cos^2 x-\sin^2 x=\sin 3x$

תשובות סופיות:

1) $x=19.11°+180°k$.

2) $x=90°+180°k$.

3) $x=15°+60°k$.

4) $x_{1,2}=\pm60°+180°k$, $x_3=90°+360°k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

סינוס זווית כפולה	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
קוסינוס זווית כפולה	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x - \sin 2x = 0$

2) $\sqrt{2}\sin x + \sin 2x = 0$

3) $4\cos x = \sin 2x$

4) $2\cos 2x + \sin 4x = 0$

5) $3\cos x - \cos 2x = 0$

6) $\cos 2x = 2\sin x$

7) $\sin x + \cos 2x = 1$

8) $2\sin^2 x = \cos 2x + 2$

תשובות סופיות:

1) $x_1 = 360°k \ , \ x_2 = 60° + 120°k$

2) $x_1 = 180°k \ , \ x_{2,3} = \pm 135° + 360°k$

3) $x = 90° + 180°k$

4) $x_1 = 45° + 90°k \ , \ x_2 = 135° + 180°k$

5) $x_{1,2} = \pm 106.307° + 360°k$

6) $x_1 = 21.1° + 360°k \ , \ x_2 = 158.9° + 360°k$

7) $x_1 = 180°k \ , \ x_2 = 30° + 360°k \ , \ x_3 = 150° + 360°k$.

8) $x_1 = -60 + 360°k \ , \ x_2 = 60° + 360°k \ , \ x_3 = 120° + 360°k \ , \ x_4 = 240° + 360°k$.

משוואות מהצורה: a sin(x) + b cos(x) = c :

סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה: $a\sin x+b\cos x=c$ לצורה: $\sin x+\frac{b}{a}\cos x=\frac{c}{a}$.

מציאת זווית α המקיימת: $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ תאפשר לכתוב: $\sin x+\tan\alpha\cdot\cos x=\frac{c}{a}$.

שימוש בזהות: $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ובזהות: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ יובילו:

$$\sin x+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos x=\frac{c}{a}\quad /\cdot\cos\alpha$$
$$\sin x\cos\alpha+\sin\alpha\cos x=\frac{c}{a}\cos\alpha$$
$$\sin(x+\alpha)=\frac{c}{a}\cos\alpha$$

אם נסמן: $\frac{c}{a}\cos\alpha=k$ נקבל את המשוואה: $\sin(x+\alpha)=k$ כאשר α ו- k ידועים.
מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $10\sin x+3\cos x=5$

2) $5\cos x-6\sin x=1$

3) $\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x=\sqrt{12}$

4) $\frac{1}{2}\sin x+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}$

5) $\cos x+\cos(60°+x)=\sqrt{2}+\cos(60°-x)$

תשובות סופיות:

1) $x_1=11.91°+360°k\ ,\ x_2=134.69°+360°k$

2) $x_1=227.156°+360°k\ ,\ x_2=32.44°+360°k$

3) $x=15°+180°k$

4) $x_1=-60°+720°k\ ,\ x_2=180°+360°k$

5) $x_1=-105°+360°k\ ,\ x_2=15°+360°k$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סכום והפרש פונקציות עבור סינוס	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
סכום והפרש פונקציות עבור קוסינוס	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x+\sin 3x=\sin 2x$.

2) $\cos 2x-\cos 6x=\sin 2x$.

3) $\sin x+\sin 3x=4\sin^3 x$.

4) $\sin 6x-\sin 4x=1-\cos 2x$.

5) $\left(\sin 5x+\sin 7x\right)^2=\left(\cos 5x+\cos 7x\right)^2$.

6) $2\cos^2\frac{x}{2}+\cos 3x+\cos 5x=1$.

7) $1+\sin x+\sin 7x=\cos 8x$.

8) $2\sin 3x\left(\cos 2x+\cos x\right)=\sin x+\sin 2x$.

9) $\sin\left(x+60°\right)-\sin x=\sin\left(2x+60°\right)-\sin 2x$.

10 $\cos^2 3x-\cos^2 x=\sin x\cos x$.

11 $\sin 8x\sin 2x+\cos 10x=0$.

12 $\cos x+3\sin x=1+2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

13 $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x-\sin 4x=0$.

14 $4\cos x\cos 2x\cos 3x=1$.

תשובות סופיות:

1 $x_{1,2}=\pm 60°+360°k$, $x_3=90°k$.

2 $x_1=45°+90°k$, $x_2=180°k$.

3 $x_1=37.5°+90°k$, $x_2=7.5°+90°k$, $x_3=90°k$.

4 $x_1=15°+60°k$, $x_2=180°k$, $x_3=-22.5°+90°k$.

5 $x_1=36°k$, $x_2=\left(\frac{180}{7}\right)°+\left(\frac{180}{7}\right)°k$.

6 $x_{1,2}=\pm 30°+90°k$, $x_3=90°+180°k$.

7 $x_1=-\left(12\frac{6}{7}\right)°k+\left(51\frac{3}{7}\right)°k$, $x_2=45°k$.

8 $x_1=40°k$, $x_2=180°+360°k$.

9 $x_1=-20°+120°k$, $x_2=360°k$.

10 $x_1=52.5°+90°k$, $x_2=-7.5°+90°k$, $x_3=90°k$.

11 $x_1=45°+90°k$, $x_2=11.25°+22.5°k$.

12 $x_1=30°+360°k$, $x_2=150°+360°k$.

13 $x_1=7.5°+15°k$, $x_2=90°k$.

14 $x_1=60°+180°k$, $x_2=22.5+45°k$.

משוואות עם תחום נתון:

סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- k ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

1) $8\sin x-4=0\ ,\ [0°:180°]$.
2) $\sin 2x=\sin(x+60°)\ ,\ [-90°:90°]$.
3) $3\cos(2x+30°)+1=0\ ,\ [-90°:90°]$.
4) $\cos(50°-x)=-\cos x\ ,\ [0°:360°]$.
5) $2\sin 3x-5\cos 3x=0\ ,\ [-30°:30°]$.
6) $2\cos^2 3x=\sin 6x+1\ ,\ [0°:180°]$.
7) $\cos 4x+1=3\sin 2x\ ,\ [-180°:180°]$.
8) $\cos 2x+\cos^2 x+\sin x=0\ ,\ [-180°:180°]$.

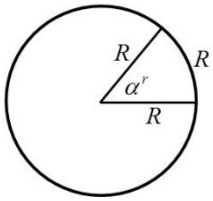
תשובות סופיות:

1) $x=30°\ ,\ 150°$.
2) $x=-80°\ ,\ 40°\ ,\ 60°$.
3) $x=39.736°\ ,\ -69.736°$.
4) $x=115°\ ,\ 295°$.
5) $x=22.733°$.
6) $x=7.5°\ ,\ 37.5°\ ,\ 67.5°\ ,\ 97.5°\ ,\ 127.5°\ ,\ 157.5°$.
7) $x=-165°\ ,\ -105°\ ,\ 15°\ ,\ 75°$.
8) $x=-138.19°\ ,\ -41.81°\ ,\ 90°$.

משוואות עם זוויות ברדיאנים:

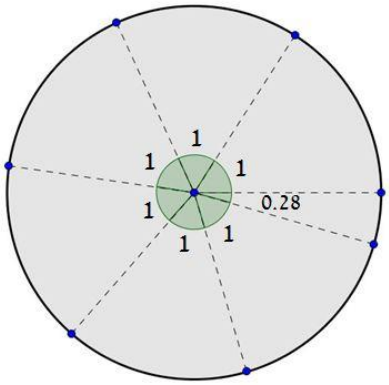
סיכום כללי:

הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו R, תימצאנה 2π רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא $P=2\pi\cdot R$.



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל-$2\pi=6.28$ קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל.
הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד,
כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן.
מקבלים 2π רדיאנים.

קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית α° (במעלות) לזווית α^r (ברדיאנים): $\alpha^r=\frac{\pi}{180}\alpha^\circ$.
- נוסחת מעבר מזווית α^r (ברדיאנים) לזווית α° (במעלות): $\alpha^\circ=\frac{180}{\pi}\alpha^r$.

פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות
כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

המשוואה	הפתרון
$\sin x=\sin\alpha$	$x_1=\alpha+2\pi k\ ,\ x_2=\pi-\alpha+2\pi k$
$\cos x=\cos\alpha$	$x_{1,2}=\pm\alpha+2\pi k$
$\tan x=\tan\alpha$	$x=\alpha+\pi k$
$\cot x=\cot\alpha$	$x=\alpha+\pi k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

1) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

א. $30°$	ב. $90°$	ג. $75°$	ד. $120°$
ה. $210°$	ו. $315°$	ז. $18°$	ח. $285°$
ט. $-15°$	י. $-80°$	יא. $510°$	יב. $-390°$

2) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

א. π	ב. 2π	ג. 4π	ד. 1.5π
ה. $\frac{1}{2}\pi$	ו. $\frac{\pi}{4}$	ז. $\frac{\pi}{6}$	ח. $\frac{1}{18}\pi$
ט. $\frac{13}{18}\pi$	י. $\frac{19}{12}\pi$	יא. $1\frac{1}{6}\pi$	יב. $2\frac{1}{4}\pi$

3) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

א. $2\sin 3x=1$, $\left[0:\frac{1}{3}\pi\right]$

ב. $\sqrt{3}+2\cos x=0$, $[0:\pi]$

ג. $3-3\tan\frac{x}{2}=0$, $[0:2\pi]$

ד. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0:\pi]$

ה. $4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2=0$, $\left[0:\frac{1}{2}\pi\right]$

ו. $\sin x=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2x\right)$, $\left[-\frac{5\pi}{18}:\frac{5\pi}{18}\right]$

ז. $5-5\tan\left(4x-0.1\pi\right)=0$, $\left[0:\frac{\pi}{3}\right]$

ח. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0.7$, $\left[-\frac{\pi}{4}:\frac{\pi}{4}\right]$

4) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

א. $\sin^2 x=\frac{3}{4}$, $\left[0:\frac{\pi}{2}\right]$

ב. $16\cos^2 2x-1=0$, $\left[-\frac{\pi}{8}:\frac{\pi}{8}\right]$

ג. $2\tan^2 x-18=0$, $[0:\pi]$

ד. $3\sin x\cos x+3\cos x=0$, $\left[-\frac{\pi}{3}:\frac{\pi}{3}\right]$

ה. $\sin^2 x-5\sin x\cos x=0$, $\left[-\frac{\pi}{2}:\frac{\pi}{2}\right]$

ו. $2\sin^2 x-5\sin x+2=0$, $[-\pi:\pi]$

ז. $4\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x-1=0$, $[-\pi:0]$

ח. $\tan^2 x-7\tan x+10=0$, $[0:2\pi]$

5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א. $0 \le x \le \pi \ , \ \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

ב. $0 \le x \le \pi \ , \ \tan x = 4\sin x$

ג. $0 \le x \le 2\pi \ , \ 2\sin^2 x = 3\cos x$

6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $\left[-\pi : \pi \right] \ , \ \sin\left(x - \frac{\pi}{6} \right) = -\sin x$

ב. $\left[0 : \pi \right] \ , \ \sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi \right) = -\cos 2x$

ג. $\left[0 : \pi \right] \ , \ \sin 4x = -\cos\left(\pi - x \right)$

ד. $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2} \right] \ , \ \tan x = -\tan 2x$

7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א. $-\pi \le x \le \pi \ , \ \sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב. $\left[-\pi : \pi \right] \ , \ \cos 4x + 1 = 3\sin 2x$

ג. $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \ 2\sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד. $0 \le x \le \pi \ , \ \cos 4x + \sin^2 x = 1$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{5\pi}{12}$ ד. $\frac{2\pi}{3}$ ה. $\frac{7\pi}{6}$

ו. $\frac{7\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{10}$ ח. $\frac{19\pi}{12}$ ט. $-\frac{\pi}{12}$ י. $-\frac{4\pi}{9}$

יא. $\frac{17\pi}{6}$ יב. $-\frac{13\pi}{6}$.

2) א. $180°$ ב. $360°$ ג. $720°$ ד. $270°$ ה. $90°$

ו. $45°$ ז. $30°$ ח. $10°$ ט. $130°$ י. $285°$

יא. $210°$ יב. $405°$.

3) א. $x=\frac{\pi}{18}\ ,\ \frac{5\pi}{18}$ ב. $x=\frac{5\pi}{6}$ ג. $x=\frac{\pi}{2}$ ד. $x=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{2}$

ה. $x=0$ ו. $x=\frac{2\pi}{9}$ ז. $x=0.0875\pi$ ח. $x=0.224\pi$.

4) א. $x=\frac{\pi}{3}$ ב. ϕ ג. $x=0.398\pi, 0.602\pi$ ד. ϕ

ה. $x=0, 0.437\pi$ ו. $x=\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{5\pi}{6}$

ז. $x=-\frac{\pi}{4}\ ,\ -0.615\pi$ ח. $x=0.352\pi\ ,\ 0.437\pi\ ,\ 1.352\pi\ ,1.437\pi$.

5) א. $x=\frac{\pi}{8}$ ב. $x=0\ ,\ 0.42\pi\ ,\ \pi$ ג. $x=\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{5\pi}{3}$

6) א. $x=\frac{\pi}{12}\ ,\ -\frac{11\pi}{12}$ ב. $x=\frac{23\pi}{72}\ ,\ \frac{59\pi}{72}$

ג. $x=\frac{\pi}{10}\ ,\ \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{5\pi}{6}\ ,\ \frac{9\pi}{10}$ ד. $x=\pm\frac{\pi}{3}\ ,\ 0$.

7) א. $x=\pm\frac{\pi}{2}\ ,\ -0.148\pi\ ,\ 0.852\pi$ ב. $x=-\frac{7\pi}{12}\ ,\ \frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{5\pi}{12}\ ,\ \frac{11\pi}{12}$

ג. $x=\pm\frac{\pi}{3}$ ד. $x=0\ ,\ 0.38\pi\ ,\ 0.61\pi\ ,\ \pi$.

אי שוויונים טריגונומטריים:

סיכום כללי:

כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:

1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
   - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
   - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

הערה:

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $[0,180°]\ \sin x<\frac{1}{2}$

2) $[0,1.5\pi]\ 2\cos x-\sqrt{3}\geq 0$

3) $(-90°,90°)\ 2\cos^2 x+\sin x\geq 1$

4) $[0,\pi]\ \sin x+\sin 2x+\sin 3x<0$

5) $[0°,180°]\ 1<2\sin(x+10°)<\sqrt{3}$

6) $(0<x<\pi)\ \sin x+\sqrt{3}\cos x\geq 1$

7) $[0,2\pi]\ \tan x+\cot x>0$

8) $(-\pi<x<\pi)\ |\tan(x)|>\frac{1}{\sqrt{3}}$

תשובות סופיות:

1) $150^\circ \le x \le 180^\circ \;,\; 0^\circ \le x < 30^\circ$.

2) $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

3) $-30^\circ \le x < 90^\circ$.

4) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$.

5) $110^\circ < x < 140^\circ \;,\; 20^\circ < x < 50^\circ$.

6) $0 < x \le \frac{\pi}{2}$.

7) $\pi < x < \frac{3}{2}\pi \;\;,\;\; 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

8) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \;,\; x \ne \frac{\pi}{2}$ או: $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6} \;,\; x \ne -\frac{\pi}{2}$.

מכינה במתמטיקה

פרק 21 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

1. הגדרת המספר המרוכב 240
2. המספר הצמוד 243
3. חקירת משוואה ריבועית מרוכבת 246
4. מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב 247
5. נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב 251
6. שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים 253
7. שאלות שונות עם מספרים מרוכבים 254

הגדרת המספר המרוכב:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i=\sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z=a+bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי a וחלק מדומה b. המספרים a ו- b הם ממשיים.

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\mathrm{Re}(z)$ (מלשון: Real).

b נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\mathrm{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

שאלות:

1) רשום עם i:

א. $\sqrt{-1}=$ ב. $\sqrt{-4}=$ ג. $\sqrt{-25}=$

ד. $\sqrt{-3}=$ ה. $\sqrt{-5}=$

2) חשב:

א. $i=$ ב. $i^2=$ ג. $i^3=$

ד. $i^4=$ ה. $i^5=$ ו. $i^{17}=$

3) רשום את ערכם של a ו- b בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

4) כתוב מספר מרוכב z לפי הדרישות הבאות:

א. $\mathrm{Re}(z)=-3\ ,\ \mathrm{Im}(z)=2$.

ב. $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) מספר מרוכב מסוים z מקיים: $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=4$ ו-$\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)=-1$.
מצא את z.

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2=-1$ ב. $x^2+36=0$ ג. $x^2-2x+5=0$

7) פתור את המשוואה הבאה: $x^2+x+1=0$.

8) פתור את המשוואה הבאה: $z^2+iz+6=0$.

9) נתון: $z_2=5-2i$, $z_1=2+3i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א. $z_1+z_2=$ ב. $z_1-z_2=$ ג. $z_1\cdot z_2=$

10) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-2+6i)+(1-i)$ ב. $(4+4i)-\left(3+\frac{1}{2}i\right)$

ג. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ד. $5-(3-2i)$

ה. $(i-3)+6i$ ו. $(i+2)-(3i-2)+(7-5i)$

11) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(1+4i)\cdot(8-2i)$ ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ג. $(4i-3)\cdot(4i+3)$ ד. $i\cdot(i-1)$

ה. $(2i+3)\cdot i$ ו. $(5i-1)^2$

12) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2 i$.
ידוע כי $z_1 + z_2$ הוא ממשי וכי $z_1 - z_2$ הוא מדומה.

א. מצא קשר בין a_1 ל- a_2 וקשר בין b_1 ו- b_2.

ב. הראה כי המכפלה $z_1 \cdot z_2$ היא ממשית.

תשובות סופיות:

1) א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$.

2) א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i ו. i.

3) א. $a=2\ ,\ b=5$ ב. $a=3\ ,\ b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}$
ד. $a=0\ ,\ b=7$ ה. $a=-4\ ,\ b=0$ ו. $a=0\ ,\ b=0$.

4) א. $z=-3+2i$ ב. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

5) $z=1.5+2.5i$.

6) א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i\ ,\ 1-2i$.

7) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8) $z=2i\ ,\ -3i$.

9) א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$.

10) א. $-1+5i$ ב. $1+3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2+2i$ ה. $-3+7i$ ו. $11-7i$

11) א. $16+30i$ ב. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ג. -25 ד. $-1-i$
ה. $-2+3i$ ו. $-24-10i$.

12) א. $a_1=a_2\ ,\ b_1=-b_2$ ב. הוכחה.

המספר הצמוד:

סיכום כללי:

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב $z=a+bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$ וערכו: $\bar{z}=a-bi$.

שאלות:

13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

14) חשב:

א. $\frac{11+2i}{2-i}$ ב. $\frac{3+7i}{2-5i}$ ג. $\frac{19-9i}{2-3i}$

15) נתון מספר $z=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$ ב. $\frac{z}{z+3}$ ג. $\frac{z+i}{z-i}$

16) המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור. מצא את a.

17) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.

הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

18) פתור את המשוואה הבאה: $3z-11=iz-7i$.

19) פתור את המשוואה הבאה: $iz+5=4i$.

20) פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו-w משתנים מרוכבים): $\begin{cases}3z+iw=5-4i\\5iz-2w=5+8i\end{cases}$.

21) פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו-b ממשיים:

א. $2a-3i=10+bi$ ב. $3a-8+5bi=2b-ai-3i$

22) פתור את המשוואה הבאה: $2z+7i=iz+\bar{z}-3$.

23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$ ב. $\sqrt{8+6i}$

24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$.

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$.

25) פתור את המשוואה הבאה: $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$.

26) פתור את המשוואה הבאה: $z^2-i\bar{z}+6=0$.

תשובות סופיות:

13) א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0.

14) א. $4+3i$ ב. $-1+i$. ג. $5+3i$.

15) א. $\frac{5}{29}+\frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17}-\frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i$.

16) $a=-\frac{3}{4}$.

17) שאלת הוכחה.

18) $z=4-i$.

19) $z=4+5i$.

20) $w=5+i$, $z=2-3i$.

21) א. $a=5$, $b=-3$ ב. $a=2$, $b=-1$.

22) $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$.

23) א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$.

24) א. $z_{1,2}=i$, 1 ב. $z_{1,2}=-2-i$, $2-5i$.

25) $z_1=-2-5i$, $z_2=3i$.

26) $z_1=-3i$, $z_2=2i$.

חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

שאלות:

27) נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2-2(m+2i)z+1=0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

תשובות סופיות:

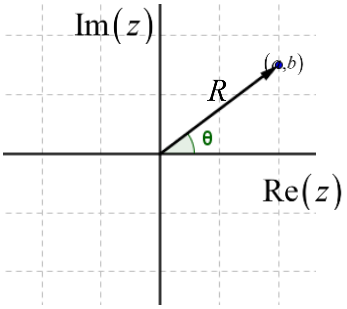
27) א. $m=-i$ ב. $m=-2i$.

מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב z ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה-x מייצג את a, גודל הערך הממשי של z, וציר ה-y מייצג את b, גודל הערך המדומה של z.

מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג: (a,b)

או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ-$(0,0)$)

והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס.

הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב

ויסומן: (R,θ). מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$z = R\cos\theta + i\cdot R\sin\theta = R(\cos\theta + i\sin\theta) = R\text{cis}\theta$.

נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $\tan\theta = \frac{b}{a}$, $R = \sqrt{a^2+b^2}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $a = R\cos\theta$, $b = R\sin\theta$.
- גודל של מספר מרוכב z יסומן: $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2+b^2}$.

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1\cdot z_2 = (R_1\text{cis}\theta_1)\cdot(R_2\text{cis}\theta_2) = R_1R_2\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1\text{cis}\theta_1}{R_2\text{cis}\theta_2} = \frac{R_1}{R_2}\text{cis}(\theta_1-\theta_2)$.

שאלות:

28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60°$ ב. $6\text{cis}135°$ ג. $4\text{cis}330°$

ד. $4\text{cis}(-30°)$ ה. $4\text{cis}690°$ ו. $8\text{cis}90°$

ז. $3\text{cis}270°$ ח. $\text{cis}180°$ ט. $\text{cis}0°$

29) הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$ ב. $\sqrt{3}-i$ ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ד. $3+4i$ ה. $6i$ ו. $-i$

ז. 4 ח. -1 ט. 1

י. 0

30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120°\cdot 3\text{cis}60°$ ב. $\text{cis}210°\cdot 5\text{cis}(-40°)$

ג. $\frac{12\text{cis}315°}{3\text{cis}90°}$ ד. $\frac{1}{2\text{cis}40°}$

ה. $6\text{cis}30°+2\text{cis}210°$

31) נתון המספר המרוכב $z=R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות R ו-θ את המספרים:

א. $\overline{z}$ ב. $1/z$ ג. $-z$

ד. $-\frac{1}{z}$ ה. iz ו. $z\cdot\overline{z}$

32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z+\overline{z}$ ב. $z\cdot\overline{z}$ ג. $\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}$

33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2-\overline{z}^2$ ב. $\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}$

34) הוכח את הטענות הבאות:

א. $z-i\overline{z}=\overline{\overline{z}+iz}$ ב. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$

35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1+\sqrt{3}i$.
מצא את קדקודיו האחרים.

37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס.
אחד מקודקודי המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא $30°$ חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

39) z הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה.
קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. $\overline{z}$ ב. $\frac{1}{z}$ ג. $\frac{z}{\overline{z}}$ ד. $z\cdot\overline{z}$

תשובות סופיות:

28) א. $1+\sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3}-2i$ ד. $2\sqrt{3}-2i$
ה. $2\sqrt{3}-2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1.

29) א. $\sqrt{2}\text{cis}45°$ ב. $2\text{cis}330°$ ג. $\text{cis}240°$ ד. $5\text{cis}53.13°$
ה. $6\text{cis}90°$ ו. $\text{cis}270°$ ז. $4\text{cis}0°$ ח. $\text{cis}180°$
ט. $\text{cis}0°$ י. 0.

30) א. -6 ב. $5\text{cis}170°$ ג. $4\text{cis}225°$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}(-40°)$
ה. $4\text{cis}30°$.

31) א. $R\text{cis}(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$ ג. $R\text{cis}(180°+\theta)$
ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180°+\theta)$ ה. $R\text{cis}(90°+\theta)$ ו. R^2.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) $1-i$, $-1-i$, $-1+i$, $1+i$.

36) $\sqrt{3}-i$, $-1-\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}+i$.

37) -2 , $1-\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$.

38) 2 , $-1+\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$.

39) א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל ג. על המעגל
ד. מחוץ למעגל.

נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב z בחזקת n נעזר בקשר: $\left(R\text{cis}\theta\right)^n = R^n\text{cis}\left(n\theta\right)$.

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש n-י של מספר מרוכב z השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

נבצע: $1 \le k \le n$: $z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 \;/\; \sqrt[n]{\;} \quad \Rightarrow \quad z_k = \sqrt[n]{R_0}\cdot\text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)$.

שאלות:

40) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $\left(2\text{cis}30°\right)^3$ ב. $\left(2\text{cis}14°\right)^5$ ג. $\left(1+i\right)^4$

ד. $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$ ה. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

41) פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2 = 36\text{cis}120°$ ב. $z^4 = \left(9\text{cis}80°\right)^2$ ג. $z^5 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

42) מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

43) נתון המספר המרוכב $z = x+iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z| = 2$.

44) נתון המספר המרוכב $z=x+iy$.
מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה : $|z-3i|=5$.

45) נתון המספר המרוכב $z=x+iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס
המתקבל בעבור המשוואה : $|z+i|+|\bar{z}+i|=|1+3i|$.

תשובות סופיות:

40) א. $8i$ ב. $32\text{cis}70°$ ג. -4 ד. $-8i$ ה. 1.

41) א. $z_0=6\text{cis}60°$, $z_1=6\text{cis}240°$.

ב. $z_0=3\text{cis}40°$, $z_1=3\text{cis}130°$, $z_2=3\text{cis}220°$, $z_3=3\text{cis}310°$.

ג. $z_0=\text{cis}12°$, $z_1=\text{cis}84°$, $z_2=\text{cis}156°$, $z_3=\text{cis}228°$, $z_4=\text{cis}300°$.

42) סכום : 0 , מכפלה : -1 .

43) $x^2+y^2=4$.

44) $x^2+(y-3)^2=25$.

45) $\frac{2x^2}{3}+\frac{2y^2}{5}=1$.

שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7=13+3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3=5-9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5=32+16i$ והאיבר השני הוא $a_2=2-4i$.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.

ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

46) $S_{10}=100-15i$.

47) א. $a_1=2+i\ ,\ q=-2i$ ב. $S_5=20+25i$.

48) $-2\ ,\ 2\text{i}\ ,\ 2$ או $6-8i\ ,\ 4-2i\ ,\ 2$.

שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

49) פתור את המשוואה: $z-\bar{z}+|z|=|2-i|^2-4i+\mathrm{Im}(z)$.

50) פתור את המשוואה: $\left|2-3^{x^2-x-1}i\right|=\sqrt{13}$.

51) פתור את המשוואה: $z^3=\bar{z}$.

52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים.
הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

54) נתון מספר מרוכב z, שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.
הוכח כי אם $z-\frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

55) הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1\mathrm{cis}\theta_1\cdot R_2\mathrm{cis}\theta_2=R_1R_2\mathrm{cis}(\theta_1+\theta_2)$.

56) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.
נתון: $\left|z^4-z^3\right|=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

57) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.
מצא את ערך הביטוי $z+iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

58) z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2-2\cos\theta\cdot z+1=0$.
הבע באמצעות θ את גודל הזווית $\sphericalangle z_1Oz_2$ (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

49) $z_1=3-4i$, $z_2=-3-4i$.

50) $x=2$, -1.

51) $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=-i$, $z_4=1$, $z_5=-1$.

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) שאלת הוכחה.

55) שאלת הוכחה.

56) $\arg(z)=30°$.

57) $z+iz=\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

58) 2θ.

מכינה במתמטיקה

פרק 22 - גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית 256
2. משוואת הישר 260
3. מצבים הדדיים בין ישרים 265
4. מציאת משוואות ישר 267
5. שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר 268
6. נושאים מתקדמים עם משוואת הישר ..... (ללא ספר)
7. חלוקת קטע ביחס נתון 274
8. מרחק נקודה מישר 275
9. מיקום נקודה ביחס לישר 277
10. מרחק בין ישרים מקבילים 279

מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ יחושב לפי: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.
- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$.

שאלות:

שאלות העוסקות באמצע קטע:

1) מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

א. $A(1,4)$, $B(5,-8)$

ב. $A(-3,0)$, $B(3,-2)$

ג. $A(4,5)$, $B(-4,-5)$

ד. $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, $B\left(7\frac{1}{2},-2\right)$

ה. $A(6,-1)$, $B(-3,-1)$

ו. $A(4,7)$, $B(4,-12)$

2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

א. $A(4,-2)$, $M(2,1)$

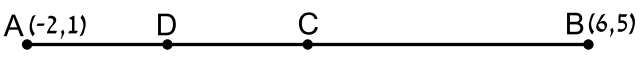
ב. $A(-6,-8)$, $M(0,0)$

ג. $A(13,-11)$, $M(4,-7)$

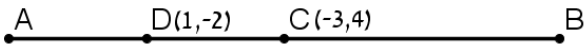
ד. $A\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$, $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם $C(6,1)$, $B(2,-4)$.
מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.

4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $B(6,5)$, $A(-2,1)$. מצא את שיעורי הנקודה D.



5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $D(1,-2)$, $C(-3,4)$. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



6) הנקודות $A(2,-7)$, $B(-10,4)$ ו-$C(6,11)$ הן שלושה קדקודים של מקבילית ABCD.
מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי, D.

שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:

7) מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

א. $A(4,7)$, $B(-3,7)$

ב. $A(6,2)$, $B(1,2)$

ג. $A(-3,10)$, $B(0,6)$

ד. $A(6,-9)$, $B(1,3)$

ה. $A(4,7)$, $B(13,-1)$

ו. $A(6,6)$, $B(-9,-9)$

8) חשב את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם: $C(0,14)$, $B(4,9)$, $A(3,-2)$.

9) נתונות נקודות $B(6,y)$, $A(14,4)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך.
מצא את y.

10) נתונות נקודות $B(15,-2)$, $A(x,-12)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך.
מצא את x.

11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה-y שלה גדול פי 3 משיעור ה-x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

12) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$ יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם $(0,4)$ ושיעורי ה-y של הקדקודים B ו-C הוא 2-. מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC}=\sqrt{50}$
וידוע כי: $B(-4,1)$, $A(-3,-2)$. מצא את היקף המלבן.

שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:

14) מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

א. $A(5,2)\ ,\ B(4,1)$

ב. $A(3,-2)\ ,\ B(-3,1)$

ג. $A(7,8)\ ,\ B(6,15)$

ד. $A(0,5)\ ,\ B(7,0)$

ה. $A(6,9)\ ,\ B(6,-7)$

ו. $A(4,-1)\ ,\ B(18,-1)$

15) מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו הם: $A(6,5)\ ,\ B(2,13)\ ,\ C(4,-7)$ מונחים עליהם.

תשובות סופיות:

1) א. $(3,-2)$ ב. $(0,-1)$ ג. $(0,0)$
ד. $\left(4,-\frac{5}{8}\right)$ ה. $(1.5,-1)$ ו. $(4,-2.5)$.

2) א. $B(0,4)$ ב. $B(6,8)$ ג. $B(-5,-3)$ ד. $B\left(1,\frac{2}{3}\right)$.

3) $D(4,-1.5)$.

4) $D(0,2)$.

5) $B(-11,16)$, $A(5,-8)$.

6) $D(18,0)$.

7) א. $d_{AB}=7$ ב. $d_{AB}=5$ ג. $d_{AB}=5$ ד. $d_{AB}=13$
ה. $d_{AB}=\sqrt{145}$ ו. $d_{AB}=15\sqrt{2}$.

8) 33.862 יחידות אורך $\approx P_{ABC}$.

9) $y=10$ או $y=-2$.

10) $x=-9$ או $x=39$.

11) $B(-1,-3)$.

12) $B(3,-2)$, $C(-3,-2)$.

13) 18.97 יחידות אורך $\approx P_{ABCD}=6\sqrt{10}$.

14) א. $m_{AB}=1$ ב. $m_{AB}=-\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB}=-7$ ד. $m_{AB}=-\frac{5}{7}$
ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB}=0$.

15) $m_{AB}=-2$, $m_{BC}=-10$, $m_{AC}=6$.

משוואת הישר:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1\cdot m_2=-1$.
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x: $m=\tan\alpha$.

משוואת הישר:

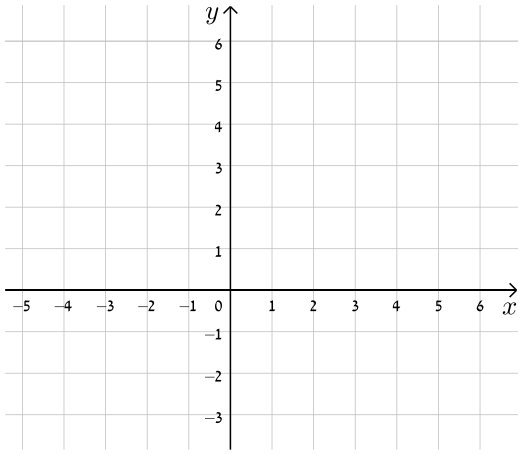
- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y=mx+n$.
- כאשר: m הוא שיפוע הישר ו-n הוא ערך ה-y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-y.

  נוסחה למציאת משוואת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

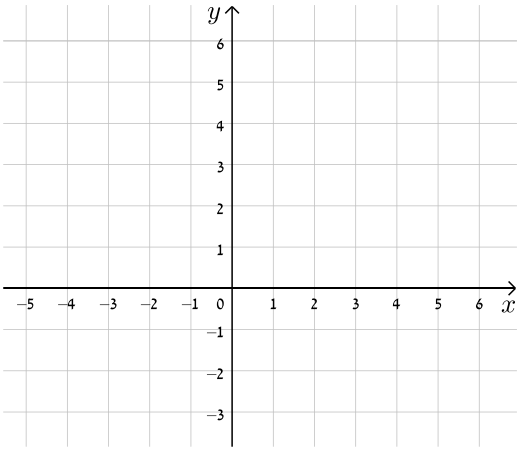
שאלות:

16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

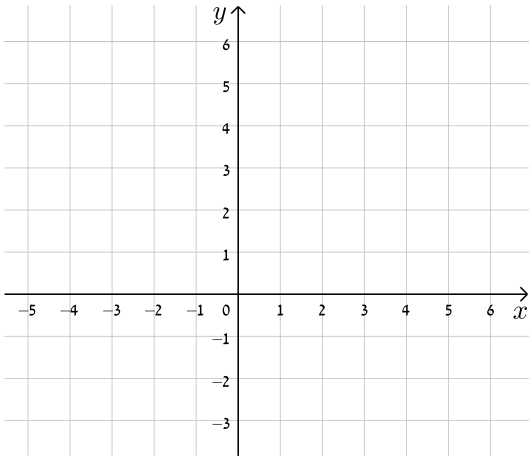
א. $y=x+4$



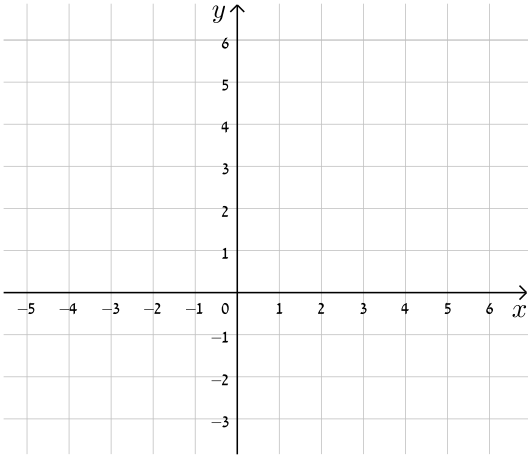
ב. $y=-x+5$



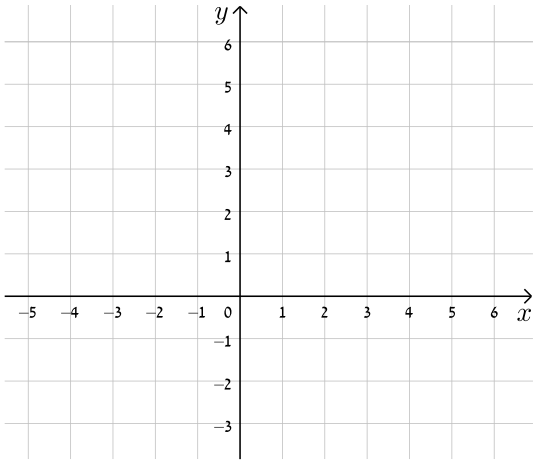
ג. $y=2x-3$



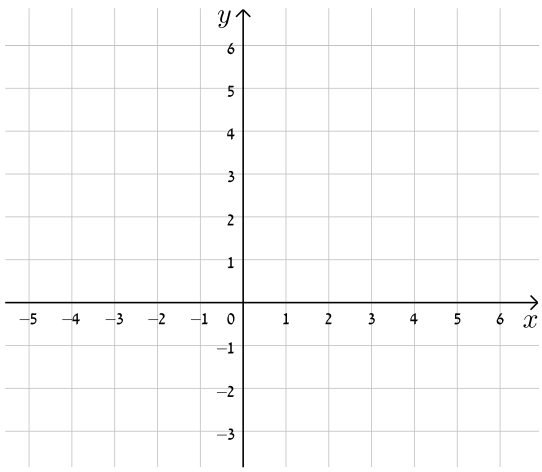
ד. $y=-3x+5$



ה. $y=3x-1$

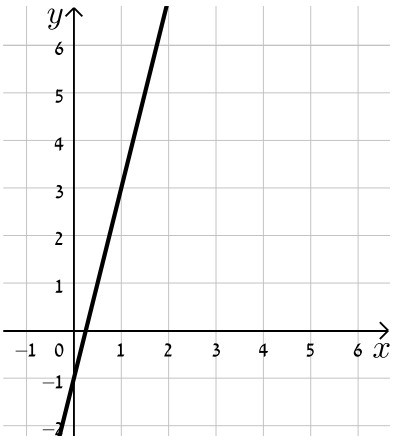


ו. $y=8-4x$

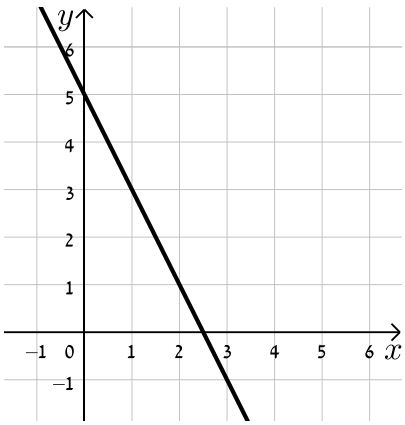


17) כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

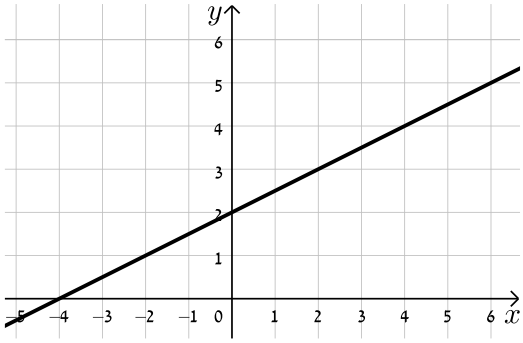
א.



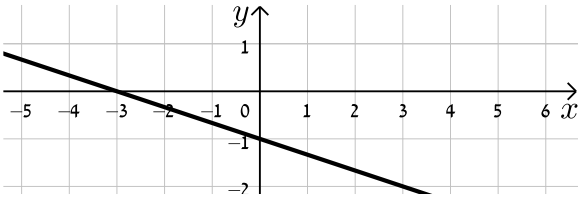
ב.



ג.



ד.



18) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:

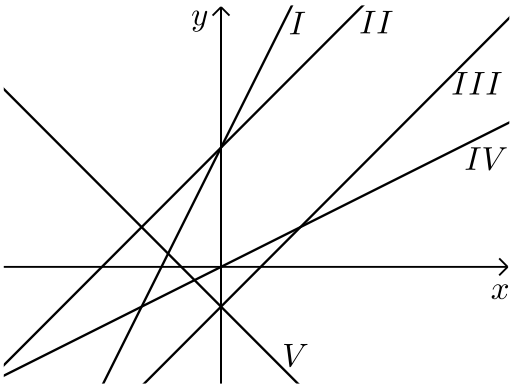
א. $y=x+3$

ב. $y=-x-1$

ג. $y=2x+3$

ד. $y=x-1$

ה. $y=\frac{1}{2}x$



19) נתונה משוואה הישר הבאה: $y=2x+3$. קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות עליו: $D(6,15)$, $C(0,4)$, $B(3,3)$, $A(-1,1)$.

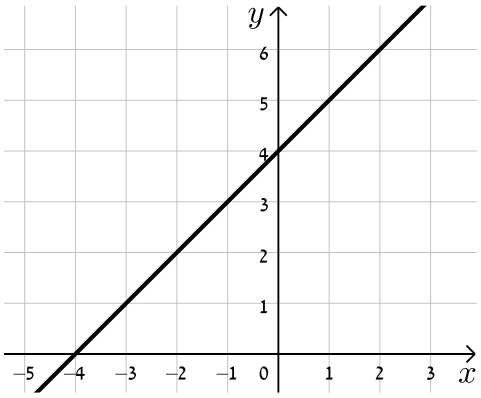
20) נתונה משוואת הישר הבאה: $y=mx-2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4,2)$ נמצאת על הישר. מצא את m וקבע האם גם הנקודה $B(7,-2)$ נמצאת עליו.

21) הנקודות $B(4,1)$, $A(5,-3)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא: $y=mx+n$.
מצא את m ואת n.

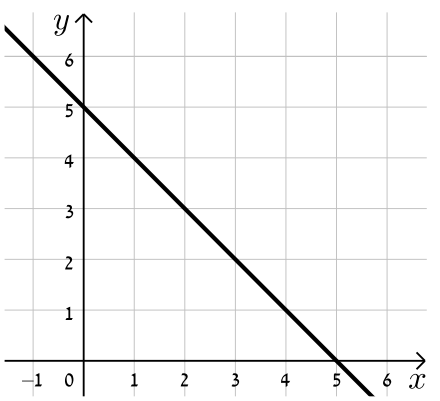
תשובות סופיות:

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

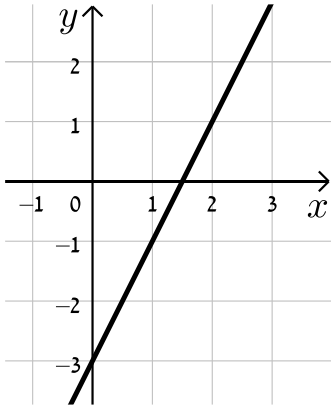
א.



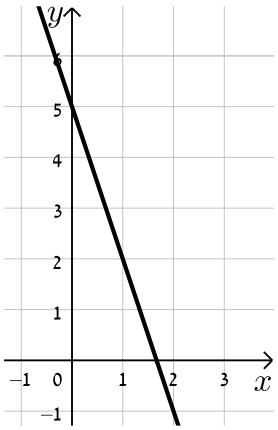
ב.



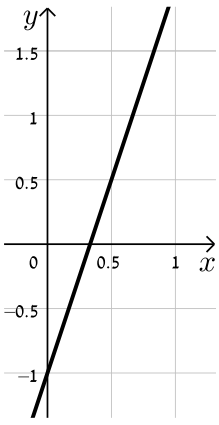
ג.



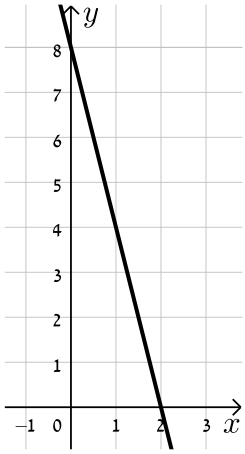
ד.



ה.



ו.



17) א. $y=4x-1$ ב. $y=-2x+5$ ג. $y=\frac{1}{2}x+2$ ד. $y=-\frac{1}{3}x-1$.

18) א.II. ב.V. ג.I. ד.III. ה.IV.

19) נמצאות: A, D. לא נמצאות: B, C.

20) $m=\frac{9}{8}$, B לא נמצאת.

21) $n=17$, $m=-4$.

מצבים הדדיים בין ישרים:

סיכום כללי:

מצב הדדי בין שני ישרים:

- ישרים מקבילים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 \neq n_2$.
- ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.
- ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$.

שאלות:

22) מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$

23) קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}$

24) קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

א. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}$

25) משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y=6x-2$.

א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?

ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

26) במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $C(-5,5)$, $B(3,7)$, $A(5,-1)$.
הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

תשובות סופיות:

22) א. $(-1,1)$ ב. $(-6,-18)$ ג. $(10,16)$.

23) א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.

24) מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.

25) א. $m_{BC}=m_{AD}=-\frac{1}{6}$, $m_{AB}=m_{CD}=6$.

ב. הכל הפוך: $m_{BC}=m_{AD}=6$, $m_{AB}=m_{CD}=-\frac{1}{6}$.

26) שאלת הוכחה.

מציאת משוואות ישר:

שאלות:

27) מצא את משוואות הישרים הבאים:

א. ישר העובר דרך הנקודה $A(1,3)$ ושיפועו $m=2$.

ב. ישר העובר דרך הנקודה $A(0,-4)$ ושיפועו $m=\frac{1}{3}$.

ג. ישר העובר דרך הנקודה $A(5,9)$ ושיפועו $m=0$.

ד. ישר העובר דרך הנקודות $A(5,-12)$ ו-$B(6,-6)$.

ה. ישר העובר דרך הנקודה $A(-6,4)$ ומקביל לישר: $y=2x-3$.

ו. ישר העובר דרך הנקודה $A(3,-5)$ ומקביל לציר ה-y.

ז. ישר העובר דרך הנקודה $A(-7,-3)$ ומאונך לישר: $y=x+3$.

ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים: $y=11x-4$ ו-$y=3x-12$ ומקביל לישר: $y=7x+5$.

תשובות סופיות:

27) א. $y=2x+1$ ב. $y=\frac{1}{3}x-4$ ג. $y=9$ ד. $y=6x-42$

ה. $y=2x+16$ ו. $x=3$ ז. $y=-x-10$ ח. $y=7x-8$.

שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר:

שאלות:

28) במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.
ידוע כי: $D(-2,2)$, $B(2,4)$, $A(3,-2)$.

א. כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.

ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.

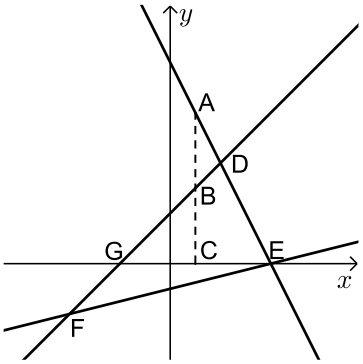
ג. כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

29) נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים $A(-9,1)$ ו-$B(5,-7)$.
משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x+3y+6=0$.

א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.

ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.

30) שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים בשרטוט: $x-4y-4=0$, $x-y+2=0$ ו- $2x+y-8=0$.
הקטע AC מקביל לציר ה- y.



א. חשב את שטח המשולש DEF.

ב. נתון: $d_{BC}=3$.
חשב את אורך הקטע AB.

31) BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד $A(-6,1)$.
משוואת התיכון BD היא $x-y=1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x+5y=67$.
מצא את שיעורי הקדקוד C.

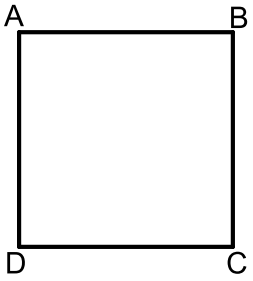
32) נתון טרפז ABCD $(AB\|CD)$ ובו משוואת השוק BC היא: $x=2$.
משוואת הבסיס CD היא $2x+3y=7$ וידוע כי $A(-4,1)$.

א. מצא את משוואת הבסיס AB.

ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.

ג. מעבירים את האלכסון AC.
הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.

33) במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3 ושיעורי הנקודה A הם: $(1,4)$.



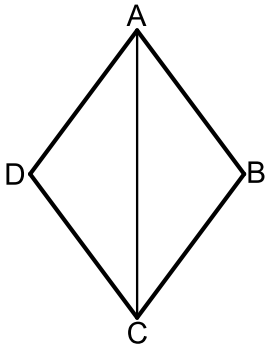
א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?
הראה חישוב מתאים.

ב. נתון גם: $D(4,13)$, $m_{CD}=-\frac{1}{3}$ ו- $\sqrt{90}$ ס"מ $=BC$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ג. נתון גם: $B(-8,7)$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

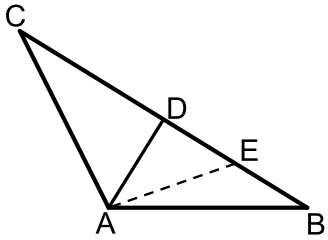
34) המרובע ABCD הוא מעוין.
ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: $(0,6)$.
כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא: $y=-1.5x+6$ ואחת ממשואות הצלעות היא: $5y+x=4$.



א. מצא את משוואת האלכסון השני.

ב. מצא את שאר קדקודי המעוין

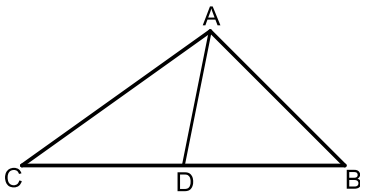
35) המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$.
ב-ΔABC מעבירים את הגובה AD לבסיס BC ומסמנים נקודה E כך שמתקיים: $DE=BE$.
קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון כי: $E(8.5,2.5)$, $D(5,7)$.



א. מצא את שיעורי שאר קודקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.

36) נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD.
הצלע BC מונחת על הישר: $y=4$ וידוע כי שיעור ה-x של הנקודה C הוא: $x_C=-1$.
כמו כן נתון: $A(7,8)$, $m_{AB}=-2$.



א. מצא את משוואת הצלע AB.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?

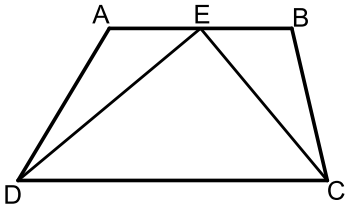
ii. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.

ii. איזה משולש הוא המשולש ABC?

37) המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה-x.



שיעורי הנקודה B הם $(3,2)$ והצלע AD מונחת על הישר: $x=-5$. אורך הקטע DE הוא $\sqrt{80}$.

כך ש-D ברביע השלישי וכן: $\sphericalangle DEC=90°$.

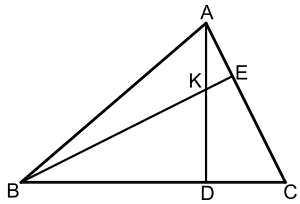
א. מצא את שיעורי הנקודות A , D ו-E.

ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.

ג. מצא את שיעורי הנקודה C.

ד. חשב את שטח המשולש DEC.

38) AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC.



ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: $(1,3)$.

שיעורי הנקודות D ו-E הם: $E(3,5)$, $D(-2,4)$.

א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.

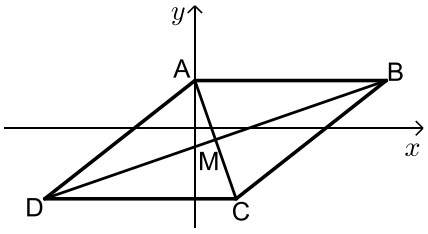
ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.

ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.

ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.

39) נתון מעוין ABCD. ידוע כי הצלע CD מונחת על $y=-7$.

אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים בנקודה: $M(-0.5,-3)$. שיפוע האלכסון AC הוא 4-.



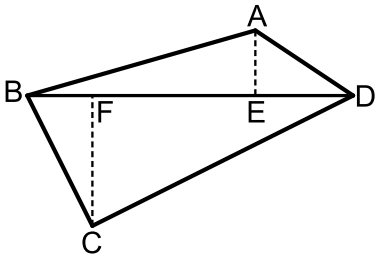
א. מצא את משוואת האלכסון AC.

ב. מצא את שיעורי הנקודה C.

ג. חשב את שטח המשולש BMC.

40) נתון מרובע ABCD שקודקודיו הם: $A(3,13)$, $B(-2,4)$, $C(9,3)$, $D(8,14)$.

מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.



א. מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.

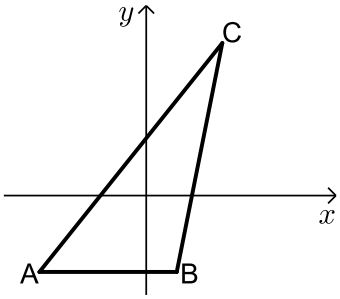
ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

41) על הישר $y=-5$ מסמנים את

הנקודות: $A(-7,-5)$, $B(2,-5)$.

הנקודה C נמצאת על הישר: $y=x-5$.

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה C ב-t.



א. הבע באמצעות t את שיעור ה-y של הנקודה C.

ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.

הבע באמצעות t את המרחקים של C מ-A ומ-B.

ג. מצא את t ואת אורך הצלע BC.

ד. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB.

ידוע כי D נמצאת ברביע השלישי.

מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח

המשולש DAC יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.

42) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB=BC)$

ובו נתון: $A(-4,12)$, $B(x,6)$ ו-$C(4,8)$.

א. מצא את x.

ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת הצלע AC.

ii. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-y ב-D.

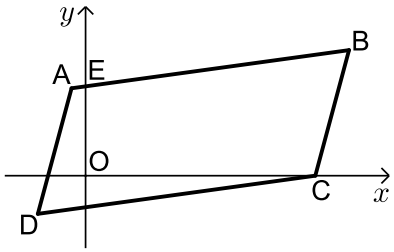
מצא את שיעורי הנקודה D.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא נקודה E ברביע הראשון $(x_E<5)$ כך שהמשולש DCE יהיה גם

שווה שוקיים וישר זווית $(\sphericalangle C=90°)$.

ii. חשב את יחס השטחים בין המשולשים: $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$.



43) באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.

ידועים קודקודי המקבילית הבאים: $A(-1,y)$

ו-$B(x,4)$. (x ו- y נעלמים).

שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא: $d_{CD}=\sqrt{104}$.

א. מצא את x ו- y אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה-x בחלקו החיובי

וכי: $d_{BC}=\sqrt{17}$. מצא את שיעורי הקדקוד C (מצא שתי אפשרויות).

ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- y ב-E.

שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש. מצא את האפשרות הנכונה עבור הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

תשובות סופיות:

28 א. $y=-\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}$ ב. $C(-6,0)$ ג. $y=-\frac{2}{9}x-\frac{4}{3}$.

29 א. $l_{BD}: y=3x-22$. ב. $l_{BC}: y=-\frac{1}{8}x-6\frac{3}{8}$.

30 א. $S_{EDF}=$ 18 יח"ש. ב. AB = 3 יחידות אורך.

31 $C(14,5)$.

32 א. $y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ ב. $C(2,1)$, $B(2,-3)$ ג. $S_{ABC}=$ 12 יחידות שטח.

33 א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.
ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.
ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות. ד. $S=$ 90 יח"ש.

34 א. $y=\frac{2}{3}x+1\frac{2}{3}$ ב. $(-1,1)$, $(4,0)$, $(5,5)$.

35 א. $C(-2,16)$, $B(12,-2)$ ב. $y=-8x$.

36 א. $y=-2x+22$ ב. i. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווי שטח הוא תיכון.
ב. ii. $D(4,4)$, $B(9,4)$.
ג. ii. $BC=10$, $AD=5$. ג. ii. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

37 א. $E(-1,0)$, $A(-5,-2)$, $D(-5,-8)$. ב. $CD: y=\frac{1}{2}x-5\frac{1}{2}$, $CE: y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
ג. $C(5,-3)$. ד. $S_{DEC}=$ 30 יח"ש.

38 א. $AC: y=-x+8$, $AD: y=-\frac{1}{3}x+3\frac{1}{3}$. ב. $A(7,1)$.
ג. $BC: y=3x+10$, $BE: y=x+2$. ד. $B(-4,-2)$.

39 א. $y=-4x-5$ ב. $C(0.5,-7)$ ג. $S_{DMC}=S_{BMC}=$ 34 סמ"ר.

40 א. $y=x+6$, $d_{BD}=\sqrt{200}$ ב. $E(5,11)$, $F(3,9)$.
ג. $d_{AE}=\sqrt{8}$, $d_{CF}=\sqrt{72}$ ד. $S_{ABCD}=80$.

41 א. $C(t,t-5)$. ב. i. $BC=\sqrt{2t^2-4t+4}$, $AC=\sqrt{2t^2+14t+49}$
ii. $t=8$, BC = 10 ס"מ. ג. $D(-20,-5)$.

42 א. $x=-2$ ג. i. $y=-0.5x+10$ ii. $D(0,10)$ ד. i. $E(2,4)$
ii. $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2}$.

43 א. $x=9$, $y=2$ ב. $C(10,0)$, $C(8,0)$ ג. $C(8,0)$.

חלוקת קטע ביחס נתון:

סיכום כללי:

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}, y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$ (בהצלבה).

שאלות:

1) הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון: $A(2,-5)$, $B(-12,16)$.
מצא את ערכי הנקודה P, אם נתון כי: $\frac{AP}{PB}=\frac{2}{5}$.

2) קודקודי משולש ABC הם: $A(-1,3)$, $B(6,0)$, $C(4,-12)$.
מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

3) מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC
שקודקודיו הם: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$.

4) קודקודי המשולש ABC הם: $A(5,1)$, $B(7,-3)$, $C(-1,4)$.
מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקודקוד A.

תשובות סופיות:

1) $P(-2,1)$

2) $M(3,-3)$

3) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

4) 1.697 יחידות אורך.

מרחק נקודה מישר:

סיכום כללי:

הצגה כללית של ישר ומרחקים:

- הצגה כללית של ישר (צורה סתומה): $Ax+By+C=0$.
- מרחק הנקודה $A(x_1,y_1)$ מהישר $Ax+By+C=0$ הוא: $d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$.

  כאשר $B>0$:
  - אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
  - אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

שאלות:

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את מרחק הנקודה $(-2,4)$ מהישר $4x+3y+11=0$.

ב. מצא את מרחק הנקודה $(4,3)$ מהישר $y=3x-1$.

ג. מצא את מרחק הנקודה $(3,-11)$ מהישר $x-5=0$.

6) מצא את המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון:

א. $3x-4y+6=0$, $A(-5,-1)$ ב. $12x+5y-17=0$, $A(-3,8)$

ב. $2y+7=0$, $A(11,-2)$ ד. $3x-14=0$, $A\left(6,-\frac{1}{2}\right)$

7) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $x+y-7=0$ שמרחקן מהישר $2x-y+5=0$ הוא: $\sqrt{20}$.

8) מצא את שטחה של מקבילית ששיעורי קודקודיה הם: $D(11,2)$, $C(-1,7)$, $B(-5,4)$, $A(7,-1)$.

9) מצא את שטחו של המשולש ΔABC שבו שיעורי קדקוד A הם $A(5,-3)$ ושניים מתיכוני המשולש מונחים על הישרים $x-4=0$ ו- $2x-y-1=0$.

10) מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם: $A(2,2)$, $B(-1,1)$, $C(-5,-2)$.

11) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקן מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$.

12) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקן מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$.

תשובות סופיות:

5) א. 3 ב. $\frac{8}{\sqrt{10}}$ ג. 2.

6) א. 1 ב. 1 ג. $1\frac{1}{2}$ ד. $1\frac{1}{3}$.

7) $\left(-2\frac{2}{3},9\frac{2}{3}\right)$, $(4,3)$

8) $S_{ABCD}=56$ יח"ש

9) $S_{ABC}=18$ יח"ש

10) $S_{ABC}=2.5$ יח"ש

11) $(64,99)$, $(4,9)$

12) $(-157,216)$, $(-1,8)$

מיקום נקודה ביחס לישר:

שאלות:

13) מצא את שיעורי הנקודה על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקה מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$ והיא נמצאת מתחתיו.

14) מצא את שיעורי הנקודה על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקה מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$ והיא נמצאת מעליו.

15) נתון משולש ABC שבו נתונים הקודקודים: $A(1,1)$, $B(13,6)$.
הקדקוד C נמצא על הישר $2x-y-19=0$ ונמצא מתחת לצלע AB.
מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.

16) נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:
$I: x+2y+1=0$, $II: x-2y-11=0$, $III: 2x-y+6=0$
מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ושמרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.

17) מצא את שיעורי מרכז המעגל, החסום במשולש, שצלעותיו מונחות על הישרים: $III: 3x+4y-11=0$, $II: 3x-4y-51=0$, $I: 4x-3y+2=0$.

18) מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה $G(7,-3)$ נמצאת מתחתיו ובמרחק $2\sqrt{10}$ ממנו.

19) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-2,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,9)$ הוא $\sqrt{5}$.

20) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(9,10)$ ומרחקו מהנקודה $B(8,-3)$ הוא $5\sqrt{5}$.

21) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(3,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(-9,2)$ הוא 4.

22) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(1,2)$ ומרחקו מהנקודה $B(-3,10)$ הוא 4.

23) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(10,8)$ ומרחקו מהנקודה $B(7,-1)$ הוא 3.

24) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-6,1)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,7)$ הוא 10.

תשובות סופיות:

13) $(64,99)$

14) $(-1,8)$

15) $C(11,3)$

16) $(-1,-4)$

17) $(2,-5)$

18) $y=3x-4$

19) $y=2x+10$, $y=\frac{2}{11}x+6\frac{4}{11}$

20) $y=\frac{1}{2}x+5\frac{1}{2}$, $y=-\frac{22}{31}x+16\frac{12}{31}$

21) $y=6$, $y=\frac{3}{4}x+3\frac{3}{4}$

22) $x=1$ או $y=-\frac{3}{4}x+2\frac{3}{4}$

23) $x=10$ או $y=1\frac{1}{3}x-5\frac{1}{3}$

24) $y=-\frac{4}{3}x-7$

מרחק בין ישרים מקבילים:

סיכום כללי:

- מרחק בין שני ישרים מקבילים: $Ax+By+C_1=0$ ו- $Ax+By+C_2=0$ כאשר: $B>0$
  הוא: $d=\left|\frac{C_1-C_2}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ ומתקיים בהעדר הערך המוחלט:
  - אם: $C_1>C_2$, $(d>0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מתחת ל- $Ax+By+C_2=0$.
  - אם: $C_1<C_2$ $(d<0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מעל ל- $Ax+By+C_2=0$.

שאלות:

25) מצא משוואת ישר, המקביל לישר $3x-4y+8=0$ ונמצא במרחק 4 ממנו.

26) מצא את המרחק בין הישרים המקבילים: $5x+12y+25=0, 5x+12y-14=0$.

27) נתונים הישרים: $y=6x+5, 12x-2y-15=0$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

28) נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן $AB: 3x+y=0$ ו- $CD: 3x+y-6=0$. הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע AB ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

29) צלע של ריבוע מונחת על הישר $3x-2y+5=0$.
אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $B(1,-1)$.
מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

30) נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי.
מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות $P(4,1)$ ו- $Q(7,2)$
וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא $3\sqrt{10}$.

31) במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר $x-y+3=0$ והצלע BP מונחת על הישר $x+2y+3=0$. אורך הגובה לצלע BP הוא $3\sqrt{5}$ ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

תשובות סופיות:

25) $3x-4y+28=0$, $3x-4y-12=0$ **26)** 3

27) $\frac{25}{\sqrt{148}}$ **28)** $S=$ יח"ש 14.4 , $(2.1,-3.3)$

29) $y=-\frac{2}{3}x+3$, $y=-\frac{2}{3}x-3\frac{2}{3}$, $3x-2y-15=0$

30) $y=3x$ **31)** $P\left(2,-2\frac{1}{2}\right)$

מכינה במתמטיקה

פרק 23 - חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית

תוכן העניינים

1. מושג הפונקציה ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית והלוגריתמית ..... (ללא ספר)
5. הזזות ושיקופים של פונקציות ..... (ללא ספר)
6. פתרון תרגילי הפרק 281
7. תרגול נוסף בתחום הגדרה ..... (ללא ספר)
8. קבוצות ופונקציות - מבט לעומק ..... (ללא ספר)

הפונקציה הממשית

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $y=x^3-x^2-4x+1$

ב. $y=\frac{1}{x^2-4}$

ג. $y=\frac{4x+1}{x^2+1}$

ד. $y=\frac{1}{x^3-x}$

ה. $y=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

ו. $y=\sqrt{x-4}$

ז. $y=\sqrt{x^2+x-2}$

ח. $y=\sqrt[3]{x^2+x-1}$

ט. $y=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

י. $y=\ln\left(x^2+x-2\right)$

יא. $y=\log x+\frac{1}{\log x}$

יב. $y=e^{x^2+x+1}$

יג. $y=\log_x\left(x+4\right)$

יד. $y=\tan\left(10x\right)$

טו. $y=\cot\left(4x\right)$

טז. $y=\arctan\left(x+4\right)$

יז. $y=\arcsin\left(x-4\right)$

יח. $y=\arccos\left(x+1\right)$

2) נתונות הפונקציות הבאות: $f\left(x\right)=x-4$, $g\left(x\right)=x^2$, $h\left(x\right)=\frac{4}{x}$.

חשב את הפונקציות המרוכבות הבאות:

א. $f\left(g\left(1\right)\right)$

ב. $h\left(g\left(f\left(5\right)\right)\right)$

ג. $f\left(g\left(x\right)\right)$

ד. $h\left(f\left(x\right)\right)$

ה. $h\left(f\left(x\right)\right)$

ו. $h\left(h\left(x\right)\right)$

3) נתון: $f\left(x\right)=\frac{x-2}{x-1}$. חשב $f\left(f\left(x\right)\right)$ עבור $x=3$.

4) נתון: $g(x)=\frac{5-x}{x-7}$ $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$. חשב $f(g(x))+g(f(x))$ עבור $x=8$.

5) נתון: $\begin{matrix} f(x)=x^2-7x \\ g(x)=\ln x \end{matrix}$. חשב $f(g(x))$ עבור $x=e^2$.

6) נתון: $g(x)=\ln x$ $f(x)=e^{2x}$. חשב $f(g(x))$ עבור $x=2$.

7) נתון: $g(x)=\begin{cases} x+3 & x>4 \\ 3x & x\le 4 \end{cases}$, $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ x^2 & x\le 0 \end{cases}$. חשב $f(g(x)), g(f(x))$.

8) בתרגילים הבאים הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה.

א. $f(x)=\frac{x-1}{3}$ ב. $f(x)=\frac{x+1}{x}$

ג. $f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$ ד. $f(x)=x^2-4,\ x\ge 0$

9) בתרגילים הבאים, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע.
בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה:

א. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ב. $f(x)=x^2-x$ ג. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

10) בתרגילים הבאים, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע,
אם כן, מצא את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

א. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ב. $y=\frac{x^2+3}{2x-1}$ ג. $f(x)=\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^3$

11) נתונה $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$. האם הפונקציה היא חח"ע?
מצא את התמונה של הפונקציה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) מצא איזה מבין הפונקציות הבאות הן אי זוגיות ואיזה זוגיות:

א. $y=4x^3$ ב. $y=x^4+x^{10}$ ג. $y=1$

ד. $y=\frac{1}{x}$ ה. $y=x^2+\sin^2 x$ ו. $y=2^x$

ז. $y=\ln x+x^2$ ח. $y=\sin x\cdot\cos x$

13) מצא את המחזור של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $y=2\sin x$ ב. $y=5+3\sin(4x+1)$

ג. $y=\tan\frac{x}{3}$ ד. $y=\sin^2 x$

14) רשום כל אחת מהפונקציות הבאות כפונקציה מפוצלת[1] ושרטט את גרף הפונקציה:

א. $y=|x-2|$ ב. $y=3|x+1|$

ג. $y=x^2+2|x-1|$ ד. $y=\frac{|x|}{x}$

תשובות סופיות:

1) א. כל x. ב. $x\neq\pm2$ ג. כל x. ד. $x\neq0,1,-1$

ה. $x\neq2,-1$ ו. $x\geq4$ ז. $x\geq1$, $x\leq-2$ ח. כל x.

ט. $-1<x<1$ י. $x>1$, $x<-2$ יא. $x>0$, $x\neq1$ יב. כל x.

יג. $x>0$, $x\neq1$ יד. $x\neq\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{10}$ טו. $x\neq\frac{\pi k}{4}$ טז. כל x.

יז. $3<x<5$ יח. $-2<x<0$

[1] נקראת גם: פונקציה "מפוצלת", "מוטלאת", פונקציית "תפר" או פונקציה "לפי מקרים".

כתב ופתר – גיא סלומון ©

2) א. -3 ב. 4 ג. x^2-4 ד. $\frac{4}{x-4}$ ה. $x-8$ ו. x

3) 3 **4)** $\frac{69}{13}$ **5)** -10 **6)** 4

7)
$$f(g(x))=\begin{cases}\frac{1}{x+3} & x>4\\ \frac{1}{3x} & 0<x\le 4\\ (3x)^2 & x\le 0\end{cases},\quad g(f(x))=\begin{cases}x^2+3 & x<2\\ 3x^2 & -2\le x\le 0\\ \frac{1}{x}+3 & 0<x<\frac{1}{4}\\ 3\frac{1}{x} & x\ge\frac{1}{4}\end{cases}$$

8) א. $f^{-1}(x)=3x+1$, כל y.

ב. $f^{-1}(x)=\frac{1}{x-1}$, $y\ne 1$

ג. $f^{-1}(x)=\frac{2x-2}{x-3}$, $y\ne 3$

ד. $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}$, $y\ge -4$

9) א. לא. $y\le -2$ או $y\ge 2$

ב. לא. $x+\frac{1}{4}\ge 0$, $y-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

ג. לא. $0\le y\le 1$

10) א. כן. $y>0$, $x>0$ $f^{-1}(x)=1-\frac{1}{x^2}$

ב. לא. $y\ge 2.3$ או $y\le -1.3$

ג. כן. $y\ne 1$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}$

11) לא. $y\ge\frac{6}{\sqrt{3}}$

12) זוגית: 2,3,5,8. אי- זוגית: 1,4. כלליות: 6,7.

13) א. 2π ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. 3π ד. π

14) א. $y=\begin{cases}x-2 & x\ge 2\\ 2-x & x<2\end{cases}$

ב. $y=\begin{cases}3x+3 & x\ge -1\\ -3x-3 & x<-1\end{cases}$

ג. $y=\begin{cases}x^2+2x-2 & x\ge 1\\ x^2-2x+2 & x<1\end{cases}$

ד. $y=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$

מכינה במתמטיקה

פרק 24 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

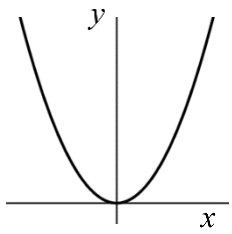
תוכן העניינים

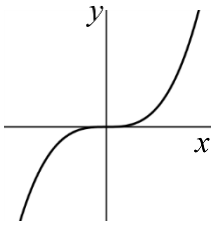
1. הקדמה כללית 285
2. גזירת פונקציות 286
3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה 292
4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה 293
5. שאלות עם פרמטרים 296
6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית 298

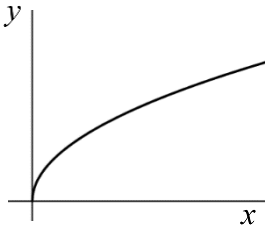
הקדמה כללית:

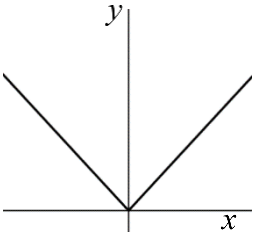
סיכום כללי:

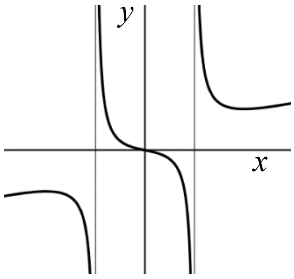
פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x)=x^2$: 

הפונקציה $f(x)=x^3$: 

הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$: 

הפונקציה $f(x)=|x|$: 

פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x)=\frac{5x^3+4x}{x^2-1}$: 

שיפוע של פונקציה:

- השיפוע m של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1,y_1)$, כלומר: $m=f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1,y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

גזירת פונקציות:

סיכום כללי:

כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x)=ax^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot ax^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x)=a \Rightarrow f'(x)=0$.
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x)=u\pm v \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$.
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x)=u^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x)=u\cdot v \Rightarrow f'(x)=u'v+v'u$.
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$	ב. $f(x)=x^7$	ג. $f(x)=x^2$
ד. $f(x)=x$	ה. $f(x)=x^{-3}$	ו. $f(x)=x^{-1}$
ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$	ב. $f(x)=3x^7$	ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$	ה. $f(x)=8x$	ו. $f(x)=3x^{-2}$
ז. $f(x)=\frac{4}{x}$	ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$ ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $f(x)=7x^2+23x-6$ ד. $f(x)=6x^2+8x+4$

ה. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x^3$ ו. $f(x)=\frac{x^4}{8}+67$

5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

6) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=-\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$

ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

7) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$ ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$ ד. $f(x)=3x^2\cdot x$

ה. $f(x)=x^2\cdot x^3$ ו. $f(x)=x(3x+7)$

ז. $f(x)=3x^3(3x-1)$ ח. $f(x)=(x-2)(2x^2+3)$

ט. $f(x)=(3x-2)(x^2+10x)$ י. $f(x)=(3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$

יא. $f(x)=x(x-2)(3x-4)$

8) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(x^2-4)^2$

ב. $f(x)=2x^3(3x+5)^2$

ג. $f(x)=(x^3+2)^2(x-1)^3$

ד. $f(x)=(x^2+1)^3(2x-1)^2$

9) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$

ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x}$

ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ז. $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$

ח. $f(x)=\frac{(x^2+3)^2}{x^2-2}$

ט. $f(x)=\frac{x^3-x^2}{2(1-x)}$

י. $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

10) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$

ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$

ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$

ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$

11) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x+1}$

ב. $f(x)=\sqrt{2x}$

ג. $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$

ד. $f(x)=\sqrt{10-3x}$

ה. $f(x)=\sqrt{2x^2+7x}$

ו. $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$

ז. $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$

ח. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$

ט. $f(x)=\frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$

י. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}$

יא. $f(x)=\frac{2x^3-x^2+x-5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

יב. $f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x}}$

יג. $f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$

יד. $f(x)=\frac{x^2+7}{\sqrt{x^2-5}}$

טו. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

טז. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

12) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=ax^4-bx$

ב. $f(x)=\frac{ax^2}{3}-\frac{x}{b}+c$

ג. $f(x)=\frac{x-2a}{x-4a}$

ד. $f(x)=a\sqrt{bx^2+c}$

13) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

ג. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ד. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ה. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ו. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

תשובות סופיות:

1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$

ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8.

ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$.

3) א. 0 ב. 0.

4) א. $3x^2+4x-3$ ב. $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$ ג. $14x+23$ ד. $12x+8$ ה. $x-3x^2$ ו. $0.5x^3$.

5) א. $15(5x-2)^2$ ב. $15x^2(x^3+6)^4$ ג. $6(x-x^2)(1-2x)$

ד. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$.

6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$

ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$.

7) א. $10x-14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$.

ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x+7$ ז. $36x^3-9x^2$ ח. $6x^2-8x+3$

ט. $9x^2+56x-20$ י. $36x^5+75x^4+24x^3-24x^2-40x-8$

יא. $9x^2-20x+8$.

8) א. $4x(x^2-4)$ ב. $30x^2(x+1)(3x+5)$ ג. $3(x-1)^2(x^3+2)(3x^3-2x^2+2)$

ד. $2(2x-1)(x^2+1)^2(8x^2-3x+2)$.

9) א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$

ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

ח. $\frac{2x(x^2+3)(x^2-7)}{(x^2-2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x+2)^2}$.

10) א. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$ ד. $\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$

ו. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

11) א. $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ ג. $\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$ ד. $-\frac{3}{2\sqrt{10-3x}}$ ה. $\frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$

ו. $6x-\frac{4}{\sqrt{x}}$ ז. $\frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}}$ ח. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ ט. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}}$ י. $\frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$

יא. $3\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{5}{x^2}$ יב. $-\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}}$ יג. $\frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$

יד. $\frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}}$ טו $-\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$ טז. $-\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$.

12) א. $4ax^3-b$ ב. $\frac{2ax}{3}-\frac{1}{b}$ ג. $\frac{-2a}{(x-4a)^2}$ ד. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$.

13) א. $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2}$, $f''(x)=\frac{4}{x^3}$.

ב. $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}$, $f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$.

ג. $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3}$, $f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$.

ד. $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$, $f''(x)=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$.

ה. $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$, $f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$.

ו. $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$, $f''(x)=\frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

14) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=2x^3-7x$ בנקודה $(2\ ,\ 2)$.

15) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$ בנקודה בה $x=-2$.

16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

תשובות סופיות:

14) $m=17$
15) $m=4$
16) $m=2$

מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x=-1$.

18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y=2$.

19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=x^2-2x-8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה-x.

20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$ ששיפועו 2.

21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$ בנקודה שבה $x=1$.

22) נתון כי הישר $2y-3x=3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=3\sqrt{x}$.
מצא את נקודת ההשקה.

23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=4$.

25) נתונה הפונקציה הבאה $f(x)=4x-2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x)=3x-\frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-x.

26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו 2-.

27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה-x זווית של $135°$.

29) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y=-\frac{1}{4}x^2-5$, $y=x^2$.

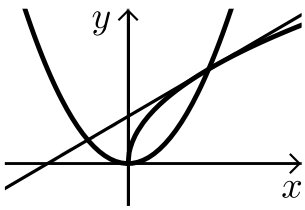
30) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y=2x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.

ב. מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

ג. חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $g(x)=x^2$, $f(x)=\sqrt{x}$.



א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.

ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

17) $y=24x+22$

18) $y=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$

19) $y=6x-24$, $y=-6x-12$

20) $y=2x-3$

21) $y=-12x+9$

22) $(1\ ,\ 3)$

23) $y=-\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$

24) $y=22x-56$

25) א. $y=3x-1$ ב. $\left(\frac{1}{3}\ ,\ 0\right)$

26) $y=-2x+8$

27) $y=\frac{11}{16}x-\frac{15}{8}$

28) $y=-x+1\frac{1}{3}$, $y=-x-1\frac{1}{3}$

29) $y=2x-1$, $y=-2x-1$

30) א. $(1\ ,\ 2)$ ב. $y=-1.5x+3.5$ ג. $S=4\frac{1}{12}$.

31) א. $(1\ ,\ 1)$, $(0\ ,\ 0)$ ב. $y=0.5x+0.5$ ג. $(-0.5\ ,\ 0.25)$.

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

32) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=ax^2-4x$ בנקודה שבה $x=3$ הוא 8.
מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

33) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$, $(a>0)$.
המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1.
מצא את ערך הפרמטר a.

34) נתונה הפונקציה: $y=x^3+a\sqrt{x}$ (a פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 5.
מצא את ערך הפרמטר a.

35) נתונה הפונקציה: $y=2\sqrt{x}-\frac{A}{x}$ (A פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 2.
מצא את ערך הפרמטר A.

36) הישר $y=4x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+3$.
מצא את b ואת נקודת ההשקה.

37) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y=2$ הוא 4-.
מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

38) הישר $y=ax+\frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)=\frac{2}{x+c}$ בנקודה $x=0$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו-c.

39) הישר $y=3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+b$.
מצא את b ואת נקודת ההשקה.

40) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה $(1\ ,\ 6)$ הוא 6-.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

41) לאילו ערכי k ישיק הישר $y=-5x+6$ לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2-4x+k$?
לכל ערך כזה של k מצא את נקודת ההשקה.

42) הפונקציות $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ משיקות זו לזו.
מצא את k ואת נקודת ההשקה.

תשובות סופיות:

32) $a=2\ ,\ y=8x-18$

33) $a=2$

34) $a=4$

35) $A=1$

36) $(-1\ ,\ 5)\ ,\ y=4x+9$

37) $a=2\ ,\ y=-4x-2$

38) $a=-\frac{1}{8}\ ,\ c=4$

39) $b=4\ ,\ (4\ ,\ 12)$

40) $b=2\ ,\ a=6\ ,\ y=-6x+12$

41) $k=6:(1\ ,\ 1)$ או: $\left(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{13}{3}\right):k=\frac{158}{27}$.

42) $(1\ ,\ 1)\ ,\ k=1.5$

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

שאלות:

43) ענה על הסעיפים הבאים:

א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^2+1$ בנקודה שבה $x=t$.

ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1\ ,\ 1)$.

44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=5x-x^2$ העוברים דרך הנקודה $(3\ ,\ 7)$.

45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=x^2+5x-6$ העוברים דרך הנקודה $(0\ ,-10)$.

46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=12x-x^3$ העוברים דרך הנקודה $(2\ ,\ 24)$.

47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3\ ,\ 0)$.

48) מצא משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-2}}$ העוברים דרך הנקודה $(2\ ,\ 3)$.

תשובות סופיות:

43) א. $y=2tx-t^2+1$ ב. $t=0,-2$.

44) $y=-3x+16$, $y=x+4$

45) $y=x-10$, $y=9x-10$

46) $y=-15x+54$, $y=12x$

47) $y=-\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$

48) $y=-\frac{1}{16}x+\frac{3}{4}$

49) $y=-x+5$

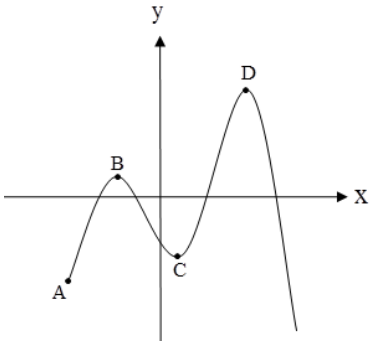
מכינה במתמטיקה

פרק 25 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים

1. נקודות קיצון של פונקציות 300
2. חקירת פונקציה פולינומית 303
3. פונקציה זוגית ואי-זוגית 307

נקודות קיצון של פונקציות:



סיכום כללי:

נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B , C , D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית. נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה-x של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה-x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה-y.
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

שאלות:

1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=10x-x^2$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

3) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

4) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

5) לפונקציה $f(x)=ax-x^3-5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-1$.
מצא את ערכו של הפרמטר a .

6) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$. ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון.
מצא את הקבוע a

7) לפונקציה $f(x)=Ax^3+Bx^2-1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה : $(2,3)$.
מצא את ערכי הפרמטרים B , A.

8) לפונקציה $f(x)=Ax^3+Bx^2-4x$ יש נקודת קיצון ב-$x=-1$ ו-$x=4$.
מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה-y של שתי נקודות הקיצון.

9) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$. ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.
מצא את הפרמטרים a , b .

10) לפונקציה $f(x)=ax^4+bx^2+35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2,3)$.
מצא את ערכי הפרמטרים a , b .

תשובות סופיות:

1) $\max(5,25)$.

2) א. $\max(-2,16)$, $\min(2,-16)$ ב. עולה: $x>2$, $x<-2$ יורדת: $-2<x<2$.

3) א. $\min(-\sqrt{5},-16)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\max(0,9)$

ב. עולה: $-\sqrt{5}<x<0$, $x>\sqrt{5}$ יורדת: $0<x<\sqrt{5}$, $x<-\sqrt{5}$.

4) א. $\min(3,5)$ ב. עולה: $x>3$ יורדת: $x<3$.

5) $a=3$.

6) $a=-\frac{2}{3}$.

7) $A=-1$, $B=3$.

8) $\left(4,-18\frac{2}{3}\right)$, $\left(-1,2\frac{1}{6}\right)$, $B=-\frac{3}{2}$, $A=\frac{1}{3}$.

9) $a=-4$, $b=6$.

10) $a=2$, $b=-16$.

חקירת פונקציה פולינומית:

שאלות:

11) נתונה הפונקציה $f(x)=10x-x^2$.
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

12) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$.
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

13) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$.
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

14) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

15) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

16) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-3ax^2+54x-50$.

א. לאלו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?

ב. הצב בפונקציה $a=6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y, סרטוט.

17) נתונה הפונקציה: $y=-3x^3+6x^2-4x+d$ (d פרמטר).
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x=2$.

א. מצא את d.

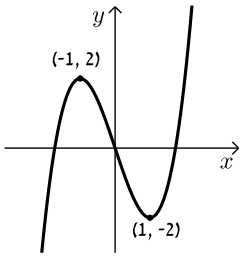
ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?

ג. כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

18) לפניך גרף הפונקציה $f(x)=x^3-3x$:



א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=5$?

ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=2$?

ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0.5$?

ד. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק פתרון אחד?

ה. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שני פתרונות?

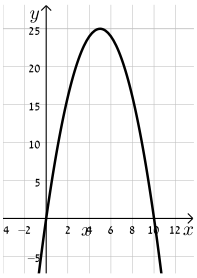
ו. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

ז. האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון?

תשובות סופיות:

11) א. כל x ב. $\max(5,25)$ ג. עלייה: $x<5$, ירידה: $x>5$

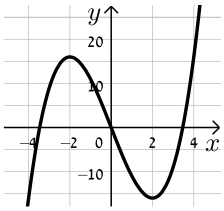
ד. $(10,0)$, $(0,0)$. ה. להלן גרף:



12) א. כל x ב. $\max(-2,16)$, $\min(2,-16)$

ג. עלייה: $x>2$, $x<-2$, ירידה: $-2<x<2$

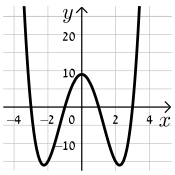
ד. $(-\sqrt{12},0)$, $(\sqrt{12},0)$, $(0,0)$. ה. להלן גרף:



13) א. כל x ב. $\min(-\sqrt{5},-16)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\max(0,9)$

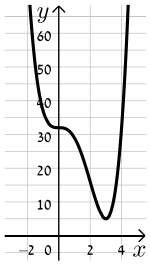
ג. עלייה: $-\sqrt{5}<x<0$, $x>\sqrt{5}$, ירידה: $x<-\sqrt{5}$, $0<x<\sqrt{5}$.

ד. $(\pm 3,0)$, $(\pm 1,0)$, $(0,9)$. ה. להלן גרף:



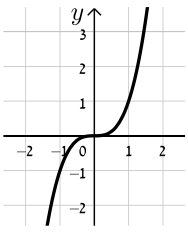
14) א. כל x ב. $\min(3,5)$ ג. תחומי עלייה: $x>3$, תחומי ירידה: $x<3$

ד. $(0,32)$. ה. להלן גרף:

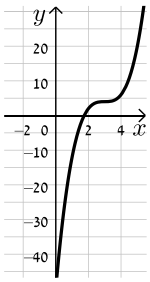


15) א. כל x ב. אין. ג. עולה לכל x

ד. $(0,0)$. ה. להלן גרף:

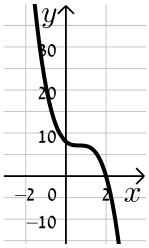


16) א. $-6<a<6$ ב. תחום הגדרה: כל x, נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל x, תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים: $(0,-50)$, להלן גרף:



17) א. $d=8$ ב. לא. ג. יורדת בתחום $x\neq\frac{2}{3}$

ד. $(0,8)$. ה. להלן גרף:



18) א. 1. ב. 2. ג. 3. ד. $k>2$, $k<-2$

ה. $k=\pm 2$ ו. $-2<k<2$ ז. לא.

פונקציה זוגית ואי-זוגית:

סיכום כללי:

הגדרות:

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x)=f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x)=-f(x)$.

שאלות:

1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x)=3x-5$

ב. $f(x)=3x^2$

ג. $f(x)=2x^3$

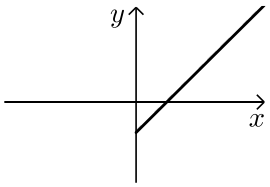
ד. $f(x)=x^3-2x^2$

ה. $f(x)=4x^4-3x^2+1$

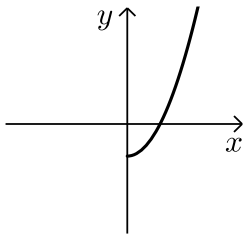
ו. $f(x)=4x^5-3x^3-1$

2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

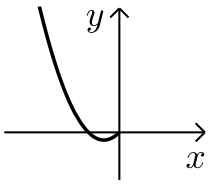
א.



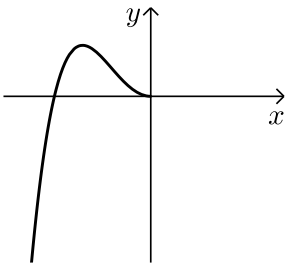
ב.



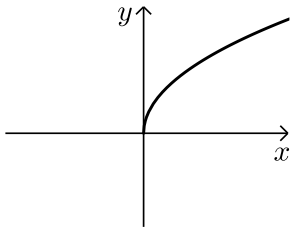
ג.

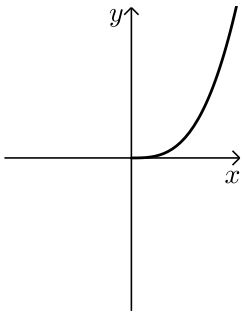


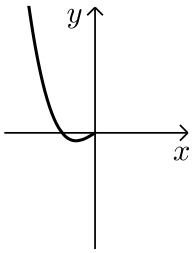
ד.

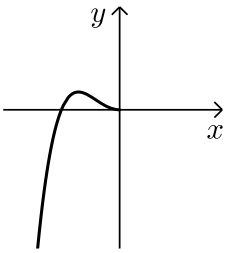


3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

א.


ב.


ג.


ד.


4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^4-4x^2$ בתחום: $[0:3]$.

א. חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:
   i. תחום הגדרה.
   ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
   iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
   iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
   v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

ג. התבסס על ממצאיך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^6-3x^2+3$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- y, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.

ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.

ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל x בתחום הגדרתה.

6) לפניך הפונקציה: $f(x)=-2x^6+3x^4+a$, a פרמטר.
ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

7) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=3x^3-9x$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

8) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=5x^3-3x^5+b$, b פרמטר.
ידוע כי הישר $y=2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות: $f'(x)=0$.

א. מצא את b וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.
נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^7-x}{3}$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן
(בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

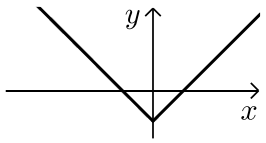
ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?
נמק ע"י חישוב מתאים.

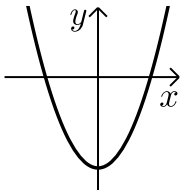
ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

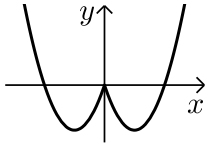
תשובות סופיות:

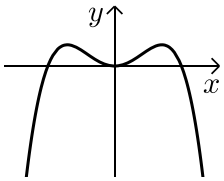
1) זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

2) להלן הגרפים:

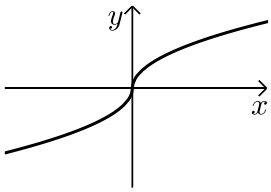
א.


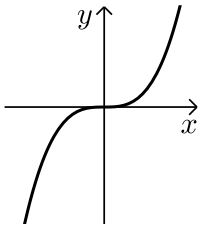
ב.


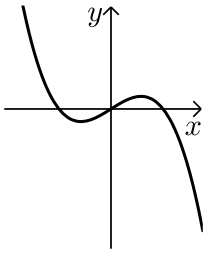
ג.


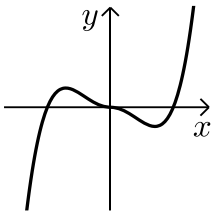
ד.


3) להלן הגרפים:

א.


ב.


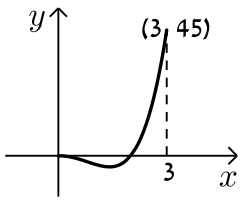
ג.


ד.


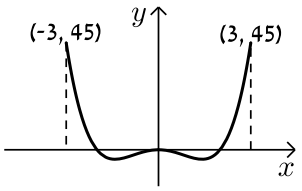
4) א. i. $0 \le x \le 3$ ii. $(0,0),(2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min\left(\sqrt{2},-4\right)$,

$\max(0,0)$ קצה. iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$ ב. סעיף הוכחה.

סרטוט עבור חלק v:



סרטוט עבור סעיף ג:



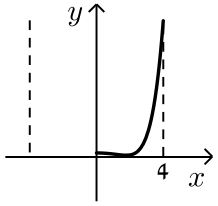
5) א. תחום הגדרה: $0 \le x \le 4$, חיתוך עם ציר ה-y: $(0,3)$,

נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה,

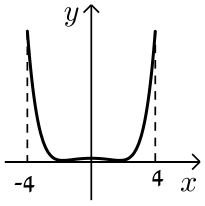
עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$ ב. זוגית.

ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

סרטוט עבור סעיף א:

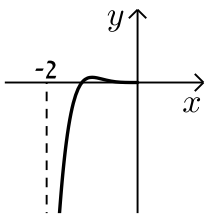


סרטוט עבור סעיף ג:

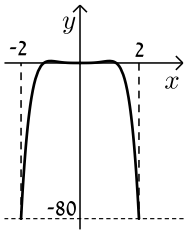


6) א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2\le x\le 0$, חיתוך עם הצירים: $(0,0),(-1.225,0)$, נקודות קיצון: $\min(-2,-80)$ קצה, $\max(-1,1)$, $\min(0,0)$ קצה,
עולה: $-2<x<-1$, יורדת: $-1<x<0$. ג. זוגית.

סרטוט עבור סעיף א:

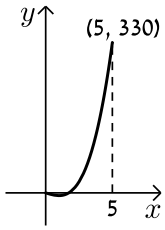


סרטוט עבור סעיף ד:

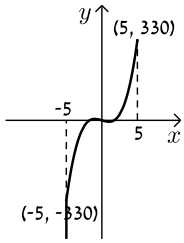


7) א. תחום הגדרה: $0\le x\le 5$, חיתוך עם הצירים: $(0,0),\left(\sqrt{3},0\right)$,
נקודות קיצון: $\max(5,330)$ קצה, $\min(1,-6)$, $\max(0,0)$ קצה,
עולה: $1<x<5$, יורדת: $0<x<1$, ב. אי-זוגית.

סרטוט עבור סעיף א:

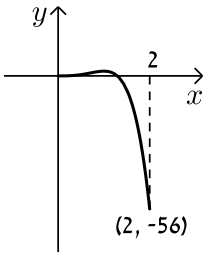


סרטוט עבור סעיף ג:

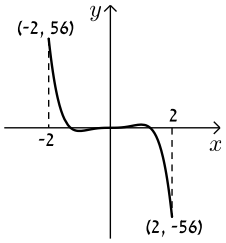


8) א. $b=0$ ב. i $0\le x\le 2$ ii. $(0,0),(1.29,0)$ iii. $\min(2,-56)$ קצה,
$\max(1,2)$, $\min(0,0)$ קצה. iv. עולה: $0<x<1$, יורדת: $1<x<2$,
ג. אי-זוגית.

סרטוט עבור חלק v:

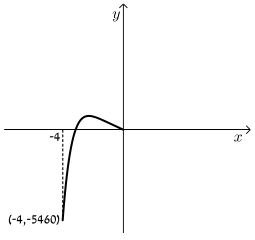


סרטוט עבור סעיף ד:

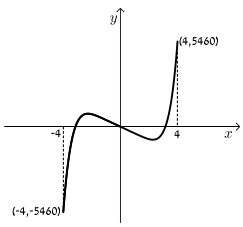


9) א. i $-4\le x\le 0$ ii. $(-1,0),(0,0)$ iii. $\min(0,0)$ קצה, $\max(-0.723,0.207)$,
$\min(-4,-5460)$ קצה. iv. עולה: $-4<x<-0.723$,
יורדת: $-0.723<x<0$ ג. אי-זוגית.

סרטוט עבור חלק v:



סרטוט עבור סעיף ד:



מכינה במתמטיקה

פרק 26 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש

תוכן העניינים

1. מציאת תחום הגדרה 313
2. מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה 315
3. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים 316
4. חקירת פונקצית מנה 321
5. חקירת פונקצית שורש 330
6. תחומי קעירות ונקודות פיתול 338
7. חקירת פונקציה עם פרמטר 344

מציאת תחום הגדרה:

סיכום כללי:

- כל פולינום מוגדר לכל x.
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x$

ב. $f(x)=4x^3-x^2+\frac{x}{2}+1$

ג. $f(x)=x^3-x^2-4x+1$

ד. $f(x)=\frac{2x}{x-3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

ו. $f(x)=\frac{5x^3+4x}{x^2-1}$

ז. $f(x)=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

ח. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-2x-8}$

ט. $f(x)=\frac{6}{x^2+1}$

י. $f(x)=\frac{4x+1}{x^2+1}$

יא. $f(x)=\frac{1}{x^3-x}$

יב. $f(x)=\frac{x^2}{x^3-4x}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=2\sqrt{x-3}$

ג. $f(x)=\sqrt{x-4}$

ד. $f(x)=3x\sqrt{1-2x}$

ה. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-10}$

ו. $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

ז. $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x+4}}$

ח. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

ט. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

י. $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}}$

יא. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

יב. $f(x)=\frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}}$

יג. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

יד. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

תשובות סופיות:

1) א. כל x ב. כל x ג. כל x ד. $x\neq 3$ ה. $x\neq \pm 2$ ו. $x\neq \pm 1$
ז. $x\neq -1,2$ ח. $x\neq 4,-2$ ט. כל x י. כל x יא. $x\neq \pm 1,0$ יב. $x\neq \pm 2,0$.

2) א. $x\geq 0$ ב. $x\geq 3$ ג. $x\geq 4$ ד. $x\leq \frac{1}{2}$ ה. $x\leq -5\ ,\ x\geq 2$
ו. $x\geq 1\ ,\ x\leq -2$ ז. $x>-4$ ח. $x\leq -3\ ,\ -2\leq x<1\ ,\ x>1$ ט. $x\leq -1.5\ ,\ x\geq 1$
י. $-3<x<0\ ,\ x>3$ יא. $-6\leq x<-2\ ,\ x>-2$ יב. $x<1\ ,\ 1<x\leq 2$
יג. $-1<x<1$ יד. $x\geq 7$.

מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

שאלות:

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{x^2-10x+9}$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

תשובות סופיות:

3) א. $\max\left(3,-1\frac{1}{2}\right)$, $\min\left(-3,-\frac{3}{8}\right)$.

ב. עולה: $-3<x<3$, $x\neq 1$, יורדת: $3<x\neq 9$, $x<-3$.

מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

סיכום כללי:

אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים: $g(k)=0$ וגם: $f(k)\neq 0$. בצורה מתמטית: אם: $\lim_{x\to k^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$

או: $\lim_{x\to k^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ או שניהם אז הישר: $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $y=\frac{f(x)}{g(x)}$.

הסבר כללי:

בעבור ערכי x שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית.
כאשר ערך x מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה
(על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם.
אם אחרי הצמצום אותו ערך של x עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית,
אך אם ערך x זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא
נקודת אי הגדרה.

אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה: $y=n$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים: $\lim_{x\to\infty^+}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או: $\lim_{x\to\infty^-}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^m+\ldots}{bx^n+\ldots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם $m>n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m=n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=\frac{a}{b}$.
- אם $m<n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=0$.

חוקי גבולות לאינסוף:

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר x שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף).
עבור ערכי x שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום: $x=\infty$ או $x=-\infty$ בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת x לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\text{"}\frac{1}{\infty}\text{"}=0$.
- הגבול: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ ניתן לפיצול לשני מקרים:
  - אם: $x\to 0^+$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון החיובי) אז: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\text{"}\frac{1}{0^+}\text{"}=+\infty$.
  - אם: $x\to 0^-$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון השלילי) אז: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\text{"}\frac{1}{0^-}\text{"}=-\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty\cdot\infty$ (מכפלת שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty\cdot\infty=\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty+\infty$ (סכום שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty+\infty=\infty$.

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה: $\frac{\infty}{\infty}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x).
- הגבול מהצורה: $\frac{0}{0}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת x).
- הגבול מהצורה: $\infty-\infty$ (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x).
במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

שאלות:

4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x-2}+3$.

5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{5x^2+1}{x^2-9}$.

6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$.

7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{3x}{x^2-2x-15}$.

8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$.

9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+b}{x-b}$.

10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{2x^2-4x}$
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$.

13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x}}$.

14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{x-\sqrt{x}}$.

16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$.

17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$.

18) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$.
האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה נפגשות בנקודה $(-1,2)$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

19) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$.
הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16,2)$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

תשובות סופיות:

4) $x=2\ ,\ y=3$.

5) $x=\pm 3\ ,\ y=5$.

6) $y=\frac{2}{3}$.

7) $x=-3\ ,\ x=5\ ,\ y=0$.

8) אין.

9) $x=b\ ,\ y=a$.

10) $x=1\ ,\ y=1$, נקודת אי-הגדרה: $(2,4)$.

11) $x=2\ ,\ y=\frac{1}{2}$, נקודת אי-הגדרה: $(0,0)$.

12) $x=2\ ,\ y=0$.

13) $x=4$.

14) $x=1\ ,\ y=-1$.

15) $x=1\ ,\ y=2$.

16) $y=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)\right)=3\ ,\ y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)\right)=-3$.

17) $x=4\ ,\ x=-4\ ,\ y=5\ ,\ y=-5$.

18) $a=2\ ,\ b=-3$.

19) $a=2\ ,\ b=1$.

חקירת פונקצית מנה:

שאלות:

20) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^2-10x+6}{3x^2-10x+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

21) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+\frac{1}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

22) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

23) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{x^2-5x+4}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

24) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

25) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\frac{2x^2-5x+2}{4x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון.

ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.

ד. חיתוך עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.

ו. סרטוט סקיצה.

26) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

27) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

28) לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x=-8$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

29) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3x^2}{2x^2-8}$.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.

ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

30) נתונה הפונקציה: $y=\frac{a^2x-4}{2x^2-1}$, (a קבוע).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$ הוא: $m=4$.

א. מצא את כל הערכים האפשריים עבור a.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

31) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=1.5x-\frac{5x+1}{x+5}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון וסוגן.

ג. תחומי עלייה וירידה.

ד. חיתוך עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה.

32) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$, $(a\neq 1)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x ועם ציר ה-y.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא עבור אילו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.

ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$.
מצא את הערך של a אם נתון כי הפונקציה עולה לכל x.

33) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+ax+6}{x-2}$, ($a$ פרמטר).
ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה-y.

א. מצא את הערך של a.

ב. הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א' ומצא:

i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

ג. עבור אלו ערכי x הפונקציה שלילית?

ד. נתון הישר: $y=k$. עבור אלו ערכי k אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

34) נתונה הפונקציה: $y=\frac{x+3}{x-2}+A$, (A פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה $(3A\ ,\ A)$.

א. מצא את ערך הפרמטר A.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל x.

ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון הישר: $y=k$.
האם קיים ערך של k עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

35) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2-20x+28}{x^2+2a}$.
ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה $(3\ ,\ 0.5)$.

א. מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של k הישר: $y=k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

36) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{9-x^2}{x^2-k}$ יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- y.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x אם ידוע כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון הוא 3.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x.

ד. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

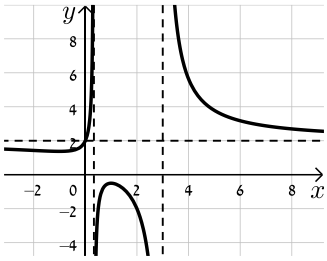
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר $y=-1$.
נמק את תשובתך.

תשובות סופיות:

20) א. $x\neq 3\ ,\ x\neq \frac{1}{3}$ ב. $\max\left(1,-\frac{1}{2}\right)\ ,\ \min\left(-1,1\frac{3}{8}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $-1<x<1$ וגם $x\neq\frac{1}{3}$, תחומי ירידה: $1<x\neq 3$ או $x<-1$.

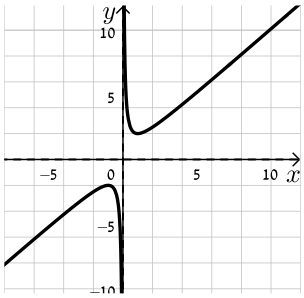
ד. $(0,2)$ ה. $y=2\ ,\ x=\frac{1}{3}\ ,\ x=3$. ו. להלן סקיצה:



21) א. $x\neq 0$ ב. $\max(-1,-2)\ ,\ \min(1,2)$.

ג. עולה: $x>1$ או $x<-1$, יורדת: $-1<x<1\ ,\ x\neq 0$ ד. אין

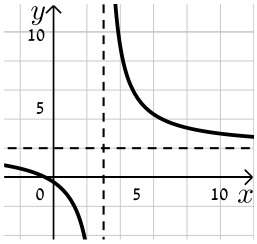
ה. להלן סקיצה:



22) א. $x\neq 3$ ב. אין. ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה

ד. $\left(0,-\frac{1}{3}\right)\ ,\ \left(-\frac{1}{2},0\right)$ ה. $x=3\ ,\ y=2$.

ו. להלן סקיצה:

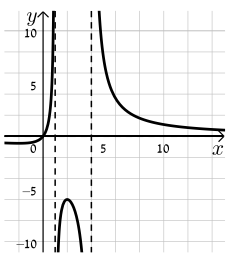


23) א. $x\neq 1\ ,\ x\neq 4$ ב. $\max(2,-6)\ ,\ \min\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$

ג. תחומי עלייה: $-2<x<2\ ,\ x\neq 1$, תחומי ירידה: $x>2\ ,\ x\neq 4$ או $x<-2$

ד. $(0,0)$ (אסימפטוטות: $x=4\ ,\ x=1\ ,\ y=0$).

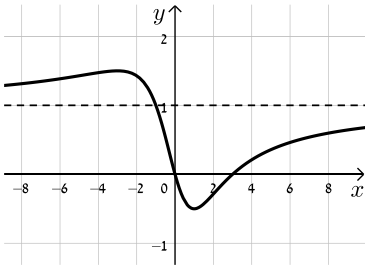
ה. להלן סקיצה:



24) א. כל x ב. $\min\left(1,-\frac{1}{2}\right)$, $\max\left(-3,1\frac{1}{2}\right)$

ג. עולה: $x>1$ או $x<-3$, יורדת: $-3<x<1$ ד. $(3,0),(0,0)$ (אסימפטוטה: $y=1$).

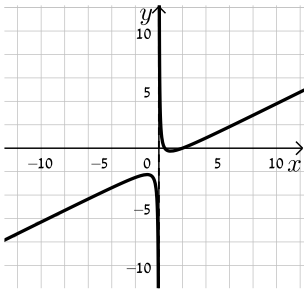
ה. להלן סקיצה:



25) א. $x\neq 0$ ב. $\min(1,-0.25)$, $\max(-1,-2.25)$

ג. עולה: $x>1$, $x<-1$, יורדת: $-1<x<1$, $x\neq 0$ ד. $(0.5,0),(2,0)$ ה. $x=0$.

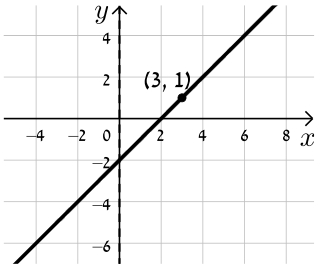
ו. להלן סקיצה:



26) א. $x\neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0,-2),(2,0)$ ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $(3,1)$.

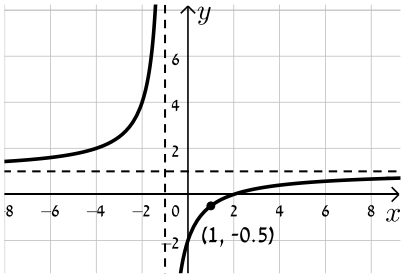
ו. להלן סקיצה:



27) א. $x\neq \pm 1$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0,-2),(2,0)$ ה. $x=-1$, $y=1$, יש נקודת אי הגדרה: $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

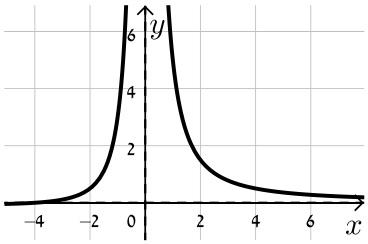
ו. להלן סקיצה:



28) א. $a=1$, $f(x)=\frac{x+4}{x^2}$ ב. עולה: $-8<x<0$ יורדת: $x<-8$, $x>0$

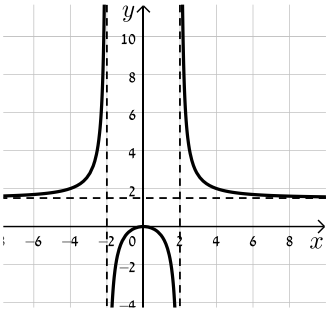
ג. $(-4,0)$ ד. $x=0$, $y=0$.

ה. להלן סקיצה:



29) א. $x\neq\pm2$ ב. $\max(0,0)$ ג. יורדת: $x>0$, $x\neq2$ עולה: $x<0$, $x\neq-2$

ד. $(0,0)$ ה. $x=\pm2$, $y=1.5$. ו. להלן סקיצה:



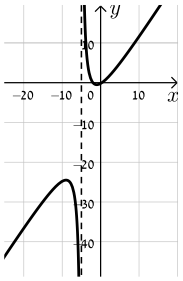
30) א. $a=\pm2$ ב. $(0,4)$, $(1,0)$

ג. המשיק: $y=-4x+4$ אשר עובר בנקודה $(1,0)$. נקודת החיתוך: $(1,0)$.

31) א. $x\neq-5$ ב. $\max(-9,-24.5)$, $\min(-1,-0.5)$

ג. עולה: $x>-1$, $x<-9$, יורדת: $-9<x<-1$, $x\neq-5$

ד. $(-2,0),\left(\frac{1}{3},0\right),(0,-0.2)$ ה. $x=-5$. ו. להלן סקיצה:



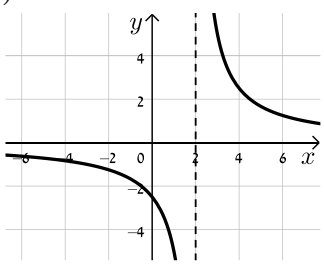
32) א. $x\neq1$ ב. $x=1$, $y=1$ ג. $(a,0),(0,a)$ ד. i. $a>1$ ii. $a=2$.

33) א. $a=-3$ ב. i. $x\neq2$ ii. $(0,-3)$ iii. $\max(0,-3)$, $\min(4,5)$

iv. $x=2$ ג. $x<2$ ד. $-3<k<5$.

34) א. A $=-1$ ב. $x\neq2$ ד. $(0,-2.5)$

ה. להלן סקיצה:



ו. לא

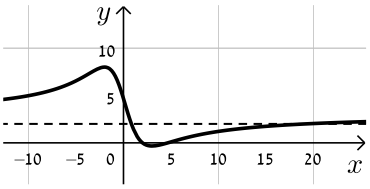
35) א. $a=3$, $f(x)=\frac{3x^2-20x+28}{x^2+6}$, כל x.

ב. $\max(-2,8)$, $\min\left(3,-\frac{1}{3}\right)$

ג. עולה: $x>3$, $x<-2$; יורדת: $-2<x<3$

ד. $(2,0),\left(0,4\frac{2}{3}\right),\left(4\frac{2}{3},0\right)$

ה. להלן סקיצה:

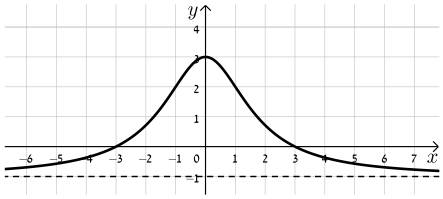


ו. 3 , $-\frac{1}{3}$, $k=8$.

36) ב. $k=-3$ ג. $(3,0),(-3,0)$ ד. $y=-1$

ה. באף נקודה.

ו. להלן סקיצה:



חקירת פונקצית שורש:

שאלות:

37) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

38) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-4)\sqrt{x-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

39) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{6-x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

40) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

41) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

42) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה-x? נמק והראה חישוב מתאים.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה-x.

ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

44) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?

ב. כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה-x? מצא אותן.

ג. כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

45) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

46) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, a פרמטר.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y.

ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y-x=0$.

א. מצא את ערך הפרמטר a.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ד. כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

47) נתונות שתי הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{\sqrt{x-k}}{x}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+k}}$ (k פרמטר חיובי).

ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x=0.8$.

א. מצא את k.

ב. האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה? אם כן מצא אותה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=0.52$.

48) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$, k פרמטר חיובי.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות k).

ii. מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?

ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של k בתחום הגדרתה.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-x. (בטא באמצעות k).

ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A. ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה-x והאסימפטוטה הנ"ל הוא: 4 יח"ש $S=$. מצא את ערך הפרמטר k.

49) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+2}{x+4}$. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.

ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.
קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.
הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות תחום הגדרה זהה.

ii. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

iii. שתי הפונקציות חותכות את ציר ה-x באותה נקודה.

iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.

ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה-y.

אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:

היות והפונקציה $g(x)$ מוגדרת להיות: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ אזי ניתן למצוא את שיעור ה-y של כל נקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה-y של הנקודה בעלת אותו שיעור x על הגרף של $g(x)$ ונעלה אותה בריבוע.

ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

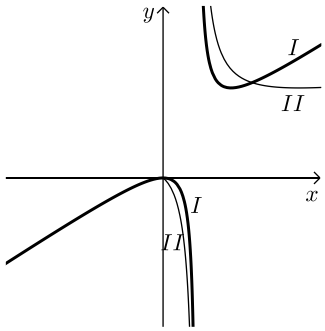
50) לפניך הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$.

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.
הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר: $y=x$.

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.



מגדירים פונקציה נוספת והיא: $h(x)=\left(g(x)\right)^2$.

ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה: $h(x)$.

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ זהה לשל $g(x)$?

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.
קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף מתאר מבין הפונקציות: $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. נמק את בחירותיך.

51) לפניך שלוש פונקציות: $h(x)=\frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$, $g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$, $f(x)=x^2\sqrt{k-x^2}$ $(k>0)$.

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$.

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה-x כלל.

iii. הפונקציות: $h(x)$ ו-$g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן (כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

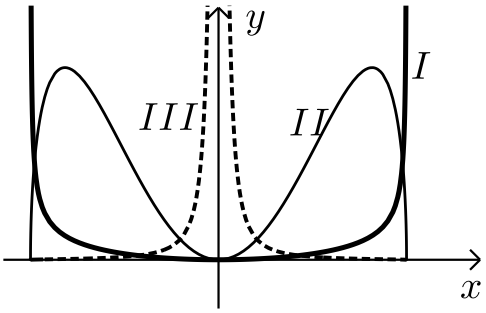
iv. לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A\left(0,\sqrt{12}\right)$ על ציר ה-y . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x שאינה בראשית הוא: $d=6$.

ב. מצא את k .

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

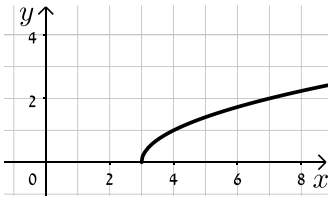
ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של שלושת הפונקציות.
קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף שייך לכל פונקציה.



תשובות סופיות:

37) א. $x\geq 3$ ב. $\min(3,0)$ קצה ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה.

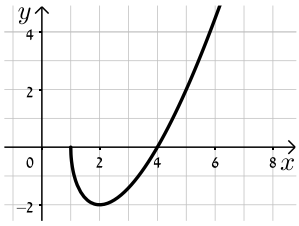
ד. $(3,0)$ ה. אין. ו. להלן סקיצה:



38) א. $x\geq 1$ ב. $\min(2,-2)$, $\max(1,0)$ קצה

ג. עולה: $x>2$, יורדת: $1<x<2$. ד. $(1,0),(4,0)$ ה. אין.

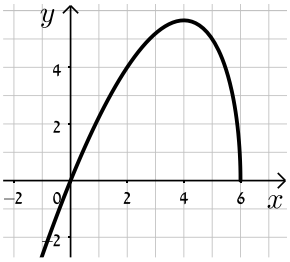
ו. להלן סקיצה:



39) א. $x\leq 6$ ב. $\min(6,0)$, $\max\left(4,4\sqrt{2}\right)$ קצה

ג. עלייה: $x<4$, ירידה: $4<x<6$ ד. $(6,0),(0,0)$.

ה. להלן סקיצה:



40) א. $x\geq 0$ ב. $\min(0,0)$, $\max(1,1)$ קצה

ג. עולה: $0<x<1$, יורדת: $x>1$ ד. $(0,0)$ ה. $y=0$.

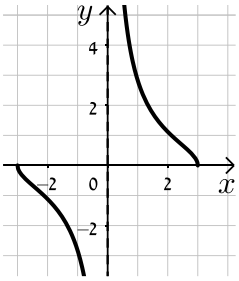
ו. להלן סקיצה:



41) א. $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה

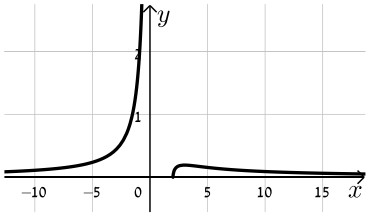
ג. עולה: אף x, יורדת: $-3\le x\le 3$, $x\ne 0$ ד. $(-3,0),(3,0)$

ה. $x=0$. ו. להלן סקיצה:



42) א. $x<0$, $x\ge 2$ ב. $\max\left(3,\frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ $\min(2,0)$ ג. $(2,0)$.

ד. להלן סקיצה:



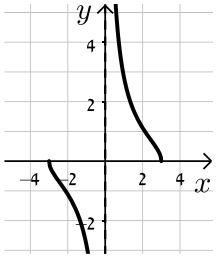
43) א. $(2,0)$ ב. לא ג. $y=2\sqrt{2}x-4\sqrt{2}$ ד. $S=4\sqrt{2}$.

44) א. $x\ge 0$, $x\ne 1$ ב. $(9,6)$ ג. $y=6$.

45) א. $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה

ג. עולה: אף x, יורדת: $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ד. $(-3,0),(3,0)$

ה. $x=0$ ו. להלן סקיצה:



46) א. $a=1$ ב. $-3<x<3$ ג. $\left(-1.5,\sqrt{3}\right)$

ד. יורדת: $-3<x<-1.5$, עולה: $-1.5<x<3$.

47) א. $k=0.48$ ב. כן, $(0.6,0.57)$ ג. $y=0.74x+0.1352$.

48) א. i. $-\sqrt{k}<x<\sqrt{k}$ ii. $x=\pm\sqrt{k}$ ב. $f'(x)=\frac{k^2}{\left(k-x^2\right)^{1.5}}>0$

ג. $y=\sqrt{k}x$ ד. $k=4$.

49) א. $g(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$ ב. i. לא נכון ii. נכון

iii. נכון iv. נכון ג. $f(x):\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $g(x):\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ד. אסף צודק.

50) א. i. לא נכון ii. נכון iii. נכון ב. $h(x)=\frac{x^2}{x-1}$

ג. לא, $h(x):x\neq 1$ ד. $\mathrm{I}=h(x)$, $\mathrm{II}=f(x)$.

51) א. i. לא נכון ii. לא נכון iii. נכון iv. נכון

ב. $k=24$ ג. $\max\left(\pm 4,32\sqrt{2}\right)$, $\min(0,0)$

ד. $\mathrm{I}=g(x)$, $\mathrm{II}=f(x)$, $\mathrm{III}=h(x)$.

תחומי קעירות ונקודות פיתול:

סיכום כללי:

תחומי קעירות – הגדרה:

- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) < 0$.
- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) > 0$.

נקודת פיתול – הגדרות:

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת: $f''(x) = 0$ כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

שאלות:

52) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

53) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$.

54) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$.

55) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = x(x-2)^3$.

56) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{a}{x^2+b}$, a,b פרמטרים.
הנקודה $(-1\ ,\ 1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה.
מצא את ערכי הפרמטרים a,b.

57) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+2$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

58) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{x-\sqrt{x}}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

59) חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

i. מציאת תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.
viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

ב. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ג. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ד. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ה. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

ו. $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

ז. $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

ח. $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

הערה: בסעיפים ו ו-ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.

תשובות סופיות:

52) $(1,7),(2,16)$, קעירות כלפי מעלה: $x>2$ או $x<1$, קעירות כלפי מטה: $1<x<2$.

53) $(2,1)$, קעירות כלפי מעלה: $x>2$, קעירות כלפי מטה: $0\neq x<2$.

54) קיצון: $\min(2,4)$, פיתול: $\left(4,\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

55) קיצון: $\min\left(\frac{1}{2},-\frac{27}{16}\right)$, פיתול: $(2,0),(1,-1)$.

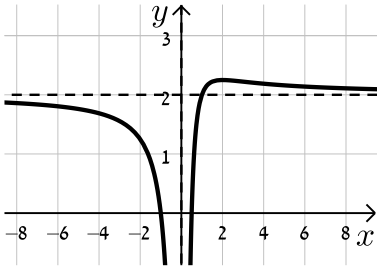
56) $a=4$, $b=3$.

57) א. $x\neq 0$ ב. $\max\left(2,2\frac{1}{4}\right)$ ג. עולה: $0<x<2$ יורדת: $x>2$, $x<0$

ד. $\left(\frac{1}{2},0\right),(-1,0)$ ה. $x=0$, $y=2$ ו. $\left(3,2\frac{2}{9}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $x>3$, קעירות כלפי מטה: $0\neq x<3$.

ח. להלן סקיצה:

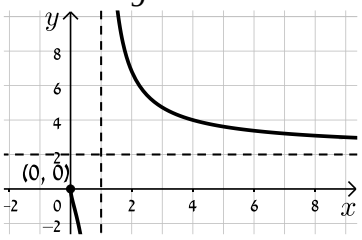


58) א. $1\neq x>0$ ב. אין. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.

ד. אין. ה. $x=1$, $y=2$ נקודת אי הגדרה: $(0,0)$. ו. $\left(\frac{1}{9},-1\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $x>1$ או $0<x<\frac{1}{9}$, קעירות כלפי מטה: $\frac{1}{9}<x<1$.

ח. להלן סקיצה:



59) א. i. $x\neq 0$ ii. $(1,0)$ iii. $x=0$, $y=0$ iv. $\max(2,0.25)$

v. עולה: $0<x<2$, יורדת: $x<0$, $x>2$ vi. $\left(3,\frac{2}{9}\right)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>3$, קעורה כלפי מטה: $0<x<3$, $x<0$.

ב. i. $x\neq -1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$, $y=2$ iv. $\min(0,0)$

v. עולה: $x<-1$, $x>0$, יורדת: $-1<x<0$ vi. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $-1<x<\frac{1}{2}$, קעורה כלפי מטה: $x<-1$, $x<\frac{1}{2}$.

ג. i. $x\neq\pm2$ ii. $(0,0)$ iii. $x=\pm2$

iv. $\max\left(-\sqrt{12},-5.2\right)$, $\min\left(\sqrt{12},5.2\right)$.

v. עולה: $x>\sqrt{12}$, $x<-\sqrt{12}$, יורדת: $2<x<\sqrt{12}$, $-2<x<2$, $-\sqrt{12}<x<-2$

vi. $(0,0)$.

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>2$, $-2<x<0$, קעורה כלפי מטה: $0<x<2$, $x<-2$.

ד. i. $x\neq-1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$ iv. $\max(-3,-6.75)$

v. עולה: $x>-1$, $x<-3$, יורדת: $-3<x<-1$ vi. $(0,0)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>0$, קעורה כלפי מטה: $-1<x<0$, $x<-1$.

ה. i. $x\neq1$ ii. $(-1,0),(0,-1)$ iii. $x=1$, $y=1$ iv. אין.

v. יורדת בכל ת.ה. vi. $\left(-3,\frac{1}{8}\right),(-1,0)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $-3<x<-1$, $x>1$, קעורה כלפי מטה: $-1<x<1$, $x<-3$.

ו. i. $x\neq2,5$ ii. $(0,-0.1),(-1,0),(1,0)$ iii. $x=2$, $x=5$, $y=1$

iv. $\min(0.359,-0.11)$, $\max(2.78,-3.89)$

v. עולה: $2<x<2.78$, $0.359<x<2$, יורדת: $x>5$, $2.78<x<5$, $x<0.359$.

ז. i. $x\neq\pm2$ ii. $(3,0),(1,0),(0,-0.75)$ iii. $x=\pm2$, $y=1$

iv. אין. v. יורדת בכל ת.ה.

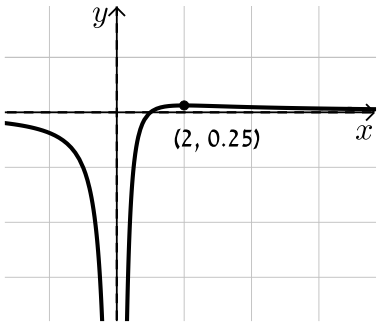
ח. i. $x\neq\pm1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$ iv. $\max(-2,-4)$, $\min(0,0)$.

v. עולה: $x>0$, $x<-2$, $x\neq1$, יורדת: $-1<x<0$, $-2<x<-1$

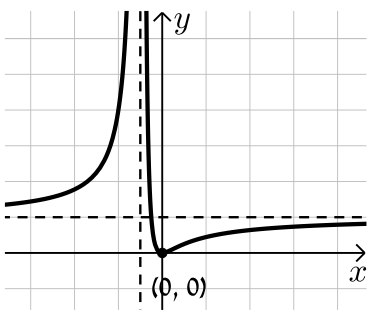
vi. אין. vii. קעורה כלפי מעלה: $x>-1$, $x\neq1$, קעורה כלפי מטה: $x<-1$.

סקיצות:

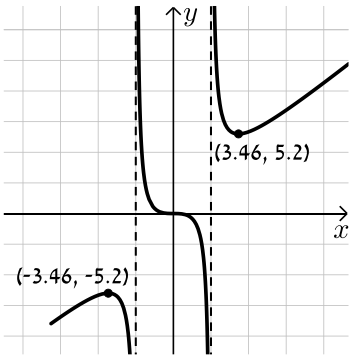
א.



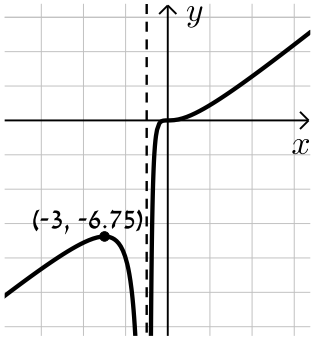
ב.



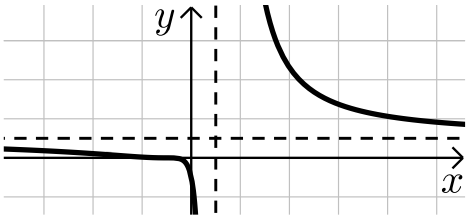
ג.



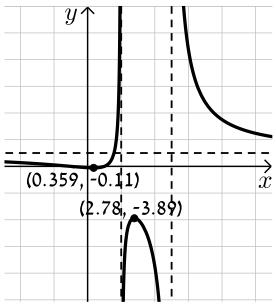
ד.



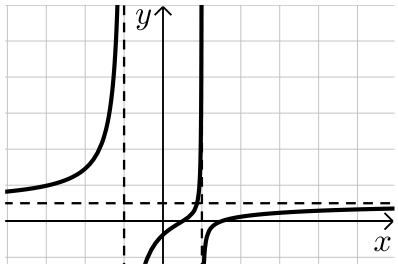
ה.



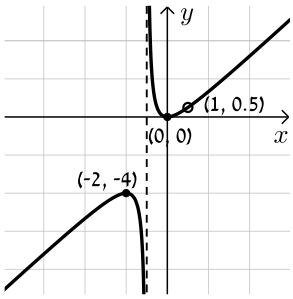
ו.



ז.



ח.



חקירת פונקציה עם פרמטר:

סיכום כללי:

סיווג נקודות קיצון באמצעות "y" :

אם הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת קיצון אז :

- אם $f''(x_1)>0$ הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת מינימום.
- אם $f''(x_1)<0$ הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת מקסימום.

שאלות:

1) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x)=x^3-12x$.

2) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x)=x^2-6x-16$.

3) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x)=x^3-3b^2x$, $b>0$ פרמטר.
שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{2x}{a^2+x^2}$ $(a>0)$. חקור לפי הסעיפים הבאים :

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1-x^2}{(x-b)^2}$, $(b>1)$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=4x\sqrt{b^2-x^2}$, $(b>0)$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-m}{ax-4}$, a,m פרמטרים קבועים כאשר: $a>0$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y.

א. מצא את הערך של הפרמטר m.

ב. הצב את הערך של m שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות a את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות a בסעיף הקודם.

ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- y נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר a.

ה. נתון הישר: $y=k$. מצא עבור אילו ערכים של k אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

תשובות סופיות:

1) $\max(-2,16)$, $\min(2,-16)$

2) $\min(3,-25)$

3) $\min(b,-2b^3)$, $\max(-b,2b^3)$

4) א. כל x ב. $\min\left(-a,-\frac{1}{a}\right)$, $\max\left(a,\frac{1}{a}\right)$.

ג. עולה: $-a<x<a$ יורדת: $x>a$, $x<-a$.

ד. $(0,0)$ ה. אסימפטוטה אופקית: $y=0$

5) א. $x\neq b$ ב. $\max\left(\frac{1}{b},\frac{1}{b^2-1}\right)$ ג. עולה: $x>b$, $x<\frac{1}{b}$ יורדת: $\frac{1}{b}<x<b$.

ד. $\left(0,\frac{1}{b^2}\right)$, $(-1,0)$, $(1,0)$ ה. $x=b$, $y=-1$.

6) א. $-b\le x\le b$ ב. $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}},-2b^2\right)$, $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}},2b^2\right)$, $\min(-b,0)$ קצה,

ג. עולה: $-\frac{b}{\sqrt{2}}<x<\frac{b}{\sqrt{2}}$, יורדת: $\frac{b}{\sqrt{2}}<x<b$, $-b<x<-\frac{b}{\sqrt{2}}$. $\min(b,0)$ קצה

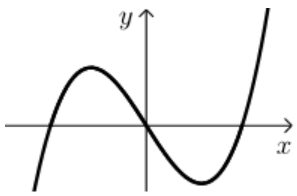
ד. $(0,0)$, $(-b,0)$, $(b,0)$.

7) א. $m=0$ ב. i. $x\neq\frac{4}{a}$ ii. $\min\left(\frac{8}{a},\frac{16}{a^2}\right)$, $\max(0,0)$

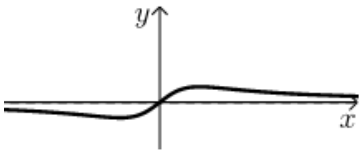
ב. iii. $x=\frac{4}{a}$ ד. $a=2$ ה. $0<k<4$.

סקיצות לשאלות:

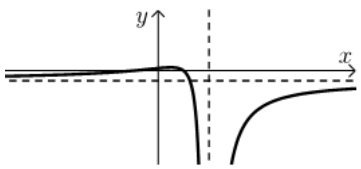
3)



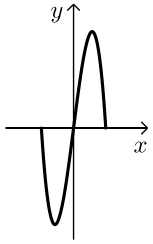
4)



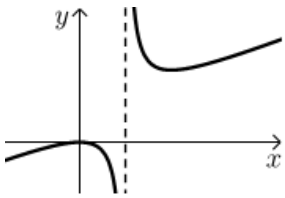
5)



6)



7)



מכינה במתמטיקה

פרק 27 - חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה

פרק 28 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות

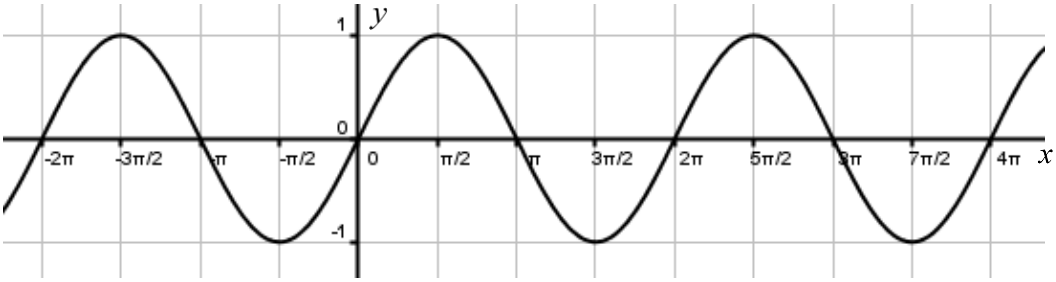
תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות 347
2. גזירה של פונקציות טריגונומטריות 349
3. שאלות עם משיקים 351
4. מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות 353
5. מציאת נקודות קיצון 354
6. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים 355
7. מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות 356
8. חקירת פונקציה טריגונומטרית 357

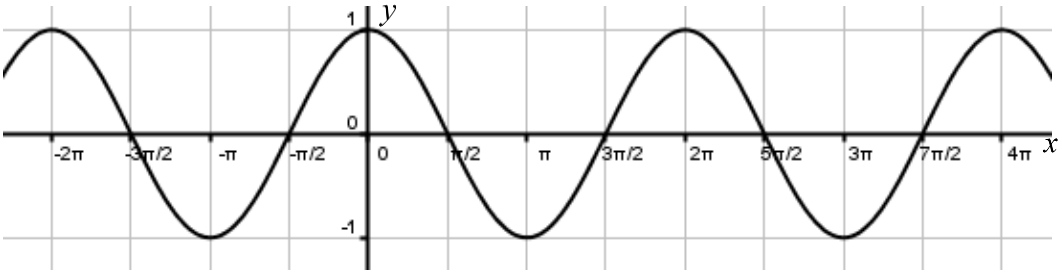
הגדרות כלליות:

סיכום כללי:

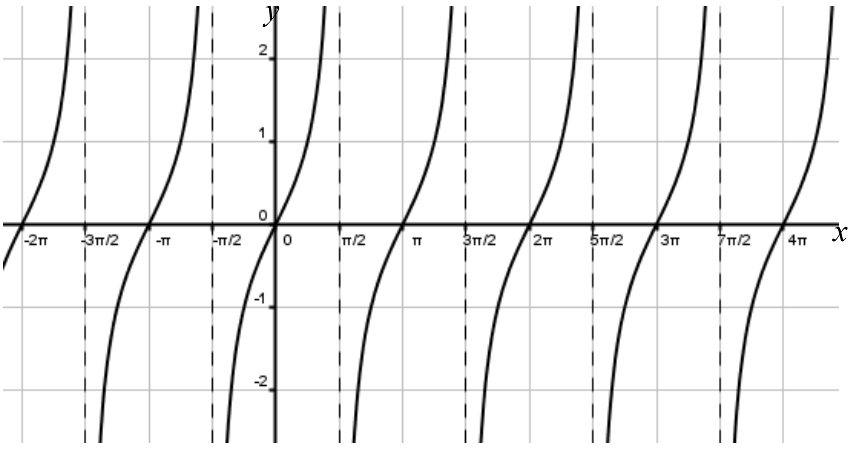
תיאור גרפי של פונקציית הסינוס $y=\sin x$:



תיאור גרפי של פונקציית הקוסינוס $y=\cos x$:



תיאור גרפי של פונקציית הטנגנס $y=\tan x$:



הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=\tan x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$y=\cot x$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

זוגיות של פונקציות:

- פונקציה $f(x)$ תקרא זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x)=f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תקרא אי-זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x)=-f(-x)$.
- פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הנ"ל אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

מחזוריות של פונקציות:

1) פונקציה $f(x)$ תיקרא מחזורית במחזור T אם היא מקיימת: $f(x+T)=f(x)$ לכל x בתחום הגדרתה.
2) מחזור של פונקציות טריגונומטריות:

- הפונקציה $f(x)=\sin x$ מחזורית במחזור $T=2\pi$ שכן: $\sin(x+2\pi)=\sin x$.
- הפונקציה $f(x)=\cos x$ מחזורית במחזור $T=2\pi$ שכן: $\cos(x+2\pi)=\cos x$.
- הפונקציה $f(x)=\tan x$ מחזורית במחזור $T=\pi$ שכן: $\tan(x+\pi)=\tan x$.
- הפונקציה $f(x)=\cot x$ מחזורית במחזור $T=\pi$ שכן: $\cot(x+\pi)=\cot x$.

גזירה של פונקציות טריגונומטריות:

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin x+3\cos x+x$

ב. $f(x)=2x\sin x+4\tan x$

ג. $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$

2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin 3x+2\cos 5x$

ב. $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$

3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin^3 x$

ב. $f(x)=2\cos^4 x$

ג. $f(x)=\sin^2 x$

ד. $f(x)=\sin^3 2x$

ה. $f(x)=\cos^2 2x$

ו. $f(x)=\tan^2 4x$

4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sin 3x}$

ב. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x$

ב. $f(x)=\sin^4 2x-\cos^4 2x$

ג. $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$

תשובות סופיות:

1) א. $\cos x-3\sin x+1$ ב. $2\sin x+2x\cos x+\frac{4}{\cos^2 x}$ ג. $\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$

2) א. $3\cos 3x-10\sin 5x$ ב. $-\frac{2}{1+\sin 2x}$.

3) א. $3\sin^2 x\cdot\cos x$ ב. $-8\cos^3 x\sin x$ ג. $\sin 2x$

ד. $6\sin^2 2x\cos 2x$ ה. $-2\sin 4x$ ו. $\frac{8\tan 4x}{\cos^2 4x}$.

4) א. $\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$ ב. $\frac{\cos^2 2x+1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$.

5) א. $2\sin 2x$ ב. $4\sin 4x$ ג. $-\sin 4x$.

שאלות עם משיקים:

שאלות:

6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\cos x$ בנקודה $A\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\sin 2x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{2}$.

8) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\tan 3x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{9}$.

9) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה: $f(x)=4\sin^2 x$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=1$ בתחום $[0,\pi]$.

10) שיפוע המשיק לפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sin x+a}$, (a פרמטר) בנקודה שבה $y=1$ בתחום $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ הוא $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
מצא את ערך הפרמטר a.

11) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\sin^2 x-5\sin x+ax$, ($a$ פרמטר) בתחום: $0\le x\le\pi$.
ידוע כי הישר: $y=ax-2$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{6}$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא: $m=2$.

ג. האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק דרכן הוא 2?
נמק את תשובתך.

ד. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

12) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x^2+\cos^2 x$, $g(x)=x^2+\sin^2 x$.

א. הוכח כי ההפרש: $f(x)-g(x)$ שווה ל- $\cos 2x$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום: $-\pi<x<\pi$.

ג. ישר $x=t$, $(0<t<1)$ חותך את הגרפים בנקודות A ו-B ומהן מעבירים משיקים לפונקציות. ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק של גרף הפונקציה $g(x)$ לשיפוע המשיק של גרף הפונקציה $f(x)$ הוא 1.
מצא את כל הערכים האפשריים עבור t.

תשובות סופיות:

6) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7) $y=-2x+\pi$.

8) $y=12x-\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$.

9) $y=2\sqrt{3}x-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+1$, $y=-2\sqrt{3}x+\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}+1$.

10) $a=\frac{1}{2}$.

11) א. $a=2$, $f(x)=2\sin^2 x-5\sin x+2x$ ב. $\left(\frac{\pi}{2},\pi-3\right)$ ג. לא. ד. $y=2x-3$.

12) ב. $\left(\frac{\pi}{4},1.11\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4},6.05\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4},1.11\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{4},6.05\right)$ ג. $t=\frac{\pi}{12}$.

מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות:

שאלות:

13) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

א. $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos 2x}\ ,\ [0,2\pi]$

ב. $f(x)=\frac{1}{\sin x-\cos x}\ ,\ [-\pi,\pi]$

ג. $f(x)=\tan x\ ,\ [0,2\pi]$

תשובות סופיות:

13) א. $0\le x\le 2\pi$ וגם $x\ne \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

ב. $-\pi\le x\le \pi$ וגם $x\ne \frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}$.

ג. $0\le x\le 2\pi$ וגם $x\ne \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$.

מציאת נקודות קיצון:

שאלות:

14) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x)=\sin x+\cos x$ בתחום: $[0,2\pi]$.

15) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$ בתחום: $[0,2\pi]$.

16) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin x+1}{\sin x-1}$ בתחום: $[0,2\pi]$.

17) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{3}\sin^3 x-2\sin x$
בתחום: $[0,1.5\pi]$.

18) לפונקציה: $f(x)=a\sin x+b\sin^3 x$, (a,b פרמטרים) יש נקודת קיצון
ששיעוריה $\left(\frac{7\pi}{6},-1\right)$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

תשובות סופיות:

14) $\min(0,1)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$, $\min\left(\frac{5}{4}\pi,-\sqrt{2}\right)$, $\max(2\pi,1)$ קצה.

15) $\min(0,0)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$, $\min\left(\frac{5}{3}\pi,-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{6}\pi\right)$, $\max(2\pi,-\pi)$ קצה.

16) $\min(2\pi,-1)$ קצה, $(0,-1)$ קצה, $\max\left(\frac{3}{2}\pi,0\right)$ מוחלט.

17) $\max\left(\frac{3}{2}\pi,2\frac{2}{15}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{2},-2\frac{2}{15}\right)$

18) $a=3$, $b=-4$.

מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

שאלות:

19) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin 3x}$ בתחום: $[0,\pi]$.

20) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}$ בתחום: $[0,\pi]$.

21) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x)=\tan x$ בתחום: $[-\pi,\pi]$.

תשובות סופיות:

19) $x=\pi$, $x=\frac{2\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=0$.

20) $x=\pi$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=0$.

21) $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות:

שאלות:

22) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x-2\sin x$ בתחום: $[0,2\pi]$.

תשובות סופיות:

22) נקודות פיתול: $\left(\frac{11}{6}\pi,1\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{7}{6}\pi,1\frac{1}{4}\right)$, קעור מעלה: $0<x<\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$

קעור מטה: $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$.

חקירת פונקציה טריגונומטרית:

שאלות:

23) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\cos x$ בתחום $[0,2\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.
ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

24) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$ בתחום $[0,\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

25) נתונה הפונקציה: $f(x)=4\sin 2x-2$ בתחום $0\le x\le\pi$.
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. מעבירים את הישר $y=k$ היעזר בסקיצה ומצא לאילו ערכי k הישר יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.
ה. העבירו ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט שלה.
כמו כן העבירו מנקודה זו אנך לציר x.
מצא את שטח המלבן הנוצר על ידי הצירים, המשיק והאנך.

26) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x-\cos x-2$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

27) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos x+\frac{1}{m}\sin mx$, $1<m<3$ (m פרמטר).

הנגזרת של הפונקציה מתאפסת כאשר: $x=-\frac{\pi}{2}$.

א. מצא את ערך הפרמטר m.

ב. האם הנקודה שבה: $x=-\frac{\pi}{2}$ היא נקודת קיצון? אם כן קבע את סוגה.
אם לא נמק מדוע.

ג. מצא כמה נקודות קיצון מקומיות יש לגרף הפונקציה בתחום: $0<x<2\pi$.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x בתחום הנתון.

28) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\cos x\cdot(\sin x+1)$ בתחום: $0\le x\le 1.5\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x\cdot(\sin x+1)=1$ בתחום הנתון?

29) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$.

א. מצא בתחום $[0,\pi]$ את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה
ואת נקודות הקיצון שלה.

ב. הוכח שהפונקציה זוגית.

ג. שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi,\pi]$.

30) נתונה הפונקציה: $f(x)=4x-3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

31) נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan 2x-8\sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi<x<0.25\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

32) נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan\left(x^2-4x\right)$ בתחום $[0,4]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

33) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\cos x-x$ בתחום: $-3\pi\le x\le 3\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x הנגזרת של הפונקציה מתאפסת.

ii. ידוע גם כי: $f'(-3.67)=0$, $f'(3.67)=0$ וכי אין נקודות נוספות בתחום הנתון שבהן הנגזרת מתאפסת. קבע אלו נקודות, מבין נקודות החיתוך שמצאת, הן נקודות קיצון ואלו אינן נקודות קיצון.
מצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

34) נתונה הפונקציה: $y=\left(\cos x+k\right)^2$, k פרמטר, בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה שבה $x=\frac{2\pi}{3}$.

א. מצא את k וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודת המקסימום שאיננה מוחלטת בתחום הנתון.

ג. האם יש לגרף הפונקציה נקודות מינימום שאינן מוחלטות? אם כן מהן?

35) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=m\sin x+k\cos^2 x$ (m פרמטר).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\pi$ שמשוואתו: $y=-6x+6\pi+\sqrt{7}$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים k ו-m.

ב. מצא את נקודות הקיצון בתחום: $-0.5\pi\le x\le 1.5\pi$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע עפ"י הסקיצה בכמה נקודות גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בתחום הנ"ל.

36) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=\tan x+kx$ (k פרמטר) בתחום: $0\le x\le \pi$.

א. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנתון.

הפונקציה: $g\left(x\right)=\tan^2 x+kx$ חותכת את הפונקציה $f\left(x\right)$ בשתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה-x בתחום הנתון.

ב. מצא את ערך הפרמטר k, $\left(k\ne 0\right)$.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f\left(x\right)$ בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

37) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x)=\sqrt{-\cos x}$, $g(x)=\sqrt{\cos x+1}$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0.5\pi \le x \le 1.5\pi$ והפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

א. האם הגרפים חותכים את ציר ה-x בתחום הנתון? הראה חישוב מתאים.

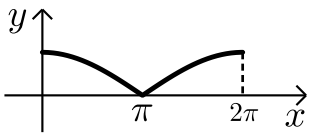
ב. האם הגרפים חותכים זה את זה בתחום הנתון? אם כן מצא את נקודות החיתוך.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגה.

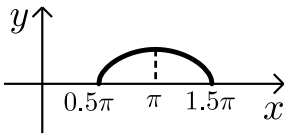
ד. לפניך ארבעה איורים: i , ii , iii , iv.

קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזה איור מתאר את הגרף של $f(x)$ ואיזה מתאר את הגרף של $g(x)$. נמק.

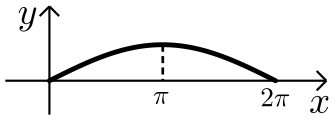
i.



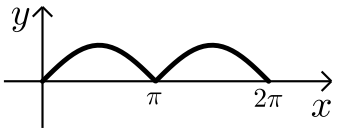
ii.



iii.



iv.



תשובות סופיות:

23) א. $0 \le x \le 2\pi$.

ב. $\max(2\pi, 2\pi+2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$, $\min(0,2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$.

ד. $(0,2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$, קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

24) א. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ ה. אנכית: $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$.

25) א. $\left(\frac{5}{12}\pi, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$, $(0,-2)$.

ב. $\max(\pi,-2), \min\left(\frac{3\pi}{4}, -6\right) \max\left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \min(0,-2)$.

ד. $-6 < k < 2$ וגם $k \ne -2$ ה. $\frac{\pi}{2}$.

26) א. $(\pi,0), (0,-2)$.

ב. $\max(2\pi,-2), \min\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right), \max(\pi,0), \min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right), \max(0,-2)$.

ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$, $\frac{\pi}{3} < x < \pi$, יורדת: $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$, $0 < x < \frac{\pi}{3}$.

27) א. $m = 2$ ב. נקודת פיתול ג. 2 נקודות

ד. $(0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0)$.

28) א. $(0,1)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ב. $(1.5\pi, 0), \left(\frac{5}{6}\pi, -1.29\right), \left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right), (0,1)$.

ד. 2 פתרונות.

29) א. חיתוך: $(0,0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, קיצון: $\min(\pi,-2)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$, $\min(0,0)$ קצה.

30) א. $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi,13.57\right)$ קצה, $\min\left(-\frac{\pi}{6},-0.36\right),\max\left(\frac{\pi}{6},0.36\right)$ קצה

ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$.

ד. $(0,0)$ ה. אנכית: $x=\frac{\pi}{2}$ ו. $(0,0)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6}\le x\le 0$, קעירות כלפי מטה: $0<x<\frac{\pi}{2}$.

31) א. $(0,0),(\pm 0.23\pi,0)$ ב. $x=\pm 0.25\pi$. ג. $\max\left(-\frac{\pi}{6},\sqrt{27}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{6},-\sqrt{27}\right)$.

32) א. $0\le x\le 4$ וגם $x\ne 3.56$, $x\ne 0.44$

ב. $\max(0,0)$ קצה, $\min(2,-1.16)$, $\max(4,0)$ קצה.

33) א. $(0,0),(2\pi,0),(-2\pi,0)$

ב. ii. $\min(-2\pi,0)$, $\max(2\pi,0)$, $(0,0)$ פיתול.

34) א. $k=0.5$, $y=(\cos x+0.5)^2$ ב. $(\pi,0.25)$

ג. לא.

35) א. $m=6$, $k=\sqrt{7}$ ב. $(-0.5\pi,-6),(0.5\pi,6),(1.5\pi,-6)$. ג. בשתי נקודות.

36) א. $x=0.5\pi$ ב. $k=-\frac{4}{\pi}\approx -1.27$

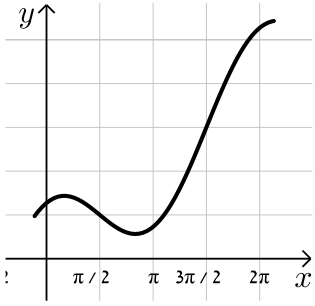
ג. $\max(0,0),\min(0.15\pi,-0.07),\max(0.84\pi,-3.9),\min(\pi,-4)$.

37) א. כן. $(0.5\pi,0),(1.5\pi,0)$. ב. כן, $f(x):(\pi,0)$, $g(x):\left(\frac{4}{3}\pi,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

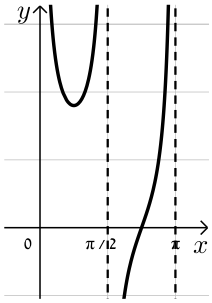
ג. $\max(0.5\pi,0),\min(1.5\pi,0),\max(\pi,1)$ ד. איור I - $g(x)$, איור II - $f(x)$.

סקיצות לשאלות החקירה:

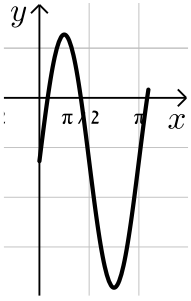
(23



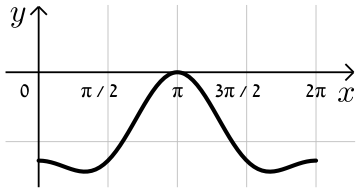
(24



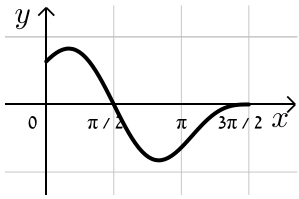
(25



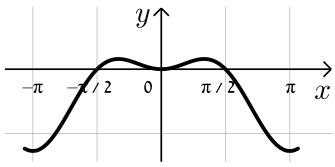
(26



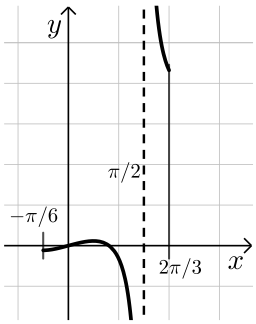
(28



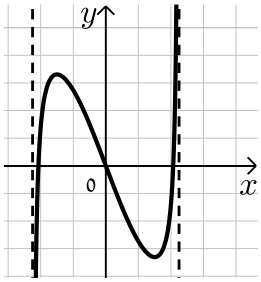
(29



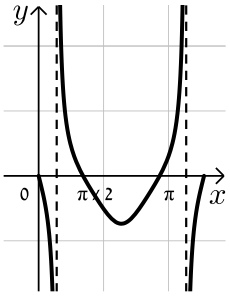
(30



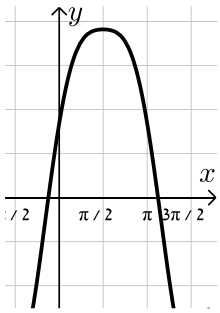
(31



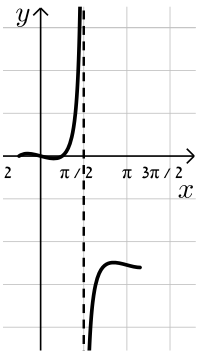
(32



(35



(36



מכינה במתמטיקה

פרק 29 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות

תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקציה מעריכית 365
2. שימושי הנגזרת 369
3. חקירה של פונקציה מעריכית 370

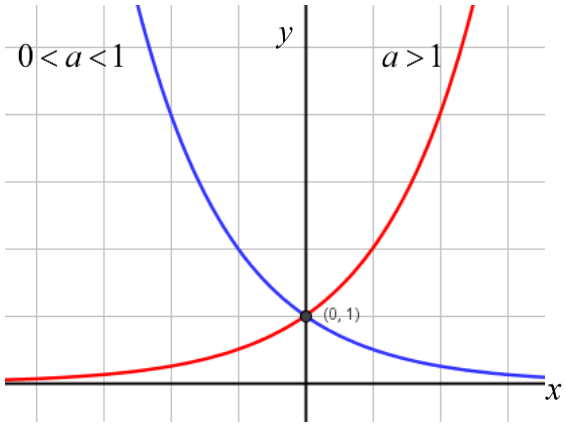
הנגזרת של פונקציה מעריכית:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה: $f(x)=a^x$

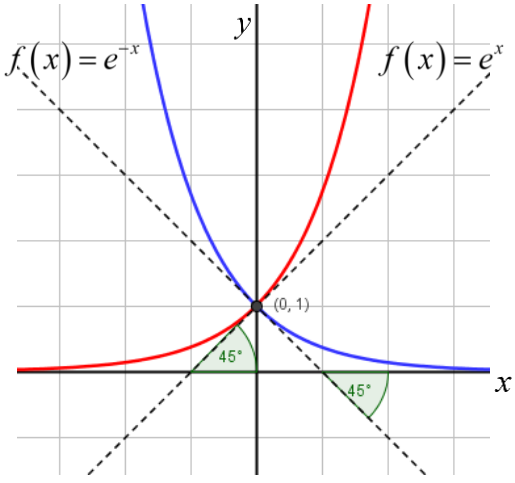
עבור: $a>1$ ו-$0<a<1$:



תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל x.
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה-y בנקודה: $(0,1)$.
4. עבור: $a>1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0<a<1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x)=e^x$ ו-$f(x)=e^{-x}$ נקבל:



תכונות נוספות:

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^{-x}$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא 1-.

נגזרות של פונקציות מעריכיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y=a^x$	$y'=a^x\cdot\ln a$
$y=a^{f(x)}$	$y'=a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\ln a$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=e^{f(x)}$	$y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$

תזכורת - כללי הגזירה:

מספר כלל	הפונקציה	תיאור	הנגזרת
1.	$y=a\cdot f(x)$	מכפלה בקבוע	$y'=a\cdot f'(x)$
2.	$y=f(x)+g(x)$	סכום פונקציות	$y'=f'(x)+g'(x)$
3.	$y=f(x)\cdot g(x)$	מכפלת פונקציות	$y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
4.	$y=\frac{f(x)}{g(x)}$	מנת פונקציות	$y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
5.	$y=f(g(x))$	פונקציה מורכבת	$y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

א. $f(x)=3e^{x}+e^{2x}+e^{-x}+2x+1$ ב. $f(x)=e^{x^2-3x}+ex$

ג. $f(x)=2^{3x}$ ד. $f(x)=3^{x^2}+4^{-x}$

2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

א. $f(x)=x\cdot e^{x}$ ב. $f(x)=x^2\cdot e^{4x}$ ג. $f(x)=(x+1)\cdot 2^{x}$

3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

א. $f(x)=\frac{x^2}{e^{x}}$ ב. $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$

4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

א. $f(x)=5\left(e^{2x}-1\right)^3$ ב. $f(x)=\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}$ ג. $f(x)=\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{x}+1}}$

5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x)=e^{2x}$ ב. $f(x)=e^{x}+1$

ג. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ ד. $f(x)=\left(x^2+1\right)e^{x}$

ה. $f(x)=e^{-x}\left(x^2+4x+1\right)$ ו. $f(x)=e^{3x-2}$

ז. $f(x)=e^{x}\cdot\frac{1}{x}$ ח. $f(x)=x^3e^{2x}$

ט. $f(x)=e^{-2x}(x+4)$ י. $f(x)=e^{2x+1}(1-x)$

יא. $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$ יב. $f(x)=\frac{x^3}{e^{3x}}$

יג. $f(x)=\frac{2+x^2}{e^{x^2}}$ יד. $f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{-x}+e^{x}}$

טו. $f(x)=\frac{x^2+1}{e^{-x}}$ טז. $f(x)=\frac{e^{x}}{1-e^{x+1}}$

תשובות סופיות:

1) א. $3e^x+2e^{2x}-e^{-x}+2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x}+e$ ג. $3\ln 2\cdot 2^{3x}$ ד. $2x\ln 3\cdot 3^{x^2}-\ln 4\cdot 4^{-x}$

2) א. $(1+x)e^x$ ב. $2xe^{4x}(1+2x)$ ג. $2^x(1+x\ln 2+\ln 2)$

3) א. $\frac{x(2-x)}{e^x}$ ב. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

4) א. $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$ ב. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$ ג. $\frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$

5) א. $2e^{2x}$ ב. e^x ג. $-\frac{e^{1/x}}{x^2}$ ד. $(x+1)^2e^x$

ה. $e^{-x}(-x^2-2x+3)$ ו. $3e^{3x-2}$

ז. $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ ח. $x^2e^{2x}(3+2x)$ ט. $-e^{-2x}(2x+7)$

י. $e^{2x+1}(1-2x)$

יא. $\frac{e^{-1/x}}{x^2}$ יב. $\frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}}$ יג. $\frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$

יד. $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$ טו. $\frac{(x+1)^2}{e^{-x}}$ טז. $\frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2}$

שימושי הנגזרת:

שאלות:

6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^x$ בנקודה $A(1,e)$.

7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^{2x}+xe^{-x}$ בנקודה שבה $x=0$.

8) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=(e+1)e^x-e^{2x}$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=e$.

9) נתונה הפונקציה: $y=e^{2x}+3ex$.
לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה: $x=2$.
מצא את משוואת המשיק.

10) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=a\cdot 3^{2x-1}+3^{x-b}$ בנקודה $(1,15)$ הוא $21\ln 3$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

תשובות סופיות:

6) $y=ex$

7) $y=3x+1$

8) $y=(e-1)x+e$, $y=(-e^2+e)x+e^2$

9) $y=2e^4x+3ex-3e^4$

10) $a=2$, $b=-1$

חקירה של פונקציה מעריכית:

שאלות:

11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{2x-1}{e^x}$ ב. $f(x)=\frac{3}{e^x-1}$ ג. $f(x)=\frac{x+1}{e^x-5}$

ד. $f(x)=\frac{1}{e^{2x}-3e^x+2}$ ה. $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x}$ ו. $f(x)=\frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2}$

ז. $f(x)=\sqrt{e^{2x}-4e^x+3}$

12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=x^2e^x$.

13) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x}{x-2}$.

14) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2+bx+9}{e^x}$.
הפונקציה משיקה לציר ה-x בנקודה שבה $x=1.5$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו-b ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

15) נתונה הפונקציה: $f(x)=8^x+p\cdot 2^x+q$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3,-19)$. מצא את ערכי הפרמטרים p ו-q.

16) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=e^{2x}+e^x$.

17) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}}$.

18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x+5}{e^x-1}$.

19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x-5}$.

20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x-2}{e^{2x}-5e^x+6}$.

22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$.

23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^3-1}{e^x}$.

24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x-1}{e^{3x}-e}$.

25) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=(x-3)e^x$.

26) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.

27) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+a}{be^x}$. לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $\left(1,\frac{2}{e}\right)$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.

28) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. $f(x)=(x-1)e^x$

ב. $f(x)=(x^2+1)e^x$

ג. $f(x)=x^2e^{-\frac{1}{4}x^2}$

ד. $f(x)=e^{x^2-x}$

ה. $f(x)=\frac{2}{e^{x^2}+1}$

ו. $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^{x+1}}$

29) נתונה הפונקציה $f(x)=(x-3)e^x$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

30) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x}-8e^x+6x+10$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

31) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4x}{e^{0.5x^2}}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

32) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^3}{e^x}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

33) נתונה הפונקציה $f(x)=2x\cdot 3^x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

34) נתונה הפונקציה $f(x)=2e^{\frac{x}{x^2+1}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
ז. לאלו ערכי m יש למשוואה $f(x)=m$ בדיוק פתרון אחד?

35) נתונה הפונקציה $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
ז. כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

36) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{3x}}{12x^2+1}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

37) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{e^{3x^2+6x+k}}$ בנקודה שבה $x=1$ הוא $-\frac{12}{e^{10}}$.

א. מצא את ערך הפרמטר k וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא: $0<\frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}\le e^2$.

38) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=e^{2x}+ae^x+b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים וידוע כי כאשר $x=\ln\frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x)+f''(x)=8$.

א. מצא את a.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y=16x+7-16\ln 2$.

ב. מצא את שיעור ה-x של נקודת ההשקה.

ג. מצא את b.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

39) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=6x-e^x$ ו- $g(x)=ae^x-e^{2x}+b$.

ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור x וכי שתיהן נפגשות על ציר ה-y.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו-b.

ב. הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

40) לגרף הפונקציה: $f(x)=ax^2\cdot e^{-bx^2}$ יש נקודת קיצון: $\left(2,\frac{4}{e}\right)$, $a,b\neq 0$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו-b וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מעבירים ישר: $y=k$. באיזה תחום ערכים צריך להימצא k כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

41) לפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-6x-7}{e^{ax-1}}$ יש קיצון בנקודה שבה: $x=1$.

א. מצא את ערך הפרמטר a.

ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

42) הישר $x=\sqrt{6}$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2+m}$.

א. מצא את ערך הפרמטר m וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3\cdot e^{2x}$.

א. מצא את הנקודות המקיימות: $f'(x)=0$ וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.

ב. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. בכמה נקודות חותך הישר $y=-0.01$ את גרף הפונקציה?

44) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=e^{2x}+ae^{x}+b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים וידוע כי כאשר $x=\ln\frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x)+f''(x)=12$.

א. מצא את a.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y=22x+28-22\ln 2$.

ב. מצא את שיעור ה-x של נקודת ההשקה.

ג. מצא את b.

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה-x? אם כן מצא את הנקודות.

45) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\cdot a^{x}$, $(a>0)$.

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x=-\frac{1}{\ln 2}$.

א. מצא את a.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה $x=2$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה: $g(x)=x^{2}\cdot 2^{x}-kx\cdot 2^{x}$.

ג. מצא את k.

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

46) נתונה הפונקציה: $f(x)=3^{2x}+2\cdot 3^{1-x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y.

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה-x.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

תשובות סופיות:

11) א. כל x ב. $x\neq 0$ ג. $x\neq \ln 5$ ד. $x\neq 0\ ,\ x\neq \ln 2$ ה. כל x

ו. $0\le x\neq \frac{2}{5}$ ז. $x\le 0\ ,\ x\ge \ln 3$

12) $\min(0,0)\ ,\ \max\left(-2,\frac{4}{e^2}\right)$

13) $\min\left(3,e^3\right)$

14) $a=4\ ,\ b=-12\ ,\ \max(3.5,0.483)\ ,\ \min(1.5,0)$

15) $q=35\ ,\ p=-27$

16) $y=0$

17) $y=0$

18) $y=1\ ,\ y=-5\ ,\ x=0$

19) $y=-\frac{1}{5}\ ,\ x=\ln 5$

20) $y=1\ ,y=-1$

21) $y=0\ ,y=-\frac{1}{3}\ ,x=\ln 3$, נקודת אי הגדרה: $(\ln 2,-1)$

22) $y=0\ ,\ x=0$

23) $y=0$

24) $y=0\ ,x=\frac{1}{3}$

25) $y=0$

26) $x=0$, נקודת אי הגדרה: $(0,0)$

27) $a=1\ ,\ b=1\ ,\left(3,\frac{10}{e^3}\right)$

28) א.1. כל x .2 $(0,-1)\ ,\ (1,0)$ .3 $\min(0,-1)$ .4 עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$

ב.1. כל x .2 $(0,1)$ .3 פיתול $\left(-1,\frac{2}{e}\right)$ .4 עולה: $x<-1\ ,\ x>-1$

ג.1. כל x .2 $(0,0)$ .3 $\max\left(-2,\frac{4}{e}\right)\ ,\ \min(0,0)\ ,\ \max\left(2,\frac{4}{e}\right)$

.4 עולה: $0<x<2\ ,\ x<-2$ יורדת: $-2<x<0\ ,\ x>2$

ד.1. כל x .2 $(0,1)$ .3 $\min\left(0.5,e^{-0.25}\right)$ .4 עולה: $x>0.5$ יורדת: $x<0.5$

ה. 1. כל x 2. $(0,1)$ 3. $\max(0,1)$ 4. עולה: $x<0$ יורדת: $x>0$

ו. 1. כל x 2. $(0,2e^{-1})$ 3. $\min(0,2e^{-1})$ 4. עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$

29) א. כל x ב. $\min(2,-e^2)$ ג. תחומי עלייה: $x>2$ תחומי ירידה: $x<2$

ד. $(0,-3)$, $(3,0)$

30) א. כל x ב. $\min(\ln 3,1.59)$, $\max(0,3)$

ג. תחומי עלייה: $x>\ln 3$ או $x<0$ תחומי ירידה: $0<x<\ln 3$ ד. $(0,3)$

31) א. כל x ב. $\max\left(1,\frac{4}{e^{0.5}}\right)$, $\min\left(-1,-\frac{4}{e^{0.5}}\right)$

ג. תחומי עלייה: $-1<x<1$ תחומי ירידה: $x>1$ או $x<-1$ ד. $(0,0)$

32) א. כל x ב. $\max\left(3,\frac{27}{e^3}\right)$ ג. עולה: $x<3$, יורדת: $x>3$

ד. $(0,0)$

33) א. כל x ב. $\min(-0.91,-0.67)$ ג. עולה: $x>-0.91$ יורדת: $x<-0.91$

ד. $(0,0)$

34) א. כל x ב. $\min\left(-1,\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$, $\max(1,2\sqrt{e})$ ג. עולה: $-1<x<1$ יורדת:

$x<-1$, $x>1$ ד. $(0,2)$ ה. $y=2$ ז. $m=\frac{2}{\sqrt{e}}$, $m=2\sqrt{e}$, $m=2$

35) א. $x\neq 0$ ב. $\min\left(\frac{1}{2},\frac{e^2}{4}\right)$ ג. עולה: $x>\frac{1}{2}$, יורדת: $0\neq x<\frac{1}{2}$

ד. אין

36) א. כל x ב. $\min\left(\frac{1}{2},\frac{e^{1.5}}{4}\right)$, $\max\left(\frac{1}{6},\frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$ ג. עולה: $x<\frac{1}{6}$, $x>\frac{1}{2}$ יורדת:

$\frac{1}{6}<x<\frac{1}{2}$ ד. $(0,1)$

37) א. $k=1$, $f(x)=\frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$ ב. $(-1,e^2)$

ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום $0<f(x)\le e^2$

38) א. $a=4$ ב. $x=\ln 2$ ג. $b=-5$ ד. $(0,0)$

39) א. $a=12$, $b=-12$ ב. עולות: $x<\ln 6$ יורדות: $x>\ln 6$

40) א. $f(x)=x^2e^{-\frac{1}{4}x^2}$, $a=1$, $b=0.25$ ב. $\max\left(-2,\frac{4}{e}\right)$, $\min(0,0)$

ג. $(0,0)$ ה. $0<k<\frac{4}{e}$

41) א. $a=\frac{1}{3}$ ב. כן: $\left(11,\frac{48}{e^{2\frac{2}{3}}}\right)$ ג. עולה: $1<x<11$ יורדת: $x<1$, $x>11$

ד. $(-1,0)$, $(7,0)$, $(0,-7e)$

42) א. $m=-6$ $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2-6}$ ב. $\max\left(-2,-\frac{1}{2e^4}\right)$, $\min\left(3,\frac{e^6}{3}\right)$ ג. $\left(0,-\frac{1}{6}\right)$

43) א. $x=0,-1.5$. נקודת הקיצון היא: $\min\left(-1.5,-3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$ ב. $y=0$

ד. 2 נקודות.

44) א. $a=7$ ב. $x=\ln 2$ ג. $b=10$ ד. לא.

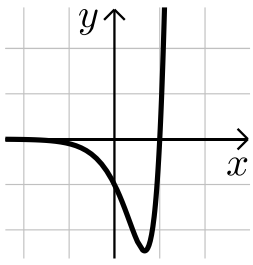
45) א. $a=2$ ב. עולה: $x>-\frac{1}{\ln 2}$ יורדת: $x<-\frac{1}{\ln 2}$ ג. $k=1$

ד. $(0,0)$

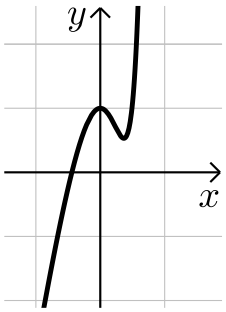
46) א. $y=-x\ln 81+7$ ג. $\min\left(\frac{1}{3},\sqrt[3]{243}\right)$

סקיצות לשאלות החקירה:

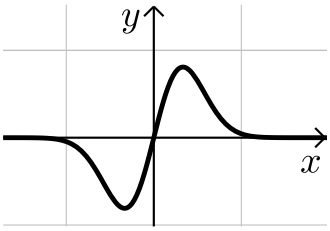
29)



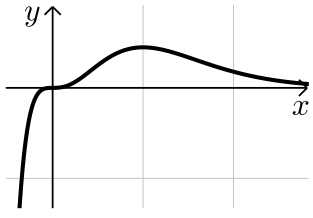
30)



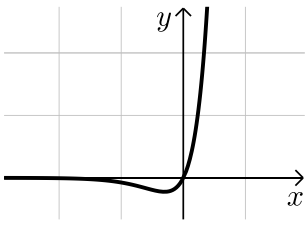
31)



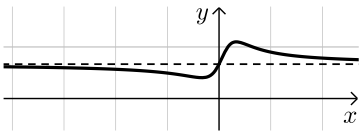
32)



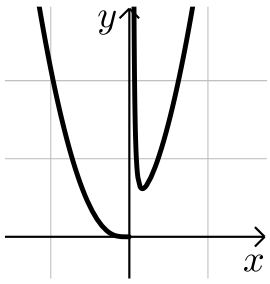
33)



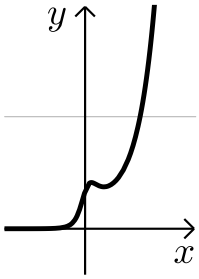
34)



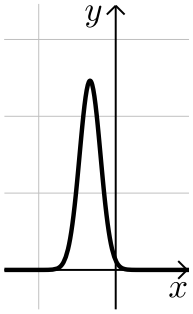
(35



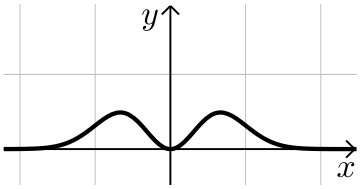
(36



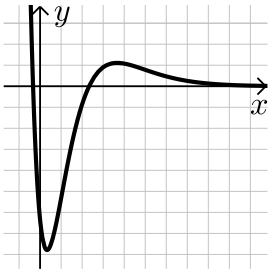
(37



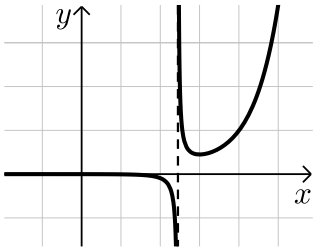
(40



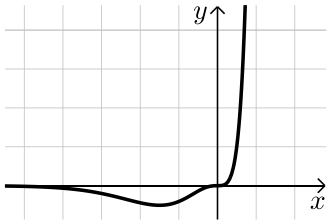
(41



(42



(43



מכינה במתמטיקה

פרק 30 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

תוכן העניינים

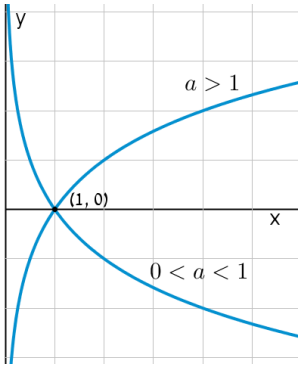
1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית 381
2. שימושי הנגזרת 386
3. חקירה של פונקציה לוגריתמית 387

הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

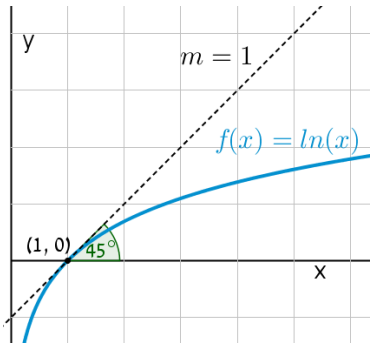
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה: $f(x)=\log_a x$ עבור $a>1$ ו- $0<a<1$:



תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה $x>0$.
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- x בנקודה $(1,0)$.
- עבור $a>1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור $0<a<1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x)=\ln x=\log_e x$ נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x הוא 1:



תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y=\log\left(f(x)\right)$ הוא: $f(x)>0$.

נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$
$y=\log_a f(x)$	$y'=\frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$
$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$
$y=\ln f(x)$	$y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א. $f(x)=3\ln x+4\ln(x+2)-\ln(5x-1)$ ב. $f(x)=\ln(x^2-3x)$

ג. $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x)=\ln(e^x+1)$

ה. $f(x)=\ln(\cos x)$ ו. $f(x)=\log_2 x+5\log_3(2x-1)$

2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x)=x\ln x$ ב. $f(x)=(3x+1)^2\ln x$ ג. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

ד. $f(x)=\frac{\ln x-2}{\ln x+2}$ ה. $f(x)=\sqrt{\ln x+x}$

3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x)=\ln^3 x$ ב. $f(x)=3\ln^2 x$

ג. $f(x)=x^2\ln^2 x$ ד. $f(x)=\frac{\ln^2 x+1}{(\ln x+1)^2}$

4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x)=\ln(x+2)$

ב. $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

ג. $f(x)=x^2\ln x$

ד. $f(x)=x^3\ln x$

ה. $f(x)=\ln e^{2x}$

ו. $f(x)=e^x\ln x$

ז. $f(x)=e^{-x^2}\ln x$

ח. $f(x)=x^2(2\ln x-1)$

ט. $f(x)=\ln(x^2)$

י. $f(x)=\ln(x^4)$

יא. $f(x)=(\ln x)^4$

יב. $f(x)=x\ln x-\ln x^2$

יג. $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

יד. $f(x)=\ln\sqrt{x}$

טו. $f(x)=\sqrt{\ln x}$

טז. $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

א. $f(x)=\ln\dfrac{x+2}{x}$

ב. $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$

ג. $f(x)=\ln\dfrac{x-3}{x+3}$

ד. $f(x)=\ln\dfrac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$

ה. $f(x)=\ln\sqrt{x^2-1}$

ו. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

ז. $f(x)=e^{\sqrt{\ln x}}$

ח. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$

ט. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

י. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+5x}{1-5x}}$

יא. $f(x)=\dfrac{\ln\sqrt[3]{x}}{x}$

יב. $f(x)=\dfrac{(\ln x)^3}{x}$

יג. $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x^2)}$

יד. $f(x)=\ln^2 x+\dfrac{1}{\ln^2 x}$

טו. $f(x)=\dfrac{x}{\ln^4 x}$

תשובות סופיות:

1) א. $f'(x)=\frac{3}{x}+\frac{4}{x+2}-\frac{5}{5x-1}$ ב. $f'(x)=\frac{2x-3}{x^2-3x}$ ג. $f'(x)=\frac{-2}{(x-1)(x+1)}$

ד. $f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ ה. $f'(x)=-\tan x$ ו. $f'(x)=\frac{1}{x\ln 2}+\frac{10}{(2x-1)\ln 3}$

2) א. $f'(x)=\ln x+1$ ב. $f'(x)=(3x+1)\left(6\ln x+\frac{3x+1}{x}\right)$ ג. $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

ד. $f'(x)=\frac{4}{x(\ln x+2)^2}$ ה. $f'(x)=\frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}}$.

3) א. $f'(x)=\frac{3\ln^2 x}{x}$ ב. $f'(x)=\frac{6\ln x}{x}$ ג. $f'(x)=2x\ln x(\ln x+1)$

ד. $f'(x)=\frac{2(\ln x-1)}{x(\ln x+1)^3}$.

4) א. $\frac{1}{x+2}$ ב. $\frac{2\ln x+2}{x}$ ג. $x(2\ln x+1)$

ד. $x^2(3\ln x+1)$ ה. 2 ו. $e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

ז. $e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-2x\ln x\right)$ ח. $4x\ln x$ ט. $\frac{2}{x}$ י. $\frac{4}{x}$

יא. $\frac{4(\ln x)^3}{x}$ יב. $\ln x+1-\frac{2}{x}$ יג. $\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}$

יד. $\frac{1}{2x}$ טו. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ טז. $\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

5) א. $-\frac{2}{x(x+2)}$ ב. $\frac{2}{x^2-1}$ ג. $\frac{6}{x^2-9}$

ד. $\frac{3}{x-5}-\frac{2}{x+1}$ ה. $\frac{x}{x^2-1}$ ו. $\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2}$

ז. $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$ ח. $\frac{1}{4-2x}$ ט. $\frac{1}{x^2-1}$

י. $\frac{5}{1-25x^2}$

יא. $\frac{1-3\ln\sqrt[3]{x}}{3x^2}$

יב. $\frac{3\ln^2 x-\ln^3 x}{x^2}$

יג. $\frac{\ln\left(x^2\right)-2}{\ln^2\left(x^2\right)}$

יד. $\frac{2\left(\ln^4 x-1\right)}{x\ln^3 x}$

טו. $\frac{\ln x-4}{\ln^5 x}$.

שימושי הנגזרת:

שאלות:

6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\ln x$ בנקודה $A(e,1)$.

7) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{\ln^2 x+a}{\ln x+b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e},-1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

8) הגרפים של הפונקציות $f(x)=\ln x$ ו- $g(x)=1$ נחתכים בנקודה A ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק ל- $f(x)$.
מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

9) לפונקציה $g(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x=e^2$.
מצא את משוואת המשיק.

10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=x\ln\left(x^2+1\right)$ בנקודה שבה $x=1$.

תשובות סופיות:

6) $y=\frac{1}{e}x$.

7) $a=2\ ,\ b=-2$.

8) $y=\frac{1}{e}x$.

9) $y=-\frac{2}{e^4}x+\frac{6}{e^2}$.

10) $y=\ln 2\cdot x+x-1$.

חקירה של פונקציה לוגריתמית:

שאלות:

11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\ln x$

ב. $f(x)=\ln\left(x^2\right)$

ג. $f(x)=\log_3\left(x^2-8x-20\right)$

ד. $f(x)=\ln\left(e^x-4\right)$

ה. $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x-1}$

ו. $f(x)=\dfrac{1}{\ln^2 x-2\ln x-3}$

ז. $f(x)=\sqrt{\ln x-1}$

12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=2\ln x-x^2$.

13) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=x^2\ln x$.

14) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=\dfrac{\sqrt{2\ln x-1}}{x}$.

15) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=\log_4^2 x-\log_2 x$.

16) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{a\ln x+b}{x}$. הנקודה $\left(e^2,\dfrac{1}{e^2}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

17) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{a\ln^2 x+b\ln x}{\left(\ln x+1\right)^2}$. הנקודה $\left(\sqrt[3]{e},-\dfrac{1}{8}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\ln(x-3)$.

19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\dfrac{1}{\ln x-1}$.

20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{2\ln x-1}{\ln x+1}$.

21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\ln x-2}{\ln^2 x-4}$.

22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^2-1}{\ln^2 x+1}$.

24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=x\ln x+2$.

25) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

26) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. $y=\frac{1}{2}x^2-4x+3\ln x$
ב. $y=x\ln x$
ג. $y=x\ln x-x$
ד. $y=\sqrt{x}\ln x$
ה. $y=x^2\ln x$
ו. $y=\ln\left(x^2+1\right)$

27) נתונה הפונקציה $f(x)=2x\ln^2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

28) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x}{\ln x-1}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. מצא לאלו ערכי k הישר $y=k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

29) נתונה הפונקציה $f(x)=\log_4^2 x-\log_2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

30) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\ln x}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\ln x$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ד. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$. ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור x, $(x_A=x_B)$.
מצא את שיעור ה-x של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

31) נתונה שתי הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{\ln x}{x}$, $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.
נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.

i. לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור x זהה.

iii. לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.

iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.

ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה-x שלהן זהה.
הוכח כי מכפלת שיעורי ה-y של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

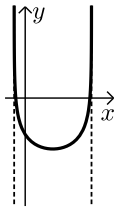
32) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\ln\left(x^2-6x-7\right)$.

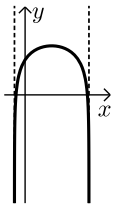
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

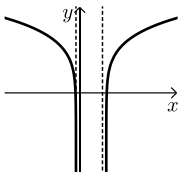
ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה-y?

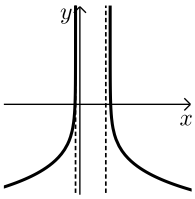
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. לפניך 4 גרפים: I , II , III ו-IV.
איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.

I.


II.


III.


IV.


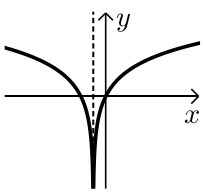
33) נתונה הפונקציה: $y=\ln\left(x^2+2x+1\right)$.

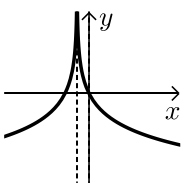
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

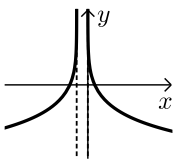
ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה-y?

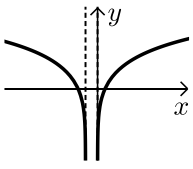
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. לפניך 4 גרפים: I , II , III ו-IV.
איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.

I.


II.


III.


IV.


ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

34) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=\ln(1-\ln x)$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

35) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\ln\frac{2x+1}{x-1}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ד. הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

36) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x\left(\ln^3 x+2\ln^2 x\right)$.

א. הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x)=\ln^3 x+5\ln^2 x+4\ln x$.

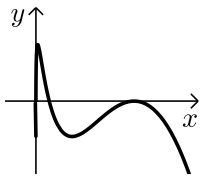
ב. מצא את התחום בו הפונקציה עולה.

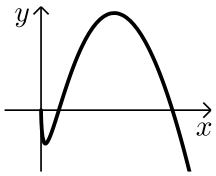
ג. ענה על השאלות הבאות:

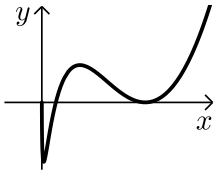
i. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

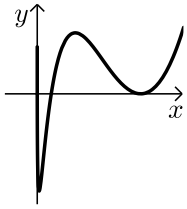
ii. מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.

I.


II.


III.


IV.


37) נתונה הפונקציה: $f(x)=\ln^3 x-3\ln x$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה: $g(x)=\ln x$.

38) ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה הבאה: $\ln(x+e)-\ln\left(x\sqrt{e}\right)=\ln 2-0.5$.

נתונה הפונקציה: $f(x)=\ln(x+e)-\ln\left(x\sqrt{e}\right)$.

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=e$.

39) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\frac{x+a}{\ln(x+a)}$, a פרמטר חיובי, $a\neq 1$.

א. הבע באמצעות a את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת $y'=0$.

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום: $x>e-2$. מצא את a.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x>-1$.

ד. נתון הישר: $y=k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של k עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

40) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\ln x+\frac{1}{x}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר y?
אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

11) א. $x>0$ ב. $x\neq 0$ ג. $x>10$ או $x<-2$ ד. $x>\ln 4$
ה. $0<x\neq e$ ו. $x>0$ וגם $x\neq e^3,e^{-1}$ ז. $x\geq e$.

12) $\max(1,-1)$.

13) $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{2e}\right)$.

14) $\min\left(\sqrt{e},0\right)$ קצה, $\max\left(e,\frac{1}{e}\right)$.

15) $\min(4,-1)$.

16) $a=1$, $b=-1$.

17) $a=1$, $b=-1$.

18) $x=3$.

19) נקודת אי הגדרה $(0,0)$, $y=0$, $x=e$.

20) נקודת אי הגדרה $(0,2)$, $x=\frac{1}{e}$, $y=2$.

21) נקודת אי הגדרה $\left(e^2,\frac{1}{4}\right)$; $(0,0)$, $x=\frac{1}{e^2}$, $y=0$.

22) $x=0$, $y=0$.

23) נקודת אי הגדרה $(0,0)$.

24) נקודת אי הגדרה $(0,2)$.

25) $\left(\sqrt{e^3},\frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$.

26) א. i. $x>0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min(3,\ln 27-7.5)$, $\max(1,-3.5)$ iv. עולה: $0<x<1$, $x>3$ יורדת: $1<x<3$.
ב. i. $x>0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min\left(e^{-1},-e^{-1}\right)$ iv. עולה: $x>e^{-1}$ יורדת: $0<x<e^{-1}$.
ג. i. $x>0$ ii. $(e,0)$ iii. $\min(1,-1)$ iv. עולה: $x>1$ יורדת: $0<x<1$
ד. i. $x>0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min\left(e^{-2},-\frac{2}{e}\right)$ iv. עולה: $x>e^{-2}$ יורדת: $0<x<e^{-2}$

ה. i. $x>0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{2e}\right)$ iv. עולה: $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$ יורדת: $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל x ii. $(0,0)$ iii. $\min(0,0)$ iv. עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$.

27) א. $x>0$ ב. $\min(1,0)$, $\max\left(\frac{1}{e^2},\frac{8}{e^2}\right)$

ג. עלייה: $x>1$ או $0<x<\frac{1}{e^2}$, ירידה: $\frac{1}{e^2}<x<1$. ד. $(1,0)$.

28) א. $0<x\neq e$ ב. $\min\left(e^2,e^2\right)$ ג. עלייה: $x>e^2$, ירידה:

$0<x<e^2$ וגם $x\neq e$ ד. אין. ו. $k>e^2$.

29) א. $x>0$ ב. $\min(4,-1)$ ג. עלייה: $x>4$, ירידה: $0<x<4$

ד. $(16,0)$, $(1,0)$.

30) א. $x\geq 1$ ב. מתקבל: $f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}>0$ ג. $(e,1)$, $(1,0)$.

ד. $x=\sqrt[4]{e}$.

31) א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $x>0$, $x\neq 1$ ותחום ההגדרה של $g(x)$ הוא: $x>0$.

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x=e$ אך עבור $f(x)$ מדובר במינימום ועבור $g(x)$ מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור $f(x)$: עולה: $x>e$ יורדת: $0<x<e$, $x\neq 1$.

ועבור $g(x)$: עולה: $0<x<e$ יורדת: $x>e$. iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה-y שלה הוא: $y=\frac{x}{\ln x}$ ו- $y=\frac{\ln x}{x}$.

נכפול: $y=\frac{x}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}=1$.

32) א. $x<-1$, $x>7$ ב. $x=-1,7$ ג. עולה: $x>7$ יורדת: $x<-1$.

ד. III. <u>הסבר</u>: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום.

באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

33) א. $x\neq -1$ ב. $x=-1$. ג. עולה: $x>-1$ יורדת: $x<-1$

ד. I. <u>הסבר</u>: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. $-2<x<0$, $x\neq -1$.

34) א. $0<x<e$. (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם: $1-\ln x>0$ וגם $x>0$).

ב. $f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}=-\frac{1}{x(1-\ln x)}<0$ - ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.

ג. $(1,0)$.

35) א. $x>1$, $x<-\frac{1}{2}$ ב. $x=-\frac{1}{2},1$ ג. $(-2,0)$

ד. מתקבל: $y'=\frac{-3}{(2x+1)(x-1)}<0$.

36) ב. $e^{-4}<x<e^{-1}$, $x>1$.

ג. i. 2 נקודות והן: $(1,0)$, $(e^{-2},0)$. הנקודה שבה: $x=0$ לא קיימת עקב ת.ה.

ii. $x>e^{-2}$, $x\neq 1$. ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.
שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

37) א. $x>0$ ב. $(1,0)$, $(e^{\sqrt{3}},0)$, $(e^{-\sqrt{3}},0)$. ג. $\min(e,-2)$, $\max(e^{-1},2)$

ה. $(1,0)$, $(e^{2},2)$, $(e^{-2},-2)$.

38) א. $x=e$ ב. מתקבל: $y'=\frac{-e}{x(x+e)}<0$ ג. $y=-\frac{1}{2e}x+\ln 2$.

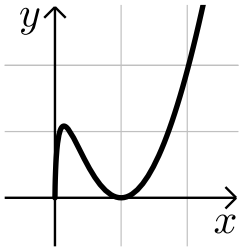
39) א. i. $x>-a$, $x\neq 1-a$ ii. $(e-a,e)$ iii. $\left(0,\frac{a}{\ln a}\right)$

iv. $x=1-a$ ב. $a=2$ ד. $k<e$.

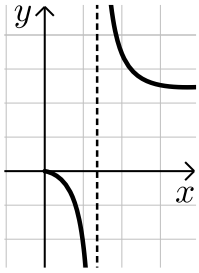
40) א. i. $x>0$ ii. $x=0$ ב. $\min(1,1)$ ג. עולה: $x>1$, יורדת: $0<x<1$.

סקיצות לשאלות:

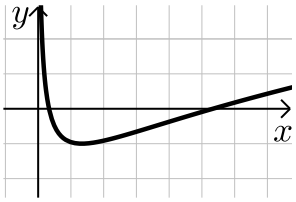
(27



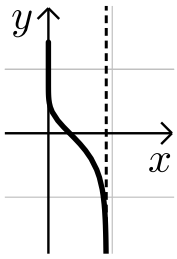
(28



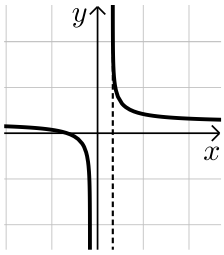
(29



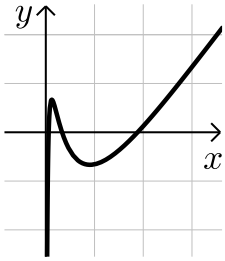
(34



(35



(37



(39

