

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה



תוכן העניינים

1.	חזרה כללית - מבוא לאלגברה.....	1
2.	חזרה כללית - משוואות אלגבריות.....	47
3.	חזרה כללית - אי שוויונים אלגבריים.....	69
4.	סטטיסטיקה - מבוא לסטטיסטיקה..... (ללא ספר)	
5.	סטטיסטיקה - מדדים מרכזיים - החציון..... (ללא ספר)	
6.	סטטיסטיקה - מדדים מרכזיים - הממוצע..... (ללא ספר)	
7.	סטטיסטיקה - מדדים מרכזיים - השכיח..... (ללא ספר)	
8.	סטטיסטיקה - שאלות מסכמות - מדדים מרכזיים..... (ללא ספר)	
9.	סטטיסטיקה - מדדים מרכזיים ומדדי פיזור..... (ללא ספר)	
10.	הסתברות - מבוא להסתברות..... (ללא ספר)	
11.	הסתברות של מאורע בודד..... (ללא ספר)	
12.	הסתברות של שני מאורעות..... (ללא ספר)	
13.	הסתברות - פרק מסכם..... (ללא ספר)	
14.	הסתברות - נושאים מתקדמים.....	85
15.	התפלגות נורמלית..... (ללא ספר)	
16.	העשרה - סימן הסכימה (סיגמה).....	109
17.	העשרה - הבינום של ניוטון.....	112

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 1 - חזרה כללית - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

1	מספרים מכוונים	1
5	חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים	2
7	סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים	3
8	שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים	4
14	כפל וחילוק שברים	5
16	חיבור וחסור שברים	6
20	בעיות יסודיות באחוזים	7
22	חזרה על תבניות מספר	8
24	כינוס איברים	9
26	פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים	10
28	פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר	11
30	פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים	12
33	פירוק הטרינום	13
35	שברים אלגברים	14
39	כפל וחילוק של שברים אלגברים	15
41	חיבור וחסור של שברים אלגברים	16
45	שברים כפולים	17

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2-, ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
 - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
 - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
 - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
 - כפל או חילוק של שני מספרים שונים סימן - התוצאה תהיה שלילית.

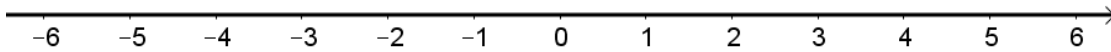
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}, 4, 1\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}, -2$$



(2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $-3-2$

א. $3+2$

ד. $-3+2$

ג. $3-2$

ו. $7+10$

ה. $-1-4$

ח. $-7+3$

ז. $-6+5$

(3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $5-8-12+17$

א. $5+7-23+1$

ד. $-4-11+2+9$

ג. $3-14+2+6$

ו. $-7-13+5-3$

ה. $6-21+3-7$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $4 \cdot (-7)$

א. $4 \cdot 9$

ד. $(-5) \cdot (-3)$

ג. $(-6) \cdot (-5)$

ו. $(-8) \cdot 5$

ה. $(-2) \cdot 8$

ח. $2 \cdot 3 \cdot 3$

ז. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$

י. $(-2) \cdot (-3) \cdot 3$

ט. $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$

יב. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2)$

יא. $2 \cdot 3 \cdot (-3)$

יד. $1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

יג. $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה :

א. $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ב. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot (-5)$

ג. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ד. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב. $(-30):3$

א. $(-25):(-5)$

ד. $(-32):(-4)$

ג. $40:(-10)$

ו. $4:(-16)$

ה. $(-6):18$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב. $\frac{42}{-6}$

א. $\frac{-60}{12}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

ג. $\frac{32}{-4}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות :

ב. $(-2) \cdot 0$

א. $0:5$

ד. $6:0$

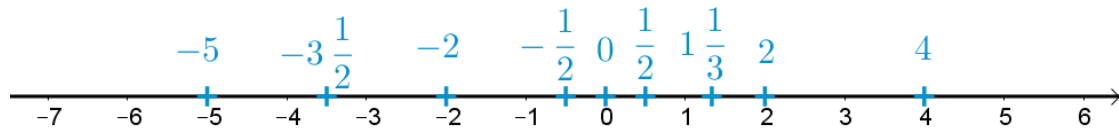
ג. $0 \cdot (-3) \cdot 4$

ו. $0-4$

ה. $0+4$

תשובות סופיות:

(1) להלן מערכת הצירים:



				א. 5	(2)
	ה. -5	ד. -1	ג. 1	ב. -5	
			ח. -4	ז. -1	ו. 17
ו. -18	ה. -19	ד. -4	ג. -3	ב. 2	א. -10 (3)
	ה. -16	ד. 15	ג. 30	ב. -28	א. 36 (4)
	י. 18	ט. 18	ח. 18	ז. -18	ו. -40
		יד. 16	יג. -16	יב. 36	יא. -18
		ד. -	ג. -	ב. +	א. + (5)
ו. $-\frac{1}{4}$	ה. $-\frac{1}{3}$	ד. 8	ג. -4	ב. -10	א. 5 (6)
		ד. 4	ג. -8	ב. -7	א. -5 (7)
ו. -4	ה. 4	ד. לא מוגדר	ג. 0	ב. 0	א. 0 (8)

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------|---------------|
| א. 3^2 | ב. 3^3 |
| ג. $(-3)^3$ | ד. $(-2)^3$ |
| ה. 4^3 | ו. 3^4 |
| ז. $(-5)^3$ | ח. 10^4 |
| ט. $-(-3)^4$ | י. -5^4 |
| יא. -4^3 | יב. $-(-2)^6$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------------|----------------------|
| א. $\sqrt[3]{-27}$ | ב. $\sqrt[4]{625}$ |
| ג. $\sqrt[4]{-16}$ | ד. $\sqrt[5]{-32}$ |
| ה. $-\sqrt[4]{81}$ | ו. $-\sqrt[3]{1000}$ |

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|-----------|----------|-------------|---------|---------|---------|
| (1) א. 9 | ב. 27 | ג. -27 | ד. -8 | ה. 64 | ו. 81 |
| ז. -125 | ח. 10000 | ט. -81 | י. -625 | יא. -64 | יב. -64 |
| (2) א. -3 | ב. 5 | ג. לא מוגדר | ד. -2 | ה. -3 | ו. -10 |

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$(-3)^2 : 9 - 2 \cdot (-4^2)$ (2)	$\sqrt{81} + 3 \cdot 2^3 - 40 : 8$ (1)
$3 + 4 \cdot [-3 + 4 \cdot (-2)] + \sqrt{10 + 6}$ (4)	$\sqrt{144} - 20 : 4 + 3 \cdot (-2)^2$ (3)
$-\sqrt{9} + 5^2 : (-4 - 1) - 24 : 12 \cdot 3$ (6)	$(-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3$ (5)
$\sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3$ (8)	$-2^5 : (-8) + 4^2 - 3 \cdot 5$ (7)
$(8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt[5]{243})$ (10)	$[6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5$ (9)
$\frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\}$ (11)	

תשובות סופיות:

-37 (4)	19 (3)	33 (2)	28 (1)
-21 (8)	5 (7)	-14 (6)	31 (5)
	20 (11)	-44 (10)	-16 (9)

שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ... שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים שלמים}}.\underbrace{YYY}_{\text{שברים שלמים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

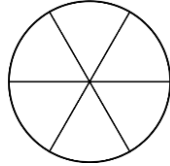
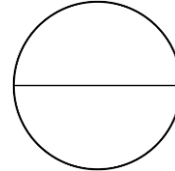
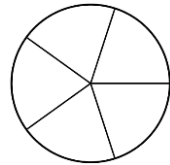
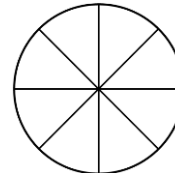
אחוזים - הגדרה:

השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45%, והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

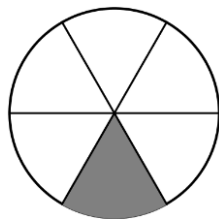
שאלות:

(1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

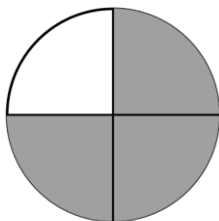
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגולא. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגולד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגולג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

(2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

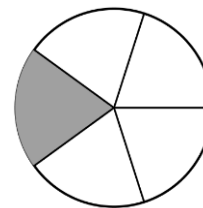
ב. שבר:



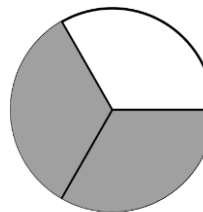
ד. שבר:



א. שבר:



ג. שבר:



(3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

(4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן :

א. $\frac{25}{30}$	ב. $\frac{10}{30}$	ג. $\frac{6}{24}$	ד. $\frac{4}{20}$
ה. $\frac{35}{56}$	ו. $\frac{24}{42}$	ז. $\frac{36}{48}$	ח. $\frac{33}{121}$

(5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים :

א. $-\frac{20}{3}$	ב. $\frac{19}{4}$	ג. $\frac{12}{5}$	ד. $\frac{22}{5}$
ה. $-\frac{34}{6}$	ו. $-\frac{50}{7}$	ז. $\frac{47}{8}$	ח. $\frac{60}{9}$

(6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים :

א. $1\frac{2}{3}$	ב. $3\frac{5}{6}$	ג. $4\frac{1}{2}$	ד. $6\frac{1}{4}$
ה. $11\frac{3}{4}$	ו. $-2\frac{5}{8}$	ז. $-6\frac{2}{7}$	ח. $12\frac{7}{9}$

(7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים :

א. $\frac{4}{10}$ או $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{7}{6}$ או $\frac{7}{8}$
ג. $\frac{5}{6}$ או $\frac{2}{3}$	ד. $\frac{7}{12}$ או $\frac{5}{18}$

(8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים :

א. 0.7	ב. 0.07	ג. 0.007	ד. 0.34
ה. 0.304	ו. 0.65	ז. 1.2	ח. 1.02
ט. 1.42	י. 3.5	יא. 6.03	יב. 5.125

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים :

א. $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{3}{100}$	ג. $\frac{3}{1000}$	ד. $\frac{23}{1000}$
ה. $\frac{1}{2}$	ו. $\frac{3}{4}$	ז. $\frac{2}{5}$	ח. $\frac{4}{25}$
ט. $\frac{7}{50}$	י. $\frac{3}{20}$	יא. $\frac{7}{8}$	יב. $\frac{9}{16}$
יג. $9\frac{1}{10}$	יד. $3\frac{1}{5}$	טו. $4\frac{7}{8}$	טז. $-4\frac{1}{16}$

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית (היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית) :

א. $\frac{2}{3}$	ב. $\frac{5}{6}$	ג. $\frac{3}{7}$	ד. $\frac{2}{11}$
------------------	------------------	------------------	-------------------

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים :

א. 25%	ב. 32%	ג. 64%	ד. 80%
ה. 120%	ו. 5%	ז. 300%	ח. 150%

12) המר משברים פשוטים לאחוזים :

א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{4}{5}$	ד. $\frac{7}{20}$
ה. $\frac{11}{40}$	ו. $\frac{70}{125}$	ז. $\frac{5}{6}$	ח. $\frac{4}{9}$

תשובות סופיות:

(1) תשובה מודגמת בסרטון.

$$(2) \quad \text{א. } \frac{1}{5} \quad \text{ב. } \frac{1}{6} \quad \text{ג. } \frac{2}{3} \quad \text{ד. } \frac{3}{4}$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80} \quad \text{ב. } \frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300} \quad \text{ג. } \frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700}$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{5}{6} \quad \text{ב. } \frac{1}{3} \quad \text{ג. } \frac{1}{4} \quad \text{ד. } \frac{1}{5} \quad \text{ה. } \frac{5}{8} \quad \text{ו. } \frac{4}{7}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{4} \quad \text{ח. } \frac{3}{11}$$

$$(5) \quad \text{א. } -6\frac{2}{3} \quad \text{ב. } 4\frac{3}{4} \quad \text{ג. } 2\frac{2}{5} \quad \text{ד. } 4\frac{2}{5} \quad \text{ה. } -5\frac{4}{6} \quad \text{ו. } -7\frac{1}{7}$$

$$\text{ז. } 5\frac{7}{8} \quad \text{ח. } 6\frac{2}{3}$$

$$(6) \quad \text{א. } \frac{5}{3} \quad \text{ב. } \frac{23}{6} \quad \text{ג. } \frac{9}{2} \quad \text{ד. } \frac{25}{4} \quad \text{ה. } \frac{47}{4} \quad \text{ו. } -\frac{21}{8}$$

$$\text{ז. } -\frac{44}{7} \quad \text{ח. } \frac{115}{9}$$

$$(7) \quad \text{א. } \frac{4}{10} \quad \text{ב. } \frac{7}{6} \quad \text{ג. } \frac{5}{6} \quad \text{ד. } \frac{7}{12}$$

$$(8) \quad \text{א. } \frac{7}{10} \quad \text{ב. } \frac{7}{100} \quad \text{ג. } \frac{7}{1000} \quad \text{ד. } \frac{17}{50} \quad \text{ה. } \frac{38}{125} \quad \text{ו. } \frac{13}{20}$$

$$\text{ז. } 1\frac{1}{5} \quad \text{ח. } 1\frac{1}{50} \quad \text{ט. } 1\frac{21}{50} \quad \text{י. } 3\frac{1}{2} \quad \text{יא. } 6\frac{3}{100} \quad \text{יב. } 5\frac{1}{8}$$

$$(9) \quad \text{א. } 0.3 \quad \text{ב. } 0.03 \quad \text{ג. } 0.003 \quad \text{ד. } 0.023 \quad \text{ה. } 0.5 \quad \text{ו. } 0.75$$

$$\text{ז. } 0.4 \quad \text{ח. } 0.16 \quad \text{ט. } 0.14 \quad \text{י. } 0.15 \quad \text{יא. } 0.875$$

$$\text{יב. } 0.5625 \quad \text{יג. } 9.1 \quad \text{יד. } 3.2 \quad \text{טו. } 4.875 \quad \text{טז. } -4.0625$$

$$(10) \quad \text{א. } 0.\bar{6} \quad \text{ב. } 0.8\bar{3} \quad \text{ג. } 0.428 \quad \text{ד. } 0.1\bar{8}$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{4} \quad \text{ב. } \frac{8}{25} \quad \text{ג. } \frac{16}{25} \quad \text{ד. } \frac{4}{5} \quad \text{ה. } 1\frac{1}{5} \quad \text{ו. } \frac{1}{20}$$

$$\text{ז. } 3 \quad \text{ח. } 1\frac{1}{2}$$

12) א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
 - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
 - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
 - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$	ב. $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$	ג. $\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10}$
ד. $3 \cdot \frac{4}{5}$	ה. $6 \cdot \frac{2}{3}$	ו. $\frac{12}{25} \cdot 5$
ז. $1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$	ח. $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$	ט. $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{2}{5}$
י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$	יא. $\frac{4}{5^3}$	יב. $\frac{4^3}{5}$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$	ב. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	ג. $\frac{3}{25} : \frac{7}{10}$
ד. $8 : \frac{2}{9}$	ה. $10 : \frac{2}{3}$	ו. $\frac{5}{6} : 3$
ז. $\frac{2}{5} : 5$	ח. $3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$	ט. $2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{15}$

תשובות סופיות:

א. $\frac{9}{20}$	ב. $\frac{5}{21}$	ג. $\frac{8}{45}$	ד. $2\frac{2}{5}$	ה. 4	ו. $2\frac{2}{5}$
ז. $3\frac{3}{5}$	ח. $15\frac{2}{5}$	ט. $8\frac{8}{35}$	י. $\frac{64}{125}$	יא. $\frac{4}{125}$	יב. $12\frac{4}{5}$
א. $\frac{9}{10}$	ב. $1\frac{1}{2}$	ג. $\frac{6}{35}$	ד. 36	ה. 15	ו. $\frac{5}{18}$
ז. $\frac{2}{25}$	ח. $\frac{2}{3}$	ט. 2			

חיבור וחיסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b , המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.
 דוגמא: $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = \frac{-1}{7}$, $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$
- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.
 דוגמא: $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3-10}{12} = -\frac{7}{12}$, $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$
- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.
 דוגמא: $3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$
 חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.
 דוגמא: $3 - \frac{1}{4} = 2\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$
 דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

- חיבור וחסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

$$\text{דוגמא: } 3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} = \frac{17}{5} + \frac{13}{6} = \frac{17 \cdot 6}{30} + \frac{13 \cdot 5}{30} = \frac{102 + 65}{30} = \frac{167}{30} = 5\frac{17}{30}$$

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

$$\text{דוגמא: } 2\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3} = (2 - 5) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = -3 + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = -3 + \frac{5}{12} = -2\frac{7}{12}$$

שאלות:

- (1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3	ב. 2 ו-4	ג. 3 ו-5	ד. 6 ו-10
ה. 4 ו-10	ו. 4 ו-6	ז. 3, 5 ו-10	ח. 2, 3 ו-8

- (2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$	ב. $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$
ג. $\frac{4}{13} + \frac{9}{13}$	ד. $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$
ה. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$	ו. $\frac{8}{9} - \frac{7}{9}$
ז. $\frac{2}{12} - \frac{5}{12}$	ח. $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}$
ט. $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$	י. $\frac{7}{15} + \frac{8}{15} - \frac{6}{15}$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6} - \frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{3}{5}$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2 + \frac{5}{6}$

ב. $2 - \frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$

ז. $2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14} : \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - \frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4} - 6 : \frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5} : \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$

תשובות סופיות:

12. ו.	20. ה.	30. ד.	15. ג.	4. ב.	6. א. (1
				24. ח.	30. ז.
$\frac{1}{9}$. ו.	$\frac{1}{2}$. ה.	$1\frac{3}{4}$. ד.	1. ג.	$\frac{7}{9}$. ב.	$\frac{4}{5}$. א. (2
		$\frac{3}{5}$. י.	$1\frac{5}{8}$. ט.	$-\frac{4}{5}$. ח.	$-\frac{1}{4}$. ז.
$3\frac{5}{6}$. ו.	5. ה.	$-\frac{1}{8}$. ד.	$\frac{7}{12}$. ג.	$\frac{7}{10}$. ב.	$1\frac{5}{6}$. א. (3
				$-\frac{1}{10}$. ח.	$\frac{19}{21}$. ז.
$-\frac{5}{8}$. ו.	$7\frac{11}{12}$. ה.	$1\frac{5}{12}$. ד.	$3\frac{1}{12}$. ג.	$1\frac{1}{6}$. ב.	$2\frac{5}{6}$. א. (4
				$-\frac{1}{20}$. ח.	$2\frac{13}{18}$. ז.
	$3\frac{5}{18}$. ה.	$2\frac{5}{6}$. ד.	$-13\frac{3}{4}$. ג.	$1\frac{1}{10}$. ב.	$2\frac{11}{24}$. א. (5

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $48 = 120 \cdot \frac{40}{100}$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48.**

שאלות:

- (1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
 - א. כמה בנות בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
 - א. כמה תלמידים בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (3) מחיר בגדים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
 - א. מהו מחירו בסוף העונה?
 - ב. מה גודל ההנחה?
- (4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
 - א. מה מחירו הסופי?
 - ב. מה גודל ההתייקרות?
- (5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.

בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?
- (6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.

מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

(7) ענה על השאלות הבאות :

- א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.
מה אחוז הבנים בקהל?
- ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.
מה אחוז הבנות בכיתה?
- ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?
- ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ו. מחיר מוצר הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

תשובות סופיות:

- | | | |
|-----|----------------|-------------|
| (1) | א. 18 בנות. | ב. 12 בנים. |
| (2) | א. 40 תלמידים. | ב. 12 בנים. |
| (3) | א. 240 ₪ | ב. 60 ₪ |
| (4) | א. 540 ₪ | ב. 40 ₪ |
| (5) | 4.9755 ₪ | |
| (6) | 400 ₪ | |
| (7) | א. 88% | ב. 60% |
| | ג. 50% | ד. 33.33% |
| | ה. 33.33% | ו. 25% |

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).

ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3 \cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| א. $2x+5$ כאשר $x=3$ | ב. x^2+3x כאשר $x=2$ |
| ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$ | ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$ |
| ה. x^3+1 כאשר $x=-2$ | ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$ |
| ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$ | ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

- | |
|--|
| א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$ |
| ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$ |

(3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר :

א. $a^2 + 2ab + b^2$	עבור : $a = 3, b = -5$
ב. $(x-3)^2 + 3x^2b$	עבור : $x = 5, b = -1$
ג. $-x^3 - 2xy + y^4$	עבור : $x = -2, y = -1$
ד. $\frac{(a-2c)^4}{a} - a^2$	עבור : $a = 2, c = -2$
ה. $\frac{4a^2 - 3b}{c}$	עבור : $a = -1, b = 2, c = -4$
ו. $\sqrt{c-3a}$	עבור : $c = 13, a = -1$ ועבור : $c = 82, a = \frac{1}{3}$
ז. $\frac{p^3 + 2\sqrt{q+1}}{m}$	עבור : $p = -5, q = 48, m = 3$

תשובות סופיות:

(1)	א. 11	ב. 10	ג. -12	ד. -65	ה. -7	ו. 5
	ז. -10	ח. 45				
(2)	א. $\frac{10}{27}$	ב. $5\frac{22}{27}$				
(3)	א. 4	ב. -71	ג. 5	ד. 644	ה. $\frac{1}{2}$	
				ז. -37		
	ו. הצבה ראשונה : 4, הצבה שניה : 9					

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x + 6x - 5x = (3 + 6 - 5)x = 4x$.
 איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.
 כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

כנס איברים דומים:

- | | |
|---|--|
| $9x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x^2$ (2) | $5x + 7x - 4x$ (1) |
| $x^2y - 3yx^2 + x^2y$ (4) | $-10xy + 15xy + xy - 2yx$ (3) |
| $2x^2 - 3m^2 - x^2 + 3m^2$ (6) | $8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2$ (5) |
| $mn^2 + 4m^2n + 6n^2m - 10nm^2 + mn^2$ (8) | $3xy + y - 30y + 6yx - 7y$ (7) |
| $y^2 + x^2 - 5x^2 + 5y^2 + 4x^2 - 6y^2$ (10) | $-6 + x^3 + 4 - 3x^3 + 17x^3 - 17$ (9) |
| $5xy + 2x - 3yx - x + 1$ (12) | $7x^2 - 3x - 4x + 2$ (11) |
| $x + xy + y - 6yx - 6y - 6x$ (14) | $3 - x - x^2 + 4x + 5x^2 - 12$ (13) |
| $ab^2 + 6ba^2 - 6b + 16a^2b + 3b - 6b^2a$ (16) | $mn + n - 5m + 5nm - 14n + 3m$ (15) |
| $4x^2z + 6xz^2 - 6 - xz^2 + 12 + 10zx^2$ (18) | $z^3 - 4z^2 + 7 - z^3 - 8 + 8z^2$ (17) |
| $x^3 - 3x - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$ (20) | $2 - x^3 - 3 - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2$ (19) |
| $12x^2y^3 + 13a^2 - 20x^2y^3 + 2a^2$ (22) | $2a^2b + 3x^2y + 5a^2b + 10x^2y$ (21) |
| $-2x^3y + 5x^2 - 4yx^3 - 6x^2$ (24) | $2y^2 - 4x^3y^2 - 10y^2 - x^3y^2$ (23) |
| $5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2$ (26) | $2a^2b + 2b + 3a^2 + 5b$ (25) |
| $-12x^2 + 2y^2 + 3x^2y + 14xy^2 - 5xy^2 - 6y^2 + 2xy + 11x^2 + x^2y - 9xy$ (27) | |
| $21x^3y^3 + x^2y^2 - 3xy^3 + x^3y - 15x^2y^2 - 7x^3y + 12x^3y^3 - 4xy^3 + 4xy^3 - 6x^3y$ (28) | |

תשובות סופיות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------|---|
| $4xy$ (3) | $2x^2$ (2) | $8x$ (1) |
| x^2 (6) | $4a^2 - a$ (5) | $-x^2y$ (4) |
| $15x^3 - 19$ (9) | $8mn^2 - 6nm^2$ (8) | $9xy - 36y$ (7) |
| $2xy + x + 1$ (12) | $7x^2 - 7x + 2$ (11) | 0 (10) |
| $-13n - 2m + 6mn$ (15) | $-5x - 5y - 5xy$ (14) | $4x^2 + 3x - 9$ (13) |
| $14x^2z + 5xz^2 + 6$ (18) | $4z^2 - 1$ (17) | $-5ab^2 + 22a^2b - 3b$ (16) |
| $7a^2b + 13x^2y$ (21) | $-3x^2 - x$ (20) | $-3x^2 + 2x - 3$ (19) |
| $-6x^3y - x^2$ (24) | $-8y^2 - 5x^3y^2$ (23) | $-8x^2y^3 + 15a^2$ (22) |
| | $25a^2b - 22ab^2$ (26) | $2a^2b + 3a^2 + 7b$ (25) |
| | | $-x^2 - 4y^2 + 4x^2y + 9xy^2 - 7xy$ (27) |
| | | $33x^3y^3 - 14x^2y^2 - 3xy^3 - 12x^3y$ (28) |

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

$$\bullet a(b+c) = ab+ac$$

$$\bullet (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x \cdot 3x$	ב. $-4x \cdot (-7x)$	ג. $-2x \cdot (-4x) \cdot (-3)$
ד. $8m^2 \cdot 4m^3$	ה. $3a^3 \cdot (-2a^2)$	ו. $-b \cdot 4b^2 \cdot \frac{b^2}{2}$
ז. $a \cdot 3b$	ח. $4a^2 \cdot 7b^2$	ט. $ab \cdot (-2a^2b)$

(2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$	ב. $2(-3x^2+5x-1)$
ג. $(7x-2)4$	ד. $(1-2x)(-2)$
ה. $a(3a-1)$	ו. $b(b^2-3b+4)$
ז. $2x(5x+3)$	ח. $5x(x^2+2x-3)$
ט. $3t^2(4t-t^2+6)$	י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$	ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$
ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$	ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

$$\begin{aligned} & \text{ה. } (3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2 \\ & \text{ו. } 3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7 \end{aligned}$$

(4) פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{aligned} & \text{א. } (x-1)(x+2) \quad \text{ב. } (x+3)(x-7) \\ & \text{ג. } (3-x)(x+4) \quad \text{ד. } (3x+4)(5x+1) \\ & \text{ה. } 3(4x+1)(2x-3) \quad \text{ו. } -2(3x-1)(5-2x) \end{aligned}$$

(5) פשט את ערכי הביטויים הבאים :

$$\begin{aligned} & \text{א. } (x-1)(x+3)+2(3-x) \\ & \text{ב. } (a+4)(a-2)-(a+5)(a-3) \\ & \text{ג. } (2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6) \\ & \text{ד. } -x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2) \end{aligned}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{aligned} & \text{(1) א. } 6x^2 \quad \text{ב. } 28x^2 \quad \text{ג. } -24x^2 \quad \text{ד. } 32m^5 \quad \text{ה. } -6a^5 \quad \text{ו. } -2b^5 \\ & \quad \text{ז. } 3ab \quad \text{ח. } 28a^2b^2 \quad \text{ט. } -2a^3b^2 \\ & \text{(2) א. } 6x-8 \quad \text{ב. } -6x^2+10x-2 \quad \text{ג. } 28x-8 \quad \text{ד. } -2+4x \\ & \quad \text{ה. } 3a^2-a \quad \text{ו. } b^3-3b^2+4b \quad \text{ז. } 10x^2+6x \quad \text{ח. } 5x^3+10x^2-15x \\ & \quad \text{ט. } 12t^3-3t^4+18t^2 \quad \text{י. } 10d^5-7.5d^2 \\ & \text{(3) א. } 6x-6 \quad \text{ב. } 13x-6 \quad \text{ג. } -6x+11 \quad \text{ד. } x+9 \quad \text{ה. } -3x^2+33x-28 \\ & \quad \text{ו. } 10y^2+32y-27 \\ & \text{(4) א. } x^2+x-2 \quad \text{ב. } x^2-4x-21 \quad \text{ג. } -x^2-x+12 \\ & \quad \text{ד. } 15x^2+23x+4 \quad \text{ה. } 24x^2-30x-9 \quad \text{ו. } 12x^2-34x+10 \\ & \text{(5) א. } x^2+3 \quad \text{ב. } 7 \quad \text{ג. } 18m^2-6m-39 \quad \text{ד. } -3x^5y^3+3x^4y^2 \end{aligned}$$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$	ב. $(x+2)^2$	ג. $(4x+5)^2$
ד. $(6x+2)^2$	ה. $(7x+y)^2$	ו. $(5x+2y)^2$
ז. $(x^2+7)^2$	ח. $(x^2+y^2)^2$	ט. $(x^3+2y^2x)^2$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$	ב. $(x-2)^2$	ג. $(5-x)^2$
ד. $(6x-1)^2$	ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$	ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$
ז. $(3m-2n)^2$	ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$	ט. $(x^2y^2-7)^2$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$	ב. $(3+x)(x-3)$
ג. $(3x-1)(3x+1)$	ד. $(5-7x)(7x+5)$
ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$	ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$
ז. $(x^2+y)(x^2-y)$	ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

(4) פשט את הביטויים הבאים :

א. $(x+1)(x+2)-3x$ ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$
 ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$ ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$
 ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$
 ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

תשובות סופיות:

(1) א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$
 ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$
 ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$
 (2) א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$
 ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$
 ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$
 (3) א. x^2-25 ב. x^2-9 ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$
 ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. x^4-y^2 ח. $9a^4b^6-16$
 (4) א. x^2+2 ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$
 ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:

○ הוצאת מספר משותף: $2x - 8 = 2(x - 4)$

○ הוצאת אות משותפת: $x^2 - 12x = x(x - 12)$

○ הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2 - 21x = 3x(x - 7)$

- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:

○ נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

○ נוסחה להפרש ריבועים: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

שאלות:

- (1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x - 12$ ב. $6y - 4$

ג. $20 - 8a$ ד. $4a^3 + 8b$

ה. $75m^2 + 25m + 15$ ו. $40a^2 - 8b^2 + 64c^2$

- (2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $y^2 + 5y$ ב. $3x - 11x^3$

ג. $6y^2 + 5y^3 + 4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7 - \frac{1}{4}a^5 + a^3$

(3) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

- | | |
|--------------------------------|---------------------------|
| א. $2x^2 - 8x$ | ב. $3t^2 + 12t$ |
| ג. $5n^3 - 20n^2 + 50n$ | ד. $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$ |
| ה. $4x^2y^2 + 16x^2y - 20xy^2$ | ו. $27mn - 3n^2m + 9n^3m$ |

(4) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| א. $x^2 + 10x + 25$ | ב. $x^2 + 12x + 36$ |
| ג. $y^2 - 18y + 81$ | ד. $y^2 - 22y + 121$ |
| ה. $4x^2 + 4x + 1$ | ו. $16y^2 - 8y + 1$ |
| ז. $9x^2 - 24x + 16$ | ח. $25x^2 + 70x + 49$ |

(5) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

- | | |
|-----------------|--------------------|
| א. $r^2 - 25$ | ב. $x^2 - 81$ |
| ג. $25y^2 - 49$ | ד. $121x^2 - 1$ |
| ה. $x^2y^2 - 4$ | ו. $9y^4 - 169x^4$ |

(6) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר :

- | | |
|--------------|------------------------------|
| א. $y - y^3$ | ב. $x^3 - 10x^2 + 25x$ |
| ג. $m^4 - 1$ | ד. $196x^4 - 140x^3 + 25x^2$ |

תשובות סופיות:

- (1) א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$
- ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$
- (2) א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$
- ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$
- (3) א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$
- ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$
- (4) א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$
- ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$
- (5) א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$
- ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$
- (6) א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$
- ד. $x^2(14x-5)^2$

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: $ax^2 + bx + c$ כאשר a, b ו- c הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו- m_2 , שמקיימים: $m_1 \cdot m_2 = ac$ ו- $m_1 + m_2 = b$.
לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2 + bx + c = ax^2 + m_1x + m_2x + c$.
השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underline{ax^2 + m_1x} + \underline{m_2x + c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו- m_2 באופן

הבא: $m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום

כמכפלה: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)(x - m_2)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$ אז

נכתוב: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

(1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. $x^2 + 5x + 4$	ב. $x^2 - 8x + 15$	ג. $x^2 - 33x + 62$
ד. $2x^2 + 7x - 15$	ה. $3x^2 - 11x + 6$	ו. $6x^2 + 5x + 1$
ז. $2x^2 + x - 6$	ח. $x^2 - 18x + 81$	ט. $x^2 + 2x + 8$

(2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

א. $6x^2 + 5x + 1$	ב. $x^2 + 5x + 4$
ג. $4x^2 + 20x + 25$	ד. $3x^2 - x + 20$

תשובות סופיות:

- (1) א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$
- ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$
- ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.
- (2) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

שברים אלגברים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

$$\text{דוגמא לשברים אלגבריים: } \frac{x+1}{x+2}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{4}{x-x^3}$$

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את

$$\text{הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: } \frac{3x+5}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

$$\text{דוגמא: השבר } \frac{1}{x+4} \text{ לא מוגדר כאשר } x = -4 \text{ מכיוון שמתקבל: } \frac{1}{0}$$

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x \neq -4$ ומשמעו היא ש- x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט -4, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

$$\bullet \text{ צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: } \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: } \frac{3x-15}{x^2-10x+25} = \frac{3\cancel{(x-5)}}{(\cancel{x-5})^2} = \frac{3 \cdot 1}{x-5} = \frac{3}{x-5}$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י פירוק טרינום: } \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים :

א. $\frac{x+4}{x+3}$	ב. $\frac{5}{x-6}$
ג. $\frac{x+7}{2x-8}$	ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$
ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$	ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$
ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$	ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

(2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע) :

א. $\frac{ax}{a}$	ב. $\frac{a-x}{a}$
ג. $\frac{a-ax}{a}$	ד. $\frac{x+1}{y+1}$
ה. $\frac{x}{x+y}$	ו. $\frac{6x}{6y}$
ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$	ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$
ט. $\frac{4x^2y}{xy}$	י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

(3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם :

א. $\frac{3x+12}{x+4}$	ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$
ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$	ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$
ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$	ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$
ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$	ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

(4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2 + 10x + 25}{2x + 10}$	ב. $\frac{8n - n^2}{n^2 - 16n + 64}$
ג. $\frac{z^3 - 4z^2}{2z^2 - 16z + 32}$	ד. $\frac{4m^2 + 20m + 25}{4m^2 + 10m}$
ה. $\frac{18y^2 - 24y + 8}{2y - 3y^2}$	ו. $\frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2}{3ab + 6b^2}$

(5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10}$	ב. $\frac{m^2 - 12m + 32}{m - 4}$
ג. $\frac{4y - 10}{2y^2 + y - 15}$	ד. $\frac{3z^2 + 26z + 16}{3z + 2}$
ה. $\frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 9x^2}$	ו. $\frac{9n^2 - 12n}{4 + 5n - 6n^2}$
ז. $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6}$	ח. $\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + x - 56}$
ט. $\frac{3a^2b - 10ab^2 + 3b^3}{-3a^3b + 11a^2b^2 - 6ab^3}$	י. $\frac{m^3n - m^2n^2 - m^2 + mn}{2m^2n^3 + mn^2 - 3n}$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x \neq -3 \quad \text{ב. } x \neq 6 \quad \text{ג. } x \neq 4 \quad \text{ד. } x \neq 0, x \neq 4$$

$$\text{ה. } x \neq -1 \quad \text{ו. } x \neq -2, x \neq 2 \quad \text{ז. } y \neq 0, y \neq -1, y \neq 1$$

$$\text{ח. } x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$$

$$(2) \quad \text{א. } x \quad \text{ב. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ג. } 1-x$$

$$\text{ד. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ה. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ו. } \frac{x}{y} \quad \text{ז. } \frac{x}{y}$$

$$\text{ח. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ט. } 4x \quad \text{י. לא ניתן לצמצם}$$

$$(3) \quad \text{א. } x \neq -4, 3 \quad \text{ב. } \frac{m}{4}, m \neq -4 \quad \text{ג. } \frac{2}{a}, a \neq 0, 6$$

$$\text{ד. } -\frac{x}{3}, x \neq 5 \quad \text{ה. } -3, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{ו. } \frac{2x^2}{3}, x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{y(y-3)}, y \neq 0, 3 \quad \text{ח. } \frac{3z^2 - 12z + 4}{z+5}, z \neq 0, -5$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{x+5}{2}, x \neq -5 \quad \text{ב. } \frac{n}{8-n}, n \neq 8 \quad \text{ג. } \frac{z^2}{2(z-4)}, z \neq 4$$

$$\text{ד. } \frac{2m+5}{2m}, m \neq 0, -\frac{5}{2} \quad \text{ה. } \frac{2(2-3y)}{y}, y \neq 0, \frac{2}{3} \quad \text{ו. } \frac{a(a+2b)}{3b}, b \neq 0, a \neq -2b$$

$$(5) \quad \text{א. } \frac{1}{x-5}, x \neq 5, -2 \quad \text{ב. } m-8, m \neq 4 \quad \text{ג. } \frac{2}{y+3}, x \neq -3, \frac{5}{2}$$

$$\text{ד. } z+8, z \neq -\frac{2}{3} \quad \text{ה. } \frac{x-4}{x^2}, x \neq 0, -9 \quad \text{ו. } \frac{-3n}{2n+1}, n \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$$

$$\text{ז. } \frac{x+2}{x+3}, x \neq -2, -3 \quad \text{ח. } \frac{x-7}{x+8}, x \neq 7, -8$$

$$\text{ט. } \frac{3a-b}{a(2b-3a)}, a \neq 0, b \neq 0, a \neq 3b, 2b \neq 3a \quad \text{י. } \frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}, mn \neq 1, -\frac{3}{2}, n \neq 0$$

כפל וחילוק של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.
חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3x+3} = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3(x+1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{3x}$
- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y} : \frac{12}{y^2+y} = \frac{4x}{y} \cdot \frac{y^2+y}{12} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{12}_3} \cdot \frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_3} = \frac{x(y+1)}{3}$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

- | | |
|---|---|
| א. $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8}$ | ב. $\frac{x}{3} \cdot \frac{9}{x^2}$ |
| ג. $7y \cdot \frac{5}{y^2}$ | ד. $6x^2 \cdot \frac{3}{40x}$ |
| ה. $(x^2 + 3x) \cdot \frac{2}{3x+9}$ | ו. $(a^2 - 25) \cdot \frac{20}{5a+25}$ |
| ז. $\frac{w^2-9}{w} \cdot \frac{w^2}{2w+6}$ | ח. $\frac{y+4}{y^2+16} \cdot \frac{y^2-16}{2y+8}$ |
| ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90} \cdot \frac{12}{2z-10}$ | י. $\frac{5n^2}{n^2-121} \cdot \frac{2n^2+44n+242}{n+2} \cdot \frac{n^2+4n+4}{n}$ |

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8} : \frac{x}{6}$	ב. $\frac{y}{25} : \frac{5}{y}$
ג. $a^2 : \frac{1}{6a}$	ד. $\frac{5}{6a} : a^2$
ה. $(d^2 - 3d) : \frac{5d - 15}{5d}$	ו. $\frac{t}{t+4} : \frac{3t}{t+4}$
ז. $\frac{y^2 + 8y + 16}{8y^2} : \frac{y^2 - 16}{7y^2}$	ח. $\frac{a^2 - 64}{a^2 - 36} : \frac{a + 8}{a + 6}$

תשובות סופיות:

א. $\frac{x^2}{24}$	ב. $\frac{3}{x}$	ג. $\frac{35}{y}$	ד. $\frac{9x}{20}$	ה. $\frac{2x}{3}$	(1)
ו. $4(a-5)$	ז. $\frac{w(w-3)}{2}$	ח. $\frac{y^2 - 16}{2y^2 + 32}$	ט. $\frac{z+15}{z-5}$	י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$	
א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{y^2}{125}$	ג. $6a^3$	ד. $\frac{5}{6a^3}$	ה. d^2	ו. $\frac{1}{3}$
ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$	ח. $\frac{a-8}{a-6}$				

חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים. נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים. כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף. לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת. דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{1+(x+1)}{x} = \frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2 + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = \frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-3x} = \frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6} + \frac{a-5}{6}$

ג. $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3+4x}{x+1}$

ב. $\frac{5}{x} + \frac{4x+3}{x}$

ד. $\frac{7z}{2z-3} - \frac{4z}{2z-3} - \frac{z+3}{2z-3}$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab} - \frac{5}{bc}$

ג. $\frac{c}{ab} - \frac{ad}{bc} + \frac{2b}{cd}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{3}{y+1}$

ב. $\frac{1}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xz}$

ד. $-\frac{5}{x} + \frac{x+1}{xy^2}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)} - \frac{2}{z(z-2)}$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $1 - \frac{2}{x}$

ג. $2 + \frac{2}{x+1}$

ה. $\frac{a+1}{a^2} - \frac{3-a}{4a} - 3$

ב. $1 + \frac{3}{y^2}$

ד. $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

ו. $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x}$

ג. $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$

ב. $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y}$

ד. $\frac{1}{z+3} + \frac{2}{3z} - \frac{3}{z}$

(5) פשט את הביטויים הבאים :

$$\text{א. } \frac{24}{a^2-9} + \frac{4}{a+3}$$

$$\text{ב. } \frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{(x+4)^2}$$

$$\text{ג. } \frac{y}{(y-2)^2} + \frac{3y}{4-y^2}$$

$$\text{ד. } \frac{3z}{z^2+4z+3} - \frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x-1}{x^2+3x-40} + \frac{2}{-x^2+8x-15}$$

$$\text{ו. } \frac{2a+3}{2a^2+15a+7} + \frac{a+3}{a^2+14a+49}$$

$$\text{ז. } \frac{x}{x-3} + \frac{9-x}{x^2-8x+15}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{a-b} + \frac{2}{a+2b} - \frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$$

(6) פשט את הביטויים הבאים :

$$\text{א. } \frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{8} + \frac{9}{x+1} \cdot \frac{x+1}{18}$$

$$\text{ב. } \left(\frac{2}{x} + 1\right) \cdot \frac{x^2}{7x+14}$$

$$\text{ג. } \frac{7}{y^2} : \frac{6}{y^3} - \frac{y-4}{63} \cdot \frac{3y-4}{y^2-8y+16}$$

$$\text{ד. } \left(3x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) : \frac{6x^3+2x-4}{x^2}$$

$$\text{ה. } \left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3} - \frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right) : \frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1
- (2) א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d - a^2d^2 + 2ab^2}{abcd}$
- ד. $\frac{-5y^2 + x + 1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$
- (3) א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$
- ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2 + a + 4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y + 12z^2 + 9y^2 - 3y^3 - 126xy^2z}{36xy^2z}$
- (4) א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2 + 4a + 6}{a(a+2)}$
- ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$
- (5) א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$
- ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2 - 6x - 13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2 + 6a + 6)}{(a+7)^2(2a+1)}$
- ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$
- (6) א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2 - 594y + 8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.
 נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

- | | |
|---|---|
| $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5} \quad (2)$ | $\frac{\frac{4x}{12}}{x} \quad (1)$ |
| $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54} \quad (4)$ | $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2} \quad (3)$ |
| $\frac{\frac{4x}{x+1}}{8} \quad (6)$ | $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{y^2} \quad (5)$ |
| $\frac{x^2+2x+1}{t^2-t-20} \quad (8)$ | $\frac{3-y}{8c^2} \quad (7)$ |
| $\frac{\frac{16t+8}{25-t^2}}{2t+1}$ | $\frac{\frac{3c^3-9c^2-12c}{40}}{15c+15} \quad (9)$ |
| | $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{1-3x(x+1)}$ |
| | $\frac{5x+5}{5x+5}$ |

תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{3} \quad (1)$$

$$2.5 \quad (2)$$

$$\frac{1}{6t^3} \quad (3)$$

$$\frac{t-9}{54t^2} \quad (4)$$

$$\frac{(3y-1)(3-y)}{25} \quad (5)$$

$$\frac{x(x+1)}{2} \quad (6)$$

$$\frac{c}{c-4} \quad (7)$$

$$\frac{t+4}{-8(t+5)} \quad (8)$$

$$\frac{5}{x} \quad (9)$$

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 2 - חזרה כללית - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

47	1. משוואות ממעלה ראשונה
49	2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה
52	3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון
53	4. משוואה ממעלה שנייה
55	5. משוואות דו-ריבועיות
57	6. משוואות עם פרמטרים
59	7. משוואות עם שורשים
61	8. משוואות עם ערך מוחלט
62	9. מערכת משוואות ממעלה שנייה
64	10. משוואות מתקדמות מסכמות
67	11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax = b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x = \frac{b}{a}$ כאשר $a \neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| א. $6x + 2 = 8$ | ב. $7 - 2x = 7$ |
| ג. $2x + x = 24$ | ד. $2x + 6 = 8 + x$ |
| ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$ | ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$ |
| ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$ | ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$ |

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| א. $3(x - 1) - 4 = 2$ | ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$ |
| ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$ | ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$ |
| ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$ | ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$ |

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4$ ב. $\frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1$ ג. $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15}$ ד. $\frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1$ ה. $\frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2$ ו. $5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1$	
---	--

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0$ ב. $\frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0$ ג. $\frac{3}{x} = \frac{1}{x+2}$ ד. $\frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2}$ ה. $\frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}$ ו. $\frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}$	
---	--

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15}$ ב. $\frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0$ ג. $\frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0$ ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12$	
--	--

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|------------------|------------------|-------------------|------------------|--------|------------------|
| א. 1 | ב. 0 | ג. 8 | ד. 2 | ה. 2 | ו. -3 |
| ז. $\frac{1}{2}$ | ח. 4 | | | | |
| א. 3 | ב. $\frac{1}{2}$ | ג. $2\frac{1}{4}$ | ד. 1 | ה. 4 | ו. -1 |
| א. -18 | ב. -30 | ג. -1 | ד. 1 | ה. -10 | ו. -21 |
| א. 8 | ב. -1 | ג. -3 | ד. -2 | ה. 2 | ו. $\frac{1}{2}$ |
| א. -6 | ב. -7 | ג. -7 | ד. 6, $x \neq 3$ | | |

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1, b_1, c_1 ו- a_2, b_2, c_2 הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x+3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

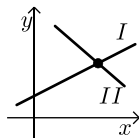
פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

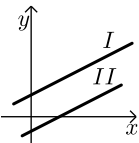
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



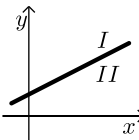
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
- פתרון ע"י השוואת מקדמים:
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \left\{ \begin{array}{l} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{array} \right. \text{ג.} & \left\{ \begin{array}{l} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{array} \right. \text{ב.} & \left\{ \begin{array}{l} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{array} \right. \text{א.} \\
 \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{array} \right. \text{ו.} & \left\{ \begin{array}{l} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{array} \right. \text{ה.} & \left\{ \begin{array}{l} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{array} \right. \text{ד.}
 \end{array}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 \left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{array} \right. \text{ב.} & \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{array} \right. \text{א.} \\
 \left\{ \begin{array}{l} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{array} \right. \text{ד.} & \left\{ \begin{array}{l} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{array} \right. \text{ג.}
 \end{array}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 \left\{ \begin{array}{l} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{array} \right. \text{ב.} & \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{array} \right. \text{א.}
 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

(6) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

תשובות סופיות:

(1) א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3).

(2) א. $(4, \frac{1}{3})$ ב. $(-\frac{4}{5}, 9)$ ג. (4,1.6) ד. (-2,7).

(3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

(4) א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2).

(5) א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1).

(6) א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4).

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax = b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x = \frac{b}{a}$.

כאשר $a = 0$ מתקבלת המשוואה $0 \cdot x = b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b = 0$ את המשוואה היא $0x = 0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b \neq 0$ את המשוואה היא $0x = b \neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(1) \quad x + 4 = 6 + x \quad (2) \quad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2$$

$$(3) \quad 6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (4) \quad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

- א. איזה מספר יש להציב ב- $\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
- ב. איזה מספר יש להציב ב- $\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
- ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
- ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5) א. -8 ב. -1 ג. $-7x - 1$ ד. $-7x + k$ כאשר k הוא מספר כלשהו השונה מ-1.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), נקראת משוואה ריבועית.
פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2 + 5x - 4 = 0$.
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2 + 4x + 4 = 0$.
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2 + x + 4 = 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x^2 + 10x - 16 = 0$

א. $x^2 + 3x - 10 = 0$

ד. $2x^2 - 6x + 5 = 0$

ג. $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

א. $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ד. $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

ג. $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } x^2 - 36 = 0 & \text{ב. } 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג. } 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 & \text{ד. } (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } -7x^2 - 14x = 0 & \text{ב. } 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג. } 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 & \text{ד. } (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} & \text{ב. } \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג. } \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -5 \quad \text{ב. } x_1 = 2, x_2 = 8 \quad \text{ג. } x = \frac{2}{5} \quad \text{ד. אין פתרון.}$$

$$(2) \quad \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1 \quad \text{ב. } x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4} \quad \text{ג. } x_1 = 1, x_2 = -10 \quad \text{ד. } x_1 = 0.6, x_2 = -2$$

$$(3) \quad \text{א. } x = \pm 6 \quad \text{ב. } x = \pm \frac{3}{4} \quad \text{ג. } x = \pm 3 \quad \text{ד. } x = \pm 1$$

$$(4) \quad \text{א. } x_1 = 0, x_2 = -2 \quad \text{ב. } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5} \quad \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6} \quad \text{ד. } x_1 = 0, x_2 = -5$$

$$\text{ד. } x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8}$$

$$(5) \quad \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1.2 \quad \text{ב. } x = 5, x \neq -3 \quad \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = -5$$

$$\text{ד. } x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7}$$

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ כאשר הנעלם הוא x .
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4 כגון: $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$ באמצעות פרמטר: $t = x^2 - 1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2 + 3t - 2 = 0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x .
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- (1) $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$
- (2) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
- (3) $13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
- (4) $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$
- (5) $x^6 + x^3 = 56$
- (6) $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$
- (7) $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$
- (8) $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$
- (9) $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$
- (10) $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$
- (11) $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$
- (12) $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$
- (13) $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$
- (14) $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$
- (15) $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$
- (16) $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$
- (17) $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$
- (18) $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$
- (19) $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$
- (20) $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$

תשובות סופיות:

$$x = \pm 1 \quad (1)$$

$$x = \pm 1, \pm \sqrt{2} \quad (2)$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$x = \pm 2, \pm 5 \quad (4)$$

$$x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2 \quad (5)$$

$$x = -2, \sqrt[3]{4} \quad (6)$$

$$x_1 = 4, x_2 = 49 \quad (7)$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1 \quad (8)$$

$$x = 5, -1 \quad (9)$$

$$x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2} \quad (10)$$

$$x = -1 \quad (11)$$

$$x_{1,2} = 1, 3 \quad (12)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06 \quad (13)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2 \quad (14)$$

$$(15) \text{ אין פתרונות.}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}} \quad (16)$$

$$x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3 \quad (17)$$

$$x = -1, 2 \quad (18)$$

$$x = 3, -1 \quad (19)$$

$$x = \pm 1, 4, 6 \quad (20)$$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx = 4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר m .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m \neq 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b + 1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות :

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$\text{(1) א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$\text{(2) א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left(\frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left(m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$\text{(3) א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x} = a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$.

הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x} = a$ שבה $a < 0$ אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|--|---|
| (2) $\sqrt{x+2} = x$ | (1) $\sqrt{2x+5} = 7$ |
| (4) $\sqrt{2x+7} + 4 = x$ | (3) $\sqrt{3x+1} + x = 13$ |
| (6) $\sqrt{10x+6} + 9 = x$ | (5) $\sqrt{x-1} + 3 = x$ |
| (8) $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$ | (7) $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$ |
| (10) $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$ | (9) $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$ |
| (12) $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$ | (11) $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$ |
| (14) $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$ | (13) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ |
| (16) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$ | (15) $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$ |
| (18) $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ | (17) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$ |
| | (19) $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$ |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2 | $x = 22$ (1 |
| $x = 9$ (4 | $x = 8$ (3 |
| $x = 25$ (6 | $x = 5$ (5 |
| $x = 3.75$ (8 | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10 | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12 | $x = 6$ (11 |
| $x = 5$ (14 | $x = 3$ (13 |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15 |
| $x = 1$ (18 | $x = 6$ (17 |
| | $x = 2$ (19 |

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x| = a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| $ 3x-24 =x$ (2) | $ 3x+14 =7$ (1) |
| $2x- 8-x =10$ (4) | $ 12-x =3x$ (3) |
| $ 14-3x =2 x+5 $ (6) | $ 4x-5 = 2x+13 $ (5) |
| $ x+2 +6= 2x-4 $ (8) | $ x +7= 2x $ (7) |
| $ 10-3x - x+4 = 2x-6 $ (10) | $ x+2 + 2x-6 = 4x+8 $ (9) |

תשובות סופיות:

- | | | | |
|---------------------------|---------------|-------------------------|--------------------------|
| $x=6$ (4) | $x=3$ (3) | $x=6,12$ (2) | $x=-\frac{7}{3}, -7$ (1) |
| $x=12, -1\frac{1}{3}$ (8) | $x=\pm 7$ (7) | $x=24, \frac{4}{5}$ (6) | $x=9, -1\frac{1}{3}$ (5) |
| | | $x=0$ (10) | $x=0, -12$ (9) |

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12) \qquad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

תשובות סופיות:

- | | |
|---|--|
| $(\pm 4, -2)$ (2) | $(2, 4), (4, 2)$ (1) |
| $(5, -2), (-5, 2)$ (4) | $(\pm 2, \pm 1)$ (3) |
| $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$ (6) | $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$ (5) |
| $(5, -3)$ (8) | $(7, 4)$ (7) |
| $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$ (10) | $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$ (9) |
| $(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3)$ (12) | $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ (11) |
| $(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7)$ (13) | |
| $(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5)$ (14) | |

משוואות מסכמות מתקדמות:

סיכום כללי:

תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.
- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.
- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.
- משוואה עם פרמטר/ים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטר/ים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטר/ים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 (1) & x + \sqrt{x+6} - 6 = 0 \\
 (2) & x^2 + 5x - \sqrt{x^2 + 5x} - 30 = 0 \\
 (3) & 4x^2 + 16x - 4\sqrt{x^2 + 4x} - 3 = 0 \\
 (4) & 2x^2 + 6x - \sqrt{x^2 + 3x + 5} = 5 \\
 (5) & x^2 - \sqrt{16x^2 + 48} + 7 = 0 \\
 (6) & x^2 - \sqrt{6x^2 - 15} = 1 \\
 (7) & \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x \\
 (8) & \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5} = \frac{7}{\sqrt{x-1}} \\
 (9) & \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \\
 (10) & \sqrt{x + \sqrt{14x - 49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x - 49}} = \sqrt{14} \\
 (11) & \sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}} - \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 2 \\
 (12) & \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x}
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות עבור $a > 0$:

$$\begin{array}{ll}
 (13) & x^2 + ax - 2a\sqrt{x^2 + ax - a^2} = 0 \\
 (14) & x^2 + ax - 2a\sqrt{3x^2 + 3ax - 9a^2} = 0
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 (15) & |3 - |2 - x| + |x|| = 1 \\
 (16) & |4 - |5 - x|| = |x + 3| \\
 (17) & \left| \frac{x + |3 - x|}{x + 2} \right| = 18 \\
 (18) & \sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x + 1| \\
 (19) & \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0
 \end{array}$$

$$(20) \quad \text{הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה: } \frac{|x+2|}{|x|+2} = |2-x|+2$$

תשובות סופיות:

(1) $x = 3$

(2) $x_1 = 4, x_2 = -9$

(3) $x_1 = 0.5, x_2 = -4.5$

(4) $x_1 = 1, x_2 = -4$

(5) $x_{1,2} = \pm 1$

(6) $x_{1,2} = \pm 2$

(7) $x = 1$

(8) $x = 3$

(9) $x = 2$

(10) $3.5 \leq x \leq 7$

(11) $x = 4$

(12) $x = 1, x = \frac{9}{16}$

(13) $x_1 = -2a, x_2 = a$

(14) $x_1 = -2a, x_2 = 3a$

(15) $x \leq 0$

(16) $x = -1$

(17) $x = -\frac{39}{18}, -\frac{33}{18}$

(18) $x \leq \frac{5}{4}, x = -\frac{1}{4}$

(19) $x = -\sqrt{5}$

(20) שאלת הוכחה.

ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

שאלות:

פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

$$(2y+5)^3 \quad (2)$$

$$(x-3)^3 \quad (1)$$

$$8y^3 + 343 \quad (4)$$

$$8x^3 - 1 \quad (3)$$

$$x^3y^6z^9 - 1 \quad (6)$$

$$a^6 - 27 \quad (5)$$

$$64mn^4 - 8m^4n^7 \quad (8)$$

$$11 + 88x^{12} \quad (7)$$

$$\frac{x^3 + 64}{x^2 + 4x} \quad (10)$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \quad (9)$$

משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

$$125x^3 = 1 - 15x + 75x^2 \quad (12)$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \quad (11)$$

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \quad (14)$$

$$x^3 + x - 30 = 0 \quad (13)$$

משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (16)$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad (15)$$

מערכת משוואות:

$$(17) \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(18) \quad \begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

$$8y^3 + 60y^2 + 150y + 125 \quad (10)$$

$$(2y + 7)(4y^2 - 17y + 49) \quad (11)$$

$$(xy^2z^3 - 1)(x^2y^4z^6 + xy^2z^3 + 1) \quad (12)$$

$$8mn^4(2 - mn)(4 + 2mn + m^2n^2) \quad (13)$$

$$\frac{x^2 - 4x + 16}{x} \quad (14)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$x_{1,2,3} = -2, -1, 3 \quad (16)$$

$$x_{1,2,3} = -2.5, -1, 1 \quad (17)$$

$$(-5, -6), (6, 5) \quad (18)$$

$$x^3 - 9x + 27x - 27 \quad (1)$$

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \quad (2)$$

$$(a^2 - 3)(a^4 + 3a^2 + 9) \quad (3)$$

$$8(1 + 2x^4)(1 - 2x^4 + 4x^8) \quad (4)$$

$$\frac{1}{x + 2} \quad (5)$$

$$x = 4 \quad (6)$$

$$x = 3 \quad (7)$$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{2}, 1, 2 \quad (8)$$

$$(3, 6), (6, 3) \quad (9)$$

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 3 - חזרה כללית - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

69	1. אי שוויונים ממעלה ראשונה
71	2. אי שוויונים ממעלה שנייה
72	3. אי שוויונים ממעלה שלישית
73	4. אי שוויונים עם מנה
75	5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו
76	6. שאלות מסכמות
78	7. מציאת תחום הגדרה
80	8. אי שוויונים עם ערך מוחלט
83	9. אי שוויונים עם שורשים

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$45x - 26 > 109 \quad (1) \qquad 6x > 2(3x - 1) \quad (2)$$

$$2(x - 5) \geq \frac{1}{2}(4x + 6) \quad (3) \qquad (x - 2)^2 + 4 < (x + 2)^2 + 20 \quad (4)$$

$$\frac{8x - 4}{2} < \frac{9(x + 1)}{3} \quad (5) \qquad 4(6x - 8) < 8(3x - 4) \quad (6)$$

$$\frac{x - 6}{3} - \frac{x - 4}{4} \geq 12 - x \quad (7) \qquad \frac{7 - x}{10} - \frac{3x - 1}{5} + \frac{x + 4}{3} < 7 \quad (8)$$

תשובות סופיות:

(1) $x > 3$

(2) כל x

(3) $x \neq 0$

(4) $x > -2$

(5) $x < 5$

(6) $x \neq 0$

(7) $x \geq 12$

(8) $x > -13$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|------------------------------|--|
| $x^2 - 12x > -32$ (2) | $x^2 < 144$ (1) |
| $(x+2)(x+4) < 35$ (4) | $(x+2)(x+5) < 0$ (3) |
| $(x-3)(x-7) \geq 8x-56$ (6) | $-x^2 + 13x + 30 < 0$ (5) |
| $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$ (8) | $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$ (7) |
| $x^2 - 10x + 25 > 0$ (10) | $-3x^2 + 12x > 0$ (9) |
| $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$ (12) | $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$ (11) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|----------------------|
| $x < 4, x > 8$ (2) | $-12 < x < 12$ (1) |
| $-9 < x < 3$ (4) | $-5 < x < -2$ (3) |
| $x \leq 7, x \geq 11$ (6) | $x < -2, x > 15$ (5) |
| $-4 \leq x \leq 0$ (8) | $-4 < x < 8$ (7) |
| $x > 5, x < 5$ (10) | $0 < x < 4$ (9) |
| x כל (12) | $x < 3, x > 5$ (11) |

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 > 0$, $x^4 + 2x^2 + 1 < 0$ וכו'. בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם. לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| (1) $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ | (2) $x(x^2 + x + 1) > 0$ |
| (3) $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ | (4) $x^3 - 25x \geq 0$ |
| (5) $(x^2 + 3x + 5)(x-2) > 0$ | (6) $(x^2 + 8x + 20)(3x-5) \leq 0$ |
| (7) $(x^2 - x - 6)(x-1) < 0$ | (8) $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ |
| (9) $(x^2 + 6)(x+3) > 0$ | (10) $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ |

תשובות סופיות:

- | | |
|---|----------------------------------|
| (1) $1 < x < 2, x > 3$ | (2) $x > 0$ |
| (3) $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ | (4) $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ |
| (5) $x > 2$ | (6) $x \leq 1\frac{2}{3}$ |
| (7) $x < -2, 1 < x < 3$ | (8) $x \leq 0, x = 3$ |
| (9) $x > -3$ | (10) $x < 1, 2 < x < 4$ |

אי-שוויונים עם מנה:

סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ או $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$

ו- $g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4} < 0$ בו: $f(x) = 2x+4$ ו- $g(x) = x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנייל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (2)	$\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (1)
$\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (4)	$\frac{1}{x^2-16} > 0$ (3)
$\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (6)	$\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (5)
$\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (8)	$\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (7)
$\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (10)	$\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (9)

תשובות סופיות:

$$(1) \quad -3 < x < 1, x > 3$$

$$(3) \quad x < -4, x > 4$$

$$(5) \quad \frac{1}{2} \leq x < 5$$

$$(7) \quad x > -2$$

$$(9) \quad 1 \leq x \leq 6$$

$$(2) \quad x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2}$$

$$(4) \quad 2 < x < 3, x > 3$$

$$(6) \quad x > 1$$

$$(8) \quad 2 < x < 3$$

$$(10) \quad x < 2, x > 6$$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a < b$ וגם $b < c$, ניתן לכתוב: $a < b < c$. מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (2)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (1)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (4)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (3)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (6)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (5)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (8)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x > -3\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 4 \quad (1)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$x > 0 \quad (3)$$

$$x \geq 10 \quad (6)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (5)$$

$$\emptyset \quad (8)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (7)$$

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (1)$$

$$\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \leq 0 \quad (3) \quad x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (5) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (4)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (7) \quad x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (6)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (9) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (11) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (13) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (12)$$

$$6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (15) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (14)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (17) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

$$(18) \text{ לאלו ערכי } x \text{ נמצאת הפונקציה } f(x) = \frac{x}{x-3} \text{ מעל הפונקציה } g(x) = \frac{x+1}{x+3} ?$$

תשובות סופיות:

$$-2 < x \leq -\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$x \leq -4 \quad (2)$$

$$-4 \leq x < 2, 3 \leq x \quad (3)$$

$$x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5 \quad (4)$$

$$-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12 \quad (5)$$

$$x < -3, 0 < x < 2.5 \quad (6)$$

$$x < -1, 2 < x < 6, x > 6 \quad (7)$$

$$2.5 \leq x < 8, x > 8 \quad (8)$$

$$x < -3, 0 < x < 1, x > 4 \quad (10)$$

$$x > 3 \quad (9)$$

$$x > 7 \quad (12)$$

$$-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3 \quad (11)$$

$$x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4 \quad (14)$$

$$x < -2, 2 < x < 4 \quad (13)$$

$$x \neq 1 \quad (16)$$

$$x \text{ אף } x \quad (15)$$

$$-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3 \quad (18)$$

$$x \geq 7 \quad (17)$$

תחום הגדרה:

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{3x-4} \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{12x-x^2-x^3} \quad \text{ד. } f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$$

(3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1 \leq x \leq 4$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

(4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x \leq -2$, $x > 2$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, a פרמטר חיובי.

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a .

תשובות סופיות:

- (1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1, x \geq 6$ ג. $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד. $-5 \leq x < -2, x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2, x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד. $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3) $a = 5$
- (4) $a = 2$
- (5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

מקרה	$ x < a$	$ x > a$
פתרון	$-a < x < a$	$x < -a \cap x > a$

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

(1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $|x+2| < 3$ ב. $|2x+1| > 7$
- ג. $|6-2x| < x$ ד. $|2x+1|-3x > 4$

(2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $1 < |4-3x| < 7$ ב. $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $|x^2+6x-4| < 12$ ב. $|x^2+x-10| > 3x-2$
- ג. $|x^2-3x| < 4$ ד. $|6x^2-7x-4| > 1$
- ה. $x^2-6|x|+5 \leq 0$ ו. $x^2-6|x+1|-1 > 0$

(4) פתור את אי-השוויונים הבאים :

ב. $|x+8| < 11 - |1-3x|$

א. $|x-3| + |2x+2| > 7$

ד. $|2x-6| + |x+5| > 14 - |1-x|$

ג. $|3-2x| - 11 > 4 - |6+x|$

ו. $|x+3| + |x^2 - 5x + 4| < 19$

ה. $|5+4x| - |3-x| + \left|4 - \frac{1}{2}x\right| \leq 22$

(5) פתור את אי-השוויונים הבאים :

ב. $1 \leq \left| \frac{x+2}{x-2} \right| \leq 2$

א. $\left| \frac{3x-1}{x-2} \right| \geq 3$

ד. $\left| \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} \right| > 5$

ג. $\frac{|x-6| + 8x}{x-12} \leq 12$

(6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים) :

ב. $2 - \sqrt{1-x} \leq |x+2| - 3$

א. $\sqrt{x^2 - |x-12|} < x$

ד. $\frac{|x+2| - |x|}{\sqrt{4-x^3}} > 0$

ג. $\sqrt{|2x+1| - x - 1} \leq 4 - |3x|$

תשובות סופיות:

- (1) א. $-5 < x < 1$ ב. $x < -4$ או $3 < x$
 ג. $2 < x < 6$ ד. $x < -1$
- (2) א. $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$ או $-1 < x < 1$ ב. $-5\frac{1}{2} < x < -3$
- (3) א. $-2 < x < 2$ או $-8 < x < -4$ ב. $x < 2$ או $4 < x$
 ג. $-1 < x < 4$ ד. $x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$, $x > \frac{5}{3}$
 ה. $-5 \leq x \leq -1$ או $1 \leq x \leq 5$ ו. $x < -5$, $x > 7$
- (4) א. $x < -2$ או $2 < x$ ב. $-1 < x < 1$
 ג. $x < -6$ או $4 < x$ ד. $x < -1$ או $4 < x$
 ה. $-7\frac{3}{7} \leq x \leq 4$ ו. $-2 < x < 6$
- (5) א. $\frac{7}{6} \leq x < 2$, $x > 2$ ב. $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$, $x \geq 6$
 ג. $x < 12$, $x \geq 46$ ד. $\frac{1}{2} < x < 1$, $1 < x < 2$, $2 < x \leq 4$
- (6) א. $x = -1$, $x \geq 3$, $x \neq 12$ ב. $x \leq \frac{-15 + \sqrt{33}}{2}$
 ג. $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$ ד. $-1 < x < \sqrt[3]{4}$

אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a \geq 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	$0 \leq f(x) < a^2$
$a < 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)} > a$	כל x בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{x+3} < 7 \quad (1)$$

$$\sqrt{2x-5} \geq 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x \quad (3)$$

$$\sqrt{x^2+x-6} < x-3 \quad (4)$$

$$\sqrt{x^2+3x+2}-1 < \sqrt{x^2-x+1} \quad (5)$$

$$\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x^2-x+1} < 1 \quad (6)$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2} \quad (7)$$

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2 \quad (8)$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}} < \frac{1}{x}-\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x} \quad (10)$$

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \quad (11)$$

$$\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 5\sqrt{\frac{x}{x+9}} \geq 4 \quad (12)$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad -3 \leq x < 46$$

$$(2) \quad x \geq 3$$

$$(3) \quad x < -10, x > 1$$

$$(4) \quad \emptyset$$

$$(5) \quad x \leq -2, -1 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$$

$$(6) \quad x \leq -3, -2 \leq x < \frac{-13 + \sqrt{73}}{16}$$

$$(7) \quad \frac{12}{25} < x \leq \frac{1}{2}$$

$$(8) \quad x < 2\sqrt{5} - 4$$

$$(9) \quad 1 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(10) \quad -2.618 < x \leq 1 : \text{שזה } -\frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x \leq 1$$

$$(11) \quad 2.5 \leq x < 3$$

$$(12) \quad x < -9, x > 0$$

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 4 - סטטיסטיקה - מבוא לסטטיסטיקה

תוכן העניינים

1. איסוף נתונים והצגת נתונים (ללא ספר)
2. טבלת שכיחויות ושכיחות יחסית (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 5 - סטטיסטיקה - מדדים מרכזיים - החציון

תוכן העניינים

1. החציון (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 6 - סטטיסטיקה - מדדים מרכזיים - הממוצע

תוכן העניינים

1. סיכום כללי (ללא ספר)
2. שאלות יסודיות (ללא ספר)
3. שאלות כלליות (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 7 - סטטיסטיקה - מדדים מרכזיים - השכיח

תוכן העניינים

1. השכיח (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 8 - סטטיסטיקה - שאלות מסכמות - מדדים מרכזיים

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 9 - סטטיסטיקה - מדדים מרכזיים ומדדי פיזור

תוכן העניינים

1. הממוצע - חזרה כללית (ללא ספר)
2. מציאת השכיחות בעזרת הממוצע (ללא ספר)
3. ממוצעים של קבוצות (ללא ספר)
4. הוספת נתונים וחישוב ממוצע חדש (ללא ספר)
5. ממוצע גדל, קטן או לא משתנה (ללא ספר)
6. שאלות עם שני נעלמים בממוצע (ללא ספר)
7. סטיית תקן (ללא ספר)
8. המשמעות של סטיית התקן (ללא ספר)
9. השכיח והחציון - חזרה כללית (ללא ספר)
10. שאלות שבהן סטיית התקן נתונה (ללא ספר)
11. שאלות כוללות עם סטיית תקן, ממוצע, שכיח וחציון (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 10 - הסתברות - מבוא להסתברות

תוכן העניינים

1. הסתברות על ציר המספרים (ללא ספר)
2. ניסויים ותוצאות (ללא ספר)
3. שכיחות יחסית והסתברות (ללא ספר)
4. תכונות ההסתברות (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 11 - הסתברות של מאורע בודד

תוכן העניינים

1. הקדמה כללית (ללא ספר)
2. שאלות עם בחירת כדור (ללא ספר)
3. שאלות עם הגרלות (ללא ספר)
4. שאלות עם הטלת קובייה (ללא ספר)
5. שאלות עם ילדים במשפחה (ללא ספר)
6. שאלות עם משחק דומינו (ללא ספר)
7. שאלות עם ציונים בכיתה (ללא ספר)
8. שאלות עם תריסריון (ללא ספר)
9. שאלות עם דיאגרמת עיגול (ללא ספר)
10. שאלות עם קריאת נתונים מטבלה (ללא ספר)
11. שאלות תכנון לפי הסתברות נתונה (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 12 - הסתברות של שני מאורעות

תוכן העניינים

1. הסתברות של שני מאורעות (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 13 - הסתברות - פרק מסכם

תוכן העניינים

1. הסתברות של שלושה מאורעות בלתי תלויים (ללא ספר)
2. הסתברות של שני מאורעות בלתי תלויים (ללא ספר)
3. חזרה על הסברות עם מאורע אחד (ללא ספר)
4. שלושה מאורעות תלויים (ללא ספר)
5. שני מאורעות תלויים (ללא ספר)
6. תכנון על פי הסתברות נתונה (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 14 - הסתברות - נושאים מתקדמים

תוכן העניינים

85	1. שאלות יסודיות
88	2. שאלות עם שני ניסויים
90	3. שאלות עם הסתברות מותנית
92	4. שאלות עם נעלמים
94	5. שאלות הנפתרות באמצעות טבלה דו-מימדית
96	6. התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות יסודיות
97	7. התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם הסתברות מותנית
98	8. התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם נעלמים
101	9. שאלות מסכמות

שאלות יסודיות:

סיכום כללי:

1. ההסתברות להתרחשות מאורע A : $P(A) = \frac{\text{מספר האפשרויות הרצוי}}{\text{מספר האפשרויות הכולל}}$
2. המאורע המשלים למאורע A : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3. חיתוך ואיחוד מאורעות A ו-B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. מאורעות זרים הם מאורעות שלא יכולים להתקיים בו זמנית.
- עבור מאורעות זרים A ו-B מתקיים : $P(A \cap B) = 0$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
5. מאורעות נקראים בלתי תלויים אם קיום האחד מהם לא משפיע על ההסתברות לקיומו של השני.
- עבור מאורעות בלתי תלויים A ו-B מתקיים : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
6. אם מתקיים : $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ המאורעות תלויים.
7. הסתברות מותנית של מאורע A בהינתן מאורע B מוגדרת : $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
8. צורה כללית של טבלת הסתברויות עבור מאורעות A ו-B :

	$\bar{A}$	A	
B	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

קשרים מידיים מהטבלה :

- $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$
- $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B})$
- $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$
- $P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})$

9. התפלגות בינומית : חישוב k הצלחות מתוך n ניסיונות בלתי תלויים כאשר

ההסתברות להצלחה בניסיון בודד היא p נתונה ע"י : $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

שאלות:

- (1) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים לבנים.
מה ההסתברות להוצאת כדור כחול בהוצאה אקראית של כדור מהכד?
- (2) בכד 2 כדורים כחולים, 3 כדורים אדומים ו-7 כדורים לבנים.
מה ההסתברות שבהוצאה אקראית של כדור מהכד לא ייצא כדור אדום?
- (3) מהי ההסתברות שבסיבוב סביבון לא יתקבל "נס"?
- (4) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(A) = 0.6$, $P(\bar{B}) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.4$.
מצא את $P(A \cup B)$.
- (5) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(\bar{A}) = 0.2$, $P(\bar{B}) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.95$.
מצא את $P(A \cap B)$.
- (6) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.65$.
קבע האם המאורעות זרים והאם הם תלויים.
- (7) נתון כי שני מאורעות, A ו-B בלתי תלויים.
בנוסף נתון: $P(A) = 0.75$, $P(B) = 0.4$. מצא את $P(A \cup B)$.

תשובות סופיות:

$$\frac{3}{10} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$P(A \cup B) = 0.9 \quad (4)$$

$$P(A \cap B) = 0.35 \quad (5)$$

$$\text{לא זרים ותלויים.} \quad (6)$$

$$P(A \cup B) = 0.85 \quad (7)$$

שאלות עם שני ניסויים:

שאלות:

(8) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור (ללא החזרה של הכדור הראשון).

- א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
- ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
- ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?

(9) בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.

- א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
- ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
- ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?

(10) בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה). מה ההסתברות שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים?

(11) נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?

(12) ליואב יש בכיסו הימני 3 גולות כחולות ו-5 שחורות ובכיסו השמאלי 4 גולות כחולות ו-4 שחורות. יואב מוציא גולה מכיסו הימני. אם היא כחולה הוא מחזיר אותה לכיס הימני ואם היא שחורה הוא מעביר אותה לכיס השמאלי. אחר כך הוא מוציא גולה מכיסו השמאלי. מה ההסתברות ששתי הגולות שהוציא באותו צבע?

תשובות סופיות:

$$(8) \quad \begin{array}{lll} \text{א. } \frac{1}{15} & \text{ב. } \frac{8}{15} & \text{ג. } \frac{7}{15} \end{array}$$

$$(9) \quad \begin{array}{lll} \text{א. } \frac{9}{100} & \text{ב. } \frac{19}{50} & \text{ג. } \frac{31}{50} \end{array}$$

$$(10) \quad \frac{17}{42}$$

$$(11) \quad \frac{8}{15}$$

$$(12) \quad \frac{77}{144}$$

שאלות עם הסתברות מותנית:

שאלות:

- 13** בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?
- 14** בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?
- 15** בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה). ידוע שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים.
מה ההסתברות שכולם גברים?
- 16** נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.
א. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?
ב. ידוע שללואיזה לא יצא אף כדור לבן, מה ההסתברות שבהטלת המטבע יצא "עץ"?
- 17** במשחק מזל הסיכוי להרוויח 10 ₪ הוא 0.3 והסיכוי להרוויח 20 ₪ הוא 0.2.
ישנו סיכוי של 0.5 לא להרוויח כלל. אדם שיחק במשחק פעמיים וידוע שהרוויח יותר מ-20 ₪. מה הסיכוי שהרוויח 40 ₪?

- 18)** כדי להתקבל לעבודה בחברת משקאות יש לעבור שלושה ראיונות על ידי שלושה בעלי תפקידים בסדר הבא: אחראי משמרת, מנהל ראשי ומנכ"ל החברה. כל בעל מקצוע נותן חוות דעת חיובית או שלילית בלבד. כדי שמועמד יקבל עבודה בחברה עליו לעבור בהצלחה לפחות את אחד מהראיונות עם אחראי המשמרת והמנהל הראשי, אך הראיון עם המנכ"ל חייב לעבור בהצלחה (כדי שמועמד יקבל עבודה המנכ"ל צריך לתת לו חוות דעת חיובית). ידוע כי אחראי המשמרת נותן חוות דעת חיובית ל- $\frac{1}{6}$ מהמועמדים. המנהל הראשי קורא את חוות הדעת של אחראי המשמרת וב- $\frac{2}{3}$ מהמקרים נותן חוות דעת הפוכה מזו של אחראי המשמרת. מנכ"ל החברה נותן חוות דעת חיובית ל-80% מהמועמדים בלי קשר לחוות הדעת הקודמות.
- א. מה ההסתברות לקבל חוות דעת חיובית מהמנהל הראשי?
 ב. ידוע כי המנהל הראשי נתן חוות דעת חיובית, מה ההסתברות שגם אחראי המשמרת נתן חוות דעת חיובית?
 ג. מה ההסתברות להתקבל לחברה?

תשובות סופיות:

- 13)** א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{1}{8}$
- 14)** א. $\frac{9}{100}$ ב. $\frac{38}{100}$ ג. $\frac{9}{38}$
- 15)** $\frac{2}{17}$
- 16)** א. $\frac{8}{15}$ ב. $\frac{15}{16}$
- 17)** $\frac{1}{4}$
- 18)** א. $\frac{11}{18}$ ב. $\frac{1}{11}$ ג. $\frac{26}{45}$

שאלות עם נעלמים:

שאלות:

- (19) בכד מספר מסוים של כדורים. 3 כחולים והשאר אדומים. הסיכוי להוציא שני כדורים אדומים מהכד (בלי החזרה) הוא $\frac{5}{14}$. כמה כדורים בכד?
- (20) ההסתברות של צלף לפגוע במטרה בירייה הראשונה היא p והיא גדולה מההסתברות שלו להחטיא. אם הוא פוגע, עולה ההסתברות שלו לפגוע בירייה הבאה ב-0.1 ואם הוא מחטיא היא יורדת ב-0.1. הצלף ירה למטרה פעמיים. ההסתברות שפגע במטרה בדיוק בירייה אחת היא 0.38. א. מצא את p . ב. מה ההסתברות שהצלף פגע פעמיים במטרה אם ידוע שהוא פגע בה לפחות פעם אחת?
- (21) רפי קנה במכולת חבילה של מסטיק "מנטוס". בכל חבילה יש 10 סוכריות, חלקן ורודות וחלקן צהובות. רפי מוציא באקראי (ללא החזרה) שתי סוכריות מהחבילה שקנה. ידוע כי ההסתברות ששתי הסוכריות תהיינה ורודות קטנה פי 4 מההסתברות להוציא סוכריות בצבעים שונים. א. כמה סוכריות מכל צבע יש בכל חבילה? רפי מחזיר את הסוכריות בחזרה לחבילה ולאחר מכן מוציא באקראי 3 סוכריות (ללא החזרה). ב. מה ההסתברות שכל הסוכריות שהוציא רפי הן צהובות? שלומי, חברו הטוב של רפי, קנה 3 חבילות "מנטוס". ג. שלומי מוציא באקראי סוכרייה מכל חבילה. האם ההסתברות של שלומי להוציא 3 סוכריות צהובות גבוהה או נמוכה מזו של רפי? ד. שלומי מוציא מכל חבילה שתי סוכריות. מה ההסתברות שלו להוציא מכל חבילה סוכרייה ורודה ואחר כך צהובה?

- (22)** בתוך כד ישנם 8 כדורים, חלקם אדומים וחלקם לבנים. מוציאים באקראי כדור, מניחים אותו בצד ומוציאים כדור נוסף. א. מצא כמה כדורים יש בכד מכל צבע אם ידוע כי ההסתברות שהכדור השני שהוצא הוא לבן היא $\frac{3}{8}$. ב. ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא לבן, מה ההסתברות שהכדור הראשון שיצא הוא אדום?

- (23)** בכד ישנם 12 כדורים, חלקם לבנים וחלקם שחורים. אם מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד ההסתברות ששניהם יהיו בעלי אותו הצבע היא $\frac{13}{18}$. א. מה ההסתברות להוציא כדור שחור מהכד אם ידוע כי יש יותר כדורים שחורים? ב. מה ההסתברות להוציא מהכד כדור שחור שרשום עליו מספר? ג. איזה חלק מבין הכדורים שרשום עליהם מספר מהווים הכדורים הלבנים?

תשובות סופיות:

- (19)** 8 כדורים.
- (20)** א. $p = 0.6$ ב. $\frac{21}{40}$ ג. גבוהה $\left(\frac{27}{125} > \frac{1}{6}\right)$
- (21)** א. 4 ורודות ו-6 צהובות. ב. $\frac{1}{6}$ ד. $P = 0.0189$
- (22)** א. 5 אדומים ו-3 לבנים. ב. $\frac{5}{7}$
- (23)** א. $P = \frac{5}{6}$ ב. $P = \frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{5}$

שאלות הנפתרות באמצעות טבלה דו-מימדית:

שאלות:

24) 70% מאוהדי מכבי ת"א הם גברים והשאר נשים. 40% מהאוהדים מעשנים. נתון כי 45% מהאוהדים הם גברים שאינם מעשנים.

- א. מהו אחוז הנשים המעשנות מבין אוהדי מכבי?
 ב. בוחרים באקראי אוהד מכבי. מה ההסתברות שהוא גבר או שהוא מעשן?
 ג. בוחרים באקראי אישה שאוהדת מכבי. מה ההסתברות שהיא מעשנת?
 ד. האם מין האוהד והעובדה שהוא מעשן הם מאורעות תלויים?

25) 65% מהפחיות המיוצרות במפעל משקאות הן רגילות והשאר דיאט. 80% מהפחיות המיוצרות תקינות והשאר פגומות. נתון כי 7% מהפחיות הן פחיות דיאט פגומות.

- א. בוחרים באקראי פחית. מה ההסתברות שהיא פחית רגילה ותקינה?
 ב. בוחרים באקראי פחית דיאט. מה ההסתברות שהיא פגומה?
 ג. בוחרים באקראי פחית פגומה. מה ההסתברות שהיא דיאט?
 ד. האם סוג הפחית ותקינותה הם מאורעות תלויים?

26) 80% מהתלמידים בכיתה עברו את המבחן בתנ"ך ו-70% עברו את המבחן בהיסטוריה. 75% מבין התלמידים שעברו את המבחן בתנ"ך עברו גם את המבחן בהיסטוריה.

- א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא נכשל בשתי הבחינות?
 ב. תלמיד נכשל במבחן בהיסטוריה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן בתנ"ך?
 ג. ידוע שתלמיד עבר בדיוק מבחן אחד. מה ההסתברות שזה המבחן בתנ"ך?

27) בעיר גדולה ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. מבין בעלי רישיון נהיגה 30% הם גברים. 60% מהגברים הם בעלי רישיון נהיגה. בחרו באקראי שתי נשים מהעיר. מה ההסתברות שלשתיהן אין רישיון נהיגה?

28) 10% מהאנשים באוכלוסייה עיוורי צבעים. קיימת בדיקה הבוחנת אם אדם הוא עיוור צבעים. אם עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 80% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. אם אדם שאינו עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 5% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. מהם אחוזי האמינות של הבדיקה (אחוז המקרים בהם הבדיקה מאבחנת נכונה את הנבדק)?

(29) בסניף "תנו לחיות לחיות" בירושלים יש כלבים וחתולים בלבד, בעלי פרווה כהה או פרווה בהירה. 55% מהחיות בסניף הם כלבים. אחוז החתולים בעלי הפרווה הכהה גדול פי 3 מאחוז הכלבים בעלי הפרווה הבהירה. מבין בעלי הפרווה הכהה 60% הם כלבים. בוחרים באקראי חתול מהסניף. מה ההסתברות שהוא בהיר פרווה?

(30) בית ספר תיכון מציע לתלמידיו 3 מגמות ריאליות לבחירה: פיזיקה, כימיה ומחשבים. 40% מתלמידי מגמות אלה הם בנים. הבנים מהווים $\frac{2}{5}$ מתלמידי הפיזיקה, $\frac{5}{12}$ מתלמידי הכימיה ו- $\frac{1}{3}$ מתלמידי המחשבים. $\frac{1}{4}$ מהבנים הם תלמידי פיזיקה.

- א. האם יש תלות בין העובדה שתלמיד לומד פיזיקה למין התלמיד?
ב. מהו אחוז לומדי המחשבים מקרב הבנים?

תשובות סופיות:

- (24) א. 15% ב. 0.85 ג. 0.5 ד. כן.
(25) א. 0.52 ב. 0.2 ג. 0.35 ד. בלתי תלויים.
(26) א. 0.1 ב. $\frac{2}{3}$ ג. $\frac{2}{3}$
(27) $\frac{1}{225}$
(28) 93.5%
(29) $\frac{1}{3}$
(30) א. בלתי תלויים. ב. 12.5%

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות יסודיות:

שאלות:

- (31) אדם מסובב חמש פעמים סביבון. מה ההסתברות שיקבל פעמיים "נס"?
- (32) מה ההסתברות לקבלת 5 פעמים "נס" בשמונה סיבובי סביבון?
- (33) הסיכוי לעבור את מבחן התיאוריה הוא 0.7. עשרה אנשים ניגשים למבחן התיאוריה. מהי ההסתברות שבדיוק שישה מהם יעברו?
- (34) בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. מה ההסתברות שמתוך חמשת הכדורים הוציא:
- בדיוק ארבע יהיו כחולים?
 - חמישה יהיו כחולים?
 - לפחות ארבעה יהיו כחולים?
 - הרוב יהיו כחולים?
 - לפחות אחד יהיה כחול?
 - הראשון והאחרון בלבד יהיו כחולים?

תשובות סופיות:

- (31) 0.264
- (32) 0.023
- (33) 0.2001
- (34) א. 0.259 ב. 0.078 ג. 0.337 ד. 0.683 ה. 0.98976 ו. 0.023

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם הסתברות מותנית:

שאלות:

(35) בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. ידוע שרוב הכדורים שהוציא כחולים. מה ההסתברות שכולם כחולים?

(36) יערה מצליחה לקלוע לסל בשלושה מכל ארבעה ניסיונות. כדי להתקבל לנבחרת הכדורסל של בית הספר עליה להצליח לקלוע ברוב הפעמים מתוך 6 ניסיונות קליעה לסל. ידוע שיערה התקבלה לנבחרת הכדורסל. מה ההסתברות שהצליחה לקלוע את כל הקליעות?

תשובות סופיות:

(35) 0.114

(36) 0.214

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם נעלמים:

שאלות:

(37) בכד יש 9 כדורים, חלקם כחולים והשאר לבנים. מוציאים כדור מהכד. אם הוא כחול אז מחזירים אותו לכד ומוסיפים 4 כדורים לבנים ואם הוא לבן אז מחזירים אותו לכד ומוסיפים 4 כדורים כחולים. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף. נתון שההסתברות שהכדור הראשון שיצא הוא כחול אם ידוע כי הכדור השני כחול היא $\frac{6}{11}$.

- א. מצא כמה כדורים כחולים יש בכד.
- ב. חוזרים על התהליך 6 פעמים, כלומר בכל פעם מחזירים את המצב לקדמותו, מוציאים באקראי כדור ופועלים בהתאם לחוקים. מצא את ההסתברות שלפחות פעם אחת יבחרו שני כדורים כחולים בזה אחר זה.

(38) בסיטונאות מזון ידוע כי 40% מבין הסכו"ם החד-פעמי הוא תוצרת חו"ל והשאר תוצרת הארץ. 40% מבין הסכו"ם המיובא מחו"ל הם צבעוניים והשאר שקופים.

- א. מה ההסתברות לבחור בסיטונאות המזון סכו"ם שקוף המיובא מחו"ל?
- ב. i. בוחרים 5 כלים בחנות באופן אקראי. מה ההסתברות שלכל היותר כלי אחד הוא כלי שקוף תוצרת חו"ל?
ii. מה ההסתברות שבדיוק אחד מחמשת הכלים הוא כלי שקוף תוצרת חו"ל אם ידוע כי לכל היותר כלי אחד הוא שקוף תוצרת חו"ל?
- ג. בוחרים שני כלים באופן אקראי וידוע כי ההסתברות ששניהם שקופים היא 0.4096. איזה חלק מהווים כלי הסכו"ם השקופים מבין כלי הסכו"ם תוצרת הארץ?

(39) בחדר יש x גברים ו- $3x$ נשים. משחקים את המשחק הבא: בוחרים באקראי שני אנשים מהחדר בזה אחר זה (בלי החזרה). ידוע כי ההסתברות לבחור שני אנשים מאותו המין היא $\frac{13}{22}$.

- א. מצא כמה נשים יש בחדר.
- ב. ידוע כי האדם השני שנבחר הוא גבר. מה ההסתברות שגם הראשון שנבחר הוא גבר?
- ג. משחקים את המשחק 4 פעמים. ידוע כי בכל הפעמים נבחר גבר בפעם השנייה. מה ההסתברות שבדיוק ב-3 פעמים יבחר גבר גם בפעם הראשונה?

- (40) בוחרים שלושה גברים באקראי מעיר גדולה. ההסתברות שכולם מעשנים היא 0.027. מה ההסתברות שרובם מעשנים?
- (41) בוחרים שלוש נשים מעיר גדולה. ההסתברות ששתיים מהן מעשנות קטנה פי 4 מההסתברות ששתיים מהן לא מעשנות. מה ההסתברות שכולן מעשנות?
- (42) בכד 10 כדורים, חלקם לבנים והשאר שחורים. נמרוד מוציא 9 פעמים כדור מהכד (עם החזרה). הסיכוי שיצאו פי 2 כדורים שחורים מלבנים גדול פי $3\frac{3}{8}$ מהסיכוי שיצאו פי 2 כדורים לבנים משחורים. מצא כמה כדורים מכל צבע בכד.
- (43) מפעל מייצר שולחנות וכיסאות. בוחרים 4 רהיטים. ידוע כי ההסתברות שכולם יהיו כיסאות זהה להסתברות שיהיה שולחן אחד בדיוק בניהם.
א. מצא את ההסתברות לבחור כיסא.
במפעל צובעים את הרהיטים בשחור או לבן.
רבע מהשולחנות נצבעים בשחור ורבע מהכיסאות נצבעים בלבן.
ב. מה ההסתברות לבחור כיסא שחור?
ג. איזה חלק מבין הרהיטים הלבנים מהווים השולחנות?
- (44) בחדר x גברים ו- $3x$ נשים. מוציאים באקראי שני אנשים מהחדר. ההסתברות שהם יהיו מאותו מין היא 0.6.
א. מצא את גודלו של x .
ב. חוזרים על התהליך 4 פעמים.
מה הסיכוי שבשלוש מתוך 4 הפעמים ייצאו מהחדר שתי נשים?
- (45) במבחן רב ברירה עם 5 שאלות שוות ניקוד, לכל שאלה יש n תשובות מהן רק אחת נכונה. ישנו סיכוי של 50% ששי ידע את התשובה הנכונה לשאלה במבחן. אם שי לא יודע את התשובה לשאלה הוא מנחש.
ההסתברות ששי יקבל במבחן 60 גדולה פי $1\frac{1}{3}$ מההסתברות שיקבל 80.
מצא את ערכו של n .

- (46) כדי להתקבל לקורס טיס יש לעבור גיבוש וראיון. כל המועמדים ניגשים גם לראיון וגם לגיבוש. 40% מהניגשים לגיבוש עוברים אותו ו-35% מהניגשים לראיון עוברים אותו. $\frac{5}{17}$ מאלה שלא התקבלו לקורס טיס לא התקבלו בגלל הריאיון בלבד. שלושה חברים ניסו להתקבל לקורס טיס. ידוע שרובם התקבלו. מה ההסתברות שכולם התקבלו?

תשובות סופיות:

- (37) א. 6 כדורים כחולים. ב. 0.88989
- (38) א. 0.24 ב. i. 0.65389 ב. ii. $\frac{30}{49} \sim 0.61224$ ג. $\frac{2}{3}$
- (39) א. 9 נשים ב. $\frac{2}{11}$ ג. 0.0196
- (40) 0.216
- (41) 0.008
- (42) 4 לבנים, 6 שחורים.
- (43) א. $P = 0.8$ ב. $P = 0.6$ ג. $\frac{3}{7}$
- (44) א. $x = 4$ ב. 0.299
- (45) $n = 5$
- (46) $\frac{5}{90}$

שאלות מסכמות:

שאלות:

(47) כדי להתקבל לחברת היי-טק יש לעבור ראיונות משלושה בעלי תפקידים בסדר הבא: מהנדס ראשי, אחראי משמרת ומנכ"ל החברה. כל אחד מבעלי התפקידים נותן חוות דעת חיובית או שלילית על המועמד לעבודה. מועמד שמתקבל לחברה חייב לקבל חוות דעת חיובית משלושת בעלי התפקידים. ידוע כי המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ל- $\frac{3}{5}$ מהמועמדים.

אחראי המשמרת קורא את חוות הדעת של המהנדס הראשי וב- $\frac{1}{6}$ מהמקרים נותן חוות דעת הפוכה מזו של המהנדס הראשי. מנכ"ל החברה קורא את חוות הדעת של אחראי המשמרת וב- $\frac{7}{10}$ נותן חוות דעת זהה לשלו.

א. ענה על השאלות הבאות:

- i. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת חיובית מאחראי המשמרת?
 - ii. ידוע כי אחראי המשמרת נתן חוות חיובית. מה ההסתברות שהמהנדס הראשי ייתן חוות דעת שלילית?
 - ב. מה ההסתברות שמועמד יקבל עבודה בחברה?
 - ג. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת שלילית מהמנכ"ל?
 - ד. לאחר היעדר עובדים שינתה החברה את מדיניותה וקבעה כי כדי להתקבל לעבודה יש לעבור לפחות שני ראיונות בהצלחה, אך חוות הדעת של המנכ"ל חייבת להיות חיובית.
- מה ההסתברות כעת לקבל עבודה בחברה?

(48) במדינה מסוימת $\frac{19}{60}$ מהאזרחים הם גברים ו- $\frac{41}{60}$ הן נשים.

30% מבין מרכיבי המשקפיים במדינה זו הם גברים ו-40% מבין אלו שלא מרכיבים משקפיים הם גברים.

א. מה ההסתברות למצוא אישה במדינה זו שאינה מרכיבה משקפיים?

ב. בוחרים 4 אנשים. מה ההסתברות שבדיוק שניים מהם הם נשים שאינם מרכיבות משקפיים?

ג. בוחרים אזרח. ידוע כי הוא גבר. מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?

(49) בעיר מסוימת ההסתברות לבחור אדם מעשן גדולה פי 3 מההסתברות לבחור אדם המרכיב משקפיים. ידוע כי החלק של התושבים שמרכיבים משקפיים מבין

$$\text{כל התושבים המעשנים הוא } \frac{1}{12}.$$

- א. מצא מהי ההסתברות לבחור מעשן מתוך כל מרכיבי המשקפיים.
- ב. ידוע כי 15% מהתושבים הם מרכיבים משקפיים בלבד. מצא את ההסתברות לבחור תושב שלא מרכיב משקפיים.
- ג. בוחרים 6 תושבים באופן אקראי. מה ההסתברות שמחצית מהם אינם מרכיבים משקפיים ואינם מעשנים?

(50) בבית ספר מסוים ישנם תלמידים המרכיבים משקפיים. ידוע כי אם בוחרים 3 תלמידים אז ההסתברות ששלושתם מרכיבים משקפיים היא 0.027.

- א. מצא את אחוז מרכיבי המשקפיים בבית הספר.
- ב. בבית הספר ההסתברות להיתקל בתלמיד גדולה ב-0.1 מההסתברות להיתקל בתלמידה ומספר הבנים שמרכיבים משקפיים זהה למספר הבנות שמרכיבות משקפיים.
- ב. מה ההסתברות להיתקל בחצר בית הספר בתלמיד שאינו מרכיב משקפיים?
- ג. איזה חלק מכלל הבנות בבית הספר מהוות הבנות שמרכיבות משקפיים?
- ד. בוחרים 4 תלמידים. ידוע כי כולן בנות. מה ההסתברות כי אחת מהן תרכיב משקפיים?

(51) כדי להתקבל לעבוד בחברת ההיי-טק Techno יש לעבור שני ראיונות משני בעלי מקצוע, תחילה על ידי המהנדס הראשי ואחריו על ידי מנכ"ל החברה. כל בעל מקצוע נותן חוות דעת חיובית, שלילית או שנמנע מלקבוע. כדי שמועמד יתקבל לחברה עליו לעבור לפחות ראיון אחד עם חוות דעת חיובית. ידוע כי המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ל- $\frac{1}{5}$ מהמועמדים ו- $\frac{2}{7}$ מהם הוא משאיר בלי קביעה. המנכ"ל קורא את חוות הדעת של המהנדס הראשי וקובע את חוות הדעת שלו בצורה הבאה:

- אם המהנדס נתן חוות דעת חיובית, אז המנכ"ל ייתן גם חוות דעת חיובית ב-60% מהמקרים. אם המהנדס נתן חוות דעת שלילית, אז המנכ"ל נמנע מלקבוע ב-60% מהמקרים ובשאר המקרים הוא נותן חוות דעת חיובית.
- אם המהנדס נמנע מלקבוע אז המנכ"ל ייתן חוות דעת חיובית או שלילית בלבד. הסיכוי שהמנכ"ל ייתן במקרה זה חוות דעת חיובית גדול פי 3 מהסיכוי שייתן חוות דעת שלילית.

- א. מה ההסתברות לקבל חוות דעת חיובית מהמנכ"ל?
 ב. ידוע כי המנכ"ל נתן חוות דעת חיובית.
 מה ההסתברות שגם המהנדס נתן חוות דעת חיובית?
 ג. מה ההסתברות להתקבל לחברה?
 ד. ביום מסוים הגיעו 5 מועמדים.
 מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם קיבלו עבודה באותו היום?

(52) בכד יש 12 כדורים, חלקם אדומים וחלקם שחורים. מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד.

- א. מצא את מספר הכדורים האדומים שבכד אם ידוע כי ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם שחורים היא $\frac{4}{9}$.
 ב. חלק מהכדורים עשויים מעץ והשאר עשויים מפלסטיק. ידוע כי 25% מהכדורים האדומים עשויים מעץ וכי 50% מהכדורים העשויים מעץ הם אדומים.
 מצא את ההסתברות לבחור כדור שחור עשוי מפלסטיק.
 ג. מוציאים מהכד 5 כדורים בזה אחר זה עם החזרה.
 מה ההסתברות להוציא 4 כדורים אדומים העשויים מפלסטיק?
 ד. מוציאים מהכד 5 כדורים בזה אחר זה עם החזרה.
 ידוע כי כולם עשויים מפלסטיק, מה ההסתברות ש-3 מהם בצבע אדום?

- (53)** בבית ספר בעיר נערכו שני מבחנים. 80% מתלמידי העיר עברו את המבחן הראשון. $\frac{1}{4}$ מבין התלמידים שעברו את המבחן הראשון עברו גם את השני ו- $\frac{1}{2}$ מהתלמידים שנכשלו במבחן הראשון נכשלו גם בשני.
 א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא עבר את אחד המבחנים?
 ב. בוחרים באקראי 4 תלמידים.
 מה ההסתברות שבדיוק אחד מהם עבר את אחד המבחנים?
 ג. איזה חלק מבין התלמידים שנכשלו במבחן השני מהווה קבוצת התלמידים שנכשלו גם במבחן הראשון?

54) במפעל גדול ההסתברות שמתוך 4 עובדים לפחות אחד ירכיב משקפיים היא 0.5904.

- א. מה ההסתברות לבחור עובד שלא מרכיב משקפיים?
ידוע כי 40% מהפועלים שמרכיבים משקפיים הם מעשנים ו-20% מבין העובדים המעשנים הם מרכיבים משקפיים.
- ב. מה ההסתברות לבחור עובד שמרכיב משקפיים בלבד או מעשן בלבד?
- ג. בוחרים באקראי 5 עובדים. מה ההסתברות שרוב העובדים שנבחרו מעשנים?

55) במפעל לייצור ברגים פועלים שני פסי ייצור – פס ייצור א' ופס ייצור ב'.
ידוע כי אם בוחרים 5 ברגים אז ההסתברות ששלושה מהם מיוצרים על ידי פס הייצור השני גדולה פי 4.5 מההסתברות שאחד מהם מיוצר על ידי פס הייצור הנ"ל.
א. מצא את ההסתברות לבחור בורג המיוצר על ידי פס הייצור הראשון.
מתוך כל 100 ברגים שהמפעל מייצר 7 פגומים. ומתוך כל 10 ברגים היוצאים מפס הייצור הראשון אחד הוא פגום.
ב. מהו אחוז הברגים התקינים שמיוצרים על ידי פס הייצור השני?
ג. איזה חלק מבין הברגים הפגומים מהווים אלו שיוצאים מפס הייצור הראשון?

56) בכד יש פי 5 כדורים כחולים מאדומים. מוציאים מהכד כדור.
אם הוא כחול אז משאירים אותו בחוץ ואם הוא אדום אז מחזירים אותו לכד.
לאחר מכן מוציאים כדור נוסף מהכד. ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים היא: $\frac{175}{612}$.

- א. כמה כדורים מכל צבע יש בכד?
- ב. ידוע כי הכדור השני שנבחר הוא כחול, מה ההסתברות שהכדור הראשון שנבחר היה אדום?
- ג. חוזרים על התהליך 5 פעמים.
ידוע כי בכל חמשת הפעמים הכדור השני שהוצא הוא כחול,
מה ההסתברות שברוב הפעמים הכדור הראשון שיצא הוא אדום?

57) בחדר יש פי 4 נשים מגברים. משחקים את המשחק הבא: בוחרים באקראי אדם מהחדר. אם נבחר גבר אז הוא יוצר מהחדר ואם נבחרה אישה אז היא נשארת.
לאחר מכן בוחרים אדם נוסף.

- א. מצא כמה גברים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות שייבחרו שני אנשים שונים היא $\frac{236}{725}$.

- ב. ידוע כי בפעם השנייה נבחר גבר, מה ההסתברות שגם בפעם הראשונה ייבחר גבר?
- ג. משחקים את המשחק 4 פעמים. ידוע כי בכל הפעמים נבחר גבר בפעם השנייה. מה ההסתברות שברוב המקרים יצא גבר גם בפעם הראשונה?

(58) בעיר מסוימת נערכות בחירות. ידוע כי אם בוחרים 4 תושבים אז ההסתברות

שלפחות אחד מהם יצביע למועמד ב' היא: $\frac{65}{81}$.

א. איזה חלק מהתושבים הצביעו למועמד א'?

בעיר זו יש תושבים מבוגרים וצעירים. ידוע כי $\frac{2}{3}$ מהצעירים הצביעו למועמד א'

וכי ההסתברות לבחור מבוגר שהצביע למועמד ב' היא $\frac{2}{15}$.

ב. מהו אחוז התושבים הצעירים שהצביעו למועמד ב'?

ג. איזה אחוז מהווים התושבים הצעירים מבין אלו שהצביעו למועמד א'?

(59) לכבוד חנוכה קנתה סבתא תקווה לשתי נכדותיה, שני ושרון, סביבונים עם

סוכריות בתוכם. בכל סביבון יש 7 סוכריות שוקולד ו-4 סוכריות מנטה.

שרון לקחה את סביבון אחד והוציאה ממנו באקראי (בלי החזרה) 4 סוכריות.

א. מה ההסתברות שכל הסוכריות שהוציאה שרון הן סוכריות מנטה?

ב. שני לקחה 4 סביבונים והוציאה באקראי מכל סביבון סוכרייה אחת.

האם ההסתברות ששני תוציא 4 סוכריות מנטה גבוהה יותר או נמוכה

יותר מההסתברות שחשבת בסעיף א'? נמק.

ג. שני הוציאה באקראי סוכרייה אחת מכל סביבון מתוך ארבעת הסביבונים

שברשותה. ידוע שבין הסוכריות שבידה יש יותר סוכריות מנטה.

מה ההסתברות שכל הסוכריות שיש לשני ביד יהיו בטעם מנטה?

(60) כדי לקבל עבודה בחברת Makido יש לעבור ראיונות משני בעלי מקצוע: מהנדס

ראשי ומנכ"ל החברה. המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ברבע מהמקרים,

בשליש מהמקרים הוא נמנע מלתת חוות דעת ובשאר המקרים הוא נותן חוות

דעת שלילית. מנכ"ל החברה קורא את חוות הדעת של המהנדס וקובע את חוות

דעתו באופן הבא:

אם המהנדס נתן חוות דעת חיובית אז הוא נותן חוות דעת חיובית ב-90%

מהמקרים וב-10% מהמקרים הוא נמנע מלתת חוות דעת. אם המהנדס נמנע

מלקבוע אז המנכ"ל נותן חוות דעת שלילית במחצית מהמקרים או חיובית

במחצית מהמקרים. אם המהנדס נתן חוות דעת שלילית אז ההסתברות

שהמנכ"ל יתן חוות דעת חיובית גדולה פי 2 מההסתברות שימנע מלתת חוות

דעת וההסתברות שימנע מלתת חוות דעת גדולה פי 2 מההסתברות שייתן חוות

דעת שלילית.

א. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת חיובית לפחות באחד הראיונות?

ב. אם ידוע כי מועמד קיבל חוות דעת חיובית אחת לפחות, מה ההסתברות

שהמהנדס נמנע מלתת חוות דעת?

ג. ענה על השאלות הבאות:

- i. מה ההסתברות שמתוך 5 מועמדים, לפחות אחד יקבל עבודה אם ידוע כי כדי להתקבל לעבודה בחברה יש לקבל שתי חוות דעת חיוביות?
- ii. כיצד תשתנה התוצאה של חלק i אם כדי לקבל עבודה יש לקבל לפחות חוות דעת חיובית אחת ואף לא חוות דעת שלילית אחת?

61 בעיר מסוימת נערכו בחירות מקומיות.

ידוע כי אם בוחרים באקראי 4 אזרחים ההסתברות שתמצא אישה אחת בניהם קטנה פי 16 מההסתברות להיתקל באישה באופן אקראי.

א. מה הוא אחוז הגברים בעיר?

בעיר שלושה מועמדים. $\frac{1}{11}$ מהמצביעים למועמד א' הם גברים,

60% מהמצביעים למועמד ב' הם גברים ו-25% מהמצביעים למועמד ג' הם גברים. אחוז המצביעים למועמד ג' הוא 20%.

ב. איזה מועמד קיבל את רוב הקולות?

ג. בוחרים באקראי 4 נשים.

מה ההסתברות ששלושה מהן הצביעו למועמד המנצח?

62 בחדר x גברים ו- $x+2$ נשים. זורקים קוביית משחק מאוזנת.

אם מתקבל מספר הגדול מ-4 אז מוסיפים לחדר x גברים ואם מתקבל מספר הקטן או שווה ל-4 אז מוסיפים לחדר x נשים. לאחר מכן מוציאים אדם מהחדר.

א. מצא כמה נשים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות לבחור אישה היא $\frac{21}{33}$.

ב. ידוע כי יצאה אישה מהחדר.

מה ההסתברות שהמספר בקובייה היה קטן או שווה ל-4?

אנשי החדר הנמצאים בו במקור (לפני זריקת הקובייה) לובשים חולצות אדומות או לבנות בלבד. ידוע כי החלק היחסי של האנשים הלובשים חולצות לבנות בחדר גדול פי 16 מהחלק היחסי של הגברים הלובשים חולצות אדומות. כמו כן פרופורציית הגברים מבין כל אלו שלובשים חולצות אדומות היא 0.25.

ג. מצא מה ההסתברות לבחור גבר הלובש חולצה אדומה בחדר.

ד. בוחרים 5 אנשים מהחדר (עם החזרה) וידוע כי כולם לובשים חולצות אדומות. מה ההסתברות שרובם נשים?

63 באוניברסיטה מסוימת ידוע כי חלק מהסטודנטים נעזרים בספרי לימוד חיצוניים להעשרת הידע שלהם, וכי ההסתברות לבחור 2 סטודנטים הנעזרים בספרי לימוד חיצוניים קטנה ב-0.1 מההסתברות לבחור שני סטודנטים שאינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים.

א. מהו אחוז הסטודנטים שנעזרים בספרי לימוד חיצוניים?
 האוניברסיטה מוכרת ספרי לימוד ב-3 מקצועות לכלל הסטודנטים: ספר א', ספר ב' וספר ג'. כל סטודנט יכול לקנות רק ספר אחד.
 ידוע כי כמות הסטודנטים שקנו את ספר א' וכמות הסטודנטים שקנו את ספר ג' זהות. כמו כן, $\frac{6}{7}$ מאלו שקנו את ספר ג' נעזרים גם בספרים חיצוניים. $\frac{1}{3}$ מהסטודנטים שקנו את ספר ב' נעזרים בספרי לימוד חיצוניים וכמות הסטודנטים שקנו את ספר א' ונעזרים בספרי לימוד חיצוניים מהווים $\frac{1}{9}$ מכלל הסטודנטים שנעזרים בספרי לימוד חיצוניים.

ב. מהו אחוז הסטודנטים שקנו את ספר ב' ואינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים?
 ג. איזה חלק מהווים הסטודנטים שקנו את ספר ג' מכלל הסטודנטים שאינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים?

ד. בוחרים 4 סטודנטים שאינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים. מה ההסתברות שאחד מהם קנה את ספר ג'?

תשובות סופיות:

- (47) א.i. $\frac{17}{30}$ א.ii. $\frac{2}{17}$ ב. $\frac{7}{20}$ ג. $\frac{71}{150}$ ד. $\frac{32}{75}$
- (48) א. $P = 0.1$ ב. $P = 0.0486$ ג. $\frac{15}{19}$
- (49) א. $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{4}$ ב. $P(\bar{A}) = 0.8$ ג. $P_6(3) = 0.1318$
- (50) א. 30% ב. $P = 0.4$ ג. $\frac{1}{3}$ ד. $P = \frac{32}{81}$
- (51) א. $\frac{27}{50}$ ב. $\frac{2}{9}$ ג. $\frac{31}{50}$ ד. $P = 0.34414$
- (52) א. 4 כדורים. ב. $\frac{7}{12}$ ג. $\frac{15}{1024} = 0.0146$ ד. 0.1323
- (53) א. $P = 0.7$ ב. $P = \frac{189}{2500}$ ג. $\frac{1}{7}$
- (54) א. $P = 0.8$ ב. $P = 0.44$ ג. $P = 0.31744$
- (55) א. $P = 0.4$ ב. 95% ג. $\frac{4}{7}$
- (56) א. 15 כחולים ו-3 אדומים. ב. $\frac{17}{101}$ ג. 0.03645
- (57) א. 6 גברים ו-24 נשים. ב. הסתברות לגבר בפעם הראשונה: $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{141}$
- ג. 0.0193
- (58) א. $\frac{2}{3}$ ב. 20% ג. 60%
- (59) א. $\frac{1}{330}$ ב. גבוהה יותר $\left(\frac{256}{14641} > \frac{1}{330}\right)$ ג. $\frac{1}{8}$
- (60) א. $\frac{55}{84}$ ב. $\frac{14}{55}$ ג.i. 0.7204 ג.ii. 0.9324
- (61) א. 25% ב. מועמד א'. ג. $\frac{2}{3}$
- (62) א. 5 נשים. ב. $\frac{16}{21}$ ג. 0.05 ד. $\frac{459}{512}$
- (63) א. 45% ב. 20% ג. $\frac{1}{11}$ ד. $P = 0.2732$

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 15 - התפלגות נורמלית

תוכן העניינים

1. מבוא להתפלגות נורמלית (ללא ספר)
2. השכיח והחציון בגרף ההתפלגות הנורמלית (ללא ספר)
3. חישובי הסתברויות בגרף ההתפלגות הנורמלית (ללא ספר)
4. חישובי כמויות (ללא ספר)
5. סרטוט גרף התפלגות וחישובי סימטריה (ללא ספר)
6. מציאת הממוצע וסטיית התקן (ללא ספר)
7. חצאי סטיית תקן בגרף ההתפלגות (ללא ספר)
8. שאלות מסכמות כדוגמת המאגר (ללא ספר)

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 16 - העשרה - סימן הסכימה (סיגמה)

תוכן העניינים

1. כללי 109

סימן הסכימה (סיגמה):

שאלות:

(1) כתוב בפירוט את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$	ב. $\sum_{k=1}^4 2k$	ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$
ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$	ה. $\sum_{t=1}^8 tx^t$	ו. $\sum_{k=4}^{10} na_k$
ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$	ח. $\sum_{k=-1}^3 (k^2 + 1)$	ט. $\sum_{l=1}^3 (l^2 - x_l - 4)$

(2) כתוב את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$
ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$
ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$
ד. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8$
ה. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 44 \cdot 45$
ו. $3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + 21 \cdot 8$
ז. $5^2 + 7^2 + \dots + 27^2$
ח. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11}$
ט. $\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \frac{14}{81} + \frac{18}{243}$
י. $4 + \frac{8}{5} + \frac{12}{25} + \frac{16}{125} + \frac{20}{625}$

(3) חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$	ב. $\sum_{k=1}^{10} (2k + 4k^2)$	ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$
ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3 - k}{k+1}$	ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$	ו. $\sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 1)(k-2)$

* תוכל להיעזר בנוסחאות הבאות: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

(4) חשב את הסכומים הבאים :

$$\text{א. } \sum_{k=1}^{20} \frac{5 \cdot 4^k + 8^k}{2^k} \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{11} \frac{2 \cdot 4^{k+2} + 10^k}{0.4^k} \quad \text{ג. } \sum_{k=10}^{20} 2^{2k+10}$$

$$* \text{ תוכל להיעזר בנוסחה הבאה: } \sum_{k=1}^n a^k = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1} \quad (a \neq 1)$$

(5) חשב את הסכומים הבאים :

$$\text{א. } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2 \quad \text{ב. } 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 24^2$$

$$\text{ג. } 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 22^2 \quad \text{ד. } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2$$

(6) הוכח כי :

$$\text{א. } \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+4}}{k+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{2k+6}}{k+3}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=4}^{n-3} \frac{4k+17+2^{2k}}{k+1} = \sum_{k=8}^{n+1} \frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$$

(7) חשב את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום :

$$\text{א. } \sum_4^{11} k^2 \quad \text{ב. } \sum_{10}^{20} 4^{2k}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + 4^8 + 4^9 + 4^{10}$$

$$\text{ב. } 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

$$\text{ג. } 4a_4 + 4a_5 + 4a_6 + 4a_7 + 4a_8 + 4a_9 + 4a_{10}$$

$$\text{ד. } 4 \cdot 7^2 a_7 + 4 \cdot 8^2 a_8 + 4 \cdot 9^2 a_9 + 4 \cdot 10^2 a_{10} + 4 \cdot 11^2 a_{11} + 4 \cdot 7^2 a_7$$

$$\text{ה. } 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + 8x^8$$

$$\text{ו. } na_5 + na_6 + na_7 + na_8 + na_9 + na_{10} + na_{11}$$

$$\text{ז. } 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n$$

$$\text{ח. } ((-1)^2 + 1) + (0^2 + 1) + (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1)$$

$$\text{ט. } (1^2 - x_2 - 4) + (2^2 - x_4 - 4) + (3^2 - x_6 - 4)$$

$$(2) \quad \text{א. } \sum_{k=0}^7 2^k \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{10} 2k \quad \text{ג. } \sum_{k=0}^9 (2k+1) \quad \text{ד. } \sum_{k=1}^7 k(k+1)$$

$$\text{ה. } \sum_{k=1}^{22} (2k-1)2k \quad \text{ו. } \sum_{k=1}^7 3k(k+1) \quad \text{ז. } \sum_{n=3}^{14} (2n-1)^2$$

$$\text{ח. } \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{ט. } \sum_{k=1}^5 \frac{4k-2}{3^k} \quad \text{י. } \sum_{k=1}^4 \frac{4k}{5^{k-1}}$$

$$(3) \quad \text{א. } 220 \quad \text{ב. } 1650 \quad \text{ג. } 255 \quad \text{ד. } 9160 \quad \text{ה. } 28 \quad \text{ו. } 4545$$

$$(4) \quad \text{א. } 5 \cdot (2^{21} - 2) + \frac{4}{3} (4^{20} - 1) \quad \text{ב. } 32 \cdot \frac{10(10^{11} - 1)}{10 - 1} + \frac{25(25^{11} - 1)}{25 - 1}$$

$$\text{ג. } 2^{10} \left[\frac{4(4^{20} - 1)}{4 - 1} - \frac{4(4^9 - 1)}{4 - 1} \right]$$

$$(5) \quad \text{א. } 2870 \quad \text{ב. } 2856 \quad \text{ג. } 2024 \quad \text{ד. } 969$$

$$(6) \quad \text{הוכחה.}$$

$$(7) \quad \text{א. } 9 \cdot 8 + 6 \cdot \frac{8(8+1)}{2} + \frac{8(8+1)(2 \cdot 8 + 1)}{6} \quad \text{ב. } 4^{18} \cdot \frac{16(16^{11} - 1)}{16 - 1}$$

מכינה במתמטיקה לתלמידי מדעי הרוח והחברה

פרק 17 - העשרה - הבינום של ניוטון

תוכן העניינים

1. כללי 112

הבינום של ניוטון:

סיכום כללי:

מושג העצרת:

מסמנים: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ כאשר n מספר טבעי.
מגדירים: $0! = 1$.

המקדם הבינומי:

הביטוי $\binom{n}{k}$ נקרא המקדם הבינומי ומוגדר ע"י: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ לכל n, k טבעיים
כאשר $0 \leq k \leq n$.

הבינום של ניוטון:

נוסחת הבינום של ניוטון ניתנת לכתיבה באופן הבא: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
לכל n טבעי.

ניתן לחשב את האיבר העומד במקום ה- k ע"י: $T_k = \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^{k-1}$.

משולש פסקל:

משולש מספרים שבו כל מספר בשורה מסוימת
שווה לסכום המספרים שבשורה שמעליו
באופן המתואר:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & \ddots & & & & \vdots & & & & \ddots & & & &
 \end{array}$$

שאלות:

(1) חשב, ללא מחשבון:

א. $\frac{4! \cdot 7!}{0! \cdot 10!}$

ב. $\frac{14! \cdot 20!}{10! \cdot 17!}$

(2) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2-n) = n!$

ב. $(n-1)!n^2 + n! = (n+1)!$

ג. $\frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} + \frac{n^2-2}{(n+1)!}$

(3) חשב:

ד. $\binom{14}{11}$

ה. $\binom{10}{0}$

ו. $\binom{4}{1}$

ז. $\binom{5}{3}$

(4) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

ב. $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$

ג. $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

(5) הוכח באינדוקציה שלכל $n \geq 2$ טבעי מתקיים: $\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-2} = \binom{n}{2}$

(6) רשום את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $(a+b)^4$

ב. $(x+2)^5$

ג. $(x-4)^3$

(7) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ לכל $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$.

ב. נסח והוכח (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

(8) הוכח שלכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים :

א. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.

ב. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$.

ג. $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 9\binom{n}{2} - \dots + 3^n \binom{n}{n} = 4^n$.

(9) מצא את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום $\left(\frac{1}{2a} + 2a^2\right)^{10}$.

(10) בפיתוח של $\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{a}\right)^{12}$, ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא a^7 . מצא את מקום האיבר ואת ערכו.

(11) מצא, בפיתוח של $\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right)^{10}$, איבר שאינו מכיל את x , וחשב את ערכו.

(12) ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא, בפיתוח של $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a} + \frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$, את המקדם של $\frac{1}{x}$.

ב. חשב את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם $a = b = 1$.

(13) המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום $(a+b)^n$, הוא 15. מצא את n .

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{1001}{285}$
- (2) הוכחה.
- (3) א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 364
- (4) הוכחה.
- (5) הוכחה.
- (6) א. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- ב. $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
- ג. $(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$
- (7) הוכחה.
- (8) הוכחה.
- (9) $T_4 = \frac{15}{2a}$
- (10) $T_7 = 924a^7$
- (11) $T_9 = 45$
- (12) א. $\frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6}$ ב. 2^{18}
- (13) $n = 6$