

מד"ח וטורי פורייה



תוכן העניינים

1. משוואות מסדר ראשון 1
2. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני (ללא ספר) 2
3. בעיות שטורם ליוביל 4
4. מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים 9
5. טורי פורייה 19
6. משוואת הגלים (ללא ספר) 6
7. משוואת החום (ללא ספר) 7
8. אינטגרל אנרגיה (ללא ספר) 8
9. משוואת לפלס (ללא ספר) 9

מד"ח וטורי פורייה

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. שיטת הקווים האופייניים..... 1
2. שיטת לגראנג'..... 2

שיטת הקווים האופייניים

שאלות

(1) פתרו את המשוואה עבור $\alpha \neq \frac{1}{2}$ קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = 0 \quad \gamma = \{y = \alpha x\} \quad u|_\gamma = x^2 + y^2$$

(2) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x - y$ $\gamma = \{y = x^2, x \geq 0\}$ $3u_x - 2u_y = 0$

(3) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x + \sin(xy)$ $\gamma = \{y = x^2, x \leq 0\}$ $u_x + 2u_y = 0$

(4) פתרו את המשוואה $y \geq 0$ $u_x - u_y = -u$ $u(x, 0) = x^2 - x^4$

(5) פתרו את המשוואה $u(x, -x) = (x+1)e^{-x}$ $2u_x - 3u_y + 2u = 0$

(6) פתרו את המשוואה $y \geq e^{-x}$ $u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2}$ $u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$

(7) נתון כי $u(x, y)$ הוא פתרון של הבעיה

$$\begin{aligned} y^2 u_x + u_y &= -u & 0 < x < \infty, \quad y > 0 \\ u(0, y) &= 0 & y > 0 \\ u(x, 0) &= 1 & x > 0 \end{aligned}$$

(8) פתרו את הבעיה כאשר a קבוע ממשי.

$$\begin{aligned} 2u_x + u_y &= -u & 0 < y < x \\ u(x, 0) &= a \cdot \cos(x) + \sin(x) & x > 0 \\ u(y, y) &= 0 & y > 0 \end{aligned}$$

שיטת לגראנג

שאלות

1 מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד"ח $xu_x + yuu_y = u$

2 מצאו פתרון כללי למשוואה $x^2u_x + y^2u_y = u^2$

3 מצאו פתרון כללי למשוואה $xu \cdot u_x + yu \cdot u_y = -xy$, כאשר $x, y, u > 0$

4 מצאו פתרון כללי למשוואה $(y^2 + u^2)u_x - xyu_y = xu$, כאשר $x, y, u > 0$

רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ אז $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

5 מצאו פתרון למשוואה
$$\begin{cases} xu_x + yu_y = 2xy & x, y > 0 \\ u(x, 1) = x & x > 0 \end{cases}$$

6 פתרו את המשוואה
$$\begin{cases} e^y u_x - e^x u_y = -e^{x+y} u & u > 0 \\ u(x, 0) = 1 \end{cases}$$

7 ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{e^x \sqrt{y+1}} u_x + yu_y = y^2 u$

בתחום $u, y > 0$

ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

8 מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\cos(y)u_x + \sin(y)u_y = e^y \sin(y)u$, בתחום שבו $0 < y < \pi$ ו- $u > 0$.

9 מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{y}u_x + \frac{1}{x}u_y = 2$

10 מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+y)u_x + (y-x)u_y = x^2 - y^2$, בתחום $x, y > 0$.

11 נתון כי $u(x, y) = \frac{e^y}{y+1} F\left(\frac{y+1}{x^2+1}\right)$ הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

א. מצאו את הפונקציות a, b, c .

ב. מצאו פתרון פרטי המקיים $u(0, y) = y^2$.

תשובות סופיות

$$F\left(\frac{x}{u}, \ln(y) - u\right) = 0 \quad (1)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{F\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$u = \sqrt{F\left(\ln \frac{x}{y}\right) - xy} \quad (3)$$

$$F\left(\frac{y}{u}, x^2 + y^2 + u^2\right) = 0 \quad (4)$$

$$u(x, y) = x \cdot y \quad (5)$$

$$u(x, y) = e^{e^y - 1} \quad (6)$$

$$u(x, y) = e^{\frac{1}{2}y^2 - F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}x}\right)} \quad (7) \quad \text{א. ב. שאלת הוכחה.}$$

$$u(x, y) = e^{e^y - F(e^{-x} \sin y)} \quad (8)$$

$$u(x, y) = xy - F\left(\frac{x}{y}\right) \quad (9)$$

$$u(x, y) = \frac{y^2 + 2xy - x^2 - F\left(\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4} \quad (10)$$

$$u(x, y) = \frac{e^y}{y+1} \cdot \frac{\left(\frac{y+1}{x^2+1} - 1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1} - 1}} \cdot \frac{y+1}{x^2+1} \quad (11) \quad \text{א. } \underbrace{(x^2+1)}_a u_x + \underbrace{2x(y+1)}_b u_y = \underbrace{2xyu}_c \quad \text{ב.}$$

מד"ח וטורי פורייה

פרק 2 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

1. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני (ללא ספר)

מד"ח וטורי פורייה

פרק 3 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל 4
2. טורי קוסינוסים וסינוסים (ללא ספר)

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

(1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית

$$\cdot (p(x)y'(x))' + (\lambda r(x) - q(x))y(x) = 0$$

(משוואת הרמיט) $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ א.

(משוואת בסל) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda)y = 0$ ב.

(2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y'' + e^{2x}y' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + 4y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

(3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y'' + 4y' + xy + \lambda e^x y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות 4-7:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y(0) - y'(0) = 0 \\ y(\pi) - y'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הבעיה הבאה:}$$

- א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
ב. פתרו את הבעיה.

(9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \ell \\ y(0) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$$

$$ב. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 1 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

1. פתחו את הפונקציה $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

התחל את הטור מ- $n=1$.

2. מה סכום הטור ב- $x=0$?

האם הוא שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$?

$$ג. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 2 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

פתחו את הפונקציה $f(x) = x, 0 \leq x \leq 2$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

(10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

ב. פתחו את הפונקציה $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq \pi$

לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.

התחילו את הטור מ- $n=1$.

$$(11) \text{ נתונה הבעיה: } \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, & 0 < x < e \\ y(1) = 0 \\ y'(e) = 0 \end{cases}$$

- א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
 ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.
 ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את $f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e} \leq x \leq e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.

- הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.
 ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x = \sqrt{e}$, $x = 1.5$, $x = 2$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\begin{aligned} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\pi n) = (-1)^n \\ \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin(\pi n) = 0 \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (e^{-x^2} y')' + (\lambda e^{-x^2} - 0)y = 0 \quad \text{ב. } (xy')' + \left(\lambda \left(-\frac{1}{x} \right) - (-x) \right) y = 0$$

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \text{פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(5) \quad \text{פונקציות עצמיות : } \phi_n(x) = n \cos nx + \sin nx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \text{ בנוסף, } \lambda = -1 \text{ הוא עי"ע של הבעיה,}$$

$$\text{המתאים לפונקציה העצמית } \varphi(x) = e^x.$$

$$(6) \quad \text{פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = \sin(\omega_n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(7) \quad \text{פונקציות עצמיות : } y_n(x) = \sin(\omega_n x) - \omega_n \cos(\omega_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{בנוסף, } \lambda_0 = 0 \text{ הוא עי"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית } \varphi(x) = x - 1.$$

$$(8) \quad \text{א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = e^x \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(9) \quad \text{א. פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. סכום הטור ב- } x=0 \text{ הוא } 0, \text{ והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- } x=0.$$

$$\text{ג. } (0 < x < 2) \text{ כאשר, } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right).$$

$$(10) \quad \text{א. פונקציות עצמיות : } \varphi_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2} x \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים : } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. } 0 < x < \pi \text{ כאשר, } e^x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)} (-1)^{n+1} - 1}{1^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right).$$

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות : $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \ln x\right)$$

ערכים עצמיים : $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\lambda_n = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + n\right)^2$$

ג. שאלת הוכחה.

ד.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2 \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \ln x\right)$$

ה. סכום הטור ב- $x = \sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x = 1.5$ הוא 1 ; וב- $x = 2$ הוא 0.

מד"ח וטורי פורייה

פרק 4 - מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים

תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים 9
2. מערכות אורתונורמליות 11
3. משפט קירוב מיטבי 15
4. תרגילים מסכמים 18

מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים:

שאלות:

- (1) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a, b]$.
הוכיחו כי $\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$ מהווה נורמה במרחב זה.
- (2) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a, b]$.
הוכיחו כי $\|f\| = \max_{[a, b]} |f(x)|$ מהווה נורמה במרחב זה.
- (3) יהי $V = R_{\leq 2}[x]$ המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה / שווה מ-2 מעל הממשיים.
לכל שני פולינומים $p(x), q(x)$ ב- V נגדיר:
 $\langle p(x), q(x) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$
 הוכיחו כי $\langle \cdot, \cdot \rangle$ הינה מכפלה פנימית.
- (4) נגדיר את המרחב $V = C^1[-1, 1]$ (מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע $[-1, 1]$).
נגדיר: $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx + \int_{-1}^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx$
 הוכיחו כי $\langle \cdot, \cdot \rangle$ הינה מכפלה פנימית.
- (5) הוכיחו כי בכל מרחב מכפלה פנימית E מתקיים לכל $f, g \in E$:
 א. $\forall u \in E \quad \langle u, f+g \rangle = \langle u, f \rangle + \langle u, g \rangle$
 ב. $\operatorname{Re} \langle f, g \rangle = \frac{1}{4} (\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2)$
 ג. $\operatorname{Im} \langle f, g \rangle = \frac{1}{4} (\|f+ig\|^2 - \|f-ig\|^2)$
 ד. $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\{\|f\|^2 + \|g\|^2\}$ (שוויון המקבילית).
- (6) יהי V מרחב מכפלה פנימית.
נסמן $w = u + v$ וקטורים במרחב.
הוכיחו כי אם $\langle u, v \rangle = 0$ אזי $\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

(7) נגדיר את המרחב V להיות מרחב הפונקציות $f(x)$ הממשיות הגזירות ברציפות פעמיים בקטע $[a, b]$ (כלומר $f''(x)$ רציפה ב- $[a, b]$).

בדקו האם $\langle f, g \rangle = \int_a^b f''(x)g''(x)dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

(8) נגדיר את המרחב V להיות מרחב של פונקציות $f(x)$ ממשיות וגזירות ברציפות בקטע $[-1, 1]$ (כלומר הנגזרת $f'(x)$ רציפה בקטע $[-1, 1]$) כך ש- $f(-1) = 0$.

נגדיר $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)dx$.

הוכיחו כי $\langle f, g \rangle$ מהווה מכפלה פנימית במרחב V .

(9) יהי V מרחב הפונקציות הרציפות המרוכבות בקטע $[a, b]$.

הוכיחו כי $\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx + \max_{[a,b]} |f(x)|$ מהווה נורמה במרחב V .

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7) $f(x) = 1$

(8) הוכחה.

(9) הוכחה.

מערכות אורתונורמליות:

שאלות:

(1) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x) = \cos(nx)$ במרחב $L^2[-\pi, \pi]$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

עם המכפלה הפנימית

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

(2) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x) = \sin(nx)$ במרחב $L^2[0, \pi]$

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

עם המכפלה הפנימית

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

(3) יהי מרחב מכפלה פנימית V ותהי $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ מערכת של פולינומים כך

ש- $\varphi_n(x)$ הינו פולינום ממעלה n .

$$\langle \varphi_n(x), x^m \rangle = 0 \quad m < n$$

מתקיים

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

(4) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[e^{-\pi}, e^{\pi}]$ עם המכפלה

$$\langle f, g \rangle = \int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}} f(x) \overline{g(x)} \frac{1}{x} dx$$

הפנימית

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

(5) נניח כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2[a, b]$ עם

המכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle_1 = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$. יהיו $c > 0$ ו- d ממשי כלשהוא.

הוכיחו כי המערכת $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $\psi_n(x) = \sqrt{c} \cdot \varphi_n(c \cdot x + d)$ הינה מערכת

אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2\left[\frac{a-d}{c}, \frac{b-d}{c}\right]$ עם המכפלה

הפנימית $\langle f, g \rangle_2 = \int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(x) \overline{g(x)} dx$.

(6) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^N$ מערכת אורתונורמלית סופית.

הוכיחו כי לכל $v \in V$ מתקיים $\left\| \sum_{n=1}^N \langle v, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle v, e_n \rangle|^2$.

מערכת פולינומי צ'בישב:

(7) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1, 1)$

ונגדיר ב- K מכפלה פנימית: $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

הוכיחו כי אוסף הפונקציות $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $T_n(x) = \cos[n \cdot \arccos(x)]$

(הנקראת גם פולינומי צ'בישב) הינה מערכת אורתוגונלית ב- K ומצאו

קבועים α_n כך שהמערכת $\{\alpha_n T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית.

מערכת פולינומי הרמיט:

(8) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות

למקוטעין ומקיימות את התנאי $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \cdot e^{-x^2} dx < \infty$.

נגדיר על K מכפלה פנימית $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \cdot e^{-x^2} dx$

הוכיחו כי פולינומי הרמיט, המוגדרים על ידי הנוסחה $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]$

(נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתוגונלית במרחב K ומצאו להם קבועי נרמול.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח כי לכל n, k טבעיים כך ש- $k < n$

$$\text{מתקיים } \langle H_n, x^k \rangle = 0. \text{ ניתן להיעזר בעובדה כי } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

מערכת פולינומי לג'נדר:

(9) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1, 1)$

$$\text{ונגדיר ב- } K \text{ מכפלה פנימית: } \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\text{הוכיחו כי פולינומי לג'נדר, הנתונים על ידי נוסחת רודריגז } P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

$$\text{מהווים מערכת אורתוגונלית ב- } K \text{ וכי } \langle P_n, P_n \rangle = \frac{2}{2n+1} \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n, k טבעיים כך ש- $k < n$ מתקיים.

$$\langle P_n, x^k \rangle = 0$$

מערכת פולינומי לגר:

(10) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות

$$\text{למקוטעין ומקיימות את התנאי } \int_0^{\infty} |f(x)|^2 \cdot e^{-x} dx < \infty$$

$$\text{נגדיר על } K \text{ מכפלה פנימית } \langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x} dx$$

$$\text{הוכיחו כי פולינומי לגר, המוגדרים על ידי הנוסחה } L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^n e^{-x}]$$

(נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתונורמלית במרחב K .

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n, k טבעיים כך ש- $k < n$ מתקיים.

$$\langle L_n, x^k \rangle = 0$$

$$\text{ניתן להיעזר בנוסחה } \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

תשובות סופיות:

- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) הוכחה.
- (4) הוכחה.
- (5) הוכחה.
- (6) הוכחה.
- (7) מערכת פולינומי צ'בישב : הוכחה.
- (8) מערכת פולינומי הרמיט : הוכחה.
- (9) מערכת פולינומי לג'נדר : הוכחה.
- (10) מערכת פולינומי לגר : הוכחה.

קירוב מיטבי:

שאלות:

(1) מצאו את נקודות המינימום של הפונקציה:

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \alpha - \beta \cos(x) - \gamma \cos(10x)|^2 dx$$

א. כאשר $f(x) = \cos^2(x)$

ב. כאשר $f(x) = x^3$

ג. כאשר $f(x) = \sin(x)$

(2) במרחב $C[-\pi, \pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$.

נגדיר תת מרחב $W = \text{span}\{1, \sin(x), \cos(x), x\}$ ופונקציה $f(x) = |x|$.

מצאו פונקציה $g \in W$ כך ש- $\|f - g\|$ מינימלי.

הערה:

שימו לב שהמערכת $\{1, \sin(x), \cos(x), x\}$ איננה אורתונורמלית.

(3) נתבונן במרחב $C[-1, 1]$ מעל $\mathbb{C}$.

א. הוכיחו כי $\langle f, g \rangle = f(-1) \overline{g(-1)} + \int_{-1}^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx$ מהווה מכפלה פנימית.

ב. מצאו את כל הערכים של $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$|-1 - \alpha + \beta - \gamma|^2 + \int_{-1}^1 |3x^2 - \beta - 2\gamma x|^2 dx$$

(4) נתבונן במרחב $C[-1, 1]$ מעל $\mathbb{C}$.

נתון כי $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx + \int_{-1}^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

מצאו את כל הערכים של $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$\int_{-1}^1 |x^3 - \alpha - \beta x - \gamma x^2|^2 dx + \int_{-1}^1 |3x^2 - \beta - 2\gamma x|^2 dx$$

$$(5) \quad \text{תהי } V \text{ קבוצת הפונקציות הרציפות על הישר הממשי המקיימות } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx < \infty$$

א. הוכיחו כי V עם הפעולות הרגילות של חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x^2} dx$$

ב. הוכיחו כי כל הפולינומים שייכים ל- V .

ג. מצאו את הקירוב המיטבי של x^3 על מרחב הפולינומים מדרגה 2 לכל היותר.

הערה:

ניתן להשתמש באינטגרלים הבאים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$(6) \quad \text{יהי } L \text{ מרחב וקטורי של פונקציות ממשיות ורציפות למקוטעין על הקטע } [1, \infty)$$

$$\text{המקיימות } \int_1^{\infty} x |f(x)|^2 dx < \infty$$

$$\langle f, g \rangle = \int_1^{\infty} f(x) g(x) x dx$$

$$W = \text{span} \left\{ \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} \right\}$$

$$P_W \left(\frac{x}{e^{\sqrt{x}}} \right)$$

$$(7) \quad \text{תהי } f \in C[-1, 1]$$

הוכיחו כי לכל פונקציה אי זוגית $g \in C[-1, 1]$

$$\frac{1}{4} \int_{-1}^1 |f(x) + f(-x)|^2 dx \leq \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)|^2 dx$$

תשובות סופיות:

(1) א. $\alpha = 0.5$, $\beta = \gamma = 0$

(2) $g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(x)$

(3) א. הוכחה.

(4) $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = \frac{9}{10}$

(5) א. הוכחה.

(6) $\frac{28}{e} x^{-\frac{3}{2}} - \frac{36}{e} x^{-\frac{5}{2}}$

(7) הוכחה.

ב. $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ ג. $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$

ב. $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$

ב. הוכחה. ג. $P_w(x^3) = \frac{3}{2}x$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

- (1) יהי V מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$.
 נגדיר על V מכפלה פנימית: $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \overline{g'(x)} dx$.
 אין צורך להוכיח כי זאת מכפלה פנימית.
 א. הוכיחו כי המערכת $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורתוגונלית במרחב V .
 מצאו נורמה של e^{inx} המושרית מהמכפלה הפנימית הנ"ל.
 ב. הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f \in V$ המקיימת:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - in \cdot f'(x)) e^{-inx} dx \right|^2}{1 + n^2} = 1$$

(2) נגדיר $a_n = \min_{\alpha \in \mathbb{C}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sqrt{|\cos(x)|} - \alpha \cos(nx) \right|^2 dx \right]$. חשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(3) נגדיר $R_n = \min_{a, b \in \mathbb{C}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sqrt{|x|^3} - a \sin(nx) - b \sin([n+1]x) \right|^2 dx \right]$. חשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n$.

(4) נגדיר $g(a, b) = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \min\{1, |x|\} - a - b \sin(nx) \right|^2 dx \right]$.

א. מצאו את הערכים a, b עבורם $g(a, b)$ מינימלית.

ב. חשבו את $g(a, b)$ עבור a, b אלו.

תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(2) $\frac{4}{\pi}$

(3) $\frac{\pi^3}{2}$

(4) א. $a = 1 - \frac{1}{2\pi}$, $b = 0$. ב. $g(a, b) = 2 - \frac{4}{3\pi} - 2 \left[1 - \frac{1}{2\pi} \right]^2$.

מד"ח וטורי פורייה

פרק 5 - טורי פורייה

תוכן העניינים

1. הקדמה	(ללא ספר)
2. טור פורייה ממש	19
3. טור פורייה מרוכב	20
4. משפט פרסבל	21
5. רימן לבג	24
6. משפט דיריכלה	25
7. המשכה זוגית ואי זוגית	27
8. גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה	28
9. התכנסות במידה שווה של טורי פורייה	31
10. טור פורייה בקטע כללי	32
11. משפט הקונבולוציה	34
12. תרגילים מסכמים	36

טור פורייה ממשי:

שאלות:

- (1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$.
- (2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$.
- (3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \sin(|x|)$.
- (4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

תשובות סופיות:

- (1)
$$\sum_{n=1}^{20} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx)$$
- (2)
$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$
- (3)
$$\sin(|x|) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-(2k)^2} \cos(2kx)$$
- (4)
$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n)}{n} \cos(nx)$$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

(2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$.

(3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$.

(4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ -2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$.

(5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin(x) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$.

תשובות סופיות:

$$x \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \left\{ -\pi \frac{(-1)^n}{in} + \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right\} e^{inx} \quad (2)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} - 3(-1)^n \frac{\pi}{in} \right] e^{inx} \quad (3)$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{3}{\pi i (2k-1)} e^{i(2k-1)x} \quad (4)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{4i} e^{ix} - \frac{1}{4i} e^{-ix} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - (2k)^2} e^{i[2k]x} \quad (5)$$

משפט פרסבל:

שאלות:

(1) באמצעות טור הפורייה $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx)$, חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(2) נתון כי טור הפורייה הממשי של $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$ בקטע $[-\pi, \pi]$

הינו $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. הוכיחו כי $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$

(3) נתונות הפונקציות $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ x + \pi & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ ו- $g(x) = x$.

מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

(4) מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$ ובאמצעותו

חשבו את הסכום $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

(5) נתונות הפונקציות $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ e^{x^2} & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ ו- $g(x) = \begin{cases} 0 & 1 < x \leq \pi \\ \frac{1}{x^2+1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- $f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}$, $g \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \cdot \overline{g_n} = \frac{1}{8}$.

(6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π :

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad -\pi \leq x < \pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi < x < 3\pi$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$.

(7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi, \pi]$ על ידי הנוסחה: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}} e^{inx}$.

חשבו $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx$.

(8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $p \neq 0$

כדי להוכיח את הזהות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$.

(9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} h^2 & h \leq x \leq \pi \\ 0 & -\pi \leq x \leq h \end{cases}$ בקטע $[-\pi, \pi]$

כאשר $0 \neq h \in [-\pi, \pi]$ ובשוויון פרסבל כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n \cos(2n)}{n^2}$.

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{32}$.

ג. הסיקו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$.

תשובות סופיות:

$$\frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

$$\frac{\pi^2}{4} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$\sinh(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} \sin(nx) \quad \text{ב.} \quad (6) \quad \text{א. ראו סרטון.}$$

ג. ≈ 0.769

$$8\pi \quad (7)$$

(8) הוכחה.

$$\frac{\pi^2 - 4}{4} \quad (9)$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx} \quad \text{א.} \quad (10) \quad \text{ב. הוכחה.}$$

ג. ראו סרטון.

רימן לבג:

שאלות:

(1) חשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x} \cos(\sqrt{|x|}) \sin(nx) dx$

(2) חשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2 + 1} e^{i \cdot n^2 t} dt$

(3) הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{se^{s^2}}{\sqrt{s^2 + 2017}} e^{inx} dx \right) = 0$

תשובות סופיות:

(1) 0

(2) 0

(3) הוכחה.

משפט דיריכלה:

שאלות:

(1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$ לטור פורייה

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{רמז: הציבו } x = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2x}{\pi} & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור } 2\pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi, 3\pi]$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

$$\text{ג. הוכיחו כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(3) במרחב הפונקציות $L^2_{PC}[-\pi, \pi]$ נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$.

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $f(x)$.

$$\text{ב. חשבו את הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\text{ג. חשבו את הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\text{ד. חשבו את הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \cos(ax)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר a

אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

$$\text{א. } \frac{1}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\pi a + \pi n} + \frac{1}{\pi a - \pi n} \right]$$

$$\text{ב. } \cot(\pi a) = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi a + \pi n} - \frac{1}{\pi a - \pi n}$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. ראו סרטון.

ב. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$ ג. הוכחה.

(3) א. $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ ב. $\frac{\pi^4}{90}$ ג. $\frac{\pi^2}{-12}$ ד. $\frac{\pi^2}{6}$

(4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0, \pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0 < x < \pi$

$$x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos([2k-1]x) \text{ מתקיים}$$

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = 1$ בקטע $[0, \pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ והוכיחו כי:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin([2k-1]x) \text{ מתקיים } 0 < x < \pi \text{ לכל א.}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} = -\frac{\pi}{4}$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

שאלות:

(1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$ המקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$ ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח $f'(x) \in L^2_{PC}[-\pi, \pi]$).

נסמן $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ אזי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ מתכנס בהחלט.

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = x(\pi - x)$ בקטע $[0, \pi]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?

שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$.

ד. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x) = \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ בקטע $[0, \pi]$.

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. רמז: הציבו $x=0$.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{x^2}$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

נסמן $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| e^{inx}$ פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ מתכנס?

ב. האם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n|$ מתכנס?

ג. האם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$ מתכנס?

(4) נתבונן בטור הפורייה $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(x+i)}$.

כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

(5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$ בקטע $(0, 2\pi)$.

ב. נסמן $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ באופן מפורש (ללא טור) בקטע $(0, 2\pi)$.

(6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi, \pi]$, גזירה ברציפות למקוטעין k

פעמים כך שמתקיים $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ לכל $j = 0, 1, \dots, k-1$. נסמן $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k c_n) = 0$.

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי $f(x) \in L^2_{PC}[-\pi, \pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$

ו- $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$. הראו כי מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$.

ב. תהי $f(x) \in L^2_{PC}[0, \pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0) = f(\pi) = 0$.

הראו כי מתקיים $\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx$.

(8) נגדיר $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} e^{in^2 x}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

(9) נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \sin(n^{2.5} x)$

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

(10) נסמן $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{1.4}} + \frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$

א. האם f רציפה?

ב. האם f גזירה ברציפות?

(11) נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

(12) נסמן $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3.1} + i \cdot n^{2.2}} \cdot e^{inx}$. הוכיחו כי f גזירה ברציפות פעמיים.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$(2) \quad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin([2k-1]x) \quad [0, \pi] \quad \text{א.}$$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

$$\text{ה.} \quad [0, \pi] \quad \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \sim \frac{\pi^3}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi(2k-1)^4} \cos([2k-1]x) \quad \text{ו. הוכחה.}$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \cdot n c_n \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < \infty \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n| < \infty$$

$$\text{ג.} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$$

(4) ראו סרטון.

$$(5) \quad \text{א. הוכחה.} \quad \text{ב.} \quad -\frac{\pi}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{\pi^2}{6} x$$

(6) הוכחה.

(7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

$$(10) \quad \text{א.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2.8}} < \infty \quad \text{ב.} \quad \text{נניח בשלילה כי } f \text{ גזירה ברציפות.}$$

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

שאלות:

$$(1) \quad \text{תהי הפונקציה} \quad g(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $g(x)$.

$$\text{ב. עבור } -\pi \leq x \leq \pi \text{ נגדיר את הפונקציה } h(x) = a \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \int_{-\pi}^x g(t) dt$$

כאשר $g(x)$ מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של a מתכנס טור פורייה של $h(x)$ במידה שווה

ל- $h(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

$$(2) \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x) = |\sin(x)| \text{ במרחב } L_{PC}^2([-\pi, \pi]) \text{ ונסמן ב-} f'(x) \text{ את הנגזרת שלה.}$$

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של f ושל f' .

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחישבתם?

שרטטו את הגרפים של פונקציות אלו בתחום $[-3\pi, 3\pi]$.

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f' במידה שווה?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2k \cdot x) \quad \text{ב. } a = -\frac{\pi^2}{2}$$

$$(2) \quad \text{א. } f(x) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[\frac{-4}{(2k+1)(2k-1)} \right] \cos(2k \cdot x)$$

$$\text{ב. } f'(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases} \quad f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[\frac{8k}{(2k+1)(2k-1)} \right] \sin(2k \cdot x)$$

ג. $f(x)$ פונקציה רציפה, מחזורית- 2π , הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של $f'(x)$ יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל

נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו: $[\pi n + \delta, \pi(n+1) - \delta]$

לכל $0 < \delta < \pi$ ולכל n שלם.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0, 2\pi]$.

(2) תהי הפונקציה $f(x) = \min\{1, |x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2, 2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0, 2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}$.

(4) פתחו את $f(x) = |x|$ לטור פורייה בקטע $[-1, 1]$.

(5) פתחו את $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0, 2]$.

(6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x) = f(x+2)$ ובנוסף $f(x) = 2-|x|$ $-1 \leq x < 1$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$.

ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1, 1]$?

(7) מצאו טור קוסינוסים $f(x) = x$ בקטע $[0, 3]$.

(8) פתחו את $f(x) = \cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0, \pi]$.

תשובות סופיות:

$$x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (1)$$

$$b_n = 0, \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1|4n^2\pi^2} e^{in\pi x} \quad \text{א.} \quad (3)$$

ג. $\frac{3-e}{4(e-1)}$ ב. ראו סרטון.

$$|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(\pi[2k-1]x) \quad (4)$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi[2k-1]x}{2}\right) \quad (5)$$

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos([2k-1]\pi x) \quad \text{א.} \quad (6)$$

ג. $\frac{\pi^2}{8}$ ב. $\frac{\pi^4}{96}$

ד. אם f רציפה בקטע $[a, b]$, $f(a) = f(b)$, ו- f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[a, b]$.

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right) \quad (7)$$

$$\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2} \sin([2k-1]x) \quad (8)$$

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

- (1) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π אז $(f * g)_{(x)}$ מחזוריות- 2π .
- (2) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין, מחזוריות- 2π ופונקציות זוגיות אז $(f * g)_{(x)}$ זוגית.
- (3) נתונה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית- 2π כך שלכל $x \in [-\pi, \pi]$ מתקיים $f(x) = \sqrt{2\pi} \cdot \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(x)$.
חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$.
הערה: $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
- (4) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x \in [-\pi, \pi]$ מתקיים $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos(x)$.
חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.
- (5) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x \in [-\pi, \pi]$ מתקיים $f(x) = x$, $g(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.
חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) $\pi - x$ (4) לכל x , $-\pi \leq x \leq \pi$ $(f * g)_x = -2 \cos(x)$

$$(f * g)_x = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} (x^2 - (x-1)^2) & -\pi+1 \leq x \leq \pi \\ \frac{1}{4\pi} [x^2 - (x+(2\pi-1))^2] & -\pi \leq x \leq -\pi+1 \end{cases} \quad (5)$$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

(1) טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה $f(t) = e^{iat}$ בתחום $-\pi \leq t \leq \pi$ כאשר α הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} - \frac{1}{\alpha}$

ג. הראו שמתקיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\alpha - n]^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$

ד. הראו שמתקיים $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^2 - \alpha^2)} = \frac{\pi}{4\alpha^2} \left(\frac{1}{\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)} - 1 \right)$

(2) נגדיר $f(x) = |x|$ במרחב $L_{PC}^2([-\pi, \pi])$ ונסמן ב- $f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של f .

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום $(-\infty, \infty)$?

$$\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots$$

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^2$

(3) תהי $f \in L_{PC}^2([-\pi, \pi])$.

נסמן ב- c_n את מקדמי פורייה (המרוכבים) של f .

נסמן $d_n = \operatorname{Re}\{c_n\}$ ובנוסף נתון כי:

• f ממשית.

• f מתאפסת על הקטע $[-\pi, 0]$.

• מתקיים השוויון $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx} = x^2 e^{|x|} \cos(x)$

מצאו את f .

(4) תהי f פונקציה זוגית בעלת מחזור 2π המקיימת $f(x) = \cos(2x)$

בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ו- $f(x) = -1$ בתחום $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

מצאו את טור פורייה הממשי של f וחשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$.
האם טור פורייה של f מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

(5) נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית 2π .

נסמן $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx}$ ויהי $h > 0$ פרמטר כלשהו.

מצאו את מקדמי פורייה של $h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(t+x) dt$ כתלות ב- f_n .

תשובות סופיות:

(1) א. $e^{i\alpha t} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\pi\alpha)}{[\alpha-n]\pi} \cdot e^{in \cdot t}$ ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

(2) א. $f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos([2k+1]x)$

ב. $\begin{cases} \frac{\pi}{4} & \pi k < x < \pi(k+1) \\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1) < x < \pi k \\ 0 & x = \pi k \end{cases}$, כאשר k מספר שלם. ג. $\frac{\pi^2}{8}$

(3) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 e^{|x|} \cos(x) & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$

(4) התכנסות במידה שווה בקטע $[-\pi, \pi]$ אם f רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$

ו- $f' \in E[-\pi, \pi]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[-\pi, \pi]$.

(5) f_0

מד"ח וטורי פורייה

פרק 6 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

1. קטע אינסופי (ללא ספר)
2. קטע חצי אינסופי (ללא ספר)
3. הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית (ללא ספר)
4. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית (ללא ספר)
5. משולש הקביעה (ללא ספר)

מד"ח וטורי פורייה

פרק 7 - משוואת החום

תוכן העניינים

1. נוסחת פוואסון בקטע אינסופי (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים בקטע סופי (ללא ספר)
3. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית (ללא ספר)
4. עקרון המקסימום והמינימום (ללא ספר)

מד"ח וטורי פורייה

פרק 8 - אינטגרל אנרגיה

תוכן העניינים

1. אינטגרל אנרגיה (ללא ספר)

מד"ח וטורי פורייה

פרק 9 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

1. חזרה על אינטגרל קווי (ללא ספר)
2. משוואת לפלס בעיגול (ללא ספר)
3. משוואת לפלס בטבעת (ללא ספר)
4. משוואת לפלס בגזרה מעגלית (ללא ספר)
5. משוואת לפלס במלבן (ללא ספר)
6. עקרון הממוצע (ללא ספר)
7. עקרון המקסימום והמינימום (ללא ספר)