מבוא מתמטי למהנדסים

תוכן העניינים

תוכן העניינים

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

תוכן העניינים

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y : (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y : (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0 \,, \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ (k ו- n טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את 0.

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x.

ג. לכל מספר טבעי n, המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x, $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16 \right\}$

ב. $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16 \right\}$

ג. $C = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16 \right\}$

ד. $D = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0 \right\}$

ה. $E = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0 \right\}$

ו. $F = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 4 \right\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה: $A = \{x \mid$ מקיים תכונה מסוימת $x\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי־זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 4, 3, 2, 1.

5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A=\{11,13,17,19\}$

ב. $B=\{x \mid 10<x<20,\ x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$

ד. $D=\{x \mid x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

ה. $E=\{x \mid x=2m,\ m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה הבאה $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5\in A$ ב. $2\in A$ ג. $\{2\}\in A$

ד. $\{2\}\subseteq A$ ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$ ו. $\phi\in A$

ז. $\phi\subseteq A$ ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$ ט. $\{2,4\}\subseteq A$

י. $\{2,4\}\in A$ יא. $\{\{2,4\}\}\in A$ יב. $\{2,5\}\subseteq A$

יג. $\{2,5\}\in A$ יד. $\{1,4\}\in A$

7) מצאו שתי קבוצות, A ו- B, המקיימות:

א. $A\in B$

ב. $A\subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$, $E=\{7,8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X:

א. $X\subseteq A$ וגם $X\not\subseteq D$.

ב. $X\subseteq D$ וגם $X\not\subseteq C$.

ג. $X\subseteq E$ וגם $X\not\subseteq A$.

9) הוכיחו: $A\subseteq B \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$.

10) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$.

רשמו את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

11) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=[1,4)$, $B=(-2,1)$, $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0\le x\le 4\}$, $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2^x=0\}$

רשמו את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

12) נתונות 3 קבוצות:

$A=\{4,5,6,7,8\}$, $B=\{5,6,7,8,9\}$, $C=\{4,5,6,10\}$

א. חשבו את $(A-B)-C$.

ב. חשבו את $A-(B-C)$.

13) נתון: $U=\{11,12,13,14,15,16,17,18\}$, $A=\{12,15,18\}$, $B=\{13,15,17\}$.

הדגימו את כלל דה מורגן $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

14) הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

15) מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות:

א. $A=[1,\infty)$

ב. $B=(-\infty,1)\cup(4,\infty)$

ג. $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-5x+4>0\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-1|<2\ \vee\ x>4\}$

16) הציגו באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

א. $A\cap B$
ב. $A\cup B$
ג. A^c
ד. $A\cap B^c$
ה. $A^c\cap B$
ו. $A\cup B^c$
ז. $A^c\cup B$
ח. $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$
ט. $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$

17) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $A\setminus B=A\cap B^C$.
הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.

ב. נסמן: $X=C\setminus(A\cap B),\ Y=(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$.
הוכיחו כי $X=Y$.

ג. נסמן: $X=A\setminus(B\cup C),\ Y=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.
הוכיחו כי $X=Y$.

18) תהיינה X, Y, Z קבוצות כלשהן.

טענה א': $X\cap Y\cap Z=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus Z)\cup(Z\setminus X)$.

טענה ב': $((X\cap Y)\cup Z)^C=(X^C\cup Y^C)\cap Z^C$.

טענה ג': $X\setminus(Y\setminus Z)=(X\setminus Y)\setminus Z$.

איזו טענה נכונה לכל בחירה של X, Y, Z ?

19) הוכיחו כי אם הנקודה x_1 שייכת לסביבת ε של הנקודה x_0,
אז קיימת סביבת δ של x_1 שמוכלת בסביבת ε של הנקודה x_0.

20) הוכיחו שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

21) הוכיחו כי אם x_0 לא שייכת לקטע הסגור $[a,b]$, אז קיימת סביבה של הנקודה x_0 אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע $[a,b]$.

22) הוכיחו כי אם $|x-x_0|<\varepsilon, |y-y_0|<\varepsilon$, אז $|xy-x_0y_0|<\varepsilon(|x_0|+|y_0|+\varepsilon)$.

תשובות סופיות

1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענו אינה נכונה.
ב. לכל x קיים y, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענו אינה נכונה.
ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענו אינה נכונה.
ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענו נכונה.
ה. לכל n טבעי המספר n^3-n מתחלק ב-6. הטענו נכונה.

2) א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$
ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x:|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

3) א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.
ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.
ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.
ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.
ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

4) א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$
ג. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2\ ,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ד. $D=\{1,4,9,16\}$.

5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.

6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

7) $B=\{\{1,2\},1,2\}$ $A=\{1,2\}$

8) א. $A,\ C$ ב. $E,\ D$ ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

9) שאלת הוכחה.

10) $1)\ A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$, $2) A\cap B=\{4,6,8\}$, $3)(A\cup B)\cap C=\{3,5,7,9\}$
$4)(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$, $5)(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$

11) $1)\ A\cup B=(-2,4)$, $2) A\cap B=\phi$, $3)(A\cup B)\cap C=(0,4)$,
$4)(B\cup C)\cap(B\cup D)=(-2,1)$, $5)(B\cap C)\cup(B\cap D)=[0,1)$

12) א. ϕ ב. $\{4,5,6\}$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

15) א. $A^C=(-\infty,1)$ ב. $B^C=[1,4]$ ג. $C^C=[1,4]$

ד. $D^C=(-\infty,1]\cup[3,4]$

16) ראו בסרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענו ב.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

המספרים האי-רציונליים

שאלות

1) א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

2) א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכיחו שהמספר מתחלק ב-3.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

3) א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

4) הוכיחו כי $\sqrt{n}$ הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- n טבעי שאינו ריבוע של מספר).

5) הוכיחו או הפריכו:
א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.
ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.

6) א. הוכיחו כי $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ג. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

7) א. יהי p מספר ראשוני ויהיו a,k מספרים טבעיים.
הוכיחו כי $p|a^k \Rightarrow p|a$.
ב. הוכיחו: אם $n \neq N^k$, אז $\sqrt[k]{n}$ הוא מספר אי-רציונלי $(n,k,N \in \mathbb{N})$.

הערת סימון: אם מספר a מתחלק במספר b נסמן $b|a$,
ונאמר גם "b מחלק את a".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות

שאלות

1) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{n-1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

2) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{1}{n^4+2n+1}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

3) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{n^4+n^2+3}{2n^4+2n^2+8}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

4) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{[cn]}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\ ,\ 0<c\in\mathbb{R}\right\}$.

א. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמעלה ומצאו את $\sup A$.

ב. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמטה ומצאו את $\inf A$.

5) נתונה הקבוצה $A=\left\{n^5-n+4\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה במידה והם קיימים.

6) נתונה הקבוצה $A=\{11-4^n \mid n\in\mathbb{N}\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

7) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{4n-1}{5n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

8) מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצות הבאות, במידה והם קיימים:

א. $A=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n^2} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$

ב. $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x-1|\le 1\}$

ג. $C=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x^2-4}{(x-2)^2}\le 0\right\}$

ד. $D=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=1+\frac{n+1}{n+4}\sin\frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{N}\right\}$

9) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה קבוצה של מספרים ממשיים S.
הוכיחו שאם קיים לקבוצה חסם עליון אז הוא יחיד.

ב. הוכיחו שלקבוצה הריקה אין חסם עליון.

10) הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם α הוא הסופרמום של הקבוצה A, אז לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$, קיים איבר $x\in A$, כך ש- $\alpha-\varepsilon<x\le\alpha$.

ב. אם β הוא האינפימום של הקבוצה A, אז לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$, קיים איבר $x\in A$, כך ש- $\beta\le x<\beta+\varepsilon$.

11) הוכיחו את הטענות הבאות:

א. בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר ממשי.
(משפט הצפיפות של הממשיים)

ב. עבור קטעים מהטיפוס $(a,b),[a,b),(-\infty,b)$, לא קיים מקסימום.

ג. עבור קטעים מהטיפוס $[a,\infty),(a,\infty),(-\infty,\infty)$, לא קיים מקסימום.

ד. עבור קטעים מהטיפוס $(a,b),[a,b),(-\infty,b)$, הקצה הימני של הקטע הוא החסם העליון.

ה. אם S היא קבוצה בעלת מקסימום, אז ל- S יש חסם עליון, ומתקיים $\max S=\sup S$.

12) תהי A תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$, ויהי $x\in\mathbb{R}$.
נגדיר את המרחק בין x ל- A על ידי: $d(x,A)=\inf\{|x-a| \mid a\in A\}$.
אם $\alpha\in\mathbb{R}$ הוא החסם העליון של A, הראו כי $d(\alpha,A)=0$.

13) הוכיחו שקבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלמעלה.

14) הוכיחו שקיימת קבוצה של מספרים רציונליים, אשר חסומה מלמעלה אך אין לה סופרמום רציונלי.

15) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נניח ש- K קבוצה של מספרים ממשיים החסומה מלמטה.
נתבונן בקבוצה $-K=\{-x \mid x\in K\}$.
הוכיחו שהקבוצה $-K$ חסומה מלמעלה.

ב. הוכיחו שלכל קבוצה לא-ריקה של מספרים ממשיים, החסומה מלמטה, קיים חסם תחתון.

16) תהי T קבוצה חסומה מלעיל של מספרים ממשיים.
תהי S קבוצה חלקית לא ריקה של T.
הוכיחו כי:

א. ל- T יש חסם עליון $\sup T$.

ב. ל- S יש חסם עליון $\sup S$.

ג. $\sup S\le\sup T$.

ד. אם S ו- T בעלות מקסימום, אז $\max S\le\max T$.

17) יהיו A ו-B שתי קבוצות לא ריקות, חסומות מלעיל, של מספרים ממשיים.
א. נניח כי לכל $x \in A$ קיים $y \in B$, כך ש-$x < y$.
הוכיחו כי $\sup A \le \sup B$.
האם יהיה נכון לומר ש-$\sup A < \sup B$?
ב. נניח שבנוסף לנתון בסעיף א', נתון כי לכל $y \in B$ קיים $x \in A$, כך ש-$y < x$.
הוכיחו כי $\sup A = \sup B$.

18) נניח ש-A ו-B הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים, כך ש-$\sup A = \inf B$.
הוכיחו שלכל מספר $\delta > 0$, קיים מספר x ב-A, ומספר y ב-B, כך ש-$x + \delta > y$.

19) נניח ש-A ו-B הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים, כך ש-$\sup A \le \inf B$.
נניח שלכל מספר $\delta > 0$ קיים מספר x ב-A, ומספר y ב-B, כך ש-$x + \delta > y$.
הוכיחו כי $\sup A = \inf B$.

20) נניח ש-A קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים, שאין לה מקסימום, ונניח כי $x < \sup A$.
הוכיחו שיש לפחות שני איברים בקבוצה A, שנמצאים בין x ל-$\sup A$.

21) תהי S קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים.
הוכיחו כי אם $c \ge 0$, אז ל-$c \cdot S$ יש חסם עליון, ומתקיים $\sup(c \cdot S) = c \cdot \sup S$.

22) יהיו S ו-T קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
הוכיחו כי הקבוצה $S + T$ היא בעלת חסם עליון ומתקיים:
$\sup(S+T) = \sup S + \sup T$.

23) יהיו S ו-T קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
א. הוכיחו כי הקבוצה $S \cup T$ היא בעלת חסם עליון.
ב. הוכיחו כי $\sup(S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$.

24) תהיינה U,T,S קבוצות לא-ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
נניח כי לכל $s \in S$ ולכל $t \in T$ קיים $u \in U$, המקיים את התנאי: $u \ge s + t$.
הוכיחו כי $\sup U \ge \sup T + \sup S$.

25) הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם S ו- T הן שתי קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים,
כך שכל איבר של S אינו גדול משום איבר של T,
אז קיימים $\sup S, \inf T$, ומתקיים: $\sup S \le \inf T$.

ב. לכל קבוצה לא-ריקה וחסומה S מתקיים: $\inf S \le \sup S$.
האם ייתכן שוויון ביניהן? באילו תנאים?

26) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו והוכיחו את משפט ארכימדס.

ב. נסחו והוכיחו את תכונת ארכימדס.

ג. הוכיחו שלכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n, כך ש- $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

ד. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים α, β המקיימים $\alpha < \beta$, קיים
מספר טבעי n, כך ש- $\alpha < \alpha + \frac{1}{n} < \beta$ וגם $\alpha < \beta - \frac{1}{n} < \beta$.

27) תהי A תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל של A.
נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$, כך ש- $a_n > \alpha - \frac{1}{n}$.
הוכיחו כי α הוא הסופרמום של A.

28) הוכיחו שלכל מס' ממשי c **קיים** מספר שלם **יחיד** $m \in \mathbb{Z}$, כך ש- $m \le c < m+1$.
למספר m קוראים הערך השלם של c, ומסמנים $m = [c]$.

29) יהיו a ו- b שני מספרים ממשיים המקיימים $|a-b| < \frac{1}{n}$, לכל מספר טבעי n.
הוכיחו כי $a = b$.

30) ענו על הסעיפים הבאים:

א. לכל n טבעי נגדיר $I_n = [n, \infty)$.
הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

ב. לכל n טבעי נגדיר $J_n = \left[-\frac{1}{n}, \infty\right)$.
הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \ne \phi$.

31) ענו על הסעיפים הבאים:

א. לכל n טבעי נגדיר $I_n=[a_n,b_n]$.

ננניח כי $I_{n+1}\subset I_n$ לכל n.

הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$.

ב. לכל n טבעי נגדיר $I_n=\left(0,\frac{1}{n}\right)$.

הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

ג. בסעיף ב' התקיים כי $I_{n+1}\subset I_n$ לכל n, וכן $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

האם תוצאת סעיף ב' סותרת את תוצאת סעיף א'?

32) לכל n טבעי נגדיר $I_n=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$.

הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

תשובות סופיות

1) א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A=\inf A=0, \sup A=1$

2) א. הקבוצה חסומה. ב. $\max A=\sup A=\frac{1}{4}, \inf A=0$

3) א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A=\inf A=\frac{5}{12}, \sup A=\frac{1}{2}$

4) א. הקבוצה חסומה. ב. $\sup A=c, \inf A=[c]$

5) א. הקבוצה לא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה על ידי 4. ב. $\min A=4$

6) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי 7. הקבוצה לא חסומה מלמטה.
ב. $\max A=7$

7) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי $\frac{4}{5}$, וחסומה מלמטה על ידי $\frac{3}{5}$;
לכן, הקבוצה חסומה. ב. $\sup A=\frac{4}{5}$, $\min A=\frac{3}{5}$

8) א. $\max A=\frac{5}{4}, \quad \inf A=-1$ ב. $\min B=0, \ \max B=2$
ג. $\min C=-2, \quad \sup C=2$ ד. $\inf D=0, \ \sup D=2$

שאלות **9-32** הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

קבוצה צפופה

שאלות

1) הוכיחו שקבוצת הממשיים צפופה בקבוצת הממשיים.

2) הוכיחו שקבוצת הרציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.

3) הוכיחו שקבוצת האי-רציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.

4) הוכיחו שהקבוצה $A=\left\{\sqrt{10}q \mid q\in\mathbb{Q}\right\}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$.

5) הוכיחו שהקבוצה $A=\left\{\sqrt{m}-\sqrt{n} \mid m,n\in\mathbb{N}\right\}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$.

6) אפשר להגדיר קבוצה צפופה בממשיים גם כך:
תת-קבוצה S של $\mathbb{R}$ היא צפופה (ב- $\mathbb{R}$),
אם לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים $s\in S$, כך ש- $|s-x|<\varepsilon$.
הוכיחו שאם S תת-קבוצה של $\mathbb{R}$ מקיימת את התכונה,
שלכל $a,b\in R$ קיים $s\in S$, כך ש- $a<s<b$, אז S צפופה ב- $\mathbb{R}$.

7) הוכיחו שהקבוצה $A=\left\{q\sqrt{10} \mid 0<q\in\mathbb{Q}\right\}$ צפופה ב- $[0,1]$.

8) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע $(1,\infty)$.
הוכיחו שהקבוצה $B=\left\{\frac{a}{n} \mid a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ צפופה בקטע $(0,1)$.

9) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע $[0,1]$.
הוכיחו שהקבוצה $B=\left\{na \mid a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ צפופה בקטע $[0,\infty)$.

10) הוכיחו שקבוצת כל השברים העשרוניים הסופיים שלא מופיעה בהם הספרה 4,
אינה צפופה בקטע $I=[0,1]$.

11) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע $(1,\infty)$ וצפופה בו.

הוכיחו שהקבוצה $C=\left\{\frac{a}{n^2(a+1)}:a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ אינה צפופה בקטע $[0,1]$.

12) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע $[0,1]$.

הוכיחו שהקבוצה $C=\left\{\frac{a+1}{n^2}\mid a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ אינה צפופה בקטע $[0,1]$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הערך השלם

שאלות

1) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $[x+4]=10$

ב. $[x+4]=-10$

ג. $[x+4]^2=100$

ד. $[2x^2+1]=9$

ה. $[x^2+x-1]=-2$

ו. $[x^2-\ln x+e^x-x^5]=0.5$

2) פתרו את המשוואה $[x+4]=2x+1$.

3) פתרו את המשוואה $[16x^2+7]=8x+6$.

4) פתרו את המשוואה $[x^2+x+4]=2x+6$.

5) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $[|x-4|+x]=4x+4$

ב. $[|x+1|-|x-1|]=x$

6) פתרו את המשוואה $[4+[x+1]]=10$.

7) הוכיחו כי לכל x ממשי ו- m שלם מתקיים $[x+m]=[x]+m$.

8) פתרו את אי-השוויונים הבאים:

א. $[x+4]<10$

ב. $[x+4]>-10$

ג. $[x+4]^2<100$

ד. $[x+4]\le 10$

9) פתרו את אי-השוויונים הבאים:

א. $[x]^2-5[x]+6\le 0$

ב. $[x-1][x-2]+[x+10]>3[x+2]+[2.44]$

10) הוכיחו כי לכל x ו- y ממשיים מתקיים:

א. $[x]+[y]\le[x+y]\le[x]+[y]+1$

ב. $x<y \Rightarrow [x]\le[y]$

תשובות סופיות

1) א. $6\le x<7$ ב. $-14\le x<-13$ ג. $[6,7)\cup[14,-13)$

ד. $\left(-\sqrt{4.5},-2\right]\cup\left[2,\sqrt{4.5}\right)$ ה. $-1<x<0$ ו. ϕ

2) $x=2.5,\ 3$

3) $x=\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{8}$

4) $x=-1,\ 2$

5) א. $x=0$ ב. $x=2,\ 0,\ -2$

6) $5\le x<6$

7) שאלת הוכחה.

8) א. $x<6$ ב. $x>-14$ ג. $-14<x<6$ ד. $x<7$

9) א. $2\le x<4$ ב. $x<1$ or $x\ge 5$

10) שאלת הוכחה.

סימן הסכימה

שאלות

1) כתבו בפירוט את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$ ב. $\sum_{k=1}^{4} 2k$ ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$

ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$ ה. $\sum_{t=1}^{8} tx^t$ ו. $\sum_{k=4}^{10} na_{k+1}$

ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$ ח. $\sum_{k=-1}^{3} \left(k^2+1\right)$ ט. $\sum_{\ell=1}^{3} \left(\ell^2 - x_{2\ell} - 4\right)$

2) כתבו את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$

ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$

ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

ד. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8$

ה. $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\ldots+43\cdot 44$

ו. $3\cdot 2+6\cdot 3+9\cdot 4+12\cdot 5+15\cdot 6+18\cdot 7+21\cdot 8$

ז. $5^2+7^2+\ldots+27^2$

ח. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots.+\frac{1}{10\cdot 11}$

ט. $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\frac{18}{243}$

י. $4+\frac{8}{5}+\frac{12}{25}+\frac{16}{125}+\frac{20}{625}$

3) חשבו את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$ ב. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k+4k^2\right)$ ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$

ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3-k}{k+1}$ ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$ ו. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k^2+1\right)(k-2)$

* תוכלו להיעזר בנוסחאות הבאות (שמוכחות בפרק זה תחת הנושא 'אינדוקציה'):

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

4) חשבו את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{20}\frac{5\cdot 4^k+8^k}{2^k}$ ב. $\sum_{k=1}^{11}\frac{2\cdot 4^{k+2}+10^k}{0.4^k}$ ג. $\sum_{k=10}^{20}2^{2k+10}$

* תוכלו להיעזר בנוסחה הבאה: $(a\neq 1)$ $\sum_{k=1}^{n}a^k=\frac{a\left(a^n-1\right)}{a-1}$.

5) חשבו את הסכומים הבאים:

א. $1^2+2^2+3^2+...+20^2$

ב. $4^2+5^2+6^2+...+24^2$

ג. $2^2+4^2+6^2+...+22^2$

ד. $1^2+3^2+5^2+...+17^2$

6) הוכיחו כי:

א. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k+4}}{k+2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{2k+6}}{k+3}$

ב. $\sum_{k=4}^{n-3}\frac{4k+17+2^{2k}}{k+1}=\sum_{k=8}^{n+1}\frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$

7) חשבו את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

א. $\sum_{4}^{11}k^2$ ב. $\sum_{10}^{20}4^{2k}$

תשובות סופיות

1) א. $4^0+4^1+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+4^8+4^9+4^{10}$

ב. $2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4$

ג. $4a_4+4a_5+4a_6+4a_7+4a_8+4a_9+4a_{10}$

ד. $4\cdot7^2a_7+4\cdot8^2a_8+4\cdot9^2a_9+4\cdot10^2a_{10}+4\cdot11^2a_{11}+4\cdot7^2a_7$

ה. $1x^1+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+7x^7+8x^8$

ו. $na_5+na_6+na_7+na_8+na_9+na_{10}+na_{11}$

ז. $4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n$

ח. $\left((-1)^2+1\right)+\left(0^2+1\right)+\left(1^2+1\right)+\left(2^2+1\right)+\left(3^2+1\right)$

ט. $\left(1^2-x_2-4\right)+\left(2^2-x_4-4\right)+\left(3^2-x_6-4\right)$

2) א. $\sum_{k=0}^{7}2^k$ ב. $\sum_{k=1}^{10}2k$ ג. $\sum_{k=0}^{9}(2k+1)$ ד. $\sum_{k=1}^{7}k(k+1)$

ה. $\sum_{k=1}^{22}(2k-1)2k$ ו. $\sum_{k=1}^{7}3k(k+1)$ ז. $\sum_{n=3}^{14}(2n-1)^2$

ח. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$ ט. $\sum_{k=1}^{5}\frac{4k-2}{3^k}$ י. $\sum_{k=1}^{4}\frac{4k}{5^{k-1}}$

3) א. 220 ב. 1650 ג. 4360

ד. 4360 ה. 28 ו. 4545

4) א. $5\cdot\left(2^{21}-2\right)+\frac{4}{3}\left(4^{20}-1\right)$ ב. $32\cdot\frac{10\left(10^{11}-1\right)}{10-1}+\frac{25\left(25^{11}-1\right)}{25-1}$

ג. $2^{10}\left[\frac{4\left(4^{20}-1\right)}{4-1}-\frac{4\left(4^9-1\right)}{4-1}\right]$

5) א. 2870 ב. 4886 ג. 2024 ד. 969

6) שאלת הוכחה.

7) א. $\frac{8(8+1)(2\cdot8+1)}{6}+6\cdot\frac{8(8+1)}{2}+9\cdot8$ ב. $4^{18}\cdot\frac{16\left(16^{11}-1\right)}{16-1}$

אינדוקציה

שאלות

1) הוכיחו באינדוקציה כי $4\cdot 10^{n}+14\cdot 19^{n}$ מתחלק ב-9 לכל n טבעי.

2) הוכיחו באינדוקציה כי $\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$ $\left(k,n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}\right)$.

3) מצאו את ה-n הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים $2^{n}\geq n^{2}$,
והוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי החל ממנו מתקיים אי-השוויון הנ״ל.

4) הוכיחו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי $(1+x)^{n}\geq 1+nx$, לכל n טבעי ולכל $x\geq -1$ ממשי.
הערה: אי השוויון הנ״ל נקרא אי שוויון ברנולי.

ב. הוכיחו כי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, לכל n טבעי.
רמז: היעזרו בתוצאת סעיף א׳.

5) הוכיחו באינדוקציה כי $(1-x)^{n}<\dfrac{1}{1+xn}$ לכל $0<x<1,\ n\in\mathbb{N}$.

6) הוכיחו באינדוקציה כי $n!\leq\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
רמז: היעזרו במהלך הפתרון באי-שוויון ברנולי.

7) נתון כי $a_{1}=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_{n}+2}$.
הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:

א. $a_{n}\leq 2$

ב. $a_{n}\leq a_{n+1}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

8) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי,
אם $a_{1}=-1,\ a_{2}=0$, $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_{n}+2$,
אז $a_{n}=n^{2}-2n$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

9) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי,
אם $a_1 = 1,\ a_2 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$,
אז $a_n = \frac{1}{6}\cdot 3^n - \frac{1}{2}(-1)^n$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיביות.

10) הוכיחו באינדוקציה כי $4^n - 1$ מתחלק ב-15, לכל n טבעי **זוגי**.

11) הוכיחו באינדוקציה כי $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$ $(n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R})$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו כפל מטריצות (אלגברה לינארית).

הערה: תרגילים נוספים באינדוקציה תמצאו תחת הנושא "אי שוויונים מפורסמים" בפרק זה, בשאלה 1 ובשאלה 3 סעיף ו'.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

אי שוויונים מפורסמים

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים x, y המקיימים $x<1, y>1$, מתקיים $x+y>xy+1$.

ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n \geq 2$ טבעי:
אם $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, אז $a_1+a_2+\ldots+a_n \geq n$ $\left(0<a_i \in \mathbb{R}\right)$.

2) נסחו והוכיחו את **אי שוויון הממוצעים**.

3) הוכיחו שלכל $a,b \in \mathbb{R}$ מתקיים:

א. $|a+b| \leq |a|+|b|$ **(אי שוויון המשולש)**

ב. $|a-b| \leq |a|+|b|$

ג. $|a-b| \geq |a|-|b|,\ \ |a-b| \geq |b|-|a|$

ד. $|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$

ה. $|a+b| \geq \big||a|-|b|\big|$

ו. $|a_1+a_2+\ldots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$ $\left(a_i \in \mathbb{R}\right)$

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו והוכיחו את **אי שוויון קושי-שוורץ**.

ב. הוכיחו כי אם $a_1+..+a_n=1$ אז $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geq \frac{1}{n}$ $\left(n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R}\right)$.

הערה: **אי שוויון ברנולי** מוכח בפרק זה תחת הנושא "אינדוקציה".
נוכיח שם גם כמה מסקנות מעניינות ממנו.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

פתרון אי שוויונים

שאלות

פתרו את אי השוויונים הבאים:

1) $x^2-12x>-32$

2) $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

3) $2x^2+2x+24\geq 0$

4) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

5) $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

6) $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

7) $|x+2|<3$

8) $|6-2x|<x$

9) $|2x+3|<8<|5-x|$

10) $x^2-6|x+1|-1>0$

11) $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

12) $\sqrt{x+3}<7$

13) $\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$

14) $\sqrt{x^2+x-6}<x-3$

הערה: לא מומלץ להתעכב יותר מידי זמן על פתרון אי שוויונים.

תשובות סופיות

1) $x>8$ או $x<4$
2) $x\ge 11$ או $x\le 7$
3) כל x
4) $x>3$ או $-3<x<1$
5) $\frac{1}{2}\le x<5$
6) $1\le x\le 6$
7) $-5<x<-1$
8) $2<x<6$
9) $-5\frac{1}{2}<x<-3$
10) $x>7$ או $x<-5$
11) $x>4$ או $x<-1$
12) $-3\le x<46$
13) $x<0.472$
14) אין פתרון.

עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון

שאלות

1) חשבו, ללא מחשבון:

א. $\frac{4!\cdot 7!}{0!\cdot 10!}$

ב. $\frac{14!\cdot 20!}{10!\cdot 17!}$

2) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2-n)=n!$

ב. $(n-1)!n^2+n!=(n+1)!$

ג. $\frac{n^2-2}{(n+1)!}+\frac{(n+2)^2}{(n+2)!}=\frac{1}{(n-1)!}$

3) חשבו:

א. $\binom{5}{3}$ ב. $\binom{4}{1}$ ג. $\binom{10}{0}$ ד. $\binom{14}{11}$

4) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $1=\binom{n}{0}=\binom{n}{n}$ ב. $\binom{n-1}{k-1}=\frac{k}{n}\binom{n}{k}$ ג. $\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$

5) הוכיחו באינדוקציה שלכל $n\geq 2$ טבעי מתקיים:

$$\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-2}=\binom{n}{2}$$

6) רשמו את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $(a+b)^4$ ב. $(x+2)^5$ ג. $(x-4)^3$

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$ לכל $0\leq k\leq n$, $k,n\in\mathbb{N}$.

ב. נסחו והוכיחו (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

8) הוכיחו שלכל $n \ge 1$ טבעי מתקיים:

א. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=2^n$

ב. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-...+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

ג. $\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+9\binom{n}{2}-...+3^n\binom{n}{n}=4^n$

9) מצאו את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום $\left(\frac{1}{2a}+2a^2\right)^{10}$.

10) בפיתוח של $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{a}\right)^{12}$, ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא a^7.
מצאו את מקום האיבר ואת ערכו.

11) מצאו, בפיתוח של $\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)^{10}$, איבר שאינו מכיל את x, וחשבו את ערכו.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו, בפיתוח של $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a}+\frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$, את המקדם של $\frac{1}{x}$.

ב. חשבו את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם $a=b=1$.

13) המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום $(a+b)^n$, הוא 15.
מצאו את n.

תשובות סופיות

1) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{1001}{285}$

2) שאלת הוכחה.

3) א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 364

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) א. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

ב. $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

ג. $(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) $T_4 = \frac{15}{2a}$

10) $T_7 = 924a^7$

11) $T_9 = 45$

12) א. $\frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6}$ ב. 2^{18}

13) $n = 6$

שדות

שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור $(\oplus)$ וכפל $(\otimes)$ על R.
בדקו, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

א. $x \oplus y = x + y + 4$
$x \otimes y = 2xy$

ב. $x \oplus y = x + y$
$x \otimes y = 2xy$

ג. $x \oplus y = y$
$x \otimes y = y^2$

2) נתונה הקבוצה $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$
$$(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

הוכיחו שהקבוצה $Q[\sqrt{2}]$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.
ב. הוכיחו שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.
ג. הוכיחו שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.
ד. הוכיחו שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

4) יהיו a,b איברים בשדה.

א. הוכיחו כי $a + a = a \Leftarrow a = 0$.
ב. הוכיחו כי $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
ג. הוכיחו כי $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

5) יהיו a ו- b איברים של שדה.
הוכיחו כי:

א. $(-1)\cdot a=-a$

ב. $(-a)b=a(-b)=-ab$

6) הוכיחו שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.
כלומר, הוכיחו כי $a=c \;\Rightarrow\; ab=cb$, לכל a,b,c , בשדה $(b\neq 0)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 2 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 3 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

תוכן העניינים

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

1) $y=x^3-x^2-4x+1$

2) $y=\frac{1}{x^2-4}$

3) $y=\frac{4x+1}{x^2+1}$

4) $y=\frac{1}{x^3-x}$

5) $y=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

6) $y=\sqrt{x-4}$

7) $y=\sqrt{x^2+x-2}$

8) $y=\sqrt[3]{x^2+x-1}$

9) $y=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

10) $y=\ln\left(x^2+x-2\right)$

11) $y=\log x+\frac{1}{\log x}$

12) $y=e^{x^2+x+1}$

13) $y=\log_x\left(x+4\right)$

14) $y=\tan\left(10x\right)$

15) $y=\cot\left(4x\right)$

16) $y=\arctan\left(x+4\right)$

17) $y=\arcsin\left(x-4\right)$

18) $y=\arccos\left(x+1\right)$

תשובות סופיות

1) כל x.

2) $x \neq \pm 2$

3) כל x.

4) $x \neq 0, 1, -1$

5) $x \neq 2, -1$

6) $x \geq 4$

7) $x \leq -2$, $x \geq 1$

8) כל x.

9) $-1 < x < 1$

10) $x < -2$, $x > 1$

11) $x > 0$, $x \neq 1$

12) כל x.

13) $x > 0$, $x \neq 1$

14) $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

15) $x \neq \frac{\pi k}{4}$

16) כל x.

17) $3 < x < 5$

18) $-2 < x < 0$

הרכבת פונקציות

שאלות

1) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x-4$, $g(x)=x^2$, $h(x)=\frac{4}{x}$.

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$

ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

2) נתון: $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$.

חשבו $f(f(x))$ עבור $x=3$.

3) נתון: $g(x)=\frac{5-x}{x-7}$ $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$.

חשבו $f(g(x))+g(f(x))$ עבור $x=8$.

4) נתון: $g(x)=\ln x$, $f(x)=x^2-7x$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x=e^2$.

5) נתון: $g(x)=\ln x$ $f(x)=e^{2x}$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x=2$.

6) נתון: $g(x)=\begin{cases} x+3 & x>4 \\ 3x & x\le 4 \end{cases}$, $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ x^2 & x\le 0 \end{cases}$.

חשבו $f(g(x)), g(f(x))$.

7) נתונות הפונקציות:

$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ -x^2-2x-1 & x\ge 1 \end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\le -1 \\ \sqrt{x+1} & x>-1 \end{cases}$.

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x)=g(f(x))$.

8) נתונות הפונקציות:

$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ -x^2-2x-1 & x\ge 1 \end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\le -1 \\ \sqrt{x+1} & x>-1 \end{cases}$.

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x)=f(g(x))$.

ב. נתון ש- $n\in\mathbb{Z}$ ו- $h(n)\notin\mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

1. $n\le -3$
2. $n\ge 1$
3. n אי-זוגי שלילי.
4. אף תשובה אינה נכונה.

9) נתון $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

מצאו את $f^n(x)=\underbrace{f(f(f(...(f(x)))}_{n\text{ times}}$.

תשובות סופיות

1) א. -3 ב. 4 ג. x^2-4 ד. $\frac{4}{x-4}$ ה. $x-8$ ו. x

2) 3

3) $\frac{69}{13}$

4) -10

5) 4

6) $g\left(f\left(x\right)\right)=\begin{cases} x^2+3 & x<2 \\ 3x^2 & -2\le x\le 0 \\ \frac{1}{x}+3 & 0<x<\frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x\ge\frac{1}{4} \end{cases}$, $f\left(g\left(x\right)\right)=\begin{cases} \frac{1}{x+3} & x>4 \\ \frac{1}{3x} & 0<x\le 4 \\ \left(3x\right)^2 & x\le 0 \end{cases}$

7) $z(x)=\begin{cases} 4x^2+16x+12 & x<-1.5 \\ -4x^2-20x-25 & -1.5\le x\le -1 \\ x-3 & -1<x<0 \\ -x-2-2\sqrt{x+1} & x\ge 0 \end{cases}$

8) א. $h(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-3} & x<-\sqrt{3} \\ 2x^2-4 & -\sqrt{3}\le x<1 \\ -2x^2-4x+2 & x\ge 1 \end{cases}$ ב. $n\le -3$

9) $f^n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בתרגילים **1-4** הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

1) $f\left(x\right)=\frac{x-1}{3}$

2) $f\left(x\right)=\frac{x+1}{x}$

3) $f\left(x\right)=\frac{3x-2}{x-2}$

4) $f\left(x\right)=x^2-4 \quad \left(x\ge 0\right)$

בתרגילים **5-7**, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע.
בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

5) $f\left(x\right)=x+\frac{1}{x}$

6) $f\left(x\right)=x^2-x$

7) $f\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}$

בתרגילים **8-10**, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע,
אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

8) $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

9) $y=\frac{x^2+3}{2x-1}$

10) $f\left(x\right)=\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^3$

11) נתונה $f\left(x\right)=\frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$.
האם הפונקציה היא חח"ע?
מצאו את התמונה של הפונקציה.

12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{x-1}{3}$

ב. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{x+1}{x}$

ג. $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$ $\quad f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$

ד. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2-4$

13) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה.
בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

ב. $f:\mathbb{R}\to(0,1]$ $\qquad g(x)=\frac{1}{x^2+1}$

ג. $f:(1,\infty)\to(0,1]$ $\qquad h(x)=\frac{1}{x^2+1}$

14) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$,
ותהי $h:A\to C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x)=g(f(x))$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם f ו- g חח״ע, אז h חח״ע.

ב. אם f ו- g חח״ע, אז h על.

ג. אם f ו- g על, אז h על.

ד. אם f ו- g על, אז h חח״ע.

ה. אם f חח״ע ו- g על, אז h חח״ע.

ו. אם f חח״ע ו- g על, אז h על.

ז. אם f על ו- g חח״ע, אז h חח״ע.

ח. אם f על ו- g חח״ע, אז h על.

15) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$,
ותהי $h:A\to C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x)=g(f(x))$.
נתון כי h על.
הוכיחו או הפריכו:

א. f חח״ע.

ב. f על.

ג. g חח״ע.

ד. g על.

16) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ \ g:B\to C$,
ותהי $h:A\to C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f(x)\right)$.
נתון כי h חח״ע.
הוכיחו או הפריכו :

א. g על.

ב. f על.

ג. g חח״ע.

ד. f חח״ע.

תשובות סופיות

1) $f^{-1}(x)=3x+1$, כל y.

2) $f^{-1}(x)=\frac{1}{x-1}$, $y\neq 1$

3) $y\neq 3$, $f^{-1}(x)=\frac{2x-2}{x-3}$

4) $y\geq -4$, $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}$

5) לא חח"ע. תמונה: $y\leq -2$ או $y\geq 2$.

6) לא חח"ע. תמונה: $y\geq -\frac{1}{4}$.

7) לא חח"ע. תמונה $0\leq y\leq 1$.

8) כן חח"ע. תמונה: $y>0$. פונקציה הפוכה: $x>0$ $f^{-1}(x)=1-\frac{1}{x^2}$.

9) לא חח"ע. תמונה: $y\geq 2.3$ או $y\leq -1.3$

10) כן חח"ע. תמונה: $y\neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x)=\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}$.

11) לא חח"ע. תמונה: $y\geq \frac{6}{\sqrt{3}}$.

12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: $\mathbb{R}$; על.
ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; לא על.
ג. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R}\setminus\{3\}$; על.
ד. תחום הגדרה $[0,\infty)$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $[-4,\infty)$; לא על.

13) א. תחום הגדרה וטווח: $\mathbb{R}$, תמונה: $(0,1]$; לא על.
ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}$, טווח ותמונה: $(0,1]$; על.
ג. תחום הגדרה $(1,\infty]$, טווח $(0,1]$, תמונה: $(0,0.5)$; לא על.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

פונקציה זוגית ואי זוגית

שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות **1-8** הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

1) $y=4x^3$ **2)** $y=x^4+x^{10}$ **3)** $y=1$

4) $y=\frac{1}{x}$ **5)** $y=x^2+\sin^2 x$ **6)** $y=2^x$

7) $y=\ln x+x^2$ **8)** $y=\sin x\cdot\cos x$

9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
נסמן: $k(x)=-f(x),\ z(x)=f(x^2)$.
בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k,z, האם היא זוגית או אי-זוגית.

10) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ופונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
נסמן: $z(x)=-g(x^3)$ ו- $k(x)=-f(x^3)$.
טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.
טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.
איזו טענה נכונה?

11) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונתונה פונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
נסמן: $k(x)=f(-x)+x^{11}g(|x|)$, $z(x)=-g(-4x)\cdot f(x^4)$
בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות z,k, האם היא זוגית או אי-זוגית.

12) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$ ומקיימת $|f(x)|<1$.
נתון כי $g(x)$ פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.
הוכיחו שהפונקציה $z(x)=g(x)\ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)$ היא אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$.

13) הוכיחו כי:
א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

14) הוכיחו כי:
א. סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.
ב. מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
ג. מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
ד. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.
ה. הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.
ו. הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.
ז. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל x היא פונקציית האפס.

15) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.
נגדיר $z(x)=\left(f(x)\right)^n$ כאשר $n>1$ טבעי.
קבעו האם הפונקציה z היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

16) נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.
נגדיר: $f_{odd}(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}, \quad f_{even}(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$
א. הוכיחו כי $f_{odd}(x)$ היא פונקציה אי-זוגית ו- $f_{even}(x)$ היא פונקציה זוגית.
ב. הוכיחו כי $f(x)=f_{odd}(x)+f_{even}(x)$ והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.
ג. הציגו את הפונקציה $f(x)=x^2+x+1$ כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

17) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם f פונקציה אי-זוגית אז $f(0)=0$.
ב. אם f פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב- $x=0$ אז $f(0)=0$.

18) הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הפונקציה $f(x)=\cos x$ היא זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)=\sin x$ היא אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)=\tan x$ היא אי-זוגית.

ד. הפונקציה $f(x)=\cot x$ היא אי-זוגית.

19) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע $(-a,a)$ $(a>0)$.

הוכיחו כי גם f^{-1} פונקציה אי-זוגית.

20) הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי זוגיות:

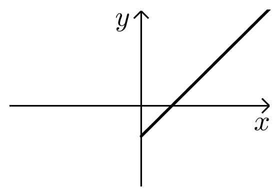
א. $y=\arctan x$

ב. $y=\arcsin x$

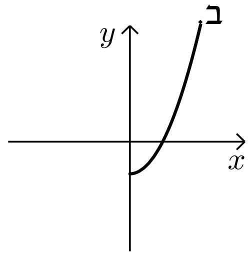
21) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.

השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

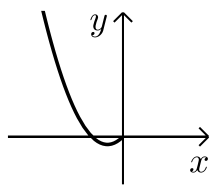
א.



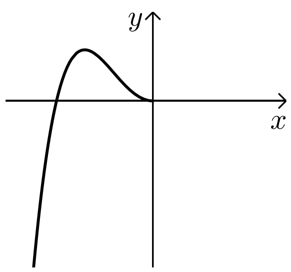
ב.



ג.

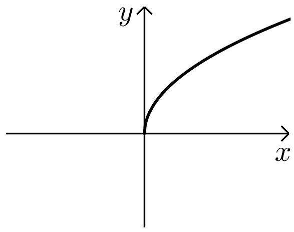


ד.

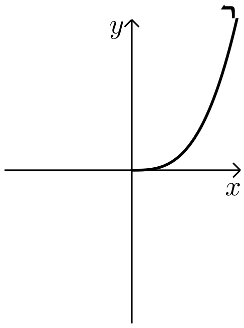


22) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x .
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית :

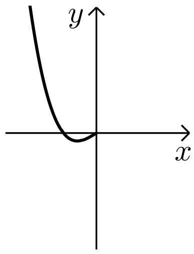
א.



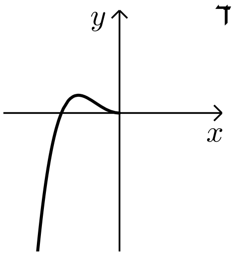
ב.



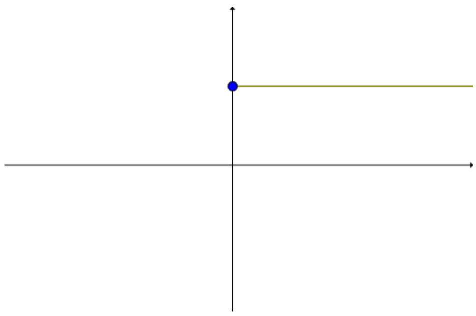
ג.

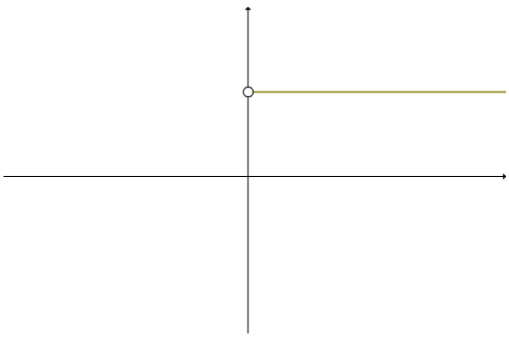


ד.



23) השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.





תשובות סופיות

שאלות **8-1** : זוגית : **2,3,5,8** ; אי- זוגית : **1,4** ; כללית : **6,7**.

9) k אי-זוגית, z זוגית.

10) טענה ב'.

11) k אי-זוגית, z זוגית.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) כאשר n זוגי – זוגית, וכאשר n אי-זוגי – אי-זוגית.

16) א.+ב. שאלת הוכחה. ג. $f(x)=\underbrace{x}_{odd}+\underbrace{x^2+1}_{even}$

17) שאלת הוכחה.

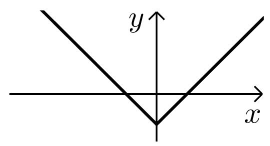
18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

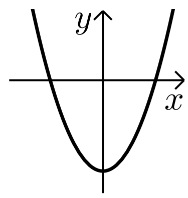
20) שאלת הוכחה.

21) להלן הגרפים :

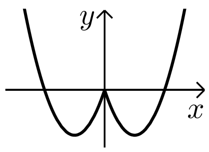
א.



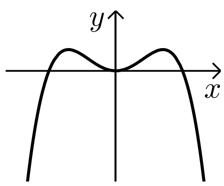
ב.



ג.

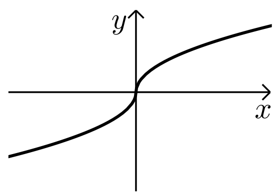


ד.

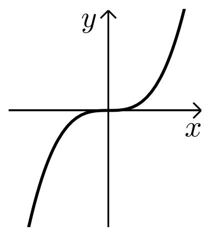


22) להלן הגרפים :

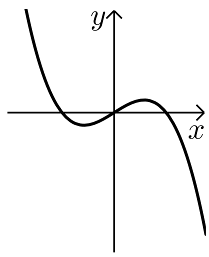
א.



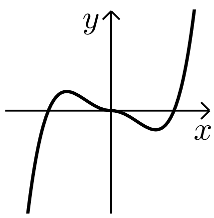
ב.



ג.



ד.



23) ראו בסרטון.

פונקציה מחזורית

שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-20**:

1) $y=1+10\sin(0.5x+4)$ **2)** $y=1+14\cos 20x$

3) $y=-4+20\tan 4x$ **4)** $y=-1+14\sec 2x$

5) $y=\sin^2 4x$ **6)** $y=\cos^2 2x$

7) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$ **8)** $y=(\sin x+\cos x)^2$

9) $y=\cos^4 x+\sin^4 x$ **10)** $y=\cot^2 x$

11) $y=\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{10}$ **12)** $y=\sin 4x+\sin 14x$

13) $y=\sin 4x+\sin 14x+\sin x$ **14)** $y=\cos 2x\cos x$

15) $y=\sin^3 x$ **16)** $y=\sin^4 x$

17) $y=\dfrac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}$ **18)** $y=|\sin x|$

19) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ **20)** $y=\cot x-\tan x$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות **21-26** אינן מחזוריות:

21) $y=x+\sin x$ **22)** $y=x+\cos x$ **23)** $y=x\sin x$

24) $y=x^2\cos x$ **25)** $y=\dfrac{\sin x}{x}$ **26)** $y=\cos 5x+\cos\sqrt{5}x$

הערה: בשאלות **21** ו-**22** נדרש ידע בחקירת פונקציה.

27) הוכיחו:

אם $f(x)$ מחזורית בעלת מחזור p,

אז $y=a+b\cdot f(cx+d)$ מחזורית בעלת מחזור $\frac{p}{c}$.

28) הוכיחו: אם T הוא מחזור של $f(x)$, אז לכל n שלם $f(x+nT)=f(x)$.

29) נתון כי f,g מוגדרות לכל x ובעלת מחזור p_1,p_2 , בהתאמה.
נתון כי היחס $\frac{p_1}{p_2}$ הוא מספר רציונלי.
הוכיחו כי גם הפונקציות $(g\neq 0)$ $\frac{f}{g}$, $f\cdot g$, $f\pm g$ הן מחזוריות.

30) נתונה הפונקציה $f(x)=x-[x]$.
א. שרטטו את גרף הפונקציה.
ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?
ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

31) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,1]$.
ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x,
שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ בקטע $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור f .

32) נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[0,1]$.
ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x,
שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ ב-$[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור g .

תשובות סופיות

1) 4π 2) $\frac{\pi}{10}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 4) π 5) $\frac{\pi}{4}$

6) $\frac{\pi}{2}$ 7) π 8) π 9) $\frac{\pi}{2}$ 10) π

11) 40π 12) π 13) 2π 14) 2π 15) 2π

16) π 17) π 18) π

19) הפונקציה היא למעשה $y=1$, כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית.
כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

20) $\frac{\pi}{2}$

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

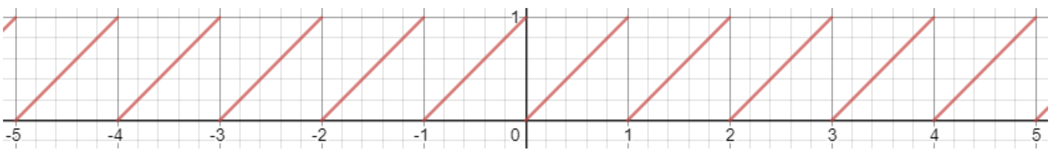
26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

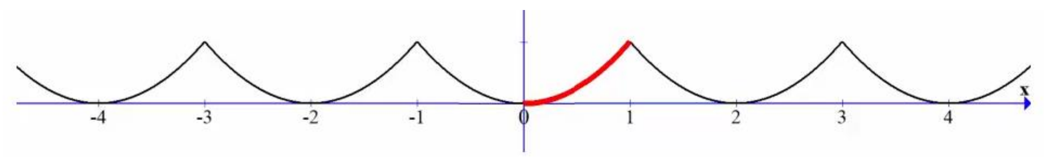
30) א.



ב. 1 ג. שאלת הוכחה.

31) $g(x)=x-k,\ k-1\le x\le k+1$ עבור k שלם, זוגי.

32) $g(x)=(x-k)^2,\ k-1\le x\le k+1$ עבור k שלם, זוגי.



פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות **1-4** כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

1) $y=|x-2|$

2) $y=3|x+1|$

3) $y=x^2+2|x-1|$

4) $y=\frac{|x|}{x}$

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x\le 4\\ -x & x<0\end{cases}$.

א. חשבו $f(1),\ f(4),\ f(-4),\ f(0),\ f(7)$.

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

תשובות סופיות

1) $y=\begin{cases}x-2 & x\ge 2\\ 2-x & x<2\end{cases}$

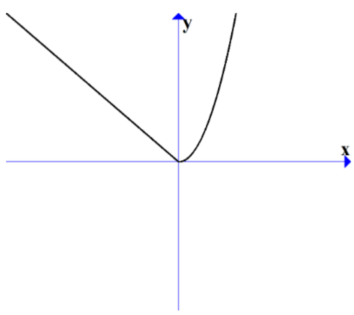
2) $y=\begin{cases}3x+3 & x\ge -1\\ -3x-3 & x<-1\end{cases}$

3) $y=\begin{cases}x^2+2x-2 & x\ge 1\\ x^2-2x+2 & x<1\end{cases}$

4) $y=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$

5) א. $f(1)=1,\ f(4)=16,\ f(-4)=4,\ f(0)=0,\ f(7)=\text{undefind}$

ב.



ג. כללית.

תרגילים משולבים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>1 \\ x^3+1 & -1\le x\le 1 \\ x+1 & x<-1 \end{cases}$.

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על $\mathbb{R}$.

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x} & x>1 \\ x^5+1 & -1\le x\le 1 \\ x+1 & x<-1 \end{cases}$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.
קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על $\mathbb{R}$.

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

3) נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, זוגית ומונוטונית עולה ממש,
ופונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.
נסמן: $z(x)=-g\left(x^3\right)$ ו- $k(x)=-f\left(x^3\right)$.
טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ג': $h(x)=k(x)z(x)$ זוגית.
מי מבין הטענות נכונה?

4) נתונות שתי פונקציות, $f,g:[0,1]\to[0,1]$.
נתון ש- f מונוטונית עולה ממש, ואילו g מונוטונית יורדת חלש,
אך אינה יורדת ממש.
תהי $h(x)=f\left(g(x)\right)$.
איזו טענה נכונה?
א. h יורדת חלש.
ב. h עולה ממש.
ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.
ד. h אינה חסומה בהכרח.

5) נתונות הפונקציות $g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<0\\ -x^2-2x-1 & x\geq 0\end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases}x+4 & x\leq 0\\ \sqrt{x} & x>0\end{cases}$.
תהי $h(x)=f(g(x))$.
א. מצאו את h בקטע $[-2,0)$.
ב. קבעו האם h חח"ע בקטע $[-2,0)$.
ג. קבעו האם h חסומה בקטע $[-2,0)$.
ד. קבעו האם $h:[-2,0)\to[0,4]$ היא על.
* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x)=x^3,\ g(x)=(-1)^{\lfloor x\rfloor}$.
קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.
הפונקציה $h(x)=f\left(g(x)\right)$ היא:
א. חסומה.
ב. אי-זוגית.
ג. חח"ע.
ד. מונוטונית.

7) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x)=x^3,\ g(x)=-\lfloor x\rfloor$.

א. בדקו את מונוטוניות $z(x)=f(g(x))$.

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x)=g(f(x))$.

ג. בדקו האם $h(x)=\sqrt[3]{f(x)}-g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a<b \Leftarrow f(a)\geq f(b)$, אז הפונקציה f יורדת חלש.

8) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $\begin{aligned} f(x)&=(3\lfloor x\rfloor)^3+27\lfloor x\rfloor \\ g(x)&=f(x)+x^3-28 \end{aligned}$.

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחח"ע.

9) מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$,

וקבעו את תחום הגדרתה.

הוכיחו שהפונקציה על $\mathbb{R}$.

הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10) חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תשובות סופיות

1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.

2) אף טענה אינה נכונה.

3) טענה ב' נכונה.

4) טענה א' נכונה.

5) א. $h(x)=x^2$ ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.

6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.

7) א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.

8) שאלת הוכחה.

9) $f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; תחום הגדרתה: כל x.

10) ראו באתר.

11) א. $-1\le x\le 2$ ב. $0\le y\le \frac{3}{2}$ ג. שאלת הוכחה.
ד. $-1\le x<\frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2}<x\le 2$ ירידה.

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 4 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to4} x^2+x+1$

ב. $\lim_{x\to10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x\to1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x\to100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

1) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim_{x\to-5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim_{x\to1}\frac{x^7-x}{x-1}$

4) $\lim_{x\to1}\frac{x^n-x}{x-1}$

5) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2-5x+2}{6x^2-5x+1}$

6) $\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}$

7) $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}$

8) $\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}$

9) $\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^3-4x^2+x-4}$

10) $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[5]{x}+1}{x+1}$

תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{10}{8.5}$ 3) 6 4) $n-1$ 5) -3

6) 32 7) 3 8) 27 9) $\frac{8}{17}$ 10) $\frac{1}{5}$

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}}$

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}$ 2) 4 3) $-\frac{1}{12}$ 4) $\frac{3}{8}$

5) $\frac{1}{6}$ 6) $\frac{3}{4}$ 7) $\frac{1}{3}$ 8) $-\frac{8}{3}$

9) $\frac{1}{2}$

גבולות טריגונומטריים

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$):

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{4x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin 2x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

10) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{x^2-1}$

11) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

12) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$

13) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}$

14) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 4x}{\sin 10x}$

15) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

16) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2 x}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

תשובות סופיות

1) $\frac{3}{4}$
2) $\frac{3}{4}$
3) $\frac{1}{2}$
4) $\frac{1}{2}$
5) $\frac{1}{2}$
6) $\frac{1}{2}$
7) $\frac{1}{8}$
8) 4
9) $\frac{1}{4}$
10) $-\frac{1}{2}$
11) $\cos a$
12) $-\sin a$
13) $\frac{1}{\cos^2 a}$
14) $\frac{4}{10}$
15) $\frac{1}{2}$
16) $\frac{2}{\pi}$
17) 1
18) $\frac{-1}{12}$

זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\begin{cases} \sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ \sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} \\ \cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2} \\ \tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b} \\ \tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b \\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi n=0 \\ \cos \pi n=(-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\cos a \\ \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin a \end{cases}$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+4}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)^2}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^2}{(2-x)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to 2^-}-\frac{1}{2}\ln(2-x)$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left((\ln x)^2+2\ln x-3\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

12) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\cdot\cot x$

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}}$

תשובות סופיות

1) ϕ 2) ϕ 3) $-\infty$ 4) ϕ

5) $-\infty$ 6) ∞ 7) ∞ 8) ϕ

9) 0 10) 1 11) ϕ 12) $-\infty$

13) $-\infty$

x שואף לאינסוף

שאלות

חשבון את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x}\right)^{\ln x}$

2) $\lim_{x\to-\infty}\arctan x+e^{x}$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^3+10x}$

5) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}$

6) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+6}{2x+10}-\frac{x}{2}\right)$

7) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

8) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

9) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6-5x}}{x^3-2x^2+1}$

10) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+2x^2+6+27x^6}}{\sqrt{3x^3+10x+4x^4}}$

11) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

12) $\lim_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

13) $\lim_{x\to-\infty}\frac{16^x+4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

14) $\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot 9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

15) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4\cdot 9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

16) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}}$

17) $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x^3-5x-1}{x^3-2x^2+1}\right)$

18) $\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x^4+2x^2+6}{3x^4+10x}}$

19) $\lim_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}\right)$

20) $\lim_{x\to\infty}\sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}}$

21) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$

22) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+kx}-x\right)$

23) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

24) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

25) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x^2\right)$

26) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-4)^{10}(3x^2-1)^4}{x^2(2x-5)^{10}(x^3+1)^2}$

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^5}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}$

29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(5\cdot 2^{x+2}+6\cdot e^{x+1}\right)-x\right]$

תשובות סופיות

1) 0 2) $-\frac{\pi}{2}$ 3) 4 4) $-\infty$

5) 0 6) -5 7) 1 8) -1

9) -3 10) 1.5 11) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ 12) $\frac{1}{4}$

13) 0 14) 4 15) $\frac{1}{9}$ 16) 2

17) $\ln 3$ 18) $e^{\frac{1}{3}}$ 19) 0

20) אם $b\neq 0$: $\lim=\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$. אם $b=0\ ,\ a>0$: ∞ . אם: $b=0\ ,\ a<0$: $-\infty$.

21) 2.5 22) $\frac{k}{2}$ 23) $\frac{1}{2}$ 24) $-\frac{1}{2}$

25) $\frac{1}{2}$ 26) $\frac{a-b}{2}$ 27) $\frac{3^4}{2^{10}}$ 28) $\frac{5}{4}$

29) $\ln(6e)$

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$) :

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$

4) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1}$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x$

6) $\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2}$

8) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x}$

9) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{x}\right)^x$

תשובות סופיות

1) $e^{\frac{1}{2}}$ 2) 1 3) e^2 4) e^{-1} 5) e^3

6) e 7) e^{-12} 8) e^{30} 9) e

כלל הסנדוויץ'

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-10**:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos(2x+1)}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+\sin 2x}{x^2+\cos 3x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\cos\left(\ln x^2\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\arctan(2x-3)}{4x+\arctan(x-\ln x)}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{2^x+3^x+4^x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}[x]$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}[x]$

11) נתונה פונקציה $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיימת $\lim\limits_{x\to 2}z(x)=4$,

ונתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיימת $4z(x)\le f(x)\le\left(z(x)\right)^2$, לכל x.

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(z(x)\right)}{x}\ ,\ \lim_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)\ ,\ \lim_{x\to 2}\tan(z(x))\ ,\ \lim_{x\to 2}f(x)$$

12) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

13) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכח: $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=0 \Leftarrow \lim\limits_{x\to c}f(x)=0$.

ב. האם נכונה גם הטענה: $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=1 \Leftarrow \lim\limits_{x\to c}f(x)=\pm 1$.

תשובות סופיות

1) 0   2) 0   3) $\frac{3}{4}$ 4) 3   5) 0

6) 0   7) $\frac{3}{4}$ 8) 4   9) 1   10) 0

11) $\lim_{x\to 2} f(x)=16$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(z(x)\right)}{x}=0$,

$\lim_{x\to 2}\tan(z(x))=\tan 4$, $\lim_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)=2$

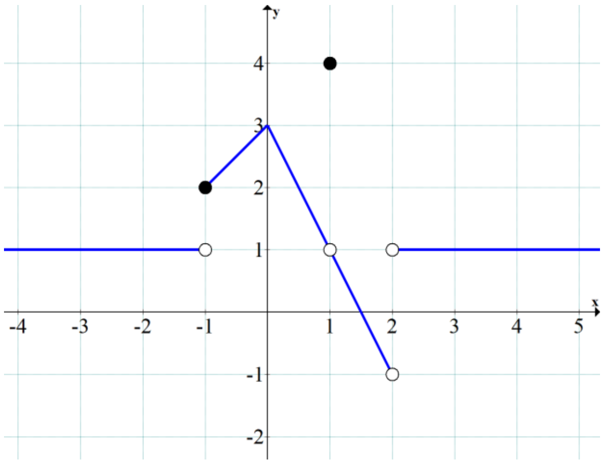
12) 0

13) א. שאלת הוכחה.   ב. לא.

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

א. $1.\ \lim_{x\to 1} f(x) \qquad 2.\ \lim_{x\to 2} f(x) \qquad 3.\ \lim_{x\to -1} f(x)$

ב. $1.\ \lim_{x\to 1}\left(3f-f^2\right) \qquad 2.\ \lim_{x\to -1}\left(3f-f^2\right)$

ג. $1.\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{4-f} \qquad 2.\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{1-f}$

2) נגדיר פונקציה $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0.5 & x=0\\ 1-x^2 & 0<x<2\\ 1.5x-6 & x\ge 2\end{cases}$.

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim_{x\to 0} f(x),\ \lim_{x\to 2} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim_{x\to 2}\left[4\left(f(x)\right)^2+10f(x)\right]$.

3) נגדיר פונקציה $f(x)$: $f(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ 0.5 & x=0 \\ \cos x & 0<x<\pi \\ -0.5 & x\ge\pi \end{cases}$.

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim\limits_{x\to\pi}\left[2\left(f(x)\right)^2+3f(x)\right]$.

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

4) $(a=0),\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 4x}{x} & x>0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$

5) $(a=1)\ ,\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x>1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x<1 \end{cases}$

6) $(a=0)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

7) $(a=\infty)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

8) $(a=-\infty)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

9) א. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

ב. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

תשובות סופיות

1) א. $1.\lim\limits_{x\to1} f(x)=1$, $2.\ \lim\limits_{x\to2} f(x)=\nexists$, $3.\ \lim\limits_{x\to-1} f(x)=\nexists$

ב. $1.\ \lim\limits_{x\to1}\left(3f-f^2\right)=2$, $2.\ \lim\limits_{x\to-1}\left(3f-f^2\right)=2$

ג. $1.\ \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{4-f(x)}=\frac{1}{3}$, $2.\ \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1-f(x)}=\nexists$

2) א. ראו בסרטון. ב. $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to2} f(x)=-3$ ג. 6

3) א. ראו בסרטון. ב. $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1,\ \nexists\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$ ג. -1

4) 4

5) ϕ

6) ϕ

7) 1

8) -1

9) א. אין גבול. ב. $\frac{1}{6}$

גבול לפי הגדרה

שאלות

בשאלות 1-6, **על פי הגדרת הגבול**, הוכיחו:

1) $\lim_{x\to 2} 7x+14=28$

2) $\lim_{x\to 4} x^2+x=20$

3) $\lim_{x\to 24} \sqrt{x+1}=5$

4) $\lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$

5) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x}{x^2-2}=1$

6) $\lim_{x\to \alpha} \sin x=\sin \alpha$

7) חשבון, **על פי הגדרת הגבול**: $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.

הוכיחו **על פי הגדרת הגבול** את מקרים 8-11:

8) $\lim_{x\to 2} \frac{3+x}{x^2+1}=1$

9) $\lim_{x\to \infty} \frac{x+7}{x+2}=1$

10) $\lim_{x\to \infty} \frac{3-4x}{2x+1}=-2$

11) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1}=3$

12) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to \infty} f(x)=-5$.
הוכיחו כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f(x)<-4$.

13) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to \infty} f(x)=5$.
הוכיחו כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f^2(x)>16$.

14) נניח f פונקציה ממשית וחיובית בתחום $[a,\infty)$ המקיימת $\lim_{x\to \infty} f(x)=0$.
הוכיחו שמתקיים $\lim_{x\to \infty} \sqrt{f(x)}=0$.

15) נתון הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+3x+2}=1$.

מצאו ערך של $M>0$, עבורו לכל $x>M$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצאו M, כך ש-$\left|f(x)-L\right|<0.1$: $\forall x>M$).

16) נגדיר את הפונקציה $f(x)=\begin{cases}2 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}\end{cases}$.

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

א. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ ב. $\lim\limits_{x\to2.5}f(x)$ ג. $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$

17) בהינתן הגבול $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x+4}{x+11}=\frac{1}{2}$, מצאו $\delta>0$, כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $|x-1|<\delta$, אי-השוויון $\left|\frac{2x+4}{x+11}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{100}$ מתקיים.

18) הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$, אז $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=0$.

ב. אם $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=0$, אז $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=0$.

ג. אם $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=L$, אז: הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ קיים ושווה ל-L או $-L$.

ד. אם הגבולות $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$ ו-$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ קיימים,
אז גם הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ קיים.

19) יש להוכיח כי $\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2}{x+3}\neq1$ לפי ההגדרה.

20) יש להוכיח כי $\lim\limits_{x\to4}\frac{2x+1}{x+10}\neq1$ לפי ההגדרה.

21) הוכיחו שאם $\lim\limits_{x\to0}f(x)=3$, אז קיימת סביבה נקובה של 0 שבה $f(x)>2$.

22) הוכיחו שאם $\lim_{x\to x_0} f(x) > L$, אז קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה $f(x) > L$.

23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו: $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x) = 0$.

ב. האם נכונה גם הטענה: $\lim_{x\to c} |f(x)| = |k| \Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x) = k \quad (k \neq 0)$.

תשובות סופיות

7) $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר: GOOL.co.il

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 5 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות **1-6**: בדקו את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר"[1] שלהן,
ובשאלות **1** ו-**2**, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

1) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 2 \\ 5-x & x>2 \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x & x\ge 1 \\ x^2 & x<1 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\le 1 \\ |x-2| & 1<x<2 \\ 1 & x=2 \\ x-2 & x>2 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} \sin x & x<0 \\ x^2 & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ x-3 & x\ge 2 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x>0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x>0 \\ 2 & x=0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$

7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **3-6**:
רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא.
בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות **8-11**: מה צריך להיות הערך הקבוע של k, על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x?

8) $f(x)=\begin{cases} kx^2+x-2 & x\le 2 \\ 5kx-6 & x>2 \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x-1} & x\ne 1 \\ k & x=1 \end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & x\ne 2 \\ k & x=2 \end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases} 2x-k & x\le 0 \\ x^{2x} & x>0 \end{cases}$

הערה: שאלה **11** ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

[1] נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות **15-12**: מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b,
על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

12)
$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\le 0 \\ \dfrac{\sin x}{2x} & 0<x<\pi \\ a\cos x & x\ge \pi \end{cases}$$

13)
$$f(x)=\begin{cases} a\sqrt[3]{x}+x^2 & x<-1 \\ bx^2+x-1 & -1\le x\le 1 \\ 4\dfrac{\sqrt{x-1+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x>1 \end{cases}$$

14)
$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x>1 \\ (x-1)\ln(x+1)+b & 0\le x\le 1 \\ a\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-2}{2^{\frac{1}{x}}+4} & x<0 \end{cases}$$

15)
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x<1 \\ ax^2+b & 1\le x\le 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x>2 \end{cases}$$

הערה: שאלות 15-14 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

16) הוכיחו או הפריכו:

א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

17) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f+g$ רציפה?
הוכיחו זאת.

18) תהי $f(x)=\begin{cases}|x|-1 & |x+1|\ge 4\\ 2 & |x+1|<4\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.
ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).
ג. תהי $g(x)=x+\frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x .
האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x ?

19) תהי f פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.
תהי g הפונקציה המוגדרת בקטע $(0,2)$, על ידי $g(x)=\begin{cases}f(x) & 0<x<1\\ x^2 & 1\le x<2\end{cases}$.
א. האם יתכן שהנקודה $x_0=1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g ? נמקו.
ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.

20) תהי $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y)=f(x)f(y)$, לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.
הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

21) תהי $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y)=\left[f(x)f(y)\right]^2$, לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.
הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

22) נתונה הפונקציה $f(x)=x-\frac{1}{2}\lfloor 2x\rfloor$.
הוכיחו או הפריכו:
א. הפונקציה f חסומה לכל x .
ב. הפונקציה f רציפה לכל x .
ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x .
ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x .

23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \le x$ לכל x.
הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x=0$.

ב. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \le \sin x$ לכל x.
הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

24) הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל x.

ידוע כי עבור $x \neq \pm 1$, $f(x)$ נתונה על ידי הנוסחה $f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$.

מצאו את הנוסחה של $f(x)$ לכל x.

25) הפונקציות $3g(x)+2f(x)$ ו- $f(x)-2g(x)$ רציפות לכל x.
הוכיחו שהפונקציה $|f(x)-g(x)|$ רציפה לכל x.

26) תהי $f(x)$ מוגדרת לכל x ומקיימת $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)(1-f(x))\right]=0$.

א. הוכיחו או הפריכו: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ או $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

27) תהי f מוגדרת לכל x.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f(\sin x)$ רציפה לכל x, אז f רציפה לכל x.

ב. אם $\sin(f(x))$ רציפה לכל x, אזי f רציפה לכל x.

ג. אם לכל x_0 מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=4$, אזי $f(x)=4$ לכל x.
כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי f רציפה לכל x?

28) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי לכל $x,y\in\mathbb{R}$:

1. $\min\{x,y\}=\frac{1}{2}\left[(x+y)-|x-y|\right]$

2. $Max\{x,y\}=\frac{1}{2}\left[(x+y)+|x-y|\right]$

ב. הוכיחו כי אם f,g רציפות ב- $\mathbb{R}$ אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב- $\mathbb{R}$:

1. $z_1(x)=\min\{f(x),g(x)\}$

2. $z_2(x)=Max\{f(x),g(x)\}$

תשובות סופיות

1) רציפה.

2) רציפה.

3) רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.

4) רציפה בנקודות $x=0,1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.

5) לא רציפה.

6) לא רציפה.

7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.

8) $k=1$

9) $k=4$

10) $k=\frac{2}{3}$

11) $k=-1$

12) $a=0$, $b=\frac{1}{2}$

13) $a=1$, $b=2$ או $a=2$, $b=1$.

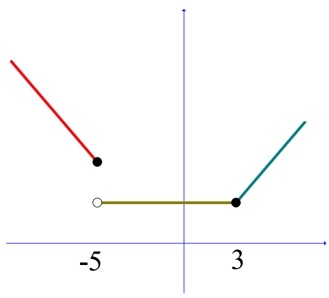
14) $a=-2e^{-1}$, $b=e^{-1}$

15) $a=\frac{e}{3}$, $b=-\frac{e}{3}$

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) א.



ב. הפונקציה רציפה לכל $x\neq -5$. ב- -5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.

19) א. לא. ב. כן.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

23) שאלת הוכחה.

24) $$f(x)=\begin{cases}-\pi & x=-1\\ \dfrac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x\neq\pm1\\ \pi & x=1\end{cases}$$

25) שאלת הוכחה.

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

משפט ערך הביניים

שאלות

בשאלות **1-4** הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

1) $x^3+4x-1=0$

2) $x^2=-\ln x$

3) $x-0.25\sin x=7$

4) $x^3+bx^2+cx+d=0$

בשאלות **5-6** הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

5) $e^x-5x=0$

6) $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי f פונקציה רציפה לכל x, המקיימת: $f(0)=1$, $f(1)=2$.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)+\sin x=4x$ יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to[-4,4]$ פונקציה רציפה.
הוכיחו שלמשוואה $2x+f(x)=1$ יש לפחות פתרון אחד.

8) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,
בו למשוואה $x^2=10-\frac{1}{x}$ יש פתרון.

9) נגדיר $f(x)=x^2+\frac{1}{x-1}$.

א. חשבו את $f(2)$, $f(0)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2+\frac{1}{x-1}=0$
יש פתרון בקטע $(0,2)$?

10) תהיינה f,g פונקציות רציפות ב-$[a,b]$ המקיימות $f(a)<g(a),\ f(b)>g(b)$
הוכיחו שקיימת נקודה $a<c<b$ שבה $f(c)=g(c)$.

11) נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ שהוא חלקי לתחום הגדרתה.
נניח ש- $f([a,b])\subseteq[a,b]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)=c$.
נקודה c כנ"ל נקראת "**נקודת שֶׁבֶת**" של הפונקציה.

12) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to[0,1]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)=c^{1.5}$.

13) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=f(1)$.
א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[0,0.5]$ כך ש- $f(c)=f(c+0.5)$.
ב. הוכיחו כי קיימות נקודות $c,d\in[0,1]$ כך ש- $f(c)=f(d)$.

14) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)<f(2)<f(1)$.
הוכיחו כי קיימים $c_1,c_2\in[0,2]$ כך ש- $f(c_1)=f(c_2)$.

15) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,8]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=f(8)$.
הוכיחו כי קיימות נקודות $c_1,c_2,c_3,c_4\in[0,8]$ כך ש-
$f(c_1)=f(c_2),\ f(c_3)=f(c_4)$.

16) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x+\sin x$ היא על $\mathbb{R}$.

17) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x\cdot\sin x$ היא על $\mathbb{R}$.

18) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור 2π.
הוכיחו שקיים $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x_0+\pi)=f(x_0)$.

19) יהיו $0\le a_1,\dots,a_n\le 1$ קבועים המקיימים $a_1+\dots+a_n=1$.
הוכיחו כי למשוואה $|x-a_1|+\dots+|x-a_n|=\frac{n}{2}$ יש לפחות פתרון אחד.

20) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ורציפה.
הוכיחו כי f עולה ממש או יורדת ממש.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ פונקציה חח"ע ועל.
הוכיחו כי f לא רציפה ב- $\mathbb{R}$.

21) תהי $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ פונקציה רציפה.
הוכיחו כי קיימים אינסוף ערכים של x, שעבורם $f(x)=\sin x$.

22) יהי P פולינום ממעלה ***זוגית***, מהצורה $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$,
ונניח כי $a_0<0$.
הוכיחו כי ל- P ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

23) יהיו f,g פונקציות רציפות המקיימות:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=k,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-k,\ \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-k,\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=k$, כאשר $0<k\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x)=g(x)$.

24) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a,b), ותהיינה $x_1,\ldots,x_n$ (כאשר $n>1$)
נקודות כלשהן ב- (a,b).
הוכיחו שקיימת נקודה c בקטע (a,b), כך ש-
$f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$.

ב. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a,b).
האם לכל $c\in(a,b)$, ניתן למצוא נקודות $x_1,\ldots,x_n$, שונות זו מזו,
כאשר $n>1$, כך ש- $f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$?
הוכיחו זאת.

25) תהי f פונקציה רציפה בקטע פתוח (a,b).
נניח כי: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$.
הראו כי תמונת הקטע (a,b) היא $\mathbb{R}$.

26) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(0)=-1,\ f(1)=4$.
תהי $S=\{x\in[0,1]\mid f(x)=0\}$.
א. הוכיחו ש- S לא ריקה.
ב. הוכיחו שלקבוצה S יש חסם עליון, שנסמנו α.
ג. הוכיחו כי $\alpha\in(0,1]$.
ד. הוכיחו כי $f(\alpha)=0$.

27) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, כך ש- $f(a)=f(b)$.
הוכיחו שקיימים $a<x_1<x_2<b$, כך ש- $f(x_1)=f(x_2)$.

28) תהי $z(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ויהי $0\le r\le 1$.
הוכיחו שיש c בקטע, עבורו מתקיים $z(c)=rz(a)+(1-r)z(b)$.

29) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו כי למשוואה $A\sin x+B\cos x=C\sin 2x$ יש פתרון.
ב. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(4)>2f(2),\ \ f(0)>0$.
הוכיחו שקיים c כך ש- $f(2c)=2f(c)$.
ג. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(0)=1,\ f(1)=2$.
הוכיחו שקיים a כך ש- $f(a)=\frac{1}{a}$.

30) פונקציה f מוגדרת לכל x.
לפונקציה יש את התכונה הבאה:
כל ערך ממשי מתקבל על ידי הפונקציה בדיוק פעמיים.
הוכיחו כי הפונקציה אינה יכולה להיות רציפה.

תשובות סופיות

8) $[0.1,1]$

9) א. $f(0)=-1$, $f(2)=5$ ב. לא.

שאלות **1-7** ושאלות **10-30** הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

תכונות נוספות של פונקציות רציפות

שאלות

1) קבעו בכל סעיף האם הטענה נכונה או לא נכונה, והוכיחו זאת.
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$, שהיא:

א. חח"ע, אבל לא מונוטונית.
ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
ד. חסומה, אבל לא רציפה.
ה. רציפה, אבל לא חסומה.
ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע $[0,1]$, על ידי f, היא קטע.

2) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(x)>0$, לכל $x\in[a,b]$.
הוכיחו שקיים $\alpha>0$, כך ש- $f(x)\ge\alpha$, לכל $x\in[a,b]$.

3) תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונניח כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ קיים.
הוכיחו ש- f חסומה.

4) יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות. נתון שלכל שתי נקודות x_1,x_2,
המקיימות $x_1<x_2$, קיימת נקודה $x_1<x_3<x_2$, שעבורה $f(x_3)=g(x_3)$.
הוכיחו כי $f(x)=g(x)$, לכל x.

5) תהי $f:[0,1]\to(0,1)$ פונקציה על.
הוכיחו ש- f לא רציפה ב- $[0,1]$.

6) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שמקיימת $f(x)=f(x^2)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.
הוכיחו ש- f פונקציה קבועה.

7) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שמקיימת $f(x+y)=f(x)+f(y)$,
לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי $f(x)=f(1)x$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

8) תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a,b), ונניח שקיים קבוע ממשי K,
כך שלכל שתי נקודות, x_1 ו- x_2, בקטע (a,b), מתקיים **תנאי ליפשיץ**:
$$|f(x_1)-f(x_2)|\le K|x_1-x_2|$$
הוכיחו כי $f(x)$ רציפה בקטע (a,b).
* נסו להוכיח בשתי דרכים שונות.

9) הוכיחו שלכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת מינימום מוחלט.
באריכות:
הוכיחו שאם f פולינום ממעלה זוגית, אז קיימת נקודה $x_0\in\mathbb{R}$,
כך ש- $f(x)\ge f(x_0)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

10) בסעיפים א ו-ב הוכיחו:
א. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של רציונליים שמתכנסת אליו.
ב. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של אי-רציונליים שמתכנסת אליו.
ג. תהי $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בכל נקודה $x\in\mathbb{R}$.
הערה: פונקציה זאת נקראת פונקציית דִירִיכְלֶה.

11) הוכיחו או הפריכו:
א. אם $f(x)$ רציפה בנקודה c, אז $|f(x)|$ רציפה בנקודה c.
ב. אם $|f(x)|$ רציפה בנקודה c, אז $f(x)$ רציפה בנקודה c.

בשאלות **13-12** הוכיחו:

12) אם f רציפה ב-x_0, אז קיימת סביבה של x_0, בה f חסומה.

13) אם f רציפה ב-x_0, ואם $f(x_0)>0$, אז קיימת סביבה של x_0, שבה $f(x)>0$.

14) יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $f(a)\neq g(a)$,
עבור a ממשי מסוים.
הראו שקיימת סביבה של a, שבה $f(x)\neq g(x)$.

<u>הערה</u>
תרגיל זה מכיל בתוכו גם את הטענה הבאה :
תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $f(a)\neq 0$, עבור a ממשי מסוים.
הראו שקיימת סביבה של a, שבה $f(x)\neq 0$.
פשוט לקחנו $g(x)=0$.
בטענה זו נשתמש בשאלה האחרונה תחת הנושא 'משפט ערך הביניים', בסעיף האחרון.

15) הוכיחו כי אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה a, אזי הפונקציה $g(x)$,
המוגדרת על ידי $g(x)=\begin{cases}-c & f(x)<-c\\ f(x) & |f(x)|\le c\\ c & f(x)>c\end{cases}$, גם רציפה בנקודה a
(כאשר c מספר חיובי כלשהו).

16) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{x} & x\ge 1\\ e^{-x}-e^{-1} & x<1\end{cases}$.
בדקו האם f הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את $f^{-1}(x)$.

17) הוכיחו כי אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ו- $f(x)>0$ לכל $x\in[a,b]$ אז יש $c>0$ כך ש-
$f(x)>c$ לכל $x\in[a,b]$.

18) הוכיחו כי אם f,g רציפות ב- $\mathbb{R}$ אז גם הפונקציה $z(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ רציפה ב- $\mathbb{R}$.
הערה : יש להוכיח לפי ההגדרה (בלשון ε,δ).
השוו לשאלה 28 בנושא הראשון בפרק זה.

תשובות סופיות

16) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & -1<x\le 0\\ -\ln\left(x+e^{-1}\right) & x>0\end{cases}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

שיטת החצייה

שאלות

1) נתונה המשוואה $x^3-2x^2-x+2=0$. בעזרת שיטת החצייה בקטע $[-2,3]$,
מצאו שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות.
מהו קירוב השורש?

2) נתונה המשוואה: $x^3-x-2=0$.
א. מצאו קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.
ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של 0.001?
ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.

הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

תשובות סופיות

1) 0.07

2) א. $[1,2]$ ב. 10 ג. $x=1.520$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 6 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

שאלות*

בשאלות **1-6** חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

1) $f(x)=x^2+4x+1$ **2)** $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ **3)** $f(x)=\sin 4x$

4) $f(x)=e^x$ **5)** $f(x)=\ln x$ **6)** $f(x)=\sqrt{x+10}$

7) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$.

8) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$.

9) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x\cdot z(x)$ כאשר $\lim\limits_{x\to 0} z(x)=4$, $z(0)=1$.

10) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-1} & x>0\\ -(x+1)^2 & x\le 0\end{cases}$.

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$. האם קיים משיק בנקודה זו?

11) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ (n טבעי).

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

12) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} x^n \arctan\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ (n טבעי).

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

13) חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(4+x)-\ln 4}{x}$

ב. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{1+x}-e}{x}$

14) נתון כי f גזירה בנקודה x_0. הוכח כי:

א. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ב. $2x_0 f(x_0)-x_0^2 f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2 f(x_0)-x_0^2 f(x)}{x-x_0}$

15) נתון כי f גזירה וזוגית. הוכיחו כי f' אי זוגית.

16) נתונה פונקציה המוגדרת ב- $[a,b]$ ומקיימת לכל x,y ב- $[a,b]$:

$|f(x)-f(y)|\le|x-y|^2$.

הוכיחו כי f גזירה ב- $[a,b]$ וחשבו את נגזרתה.

17) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in\mathbb{Q} \\ x^3 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

18) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

19) נתונה הפונקציה $f(x)=\left|\sin^5 x\right|$.

א. חשבו את $f'(x)$.

ב. מצאו את כל הנקודות עבורן $f'(x)=0$.

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

20) הוכיחו או הפריכו:

א. אם h גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0, אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-x_0.

ב. אם h אינה גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0, אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-x_0.

ג. אם h אינה גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0, אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-x_0.

ד. אם h גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0, אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-x_0.

21) הוכיחו או הפריכו:

א. אם f גזירה, אז $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$.

ב. אם הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

22) הוכיחו או הפריכו:

א. אם f גזירה ב-(a,b) ו-$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$.

ב. אם f גזירה ב-(a,b) ו-$\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$.

23) נתון כי $f(x)$ רציפה ב-$x=4$, ומקיימת $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-\pi-10(x-4)}{x-4}=0$.

הוכיחו ש-f גזירה ב-$x=4$, וחשבו את $f'(4)$.

24) תהי f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה $x=0$ המקיימת $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

א. הוכיחו כי $f(0)=0$.

ב. הוכיחו כי f גזירה ב-$x=0$ ו-$f'(0)=0$.

25) תהי f פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי $f(0)=0$ ו-$f'(0)=k$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty} x f\left(\frac{1}{x}\right)=k$.

26) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה x_0.

א. אם $f(x_0)\neq 0$, הוכיחו שגם $|f|$ גזירה ב-x_0.

ב. אם $f(x_0)=0$, הראו שייתכן כי $|f|$ גזירה ב-x_0 וייתכן שלא.

27) תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות בנקודה x_0.
נגדיר $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
הראו שאם $f(x_0)\neq g(x_0)$, אז h גזירה ב- x_0.

28) תהי f פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.
הוכיחו כי אם f גזירה ב- 0, אז $f'(0)=0$.

הערה: פתרו בשתי דרכים שונות.

29) נתונה פונקציה $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(xy)=f(x)+f(y)$,
לכל $x,y\in(0,\infty)$.
נתון כי f גזירה בנקודה $x=1$.

א. הוכיחו כי $f(1)=0$ ו- $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

ב. הראו כי f גזירה, ושלכל $x>0$, $f'(x)=\frac{f'(1)}{x}$.

30) נתון כי f פונקציה גזירה המקיימת $\frac{f(x)+f(y)}{2}=f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.
הוכיחו ש- f פונקציה לינארית.

31) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את הטענה הבאה:
אם f גזירה ב- x_0, אז $f'(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_0+a_n)-f(x_0)}{a_n}$
לכל סדרה $a_n\to 0$.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0=1$, ו- $f(1)=1$.
הראו שאם $k\in\mathbb{N}$, אז
$$\frac{k(k+1)}{2}f'(1)=\lim_{n\to\infty}n\left[\left(f(1+\tfrac{1}{n})+f(1+\tfrac{2}{n})+\ldots+f(1+\tfrac{k}{n})\right)-k\right].$$

ג. חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{10}{n}}-10\right]$.

32) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x)=(x-1)^2D(x)$ גזירה **רק** בנקודה $x=1$.

33) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)|\le x^2$ לכל x.
הוכיחו שהפונקציה גזירה ב- $x=0$.

34) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)|\le \sin^2 x$ לכל x.
הוכיחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

35) תהי f פונקציה גזירה ב- x_0.

א. הוכיחו כי $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה f, באופן שהגבול בסעיף א' קיים,
אך $f'(x_0)$ אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות $f'(x_0)$ את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0+3h)}{h}$.

36) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- x_0.

א. הוכיחו כי $f''(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה f, באופן שהגבול בסעיף א' קיים,
אך $f''(x_0)$ אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לופיטל'.

37) נתון כי $f(x)$ רציפה בנקודה $x=a$, ונגדיר פונקציה חדשה $z(x)=(x-a)f(x)$.
הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה $z(x)$ גזירה בנקודה $x=a$.

ב. $z'(x)$ רציפה ב- $x=a$.

38) נניח ש- f גזירה ב- c ו- $f(c)=0$.
הוכיחו:

א. אם $f'(c)=0$ אז $|f(x)|$ גזירה ב- c.

ב. אם $|f(x)|$ גזירה ב- c אז $f'(c)=0$.

39) יהיו f,g פונקציות גזירות ב- c ונניח כי $f(c)=g(c)$.

א. הוכיחו כי $|f(x)-g(x)|$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c)=g'(c)$.

ב. הוכיחו כי $z_1(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c)=g'(c)$.

ג. הוכיחו כי $z_2(x)=Max\{f(x),g(x)\}$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c)=g'(c)$.

40) נניח ש- $|f(x)|$ גזירה ב- c ו- f רציפה ב- c .

הוכיחו כי f גזירה ב- c .

תשובות סופיות

1) $f'(x)=2x+4$ 2) $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$ 3) $f'(x)=4\cos 4x$

4) $f'(x)=e^x$ 5) $f(x)=\frac{1}{x}$ 6) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+10}}$

7) $44!$ 8) 2   9) 4

10) א. רציפה לכל x.   ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.

11) א. $n>1$ ב. $n>2$

12) א. $n>1$ ב. $n>1$

13) א. $\frac{1}{4}$ ב. e

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה. $f'=0$

17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים: $f'(0)=0$.

18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$, ומתקיים: $f'(1)=0$.

19) א. $f'(x)=\begin{cases}5\sin^4 x\cos x & 2n\pi<x<(2n+1)\pi\\ 0 & x=n\pi\\ -5\sin^4 x\cos x & (2n+1)\pi<x<(2n+2)\pi\end{cases}$ ב. $x=\frac{\pi}{2}n$

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

30) שאלת הוכחה.

31) א. שאלת הוכחה.   ב. שאלת הוכחה.   ג. 55

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=|x|$ ג. $-5f'(x_0)$

36) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$

37) שאלת הוכחה.

38) שאלת הוכחה.

39) שאלת הוכחה.

40) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות חד-צדדיות

שאלות

1) תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\ge 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$ על מנת להדגים שתי שיטות אלה.

בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת משיטות אלה.

בשאלות **2-9** בדקו את גזירות הפונקציות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו.

בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

2) $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x\ge 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x & x\ge 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\ge 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5<x<0 \\ x^2+2x & x\ge 0 \end{cases}$

6) $f(x)=2+4|x-1|$

7) $f(x)=3x^2+x|x|+1$

8) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

10) בדקו האם הפונקציה משאלה **5** גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

11) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x\ge -1 \\ \frac{1}{x}+a & x<-1 \end{cases}$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x=-1$?

ב. עבור ערך ה- a שקיבלת בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=-1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

12) מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases}\ln^3 x & 0<x\le e\\ ax+b & x>e\end{cases}$.
עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

13) מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases}e^x & 0<x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$.
עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

14) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}+4x & x<0\\ px+q & x\ge 0\end{cases}$.
קבעו עבור אילו ערכים של הקבועים p ו- q הפונקציה הנתונה:
א. רציפה. ב. גזירה.

15) חשבו את $f'(0)$, עבור הפונקציה: $f(x)=\left|x^4-x^3+\sin(10x)-1\right|$.

16) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|\cos\pi x|} & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.
הוכיחו שהפונקציה לא גזירה לכל x ממשי.

תזכורת (הערך השלם)

פונקציית הערך השלם $[x]$ מחזירה לכל מספר ממשי x את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- x (מעגלת כלפי מטה). למשל: $[4.1]=4$, $[-4.1]=-5$.

17) נתונה הפונקציה $f(x)=[x]-[-x]$.
חשבו את $f'(x)$.

18) נתונה הפונקציה $f(x)=[x]\sin(\pi x)$.
חשבו את $f'(x)$ **על פי ההגדרה**.

19) נתונה הפונקציה $f(x)=[x]\left(1-\cos(\pi x)\right)$.
חשבו את $f'(x)$.

(20 הוכיחו שאם f היא פונקציה המקיימת $\left|f\left(x\right)\right| \le x^2$ לכל x,
אז f גזירה ב-$x=0$.

(21 תהי f פונקציה רציפה ב-$x_0=0$.
הוכיחו כי הפונקציה $z\left(x\right)=\left|x\right| f\left(x\right)$ גזירה ב-$x_0=0$ אם ורק אם $f\left(0\right)=0$.

(22 יהיו f ו-g שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה של $x_0 \in \mathbb{R}$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f(x_0)=g(x_0)$ ו-$f_-'(x_0)=g_+'(x_0)$,
אז הפונקציה z, המוגדרת על ידי $z(x)=\begin{cases} f(x) & x \le x_0 \\ g(x) & x \ge x_0 \end{cases}$, גזירה ב-$x_0$.

ב. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לא גזירה ב-x_0 ו-$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ב-$\mathbb{R}$,
אז $f \circ g$ איננה גזירה ב-$\mathbb{R}$.

ג. אם g גזירה מימין ב-x_0 והפונקציה f מוגדרת בסביבה מלאה של $g(x_0)$ וגזירה מימין ב-$g(x_0)$, אזי $f \circ g$ גזירה מימין ב-x_0.

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

(23 תהיינה f ו-g פונקציות המוגדרות ב-$\mathbb{R}$.
נתון ש-g היא פונקציה רציפה ב-$\mathbb{R}$, ולכל $x>y$
מתקיים $g\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.
הוכיחו כי f גזירה ב-$\mathbb{R}$, ושלכל x ממשי מתקיים $f'(x)=g(x)$.

(24 נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \ge 1 \\ \frac{\pi}{4}-\arctan x & x<1 \end{cases}$.

א. בדקו את רציפות וגזירות f.

ב. בדקו האם f הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את $f^{-1}(x)$.

תשובות סופיות

1) $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\geq 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

2) $f'(x)=\begin{cases}2x-4 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

3) $f'(x)=\begin{cases}2x-5 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

4) $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\geq 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

5) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+2x} & -0.5<x<0\\ 2x+2 & x\geq 0\end{cases}$

6) $f'(x)=4\ (x>1)\quad,\quad f'(x)=-4\ (x<1)$

7) $f'(x)=8x\ (x\geq 0)\quad,\quad f'(x)=4x\ (x<0)$

8) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$

10) לא גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

11) א. $a=1$ ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

12) $a=3/e \quad b=-2$ $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x}\ln^2 x & 0<x<e\\ \dfrac{3}{e} & x\geq e\end{cases}$

13) $a=e \quad b=0$ $f'(x)=\begin{cases}e^x & 0<x<1\\ e & x\geq 1\end{cases}$

14) א. $q=0$ ב. $q=0, p=4$

15) -10

16) שאלת הוכחה.

17) $f'(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Z}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$

18) $f'(x)=\begin{cases}[x]\cos(\pi x)\pi & x\notin\mathbb{Z}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$

19) $f'(x)=\begin{cases}[x]\sin\pi x & x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & x\in\mathbb{Z},\ x\text{ even}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z},\ x\text{ odd}\end{cases}$

לפתרונות מלאים בווידאו של שאלות **20-23** היכנסו לאתר www.GooL.co.il

24) א. רציפה לכל x וגזירה לכל $x\neq 1$.

ב. $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & -1<x\le 0\\ \tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right) & 0<x<\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 7 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 27-35 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

1) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+4}{2x}$

2) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{2x+10}$

3) $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+1)^2}$

4) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

5) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

6) $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$

7) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

8) $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

9) $f(x)=x\cdot\ln x$

10) $f(x)=x^2\cdot\ln x$

11) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$

12) $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-32$

13) $f(x)=\ln^2 x+\dfrac{1}{\ln^2 x}$

14) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

15) $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

16) $f(x)=x\cdot e^{-2x^2}$

17) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

18) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

19) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

20) $f(x)=\sin(x^3)$

21) $f(x)=\cos(x^4)$

22) $f(x)=\sin^3 x$

23) $f(x)=\tan(x^2)$

24) $f(x)=\ln(\cos x^2)$

25) $f(x)=\arcsin(2x+3)$

26) $f(x)=\arctan(x^2)$

27) $f(x)=(x+1)^{\sin x}$

28) $f(x)=(\sin x)^x$

29) $f(x)=(\cos x)^{\ln x}$

30) $y=x^{\ln x}$

31) $y=\sqrt[x]{x}$

32) $y=x^{\sqrt{x}}$

33) $y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

34) $y=(x^2+1)^x$

35) $y=(x+1)^{(x+1)}$

הערה: בשאלות 28 ו-29 נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתיהן.

תשובות סופיות

1) $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2},\ \ f''(x)=\frac{4}{x^3}$

2) $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2},\ \ f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$

3) $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3},\ \ f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$

4) $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2},\ \ f''(x)=\frac{4x\cdot(2x^2+24)}{(x^2-4)^3}$

5) $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},\ \ f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$

6) $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4},\ \ f''(x)=12\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

7) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\ \ f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

8) $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x^{1.5}},\ \ f''(x)=\frac{3\ln x-8}{4x^{2.5}}$

9) $f'(x)=\ln x+1,\ \ f''(x)=\frac{1}{x}$

10) $f'(x)=x(2\ln x+1),\ \ f''(x)=2\ln x+3$

11) $f'(x)=\frac{1}{2(2-x)},\ \ f''(x)=\frac{1}{(4-2x)^2}$

12) $f'(x)=\frac{2}{x}(\ln x+1),\ \ f''(x)=\frac{-2\ln x}{x^2}$

13) $f'(x)=\frac{2}{x}\left[\frac{(\ln x)^4-1}{(\ln x)^3}\right],\ \ f''(x)=-\frac{2}{x^2}\left\{\frac{(\ln x)^5-(\ln x)^4-(\ln x)-3}{(\ln x)^4}\right\}$

14) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)$

15) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right)$

16) $f'(x)=e^{-2x^2}(1-4x^2),\quad f''(x)=-4xe^{-2x^2}(3-4x^2)$

17) $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^4}}$

18) $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}},\quad f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}}$

19) $f'(x)=\frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$

20) $f'(x)=\cos(x^3)\cdot 3x^2,\quad f''(x)=-9x^4\sin(x^3)+6x\cdot\cos(x^3)$

21) $f'(x)=-\sin(x^4)\cdot 4x^3,\quad f''(x)=-16x^6\cos(x^4)-12x^2\cdot\sin(x^4)$

22) $f'(x)=3\sin^2 x\cdot\cos x,\quad f''(x)=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x$

23) $f'(x)=\frac{2x}{\cos^2(x^2)},\quad f''(x)=\frac{2\cdot\cos^2(x^2)-8x^2\cos(x^2)\sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$

24) $f'(x)=\tan(x^2)\cdot(-2x),\quad f''(x)=\frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)}-2\tan(x^2)$

25) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}\cdot 2,\quad f''(x)=\frac{4(2x+3)}{\left(1-(2x+3)^2\right)^{1.5}}$

26) $f'(x)=\frac{2x}{1+x^4},\quad f''(x)=\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$

27) $f'(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln(x+1)+\frac{\sin x}{x+1}\right)$

28) $$f'(x)=\left(\sin x\right)^{x}\left(\ln(\sin x)+\cot x\cdot x\right)$$

29) $$f'(x)=\left(\cos x\right)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}-\tan x\cdot\ln x\right)$$

30) $$y'=x^{\ln x}\left(\frac{2\ln x}{x}\right)$$

31) $$y'=x^{\frac{1}{x}-2}\left(1-\ln x\right)$$

32) $$y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)$$

33) $$y'=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^{2}}\right)\cdot\sqrt{x}\right)$$

34) $$y'=\left(x^{2}+1\right)^{x}\left(1\cdot\ln\left(x^{2}+1\right)+\frac{1}{x^{2}+1}\cdot 2x\cdot x\right)$$

35) $$y'=\left(x+1\right)^{(x+1)}\left[\ln\left(x+1\right)+1\right]$$

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$ ב. $f(x)=x^7$ ג. $f(x)=x^2$

ד. $f(x)=x^1$ ה. $f(x)=x^{-3}$ ו. $f(x)=x^{-1}$

ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ ח. $f(x)=x\frac{1}{3}$ ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$ ב. $f(x)=3x^7$ ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$

ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$ ה. $f(x)=8x^1$ ו. $f(x)=3x^{-2}$

ז. $f(x)=\frac{4}{x}$ ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

הנגזרת של קבוע

3) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$ ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

הנגזרת של סכום והפרש

4) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$ ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

הנגזרת של מכפלה

7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$

ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$

הנגזרת של מנה

8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x}$ ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

הנגזרת של שורש

9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$ ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$

תשובות סופיות

1)

א. $f'(x)=3x^2$ ב. $f'(x)=7x^6$ ג. $f'(x)=2x$

ד. $f'(x)=1$ ה. $f'(x)=3x^{-4}$ ו. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

ז. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

2)

א. $f'(x)=6x^2$ ב. $f'(x)=21x^6$ ג. $f'(x)=2x^3$

ד. $f'(x)=\frac{6x^5}{7}$ ה. $f'(x)=8$ ו. $f'(x)=-\frac{6}{x^3}$

ז. $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$ ח. $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $f'(x)=\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$

3) א. 0 ב. 0

4) א. $f'(x)=3x^2+4x-3$ ב. $f'(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$

5) א. $f'(x)=15(5x-x)^2$ ב. $f'(x)=15x^2\left(x^3+6\right)^4$

ג. $f'(x)=6\left(x-x^2\right)(1-2x)$ ד. $f'(x)=-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $f'(x)=\frac{8(x+1)^3}{3}$

6) א. $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{x^2}$ ג. $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$ ד. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

ה. $f'(x)=-\frac{2x-3}{\left(x^2-3x\right)^2}$ ו. $f'(x)=\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $f'(x)=-\frac{6}{(x+3)^2}$

7) א. $f'(x)=10x-14$ ב. $f'(x)=(5x+1)^2(20x-44)$

ג. $f'(x)=x^2(6-x)^3(18-7x)$

8) א. $f'(x)=\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $f'(x)=\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $f'(x)=\frac{8x}{\left(x^2+3\right)^2}$

ד. $f'(x)=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ ה. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ו. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

9) א. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$

ד. $f'(x)=\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $f'(x)=\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $f'(x)=\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

גזירה סתומה

שאלות

1) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2+y^5-1=1$.

2) גזרו את הפונקציה הסתומה $4\ln x+10\ln y=y^2$.

3) גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}$.

4) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $e^{y^2-4x}+x^2y^3=\sin(y-2x)+4y+1$.
חשבו את y' בנקודה $(1,2)$.

5) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $\sqrt{4x+y^3}+\cos^2(xy)=\ln(x^2y+1)+\ln e^3$.
חשבו את y' בנקודה בה $y=0$.

6) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-xy=10$.

7) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-y^x=1$.

8) נתונה פונקציה סתומה $xy-y^3+x^2-x=0$.
מצאו את ערך y'' בנקודה בה $y=1$.

9) נתון עקום שמשוואתו $yx^2+e^y=x$.
א. הראו שעבור $x=1$ קיים ערך y אחד ויחיד ומצאו אותו.
ב. חשבו את y'' בנקודה בה $x=1$.

10) נתון כי המשוואה $h(y)-x+1=2x^3+4e^y+2y$,
מגדירה את $y=y(x)$ כפונקציה סתומה של x.
נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

1) $y'=\frac{-2x}{5y^4-1}$, $5y^4-1\neq 0$,

2) $y'=\frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y}-2y}$, $\frac{10}{y}-2y\neq 0$,

3) $y'=\frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}$, $\sqrt{x}\neq 1$, $\sqrt{x}\neq 0$,

4) $y'_{(1,2)}=-\frac{14}{11}$

5) $y'_{(1,0)}=1$

6) $y'=\frac{y-x^y\cdot\frac{y}{x}}{x^y\cdot\ln x-x}$, $x^y\cdot\ln x-x\neq 0$,

7) $y'=\frac{-x^y\cdot\frac{y}{x}+y^x\cdot\ln y}{x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}}$, $x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}\neq 0$,

8) -1

9) ב. $y''_{(1,0)}=-\frac{9}{8}$

10) שאלת הוכחה.

כלל השרשרת

שאלות

1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4)=10$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f(x^2)$.
חשבו את $g'(2)$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נתונה פונקציה $f(x)$. נגדיר פונקציה חדשה
$z(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)-f(4x+1)$.
חשב ואת $z'(x)$.

ב. נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1)=2,\ f'(1)=e$.
נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f^2(\ln x)+\frac{1}{f^2(\ln x)}$.
חשבו את $z'(e)$.

3) נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f^2(\sqrt{x})-1}{f(\sqrt{x})}$.
ידוע כי $f(10)=f'(10)=4$.
חשבו $g'(100)$.

4) נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$.
ידוע כי $f(1)=1\ ,\ f'(1)=4$.
חשבו $g'(1)$.

5) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^2(\ln x)}{f(\ln x)+1}$.

ידוע כי $f'(0)=1$, $f(0)=2$.

חשבו $g'(1)$.

6) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^{10}(4x)+1}{f\left(\frac{4}{x}\right)+1}$.

ידוע כי $f'(4)=2$, $f(4)=1$.

חשבו $g'(1)$.

7) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$.

ידוע כי $f'(1)=4$, $f(1)=1$.

חשבו $g'(1)$.

8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה $f''''(x)$ היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית נגדיר $g(x)=\left(f(x)\right)^4$.
קבעו האם הפונקציה $g'(x)$ זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית.
האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?

תשובות סופיות

1) 40

2) א. $z'(x)=f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)-f'(4x+1)\cdot 4$ ב. $z'(e)=3\frac{3}{4}$

3) $\frac{17}{80}$

4) 36

5) $\frac{8}{9}$

6) 44

7) -2

8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות :

1) $y=\sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}}\cdot\sqrt[10]{(2x+1)^{7}}$

2) $y=\left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x}$

3) $y=\frac{(x+2)^{3x+4}\cdot(5x+6)}{(7x+8)\cdot(9x+10)}$

תשובות סופיות

1) $y'=y\left[\frac{1}{4}\frac{1}{10x-1}\cdot10+\frac{7}{10}\frac{1}{2x+1}\cdot2-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\right]$

2) $y'=\left((10x+1)^{\frac{1}{4}}\right)^{2^x}\cdot\frac{1}{4}\left[2^x\cdot\ln2\cdot\ln(10x+1)+\frac{1}{10x+1}\cdot10\cdot2^x\right]$

3) $y'=y\left[3\cdot\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}(3x+4)+\frac{1}{5x+6}\cdot5-\frac{1}{7x+8}\cdot7-\frac{1}{9x+10}\cdot9\right]$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 8 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

חקירת פונקציה – שאלות כלליות

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$, וידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון.
מצאו את הקבוע a .

2) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$, וידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.
מצאו את הקבועים a,b .

3) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$, וידוע שהנקודה $x=1$ נקודת פיתול.
מצאו את הקבוע a .

4) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$, וידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת פיתול.
מצאו את הקבועים a,b .

5) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
בנקודה $x=3$ הוא 33.
מצאו את a .

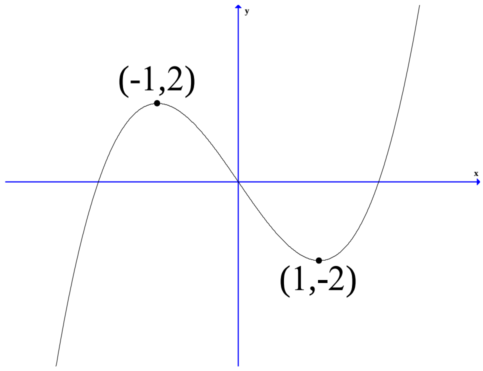
6) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$.
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3,9)$ הוא 12.
מצאו את a,b .

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^3+x^2}{2x^3+x+6}$.
ידוע שהישר $y=4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a .

8) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^2+bx+4}{x}$.
ידוע שהישר $y=0.5x+1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a ואת b .

9) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{x^2+ax+6}$.
ידוע שהישר $x=1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a.

שאלות **17-10** מתייחסות לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-3x$:



10) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=5$?

11) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=2$?

12) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0.5$?

13) עבור איזה ערך של k, למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק פתרון אחד?

14) עבור איזה ערך של k, למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שני פתרונות?

15) עבור איזה ערך של k, למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

16) האם קיים ערך של k, עבורו למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון?

17) מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.

18) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(2)=4$.
נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.
א. חשבו $z'(0.5)$.
ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכיחו כי z יורדת.

19) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1)=2,\ f'(1)=e$.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f^2(\ln x)+\frac{1}{x}$.

א. האם z עולה או יורדת בנקודה $x=e$?

ב. נתון בנוסף כי f שלילית ועולה.

מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של z ?

20) נתונה פונקציה $f(x)$ חיובית ויורדת.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=\sqrt{f\left(x^2\right)+4}$.

מי מהבאים בהכרח נכון?

א. z עולה לכל x .

ב. z יורדת לכל x .

ג. z עולה לכל $x>0$.

ד. z יורדת לכל $x>0$.

21) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1)=e$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=x^2+f(\ln x)$.

א. חשבו את $g'(e)$.

ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודה $x=e$.

חשבו את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(e+h)-g(e)}{h}$.

22) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ידוע שנקודת החיתוך היחידה של $f(x)$ עם ציר ה- x היא ב- $x=0$.

נגדיר $g(x)=\left(f(x)\right)^2$. איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה**:

א. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.

ב. אם f יורדת בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.

ג. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g אין נקודת קיצון.

23) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה פעמיים לכל x ומקיימת $f''(x)=a\cdot f(x)$,
כאשר $a<0$.
איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה**:

א. בתחום בו $f(x)$ שלילית , $f(x)$ קמורה (קעורה כלפי מעלה).

ב. אם $f(x)$ חיובית בתחום מסוים אז $f'(x)$ יורדת באותו התחום.

ג. אם בתחום מסוים $f(x)$ עולה וחותכת את ציר x בנקודה $(n,0)$, אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=n$ הוא המקסימלי באותו התחום.

ד. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אז $f(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

תשובות סופיות

1) $a=-\frac{2}{3}$

2) $a=-4\ ,\ b=6$

3) $a=-\frac{1}{3}$

4) $a=-1\ ,\ b=3$

5) $a=1$

6) $a=\frac{2}{3}\ ,\ b=-1$

7) $a=8$

8) $a=\frac{1}{2}\ ,\ b=1$

9) $a=-7$

10) 1

11) 2

12) 3

13) $k<-2\ ,\ k>2$

14) $k=\pm 2$

15) $-2<k<2$

16) לא

17) $x<-1\ ,\ -1<x<1\ ,\ x>1$

18) א. $z'(0.5)=-16$ ב. שאלת הוכחה.

19) א. עולה. ב. יורדת.

20) ד

21) א. $2e+1$ ב. שאלת הוכחה. ג. $2e+1$

22) ג

23) ד

הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

1) $(-\infty < x < \infty)$, $8x^3 \le 3x^4 + 6x^2$

2) $\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right)$, $x < 2\sin x$

3) $(x > 0)$, $\sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$

4) $(x \ge 0)$, $\ln(x+1) \le x$

5) נתון כי f רציפה לכל $x \ge 0$, $f'(x) > 0$ לכל $x > 0$, וכן $f(0) = 0$.
הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) - \frac{1}{2}\left(f(x)\right)^2 < \ln\left(1 + f(x)\right)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 9 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

בשאלות **1-24** מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) :

1) $f(x)=\sin 2x$ **2)** $f(x)=x^2e^{-4x}$ **3)** $f(x)=\sinh x$

4) $f(x)=\sin^2 x$ **5)** $f(x)=\cos^2 x$ **6)** $f(x)=2^x$

7) $f(x)=x\cos(4x^2)$ **8)** $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$ **9)** $f(x)=\arcsin x$

10) $f(x)=\frac{1}{1+x}$ **11)** $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$ **12)** $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$

13) $f(x)=\frac{1}{x-5}$ **14)** $f(x)=\frac{x}{4x+1}$ **15)** $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$

16) $f(x)=\frac{3}{x^2+x-2}$ **17)** $f(x)=\frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$ **18)** $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

19) $f(x)=\ln(1+x)$ **20)** $f(x)=\ln(1-x)$ **21)** $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

22) $f(x)=\ln(5-x)$ **23)** $f(x)=\frac{x^2}{(1-2x)^2}$ **24)** $f(x)=\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$

הערות : לפתרון שאלות **15** ו-**16**, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים **18**, **19**, **23** ו-**24** יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות **25-27** מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס,
בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

25) $f(x)=e^{-x^2}\cos x$ **26)** $f(x)=\tan x$ **27)** $f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

5) $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

8) $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

9) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1<x<1)$

10) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(|x|<1)$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$ $(|x|<1)$

12) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ $(|x|<\frac{1}{3})$

13) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$ $(|x|<5)$

14) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$ $(|x|<\frac{1}{4})$

15) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $(|x|<3)$

16) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$ $(|x|<1)$

17) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$ $(|x|<\frac{1}{3})$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

19) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

20) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

21) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

22) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

23) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

24) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

25) $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

26) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

27) $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$

טור טיילור סביב $x=x_0$

שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=x_0$ של הפונקציות הבאות:

1) $f(x)=\ln x$ $\quad (x_0=1)$

2) $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad (x_0=2)$

3) $f(x)=\sin x$ $\quad \left(x_0=\frac{\pi}{2}\right)$

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}$
$(0<x\le 2)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^{n+1}}$
$(0<x<4)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$
$(-\infty<x<\infty)$

חישוב סכום של טור

שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

תשובות סופיות

1) e

2) e^{-2}

3) $\sqrt{e}$

4) $2e$

5) $\pi/4$

6) $\sin 1$

7) $\cos 1$

8) $\ln 2$

9) $\ln\frac{3}{2}$

חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את ערך הגבול:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$ **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$ **3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

4) נתון כי $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=k$ כאשר k קבוע שונה מאפס.
מצאו את n ואת k.

5) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\ln(1-\ln x)\right]^{x-1}$.

6) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x^4 - x^4}{(x-\sin x)^4}$.

7) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x^2)^3-(\sin x^3)^2}{\ln(1+x^{10})}$.

תשובות סופיות

1) $\dfrac{1}{120}$

2) $\dfrac{1}{3}$

3) $\dfrac{1}{3}$

4) $k=1, n=3$

5) 1

6) 216

7) $-\dfrac{1}{2}$

חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

שאלות

בשאלות **1-3** חשב בשגיאה הקטנה מ-0.001:

1) $\frac{1}{e}$ **2)** $\sin 3^{\circ}$ **3)** $\arctan 0.25$

בשאלות **4-6** חשב בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

4) $(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}}$ **5)** $(n=1)\cos 4^{\circ}$ **6)** $(n=4)\ln 1.5$

7) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ עבור $|x|\le \frac{\pi}{6}$?

8) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x)\cong x$ עבור $|x|<0.01$?

9) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ עבור $|x|\le 0.2$?

10) עבור אילו ערכי x, $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ-0.001?

11) עבור אילו ערכי x, $\arctan x \cong x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ-0.01?

תשובות סופיות

1) $\frac{53}{144}$

2) $\frac{\pi}{60}$

3) $\frac{47}{192}$

4) $\frac{5}{8}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{48}$.

5) 1, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{\pi\cdot\pi}{4050}$.

6) $\frac{77}{192}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{160}$.

7) $\frac{(\pi/6)^5}{5!}$

8) $\frac{(0.01)^2}{2}$

9) $\frac{(0.2)^6}{6!}$

10) $|x|<\sqrt[5]{3/25}$

11) $|x|<\sqrt[9]{9/100}$

חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε:

1) $\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx$ $\quad (\varepsilon = 0.0001)$

2) $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ $\quad (\varepsilon = 0.001)$

3) $\int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ $\quad (\varepsilon = 0.0001)$

תשובות סופיות

1) $\frac{449}{2250}$

2) $\frac{39}{400}$

3) $\frac{143}{576}$

חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt{x+4}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2<\sqrt{x+4}<2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{512}x^3$$
ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4}\cong 2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2$, עבור $|x|<0.1$?

2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2<\sqrt[3]{64+x}<4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{5308416}x^3$$

3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x)=\tan x$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $0<x<1$ מתקיים:
$$x<\tan x<x+4\sqrt{3}x^2$$

4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ סביב $x_0=16$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3}.

6) חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:
א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=0$.
ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=\frac{\pi}{4}$.

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^{\circ}$? נמקו.

7) נתונה $f(x)=\sqrt{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $0\le x\le 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x\ge 0$ מתקיים $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{1}{2}x$.

8) נתונה $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3, עבור $0.1\le x\le 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{1+x}\cong 1-x+x^2-x^3$, עבור $0.1\le x\le 0.9$.

ג. הוכיחו כי עבור $-1<x$ מתקיים $\frac{1}{1+x}\ge 1-x+x^2-x^3$.

9) נתונה $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x|\le 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\cong 1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $|x|\le 0.5$.

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}<1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $-1<x$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\sqrt{e}$ ברמת דיוק של 10^{-4}.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:
$e^x\cong 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$, עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1,1)$, שעבורו $\left|e^x-p(x)\right|<10^{-5}$.

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=\ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4}.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:
$\ln(1+x)\cong x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $\left|\ln(1+x)-p(x)\right|<10^{-2}$.

ה. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים אי השוויון $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

12) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,
ונניח ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $|f''(x)|\le M$ לכל $0<x<1$.
הוכיחו כי $|f'(x)|\le\frac{M}{2}$ לכל $0\le x\le 1$.

13) תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1)=f(1)=0$.
כמו כן, נתון כי קיים M, כך ש- $|f''(x)|\le M$ בקטע.
הוכיחו שלכל $-1\le x\le 1$ מתקיים $|f(x)|\le\frac{M}{2}$.

14) תהי f פונקציה גזירה ב- $(0,\infty)$, ונניח כי $|f'(x)|\le M$ לכל $0<x$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

15) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)\ge 0$ לכל $x\in[a,b]$,
ונניח כי $x_0\in[a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y-\cos x\ge(x-y)\sin x$ לכל $x,y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

16) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים:
$M_0=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\ M_1=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|,\ M_2=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$.
הוכיחו כי $(M_1)^2\le 2M_0M_2$.

17) נניח ש- f גזירה פעמיים ב- $(0,\infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0,\infty)$ ו- $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
הוכח כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

18) הוכיחו כי e הוא מספר אי-רציונלי.

תשובות סופיות

1) א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x}=4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{81\cdot\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt[3]{66}=4+\frac{1}{24}-\frac{1}{2304}=\frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.

ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{1}{480000}$

2) א. נוסחה: $\tan x=x+\frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1=\frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$.

ב. שאלת הוכחה.

3) א. נוסחה: $\sqrt{x+4}=2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2-\frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.

ב. שאלת הוכחה.

4) נוסחה: $\sqrt[4]{x}=2+\frac{1}{32}(x-16)-\frac{3}{4096}(x-16)^2+\frac{7}{128\cdot\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$,

חישוב: $\sqrt[4]{15}=2-\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}=\frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.

5) $\sqrt[3]{29}=3\frac{158}{2187}$

6) א. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}-\frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^5}{5!}-\frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^7}{7!}$ ב. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4}\right)^3$

7) א. ב. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x$, בשגיאה הקטנה מ-0.25.

8) א. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$.

ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.

9) א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{7}{27}$.

ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.

10) א. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^n$ ב. $\sqrt{e}=1.6487$

ג. $\frac{3}{(n+1)!}$ ד. $p(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}$

11) א. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}$

ב. $\ln(1.5)=0.5-\frac{0.5^2}{2}+\frac{0.5^3}{3}-\frac{0.5^4}{4}+\frac{0.5^5}{5}-\frac{0.5^6}{6}+\frac{0.5^7}{7}-\frac{0.5^8}{8}+\frac{0.5^9}{9}$

ג. $\frac{1}{n+1}$ ד. $p(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^{101}}{101}-\frac{x^{102}}{102}$ ה. שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

<u>הערה לגבי קירובים</u>

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא **מדויק ל-** n **ספרות אחרי הנקודה**,
אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n}.
למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,
שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-3}=0.0005$.
בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$	$-1 < x \le 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$	$-1 \le x \le 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots$	$-1 < x < 1$
$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n \\ &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots \end{aligned}$	$-1 \le x \le 1 \; (m > 0)$ $-1 < x \le 1 \; (-1 < m < 0)$ $-1 < x < 1 \; (m \le -1)$ $m \ne 0, 1, 2, 3, \ldots$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 10 - סדרות

תוכן העניינים

חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(e^{-n}\right)^{\ln n}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+2}{n^2+1000n}$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+6}{3n^2+10n}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+6}{3n^5+10n}$

5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+6}{2n+10}-\frac{n}{2}\right)$

6) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

7) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4+2n^2+6+27n^6}}{\sqrt{3n^3+10n+4n^4}}$

8) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1}-\sqrt{5n-1}}$

9) $\lim_{n\to\infty}\frac{16^n+4^{n+1}}{2^{4n+2}+2^{n+3}}$

10) $\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 9^n+3^{n+1}}{81^{0.5n}+3^{n+3}}$

11) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^2+2}{n^2+1000n}}$

12) $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{3n^3-5n-1}{n^3-2n^2+1}\right)$

13) $\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n^4+2n^2+6}{3n^4+10n}}$

14) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}}$

15) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$

16) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+kn}-n\right)$

17) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

18) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2)$

19) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+bn}\right)$

20) $\lim_{n\to\infty}n\cdot\sin\left(\frac{4}{n}\right)$

21) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+4n+1}$

22) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+n^2+1}$

23) $\lim_{n\to\infty}4^n\sin\frac{1}{n}$

24) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\frac{1}{n(n+1)}\right)$

* רמז לשאלה **24**: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

הערה חשובה מאוד!

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n – המשתנה x. יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי!
בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

תשובות סופיות

1) 0
2) 4
3) ∞
4) 0
5) -5
6) 1
7) 1.5
8) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$
9) 0.25
10) 4
11) 2
12) $\ln 3$
13) $e^{\frac{1}{3}}$
14) $(b\neq 0)\Leftarrow\left(\lim a_n=\sqrt[5]{a/b}\right)$, $(a>0,\ b=0)\Leftarrow(\lim a_n=\infty)$,
$(a<0,\ b=0)\Leftarrow(\lim a_n=-\infty)$
15) 2.5
16) $\dfrac{k}{2}$
17) 0.5
18) 0.5
19) $\dfrac{a-b}{2}$
20) 4
21) 0.5
22) $\dfrac{1}{3}$
23) ∞
24) 1

חישוב גבול לפי אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n}$

4) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}$

5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^{n}$

6) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2}$

7) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n}$

8) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^{n}$

תשובות סופיות

1) $e^{0.5}$

2) 1

3) e^{2}

4) e^{-1}

5) e^{3}

6) e^{-12}

7) e^{30}

8) e

חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

שאלות

בשאלות **1-10** חשבו את הגבול:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos(2n+1)}{n}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+\sin n}{4n+\cos n}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+\sin 2n}{n^2+\cos 3n}$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+\arctan(2n-3)}{4n+\arctan(n-\ln n)}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{4n+\frac{1}{n}}}$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

רמז לשאלה **9**: הוכיחו כי $a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

11) הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0.

א. $a_n=\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{5}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{2n+1}}\right)$

ב. $a_n=n^\alpha-(n+1)^\alpha$, $\alpha\in(0,1)$

12) יהי x מספר ממשי וחיובי.

נתונה הסדרה: $a_n=\frac{6n+\sqrt{\lfloor x^2n^2\rfloor}}{3n+\sqrt{2}}$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>2$.

13) חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2^{3n^2-4}+3^{2n^2+1}+4^{1.5n^2+5}+10^n}$.

14) חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3\sqrt{k}}}$.

15) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+3}^{2n+4}\frac{1}{\sqrt{2n^2+k\sqrt{n}}}$.

16) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{2n^2+3n+5}{\sqrt[3]{5n^{12}+2k^5+k^3+1}}$.

17) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{n^2+n}\sqrt{k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

18) תהי (a_n) סדרה **חיובית**, המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q<1$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

האם ניתן לפתור ישירות בעזרת מבחן המנה?

תשובות סופיות

1) 4
2) 0
3) 0
4) 0.75
5) 3
6) $\frac{3}{4}$
7) 0
8) 16
9) 0
10) 1
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) 9
14) 1
15) $\frac{1}{2}$
16) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$
17) 1
18) שאלת הוכחה.

חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{4n}$

5) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n}$

תשובות סופיות

1) 0

2) 0

3) 4

4) $\frac{1}{4e}$

5) ∞

חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

שאלות

בשאלות **1-3** נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

1) $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $a_1=\sqrt{2}$

2) $a_{n+1}=\sqrt{2a_n-1}$, $a_1=2$

3) $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$, $a_1=2$

4) יהיו $a>0$ ו- $x_1>0$.

נגדיר סדרה ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, לכל n .

הוכיחו שהסרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$.

5) יהי $x_1=a\geq 0$.

נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{5}\left(x_n^2+6\right)$, לכל n .

א. מצאו את כל הערכים של הקבוע a , עבורם הסדרה עולה/יורדת.
ב. קבעו האם הסדרה x_n מתכנסת עבור $3<a<3.5$.

6) יהיו $0<b_1<a_1$

נגדיר $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$, $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ לכל n .

הוכיחו שהסדרות a_n ו- b_n מתכנסות ומתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.

7) נתונה הסדרה $a_1=1,\ a_2=1$, $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$.

א.1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

<u>הניחו</u> שהגבול $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ קיים וחשבו אותו.

הערה : בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ קיים.
בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול $\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

8) תהי a_n סדרה המוגדרת על ידי $a_1=0.5$ ו- $a_{n+1}=\sin\left(a_n^2\right)$ לכל $n\ge 1$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

תשובות סופיות

1) הגבול הוא 2 .

2) הגבול הוא 1.

3) הגבול הוא 1.

4) הגבול הוא $\sqrt{a}$.

5) א. אם $2\le a\le 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה. ב. לא מתכנסת.

6) שאלת הוכחה.

7) ב.1. $a_n=\frac{1}{6}\cdot 3^n-\frac{1}{2}\cdot(-1)^n$

8) שאלת הוכחה.

חישוב גבול לפי ההגדרה

שאלות

בשאלות **1-7** הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n+3}=\frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}=1$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\sin n}{2n^2+3}=\frac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+1}=1$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+1}{2n^2+n+3}=2$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\cos^2 n}{n^2+2}=0$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)=2$

8) נתון כי הסדרה (a_n) מתכנסת.
הוכיחו שגבולה הוא יחיד.

9) נתון כי $a_n\to a,\ b_n\to b$.
הוכיחו לפי ההגדרה, כי:
א. $(a_n+b_n)\to a+b$
ב. $(a_n\cdot b_n)\to a\cdot b$

בשאלות **10-14** הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי:

10) $\lim\limits_{n\to\infty}2n+4=\infty$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}n^3-n^2+5n+6=\infty$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\log(2n+5)=\infty$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{2n+1}=\infty$

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\log\frac{1}{n}=-\infty$

15) הוכיחו שהסדרה $1,101,2,102,3,103,4,104,\ldots$ שואפת לאינסוף.

16) הוכיחו שהסדרה $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\ldots$ שואפת לאינסוף.

17) הוכיחו שהסדרה $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots, (-1)^n n, \ldots$ לא שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף.

18) הוכיחו או הפריכו :

א. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

ב. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

שלילת הגדרת הגבול של סדרה

שאלות

1) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות,
וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאת.

א. $1,4,1,4,1,4,1,4,\ldots$

ב. $1,4,10,1,4,10,1,4,10,1,4,10,\ldots$

ג. $1,0,-4,1,0,4,1,0,-4,1,0,4,\ldots$

2) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות,
וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאת.

א. $\frac{1}{3},\mathbf{\frac{1}{2}},\frac{2}{5},\mathbf{\frac{1}{4}},\frac{3}{7},\mathbf{\frac{1}{6}},\frac{4}{9},\mathbf{\frac{1}{8}},\ldots$

ב. $\frac{3}{3},\mathbf{\frac{3}{4}},\frac{7}{5},\mathbf{\frac{5}{6}},\frac{11}{7},\mathbf{\frac{7}{8}},\frac{15}{9},\mathbf{\frac{9}{10}},\ldots$

ג. $a_n=\frac{(-1)^n n+4}{n+1}$

בשאלות **3-6** הוכיחו לפי ההגדרה כי:

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+10}{4n+2}\neq\frac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+n+1}{2n^2+2}\neq 1$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1}{2n^2+n+2}\neq\frac{9}{4}$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\neq 1$

7) בסעיפים א-ב הוכיחו לפי ההגדרה כי:

א. לסדרה $a_n=(-1)^n$ לא קיים גבול.

ב. 1 הוא לא הגבול של הסדרה $a_n=(-1)^n$.

ג. היעזר בתוצאת סעיף א' והוכיחו שלסדרה $b_n=(-1)^n\frac{3n+4}{n-5}$ לא קיים גבול.

8) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0,1,2,0,1,2,0,1,2,\dots$ מתבדרת.

9) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $3,2,1,3,2,1,3,2,1,\dots$ מתבדרת.

10) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $0,0,1,0,0,1,0,0,1,\dots$ לא קיים גבול.

11) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]$ מתבדרת.

12) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\frac{n}{10}-\left[\frac{n}{10}\right]$ מתבדרת.

13) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\begin{cases}\frac{n+1}{n+1} & n \text{ even}\\ \frac{2n+1}{n+2} & n \text{ odd}\end{cases}$ מתבדרת.

14) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $\frac{1}{2},\mathbf{1},\frac{2}{3},\mathbf{\frac{1}{2}},\frac{3}{4},\mathbf{\frac{1}{3}},\frac{4}{5},\mathbf{\frac{1}{4}},\frac{5}{6},\dots$ מתבדרת.

15) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $a_n=\frac{(-1)^n n+1}{n+2}$ אין גבול.

16) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\sqrt{n}-\left[\sqrt{n}\right]$ מתבדרת.

הדרכה: הוכיחו קודם את סדרת הטענות הבאה:

1. $\sqrt{m^2}-\left[\sqrt{m^2}\right]=0$ לכל m טבעי.
2. $\sqrt{m^2-1}>m-\frac{1}{2}$ לכל $m\ge 2$ טבעי.
3. $\left[\sqrt{m^2-1}\right]=m-1$ לכל $m\ge 2$ טבעי.
4. $\sqrt{m^2-1}-\left[\sqrt{m^2-1}\right]\ge\frac{1}{2}$ לכל $m\ge 2$ טבעי.

17) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\frac{2n^2+4n+1}{n^2+2n+10}$ לא שואפת ל-∞.

18) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0,1,2,1,4,1,6,1,\dots$ לא שואפת ל-∞.

19) נתונה הסדרה $-1,1,-2,2,-3,3,-4,4,-5,5,\dots$.
הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה
א. לא שואפת ל-∞.
ב. לא שואפת ל-$-\infty$.

20) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=n\sqrt{10}+(-1)^n\left[n\sqrt{10}\right]$ לא שואפת ל-∞.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרת הגבול לפי היינה

שאלות

1) הוכיחו כי:

א. $\sin(2n\pi)=0$
ב. $\cos(2n\pi)=1$

ג. $\sin((2n+0.5)\pi)=1$
ד. $\cos((2n+0.5)\pi)=0$

ה. $\sin((2n+1)\pi)=0$
ו. $\cos((2n+1)\pi)=-1$

ז. $\sin((2n+1.5)\pi)=-1$
ח. $\cos((2n+1.5)\pi)=0$

ט. $\sin(n\pi)=0$
י. $\cos(n\pi)=(-1)^n$

יא. $\sin((n+0.5)\pi)=(-1)^n$
יב. $\cos((n+0.5)\pi)=0$

הוכיחו כי הגבולות בשאלות **2-9** אינם קיימים לפי היינה:

2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{|x-4|}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x+4}{\cos x+10}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{x-[x]}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+4^{[10x]}}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[x]\cdot\sin x}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x-[\sin x]}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(4+[\arctan x])$

10) נתון כי $f(x)=2^{\left[\frac{x}{2}\right]}$.

א. הוכיחו כי הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$ אינו קיים לפי היינה.

ב. חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}}$ לפי היינה.

ג. תנו דוגמה לסדרה חיובית a_n, כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ אינו קיים אך $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ קיים.

11) הוכיחו כי הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\left[\sqrt{x}\right]\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x}\right\}$ אינו קיים לפי היינה.

רמז: הוכיחו ראשית כי לכל n טבעי מתקיים $\left[n^2-1\right]=n-1$.

תשובות סופיות

10) ב. $\sqrt{2}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

שאלות

1) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-3)^{5n}-2(-3)^n+2}{(-3)^{3n}+(-3)^n+2}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-3)^{5n}-2(-3)^n+2}{(-3)^{2n}+(-3)^n+2}$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)^n$

2) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-n\right)$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lfloor 4n\rfloor-4\lfloor n\rfloor\right)$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{4}-\left[\frac{n}{4}\right]\right)$

3) נתון ש- (a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.

א. הוכיחו שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

ב. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$.

4) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_n=\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

5) חשבו את הגבול הבא $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n+(-1)^n}{n}\right]^n$.

6) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_1=2;\ a_{n+1}=\sqrt{11-(a_n)^2}$.

7) נתונה הסדרה a_n, המוגדרת על ידי $a_1=2;\ a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{a_n}}$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

8) נתונה הסדרה a_n, המוגדרת על ידי $(n\in\mathbb{N})\ a_1=0;\ a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

9) א. הוכיחו שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.
ב. מצאו סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

10) נתונה סדרה $a_n=\sin\frac{\pi}{4}n$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

11) נתונה סדרה $a_n=n\sin\frac{\pi}{4}n$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

12) נתונה סדרה $a_n=1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,\ldots$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

13) נתונה סדרה $a_n=(-1)^n\frac{n+1}{n}$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

14) נתונה סדרה $a_n=(-1)^n\cdot\sqrt[n!]{n^{40}}+\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n}{4}\right)$.
מצאו את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

15) נתונה סדרה a_n, ונגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n=\sqrt[n]{n}\cdot a_n$.
הוכיחו כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.

16) תהי a_n סדרה, ונניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים שלה.
הוכיחו שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיימים $m,n \in \mathbb{N}$, כך ש- $|a_m - a_n| > \frac{1}{2}$.

17) נתונה סדרה a_n.
a_{n_k} ו- a_{m_k} שתי תת-סדרות של a_n המקיימות:
1. $a_{n_k} \to L$, $a_{m_k} \to L$
2. כל איברי הסדרה a_n מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכיחו: $a_n \to L$.
הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות **5-4**.

18) נתונה סדרה חיובית a_n המקיימת $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n} = 1$.
הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

19) פתרו את שני הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו שלכל סדרה חסומה a_n, $\inf a_n \le \underline{\lim} a_n \le \overline{\lim} a_n \le \sup a_n$
הערה: $\sup a_n$ הוא החסם העליון של הקבוצה $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
ב. מצאו סדרה a_n שעבורה $\inf a_n < \underline{\lim} a_n < \overline{\lim} a_n < \sup a_n$.

20) הוכיחו שהסדרה a_n מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$.

21) הוכיחו את המשפט המפורסם הבא:
לכל שתי סדרות חסומות a_n, b_n מתקיים
א. $\overline{\lim}(a_n + b_n) \le \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$
ב. $\underline{\lim}(a_n + b_n) \ge \underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n$

22) נתונות שתי סדרות חסומות a_n ו- b_n.
קבעו האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכיחו זאת.
א. ייתכן שמתקיים $\overline{\lim}(a_n + b_n) < \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$.
ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.
ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.

23) יהיו (a_n) ו- (b_n) סדרות חסומות.
הוכיחו כי $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\ge \underline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$.

24) תהי (a_n) סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}a_n)=1$.

א. הוכיחו שאם (a_n) מתכנסת, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=1$.

ב. הוכיחו שאם $L>0$ הוא גבול חלקי של (a_n),
אז גם $\frac{1}{L}$ הוא גבול חלקי שלה.

ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L=0$ הוא גבול חלקי של (a_n).

ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,
ייתכן ש- $L=0$ הוא גבול חלקי של (a_n).

25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות, (a_n) ו- (b_n),
המקיימות $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$.

ב. יהיו (a_n) ו- (b_n) שתי סדרות, המקיימות $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$.
הוכיחו שאם לכל n מתקיים $0\le a_n,b_n\le 1$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$.

26) תהי $a_n=\langle\sqrt{n}\rangle=\sqrt{n}-\left[\sqrt{n}\right]$.

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה.

ב. מצאו את $\inf\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ ו- $\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ יש מינימום.

ג. הוכיחו כי לכל n מתקיים $\left\langle\sqrt{n^2-1}\right\rangle=\sqrt{n^2-1}-n+1$.

ד. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1}-(n-1)\right)=1$.

ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L=1$ הוא גבול חלקי של (a_n).

ו. מצאו את $\sup\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ ואת $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$
יש מקסימום.

27) תהי $(a_n)=\left(n-\sqrt{n}\left[\sqrt{n}\right]\right)$.

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה מלרע.

ב. הוכיחו ש- 0 הוא גבול חלקי של (a_n).

ג. מצאו את $\inf\{a_n \mid n\in N\}$ ואת $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n\in N\}$ יש מינימום.

ד. יהי ℓ מספר טבעי.
הוכיחו שכמעט לכל n, מתקיים $n<\sqrt{n^2+2\ell}<n+1$.

ה. יהי ℓ מספר טבעי.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2\ell}-n\right)=\ell$.

ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של (a_n).

ז. האם (a_n) חסומה מלעיל?

ח. חשבו את $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

ט. מצאו את $\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, וקבעו האם לקבוצה $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ יש מקסימום.

תשובות סופיות

1) א. הסדרה שואפת לאינסוף.
ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $\pm\frac{1}{e}$.

2) א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם 0, -1.
ב. הגבול של הסדרה הוא 0.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $0, 0.25, 0.5, 0.75$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט שטולץ

שאלות

1) חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

2) חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\ldots+n\cdot(2n+1)}{n^3}$.

3) חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$, כאשר p קבע שלם וחיובי.

4) חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot c_1+2\cdot c_2+3\cdot c_3+\ldots+n\cdot c_n}{n^3}$, אם ידוע כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{n}=k$.

5) חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[1^2\cdot a]+[2^2\cdot a]+\ldots+[n^2\cdot a]}{n^3}$, כאשר a קבוע ממשי.

6) נתון כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$.

הוכיחו כי:

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=L$ (סדרת הממוצעים החשבונית מתכנסת ל- L).

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=L$ (סדרת הממוצעים ההרמונית מתכנסת ל- L).

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=L$ (סדרת הממוצעים ההנדסית מתכנסת ל- L).

* הערה: בסעיף ב' הניחו כי $L\neq0$, ובסעיף ג' הניחו כי $a_n>0$ לכל n.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{2}{3}$

3) $\frac{1}{p+1}$

4) $\frac{k}{3}$

5) $\frac{a}{3}$

6) שאלת הוכחה.

מבחן קושי להתכנסות סדרות

שאלות

1) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$, לכל n.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

2) הוכיחו שהסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפת לאינסוף.

3) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ מתכנסת.

4) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < a^n$, לכל n, כאשר $0 < a < 1$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

5) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{\cos\alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(n\alpha)}{3^n}$ מתכנסת.

6) סדרה x_n מקיימת $|x_{n+2} - x_{n+1}| \le k|x_{n+1} - x_n|$ לכל n, כאשר $0 < k < 1$.
הוכיחו שהסדרה היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.

7) נתונה סדרה x_n המוגדרת על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$, $x_1 = 1$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהסדרה x_n מתכנסת.

א. $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $x_1 = 1$,

ב. $x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n^2}$, $x_1 = 1$,

ג. $x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^2 + 8)$, $x_1 = 1$,

9) נגדיר סדרה x_n על ידי $x_1=1,\ x_2=2,\ x_{n+2}=\frac{3}{4}x_n+\frac{1}{4}x_{n+1}$.

הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

10) סדרה x_n מקיימת $x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n}$ לכל n טבעי, ו- $1\le x_1\le x_2\le 2$.

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

הדרכה: הוכיחו ראשית שלכל n טבעי מתקיים $\frac{x_{n+1}}{x_n}\ge\frac{1}{2}$.

11) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. נתונה סדרה x_n.

אם $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$, אז x_n מתכנסת.

ב. אם לכל n מתקיים $|x_{n+2}-x_{n+1}|<|x_{n+1}-x_n|$, אז הסדרה x_n מתכנסת.

ג. אם סדרה x_n מקיימת את תנאי קושי, אז קיים $0<\alpha<1$ כך שלכל n טבעי:

$|x_{n+2}-x_{n+1}|\le\alpha\cdot|x_{n+1}-x_n|$

הערה

בשאלות **7-10** מומלץ להשתמש בטענה אותה הוכחנו בשאלה **6**.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

שאלות הוכיחו או הפריכו

<u>הערת ניסוח</u>

הניסוחים הבאים שקולים:

א. קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ מתקיימת הטענה X.

ב. כמעט לכל n מתקיימת הטענה X.

ג. לכל n, פרט למספר סופי של n-ים, מתקיימת הטענה X.

שאלות

בשאלות **1-13** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה:

1) אם a_n סדרה חסומה, אז יש לה גבול.

2) אם b_n סדרה לא חסומה, אז $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$ או $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-\infty$.

3) אם $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n|=k$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=k$ או $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=-k$.

4) אם d_n סדרה עולה, אז היא לא חסומה.

5) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול, אז גם ל- (a_n+b_n) וגם ל- $(a_n\cdot b_n)$ אין גבול.

6) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול, אז גם ל- (a_n/b_n) אין גבול.

7) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n\cdot b_n)$ מתבדרת.

8) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n\cdot b_n)$ מתכנסת.

9) אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2=L$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{L}$.

10) אם $a_n<b_n$ לכל n, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n<\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

11) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ וגם b_n חסומה, אז $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

12) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = k$ וגם $a_n < 1$ לכל n, אז $k < 1$.

13) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, אז $\lim_{n\to\infty} (a_n)^n = 1$.

14) הוכיחו או הפריכו:

א. אם כל האיברים של סדרה מתכנסת הם מספרים רציונליים, אז גם גבולה הוא מספר רציונלי.

ב. אם a_n ו- b_n $(b_n \neq 0)$ סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ חסומה.

ג. אם a_n סדרה עולה, אז גם הסדרה $b_n = (a_n)^2$ עולה.

ד. אם $\lim_{n\to\infty} a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0$, אז הסדרה a_n חסומה.

ה. אם a_n ו- b_n סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{1}{2^{a_n}}\left(b_n^2 + 2b_n\right)$ חסומה.

ו. אם a_n סדרה מתכנסת ו- b_n $(b_n \neq 0)$ סדרה חסומה, אז לסדרה $(a_n b_n^2)$ יש תת-סדרה מתכנסת.

ז. אם a_n סדרה מתכנסת, אז קיים N טבעי, כך שלכל $n > N$ מתקיים $\left|\frac{a_n}{n} - 1\right| < \frac{1}{2}$.

ח. אם לסדרה יש גבול חלקי, אז היא חסומה.

בשאלות **15-18** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה:

15) אם לכל n מתקיים: $a_{n+1} < a_n^2$, $a_n \in (0,1)$ אז הסדרה a_n מתכנסת.

16) הסדרה $a_n = \frac{1-2+3-4+5-6+\ldots+(-1)^{n-1}n}{n}$ מתבדרת.

17) אם לכל n מתקיים: $4x_n(1-x_{n+1}) > 1$, $x_n \in (0,1)$ אז הסדרה x_n מתכנסת ל- $\frac{1}{2}$.

18) לכל מספר רציונלי קיימת סדרת מספרים אי-רציונליים השואפת אליו.

19) הוכיחו או הפריכו:

א. אם הסדרה $(x_n + \frac{1}{n}x_n)$ מתכנסת, אז הסדרה x_n מתכנסת.

ב. אם הסדרה $\left(x_n^2 + \frac{1}{n}x_n\right)$ מתכנסת, אז הסדרה x_n מתכנסת.

20) x_n סדרה של מספרים **שלמים** המקיימת $x_{n+1} \neq x_n$ לכל n.

הוכיחו או הפריכו:

א. הסדרה x_n לא מקיימת את תנאי קושי.

ב. לסדרה x_n לא יכולה להיות תת-סדרה מתכנסת.

21) הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ו-$a < b$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n < b_n$.

ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ וכמעט לכל n מתקיים $a_n \le b_n$, אז $a \le b$.

22) תהי (a_n) סדרה מתכנסת במובן הרחב.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n = 0$.

ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ge 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n \ge 0$.

ג. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n \neq 0$.

ד. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n > 0$.

23) הוכיחו או הפריכו:

א. אם (a_n) סדרה מתכנסת ואם $a_n \le k$ לכל n, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le k$.

ב. אם (a_n) סדרה מתכנסת ואם $a_n < k$ לכל n, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le k$.

24) תהי (a_n) סדרה **חיובית**, המקיימת $a_{n+1} \le \dfrac{a_n - a_n^2}{2}$, לכל n.

הוכיחו או הפריכו: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

25) הוכיחו או הפריכו:

אם $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^2 = 0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

26) נתונות שתי סדרות (a_n) ו- (b_n), שעבורן: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=4$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)=2$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $a_n\to 0,\ b_n\to 2$ או $a_n\to 2,\ b_n\to 0$.

ב. $a_nb_n\to 0$

27) נניח שסדרה a_n מקיימת $a_{2n-2}\le a_{2n}\le a_{2n+1}\le a_{2n-1}$ לכל n טבעי.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. a_n עולה.

ב. a_n יורדת.

ג. a_n מתכנסת.

ד. a_n לא מתכנסת.

ה. לסדרה לכל היותר שני גבולות חלקיים.

כיצד תשתנה התשובה, אם נתון כי a_n מקיימת $a_{2n-2}<a_{2n}<a_{2n+1}<a_{2n-1}$ לכל n טבעי?

28) הסדרה (a_n) מקיימת את התכונה הבאה:

$0\le a_{m+n}\le\frac{1}{2}(a_m+a_n)$ לכל m,n טבעיים.

הוכיחו או הפריכו: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

29) א. תהי (a_n) סדרה, כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$.

הוכיחו או הפריכו: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

ב. תהיינה (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0$.

הוכיחו או הפריכו: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

30) נתונה הסדרה $a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

הוכיחו או הפריכו:

הגבול של הסדרה קיים והוא קטן מ- 3.

רמז: לכל $x\ge 0$ מתקיים $\ln(1+x)\le x$.

בשאלות **34-31** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
כאשר ידוע כי (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\infty$.

31) אם כמעט כל איברי (a_n) ו- (b_n) חיוביים, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ או $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$.

32) אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז גם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים.

33) א. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$.

ב. קיים $N>0$, כך שלכל $n>N$, מתקיים $b_n\neq 0$.

ג. אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=5$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

34) א. אם, כמעט לכל n, $b_n<a_n$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

ב. אם, כמעט לכל n, $0<b_n<a_n$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

בשאלות **38-35** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
כאשר ידוע כי (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=1$.

35) א. אם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים, אז כמעט כל איברי (b_n) חיוביים.

ב. אם (a_n) חיובית, אז קיים $N>0$, כך ש- $b_n>\dfrac{1}{2a_n}$, לכל $n>N$.

36) אם (a_n) ו- (b_n) חיוביות, אז (a_n) מתכנסת או (b_n) מתכנסת.

37) א. אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$.

ג. אם (a_n) חיובית ואפסה, אז $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$.

38) א. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|L|$.

* הערה: בסעיף זה (ורק בו) מדובר בטענה כללית שלא קשורה לנתוני השאלה.

ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=1$.

בשאלות **42-39** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
כאשר ידוע כי (a_n) ו-(b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=0$.

39) א. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ או $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

ב. אם, כמעט לכל n, $a_n>1$, אז $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

ג. אם קיימים אינסוף ערכי n, כך ש-$a_n>1$, אז $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

ד. קיים $N>0$, כך שלכל $n>N$, מתקיים $b_n\neq 0$.

40) א. אם $\lim_{n\to\infty}b_n=5$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ב. אם, כמעט לכל n, $0<b_n<a_n$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ג. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, אז $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

41) אם $\lim_{n\to\infty}b_n=1$, אז קיים N טבעי, כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n<\frac{1}{3}$.

42) א. אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז $\lim_{n\to\infty}a_n\neq\infty$.

ב. אם קיים קבוע $c>0$, כך ש-$b_n\geq c$ כמעט לכל n, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

43) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=4$.

ג. קיימת סדרה (a_n) כך ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\infty$.

ד. קיימת סדרה (a_n) כך ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ לא קיים.

44) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$.

ג. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$.

ד. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לא קיים.

45) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- $\lim_{n\to\infty} n|a_n - a_{n+1}| = \infty$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- $\lim_{n\to\infty} n^2(a_n - a_{n+1}) = \infty$.

46) נתונה סדרה חיובית (a_n).

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, אז $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, אז $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

הערה: תרגיל זה מלמד שמבחן השורש "חזק" ממבחן המנה במובן הבא: כאשר מבחן המנה עובד, אז גם מבחן השורש עובד. אך ההיפך לא נכון.

47) נתונה סדרה חיובית (a_n), וידוע כי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים.

הוכיחו או הפריכו:

א. הסדרה (na_n) אינה חסומה.

ב. הסדרה $(a_{n+1} - a_n)$ חסומה.

ג. הסדרה $\sqrt[n]{a_n}$ חסומה.

ד. הסדרה $\frac{a_n}{n}$ מתכנסת.

ה. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^n} = 0$.

48) סדרה (a_n) תיקרא יורדת אם היא מקיימת $a_{n+1} < a_n$ לכל n.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
א. אם סדרה (a_n) מקיימת $|a_{n+1}| < |a_n|$, אז היא יורדת.
ב. אם סדרה (a_n) מקיימת $|a_{n+1}| < a_n$, אז היא יורדת.
ג. אם סדרה (a_n) מקיימת $a_{n+1} < |a_n|$, אז היא יורדת.

49) תהי (a_n) סדרה, המקיימת $a_{n+1} - a_n > -1$ ו- $|a_n| > 2$, לכל n טבעי.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם קיים N טבעי, כך ש- a_N חיובי, אז $a_n > 2$ לכל $n \geq N$.
ב. כמעט כל איברי (a_n) חיוביים או שכל איברי (a_n) שליליים.
ג. אם לכל n מתקיים בנוסף $a_{n+1} < \frac{a_n}{a_1}$, אז $a_1 < -1$.

50) תהי (a_n) סדרה, כך ש- $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם קיים קבוע $c > 0$, כך שלכל n מתקיים $|a_n| \geq c$, אז מתקיים:
כמעט כל איברי a_n חיוביים או כמעט כל איברי a_n שליליים.
ב. אם $|a_n| > 0$ לכל n, אז מתקיים:
כמעט כל איברי a_n חיוביים או כמעט כל איברי a_n שליליים.
ג. אם לכל n מתקיים $|a_n| \geq n$, אז (a_n) מתכנסת במובן הרחב.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 11 - אינטגרלים מיידיים

תוכן העניינים

אינטגרלים מיידיים

שאלות

חשבון את האינטגרלים בשאלות **12-1** (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$):

1) $\int 4dx$ **2)** $\int x^4 dx$ **3)** $\int \frac{1}{x^2}dx$

4) $\int \sqrt{x}dx$ **5)** $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ **6)** $\int 4x^{10}dx$

7) $\int (2x^2-x+1)dx$ **8)** $\int \left(\frac{3}{x^4}+2\sqrt[3]{x}\right)dx$ **9)** $\int (x^2+1)^2 dx$

10) $\int (x^2+1)(x+2)dx$ **11)** $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2}dx$ **12)** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$

חשבון את האינטגרלים בשאלות **20-13**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)}+c$)

13) $\int (4x+1)^{10} dx$ **14)** $\int (x^2-2x+1)^{10} dx$ **15)** $\int \frac{4}{(x-2)^5}dx$

16) $\int \sqrt[3]{4x-10}dx$ **17)** $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}}dx$ **18)** $\int \frac{x}{(x-1)^4}dx$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$ **20)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$

חשבון את האינטגרלים בשאלות **26-21**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{\ln|ax+b|}{a}+c$)

21) $\int \frac{1}{4x}dx$ **22)** $\int \frac{1+x+x^2}{x}dx$ **23)** $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

24) $\int \frac{1}{4x-1}dx$ **25)** $\int \frac{x+3}{x+2}dx$ **26)** $\int \frac{4x+1}{x+2}dx$

חשבון את האינטגרלים בשאלות **29-27**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$)

27) $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$

28) $\int\left(e^{x+1}\right)^2dx$

29) $\int\left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

30) חשבון את האינטגרל: $\int\frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x}dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+c$)

חשבון את האינטגרלים בשאלות **33-31**:

31) $\int\frac{1}{1+4x^2}dx$

32) $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

33) $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$

תשובות סופיות

1) $4x+c$

2) $\frac{x^5}{5}+c$

3) $-\frac{1}{x}+c$

4) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$

5) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$

6) $\frac{4x^{11}}{11}+c$

7) $\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

8) $-\frac{1}{x^3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+c$

9) $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$

10) $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$

11) $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$

12) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c$

13) $\frac{(4x+11)^{11}}{44}+c$

14) $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$

15) $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$

16) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$

17) $10\sqrt{2x+4}+c$

18) $-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$

19) $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{3/2}+x^{3/2}\right)+c$

20) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$

21) $\frac{\ln|x|}{4}+c$

22) $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$

23) $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

24) $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$

25) $x+\ln|x+2|+c$

26) $4\left(x-1.75\ln|x+2|\right)+c$

27) $\frac{e^{4x}}{4}-e^{-x}+c$

28) $\frac{e^{2x+2}}{2}+c$

29) $8e^{\frac{x}{2}}-\frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4}+c$

30) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}+\frac{(200)^x}{\ln(200)}+c$

31) $\frac{1}{2}\arctan(2x)+c$

32) $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c$

33) $-\left(x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)+c$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 12 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

2) $\int \cot x dx$

3) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

4) $\int \tan x dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

6) $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$

7) $\int e^{x^2}2xdx$

8) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

9) $\int e^{-2x^2}xdx$

10) $\int \cos\left(2x^2+1\right)\cdot 4xdx$

11) $\int \cos(\sin x)\cdot \cos xdx$

12) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

13) $\int \cos\left(10x^4+1\right)x^3dx$

14) $\int \sin\left(x^2+1\right)xdx$

15) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

16) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x}dx$

19) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

20) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x}}dx$

21) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

22) $\int x^2\sqrt{x^3+4}dx$

23) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

24) $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$

תשובות סופיות

1) $\ln\left|x^2+1\right|+c$

2) $\ln\left|\sin x\right|+c$

3) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$

4) $-\ln\left|\cos x\right|+c$

5) $\ln\left|\ln|x|\right|+c$

6) $e^2\ln\left|e^x+1\right|+c$

7) $e^{x^2}+c$

8) $e^{\tan x}+c$

9) $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$

10) $\sin\left(2x^2+1\right)+c$

11) $\sin\left(\sin x\right)+c$

12) $\sin\left(\ln x\right)+c$

13) $\frac{1}{40}\sin\left(10x^4+1\right)+c$

14) $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+c$

15) $-2\cos\left(\sqrt{x}\right)+c$

16) $\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$

17) $\frac{1}{2}(\arctan x)^2+c$

18) $\frac{1}{2}(\tan x)^2+c$

19) $2\sqrt{x^2+1}+c$

20) $\sqrt{2\sin x}+c$

21) $\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+c$

22) $\frac{2}{9}(x^3+4)^{\frac{3}{2}}+c$

23) $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+c$

24) $\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}}+c$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 13 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 23-1 :

1) $\int xe^x dx$ **2)** $\int x^4 \ln x dx$ **3)** $\int x \sin x dx$

4) $\int (x^2+2x+3)\ln x dx$ **5)** $\int x^2 \sin 4x dx$ **6)** $\int x^2 e^{-4x} dx$

7) $\int \ln x dx$ **8)** $\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ **9)** $\int \arctan x dx$

10) $\int \arcsin x dx$ **11)** $\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx$ **12)** $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

13) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ **14)** $\int x \arctan x dx$ **15)** $\int x^2 \ln(x^2+1) dx$

16) $\int \ln^2 x dx$ **17)** $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ **18)** $\int e^x \cos x dx$

19) $\int e^{2x} \sin 4x dx$ **20)** $\int \sqrt{1-x^2} dx$ **21)** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

22) $\int x \tan^2 x dx$ **23)** $\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx$

24) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר n טבעי.

25) חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

26) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר n טבעי.

27) חשבו את $\int \cos^4 x dx$.

28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי.

29) חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx$ באשר n טבעי.

31) חשבו את $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^4} dx$.

32) חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \sin bx dx, \quad \int e^{ax} \cos bx dx$.

תשובות סופיות

1) $xe^x - e^x + c$

2) $\frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c$

3) $x\cos x + \sin x + c$

4) $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

5) $-\frac{x^2}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\sin x + \frac{1}{16}\cos 4x\right) + c$

6) $-\frac{x^2}{4}e^{-4x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right) + c$

7) $x\ln x - x + c$

8) $-\frac{1}{3}(x\ln x - x) + c$

9) $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + c$

10) $x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$

11) $\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x\ln|x-2|\right)\right) + c$

12) $x\tan x + \ln|\cos x| + c$

13) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$

14) $\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + c$

15) $\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2 + 1\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right) + c$

16) $x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c$

17) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}(\ln x - 1) + c$

18) $-e^x\cos x + \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + c$

19) $\frac{e^{2x}\left(-\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x\right)}{5} + c$

20) $\frac{x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x}{2} + c$

$$\frac{e^x}{x+1}+c \quad (21$$

$$x(\tan x-x)+\ln|\cos x|+\frac{x^2}{2}+c \quad (22$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}}-\frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}}+c \quad (23$$

$$x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x dx \quad (24$$

$$e^x\left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)+c \quad (25$$

$$\frac{1}{n}\left\{(\cos x)^{n-1}\sin x+(n-1)\int(\cos x)^{n-2}dx\right\} \quad (26$$

$$\frac{1}{4}\left(\cos^3 x\sin x+3\cdot5(\cos x\sin x+x)\right)+c \quad (27$$

$$\frac{1}{n}\left(-(\sin x)^{n-1}\cos x+(n-1)\int(\sin x)^{n-2}dx\right) \quad (28$$

$$\frac{1}{4}\left(-\sin^3 x\cos x+3\cdot5(x-\sin x\cos x)\right)+c \quad (29$$

$$\frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(1+x^2)^n}+\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}(2n-1)\right) \quad (30$$

$$\frac{1}{6}\left\{\frac{x}{(1+x^2)^3}+\frac{1}{4}\left\{\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{1+x^2}+\arctan x\right\}\right\}\right\} \quad (31$$

$$\int e^{ax}\cos bx dx=e^{ax}\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2},\quad \int e^{ax}\sin bx dx=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2} \quad (32$$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 14 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

2) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^5 dx$

3) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

4) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$

6) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

7) $\int e^{x^2}x^3 dx$

8) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}dx$

10) $\int 2x^3\cos\left(x^2+1\right)dx$

11) $\int x^3\left(3x^2-1\right)^{14}dx$

12) $\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x}dx$

13) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

14) $\int \ln^3 x dx$

15) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+2}$

16) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$

19) $\int \arctan\sqrt{x}dx$

20) $\int \frac{x^7}{\left(1-x^4\right)^2}dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

22) $\int \cos(\ln x)dx$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

24) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}dx$

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{x^2+1}+c$

2) $\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5}-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x^3+4}\right)^3\right)+c$

3) $2\left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3}-\sqrt{x^2+1}\right)+c$

4) $\arctan\left(e^x\right)+c$

5) $-\frac{1}{3(\ln x)^3}+c$

6) $\arcsin\left(\ln x\right)+c$

7) $\frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}\right)+c$

8) $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+2\right)+c$

9) $\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+c$

10) $x^2\sin\left(x^2+1\right)+\cos\left(x^2+1\right)+c$

11) $\frac{1}{18}\left(\frac{\left(3x^2-1\right)^{16}}{16}+\frac{\left(3x^2-1\right)^{15}}{15}\right)+c$

12) $\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\sin\left(2\ln x\right)\right)+c$

13) $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

14) $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)+c$

15) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)+c$

16) $\frac{(\ln x)^5}{5}+c$

17) $\frac{(\arctan x)^3}{3}+c$

18) $\ln\left|\ln\left(\ln x\right)\right|+c$

19) $x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c$

20) $-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x^4}-\ln\left|1-x^4\right|\right)+c$

21) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+c$

22) $\frac{x}{2}\left(\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right)+c$

23) $6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+c$

24) $\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^7}{7}-\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^4}{4}+c$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 15 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{x+1}{(x-4)^2}dx$

2) $\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

4) $\int \frac{2-x}{x^2+5x}dx$

5) $\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx$

6) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx$

7) $\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6}dx$

8) $\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36}dx$

9) $\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)}dx$

10) $\int \frac{5-x}{x^3+x^2}dx$

11) $\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x}dx$

12) $\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)}$

13) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$

14) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

15) $\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)}dx$

16) $\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx$

17) $\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

18) $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx$

19) $\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2}dx$

תשובות סופיות

1) $\ln|x-4|-\frac{5}{x-4}+c$

2) $-\frac{1}{3(x-6)^6}-\frac{1}{(x-1)^7}+c$

3) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

4) $\frac{2}{5}\ln|x|-\frac{7}{5}|x+5|+c$

5) $3\ln|x+3|-2\ln|x+2|+c$

6) $\ln|x|+\frac{1}{2}|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c$

7) $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+3\ln|x-3|+c$

8) $\ln|x+3|+\ln|x-3|-\ln|x+2|-\ln|x-2|+c$

9) $\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}-\ln|x+2|+c$

10) $6\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{5}{x}+c$

11) $4\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+\frac{3}{x+3}+c$

12) $2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+c$

13) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

14) $\frac{1}{\sqrt{3/4}}\arctan\left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}}\right)+c$

15) $\arctan x+2\ln|x-3|+c$

16) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\ln|x+2|+c$

17) $\arctan x-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$

18) $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+c$

19) $\frac{1}{16}\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)+c$

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1}dx$

2) $\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4}dx$

3) $\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1}dx$

4) $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2}dx$

5) $\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4}dx$

תשובות סופיות

1) x^3-x^2+2x+c

2) $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-x^2+c$

3) x^3-x^2+x+c

4) $\frac{x^3}{3}+\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$

5) $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\ln|x+2|+c$

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

3) $\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}}dx$

4) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}dx$

5) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

6) $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$

7) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$

תשובות סופיות

1) $-1.5\ln\left|1-\sqrt[3]{x}^2\right|+c$

2) $6\left(\frac{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^3}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}{2}+3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)-\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|\right)+c$

3) $4\left(\frac{\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^2}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^2}{2}+3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)-\ln\left|1+\sqrt[4]{x-1}\right|\right)+c$

4) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}+\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[3]{x}-0.5\right)^2+0.75\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}}\right)+c$

5) $-\ln\left|1+e^x\right|+x+c$

6) $2\sqrt{1+e^x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+c$

7) $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+c$

נוסחאות

$$\left(a-b\right)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 16 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי:

$\int \cos xdx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$
$\int \sin xdx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$
$\int \tan xdx = -\ln\|\cos x\|+c$	$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\|\cos(ax+b)\|+c$
$\int \cot xdx = \ln\|\sin x\|+c$	$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\|\sin(ax+b)\|+c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \left(\sin 2x - 4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

2) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$

4) $\int \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$

5) $\int \left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)dx$

6) $\int (\sin x + \cos x)^2\,dx$

7) $\int \sin x\cos x\cos 2xdx$

8) $\int \tan^2 xdx$

9) $\int \frac{dx}{(\sin x\cos x)^2}$

10) $\int \sin 7x\cos 5xdx$

11) $\int (\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x)dx$

12) $\int \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)dx$

13) $\int \cos^2 xdx$

14) $\int \sin^2 4xdx$

15) $\int \cos^3 xdx$

16) $\int \sin^3 4xdx$

17) $\int \cos^4 xdx$

18) $\int \sin^4 4xdx$

19) $\int \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

20) $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x}dx$

21) $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1}dx$

22) $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

23) $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}}dx$

24) $\int \sin^2 x\cos^4 xdx$

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$

2) $\frac{1}{4}\tan 4x+c$

3) $-10\cot 10x+c$

4) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

5) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

6) $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

7) $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$

8) $\tan x-x+c$

9) $\tan x-\cot x+c$

10) $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+c$

11) $\sin x+c$

12) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$

13) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$

14) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 8x}{16}+c$

15) $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+c$

16) $-\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 12x+c$

17) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

18) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$

19) $-\cot x-x+c$

20) $2\sin x+c$

21) $\ln|\cos x|+c$

22) $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

23) $3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x+c$

24) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{24}\sin 6x\right)+c$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

זכרו כי :

$$\int f(\sin x)\cdot\cos x dx=\left|\begin{array}{c}\sin x=t\\(x=\arcsin t)\end{array}\right|=\int f(t)\,dt$$

$$\int f(\cos x)\cdot\sin x dx=\left|\begin{array}{c}\cos x=t\\(x=\arccos t)\end{array}\right|=\int f(t)(-dt)$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

1) $\int(\sin^2 x+\sin x+2)\cos x dx$

2) $\int(\cos^3 x+\cos x-2)\sin x dx$

3) $\int\cos^3 x dx$

4) $\int\sin^3 2x dx$

5) $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$

6) $\int\sin^5 x\cos^4 x dx$

7) $\int\cos^5 x dx$

8) $\int\tan^5 x dx$

9) $\int\frac{1}{\cos x}dx$

10) $\int\frac{dx}{\sin x}$

11) $\int\sin 2x\cdot e^{\cos x}dx$

12) $\int\frac{2\sin x}{\cos 2x+4\cos x+7}dx$

תשובות סופיות

1) $\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x+c$

2) $\frac{-\cos^4 x}{4}-\frac{\cos^2 x}{2}+2\cos x+c$

3) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$

4) $-\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\frac{\cos^3 2x}{3}\right)+c$

5) $\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+c$

6) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+c$

7) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+c$

8) $\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\ln|\cos x|+c$

9) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c$

10) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$

11) $-2e^{\cos x}(\cos x-1)+c$

12) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

זכרו כי:

$$\boxed{\int f(\sin x,\cos x)\,dx=\left|\begin{array}{c}t=\tan\frac{x}{2}\\(x=2\arctan t)\end{array}\right|=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt}$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

2) $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

3) $\int\frac{\cos x}{2-\cos x}dx$

תשובות סופיות

1) $-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c$

2) $\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

3) $-x+2\left(\frac{2}{3\sqrt{1/3}}\arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}}\right)\right)+c$

הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=$	$\left\lvert\begin{matrix} x=a\sin t \\ (t=\arcsin\frac{x}{a})\end{matrix}\right\rvert$	$=\int f\left(a\cos t\right)\cdot\left(a\cos t dt\right)$
$\int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx=$	$\left\lvert\begin{matrix} x=a\tan t \\ (t=\arctan\frac{x}{a})\end{matrix}\right\rvert$	$=\int f\left(\frac{a}{\cos t}\right)\cdot\left(\frac{a}{\cos^2 t}dt\right)$
$\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=$	$\left\lvert\begin{matrix} x=\frac{a}{\cos t} \\ (t=\arccos\frac{a}{x})\end{matrix}\right\rvert$	$=\int f\left(a\tan t\right)\cdot\left(\frac{-a\sin t}{\cos^2 t}dt\right)$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

2) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

3) $\int\sqrt{4x^2-1}dx$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

4) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

5) $\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

6) $\int\sqrt{x^2+2x-3}dx$

7) $\int \sqrt{-6x-x^2}\,dx$

8) $\int \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$

9) $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^{3/2}}$

10) $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right|+c$

3) $\frac{1}{8}\left[\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]+c$

4) $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c$

5) $2\left\{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right)\right\}+c$

6) $\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}+c$

7) $\frac{9}{2}\left\{\arcsin\frac{x+3}{3}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x+3}{3}\right)\right\}+c$

8) $\frac{1}{16}\left\{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(2\arctan\frac{x}{2}\right)\right\}+c$

9) $\frac{1}{4}\sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+c$

10) $\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\right\}$

11) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

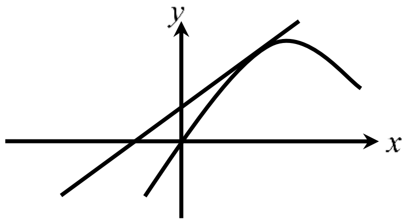
שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x+2\sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

א. מצאו את משוואת המשיק.

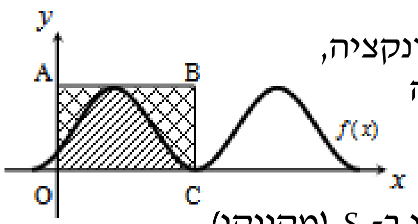
ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x, ברביע הראשון והשני.



2) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\dfrac{\sin 2x+1}{2}$,

בתחום $-0.25\pi\le x\le 1.75\pi$.

נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.



השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2.

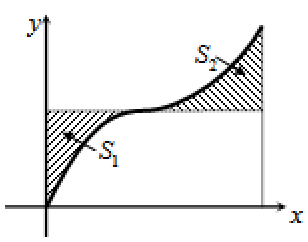
א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

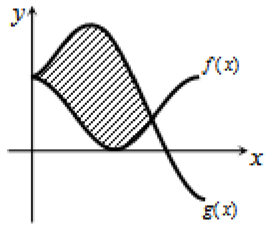
ב. חשבו את היחס $\dfrac{S_1}{S_2}$.

3) באיור שלהלן נתונה הפונקציה $y=\sin x+x$, בתחום $0\le x\le 2\pi$.

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה $x=2\pi$, ונעביר ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת. הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט, S_1 ו- S_2, שווים.

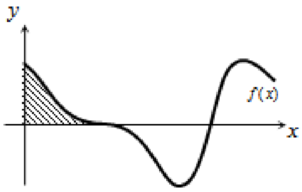




4) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות
$f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$, בתחום $0\le x\le\pi$.

א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
השתמשו בזהות $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

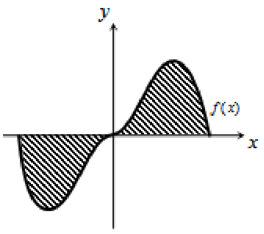


5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$.

א. מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות המקיימות
$f'(x)=0$, בתחום $0<x<2\pi$.
ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$, אשר אינה קיצון,
נמצאת על ציר ה- x.

ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



6) נתונה הפונקציה $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$.

א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא $y'=x^2\sin x$.

באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=x^2\sin x$,
בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x בתחום הנתון.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=a\cos x+b\sin x$, כאשר a,b פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$,

והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b.

תשובות סופיות

1) א. $y=x+2$ ב. π יח"ש.

1) א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$

2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π,π) היא נקודת פיתול.
ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$

3) א. $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$, $(0,1)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$

4) א. $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $S=2(\pi^2-4)\approx 11.74$.

6) $a=2$, $b=-2$

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \\ 1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right) \\ \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right) \\ \cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right) \end{cases}$$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 17 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים

האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-9**:

1) $\int_1^4 \left(x^2-4x+1\right)dx$

2) $\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5}dx$

3) $\int_0^1 xe^{-x}dx$

4) $\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x}dx$

5) $\int_1^4 \frac{1}{x^2+4x+5}dx$

6) $\int_0^\pi \cos^2 10xdx$

7) $\int_0^4 f\left(x\right)dx$, כאשר $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<1\\ \frac{1}{x^2} & x\ge 1\end{cases}$.

8) $\int_{-1}^4 \sqrt{4+\left|x-1\right|}dx$

9) $\int_0^2 \max\left\{x,x^2\right\}dx$

10) הוכיחו כי:

א. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

ב. $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

11) הוכיחו שלכל פונקציה רציפה f:

א. $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

ב. $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

12) תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$.

פתרו את המשוואה $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2$.

13) ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של $\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$.

14) חשבו: $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x}+\sqrt[4]{\cos x}}dx$.

15) חשבו: $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

16) נתונה פונקציה רציפה f. הוכיחו:

א. אם f זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

ב. אם f אי-זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

חשבו את האינטגרלים בשאלות **17-18**:

17) $\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^5\right)\cos x dx$

18) $\int_{-4}^{4}\frac{\sin x+1}{x^2+1}dx$

19) נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל x, ונתון כי $|f(x)|\le\frac{1}{2}$.

חשבו את האינטגרל $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)dx$.

20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים:

א. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ב. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ג. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\tan^n x}dx\quad\left(n\in\mathbb{N}\right)$

21) (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$, בעזרת ההצבה $t=\frac{1}{x}$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$ ישירות.

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

22) הוכיחו כי $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בעזרת ההצבה $t=\tan x$ חשבו את האינטגרל $\int\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

ב. חשבו את ערך האינטגרל $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

24) חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x}dx$.

25) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.
נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=a$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם הכיוון החיובי של ציר x והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=b$ יוצר זווית $\frac{\pi}{4}$ עם הכיוון החיובי של ציר x.
חשבו את ערך האינטגרל $\int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x}dx$.

26) הוכיחו:
אם f פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם T המחזור של f
אז לכל מספר ממשי a מתקיים $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

27) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם f ו- g פונקציות רציפות ב- $[a,b]$, ואם $\int_a^b f(t)dt=0$ וגם $\int_a^b g(t)dt=0$, אז $\int_a^b f(t)g(t)dt=0$.

ב. אם f זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,
אז הפונקציה $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ אי-זוגית.

תשובות סופיות

1) -6

2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

3) $-2e^{-1}+1$

4) $\frac{1}{5}$

5) $\arctan 6-\arctan 3$

6) $\frac{\pi}{2}$

7) $\frac{17}{12}$

8) $\frac{2}{3}\left(-16+6^{1.5}+7^{1.5}\right)$

9) $\frac{17}{6}$

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) $x=e^{2}$

13) 0

14) $\frac{\pi}{4}$

15) $\frac{\pi^{2}}{4}$

16) שאלת הוכחה.

17) 0

18) $2\arctan 4$

19) 0

20) א, ב, ג. $\frac{\pi}{4}$

21) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. ראו בסרטון.

22) שאלת הוכחה.

23) א. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+c$ ב. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

24) $\frac{\pi^{2}}{2\sqrt{2}}$

25) $1-\sqrt{3}$

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

שאלות

1) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית,
ונניח כי $m\le f(x)\le M$ לכל x בקטע $[a,b]$.
הוכיחו כי $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות **2-10**:

2) $$\frac{2}{41}\le\int_{-1}^{3}\frac{dx}{1+x^4}\le 4$$

3) $$6\le\int_{-4}^{2}\sqrt{1+x^2}\,dx\le 6\sqrt{17}$$

4) $$2\le\int_{0}^{2}e^{x^2}dx\le 2e^4$$

5) $$\frac{1}{2}e^{-10}\le\int_{0}^{10}\frac{e^{-x}}{x+10}dx\le 1$$

6) $$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}}\le\int_{3}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}}$$

7) $$\frac{\pi}{14}\le\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{3+4\sin^2 x}dx\le\frac{\pi}{6}$$

8) $$\frac{2}{9}\le\int_{-1}^{1}\frac{dx}{8+x^3}\le\frac{2}{7}$$

9) $$-\frac{1}{2}\le\int_{0}^{1}x\cdot\sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx\le\frac{1}{2}$$

10) $\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right)dx \le \frac{\pi^4}{6}$

11) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.
בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע,
הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

12) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $|f(x)| \le \int_0^x f(t)dt$ לכל $x\in[0,1]$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

13) תהי $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, כך ש- $f''(x)>0$ לכל $x\in[0,a]$.
הוכיחו כי $\int_0^a f(x)dx > af(\frac{a}{2})$.
תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

14) תהי g פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b |g(t)|dt = 0$.
הוכיחו כי לכל x בקטע (a,b), מתקיים $g(x)=0$.

15) תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(x)dx > 1$.
הוכיחו שקיים x_0 בקטע $[a,b]$, עבורו $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$.

16) יהי n מספר טבעי, ותהי f פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע $[1,n]$.
הוכיחו כי $f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1) \le \int_1^n f(x)dx \le f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$.

17) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k$.

18) הוכיחו שאם הפונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע (a,b)
וגם $f'(x)\le M$ לכל x בקטע זה, וכן $f(a)=0$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\frac{M(b-a)^2}{2}$.

19) יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות.
נניח כי f עולה ו-g אי-שלילית.
הוכיחו שקיים $c\in[a,b]$, כך ש-$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(b)\int_a^c g(x)dx+f(a)\int_c^b g(x)dx$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-7**:

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right\}$$

4) $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right\}$$

5) $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$$

6) $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}\right\}$$

7) $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{n}{(n+n)^2}\right]$$

8) חשבו: $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$.

* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות **9-12** על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$1+2+3+\ldots+n=0.5n(n+1)$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

9) $\int_0^1 xdx$ **10)** $\int_0^1 x^2dx$ **11)** $\int_0^1 x^3dx$ **12)** $\int_0^\pi \sin xdx$

13) חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^4 x^2dx$.

14) חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע $P=\left\{1=2^{\frac{0}{n}},2^{\frac{1}{n}},2^{\frac{2}{n}},2^{\frac{3}{n}},\ldots,2^{\frac{n}{n}}=2\right\}$.

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{5}$

2) $1-\cos 1$

3) $\ln 2$

4) $\frac{\pi}{4}$

5) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

6) $\frac{2^{1.5}}{1.5}-\frac{2}{3}$

7) $\ln 2$

8) -1

9) $\frac{1}{2}$

10) $\frac{1}{3}$

11) $\frac{1}{4}$

12) 2

13) 21

14) 0.5

משפטי האינטגרביליות

שאלות

1) בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$:

א. $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,2]$

ב. $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ $\quad [a,b]=[-4,14]$

ג. $f(x)=\begin{cases}4x & x\neq 1\\ -41 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,9]$

2) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע $[a,b]$.

ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.

ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע $[-1,1]$, שאינה אינטגרבילית בקטע.

3) לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

א. קיימת פונקציה אינטגרבילית f , בקטע $[a,b]$, שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.

ב. קיימת פונקציה f , החסומה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), שאינה אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q},\ x\neq\frac{1}{2},\ x\neq\frac{1}{4}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\\ 2 & x=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{4}\end{cases}$.

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינטגרביליות לפי דארבו

שאלות

1) נתונה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, המוגדרת על ידי $f(x)=x$.

א. מצאו את האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של הפונקציה בקטע.

ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו
ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

2) נתונה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^2$.

א. מצאו את האינטגרל העליון והתחתון של הפונקציה בקטע.

ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו בקטע
ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

3) נתונה הפונקציה הבאה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<0.5\\ 2 & x=0.5\\ 1 & 0.5<x\le 1\end{cases}$.

הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ בקטע $[0,1]$.

א. בדקו, לפי ההגדרה של דארבו, האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע.

ב. תנו דוגמה לפונקציה f , כך ש- $|f|$ ו- f^2 אינטגרביליות,
אך f לא אינטגרבילית.

5) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.
נניח שקיימת חלוקה P של הקטע $[a,b]$, כך ש- $L(P,f)=U(P,f)$.
הוכיחו ש- f פונקציה קבועה.

6) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.
נניח שקיימת חלוקה P_n של הקטע $[a,b]$, כך ש- $U(P_n,f)-L(P_n,f)\to 0$.

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע.

ב. הוכיחו כי $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}L(P_n,f)=\lim_{n\to\infty}U(P_n,f)$.

7) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית בעזרת קריטריון רימן. בנוסף, חשבו את האינטגרל המסוים של הפונקציה בקטע.

א. $f(x)=x$, בקטע $[0,1]$.

ב. $f(x)=x^2$, בקטע $[0,2]$.

8) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ אינטגרבילית בקטע $[1,2]$ בעזרת קריטריון רימן.

תשובות סופיות

1) א. $\overline{\int_0^1} f = \underline{\int_0^1} f = \frac{1}{2}$ ב. $\int\limits_0^1 f\,dx = \frac{1}{2}$

2) א. $\overline{\int_0^2} f = \underline{\int_0^2} f = \frac{8}{3}$ ב. $\int\limits_0^2 f\,dx = \frac{8}{3}$

3) שאלת הוכחה.

4) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

אינטגרביליות לפי דארבו – תרגול נוסף באנגלית

שאלות

1) תהי $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=x^2$.
מצאו סכום דארבו עליון ותחתון של הפונקציה המתאים לחלוקת הקטע ל-n תת-קטעים בעלי אורך שווה, כאשר $n=6,8,10,20$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו את המושג עידון של חלוקה.

ב. הוכיחו את המשפט הבא:
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה ויהיו P ו-Q שתי חלוקות של הקטע, כך ש-Q עידון של P, אז $L(Q,f)\ge L(Q,P), U(Q,f)\le U(Q,P)$.

ג. הוכיחו את המסקנה הבאה מהמשפט:
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה, אז $\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את קריטריון רימן לאינטגרביליות.
כלומר, הוכיחו את המשפט הבא:
פונקציה חסומה f היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P של הקטע $[a,b]$, כך ש-$U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$.

ב. הוכיחו את המסקנה מהמשפט לעיל:
תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$, ונניח כי (P_n) היא סדרה של חלוקות של הקטע $[a,b]$, כך ש-$U(P_n,f)-L(P_n,f)\underset{n\to\infty}{\to}0$.
הוכיחו ש-f אינטגרבילית.

ג. נתון $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\begin{cases} x & x=1/n \\ 0 & x\ne 1/n \end{cases}$.
הוכיחו כי f אינטגרבילית ומצאו את $\int_0^1 f(x)dx$.

4) הוכיחו את המשפטים הבאים:

א. פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

ב. פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

5) סדרת פונקציות $f_n(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי: $f_n(x)=\begin{cases}\frac{nx^{n-1}}{1+x} & 0\le x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$.

הוכיחו כי $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=0$, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\frac{1}{2}$.

6) תהי פונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, כך ש- $f(x)=x$ לכל x רציונלי,
ו- $f(x)=0$ לכל x אי-רציונלי.
העריכו את האינטגרל העליון והתחתון של f, והראו כי f אינה אינטגרבילית.

7) תהי $f:[0,1]\to[0,1]$, מוגדרת באופן הבא:

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{אם } x=\frac{p}{q}\ne 1 \text{, כאשר } p,q\in\mathbb{N} \text{, ול- } p,q \text{ אין גורמים משותפים}\\ 0 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי או } x=0 \text{ או } x=1\end{cases}$

א. תהי A_N מוגדרת באופן הבא, לכל $N\in\mathbb{N}$: $A_N=\left\{x\in(0,1)\,|\,x=\frac{p}{q}\right\}$,
כאשר $p,q\in\mathbb{N}$, $q\le N$ ול- p,q אין גורמים משותפים.
הראו שהקבוצה A_N סופית.

ב. ל- $N\in\mathbb{N}$ ו- $\varepsilon>0$ נתונים, הראו כי קיימים קטעים
$[x_1,x_2],[x_3,x_4],\dots,[x_{2m-1},x_{2m}]$, כך ש:
$0<x_1<x_2<x_3<x_4<\dots<x_{2m-1}<x_{2m}<1$,
$A_N\subseteq(x_1,x_2)\cup(x_3,x_4)\cup\dots\cup(x_{2m-1},x_{2m})$,
ו- $|x_1-x_2|+|x_3-x_4|+\dots+|x_{2m-1}-x_{2m}|\le\frac{\varepsilon}{2}$.

ג. הראו ש- f אינטגרבילית.

ד. מצאו שתי פונקציות אינטגרביליות, g ו- h ב- $[0,1]$,
כך שההרכבה $g\circ h$ אינה אינטגרבילית.

8) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן $[c,d]\subseteq[a,b]$.
הראו ש- f אינטגרבילית ב- $[c,d]$.

9) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי f חסומה ב-$[c,d]$, ונתון:

$$M=\sup\{f(x)\,|\,x\in[c,d]\},\ \ M'=\sup\{|f(x)|\,|\,x\in[c,d]\}$$

$$m=\inf\{f(x)\,|\,x\in[c,d]\},\ \ m'=\inf\{|f(x)|\,|\,x\in[c,d]\}$$

הוכיחו כי $M'-m'\le M-m$.

ב. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכיחו כי $|f|$ ו-f^2 אינטגרביליות.

10) תהיינה f ו-g שתי פונקציות אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

א. הוכיחו כי אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

ב. הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$.

ג. הוכיחו כי אם $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$,

אז $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

היעזרו באי-שוויון זה כדי להראות ש-$\frac{\sqrt{2}}{6}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\sqrt{3}}{8}$.

11) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ (כלומר, $f(x)\ge 0$).

א. הוכיחו כי אם f רציפה וכן $\int_a^b f(x)dx=0$, אז $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$.

ב. הביאו דוגמה לפונקציה f אינטגרבילית ב-$[a,b]$, כאשר $\int_a^b f(x)dx=0$,

אבל קיים $x_0\in[a,b]$, עבורו $f(x_0)>0$.

הערה: f לא תהיה רציפה.

12) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שלכל $c\in(0,1)$, הפונקציה f אינטגרבילית ב-$[c,1]$.

א. הוכיחו כי f אינטגרבילית ב-$[0,1]$.

ב. היעזרו בסעיף א, והוכיחו כי $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \sin\frac{1}{x} & x\in(0,1]\end{cases}$

אינטגרבילית ב-$[0,1]$.

13) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.
נניח שכאשר המכפלה fg אינטגרבילית ב-$[a,b]$, עבור פונקציה אינטגרבילית כלשהי g, מתקיים $\int_a^b (fg)(x)\,dx=0$.
הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$ (כלומר, $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$).

14) ענו על הסעיפים הבאים:
א. יהיו $x,y\geq 0$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x^n+y^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max\{x,y\}$.
ב. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ רציפה.
הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$.

15) [אי-שוויון קושי-שוורץ]
א. יהיו $x_1,x_2,\ldots x_n,y_1,y_2,\ldots y_n\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי $\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right|\leq\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
רמז: $\sum_{i=1}^n (tx_i+y_i)^2\geq 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$.
ב. תהיינה f,g שתי פונקציות אינטגרביליות ב-$[a,b]$.
הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right|\leq\left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
רמז: $\int_a^b [tf(x)+g(x)]^2\,dx\geq 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

16) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.
נשנה את הערכים של f במספר סופי של נקודות.
הוכיחו שהפונקציה שמתקבלת אינטגרבילית.

17) סעיף א'

1. הוכיחו כי $b^n-a^n=(b-a)\left(b^{n-1}+b^{n-2}a+b^{n-3}a+...++b^{n-2}+a^{n-1}\right)$,
כאשר $n\in\mathbb{Z}^+$ וכן $a,b\in\mathbb{R}$.

2. הוכיחו כי $(k+1)^n<\dfrac{(k+1)^{n+1}-k^{n+1}}{n+1}<k^n$, כאשר $k,n\in\mathbb{Z}^+$.

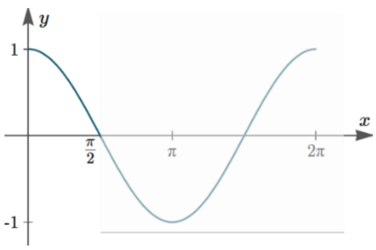
3. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{m}k^n<\dfrac{m^{n+1}}{n+1}<\sum_{k=1}^{m-1}k^n$.
כלומר, $1^n+2^n+...+(m-1)^n+m^n<\dfrac{m^{n+1}}{n+1}<1^n+2^n+...+(m-1)^n$.

סעיף ב'

תהי $f(x)=x^n$ מוגדרת בתחום $[0,1]$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

בעזרת סכומי רימן, הוכיחו כי f אינטגרבילית ב-$[0,1]$, וחשבו $\int_0^1 f(x)dx$.

רמז: חלקו את הקטע $[0,1]$ ל- m קטעים שווים והיעזרו בסעיף א' להערכת הסכומים העליונים והתחתונים.



18) תהי $f(x)=\cos x$ מוגדרת ב-$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

השתמשו בסכומי רימן והוכיחו ש- f אינטגרבילית ב-$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, וחשבו את $\int_0^{\pi/2}f(x)dx$.

רמז 1: חלקו את $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ל- n קטעים שווים, והניחו כי $n\to\infty$.

רמז 2: השתמשו בזהות הטריגונומטרית הבאה, כאשר $k\in\mathbb{Z}^+$ ו- $\theta\in\mathbb{R}$,

$\sin\dfrac{\theta}{2}\cos k\theta=\dfrac{1}{2}\left[\sin\dfrac{(2k+1)\theta}{2}-\sin\dfrac{(2k-1)\theta}{2}\right]$, כדי להעריך את הסכום:

$$\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right].$$

19) חשבו את $\int_1^2 f(x)dx$, בעזרת החלוקה $P_n=\left\{\overset{=1}{x_0},x_1,\dots,\overset{=2}{x_n}\right\}$,

כאשר $x_i=2^{\frac{i}{n}}\ (0\le i\le n)$, וגם:

א. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

ב. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $\quad P_4=\left\{1,2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{2}{4}},2^{\frac{3}{4}},2\right\}$

20) תהיינה f,g שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. הוכיחו:

א. אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

ב. אם $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$, אז $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

21) נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית אי-שלילית.

הוכיחו כי $\sqrt{f}$ אף היא אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

22) נתונה הפונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם f אינטגרבילית, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס,
אז $\int_a^b f(x)dx>0$.

ב. אם f רציפה, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז $\int_a^b f(x)dx>0$.

ג. אם f אינטגרבילית, אז כך גם f^2.

ד. אם $|f|$ אינטגרבילית, אז כך גם f.

23) חשבו את $\int_{0.25}^{4.3}\lfloor x\rfloor dx$, כאשר $\lfloor x\rfloor=\max\{n\in\mathbb{Z}\,|\,n\le x\}$
(פונקציית הערך השלם).

24) הוכיחו כי אם f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$,
אז αf אינטגרבילית ב-$[a,b]$, וכן $\int_a^b\alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$.
רמז: הניחו תחילה כי $\alpha\ge0$, והיעזרו בפונקציה $-f$, ל-$\alpha<0$.

25) הוכיחו כי אם f,g אינטגרביליות ב-$[a,b]$, אז כך גם $f+g$,
ובנוסף מתקיים $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$.
רמז: הוכיחו כי $\overline{\int_a^b}(f+g)\le\overline{\int_a^b}f+\overline{\int_a^b}g$ וכן $\underline{\int_a^b}(f+g)\ge\underline{\int_a^b}f+\underline{\int_a^b}g$.

26) נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן שקיים $c>0$, כך ש-$|f(x)|\ge c$ לכל $x\in[a,b]$. [לחלופין: f אינטגרבילית ואינה אפס; $\frac{1}{f}$ חסומה]

הוכיחו כי גם $g=\frac{1}{f}$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

27) נניח כי f,g אינטגרביליות ב- $[a,b]$.

א. הוכיחו כי גם $f\cdot g$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

ב. הוכיחו כי אם $|g(x)|\ge c>0$ לכל $x\in[a,b]$,

אז גם $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

28) הניחו כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ וכן ש- $a<c<b$, והוכיחו כי:

א. אם f אינטגרבילית ב- $[a,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a,c]$ ו- $[c,b]$.

ב. אם f אינטגרבילית ב- $[a,c]$ ו- $[c,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a,b]$.

ג. באיזה מהמקרים, בסעיפים א' ו-ב', מתקיים השוויון:

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

29) נניח כי f,g אינטגרביליות ב- $[a,b]$.

נגדיר $\varphi=\max\{f,g\}$ וכן $\psi=\min\{f,g\}$.

הוכיחו כי גם φ,ψ אינטגרביליות ב- $[a,b]$.

רמז: $\max\{a,b\}=\frac{1}{2}\left[a+b+|a-b|\right]$, $\min\{a,b\}=?$

30) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

בהינתן החלוקה $P=\{x_0,\ldots,x_n\}$ של $[a,b]$ וכן $\varepsilon>0$,

נגדיר שתי תתי-קבוצות, $A_\varepsilon(P)$ ו- $B_\varepsilon(P)$ של $\{1,\ldots,n\}$, באופן הבא:

$i\in A_\varepsilon(P)$ אם $M_i-m_i<\varepsilon$, ו- $i\in B_\varepsilon(P)$ אם $M_i-m_i\ge\varepsilon$.

כמו כן, נגדיר $s_\varepsilon(P)=\sum_{i\in B_\varepsilon(P)}\Delta x_i$.

הוכיחו כי פונקציה חסומה f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ אם ורק אם

לכל $\varepsilon>0$ ולכל $\tau>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל P כנ"ל $\|P\|<\delta \Rightarrow s_\varepsilon(P)<\tau$.

31) נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ותהי $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$.

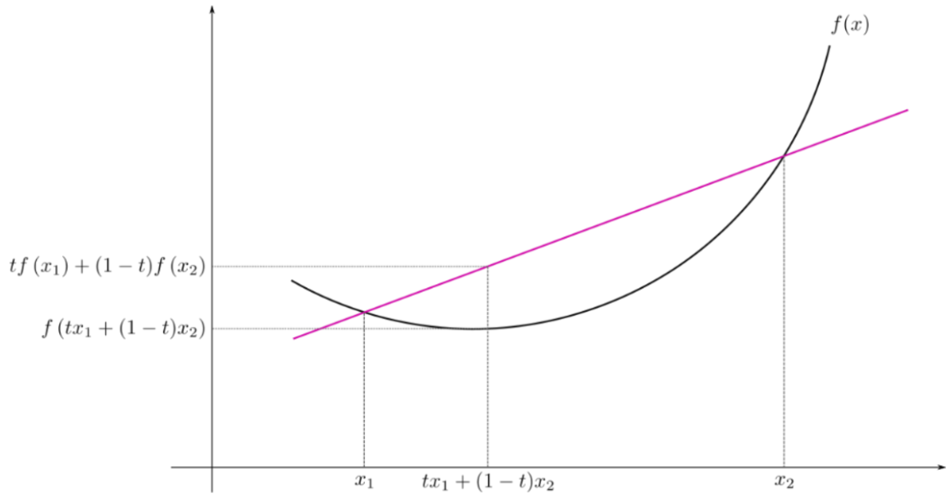
א. האם תמיד נוכל לבחור תגיות $C=\{c_1,\ldots,c_n\}$ ל- P,

כך ש- $S(f;P,C)=L(f,P)$? נמקו.

הערה: ב"תגיות" הכוונה ש- $x_{i-1}<c_i<x_i$.

ב. האם התשובה תשתנה אם ייתן גם כי f רציפה?

32) זכרו כי פונקציה f על קטע I תיקרא קמורה, אם לכל $a,b\in I$, ולכל $t\in[0,1]$, מתקיים $f\left(t\cdot a+(1-t)\cdot b\right)\le t\cdot f(a)+(1-t)\cdot f(b)$.



א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה.

הוכיחו כי לכל $t_1,\dots,t_n\in[0,1]$ המקיימים $\sum_{i=1}^{n}t_i=1$, מתקיים אי-השוויון

$f\left(\sum_{i=1}^{n}t_ia_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}t_if(a_i)$. 	[רמז: אינדוקציה על n]

ב. (אי-שוויון יֶנְסֶן)

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה ורציפה, ותהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה.

הוכיחו כי $f\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)\le\int_0^1 f\left(g(x)\right)dx$.

33) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

א. הוכיחו כי f אי-זוגית אם ורק אם F זוגית.

ב. הוכיחו כי f זוגית אם ורק אם F אי-זוגית.

34) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

א. הוכיחו כי אם F מחזורית, אז גם f מחזורית.

ב. מצאו דוגמה שבה f מחזורית אבל F לא-מחזורית.

35) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכיחו שקיים $c\in[a,b]$, כך ש-$\int_a^c f(x)\,dx=\int_c^b f(x)\,dx$.

36) תהי A קבוצת כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, שהן אינטגרביליות בכל $[a,b]$,
ומקיימות את השוויון הבא לכל $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{\int_0^x f(t)dt = f(x)-1}$.

א. מצאו דוגמה לפונקציה ב- A.

ב. הוכיחו כי אם $f\in A$, אז f גזירה ב- $\mathbb{R}$.

(רמז: תחילה הראו ש- f רציפה).

ג. מצאו את כל הפונקציות f ב- A.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 18 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **5-1**:

1) $\int_{1}^{\infty} \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$

2) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

3) $\int_{1}^{\infty} xe^{-x^2}dx$

4) $\int_{1}^{\infty} \frac{x}{x^2+5}dx$

5) $\int_{1}^{\infty} x^2e^{-2x}dx$

6) הוכיחו כי $\int_{0}^{\pi} \frac{1}{1+\alpha\cos x}dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, עבור $|\alpha|<1$.

7) הוכיחו כי $\int_{0}^{\pi} \frac{1}{\alpha-\cos x}dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, עבור $|\alpha|>1$.

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{\pi}{2}$

3) $\frac{1}{2e}$

4) מתבדר: ∞.

5) $\frac{5}{4e^2}$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

תשובות סופיות

1) מתבדר: ∞.

2) מתבדר: ∞.

אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

1) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$.

תשובה

1) מתבדר: ∞.

שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

שאלות

1) חשבון את השטח בין גרף הפונקציה $y=e^{2x}$, הישר $x=1$ וציר ה- x ,
עבור $x\le 1$.

2) חשבון את השטח בין גרף הפונקציה $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x
והישר $x=5$.

3) נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{x^2}{e^{x^3}}$.
ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $0\le x\le k$,
שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $x\ge k$.
מצאו את הקבוע k .

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}e^2$

2) $2\sqrt{5}$

3) $k=\sqrt[3]{\ln 2}$

מבחני השוואה

שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

1) $\int_{1}^{\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^4+4x^2+5}dx$

2) $\int_{1}^{\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5}dx$

3) $\int_{1}^{\infty}\frac{\arctan x}{1+x^4}dx$

4) $\int_{3}^{\infty}\frac{\sin x\cdot\ln x}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$

5) $\int_{1}^{\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx$

6) $\int_{2}^{\infty}\frac{\sqrt{x^3+1}}{x}dx$

7) $\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx$

8) $\int_{-\infty}^{2}\frac{e^{3x}}{1+x^2}dx$

9) $\int_{1}^{\infty}\frac{\ln x}{1+x}dx$

10) $\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$

11) $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

12) $\int_{0}^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}dx$

13) $\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}dx$

14) $\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}dx$

15) $\int_{0}^{\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2\left(x+\sqrt{x}\right)}$

16) $\int_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5}\sqrt{(1+x)^5}}dx$

תשובות סופיות

1) מתכנס.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) מתבדר.
7) מתכנס.
8) מתכנס.
9) מתבדר.
10) מתכנס.
11) מתכנס.
12) מתבדר.
13) מתכנס.
14) מתבדר.
15) מתכנס.
16) מתכנס.

התכנסות בהחלט

שאלות

בשאלות **1-3** בדקו האם האינטגרלים מתכנסים:

1) $\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{x^2+1}dx$

2) $\int_0^\infty e^{-10x}\sin 4x dx$

3) $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

4) הוכיחו: אם $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

תשובות סופיות

1) מתכנס.
2) מתכנס.
3) מתכנס.
4) שאלת הוכחה.

מבחן דיריכלה

שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים :

1) $\int_1^\infty \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx$

2) א. $(p>0)$ $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$

ב. $\int_1^\infty \sin(x^2) dx$

3) $(p>0)$ $\int_1^\infty \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

התכנסות בתנאי

שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים :

1) א. $(p>1)$ $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx$

ב. $(p>1)$ $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$

ג. $(p>1)$ $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$

2) א. $(0<p\le 1)$ $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx$

ב. $(0<p\le 1)$ $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$

ג. $(0<p\le 1)$ $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$

3) א. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$

ב. $\int_0^\infty \frac{\sin\left(x^4\right)}{x^p}dx$

4) $\int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1}dx$

5) $\int_0^{\pi/2} \frac{x\sin\left(\tan x\right)}{\cos x}dx$

תשובות סופיות

1) א. מתכנס בהחלט עבור $1<p<2$ ומתבדר עבור $p\ge 2$.

ב. מתכנס בהחלט.

ג. מתכנס בהחלט עבור $1<p<2$ ומתבדר עבור $p\ge 2$.

2) א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.

3) א. מתכנס בתנאי עבור $0<p\le 1$, מתכנס בהחלט עבור $1<p<2$,

מתבדר עבור $p\ge 2$.

ב. מתכנס בתנאי עבור $-3<p\le 1$, מתכנס בהחלט עבור $1<p<5$,

מתבדר עבור $p\ge 5$.

4) מתכנס בתנאי.

5) מתכנס בתנאי.

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 19 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}$ $\quad (y\neq 0)$

2) $(1-x)y'=y^2$

3) $yy'\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$

4) $(x-1)\frac{dy}{dx}=4y$; $y(2)=1$

5) $\frac{dy}{dx}=xy+3y-3x-9$; $y(1)=-1$

6) $(x^2y-2+2x^2-y)dx-(xy^2-4-4x+y^2)dy=0$

7) $dy=2t(y^2+4)dt$

8) $\frac{dx}{dt}=x^2-2x+2$

9) $y'+y^2\sin x=0$; $y(\pi)=1$

10) $\frac{dy}{dx}=y\sec^2 x$; $y(0)=5$ $\quad (\cos x\neq 0)$

11) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$; $y(0)=1$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+k}$

2) $y=\frac{1}{\ln|1-x|-c},\quad y=0$

3) $\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+c$

4) $\frac{1}{4}\ln|y|=\ln|x-1|$

5) $\ln|y-3|=\frac{x^2}{2}+3x+\ln 4-3.5$

6) $y=2\pm\sqrt{(x-1)^2+k}$

7) $y=2\tan\left(2t^2+k\right)$

8) $x=1+\tan(t+c)$

9) $y=-\frac{1}{\cos x}$

10) $\ln|y|=\tan x+\ln 5$

11) $\frac{1}{-2y^2}=\sqrt{1+x^2}-1.5$

משוואה הומוגנית

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-8**:

1) $\left(y^3+x^3\right)dx+xy^2dy=0$

2) $y'=\dfrac{4y-3x}{2x-y}$

3) $y^2+x^2y'=xyy'$

4) $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$

5) $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$

6) $y'=\dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}$

7) $y(1)=0\ \ ;\ \ \left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$

8) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

9) נתונה המשוואה $\left(y^2+x^2\right)dx+xy^ndy=0$.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n, על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של n שנמצא בסעיף א.

תשובות סופיות

1) $-\ln|x| = \frac{1}{6}\ln\left|2(y/x)^3 + 1\right| + c\ ,\qquad y = -\frac{x}{2^{1/3}}$

2) $\ln|x| = \frac{1}{4}\ln\left|(y/x) - 1\right| - \frac{5}{4}\ln\left|(y/x) + 3\right| + c\ ,\quad y = x,\ \ y = -3x$

3) $-\ln|x| = \ln\left|(y/x)\right| - (y/x) + c,\quad y = 0$

4) $-\ln|x| = \frac{1}{4}\ln\left|2(y/x)^2 + 4\right| + c,\quad y = 0,\quad y = -2x$

5) $\ln|x| = -\sin(y/x) + c$

6) $\ln\left(1 + e^{(x/y)^2}\right) = \ln|y| + c,\qquad y = 0$

7) $\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c$

8) $\ln|t| = -\frac{1}{2}\ln\left|(x/t) - (x/t)^2\right| + c,\quad x(t) = 0,\quad x(t) = t$

9) $n = 1,\quad \ln|x| = -\frac{1}{4}\ln\left(1 + 2(y/x)^2\right) + c$

משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+y+2}$

2) $(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0$

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$

4) $\frac{dx}{dy}=\frac{3+x+2y}{1+x+y}$

5) $(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0$

תשובות סופיות

1) $x=\frac{1}{2}(x+y+1)+\frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1)+\frac{1}{4}+c,\quad y=-x-1.5$

2) $\ln|x-1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right|+c\quad ,y=x-3\quad ,\quad y=-x-1$

3) $0=14y-(x+2y+3)^2+k$

4) $\ln|x-1|=\frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right|+(-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right]+c$

$y=\sqrt{0.5}x-2-\sqrt{0.5}\ ,\ y=-\sqrt{0.5}x-2+\sqrt{0.5}$

5) $\ln|x-2|=\frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2}+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right)+c$

משוואה מדויקת

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **6-1**:

1) $\left(2x^3+3y\right)dx+\left(3x+y-1\right)dy=0$

2) $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

3) $\left(y\cos x+2xe^y\right)dx+\left(\sin x+x^2e^y-1\right)dy=0$

4) $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 xdy=0$

5) $\left(y^2-\dfrac{y}{x(x+y)}+2\right)dx+\left(\dfrac{1}{x+y}+2y(x+1)\right)dy=0$

6) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

7) נתונה המשוואה $\left(3x^2+ye^{xy}\right)dx+\left(2y^3+kxe^{xy}\right)dy=0$, כאשר k קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k, על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שנמצא בסעיף א.

תשובות סופיות

1) $0.5x^4+3yx+0.5y^2-y=c$

2) $e^{xy^2}+x^4-y^3=c$

3) $y\sin x+x^2e^y-y=c$

4) $x-\frac{y^2\cos 2x}{2}-\frac{y^2}{2}=c$

5) $\ln|x+y|+(x+1)y^2+2x-\ln|x|=c$

6) $x^2t^2-2x^3t+x^4=c$

7) $k=1,\ \ x^3+e^{xy}+\frac{y^4}{2}=c$

גורם אינטגרציה

שאלות

1) הראו שהמשוואה $x^2y^3+x\left(1+y^2\right)y'=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

2) הראו שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0$
אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x.

3) הראו שהמשוואה $(x+2)\sin y dx+x\cos y dy=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x.

פתרו את המשוואות בשאלות **4-9**:

4) $\left(x^2+y^2+x\right)dx+\left(xy\right)dy=0$

5) $\left(x-x^2-y^2\right)dx+ydy=0$

6) $\left(2xy^3+y^4\right)dx+\left(xy^3-2\right)dy=0$

7) $\left(y^2-y\right)dx+xdy=0$

8) $\left(y-xy^2\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$

9) $y'=\frac{3yx^2}{x^3+2y^4}\quad;\quad y(1)=-1$

10) נתונה מד"ר לא מדויקת $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{N}=f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{M}=g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $\left(y^4-4xy\right)dx+\left(2xy^3-3x^2\right)dy=0$.
מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד.
כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

12) נתונה המשוואה $\left(5x^2+3y^3+2xy\right)dx+\left(3x^2+3xy^2+6y^3\right)dy=0$.
מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.
מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $\left(x^2y^3\right)dx+\left(x+xy^2\right)dy=0$.
מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$.
כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu\left(x^\alpha y^\beta\right)$.

15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה $\left(y-xy^2\ln x\right)dx+xdy=0$.

16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.
מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $x+y$ בלבד.

תשובות סופיות

1) $0.5x^2+\frac{y^{-2}}{-2}+\ln|y|=c$

2) $e^x\sin y+2y\cos x=c$

3) $\sin y\cdot e^x\cdot x^2=c$

4) $0.25x^4+0.5x^2y^2+\frac{x^3}{3}=c$

5) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-x=c$

6) $x^2+xy+\frac{1}{y^2}=c$

7) $x-\frac{x}{y}=c$

8) $-\ln x-\frac{1}{xy}+y=c$

9) $-\frac{x^3}{y}+\frac{2y^3}{3}=\frac{1}{3}$

10) שאלת הוכחה.

11) $\mu(xy)=(xy)^2$

12) $\mu(x+y)=(x+y)^2$

13) $\text{if: }\frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}=h\left(x/y\right)\quad\text{then: I.F.: }\mu=e^{\int\frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}}$

14) $\mu=\frac{1}{xy^3}$

15) א. $\text{if : }\frac{M_y-N_x}{yN-xM}=h(xy)\quad\text{then: I.F. : }\mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{yN-xM}}$ ב. $\mu=\frac{1}{x^2y^2}$

16) $\text{if : }\frac{M_y-N_x}{N-M}=h(x+y)\quad\text{then:I.F.: }\mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N-M}}$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$

2) $xy'=y+x^3+3x^2-2x$

3) $(x-2)y'=y+2(x-2)^3 \quad (x>2)$

4) $x^3y'+(2-3x^2)y=x^3 \quad (x>0)$

5) $\frac{dy}{dt}+y=2+2t \;;\; y(0)=1$

6) $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x} \quad (\sin x>0)$

7) $y'-2y\cot x=1 \quad (\sin x>0)$

8) $x^2z'+2xz=\cos x \;;\; z(\pi)=0$

9) $ydx=(2x+y^3)dy$

תשובות סופיות

1) $y=2+C\cdot e^{-x^2}$

2) $y=x\left[\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+C\right]$

3) $y=(x-2)\left[x^2-4x+C\right]$

4) $y=\frac{1}{2}x^3+C\cdot x^3e^{\frac{1}{x^2}}$

5) $y=2t+e^{-t}$

6) $y=\frac{1}{\sin x}\left[-5e^{\cos x}+C\right]$

7) $y=\sin^2 x\left[-\cot x+C\right]$

8) $z=\frac{\sin x}{x^2}$

9) $x(y)=y^2(y+c)$

משוואת ברנולי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $x^2y'+2xy-y^3=0$

2) $\left(x^2+1\right)y'-2xy-y^2=0$

3) $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^2y^{1/2}$

4) $y'-\left(\dfrac{1}{x}+5x^4\right)y=-x^3y^2 \quad ; \quad y(1)=2.5$

5) $z'-\cot x\cdot z=\dfrac{1}{\sin x}z^3 \qquad \left(\sin x\neq 0\right)$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{5x}+c\cdot x^4}}$

2) $y=\dfrac{x^2+1}{-x+C}$

3) $y=x^2\left(\dfrac{x}{2}+C\right)^2$

4) $y=\dfrac{5xe^{x^5}}{e^{x^5}+e}$

5) $z=\pm\sqrt{\dfrac{\sin^2 x}{\cos x+C}}$

משוואת ריקטי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

1) $y'=e^{2x}+\left(1+\frac{5}{2}e^{x}\right)y+y^{2}$

2) $y'=1+(x-y)^{2}$

3) $y'=1+x+2x^{2}\cos x-(1+4x\cos x)y+2y^{2}\cos x$

תשובות סופיות

1) $y(x)=-0.5e^{x}+\frac{e^{x}}{-\frac{2}{3}+Ce^{-1.5x}}$

2) $y(x)=x+\frac{1}{-x+C}$

3) $y(x)=x+\frac{1}{\cos x-\sin x+Ce^{x}}$

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $4x^2p^2 - 4x^2p - 2xy - y^2 = 0 \qquad (p = y')$

2) $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \qquad (p = y')$

3) $xyp^2 + \left(x^2 + xy + y^2\right)p + x^2 + xy = 0 \qquad (p = y')$

4) $y = 2px + p^4x^2 \qquad (p = y')$

5) $xp^2 - 2yp + 4x = 0 \qquad (p = y')$

6) $6p^2y^2 + 3px - y = 0 \qquad (y > 0) \qquad (p = y')$

תשובות סופיות

1) $\left(y-2x-\sqrt{x}\cdot c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+\frac{1}{2}\ln|x|-c_2\right)=0$

2) $\left(\ln|y|-2\ln|x|-c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+3\ln|x|-c_2\right)=0$

3) $\left(y+0.5x-\frac{c_1}{x}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-c_2\right)=0,\quad x>0$

4) $y=\pm 2\sqrt{cx}+c^2$

5) $y=\frac{1}{2}cx^2+\frac{2}{c}$

6) $6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2+3\left(\frac{c}{y^2}\right)x-y=0$

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

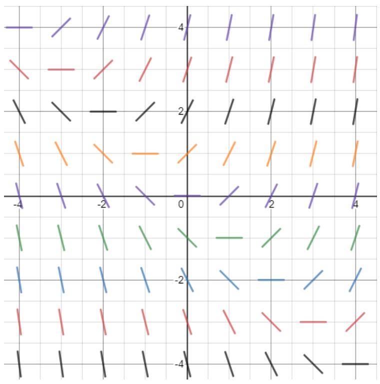
1) שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y'=2y-x$.

2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א׳-ג׳ לשדה הכיוונים שלה:

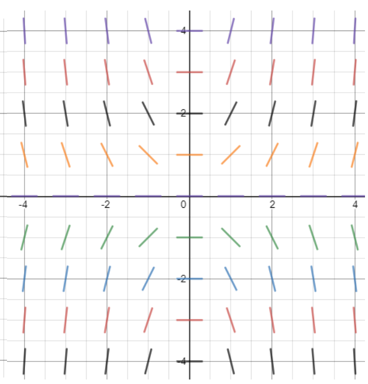
א. $y'=\frac{x}{y}$

ב. $y'=xy$

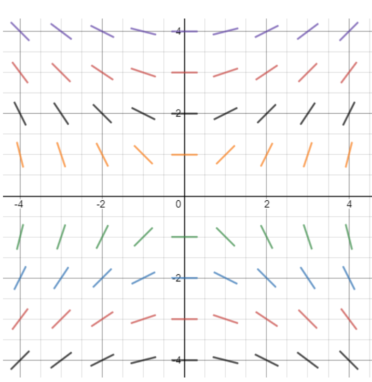
ג. $y'=x+y$



איור 1



איור 2



איור 3

3) נתונה המד״ר $y'=y-x$, $y(0)=2$.

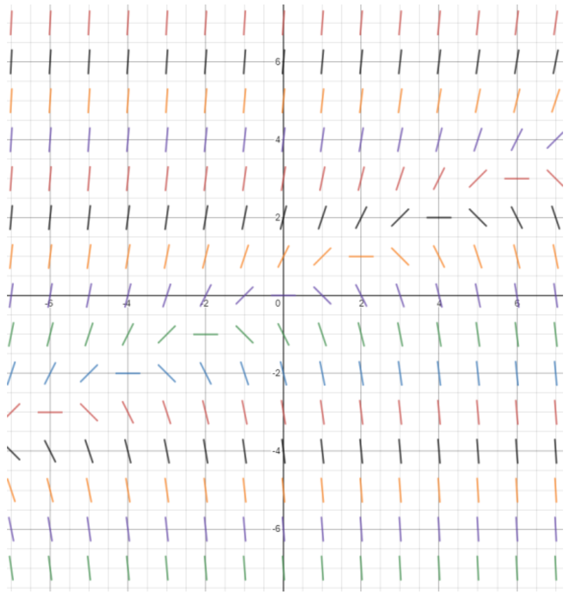
מצאו בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.1$.

4) נתונה המד״ר $y'=x+y$, $y(1)=2$.

מצאו בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.2$.

תשובות סופיות

1)



2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

3) $y(1)=4.593$

4) $y(2)=6.95328$

משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

1) נתונה הבעיה $y'=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+y}\ ,\ y(2)=-1$.

א. הוכיחו ש- $y_1(x)=-x+1,\ \ y_2(x)=-\frac{1}{4}x^2$ הם פתרונות לבעיה.
קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

2) נתונה הבעיה $y'=\sqrt[3]{y}+4\ ,\ y(0)=0$.

א. הוכיחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכיחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכיחו שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

3) פתרו את הבעיה $y'=\left(x^2+y^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+x^2\sin y\ ,\ y(4)=0$.

4) נתונה הבעיה $y'=(y-1)\left(x^2+y\right)^5\ ,\ y(0)=4$.

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

5) נתונה המד"ר $ydx=\left(2x+y^3\right)dy$.

א. הראו שעבור $x=x(y)$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון,
ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,
מהן נקודות ההתחלה (x_0,y_0), כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,
העובר דרך (x_0,y_0).
צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.
מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0,y_0)?

6) נתונה בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו 3 קירובי פיקארד לפתרון הבעיה.

ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכיחו באינדוקציה).

ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $n \to \infty$.

7) כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = \frac{1}{x}|\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases}$ $(x > 0)$?

8) נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

9) נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \ (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

10) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

11) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

12) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.
2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.
3) $y(x)=0$
4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.
ב. כל נקודת התחלה (x_0,y_0), שעבורה $y_0\neq 0$.
הקטע הארוך ביותר: $(0,\infty)$ או $(-\infty,0)$.
6) א. $y_0(x)=1,\quad y_1(x)=1+x^2,\quad y_2(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!},\quad y_3(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}$
ב. $y_n(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+...+\frac{x^{2n}}{n!}$ ג. הוכחה.
7) אחד.
8) א. $[-0.08,0.08]$ ב. $[-0.1,0.1]$ ג. הוכחה.
9) א. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ ב. $[-0.5,0.5]$ ג. הוכחה.
10) הוכחה.
11) הוכחה.
12) הוכחה.

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 20 - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $(x \neq 0)\ \ x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x}$

2) $(\cos x \neq 0)\ \ y'' \tan x - 1 = y'$

3) $2xy'y'' - (y')^2 + 1 = 0$

4) $y'' x \ln x = y'$

5) $xy'' = x^2 e^x + y'$

6) $yy'' + (y')^2 = 0$

7) $2y''y - (y')^2 = 1$

8) $(\cos y \neq 0)\ \ y'' \tan y = 2(y')^2$

תשובות סופיות

1) $y=\frac{1}{x}+C_1\cdot\ln x+C_2$

2) $y=-x+C_1\cdot\cos x+C_2$

3) $y=\pm\frac{2}{3C_1}\left(C_1x+1\right)^{3/2}+C_2; y=\pm x+C_3$

4) $y=C_1\left(x\ln x-x\right)+C_2; y=C_3$

5) $y=e^x\left(x-1\right)+C_1\frac{x^2}{2}+C_2$

6) $\frac{y^2}{2}=cx+k \;\; ; \;\; y=c$

7) $y=\frac{1}{c}\left[\frac{c^2\left(x+k\right)^1}{4}+1\right]$

8) $\cot y=-\left(cx+k\right) \;\; ; \;\; y=c$

משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-11**:

1) $y''-100y=0$

2) $y''-4y'=0$

3) $y''-8y'+7y=0$

4) $4z''+z'-5z=0,\ z(0)=1,\ z'(0)=1$

5) $y''-2y'+y=0$

6) $4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+4\frac{\partial x}{\partial t}+x(t)=0$

7) $y''+4y=0$

8) $y''+10y'+125y=0$

9) $y''-2y'+10y=0;\ y(0)=0,\ y'(0)=3$

10) $5y''+8y'+4y=0$

11)
$$\begin{cases} y''(x)-\frac{1}{a^2}y(x)=0 & (a>0) \\ y(0)=4 \\ y(\infty)=y(-\infty)=0 \end{cases}$$

12) נתונה המד"ר $yy''+\left(y'\right)^2=0$.

א. הראו כי $y_1=4$ ו- $y_2=\sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראו כי הפתרון $z(x)=y_1(x)+y_2(x)$, אינו פתרון של המד"ר.
האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{10x}+c_2e^{-10x}$

2) $y=c_1+c_2e^{4x}$

3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{7x}$

4) $z=e^{x}$

5) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$

6) $x(t)=c_1e^{\frac{-t}{2}}+c_2te^{\frac{-t}{2}}$

7) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

8) $y=e^{-5x}\left[c_1\cos 10x+c_2\sin 10x\right]$

9) $y=e^{2}\sin 3x$

10) $y=e^{\frac{-4x}{5}}\left[c_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+c_2\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\right]$

11) $y=4e^{-\frac{|x|}{a}}$

12) שאלת הוכחה.

השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ \ y'(0)=7;\ \ y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''-3y'+2y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$

8) $y''+3y'=9x$

9) $y''-3y'+2y=e^x$

10) $y''-2y'=6x^2-2x$

11) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+x^2+2x-2$

2) $y=e^x+4xe^x+e^{2x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y=c_1e^{-\sqrt{2}x}+c_2e^{\sqrt{2}x}+(2-x)e^{-x}$

5) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+\frac{3}{10}e^{2x}\cos x+\frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

7) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+x^2+3x+3.5-x^2e^x-3xe^x+2e^{3x}$

8) $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$

9) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-xe^x$

10) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}-x^2-x-x^3$

11) $x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+te^{-2t}$

12) $y=e^{-x}\sin 2x$

השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ \ y'(0)=7;\ \ \ y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''+3y'=9x$

8) $y''-3y'+2y=e^{x}$

9) $y''-2y'=6x^2-2x$

10) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

11) $y''-3y'+2y=2x^2+e^{x}+2xe^{x}+4e^{3x}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+x^2+2x-2$

2) $y=e^x+4xe^x+e^{2x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y=c_1e^{-\sqrt{2}x}+c_2e^{\sqrt{2}x}+(2-x)e^{-x}$

5) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+\frac{3}{10}e^{2x}\cos x+\frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

7) $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$

8) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-xe^{x}$

9) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}-x^2-x-x^3$

10) $x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+te^{-2t}$

11) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+x^2+3x+3.5-x^2e^x-3xe^x+2e^{3x}$

12) $y=e^{-x}\sin 2x$

וריאציית פרמטרים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

1) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$

2) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$

3) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$

4) $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x}\quad;\quad y(1)=0\,,\ y'(1)=0$

5) $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

6) $y''+4y=\sec 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\cdot x+\sin x\cdot\ln|\sin x|$

2) $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\dfrac{x^2}{2}\left[\ln x-\dfrac{1}{2}\right]+x^2e^{-2x}[\ln x-1]$

3) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-e^{-x}\left[\dfrac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^5}{5}-\dfrac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}\right]+xe^{-x}\left[2(x+1)^{3/2}\right]$

4) $y=e^{x}-xe^{x}+xe^{x}\ln x\quad(x>0)$

5) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)+e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(1+e^{-x}\right)\right]$

6) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\sin 2x\cdot x$

השיטה האופרטורית

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

בשאלות אלו הסימון הוא: $ay''+by'+cy=Q(x) \iff (aD^2+bD+c)y=Q(x)$.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $(D^2-D-2)y=4e^{-2x}+10e^{x}+11$

2) $(D^2-2D+1)y=10e^{4x}+e^{x}-1$

3) $(D^2+D-2)y=4e^{x}+e^{10x}+14$

4) $(D^2+4)y=\sin 5x$

5) $(D^2-4)y=\sin x\cos x\cos 2x$

6) $(D^2+D-2)y=\cos x-3\sin x$

7) $(D^2+2D-3)y=2\cos x\cos 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+e^{-2x}-5e^{x}-5.5$

2) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+\frac{10}{9}e^{4x}+x^2e^{x}-1$

3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-4xe^{x}+\frac{1}{72}e^{10x}+7$

4) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{1}{21}\sin 5x$

5) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\frac{1}{80}\sin 4x$

6) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+\sin x$

7) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}+\frac{1}{10}\sin x-\frac{1}{5}\cos x+\frac{1}{30}\sin 3x-\frac{1}{15}\cos 3x$

משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

שאלות

1) פתרו $y''+\tan x\cdot y'-\left(2\tan x+4\right)y=0$, כאשר ידוע $y_1\left(x\right)=e^{2x}$.

2) פתרו $\left(1-x^2\right)y''+2xy'-2y=0$.

3) הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$\left(1-x\right)y''+x\cdot y'-y=2\left(1-x\right)^2e^{-x}\quad,\left(0<x<1\right),$$

כאשר ידוע ש- $y_1\left(x\right)=e^x$, פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}\left(\sin x-4\cos x\right)$

2) $y=c_1x+c_2\left(x^2+1\right)$

3) שאלת הדגמה.

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

1) האם ייתכן כי $y_1(x)=e^x,\ \ y_2(x)=\sin x$, הם שני פתרונות של המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, עם מקדמים רציפים בקטע $[0,\pi]$?

2) הראו כי הפונקציות $y_1(x)=\sin x^2,\ \ y_2(x)=\cos x^2$ הן פתרונות בת״ל של המשוואה $xy''-y'+4x^3y=0$, בקטע $(-4,\infty)$.
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x=0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?

3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x)=xe^x,\ \ y_2(x)=e^{-x}$,
הן פתרונות של המשוואה $y''-\frac{2}{1+2x}y'-\frac{2x+3}{1+2x}y=0$, בקטע $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.
האם הפונקציות הללו בת״ל בקטע?

4) נתונות שתי פונקציות $y_2=|x^3|$, $y_1=x^3$, בקטע $[-4,4]$.
א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות ליניארית בקטע.
ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד״ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד״ר $xy''-2y'=0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?

5) ענו על הסעיפים הבאים:
א. יהיו $y_1(x)\ ,\ \ y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I,
ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I.
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)\ ,\ \ y_2(x)$ הם פתרונות שלה.
ב. רשמו משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x>0$, שהפונקציות $y_1(x)=x^2\ ,\ \ y_2(x)=x^4$, הן פתרונות שלה.

6) נתון כי $y_1(x),\ y_2(x)$, הם פתרונות של המד"ר $y''(x)+p(x)y'+q(x)=0$,
בקטע I , כאשר p, q רציפות בקטע I .
הראו כי אם קיימת נקודה c בקטע I , שעבורה $y_1(c)=y_2(c)=0$,
אז $\{y_1(x), y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

תשובות סופיות

1) לא.

2) $W=-2x$

3) כן.

4) א. $W=0$ ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.

5) א. שאלת הוכחה . ב. $y''-\frac{5}{x}y'+\frac{8}{x^2}y=0$

6) שאלת הוכחה.

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 21 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

קווים ותחומים במישור

שאלות

1) שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x^2\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,x\le y\le 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x-1\le y\le 2x+1\}$

ב. $S=\{(x,y)\,||\,y-2x\,|\le 1\}$

ג. $S=\{(x,y)\,||\,x\,|+y<4\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|(x+y)^2\le 4\ ,\ x>1\}$

3) מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים:

א. $x^2+y^2-2x-3=0$

ב. $x^2+y^2-8y=-15$

ג. $x^2+y^2+2x+4y=0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad -\frac{3}{5}\le x\le \frac{3}{5}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=2+\sqrt{1-(x-3)^2}$

ב. $y=2-\sqrt{-x^2+6x-8}$

ג. $x\ge 3.5,\quad x=4-\sqrt{1-y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>4\right\}$

ה. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ו. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le\sqrt{4-y^2}\right\}$

ז. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ח. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ y\ge 0\right\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-2x+4y+1\le 0\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y+1\le\sqrt{1-x^2}\right\}$

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\;\; x\le y\le 2x\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\; y\ge x\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le \sqrt{25-x^2}\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\; y\ge x^2\right\}$

ה. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le \sqrt{4-x^2}\right\}$

ו. $S=\left\{(x,y)\,||\,x-1|\le y\le \sqrt{1-(x-1)^2}\right\}$

10) נתונה המשוואה $25x^2+4y^2-50x+16y=59$.

א. הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.

ב. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.

ג. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.

ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?

ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,4x^2+y^2+8x-4y+4\ge 0\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}y+1\le x\le \frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\le y\le -x^2\right\}$

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le 2-x^2\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,-2\le y\le -x^2\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,y^2-2\le x\le -y^2\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,y^2\le x\le 1-y\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$

ב. $\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ \ x^2+y^2\le 16\right\}$

ג. $\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ \ y\ge \frac{1}{4}x^2\right\}$

ד. $\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1,\ \ x^2+y^2\ge 4\right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית

שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $x=t^2+1,\ \ y=t^2$ $t\ge 0$

ב. $x=\sin t,\ \ y=\cos^2 t$ $0\le t\le \pi$

ג. $x=\cos t,\ \ y=4\sin t$ $\pi\le t\le 2\pi$

2) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t, מצאו משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x=t-4\ \ ,y=t^2$

ב. $x=-4+\cos t\ \ ,\ y=1+2\sin t$

ג. $x=4\cos^3 t\ \ ,\ y=4\sin^3 t$

ד. $x=t(t+1)+1\ \ ,y=t(0.5t+1)+1$

ה. $x=\dfrac{20t}{4+t^2}\ \ ,\ y=\dfrac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x=ke^t+ke^{-t}\ \ ,\ y=ke^t-ke^{-t}$ (k קבוע).

3) נתון המעגל $x^2+y^2=8$.

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה $A(2,2)$ לנקודה $B(-2,-2)$.

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום D, המוגבל מעל הישר AB ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום E, המוגבל בין המעגל הנתון למעגל $x^2+y^2=16$.

4) נתונים שני מעגלים $(x-8)^2+(y-4)^2=25$ ו- $x^2+y^2=25$.

א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתחום הכלוא בכל אחד מהמעגלים.

ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, A ו- B, ותהי הנקודה A בעלת ערך ה- y הגדול יותר.
מצאו את ההצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין A לבין B.
הפרידו לשני מקרים.

ג. מצאו הצגה אלגברית לתחום החסום בין שני המעגלים.

5) נתונות משוואות של שתי אליפסות: $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$.

א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצגתן הפרמטרית.

ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.

ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות.
מצאו את ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

6) נתונה היפרבולה $4x^2-y^2=4$.

א. ההיפרבולה מורכבת משתי מסילות.
מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ב. הציגו באופן פרמטרי את התחום המוגבל בין ההיפרבולה לבין האסימפטוטות שלה.

7) נתונה המשוואה $3x^2-y^2=3$.

א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.

ב. הקו מסעיף א' מורכב משתי מסילות.
מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ג. המסילה C היא חלק של הקו הנתון מהנקודה $A(-2,-3)$ לנקודה $B(-1,0)$.
כתבו את C בצורה פרמטרית.

ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C.

8) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

9) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 10t \\ z = 4\cos t \end{cases}$ $-\pi \le t \le 2\pi$.

תשובות סופיות

1) א. $y=x-1,\ x\ge 1$ ב. $y=1-x^2, -1\le x\le 1$

ג. $x^2+\frac{y^2}{16}=1,\ -1\le x\le 1, y\le 0$

2) א. $y=(x+4)^2$ ב. $(x+4)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2=1$ ג. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2-4xy+4y^2=2y-1$ ה. $x^2+y^2=25$ ו. $x^2-y^2=4k^2$

3) א. $\begin{cases} x(t)=\sqrt{8}\cos t \\ y(t)=\sqrt{8}\sin t \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ ב. $\begin{cases} x(t)=\sqrt{8}\cos t \\ y(t)=\sqrt{8}\sin t \end{cases}$ $\frac{\pi}{4}\le t\le \frac{5\pi}{4}$

ג. $\begin{cases} x(u,v)=\sqrt{8}u\cos v \\ y(u,v)=\sqrt{8}u\sin v \end{cases}$ $0\le u\le 1,\ \frac{\pi}{4}\le v\le \frac{5\pi}{4}$

ד. $\begin{cases} x(u,v)=u\cos v \\ y(u,v)=u\sin v \end{cases}$ $\sqrt{8}\le u\le 4,\ 0\le v\le 2\pi$

4) א. המעגל $x^2+y^2=25$: מרכז: $(0,0)$. רדיוס: 5.

הצגה פרמטרית של המעגל: $0\le t\le 2\pi$ $\begin{cases} x(t)=5\cos t \\ y(t)=5\sin t \end{cases}$

הצגה פרמטרית של העיגול: $0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2\pi$ $\begin{cases} x(u,v)=5u\cos v \\ y(u,v)=5u\sin v \end{cases}$.

המעגל $(x-8)^2+(y-4)^2=25$: מרכז: $(8,4)$. רדיוס: 5.

הצגה פרמטרית של המעגל: $0\le t\le 2\pi$ $\begin{cases} x(t)=8+5\cos t \\ y(t)=4+5\sin t \end{cases}$.

הצגה פרמטרית של העיגול: $0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2\pi$ $\begin{cases} x(u,v)=8+5u\cos v \\ y(u,v)=4+5u\sin v \end{cases}$.

ב. מקרה 1: $0\le t\le \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$, $\begin{cases} x(t)=5\cos t \\ y(t)=5\sin t \end{cases}$,

מקרה 2 - $\pi\le t\le \arctan\left(\frac{4}{3}\right)+\pi$, $\begin{cases} x=8+5\cos t \\ y=4+5\sin t \end{cases}$.

ג. $\left\{(x,y)\mid -\sqrt{25-(y-4)^2}+8\le x\le \sqrt{25-y^2}\right\}$

5) א. $\begin{cases} x(t)=2\cos t,\ \ y(t)=\sqrt{2}\sin t \quad 0\le t\le 2\pi \\ x(t)=\sqrt{2}\cos t,\ \ y(t)=2\sin t \quad 0\le t\le 2\pi \end{cases}$

ב. $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right), C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right), D\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

ג. המסילה DA: $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le t \le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos t \\ y(t)=2\sin t \end{cases}$.

המסילה BC : $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi \le t \le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi$ $\begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos t \\ y(t)=2\sin t \end{cases}$.

המסילה AB : $\arctan\left(\sqrt{2}\right) \le t \le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+\pi$ $\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$.

המסילה CD : $\arctan\left(\sqrt{2}\right)+\pi \le t \le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+2\pi$ $\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$.

ד.

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

$$D_1 : \begin{cases} x(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=2\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$

$$0 \le \mathbf{u} \le 1,\ \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le v \le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_3 : \begin{cases} x(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=2\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$

$$0 \le \mathbf{u} \le 1,\ \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi \le v \le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi$$

$$D_2 : \begin{cases} x(u,v)=2\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$

$$0 \le \mathbf{u} \le 1,\ \arctan\left(\sqrt{2}\right) \le v \le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+\pi$$

$$D_4 : \begin{cases} x(u,v)=2\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$

$$0 \le \mathbf{u} \le 1,\ \arctan\left(\sqrt{2}\right)+\pi \le v \le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+2\pi$$

6) א. אלגברית: ימנית $x=\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}$, שמאלית $x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}$.

פרמטרית: ימנית $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=\cosh t \\ y=2\sinh t \end{cases}$, שמאלית: $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=-\cosh t \\ y=2\sinh t \end{cases}$.

$$D=D_1\cup D_2$$

ב. $0\le u\le 1,\ v\in\mathbb{R}$ $\quad D_1:\begin{cases} x(u,v)=u\cosh v \\ y(u,v)=2u\sinh v \end{cases}$

$0\le u\le 1\ \ v\in\mathbb{R}$ $\quad D_2:\begin{cases} x(u,v)=-u\cosh v \\ y(u,v)=2u\sinh v \end{cases}$

7) א. היפרבולה. ב. אלגברית: ימנית $x=\sqrt{1+\frac{y^2}{3}}$, שמאלית $x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{3}}$.

פרמטרית: ענף ימני $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=\cosh t \\ y=\sqrt{3}\sinh t \end{cases}$ וענף שמאלי $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=-\cosh t \\ y=\sqrt{3}\sinh t \end{cases}$.

ג. $\ln(2-\sqrt{3})\le t\le 0$ $\quad C:\begin{cases} x=-\cosh t \\ y=\sqrt{3}\sinh t \end{cases}$ $\quad$ ד. 1

8) 8

9) $6\pi\sqrt{29}$

קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1,-1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10,-\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0,-4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2,2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $4x-x^2=1+xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r=-4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $x^2+y^2=4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x=10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y=4$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $r=4$ לקואורדינטות קרטזיות.

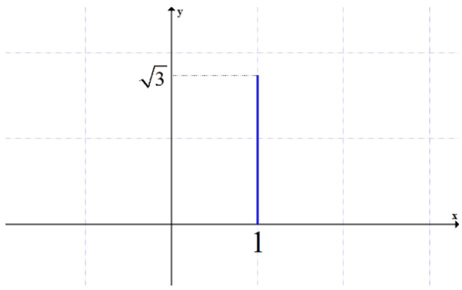
ב. המירו את המשוואה $\theta=\pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשואה $r=2\cos\theta+4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

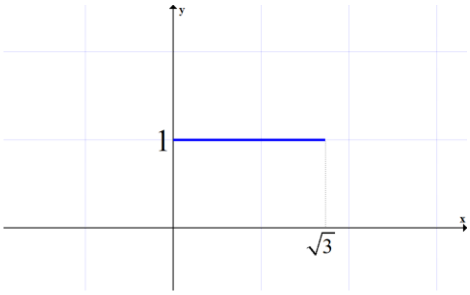
ד. המירו את המשוואה $6r^3\sin\theta=4-\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

6) להלן שני איורים, שבכל אחד מהם קו.
כתבו כל אחד מהקווים בהצגה פולרית.

איור א



איור ב



7) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל.
כתבו אותו בהצגה פולרית.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2},\ -\frac{3}{5}\le x\le \frac{3}{5}$

8) בסעיפים א-ג הוכיחו שכל אחד מהקווים מתאר חלק ממעגל.
שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א. $y=\sqrt{4-(x-2)^2}$

ב. $x=-\sqrt{6y-y^2}$

ג. $y=-1+\sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מתאים.
מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le \sqrt{4-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$

10) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ y\ge 0\}$

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le y\le 2x\}$

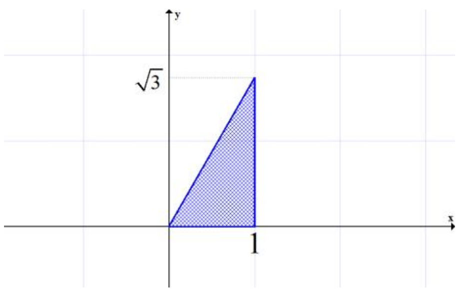
ב. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\}$

12) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$.

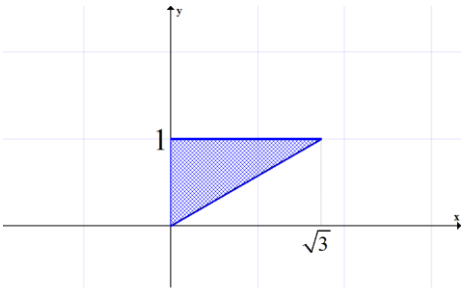
13) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le\sqrt{8x-x^2}\right\}$.

14) להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור א



איור ב



תשובות סופיות

1) א. $(x,y)=\left(2,2\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$

2) א. $(x,y)=\left(5,-5\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$ ג. $(r,\theta)=\left(\sqrt{8},\frac{3\pi}{4}\right)$

3) א. $4r\cos\theta-r^2\cos^2\theta=1+r\cos\theta\cdot r\sin\theta$ ב. $(x+2)^2+y^2=2^2$

4) א. $r=4\sin\theta$ ב. $r\cos\theta=10$ ג. $r\sin\theta=4$

5) א. $x^2+y^2=4^2$ ב. $y=x$ ג. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

ד. $6\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\cdot y=4\sqrt{x^2+y^2}-x$

6) א. $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ $r=\frac{1}{\cos\theta}$ ב. $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ $r=\frac{1}{\sin\theta}$

7) א. $\begin{cases}r=1\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}r=1\\\pi\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}r=1\\-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

ד. $\begin{cases}r=1\\\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ ה. $\begin{cases}r=1\\0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$ ו. $\begin{cases}r=1\\\arctan\frac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)+\pi\end{cases}$

8) א. $r=4\cos\theta,\ 0\le\theta\le0.5\pi$ ב. $r=6\sin\theta,\ 0.5\pi\le\theta\le\pi$

ג. $\begin{cases}r=-2\sin\theta\\\pi\le\theta\le1.25\pi\ or\ 1.75\pi\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ד. $r=-\frac{1}{\sin\theta},\ 1.25\pi\le\theta\le1.75\pi$

9) א. $\begin{cases}0\le r\le2\\0\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}0\le r\le2\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}0\le r\le2\\0.5\pi\le\theta\le1.5\pi\end{cases}$

10) א. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le0.5\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}1\le r\le2\\-0.5\pi\le\theta\le0.5\pi\end{cases}$ *or* $\begin{cases}1\le r\le2\\1.5\pi\le\theta\le2.5\pi\end{cases}$

ד. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$

11) א. $1\le r\le2$, $0.25\pi\le\theta\le\arctan2$ ב. $0\le r\le2,\ 0.25\pi\le\theta\le1.25\pi$

12) $\frac{25}{7\sin\theta-\cos\theta}\le r\le5$

$\arctan\frac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi$

13) $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le 8\cos\theta$

14) א. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ $0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta}$ ב. $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ $0 \le r \le \frac{1}{\sin\theta}$

משטחים במרחב

שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות **3-1**:

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$

2) $z=5x^2+1.25y^2$

3) $20x^2+45y^2=180+36z^2$

4) זהו ושרטטו את המשטחים הבאים:

א. $z=4x^2+y^2+1$

ב. $z=3-x^2-y^2$

5) זהו כל אחד מהמשטחים הבאים:

א. $25x^2+100y^2+4z^2=100$

ב. $25x^2+4y^2-50x-16y-100z+41=0$

ג. $x^2+4y^2-4z^2+80z-404=0$

6) מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2+y^2+z^2=169$ לבין המשטח $z=12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

7) נתון המשטח $2x^2+2y^2+2z^2-16x-4y+40z+206=0$.

א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+14}{2}$.

8) מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2+y^2+(z-10)^2=24$ ו- $x^2+y^2+z^2=64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

9) נתון המשטח $36z^2+4x^2-9y^2=36$.

א. זהו את המשטח ושרטטו אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

10) נתונים שני משטחים : $R:\ x^2-y^2+2z^2=3,\ \ Q: 2x^2-y^2+z^2=3$.
   א. זהו את המשטחים ושרטטו אותם.
   ב. הראו כי החיתוך בין R ו- Q הוא שתי מסילות , כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.
   ג. המסילה C היא חלק של החיתוך בין R ל- Q. נתון כי $A(-2,-3,2)$ היא נקודת התחלה של C ו- $B(-1,0,1)$ היא נקודת סיום של C.
   כתבו את C בצורה פרמטרית.
   ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C.

- **בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.**

תשובות סופיות

1) אליפסואיד.
2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
3) היפרבולואיד חד יריעתי.
4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.
   ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.
5) א. אליפסואיד.
   ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.
   ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.
6) החיתוך הוא מעגל $x^2+y^2=25$, שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.
7) א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.
   נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12),\ B\left(\frac{59}{9},-\frac{2}{9},-\frac{112}{9}\right)$.
8) החיתוך הוא המעגל $x^2+y^2=15$, שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.
9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y.
   ב. $\ell_1: (x,y,z)=(3t,2t,1)\quad \ell_2: (x,y,z)=(3,2t,t)$
10) א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי. ב. $z=-x, z=x$
   ג. $\ln(2-\sqrt{3})\le t\le 0 \quad C:\ x=-\cosh t,\ y=\sqrt{3}\sinh t,\ z=\cosh t$ ד. $\sqrt{2}$

גופים במרחב

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge 0\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ה. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\le 0\}$

ו. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le 0\right\}$

ז. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4,\ 0\le z\le 3\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2},\ x\ge 0, y\ge 0\right\}$

ג. $D=\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$

ד. $D=\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x\ge 0, z\ge 0,\ 0\le y\le x\}$

ה. $V=\left\{(x,y,z)\,|\ 1\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$

ו. $V=\left\{(x,y,z)\,|\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge\sqrt{3(x^2+y^2)}\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{3(x^2+y^2)}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\ ,\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le y\le 3,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+z^2\le 4\}$

ה. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x\ge 0, y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 36,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1\right\}$

4) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ \ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$

5) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x^2+y^2\le 1\right\}$

ב. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2\le 1\right\}$

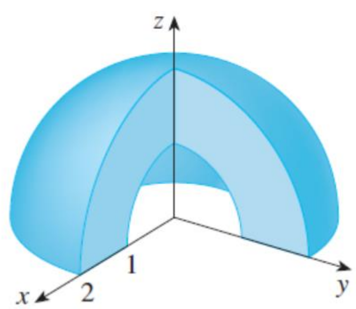
ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ x\ge 0, y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}$

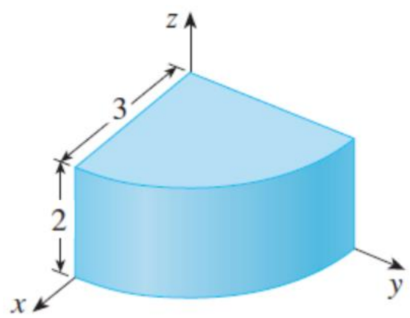
ה. $U=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 10-y,\ \ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף V במרחב.
תארו במילים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית $V=\{(x,y,z)\,|\,...\}$.

א.



ב.



7) נתונים המשטחים $z=x^2+y^2$ ו- $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

8) נתונים שני משטחים: $z=x^2+y^2+z^2$ ו- $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית $V=\{(x,y,z)\mid\ ?\le z\le ??\}$.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

9) תחומים תלת-ממדיים M ו- N נתונים על ידי
$$M:\ x^2-y^2+2z^2\le 3$$
$$N: 2x^2-y^2+z^2\le 3$$.

תחום תלת-ממדי W הוא החיתוך בין M ל- N.
שרטטו את D, החיתוך של W עם המישור $y=1$ (במערכת צירים xz),
וכתבו את D בהצגה פרמטרית.

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר GooL.co.il

קואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $z=3$

ב. $z=4x^2+4y^2$

ג. $x^2+y^2=4$

2) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $x^2+y^2+z^2=9$

ב. $2x+3y+4z=1$

ג. $x^2=16-z^2$

ד. $z=\sqrt{x^2+y^2}$

3) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת גלילית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.

א. $r=3$

ב. $z=r^2$

ג. $z=r$

ד. $\theta=\frac{\pi}{4}$

ה. $r=4\sin\theta$

ו. $r^2\cos 2\theta=z$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א. $r=3$

ב. $\theta=\frac{\pi}{3}$

ג. $\phi=\frac{\pi}{4}$

ד. $r=2\sec\phi$

ה. $r=4\cos\phi$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $r\sin\phi=1$

ב. $r\sin\phi=2\cos\theta$

ג. $r-2\sin\phi\cos\theta=0$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le \sqrt{6-x^2-y^2}\right\}$

7) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ \ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x^2+y^2\le 1\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2\le 1\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $U=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 10-y,\ \ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

תשובות סופיות

1) א. מערכת גלילית: $z=3$. מערכת כדורית: $r=\dfrac{3}{\cos\phi}$. שם המשטח: מישור.

ב. מערכת גלילית: $z=4r^2$. מערכת כדורית: $r=\dfrac{\cos\phi}{4\sin^2\phi}$.

שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת גלילית: $r=2$. מערכת כדורית: $r=\dfrac{2}{\sin\phi}$. שם המשטח: גליל.

2) א. מערכת גלילית: $r^2+z^2=9$. מערכת כדורית: $r=3$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת גלילית: $r(2\cos\theta+3\sin\theta)+4z=1$.

מערכת כדורית: $r(2\cos\theta\sin\phi+3\sin\theta\sin\phi+4\cos\phi)=1$.

שם המשטח: מישור.

ג. מערכת גלילית: $r^2\cos^2\theta+z^2=16$. מערכת כדורית: $r^2(1-\sin^2\theta\sin^2\phi)=16$.

שם המשטח: גליל.

ד. מערכת גלילית: $z=r$. מערכת כדורית: $\phi=\dfrac{\pi}{4}$. שם המשטח: חרוט.

3) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2=9$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $z=x^2+y^2$. שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת קרטזית: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $y=x$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2+(y-2)^2=4$. שם המשטח: גליל.

ו. מערכת קרטזית: $z=x^2-y^2$. שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

4) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2+z^2=9$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת קרטזית: $y=\sqrt{3}x$. שם המשטח: מישור.

ג. מערכת קרטזית: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $z=2$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.

שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה $(0,0,2)$ ורדיוסה 2.

5) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2=1$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $(x-1)^2+y^2=1$. שם המשטח: גליל.

ג. מערכת קרטזית: $(x-1)^2+y^2+z^2=1$. שם המשטח: ספירה.

6) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\le z\le 2-r^2\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le\sqrt{2},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r^2\le z\le\sqrt{6-r^2}\right\}$

7) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le\sqrt{0.5},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r^2\le z\le 1-r^2\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 2\cos\theta,\ -0.5\pi\le\theta\le 0.5\pi,\ 0\le z\le 4-r^2\right\}$

8) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ -\sqrt{4-r^2}\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

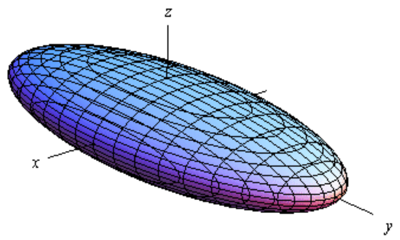
ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

ג. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

ד. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 10-r\sin\theta\right\}$

נספח – משטחים ממעלה שנייה

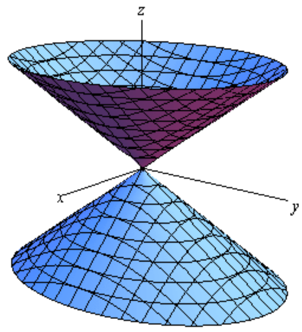
אליפסואיד



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

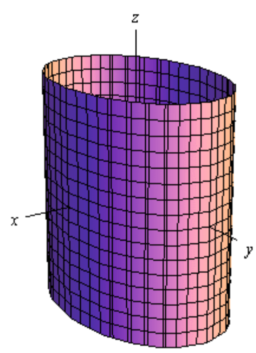


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

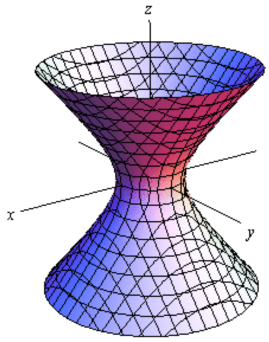


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

היפרבולואיד חד-יריעתי

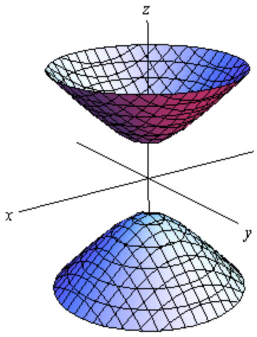


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

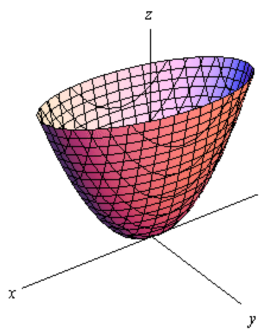


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

<u>תיאור</u>: למשטח זה אין חתך במישור xy; החתכים במישורים מקבילים למישור xy, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

פרבולואיד אליפטי



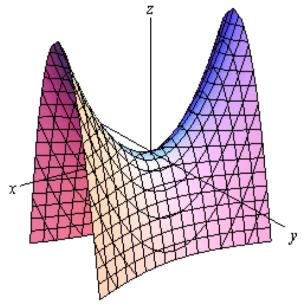
<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד היפרבולי



<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

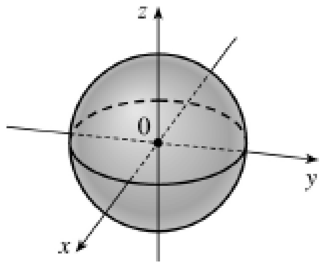
<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x.

החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

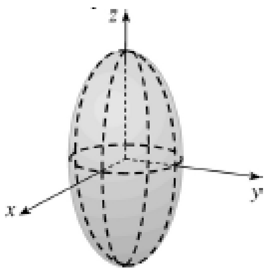
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

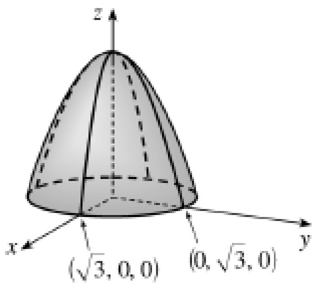
דוגמאות שונות



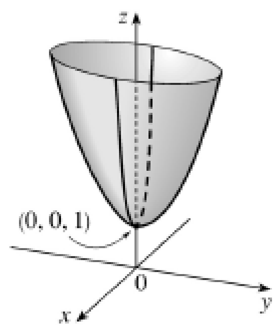
$x^2+y^2+z^2=1$



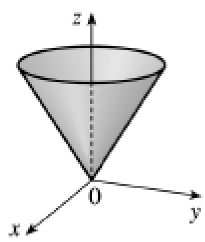
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



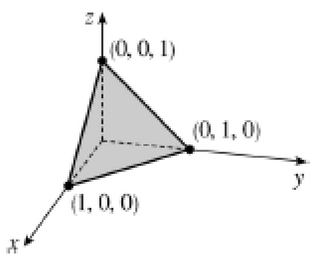
$z=3-x^2-y^2$



$z=4x^2+y^2+1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$x+y+z=1$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 22 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים

מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D.

1) $f(x,y)=\sqrt{5-x^2-y^2}+\ln(4y-x^2)$

2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3) $f(x,y)=\sqrt{-x^2+y^2+1}+\dfrac{x+y}{x-y}$

4) $g(x,y)=\sqrt{x+4y}+\sqrt{x-4y}$

5) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+4y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-4y}}$

6) $h(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y+4}}$

7) $f(x,y)=e^{xy}\sqrt{\ln\dfrac{4}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-4}$

8) $z(x,y)=\dfrac{4}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$

9) $z(x,y)=\ln\left(\dfrac{x-4y}{x+4y}\right)$

10) $f(x,y)=\ln\left[x\ln(y-4x)\right]$

11) $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$ (ענו על סעיף א בלבד)

12) $f(x,y)=\tan\frac{y}{x}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

13) $f(x,y)=\frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2\right)}{\ln\left(x^2+y^2-1\right)}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

תשובות סופיות

1) $D=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{1}{4}x^2\le y\le\sqrt{5-x^2}\right\}$

2) $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\ ,\ x>0\}$

3) $D=\{(x,y)\,|\,x^2-y^2\le 1\ ,\ y\ne x\}$

4) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x\le y\le\frac{1}{4}x\right\}$

5) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x< y<\frac{1}{4}x\right\}$

6) $D=\{(x,y)\,|\ -4\le y\le x^2-4\ ,\ x\ge 0\}$

7) $D=\{(x,y)\,|\ x^2+y^2=4\}$

8) $D=\{(x,y)\,|\ |x|+|y|<1\}$

9) $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{4}x<y<-\frac{1}{4}x\ or\ -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\right\}$

10) $D=\{(x,y)\,|\,[x<0\,\text{and}\,4x<y<4x+1]\text{ or }[x>0\text{ and }y>4x+1]\}$

11) $D=\{(x,y,z)\,|\,x>-4,y>1,z>0\}$

12) $D=\left\{(x,y)\in R^2\middle|x\ne 0,\ y\ne\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$

13) $D=\{(x,y)|\ 1<\ x^2+y^2\ne 2\ <4\}$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-6**, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

1) $f(x,y)=\frac{y}{x}$

2) $f(x,y)=\ln x+\ln y$

3) $f(x,y)=x^2+y^2$

4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

5) $f(x,y)=\ln(x^2-y)$

6) $f(x,y)=x\sqrt{y}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **7-10** שרטטו מפת קווי גובה:

7) $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$

8) $f(x,y)=e^{x-y}$

9) $f(x,y)=2\ln x+\ln y$

10) $f(x,y)=\min\{3x,y\}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **11-13**, שרטטו את קו הגובה k:

11) $f(x,y)=(x-y)^2$ $\quad (k=0,4)$

12) $f(x,y)=\min\left\{y-x^2,x+y\right\}$ $\quad (k=0,2)$

13) $f(x,y)=\begin{cases} x^2+3x-y-3 & x^2\geq y \\ -x^2+3x+y-3 & x^2<y \end{cases}$ $\quad (k=1)$

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} x^2-y & x\le 1 \\ 2x+y & x>1 \end{cases}$.

א. שרטטו את קו הגובה $f(x,y)=0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x,y)=C$ הוא קו רציף?
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

1) $x\neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .

2) $x>0, y>0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

3) כל המישור.

4) $x^2+y^2\le 1$, עיגול היחידה.

5) $y<x^2$

6) $y\ge 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר : GooL.co.il

משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2}-z$.
מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטטו אותו.

2) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z+x^2+y^2$.
מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטטו אותו.

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את משטחי הרמה :
א. $f(x,y,z)=4^{x+y-z}$
ב. $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$

4) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z^2-y^2-x^2$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

תשובות סופיות

1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0,0,-2)$ ורדיוסה 2.

2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,4)$ ונפתח כלפי מטה.

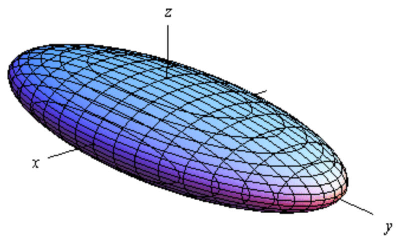
3) א. מישורים.
ב. משטח רמה k הוא פרבולואיד אליפטי,
שמרכזו בנקודה $(0,0,k)$ ונפתח כלפי מעלה.

4) עבור $k<0$ לא קיים משטח רמה k.
עבור $k=0$ נקודה $(0,0,0)$. עבור $k=1$ מישורים.
עבור $k>1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- y.
עבור $0<k<1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- z.

5) עבור $k<0$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $k=0$ חרוט אליפטי.
עבור $k<0$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

נספח – משטחים ממעלה שנייה

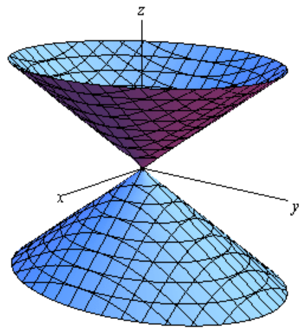
אליפסואיד



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

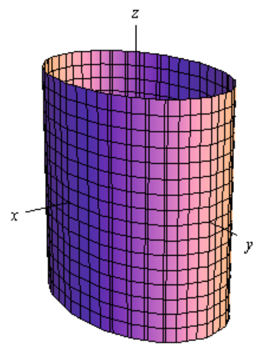


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי



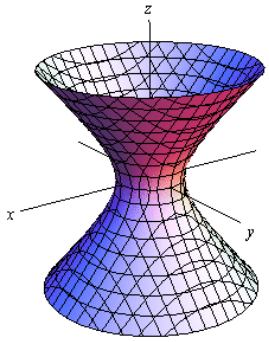
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

היפרבולואיד חד-יריעתי

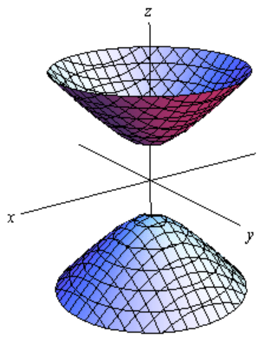


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

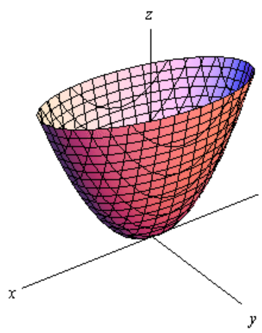


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy; החתכים במישורים מקבילים למישור xy, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

פרבולואיד אליפטי



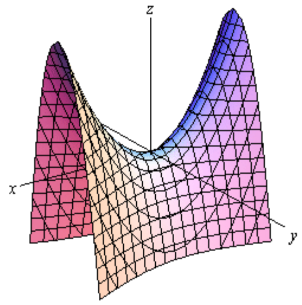
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד היפרבולי



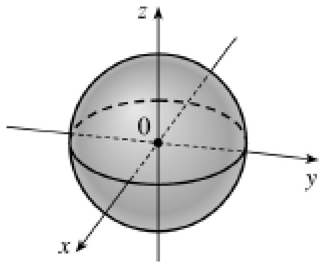
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x.
החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

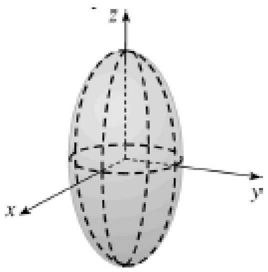
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

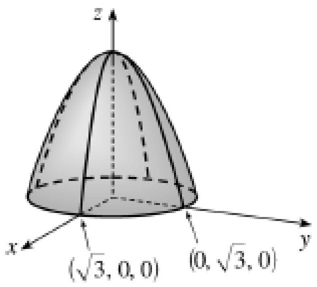
דוגמאות שונות



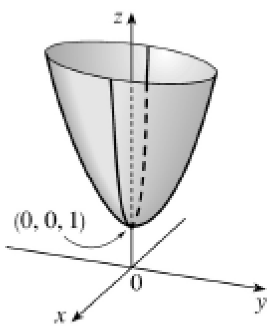
$x^2+y^2+z^2=1$



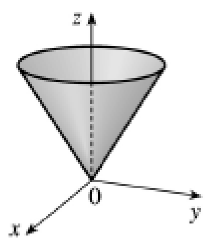
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



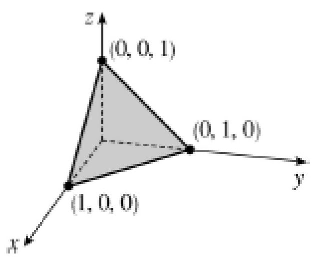
$z=3-x^2-y^2$



$z=4x^2+y^2+1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$x+y+z=1$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 23 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-9**:

1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3y)}{x^3y}$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{\sin(xy-6)}{x^2y^2-36}$$

3) $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)}$$

4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0^+)} (x^2+y)\ln(x^2+y)$$

5) $$\lim_{(x,y)\to(1^+,1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3}$$

6) $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4}$$

7) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

8) $$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin\left(x\left(y^2+z^2\right)\right)}{xy^2}$$

9) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$$

חשבו את הגבולות בשאלות **10-17**:

10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^4+y^2}$

11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}|y|^x$

12) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

13) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{y}$

14) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$

15) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y}{2x^6+y^2}$

16) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

17) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}}\frac{xyz}{x^2+y^4+z^4}$

חשבו את הגבולות בשאלות **18-25**:

18) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^2+y^2}$

19) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\frac{x-y}{x^2+yx+y^4}$

20) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

21) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

22) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}$

23) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^2y-5y^4}{x^2+4y^2}$

24) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}y\ln\left(x^2+y^2\right)$

25) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$

* בשאלות **18**, **20-23** ו-**25** מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

26) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y}{x^3+y^2}$.

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin\left(x^3y\right)}{x^3+y^2}$.

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{e^{x^3y}-1}{x^3+y^2}$.

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln\left(x^3y+1\right)}{x^3+y^2}$.

* קחו בחשבון שייתכן שהגבול הידוע לא ייתנן בגוף השאלה.

27) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sin x+\cos y)=1$.

28) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} x^2y=4$.

29) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 4}} 2x^2y=8$.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{12}$

3) 1

4) 0

5) אינסוף.

6) $\frac{1}{2}$

7) 2

8) 5

9) 0

10) – 17) אין לפונקציה גבול.

18) 0

19) 0

20) 0

21) 0

22) 3

23) 0

24) 0

25) 0

26) א-ד. 0

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות **1-3** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

1)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^3+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

בשאלות **4-5** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

4)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

5)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

6) נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+5y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, כאשר m קבוע.
עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

7) נתונה פונקציה ממשית רציפה $f=f(x)$, שאינה פונקציה קבועה,

ונגדיר פונקציה חדשה $g(x,y)\begin{cases} f\left(\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+5y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0,0)$?

8) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם $\lim\limits_{x\to0} f(x,y)=f(0,y)$ לכל y,

וגם $\lim\limits_{y\to0} f(x,y)=f(x,0)$ לכל x,

אז $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=f(0,0)$.

9) פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $|f(x,y)|\le\sin^2(x^4+y^4)$, לכל (x,y).

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

10) מה צריך להיות הערך של הקבוע k (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ k & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ תהיה רציפה בכל המרחב?

11) נתון כי:

לכל x מתקיים $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le|y_2-y_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה y).

לכל y מתקיים $|f(x_2,y)-f(x_1,y)|\le|x_2-x_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה x).

הוכיחו כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

12) הוכיחו או הפריכו:

נתון כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{(x-y)^2-100}}$.

ידוע כי $z(1,14)<0,\ \ z(14,1)>0$.

אז בתחום ההגדרה של z קיימת נקודה (c_1,c_2), כך ש- $z(c_1,c_2)=0$.

תשובות סופיות

1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0)=1$, הפונקציה תהיה רציפה.
2) הפונקציה רציפה.
3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
4) הפונקציה רציפה.
5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
6) עבור $m>1$ הפונקציה רציפה, ועבור $m\le 1$ הפונקציה לא רציפה.
7) הפונקציה לא רציפה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) $k=0$
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.

נוסחאות – גבולות

	$x \to -\infty$	$x \to 0$	$x \to \infty$
$y=\frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty}=0$	$\frac{1}{0^+}=\infty,\ \frac{1}{0^-}=-\infty$	$\frac{1}{\infty}=0$
$y=e^x$	$e^{-\infty}=0$	$e^0=1$	$e^\infty=\infty$
$y=\ln x$	$---$	$\ln(0^+)=-\infty$	$\ln(\infty)=\infty$
$y=\arctan x$	$\text{atan}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0)=0$	$\text{atan}(\infty)=\frac{\pi}{2}$
$y=a^x, a>1$ $y=a^x, 0<a<1$	$a^{-\infty}=0$ $a^{-\infty}=\infty$	$a^0=1$ $a^0=1$	$a^\infty=\infty$ $a^\infty=0$
$y=\sin x$	$---$	$\sin 0=0$	$---$
$y=\cos x$	$---$	$\cos 0=1$	$---$
$y=\frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y=\frac{\tan x}{x}$	$---$	1	$---$
$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$	e $---$	(from right) 1 e	e 1
$y=\sqrt{x}$ $y=\sqrt[3]{x}$	$---$ $-\infty$	$\sqrt{0^+}=0$ $\sqrt[3]{0}=0$	$\sqrt{\infty}=\infty$ $\sqrt[3]{\infty}=\infty$

Defined Limits:

$\infty\cdot\infty=\infty$, $\infty(-\infty)=-\infty$, $\infty+\infty=\infty$, $\infty\pm a=\infty$, $\infty\cdot(\pm a)=\pm\infty$, $\infty/(\pm a)=\pm\infty$

Undefined Limits:

$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 24 - נגזרות חלקיות דיפרנציאבליות

תוכן העניינים

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות **1-10** חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

1) $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

2) $f(x,y)=x^5\ln y$

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ (רק f_x).

4) $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot\left(2x+3y\right)$

5) $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

6) $f(x,y)=\sin\left(xy\right)$

7) $f(x,y)=\arctan(2x+3y)$

8) $f(r,\theta)=r\cos\theta$

9) $f(x,y,z)=xy^2z^3$

10) $f(u,v,t)=e^{uv}\sin(ut)$

11) נתון $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכיחו כי $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$.

12) נתון $f(x,y,z)=e^x\left(y^2-\dfrac{1}{z}\right)$.

חשבו $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

הערת סימון

$$\boxed{f=f(x,y)\ \Rightarrow\ f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\ ;\ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2}$$

תשובות סופיות

1) $f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2$ $f_y = -6x^2y + 3$

2) $f_x = 5x^4 \ln y$ $f_y = \dfrac{x^5}{y}$

3) $f_x = 2x\dfrac{y^4\left(\sqrt{y} + 5\ln y\right)}{y^2 + 5y + y^y}$

4) $f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3$ $f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2$

5) $f_x = \dfrac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{\left(x + y^2\right)^2}$ $f_y = \dfrac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{\left(x + y^2\right)^2}$

6) $f_x = \cos(xy) \cdot y$ $f_y = \cos(xy) \cdot x$

7) $f_x = \dfrac{2}{1 + (2x + 3y)^2}$ $f_y = \dfrac{3}{1 + (2x + 3y)^2}$

8) $f_r = \cos\theta$ $f_\theta = -r\sin\theta$

9) $f_x = y^2z^3$ $f_y = 2xyz^3$ $f_z = 3xy^2z^2$

10) $f_u = e^{uv}\left[v\sin ut + t\cos ut\right]$ $f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut$ $f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut$

11) שאלת הוכחה.

12) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0, -1, \dfrac{1}{2}\right) = -1, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0, -1, \dfrac{1}{2}\right) = -2, \quad \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0, -1, \dfrac{1}{2}\right) = 4$

הערת סימון

$$f = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{array}$$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות **1-14** חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

1) $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

2) $f(x,y)=x^4\ln y$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

4) $f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x+y)$

5) $f(x,y)=xy(x-y)$

6) $f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

7) $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$

8) $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$

9) $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

10) $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

11) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

12) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

13) $f(x,y)=\sin(10x+4y)$

14) $f(x,y,z)=xyz$

15) חשבון $f_{xy}^{'}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$.

16) חשבון $f_{xy}^{'}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

17) חשבון $f_{xy}^{'}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

18) נתון $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\ln y+x}$.

חשבון $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.

הערת סימון

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2 \\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22} \\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21} \end{array}$$

תשובות סופיות

1) $f_x = 8x - 2xy^2 + 4$, $f_{xx} = 8 - 2y^2$, $f_y = -2x^2y + 10$

$f_{yy} = -2x^2$, $f_{xy} = -4xy$, $f_{yx} = -4xy$

2) $f_x = 4x^3 \ln y$, $f_{xx} = 12x^2 \ln y$, $f_y = \dfrac{x^4}{y}$

$f_{yy} = -\dfrac{x^4}{y^2}$, $f_{xy} = \dfrac{4x^3}{y}$, $f_{yx} = \dfrac{4x^3}{y}$

3) $f_x = 3x^2 - 6y$, $f_{xx} = 6x$, $f_y = 3y^2 - 6x$

$f_{yy} = 6y$, $f_{xy} = 6$, $f_{yx} = -6$

4) $f_x = 3x^2 + 3 - 3y$, $f_{xx} = 6x$, $f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y$

$f_{yy} = 6y - 6$, $f_{xy} = -3$

5) $f_x = 2xy - y^2$, $f_{xx} = 2y$, $f_y = x^2 - 2xy$

$f_{yy} = -2x$, $f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y$

6) $f_x = 2\left[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0\right]$

$f_y = 2\left[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0\right]$

$f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$, $f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0]$

$f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$

7) $f_x = e^{xy}\left(xy + y^2 + 1\right)$, $f_y = e^{xy}\left(x^2 + xy + 1\right)$

$f_{xx} = e^{xy} \cdot y\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(y + 0 + 0\right) \cdot e^{xy}$, $f_{yy} = e^{xy} \cdot x\left(x^2 + xy + 1\right) + \left(0 + x\right) \cdot e^{xy}$

$f_{xy} = e^{xy} \cdot x\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(x + 2y\right) \cdot e^{xy}$

8) $f_x = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right)$, $f_y = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right)$

$f_{xx} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + \left(2x + 2\right)e^{x+y}$,

$f_{yy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right) + \left(2y + 2\right)e^{x+y}$

$f_{xy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + 2y \cdot e^{x+y}$

9) $f_x = e^{-x^2-y^2}\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right)$, $f_y = e^{-x^2-y^2}\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right)$

$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(-2x)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(2 - 6x^2 - 4y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right) + \left(4 - 2x^2 - 12y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(-4x \cdot 2y\right)e^{-x^2-y^2}$

10)

$$f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \qquad f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

$$f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} \qquad f_{yy} = \frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)}$$

11)

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad f_{xx} = \frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad f_{xy} = \frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

12)

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3} \qquad f_{xx} = \frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$f_{yy} = \frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3} \qquad f_{xy} = \frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

13)

$$f_x = 10\cos\left(10x+4y\right) \qquad f_{xx} = -100\sin\left(10x+4y\right)$$

$$f_y = 4\cos\left(10x+4y\right) \qquad f_{yy} = -16\sin\left(10x+4y\right)$$

$$f_{xy} = -40\sin\left(10x+4y\right) \qquad f_{yx} = -40\sin\left(10x+4y\right)$$

14)

$$f_x = yz \qquad f_{xx} = 0 \qquad f_{xy} = z \qquad f_{xz} = y$$

$$f_y = xz \qquad f_{yx} = z \qquad f_{yy} = 0 \qquad f_{yz} = x$$

$$f_z = xy \qquad f_{zx} = y \qquad f_{zy} = x \qquad f_{zz} = 0$$

15) -2

16) -1

17) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

18) $\dfrac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

2) מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

3) מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(y+x^2)^2}{y^2+x^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

4) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y\sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0,0)$ וחשבו אותן.

5) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.

ב. האם **הנגזרות החלקיות** של הפונקציה רציפות בנקודה $(0,0)$?

6) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

א. בדקו האם $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0,0)$?

ג. האם $f_{yxyxyxy}(1,4)=f_{xyxyxyx}(1,4)$.

הערה

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

תשובות סופיות

1) א. $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$ ב. לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2) $f_x(0,0)=1$, $f_y(0,0)=0$

3) $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

5) א.

$$f_x(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2y^5+4x^2y^3-2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

ב. לא רציפות.

6) א. $f_{yx}(0,0)=1 \neq f_{xy}(0,0)=-1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0,0)$. ג. כן.

דיפרנציאביליות

שאלות

בשאלות **1-4** בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

1)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2)
$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x+y}{y+4x} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

5) בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

6) נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, m קבוע.

א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

7) נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^m} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, m קבוע.

א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?

ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

8) תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

נגדיר פונקציה חדשה $\phi(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & xy\geq 0\\ 0 & xy<0\end{cases}$.

נתון $f_x(0,0)=f_y(0,0)=f(0,0)=0$.

הוכיחו ש- ϕ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

9) בדקו דיפרנציאביליות $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{z\sin(xy)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{3}}} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0,0)$.

10) נתונה $f:R^n\to R$, המוגדרת על ידי $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+\|x\|^2}-1}{\|x\|^2} & x\neq 0\\ 0.5 & x=0\end{cases}$.

האם f דיפרנציאבילית בנקודה $x=0$?

תשובות סופיות

1) לא דיפרנציאבילית.
2) דיפרנציאבילית.
3) לא דיפרנציאבילית.
4) לא דיפרנציאבילית.
5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
6) א. $m>1$ ב. $m>0$ ג. $m>2$
7) א. $m<1$ ב. לכל m ג. $m<0.5$
8) שאלת הוכחה.
9) דיפרנציאבילית.
10) כן.

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 25 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

1) נתון: $z=\ln(x^2-y^2)$, $x=2u-v,\ y=u^2+v^2$.
חשבו: $z_u,\ z_v$.

2) נתון: $z=e^{u-v}$, $v=4t+k,\ u=t^2+4m$.
חשבו: $z_t,\ z_m,\ z_k$.

3) נתון: $z=f(x^2-y^2)$.
הוכיחו: $y\cdot z_x+x\cdot z_y=0$.

4) נתון: $z=f(xy)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x-y\cdot z_y=0$.

5) נתון: $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x+y\cdot z_y=0$.

6) נתון: $z=f(x-y,y-x)$.
הוכיחו: $z_x+z_y=0$.

7) נתון: $w=f(x-y,y-z,z-x)$.
הוכיחו: $w_x+w_y+w_z=0$.

8) נתון: $u=\sin x+f(\sin y-\sin x)$.
הוכיחו: $u_x\cos y+u_y\cos x=\cos x\cos y$.

9) נתון: $z=y\cdot f(x^2-y^2)$.

הוכיחו: $\frac{1}{x}z_x+\frac{1}{y}z_y=\frac{z}{y^2}$.

10) נתון: $z=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

הוכיחו: $x\cdot z_x+y\cdot z_y=xy+z$.

11) נתון: $u(x,y,z)=x^2\cdot f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$.

הוכיחו: $xu_x+yu_y+zu_z=2u$.

12) נתון: $h(x,y)=f(y+ax)+g(y-ax)$.

הוכיחו: $h_{xx}=a^2\cdot h_{yy}$.

13) נתון: $u(x,y)=f(e^x\sin y)-g(e^x\sin y)$.

הוכיחו:

א. $u_{xx}+u_{yy}=\frac{u_{xx}-u_x}{\sin^2 y}$

ב. $u_{xy}=u_{yx}$

ג. חשבון את $u_{xy}(1,\pi)$, אם ידוע ש- $f'(0)=2,\quad g'(0)=1$.

14) נתון: $u=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

א. הוכיחו: $(u_x)^2+(u_y)^2=(u_r)^2+\frac{1}{r^2}(u_\theta)^2$.

ב. הוכיחו: $u_{rr}=f_{xx}\cos^2\theta+2f_{xy}\cos\theta\sin\theta+f_{yy}\sin^2\theta$.

ג. הוכיחו: $f_{xx}+f_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{1}{r}u_r$.

15) נתון $z=h(u,v)$, ונתון כי $v=g(x,y)$, $u=f(x,y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_x=v_y \ , \ u_y=-v_x$.

הוכיחו כי:

א. u,v מקיימות את משוואת לפלס.

כלומר, $u_{xx}+u_{yy}=0$ וכן $v_{xx}+v_{yy}=0$.

ב. $h_{xx}+h_{yy}=\left((u_x)^2+(v_x)^2\right)(h_{uu}+h_{vv})$

16) נתון: $u=f(x,y), \quad x=r\cosh s, \quad y=r\sinh s$.

הוכיחו כי: $(u_x)^2-(u_y)^2=(u_r)^2-\frac{1}{r^2}(u_s)^2$.

17) פונקציה $f(x,y)$ תיקרא הומוגנית מסדר n, אם $f(tx,ty)=t^n\cdot f(x,y)$.

הוכיחו כי אם f הומוגנית, אז:

א. $x\cdot f_x+y\cdot f_y=n\cdot f(x,y)$

ב. $x^2 f_{xx}+y^2 f_{yy}+2xyf_{xy}=n(n-1)\cdot f(x,y)$

18) נתונה הפונקציה $z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ב. נתון $x=2t, y=t$.

חשבו את $z'(0)$ באופן ישיר.

ג. נתון $x=2t, y=t$.

חשבו את $z'(0)$ לפי כלל השרשרת.

ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

תשובות סופיות

1) $z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2}(-2y) \cdot 2u$

2) $z_t = e^{u-v}(1) \cdot 2t + e^{u-v}(-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1}(1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v}(-1) \cdot 1$

13) ג. $-e$

18) א. $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ ב. $\frac{4}{5}$ ג. 0 ד. לא דיפרנציאבילית.

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 26 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות

1) תהי $f(x,y)=x^2+y^2$.

א. חשבון את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3,4)$.
מהי משמעות התוצאה?

ב. הראו שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f , העובר דרך $(3,4)$.

2) תהי $f(x,y)=3x^2y$.
חשבון את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$.

3) תהי $f(x,y)=x-\sin(xy)$.
חשבון את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

4) תהי $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$.
חשבון את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היחידה,
היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר ה- x .

5) תהי $f(x,y)=xy^2$.
חשבון את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,3)$ בכיוון לנקודה $(4,5)$.

6) תהי $f(x,y,z)=x^2y^2z$.
חשבון את הנגזרת המכוונת של f , בנקודה $(2,1,4)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=1\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{j}+2\cdot\mathbf{k}$.

7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x,y) , נתון על ידי $V=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,
מצאו את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3,4)$ בכיוון לנקודה $(2,6)$.

8) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$
בנקודה $(0,0)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

9) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)=2x^3y-3y^2z$,
בנקודה $(1,2,-1)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x,y,z)=3x^2-5y^2+2z^2$, ואני נמצא
בנקודה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

11) נתונה הפונקציה $f(x,y)=4x^2y$.

א. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$,
בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$,
בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- y .

ג. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1,2)$,
בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=x^2yz^4$.
מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2,-1)$,
בכיוון וקטור היוצר זווית של $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x ,
ו- $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- z .
הניחו שהזווית עם ציר ה- y חדה.

13) נתונה הפונקציה $f(x,y)=xy^2-x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1,1)$.

א. חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה Q ,
בכיוון וקטור שיוצר זווית $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצאו וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=0$.

ג. האם קיים וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=6$?

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+4y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ג. חשבו את $\nabla f(0,0)$.

ד. בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ה. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0,0)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=(1,-1)$.

ו. הסבירו מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

15) הפונקציה $f(x,y,z)=2x^2+4y^2+z^2$, מתארת טמפרטורה בנקודה (x,y,z) .

א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2,4,1)$?

ב. אוסף הנקודות (x,y,z) , בהן הטמפרטורה שווה 20° ,
מהווה משטח מפורסם. מהו?

ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2,4,1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר.
באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?

ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$),
בנקודה $(2,4,1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר,
אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן.
באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

16) גֻּלָּה מוחזקת בנקודה $(2,1,14)$, שעל המשטח $z=20-x^2-2y^2$.
שחררו את הגֻּלָּה והיא התחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.

א. מהו המשטח הנתון?

ב. מצאו את הווקטור $\vec{u}=(a,b,c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֻּלָּה.

17) תהי $f=f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:

1. $f(x,x^2)=\dfrac{x^2}{2}+x^4$ לכל x .

2. הנגזרת המכוונת של $f(x,y)$, בנקודה $(1,1)$, בכוון הווקטור $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$,
שווה 1.

חשבו את הגרדיאנט של f בנקודה $(1,1)$.

18) נתונה $f = f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת $f\left(x,y,x^2+y^2\right)=2x+y$.

נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,2,4)=-\frac{5}{3}$, כאשר $\vec{u}=(-2,1,2)$.

חשבו את $\nabla f(0,2,4)$.

19) נתונה הפונקציה $f(x,y)=12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

א. חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8,1)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=(3,4)$.

ב. בדקו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

ג. חשבו $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, בכיוון וקטור $\vec{v}$, היוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ד. באיזה כיוון α , הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ תהיה מקסימלית? מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

20) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}+20x+21y & x\neq 0 \\ 21y & x=0 \end{cases}$.

א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)<m$, לכל וקטור יחידה $\hat{u}$?

ב. מצאו וקטור יחידה $\hat{u}$, המקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)=0$.

הערות סימון

1) במישור $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{j}=(0,1)$, $\mathbf{i}=(1,0)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:

$\vec{u}=(x,y)$ **או** $\vec{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$.

למשל: $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j} \iff \vec{u}=(3,4)$.

במרחב $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{k}=(0,0,1)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{i}=(1,0,0)$,

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v}=(x,y,z)$, **או** $\vec{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

למשל: $\vec{u}=3\cdot\mathbf{i}+4\cdot\mathbf{j}+5\cdot\mathbf{k} \iff \vec{u}=(3,4,5)$.

2) יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם $\underline{u}$ או $\mathbf{u}$.

3) וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

תשובות סופיות

1) א. הגרדיאנט $(6,8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.

2) $\frac{48}{5}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $7.5\sqrt{2}$

5) $3\sqrt{13}$ 6) $\frac{88}{3}$ 7) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1,1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.

9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור (12,14,-12) ושווה ל-22.

10) בכיוון הווקטור $(-2,2,-2)$.

11) א. $8\sqrt{3}+2$ ב. $8+2\sqrt{3}$ ג. $\ell:\ (1,2,4)+t\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},8+2\sqrt{3}\right)$

12) $\frac{1}{\sqrt{2}}-2$

13) א. $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ב. $\vec{u}=(5,1)$ (יש עוד). ג. לא.

14) א. הוכחה. ב. $f_x=1,\ f_y=0$ ג. $\nabla f(0,0)=(1,0)$
ד. לא דיפרנציאבילית. ה. 0

15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור $(8,32,2)$.
ד. בכיוון הווקטור $(8,32)$.

16) א. פרבולואיד. ב. $\vec{u}=(4,4,-32)$

17) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

18) $\nabla f(0,2,4)=(2,-3,1)$

19) א. $\frac{67}{5}$ ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12\left(\cos\alpha-\cos^3\alpha\right)^{\frac{1}{3}}$
ד. $\alpha=54.73^\circ$, $Max\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(0,0)=12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

20) א. $m>29$ ב. $\hat{u}=\left(21/29,-20,29\right)$ (יש אחרים).

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 27 - פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

1) מצאו את y', כאשר $x^2+y^5=xy+1$,
וחשבו את $y'(0)$.

2) מצאו את $y'(1)$, כאשר $e^{xy}+x^2y^2=5x-4$.

3) מצאו את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x+\ln y=1$.

4) נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$.
חשבו את $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0),\ \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$.

5) נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=-e^4$ $\left(y=y(x,z)\geq 0\right)$.
חשבו את $y_z(0,0),\ y_x(0,0)$.

6) נתונה המשוואה $x-y=x\cdot y\cdot f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)$.
הוכיחו כי $x^2\cdot z_x+y^2\cdot z_y=z^2$.

7) נתון $z^3-2xz+y=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$.
מצאו $z_{xx}(1,1)$.

8) נתונה משוואה $z^3-3xyz=4$ ונקודה $(2,1,-2)$. מצאו את:
א. $z_{xx}(2,1)$
ב. $z_{xy}(2,1)$
ג. $z_{yy}(2,1)$

9) נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases}$.

א. חשבו את u_x, v_x, u_y, v_y.

ב. הראו כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

10) נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases}$.

א. חשבו את $w_x,\ w_y$.

ב. חשבו $y_x,\ y_w$.

11) נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$.

הוכיחו כי $z''(x) + y''(x) = 0$.

12) נתונה המערכת: $\begin{cases} x\cos u + y\sin u + \ln z = f(u) \\ -x\sin u + y\cos u = f'(u) \end{cases}$.

הוכיחו כי:

א. $(z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$

ב. $z_{xy} = z_{yx}$

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

תשובות סופיות

1) $y'(0)=\frac{1}{5}$

2) $y'(1)=5$

3) $y'(e)=-\frac{2}{e^2},\ y''(e)=\frac{6}{e^3}$

4) $z_x(0,0)=z_y(0,0)=-\frac{\sin 1}{2}$

5) $y_x(0,0)=0,\ y_z(0,0)=\frac{1}{2e^4}$

6) שאלת הוכחה.

7) $z_x(1,1)=-16$

8) $z_{xx}(2,1)=z_{xy}(2,1)=1,\ z_{yy}(2,1)=4$

9) א. $\left(uv\neq\frac{1}{8}\right)$ $u_x=\frac{12v-1}{8uv-1}, u_y=\frac{4v+2}{8uv-1}, v_x=\frac{3-2u}{8uv-1}, v_y=\frac{4u+1}{8uv-1}$

ב. שאלת הוכחה.

10) א. $\frac{\partial w}{\partial x}=-3uv,\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{3}{2}(v+u)\ \left(u\neq v\right)$

ב. $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{2uv}{v+u},\ \frac{\partial y}{\partial w}=\frac{2}{3(v+u)}\ \left(u\neq\pm v\right)$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

פונקציות סתומות – הפן התאורטי

שאלות

1) נתונה המשוואה $y^5+y^3+y=x^2-1$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(2,1)$, שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$.

ב. חשבו את $f'(2)$.

ג. בדקו האם מתקיימים תנאי מ.פ.ס בנקודה $(-2,1)$.

ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$ לכל x ממשי.

2) נתונה המשוואה $x^2+y+e^y=17$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(4,0)$, שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y=y(x)$.

ב. בדקו האם העקום המתאר את המשוואה עולה או יורד בנקודה בה $x=4$.

ג. הוכיחו ש-מ.פ.ס מתקיים עבור כל נקודה שמקיימת את המשוואה.

ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$ לכל x ממשי.

ה. השוו בין תוצאות סעיף ג' ותוצאות סעיף ד'.

3) נתונה המשוואה $y^3-x^3-3y^2+6x^2+3y-12x+7=0$.

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודה $(2,1)$.

ב. האם המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה?

ג. האם התשובה לסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?

4) לגבי כל אחת מהמשוואות הבאות הגדירו פונקציה $F(x,y)$ מתאימה, ובדקו האם קיימת נקודה (x_0,y_0), כך שמתקיימים תנאי מ.פ.ס. בדקו בכל מקרה מה ניתן להסיק מהמשפט.

א. $x^2+y^2+4=0$

ב. $xy-40x=100$

ג. $x^2-y^2=3$

5) נתונה המשוואה $2x^3+y^3-6xy=0$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. חשבו את y' עבור נקודות אלה.

ג. מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?

ד. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x.

6) נתונה המשוואה הבאה: $x^3+y^3-3axy=0$ $(a>0)$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. חשבו את y'' עבור נקודות אלה.

7) נתונה המשוואה $x^2+y^2=R^2$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. בנקודות בהן לא מתקיים משפט הפונקציות הסתומות, קבעו האם קיימת סביבה של הנקודה בה המשוואה מתארת פונקציה $y=f(x)$.
עשו זאת בשתי דרכים:
1. על ידי תיאור גרפי של העקום.
2. על ידי חישוב.

8) נתונה המשוואה $ax^4+y^4-xy=0$, כאשר a קבוע ממשי.
ידוע שהנקודה $(x_0,0.5)$ מקיימת את המשוואה, אך לא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה.

א. מצאו את x_0 ואת הקבוע a.

ב. האם קיימות נקודות נוספות, שמקיימות את המשוואה הנתונה אך לא מקיימות את מ.פ.ס? אם כן, מצאו אותן.

ג. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x.

ד. הוכיחו, ללא שימוש בתוכנה גרפית, שעבור הנקודה החיובית שלא מקיימת את מ.פ.ס, לא קיימת סביבה שבה המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x.

9) נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. חשבו את y' עבור נקודות אלה.

ג. מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?

ד. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x.

ה. ללא שימוש בתוכנה גרפית, קבעו האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה המשוואה מתארת פונקציה.

10) נתונה המשוואה $(e-2)\ln x + \ln y = y - 1$.

א. בדקו האם מ.פ.ס מתקיים עבור הנקודה (e,e).

ב. כמה נקודות על העקום הנתון מקיימות $x = e$?

ג. האם התשובה בסעיף ב׳ עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א׳?

ד. מצאו את כל הנקודות המקיימות את מ.פ.ס.

ה. חשבו את הנגזרת בנקודות הנ״ל.

ו. השתמשו בתוכנה גרפית על מנת לקבוע, האם בנקודות בהן לא מתקיים המשפט, ניתן למצוא סביבה שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$.

ז. חזרו על סעיף ו׳, רק הפעם תנו הוכחה ללא איור.

11) נתונה המשוואה $y^3 + 6x\sin y = -8$, ונתונה נקודה $(0,-2)$.

א. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x)$ בסביבת הנקודה.

ב. פתחו את $y(x)$ לטור מקלורן מסדר 2.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו את משפט הפונקציות הסתומות עבור $x = g(y)$.

ב. נתונה המשוואה $x = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

הוכיחו כי קיימת סביבה של הנקודה $(0,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x כפונקציה של y, $x = g(y)$.

ג. חשבו את $g'(1)$.

13) נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

א. הראו כי קיימת סביבה של הנקודה $(1,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x כפונקציה של y, $x = g(y)$.

ב. הוכיחו שהנקודה $(1,1)$ היא נקודת מקסימום מקומי של $g(y)$.

14) בסעיפים א-ב, האם המשוואה $3x^2y - yz^2 - 4xz = 7$:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $y = y(x,z)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ג. הוכיחו שהפונקציה $y = y(x,z)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(-1,2)$.

15) נתונה המשוואה $x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2 = 3z - 1$.

בסעיפים א-ב, על סמך מ.פ.ס, האם המשוואה :

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(1,2,0)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(4,4,1)$?

ג. הוכיחו, ללא שימוש במ.פ.ס, שהמשוואה מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$, בסביבת הנקודה $(4,4,1)$.

16) נתונה המשוואה $\sin(x+y) + \sin(y+z) = 1$.

מצאו נקודה שבסביבה שלה המשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x,z)$, ומצאו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה המתאימה.

17) נתונה מערכת המשוואות:

$$1)\ x = u + v, \quad 2)\ y = u^2 + v^2, \quad 3)\ w = u^3 + v^3$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $w = w(x,y)$, בנקודה $(x,y,u,v,w) = (1,1,0,1,1)$.
במידה שכן, חשבו בנקודה את w_x, w_y.

ב. חזרו על סעיף א', עבור הנקודה $(x,y,u,v,w) = (2,2,1,1,2)$.

ג. האם קיימת סביבה של הנקודה $(x,y,u,v,w) = (2,2,1,1,2)$, שבה מערכת המשוואות מגדירה פונקציה $w = w(x,y)$?
במידה שכן, חשבו בנקודה את w_x, w_y.

ד. מצאו את כל הנקודות במישור, עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה עבור $w = w(x,y)$.

18) נתונה מערכת המשוואות:

$1)\ x = a\cos\phi\cos\theta,\quad 2)\ y = b\sin\phi\cos\theta,\quad 3)\ z = c\sin\theta\quad (a,b,c>0)$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $\phi = \phi(x,y)$,

בנקודה P_0, המתאימה לערכים $\phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}$.

במידה שכן, חשבו בנקודה את ϕ_x, ϕ_y.

בדקו את התשובה על ידי חישוב ישיר.

ב. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $z = z(\phi, x)$,

בנקודה P_0, המתאימה לערכים $\phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}$.

במידה שכן, חשבו בנקודה את z_ϕ, z_x.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. $\frac{4}{9}$ ג. כן. ד. הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. העקום יורד. ג. הוכחה.
ד. הוכחה. ה. תוצאת סעיף ד' טובה יותר.

3) א. לא מתקיימים. ב. כן. ג. לא.

4) א. לא קיימת. ב. הנקודה $(1,140)$ למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
ג. הנקודה $(2,1)$ למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.

5) א. כל נקודה (x,y) שעל המשוואה, ואשר **שונה** מהנקודות $(0,0),\ (2,2)$.
ב. $y'=-\dfrac{2x^2-2y}{y^2-2x}$ ג. כלום! ד. לא.

6) א. כל נקודה על העקום הנתון אשר **שונה** מהנקודות $(0,0),\ \left(\sqrt[3]{4}a,\sqrt[3]{2}a\right)$.
ב. $$y''=-\frac{\left[2x-a\left(-\dfrac{x^2-ay}{y^2-ax}\right)\right](y^2-ax)-\left[2y\left(-\dfrac{x^2-ay}{y^2-ax}\right)-a\right](x^2-ay)}{\left(y^2-ax\right)^2}$$

7) א. כל הנקודות על המעגל אשר שונות מהנקודות $(R,0),\ (-R,0)$.
ב. לא קיימת סביבה כנדרש.

8) א. $x_0=\frac{1}{2},\ a=3$ ב. כן, $(0,0),(-0.5,-0.5)$.
ג. לא. ד. שאלת הוכחה.

9) א. כל נקודה (x,y) שעל $xy=\ln y-\ln x+1$, ואשר **שונה** מהנקודה $(1,1)$.
ב. $y'=-\dfrac{y+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{y}}$ ג. כלום! ד+ה. לא קיימת.

10) א. כן. ב. שתי נקודות. ג. לא.
ד. כל נקודה על העקום אשר שונה מהנקודה $(1,1)$.
ה. $y'(x)=\dfrac{(2-e)y}{x(1-y)}\quad \left(x>0, y>0, (x,y)\neq(1,1)\right)$
ו. לא ניתן. ז. שאלת הוכחה.

11) א. שאלת הוכחה. ב. $p_2(x)=-2+\frac{1}{2}\sin 2\cdot x+\frac{1}{8}\sin 2(\sin 2-2\cos 2)x^2$

12) א. ראה סרטון. ב. שאלת הוכחה. ג. $g'(1)=-2$

13) א. הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

14) א. לא. ב. כן. ג. שאלת הוכחה.

15) א. כן. ב. לא ניתן לדעת. ג. שאלת הוכחה.

16) הנקודה היא $(0,0,0.5\pi)$ והנגזרות הן: $y_z(0,0,0.5\pi)=0$, $y_x(0,0,0.5\pi)=-1$

17) א. $\frac{\partial w}{\partial x}(1,1)=0$, $\frac{\partial w}{\partial y}(1,1)=\frac{3}{2}$ ב. לא מתקיימים.

ג. $w_y(2,2)=3$, $w_x(2,2)=-3$ ד. $D=\left\{(x,y)\in R^2 \mid y>\frac{1}{2}x^2\right\}$

18) א. $\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{1}{b}$, $\frac{\partial \phi}{\partial x}=-\frac{b}{a\sqrt{3}}$ ב. $\frac{\partial z}{\partial \phi}=-c\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2c}{a}$

שימושים גאומטריים

שאלות

1) נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ $(z<0)$.
מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P, בה $x=-2,\ y=1$?

2) מצאו משוואה של מישור משיק למשטח $xyz=8$ בנקודה $(-2,2,-2)$,
וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

3) מצאו מישור המשיק למשטח $x^2+8y^2=21-27z^2$,
המקביל למישור $x+8y+18z=0$.

4) למשטח $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ העבירו מישור המשיק בנקודה כלשהי.
מישור זה חותך את הצירים x,y,z בנקודות A,B,C, בהתאמה.
נסמן: $O=(0,0,0)$.
הוכיחו $OA + OB + OC = a$.
(למעשה נוכיח שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)

5) נתון המשטח $x^2yz+3y^2=2xz^2-8z$, ונתונה הנקודה $(1,2,-1)$.
הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור $x+3y-2z=10$,
בנקודה Q.
מצאו את הנקודה Q.

6) הראו שהמשטח $x^2-2yz+y^3=4$ מאונך לכל אחד מחברי משפחת
המשטחים $x^2+1=(2-4a)y^2+az^2$, בנקודת החיתוך $(1,-1,2)$.

7) מצאו משוואת הישר המשיק לעקום $C: x=6\sin t,\ y=4\cos 3t,\ z=2\sin 5t$,
בנקודה בה $t=\frac{1}{4}\pi$.

8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון עקום $C:\ x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$,
ונתונה נקודה $\mathrm{P}\left(x_0,y_0,z_0\right)$, המתקבלת מהצבת $t=t_0$ במשוואת העקום.
הוכיחו כי משוואת המישור הנורמל לעקום היא
$x'(t_0)\cdot(x-x_0)+y'(t_0)\cdot(y-y_0)+z'(t_0)\cdot(z-z_0)=0$.

ב. מצאו את משוואת המישור הנורמל לעקום
$C: x=6\sin t,\ y=4\cos 3t,\ z=2\sin 5t$,
בנקודה בה $t=0.25\pi$.

9) נתונות שתי עקומות
$$C_1: x=2t+1 \quad y=t^2-1 \quad z=t^2+t$$
$$C_2: x=s^2 \quad y=-s \quad z=s-1$$,
ונתון כי שתי העקומות נמצאות על משטח S, וכי שתיהן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy.

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. מצאו את משוואת המישור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך שבין שתי העקומות.

10) נתונות שלוש עקומות
$$C_1: x=2t+1, \quad y=t^2-1, \quad z=t^2+t$$
$$C_2: x=s^2, \quad y=-s, \quad z=s-1$$,
$$C_3: x=u+2, \quad y=u, \quad z=u^2-1$$
ונתון כי שלוש העקומות נמצאות על משטח S, וכי שלושתן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy.

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. האם בנקודה הנ"ל ניתן להעביר מישור משיק למשטח S? נמקו!

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת הישר המשיק לעקום: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,
בנקודה P שעליו, היא $\ell:\ \mathrm{P}+t\cdot\overrightarrow{\nabla F}(\mathrm{P})\times\overrightarrow{\nabla G}(\mathrm{P})$.

ב. בנקודה $(1,-1,1)$, מצאו את משוואת הישר המשיק לעקום:
$$\begin{cases} 2xz-x^2y=3 \\ 3x^2y+y^2z=-2 \end{cases}$$

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת המישור הנורמלי לעקום $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,

בנקודה P שעליו, היא $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$,

כאשר $(a,b,c)=\overrightarrow{\nabla F}(\mathrm{P})\times\overrightarrow{\nabla G}(\mathrm{P})$.

ב. בנקודה $(1,-1,1)$, מצאו את משוואת המישור הנורמלי לעקום:

$$\begin{cases} 2xz-x^2y=3 \\ 3x^2y+y^2z=-2 \end{cases}$$

13) נתונה הפונקציה $r:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, על ידי $x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=u^2+v^2$.

מהן הנקודות שעבורן קיים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה $(u,v)=(1,0)$.

14) מצאו ביטוי לווקטור היחידה, המאונך למשטח

$x=\sin u\cos v,\quad y=\sin u\sin v,\quad z=\cos u$,

עבור $u\in[0,\pi],\quad v\in[0,2\pi]$.

באיזה משטח מדובר?

תשובות סופיות

1) $3x-6y+2z+18=0$

2) $x-y+z+6=0$, $(-2,2,-2)+t(1,-1,1)$

3) $x+8y+18z=21$, $x+8y+18z=-21$

4) שאלת הוכחה.

5) $Q(7,-9,-15)$

6) שאלת הוכחה.

7) $\ell:\ (x,y,z)=\left(3\sqrt{2},-2\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)+s\left(3\sqrt{2},-6\sqrt{2},-5\sqrt{2}\right)$

8) א. שאלת הוכחה. ב. $3x-6y-5z=26\sqrt{2}$

9) א. $P(1,-1,0)$ ב. $x-2z=1$

10) א. נקבל שנקודת החיתוך היא $P(1,-1,0)$. ב. לא.

11) א. שאלת הוכחה. ב. $(x,y,z)=(1,-1,1)+t(3,16,2)$

12) א. שאלת הוכחה. ב. $3x+16y+2z=-11$

13) כל נקודה, למעט $(0,0,0)$. $-2x+z=-1$

14) $\hat{n}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, כדור שמרכזו בראשית הצירים, עם רדיוס 1, שנוסחתו: $x^2+y^2+z^2=1$.

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 28 - נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלם

תוכן העניינים

נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים

שאלות

פתחו את הפונקציות בשאלות **1-4** לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה (a,b) :

1) $f(x,y)=x^2y+3y-2$ $\quad (a,b)=(1,2)$

2) $f(x,y)=(1+y)\ln(1+x-y)$ $\quad (a,b)=(0,0)$

3) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$ $\quad (a,b)=(0,0)$

4) $f(x,y)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-y}{x+y^2}}$ $\quad (a,b)=(2,1)$

5) בעזרת התוצאה של שאלה **2**, חשבון בקירוב את $\ln(1.5)$.

6) בעזרת התוצאה של שאלה **3**, חשבון בקירוב את e^3.

7) בעזרת התוצאה של שאלה **4**, חשבון בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.

תשובות סופיות

1) $f(x,y)=6+4(x-1)+4(y-2)+2(x-1)^2+2(x-1)(y-2)$

2) $f(x,y)=x-y-\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{3}{2}y^2$

3) $f(x,y)=1+4y-x^2+7y^2$

4) $f(x,y)=1+\frac{1}{3}(x-2)-\frac{1}{3}(y-1)-\frac{7}{81}(x-2)^2+\frac{1}{9}(x-2)(y-1)$

5) $\frac{3}{8}$

6) 19

7) $\frac{101}{81}$

הדיפרנציאל השלם – נוסחת הקירוב הליניארי

שאלות

1) חשבו בקירוב: $\ln\left(0.01^2+0.99^2\right)$.

2) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצאו בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09+(0.99)^2}$.

3) נחשב את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו.
ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%,
ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%.
הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.

4) נתונות שתי צלעות במלבן $a=10\,\text{cm},\ \ b=24\,\text{cm}$.
חשבו את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב- $4\,\text{mm}$ ואת הצלע b יקצרו ב- $1\,\text{mm}$.

5) נמדוד את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה.
השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על 5%.
העריכו את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

תשובות סופיות

1) $\cong -0.01$

2) $2\frac{7}{3200}$

3) 8%

4) שינוי מדויק: 0.06472, שינוי מקורב: 0.06153.

5) 5%

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 29 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-8**,
מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

1) $f(x,y)=8x^3+12xy+3y^2-18x$

2) $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

4) $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$

5) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

6) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

7) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-8x+y}{xy}$

8) $f(x,y)=e^x\cos y$

9) נתון משטח $z=x^3+y^3-3xy+4$.
מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$,
וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
עלות הייצור של מחשבון בארץ היא $6\$$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא $8\$$.
מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2
למחשבון בסין, על ידי: $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$, $\quad Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$.
כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2, על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

13) נתונה הפונקציה $f(x,y) = x^2 + y^2 + axy$.

א. הוכיחו שהנקודה $(0,0)$ היא נקודה קריטית.

ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

14) מצאו שני מספרים, $a < b$, כך ש- $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

1) $(-0.5,1)$ אוכף ; $(1.5,-3)$ מינימום.

2) $(1,\ 2)$ מינימום ; $(-1,-2)$ מקסימום ; $(-1,\ 2)$, $(1,-2)$ אוכף.

3) $(0,0)$אוכף ; $(1,1)$ מינימום.

4) $(-1,\ -1)(-1,\ 1)$ מינימום ; $(1,\ 0)$ מקסימום ; $(1,\ -1),(1,1),(-1,\ 0)$ אוכף.

5) $(0,\ 2)$ מקסימום.

6) $(4,\ 4)$ מקסימום.

7) $(-0.5,\ 4)$ מקסימום.

8) אין נקודות קריטיות.

9) $z=3,\quad z=4$

10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.

11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.

12) $P_2 = 12\$$, $\quad P_1 = 10\$$ רווח מקסימלי $288\$$.

13) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a=-2$, $a=2$, לא ניתן לדעת ; $a<-2$, $a>2$
אוכף ; $-2<a<2$ מינימום.

14) $a=-6,\ b=4$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 30 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים

תוכן העניינים

קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

שאלות

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות **5-1**:

1) $f(x,y)=1+2xy-x^2-y^2$

2) $f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$

3) $(z=f(x,y))\ z^3+z+xy-2x-y+2=0$

4) $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2+6y^2+3x-12y+8$

5) $(x,y,z>0)\ f(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$

6) מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה $y=x^2+1$, לפרבולה $y=-x^2+2x$.

* לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות **11-7** נתונות n נקודות, $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y=h(x)$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

7) $h(x)=ax+b$, הדגימו עבור הנקודות $(2,2.5),(1,0.8),(3,3.2),(4,3.5)$.

8) $h(x)=ax^2+bx$, הדגימו עבור הנקודות $(-1,2),(2,0),(0,-2)$.

9) $h(x)=ax+\dfrac{b}{x}$, הדגימו עבור הנקודות $(10,20.2),(6,12.9),(4,8.5),(0.5,4)$.

10) $h(x)=ax^2+\dfrac{b}{x^2}$, הדגימו עבור הנקודות $(4,33),(2,8.5),(0.5,2.3),(1,4.5),(0.1,90)$.

11) $h(x)=ax^2+bx+c$, הדגימו עבור $(1,4.5),(0.5,2.3),(0,0.8),(-1,0.1),(-0.5,0.12)$.

12) נתונות n נקודות : $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)$.
מצאו ישר $y=ax+b$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי.
יש להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה : בשאלות **11** ו-**12** ניתן להניח ש- a ו- b , המתקבלים מפתרון המשוואות $f_a=0,\ f_b=0$,
נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(h(x_i)-y_i\right)^2$.

תשובות סופיות

1) (t,t) לכל t ממשי, מקסימום.

2) $(0,0)$ מקסימום.

3) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

4) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

5) $(0.5,1,1)$ מינימום.

6) 0.375

7) $y=0.88x+0.3$

8) $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x$

9) $y=2.032x+\frac{1.5039}{x}$

10) $y=2.06x^2+\frac{0.9}{x^2}$

11) $y=1.48x^2+2.196x+0.824$

12) $b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}y_ix_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$, $a=\dfrac{n\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 31 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

בשאלות **1-4** מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

1) $2x^2+3xy=1-2y^2 \quad f(x,y)=x^2+y^2;$

2) $x^2+y^2=1 \quad f(x,y)=x^2-y^2;$

3) $x^2+y^2=13 \quad f(x,y)=4x+6y;$

4) $x^2+2y^2=6 \quad f(x,y)=x^2y;$

5) נתונה בעיית הקיצון $x+3y=12 \quad s.t. \quad \max\{xy\}$, כאשר $x,y>0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

6) נתונה בעיית הקיצון $\sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \quad s.t. \quad \max\{2x+y\}$, כאשר $x,y\geq 0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x+3y=12$,
מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2+3xy=1-2y^2$, מצאו את הנקודות
שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית
הצירים הוא מקסימלי.

9) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x-6y+4=0$,
לפרבולה $x^2+2xy+y^2+4y=0$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0,y_0) מהישר $ax+by+c=0$, הוא $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

10) מוישל'ה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל, (x,y), נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
מוישל'ה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
נסחו ופתרו את בעיית מוישל'ה.

11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל (x,y) נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
לדני תקציב של 12 ש"ח.
נסחו ופתרו את בעיית דני.

12) עקומת התמורה בין מנגו, (x), ואננס, (y), היא $x^2+y^2=13$.
לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.
דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) = (x,y), על עקומת התמורה,
המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
נסחו ופתרו את הבעיה.

13) ליצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$.
המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K=2,\ P_L=1$.
היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף $\left(K^*,L^*\right)$,
המביא למינימום את העלות.
נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).

14) נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x,y)\}\ \ s.t.\ \ p_1x+p_2y=I$.
תהי $\left(x^*,y^*\right)$ נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה.
הוכיחו כי כופל לגראנז' λ מקיים $\lambda=\dfrac{x\cdot u_x+y\cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

תשובות סופיות

1) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max(\pm1,\mp1)$

2) $\max(\pm1,0)$ $\min(0,\pm1)$

3) $\min(-2,-3)$ $\max(2,3)$

4) $\min(\pm2,-1)$ $\max(\pm2,1)$

5) $\max(6,2)$

6) $\max(9,36)$

7) $(6,2)$

8) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max(\pm1,\mp1)$

9) $7/\sqrt{45}$

10) $\min\left(\sqrt{32},\sqrt{8}\right)$

11) $\max(6,2)$

12) $\max(2,3)$

13) $\sqrt{K}+\sqrt{L}=100$; $\min\{2K+L\}$

14) שאלת הוכחה.

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 32 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

שאלות

1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

2) מצאו על פני הכדור $x^2+y^2+z^2=36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1,2,2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1,2,2)$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$.
ב. מצאו נקודה על המישור $-2x-2y+z=0$, שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1,2,3)$.
ג. בדקו את התשובה על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

4) מצאו את הנקודות על המשטח $z^2=xy+1$ הקרובות ביותר לראשית.

5) מצאו את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ למישור $3x+4y+12z=288$. רמז: מרחק הנקודה (x_0,y_0,z_0) מהמישור $ax+by+cz+d=0$, הוא $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

6) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2+y^2=1$ והמישור $z=x+y$ לבין ראשית הצירים.

7) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ והמישור $z=x+y$, לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים, היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

תשובות סופיות

1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.

2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2,4,4)$,
והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2,-4,-4)$.

3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
ב. הנקודה הקרובה ביותר $(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{10}{3})$.

4) $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$

5) המרחק הקצר ביותר $\frac{256}{13}$. המרחק הארוך ביותר $\frac{320}{13}$.

6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.

7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 33 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה

שאלות

1) חשבן את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=3xy-6x-3y+7$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם $(0,5),(3,0),(0,0)$.

2) חשבן את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2-3y^2-2x+6y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2,0),(2,2),(0,2),(0,0)$.

3) חשבן את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+2y^2-x$ בתחום R, כאשר R הוא העיגול $x^2+y^2\le 4$.

4) חשבן את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x+y\ge -3\,,\ x\le 0, y\le 0\}$.

5) חשבן את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ 3x\ge -y\}$.

תשובות סופיות

1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט 11-.

2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט 1-.

3) מקסימום מוחלט $33/4$. מינימום מוחלט $-1/4$.

4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט 1-.

5) מקסימום מוחלט $1+6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1-6\sqrt{10}$.

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 34 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

מבוא מתמטי לפרק

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le \sqrt{4-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ y\ge 0\right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le y\le 2x\right\}$

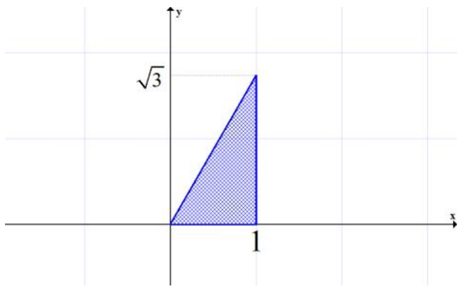
ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\right\}$

4) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le \sqrt{25-x^2}\right\}$.

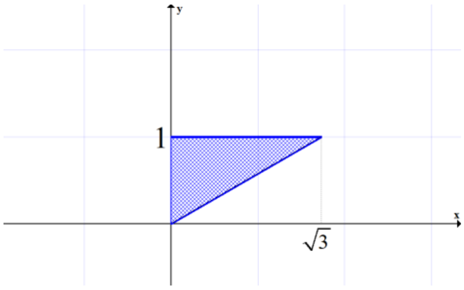
5) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le \sqrt{8x-x^2}\right\}$.

6) להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור א



איור ב



תשובות סופיות

1) א. $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0.5\pi \le \theta \le 1.5\pi \end{cases}$

2) א. $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 0.5\pi \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ -0.5\pi \le \theta \le 0.5\pi \end{cases}$ *or* $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 1.5\pi \le \theta \le 2.5\pi \end{cases}$

ד. $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

3) א. $\begin{matrix} 1 \le r \le 2 \\ 0.25\pi \le \theta \le \arctan 2 \end{matrix}$ ב. $0 \le r \le 2,\ 0.25\pi \le \theta \le 1.25\pi$

4) $$\begin{matrix} \dfrac{25}{7\sin\theta - \cos\theta} \le r \le 5 \\ \arctan\dfrac{4}{3} \le \theta \le \arctan\left(-\dfrac{3}{4}\right) + \pi \end{matrix}$$

5) $0 \le r \le 8\cos\theta,\ \dfrac{\pi}{6} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

6) א. $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}\quad 0 \le r \le \dfrac{1}{\cos\theta}$ ב. $\dfrac{\pi}{6} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\quad 0 \le r \le \dfrac{1}{\sin\theta}$

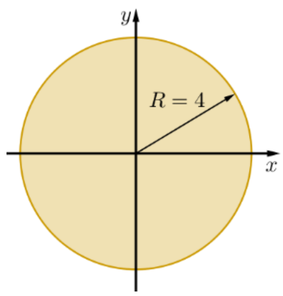
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

שאלות

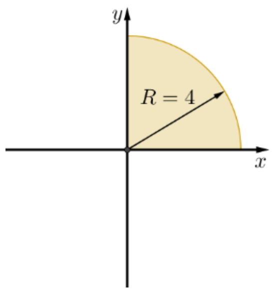
1) חשבו $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA$, כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

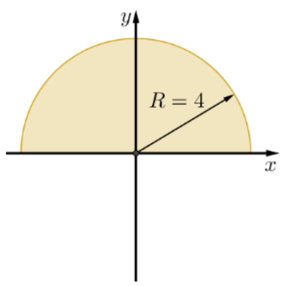
א.



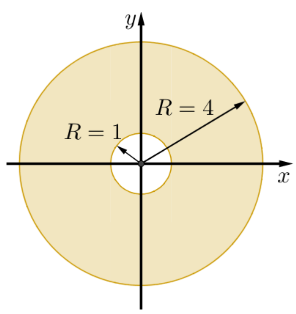
ב.



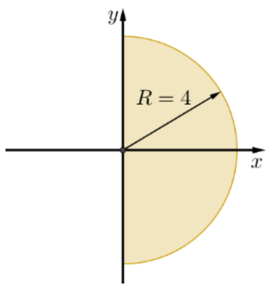
ג.



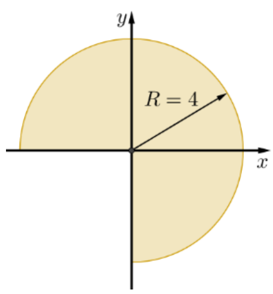
ד.



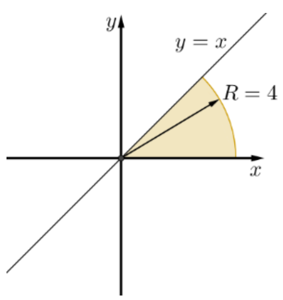
ה.



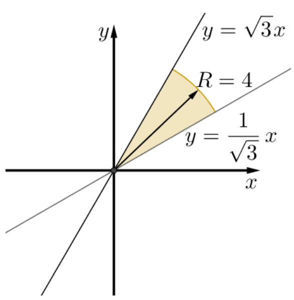
ו.



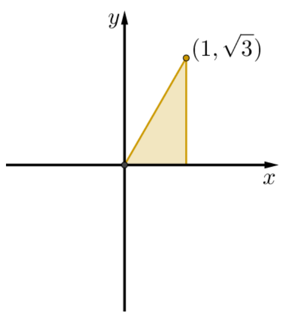
ז.



ח.



ט.



חשבו את האינטגרלים בשאלות **2-17**, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

2) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

3) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

4) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

5) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

6) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx$

7) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

8) $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} xdxdy$

9) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} ydydx$

10) $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

11) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}dxdy$

12) $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{\ln^2 2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

13) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dydx$

14) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dydx$

15) $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2dxdy$

16) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)dxdy$

17) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}dydx$

בשאלות **18-20** חשבו את **נפח הגוף** המתואר:

18) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2+y^2+z^2=9$ לבין הגליל $x^2+y^2=1$.

19) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=2y$, בין החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמעלה לבין המישור xy מלמטה.

20) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=x$, בין הפרבולואיד $z=1-x^2-y^2$ מלמעלה לבין מישור xy מלמטה.

21) חשבו את **שטח התחום** החסום על ידי $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $y=x\sqrt{3}$.

תשובות סופיות

1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. 42π ה. $\frac{64\pi}{3}$

ו. 32π ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$

2) $\frac{\pi}{2}$

3) π

4) $\frac{\pi}{8}$

5) $\frac{\pi}{2}$

6) πa^2

7) 2π

8) 36

9) $\frac{4}{3}$

10) $\pi\ln\frac{e}{2}$

11) $\pi(4-\pi)$

12) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{e}$

13) $\frac{\pi(e-1)}{4e}$

14) $\frac{\pi}{2}+1$

15) $-\frac{4}{5}$

16) $\pi\ln\frac{4}{e}$

17) π

18) $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$

19) $\frac{32}{9}$

20) $\frac{5\pi}{32}$

21) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 35 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

תוכן העניינים

אינטגרלים משולשים ושימושיהם

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-4**:

1) $\int_0^1\int_0^z\int_0^{x+z} 6xzdydxdz$

2) $\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dxdzdy$

3) $B=\{(x,y,z)|0\le x\le 1, -1\le y\le 2, 0\le z\le 3\}$, $\iiint_B xyz^2 dV$

4) $B=\{(x,y,z)|0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le \sqrt{x}\ ,0\le z\le 1+x+y\}$, $\iiint_B 6xydV$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **5-8**, על ידי שינוי סדר אינטגרציה:

5) $\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dxdydz$

6) $\int_0^1\int_0^1\int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dydxdz$

7) $\int_0^1\int_{\sqrt[3]{z}}^1\int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin \pi y^2}{y^2} dxdydz$

8) $\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dydzdx$

בשאלות **9-14** חשבו את **נפחי הגופים** החסומים על ידי המשטחים:

9) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

10) $z=0\,,\ z=x^2+y^2\,,\ y=1,\ y=x^2$

11) $z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\frac{2}{x}$ $(x\geq 0)$

12) $z=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

13) $x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y$ $(z\geq 0)$

14) $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

15) חשבו את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו h ורדיוס הבסיס שלו r.
הניחו שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל,
כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x,y,z)=kz$ $(k>0)$.

16) חשבו את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה)
$V=\{(x,y,z)\,|\,0\leq x\leq a\,,\ 0\leq y\leq b\,,\ 0\leq z\leq c\}$, סביב ציר ה- z.
בטאו את התשובה באמצעות המסה של התיבה, M.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{3}\left(e^3-1\right)$

3) $\frac{27}{4}$

4) $\frac{65}{28}$

5) $2\sin 4$

6) $3e-6$

7) 4

8) $\frac{\sin^2 4}{2}$

9) $\frac{5}{6}$

10) $\frac{88}{100}$

11) $\frac{17}{6}$

12) $16\frac{1}{5}$

13) $\frac{8}{3}$

14) 36

15) $M=\frac{1}{2}\pi kh^2r^2$, $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,0,\frac{2h}{3}\right)$

16) $\frac{1}{3}M\left(a^2+b^2\right)$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 36 - החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

תוכן העניינים

החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

שאלות

1) חשב את $\iiint\limits_G (z-y)^2 xy dV$, כאשר G הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים $x=1, \quad x=3, \quad z=y, \quad z=y+1, \quad xy=2, \quad xy=4$.

2) חשב את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3) חשב את $\iiint\limits_G x^2 dV$, כאשר G הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4) חשב את **נפח** התחום המוגבל על ידי המשטחים:
$y=z, \quad y=2z, \quad y=4x, \quad y=4x-12, \quad y=z^2, \quad y=4z^2$.

5) חשב את $\iiint\limits_G \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}\, dV$, כאשר G הוא כדור שמרכזו בנקודה $(1,2,4)$ ורדיוסו 1.

תשובות סופיות

1) $2\ln 3$

2) $\frac{4}{3}\pi abc$

3) $\frac{4}{15}\pi a^3 bc$

4) $\frac{105}{32}$

5) π

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 37 - אינטגרלים קוויים ושימושיהם

תוכן העניינים

אינטגרלים קוויים ושימושיהם

* מומלץ בחום לעיין בנספח 'הצגה פרמטרית של עקומים חשובים'.

שאלות

אינטגרל קווי מסוג I

בשאלות **1-4** חשבו את האינטגרל $\int_C f(x,y)ds$, כאשר:

1) $f(x,y)=1-x^2$; $C:\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$

2) $f(x,y)=x$; $C:\ x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\le t\le \pi$

3) $f(x,y)=x+y$; C קטע של ישר המחבר את $\mathrm{O}(0,0)$ עם $\mathrm{A}(1,2)$.

4) $f(x,y)=x+y^2$; C היקפו של $\Delta\mathrm{OAB}$: $\mathrm{O}(0,0),\quad \mathrm{A}(0,1),\quad \mathrm{B}(1,0)$.

בשאלות **5-6** חשבו את האינטגרל $\int_C f(x,y,z)ds$, כאשר:

5) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$; $C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t\ \ 0\le t\le \pi$

6) $f(x,y,z)=x^3+3z$; $C:\ x=t,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}t^2,\ z=\dfrac{1}{3}t^3\ \ 0\le t\le 3$

7) חשבו את **אורך העקום** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

8) סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t\ \ (0\le t\le \pi)$.
חשבו את **מסת** הסליל, אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x,y,z)=kz\ \ (k>0)$.

אינטגרל קווי מסוג II

בשאלות 9-10 חשבן:

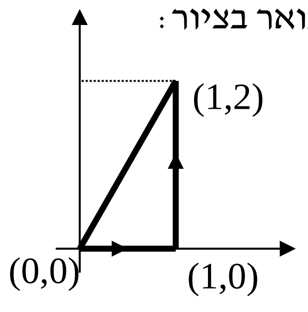
9) $\int_C 2xydx+(x^2+y^2)dy$; $C:\ x=\cos t,\ y=\sin t\ \ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$

10) $\int_C (2x+y)dx+(x^2-y)dy$; $C:\ x=t,\ y=t^2\ \ 0\le t\le 1$

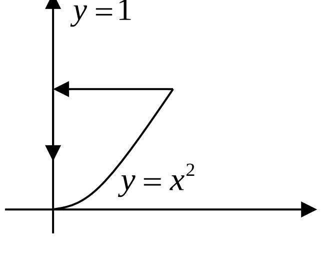
11) חשבן $\int_C ydx+x^2dy$, כאשר C המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$,
ו- C נתון ע"י המשוואה:
א. $y=2x$
ב. $y=x^2$

12) חשבן $\int_{(1,1)}^{(4,2)}(x+y)dx+(y-x)dy$, אם העקום נתון על ידי:
א. הפרבולה $y^2=x$.
ב. קו ישר.
ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$ ל- $(1,2)$ ומשם ל- $(4,2)$.
ד. העקום $x=2t^2+t+1,\quad y=t^2+1$.

13) חשבן $\int_C x^2ydx+xdy$, כאשר C המסלול מתואר בציור:



14) חשבן $\int_C (x-y^2)dx+dy$, כאשר C המסלול מתואר בציור:



15) אם $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(3x^2-6yz\right)\mathbf{i}+\left(2y+3xz\right)\mathbf{j}+\left(1-4xyz^2\right)\mathbf{k}$,

חשבון את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, מ- $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$, לאורך המסלולים:

א. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

ב. הקוים הישרים מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,0,1)$, משם ל- $(0,1,1)$ ומשם ל- $(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו- $(1,1,1)$.

בשאלות **16-17** חשבון את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, כאשר:

16) $F(x,y)=\left(x^2y^3,-y\sqrt{x}\right),\quad r(t)=\left(t^2,-t^3\right),\quad 0\le t\le 1$

17) $F(x,y,z)=\left(\sin x,\cos y,xz\right),\quad r(t)=\left(t^3,-t^2,t\right),\quad 0\le t\le 1$

18) נתון שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=x^3y\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$.

א. חשבון את ה**עבודה** שמבצע השדה על חלקיק שנע על הפרבולה $y=x^2$ מ- $(-2,4)$ עד $(1,1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה אילו החלקיק היה נע מ- $(1,1)$ עד $(-2,4)$?

19) חשבון את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$,
על חלקיק הנע לאורך העיקום $(0\le t\le 1)$ $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$.

הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot dr=\int_C \left(f,g,h\right)\cdot\left(dx,dy,dz\right)=\int_C fdx+gdy+hdz$$

$$\int_C \mathbf{A}\cdot dr=\int_C \left(A_1,A_2,A_3\right)\cdot\left(dx,dy,dz\right)=\int_C A_1dx+A_2dy+A_3dz$$

תשובות סופיות

1) π

2) $\frac{16}{3}$

3) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

4) $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$

5) $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$

6) $\frac{567}{2}$

7) 6

8) $\sqrt{5}k\pi^2$

9) $\frac{1}{3}$

10) $\frac{4}{3}$

11) א. $\frac{28}{3}$ ב. $\frac{32}{3}$

12) א. $\frac{34}{3}$ ב. 11 ג. 14 ד. $\frac{32}{3}$

13) $\frac{1}{2}$

14) $\frac{4}{5}$

15) א. 2 ב. -3 ג. $\frac{6}{5}$

16) $-\frac{59}{105}$

17) $\frac{6}{5}-\sin 1-\cos 1$

18) א. 3 ב. -3

19) 1

הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

עקום	הצגה פרמטרית	דוגמה
$y=f(x)\ (a\le x\le b)$	$x=t,\ y=f(t)\ (a\le t\le b)$	$y=x^2\ (1\le x\le 2)$ $\Downarrow$ $x=t,\ y=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x=f(y)\ (a\le y\le b)$	$y=t,\ x=f(t)\ (a\le t\le b)$	$x=y^2\ (1\le y\le 2)$ $\Downarrow$ $y=t,\ x=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t,y=r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t,y=2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t,y=-r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t,y=-2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t,y=5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=-b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t,y=-5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
ישר פרמטרי במישור מהנקי' (x_0,y_0) לנקי' (x_1,y_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מהנקי' $(1,2)$ לנקי' $(3,4)$ $x=1+2t$ $y=2+2t$ $(0\le t\le 1)$
ישר פרמטרי במרחב מהנקי' (x_0,y_0,z_0) לנקי' (x_1,y_1,z_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $z=z_0+t(z_1-z_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מ- $(1,2,3)$ ל- $(4,7,9)$ $x=1+3t$ $y=2+5t$ $z=3+6t$ $(0\le t\le 1)$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 38 - שדות משמרים - אי תלות במסלול

תוכן העניינים

שדות משמרים – אי-תלות במסלול

שאלות

בשאלות **1-6** קבעו האם $\mathbf{F}$ הוא שדה משמר;
אם כן, מצאו פונקציה ϕ, כך ש- $\nabla\phi=\mathbf{F}$.

1) $\mathbf{F}(x,y)=(6x+5y,5x+4y)$

2) $\mathbf{F}(x,y)=xe^{y}\mathbf{i}+ye^{x}\mathbf{j}$

3) $\mathbf{F}(x,y)=\left(2x\cos y-y\cos x,-x^2\sin y-\sin x\right)$

4) $\mathbf{F}(x,y,z)=z^2\mathbf{i}+e^{-y}\mathbf{j}+2xz\mathbf{k}$

5) $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+\left(xy+3z^2\right)\mathbf{k}$

6) $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(z,2yz,y^2\right)$

7) נתון האינטגרל $\int_{(1,2)}^{(3,4)}\left(6xy^2-y^3\right)dx+\left(6x^2y-3xy^2\right)dy$.

א. הוכיחו שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1,2)$ ו- $(3,4)$.

ב. חשבו את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

8) חשבו את האינטגרל $\int_{(1,4)}^{(3,1)}2xy^3dx+\left(1+3x^2y^2\right)dy$.

9) חשבו את האינטגרל $\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^4+3\right)dx+\left(x^2-4xy^3\right)dy$.

10) יהי $\mathbf{F}(x,y)=e^{y}\mathbf{i}+xe^{y}\mathbf{j}$. מצאו את ה**עבודה** שמבצע השדה על חלקיק הנע על $y=\sqrt{1-x^2}$, מ- $(1,0)$ ל- $(-1,0)$.

11) חשבו את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)}\left(2xz^3+6y\right)dx+\left(6x-2yz\right)dy+\left(3x^2z^2-y^2\right)dz$.
תנו מובן פיסיקאלי לתוצאה.

12) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F}=\frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{j}$, ונתונים 3 מסלולים:

$L_1:\ x^2+y^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

$L_2:\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ בכיוון השלילי (עם כוון השעון).

$L_3:\ (x-10)^2+(y-7)^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

חשבו:

א. $\oint_{L_1}\mathbf{F}dr$ ב. $\oint_{L_2}\mathbf{F}dr$ ג. $\oint_{L_3}\mathbf{F}dr$

13) ענו על הסעיפים הבאים:

א. שרטטו את השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, ברביע הראשון.

ב. בתחום $D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,(x,y)\neq(0,0)\right\}$, נסמן $g=\frac{x}{x^2+y^2},\quad f=\frac{-y}{x^2+y^2}$.

1. הוכיחו כי $f_y=g_x$ בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכיחו שהשדה הנתון (מסעיף א) אינו שדה משמר בתחום D (מסעיף ב).

ד. הוכיחו שהשדה הנתון משמר בחצי המישור הימני $D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,x>0\right\}$, ומצאו את פונקציית הפוטנציאל, במקרה זה.

ה. עתה נתון השדה בתחום $D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,(x,y)\neq(0,0)\right\}$, חשבו את $\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, כאשר C עקומה סגורה חלקה סביב הנקודה $(0,0)$.

14) נתון השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$,

בתחום $D=\{(x,y)\in R^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\}$.

א. שרטטו את השדה הווקטורי ברביע הראשון.

ב. נסמן $g=\frac{y}{x^2+y^2}\ ,\quad f=\frac{x}{x^2+y^2}$.

1. הוכיחו כי $f_y=g_x$ בתחום הנתון.
2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכיחו שהשדה הנתון הוא שדה משמר.

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$

$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\right)$

$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\hat{x}+g(x,y,z)\hat{y}+h(x,y,z)\hat{z}$

$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$

תשובות סופיות

1) $\phi(x,y)=3x^2+5xy+2y^2$

2) השדה אינו משמר.

3) $\phi(x,y)=x^2\cos y-y\sin x$

4) $\phi(x,y,z)=xz^2-e^{-y}$

5) $\phi(x,y,z)=xyz+z^3$

6) השדה אינו משמר.

7) א. שאלת הוכחה. ב. 236

8) -58

9) 5

10) -2

11) $15=$ עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- $(1,-1,1)$ ל- $(2,1,-1)$, לאורך C.

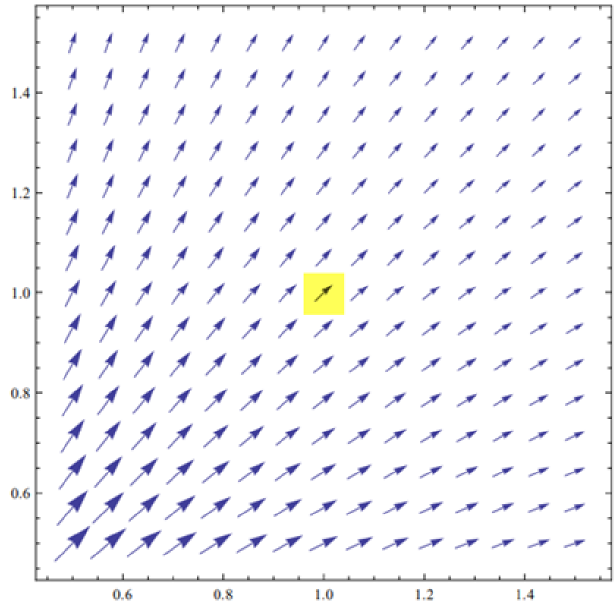
12) א. 2π ב. -2π ג. 0

13) א. ראו בעמוד הבא. ב. i. שאלת הוכחה. ii. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.
ג. שאלת הוכחה. ד. שאלת הוכחה; $\phi=\arctan\frac{y}{x}+k$ ה. 2π

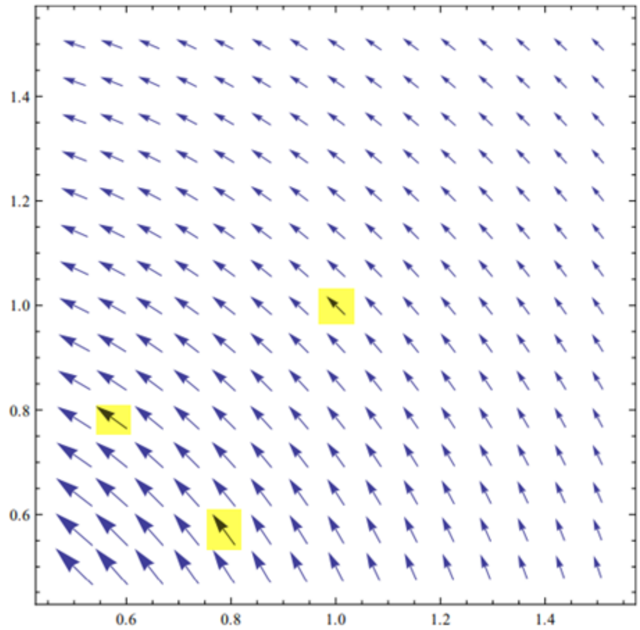
14) א. ראו בעמוד הבא. ב. 1. שאלת הוכחה. 2. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.
ג. שאלת הוכחה.

שרטוטים

שאלה 13 סעיף א :



שאלה 14 סעיף א :



מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 39 - משפט גרין

תוכן העניינים

משפט גרין

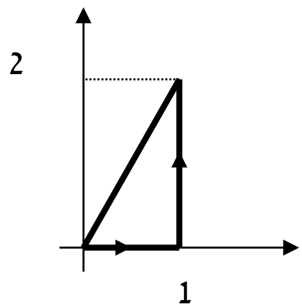
שאלות

בשאלות **1-3** אשרו את משפט גרין.

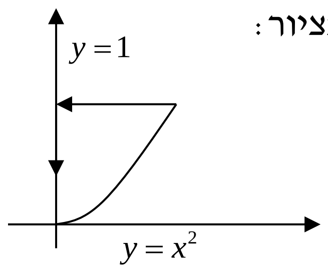
כלומר, חשבו את האינטגרל $\oint_C fdx+gdy$ ואת האינטגרל $\iint_R \left(g_x-f_y\right)dA$,

והראו שהם שווים זה לזה.

1) $\oint_C x^2ydx+xdy$; המסלול C מתואר בציור:



2) $\oint_C (x-y^2)dx+dy$; המסלול C מתואר בציור:



3) $\oint_C (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$, C הוא ריבוע שקדקודיו:

$(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$ בכיוון החיובי.

4) חשבו את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=\left(e^x-y^3\right)\mathbf{i}+\left(\cos y+x^3\right)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2+y^2=1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון,

ומשלים הקפה אחת.

5) חשבו את האינטגרל $\int_C \left(e^y-\tan\frac{x}{2}\right)dx+\left(xe^y+y\cos y^2\right)dy$, כאשר C הוא

האיחוד של העקומים $y=8-x^2,\ y=x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

6) חשבון את האינטגרל $\int_C -2e^{2x-y}\cos y dx+\left(e^{2x-y}\left(\sin y+\cos y\right)+2xy\right)dy$,
כאשר C הוא חצי האליפסה $\left\{x^2+4y^2=4,\ y\geq 0\right\}$ מהנקודה $(2,0)$
לנקודה $(-2,0)$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט C,
נתון על ידי $\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$.
ב. חשבו את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

8) נתון האינטגרל הקווי $\oint_C \left(x^3+3x^2y+3xy^2y^3\right)dx+\left(3x^2y+3x-\sin y\right)dy$,
כאשר C מסילה פשוטה סגורה נגד כיוון השעון.
מהו הערך המקסימלי של האינטגרל?
עבור איזו מסילה C הוא מתקבל?

9) הוכיחו שלא קיימת עקומה פשוטה, סגורה וגזירה למקוטעין C,
החוסמת שטח במישור, והמקיימת $\oint_C -y^3dx+x^3dy=0$.

10) חשבו את $\oint_C \frac{4x-y}{4\cdot\left(x^2+y^2\right)}dx+\frac{x-4y}{4\cdot\left(x^2+y^2\right)}dy$, כאשר:
א. C הוא המעגל $(x-3)^2+(y-2)^2=1$.
ב. C הוא המעגל $(x-1)^2+(y-2)^2=144$.
ג. C היא מסילה כלשהי סביב הראשית.

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא 0.5.
2) הערך המשותף הוא 0.8.
3) הערך המשותף הוא 8.
4) 1.5π
5) $0.5\sin 64$
6) $\frac{8}{3}+e^4-\frac{1}{e^4}$
7) א. הוכחה. ב. πab
8) הערך המקסימלי הוא $\frac{6\pi}{4}$, עבור המסילה $C: x^2+y^2=1$.
9) הוכחה.
10) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{\pi}{2}$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 40 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

תוכן העניינים

אינטגרלים משטחיים מסוג I

שאלות

בשאלות **1-5** חשבון את האינטגרל המשטחי:

1) $\iint\limits_S x^2yzdS$, כאשר S הוא המישור $z=1+2x+3y$,
מעל המלבן $R=[0,3]\times[0,2]$.

2) $\iint\limits_S xdS$, כאשר S הוא המשטח $y=x^2+4z$, $0\le z\le 2$, $0\le x\le 2$.

3) $\iint\limits_S yzdS$, כאשר S הוא המישור $z=y+3$, שכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$.

4) $\iint\limits_S \left(x^2z+y^2z\right)dS$, כאשר S הוא חצי הכדור $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$.

5) $\iint\limits_S xyzdS$, כאשר S הוא חלק החרוט $\mathbf{r}(u,v)=u\cos v\mathbf{i}+u\sin v\mathbf{j}+3u\mathbf{k}$,
המקיים $0\le v\le \frac{\pi}{2}$, $1\le u\le 2$.

6) חשבון את **שטח הפנים** של כדור בעל רדיוס R.

7) היריעה הדקה S היא חלק הפרבולואיד $z=x^2+y^2$, שמתחת למישור $z=1$,
וצפיפותה $\delta(x,y,z)=\delta_0$, קבועה.
חשבון את **מסת** היריעה.

תשובות סופיות

1) $171\sqrt{14}$

2) $\frac{33\sqrt{33}-17\sqrt{17}}{6}$

3) $\pi\sqrt{2}/4$

4) 16π

5) $93/\sqrt{10}$

6) $4\pi R^2$

7) $\frac{\pi\delta_0}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

אינטגרל משטחי מסוג II

שאלות

בשאלות הבאות חשבו את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ ‏(**n** הוא נורמל חיצוני של S).

בניסוח אחר: חשבו את השטף של שדה הזרימה **F** דרך S.

1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה הנקבעת על ידי המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור $x^2+y^2+z^2=1$.

3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה הנקבעת על ידי המישורים $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4) $\mathbf{F}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\geq 0$.

5) $\mathbf{F}=0\mathbf{i}-2z\mathbf{j}+\left(-3y-1\right)\mathbf{k}$, S הוא חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy.

תשובות סופיות

1) $\frac{11}{6}$

2) $\frac{8\pi}{3}$

3) 27

4) 12π

5) -16π

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 41 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

תוכן העניינים

משפט הדיברגנץ (גאוס)

שאלות

בשאלות **1-3** אשרו את משפט הדיברגנץ.

כלומר, חשבו את האינטגרל $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, ואת האינטגרל $\iiint\limits_G div\mathbf{F}dV$,

והראו שהם שווים זה לזה ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).

(ראו הערת סימון בעמוד הבא)

1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G,
הנקבעת ע"י המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G, $x^2+y^2+z^2=1$.

3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G,
הנקבעת ע"י המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישורים $z=0$ ו-$z=2$.
חשבו את **השטף** של השדה הווקטורי $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ דרך S.
כלומר, חשב את $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

5) חשבו את $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

$\mathbf{F}=\left(z^2-x\right)\mathbf{i}-xy\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי:

$x=0,\ x=3,\ z=4-y^2,\ z=0$.

6) חשבו את $\iint\limits_S xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy$,

כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ z=0$.

7) יהי S משטח <u>פתוח</u> $x^2+z^2=16$, $0\le y\le 4$ (גליל ללא הבסיסים).
חשבו את **השטף** דרך S של השדה הווקטורי $\mathbf{F}=z^2\mathbf{i}+5y\mathbf{j}+x^5\mathbf{k}$.
כלומר, חשבו את $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

8) חשבון את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

$$\mathbf{F}=\left(\frac{x^2y}{1+y^2}+6yz^2\right)\mathbf{i}+2x\arctan y\mathbf{j}-\frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\mathbf{k}\ ;$$

S הוא חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\ge 0$ (המשטח <u>פתוח</u>).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$,

מתקיים: $\iiint_G div\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$.

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\iiint_G \nabla\cdot\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$
$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$
$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S fdydz+gdzdx+hdxdy$$

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא $\frac{11}{6}$.

2) הערך המשותף הוא $\frac{8}{3}\pi$.

3) הערך המשותף הוא 27 .

4) 279π

5) 16

6) $\frac{2\pi a^5}{5}$

7) 0

8) -4π

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 42 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

שאלות

1) חשבון את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R \frac{x-y}{x+y}dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $y=x,\ y=x-1,\ y=1-x,\ y=3-x$.

2) חשבון את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R e^{xy}dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y=\frac{2}{x},\ y=\frac{1}{x},\ y=0.5x,\ y=x$.

3) חשבון את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R \sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)dA$, כאשר R הוא התחום בצורת משולש שקדקודיו הם $\mathrm{C}(1,1),\ \mathrm{B}(2,0),\ \mathrm{A}(0,0)$.

4) חשבון את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R (4x+8y)dA$, כאשר R הוא התחום בצורת מקבילית שקדקודיה הם: $\mathrm{D}(1,5),\ \mathrm{C}(3,-1),\ \mathrm{B}(1,-3),\ \mathrm{A}(-1,3)$.

5) חשבון את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R \sqrt{16x^2+9y^2}dA$, כאשר R הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

6) חשבון את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R y^2dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי העקומות $xy^2=2,\ xy^2=1,\ y=\frac{2}{x},\ y=\frac{1}{x}$.

7) חשבון את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R e^{x+y}dA$, כאשר $R=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|\le 1\right\}$.

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}\ln 3$

2) $\frac{1}{2}(e^2-e)\ln 2$

3) $1-\frac{1}{2}\sin 2$

4) 192

5) 96π

6) $\frac{3}{4}$

7) $e-\frac{1}{e}$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 43 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

תוכן העניינים

אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

בשאלות **1-4** חשבו את האינטגרלים המשולשים:

1) $$\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2dzdydx$$

2) $$\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dzdydx$$

3) $$\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$$

4) $$\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdydx$$

5) גוף כלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישור xy מלמטה, לבין מחצית פני הכדור $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ מלמעלה.
חשבו את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

6) חשבו את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ מלמעלה, ועל ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמטה.

7) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ ומלמטה על ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$, על ידי מעבר לקואורדינטות גליליות.

8) מצאו את הנפח של התחום מעל המישור xy, החסום על ידי הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ והגליל $x^2+y^2=a^2$.

9) חשבו את הנפח הכלוא בין $z=x^2+y^2$ ובין $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

10) חשבן את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z=2$ ומלמטה על ידי $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
פתרו בשלוש דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
ג. על ידי שימוש בנוסחת נפח חרוט.

11) חשבן את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z=1$ ומלמטה על ידי $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.
פתרו בשתי דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

12) חשבן את הנפח המוגבל בין כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו 1 לבין כדור שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ורדיוסו 1.
א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

13) הציגו את נפח הגוף החסום בתוך הכדור $x^2+y^2+z^2=4$ ומחוץ לגליל $x^2+y^2=1$, בשלוש דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות קרטזיות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ג. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

14) חשבן את נפח הגוף בתומן הראשון המוגבל בין כדור שרדיוסו 1 לבין כדור שרדיוסו 2, בשלוש דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ג. על ידי שימוש בנוסחה ידועה לחישוב נפח כדור.

15) ללא חישוב אינטגרלים חשב את האינטגרלים הבאים:
א. $V_1=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r}^{2-r} rdzdrd\theta$
ב. $V_2=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{r=0}^{\frac{2}{\cos\phi+\sin\phi}} r^2\sin\phi drd\phi d\theta$

16) ללא חישוב אינטגרלים חשבו את האינטגרלים הבאים :

א. $$V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{0.5} \int_{z=r}^{0.5+\sqrt{0.25-r^2}} r dz dr d\theta$$

ב. $$V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\cos\phi} r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta$$

תשובות סופיות

1) 4

2) $\frac{\pi}{3}$

3) $\frac{24\pi-32}{9}$

4) $\frac{32\pi}{5}$

5) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1107/488)\ ,\ V=\frac{122}{3}\pi$

6) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1.5/(2-\sqrt{2}))\ ,\ V=\frac{64}{3}\pi(2-\sqrt{2})$

7) $\frac{64\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$

8) $\frac{\pi}{2}a^4$

9) $\frac{5}{6}\pi$

10) $\frac{8\pi}{3}$

11) $\frac{5}{3}\pi$

12) $\frac{5}{12}\pi$

13) א. $V=\int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}1dzdydx-\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}1dzdydx$

ב. $V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2}\int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{z=\sqrt{4-r^2}}1rdzdrd\theta$

ג. $V=\int_{\phi=\pi/6}^{5\pi/6}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1/\sin\phi}^{2}r^2\sin\phi drd\theta d\phi$

14) $\frac{7}{6}\pi$

15) $\frac{2\pi}{3}$

16) $\frac{\pi}{8}$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 44 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-3**:

1) $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy$

2) $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

3) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2\varphi\, dr$

באינטגרל $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר:

4) D – משולש בעל הקודקודים: $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(1,0), \mathrm{B}(1,1)$.

5) D – משולש בעל הקודקודים: $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(2,1), \mathrm{B}(-2,1)$.

6) D – טרפז בעל הקודקודים: $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(1,0), \mathrm{B}(1,2), \mathrm{C}(0,1)$.

7) D – עיגול $x^2+y^2\le 1$.

8) D – עיגול $x^2+y^2\le y$.

9) $D=\left\{(x,y)\,|\,y\le 1, y\ge x^2\right\}$

10) $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

חשבו את האינטגרלים הבאים:

11) $\iint_D xy^2 dxdy$, כאשר D חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$.

12) $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$, כאשר D חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

13) $\iint_D |x\,y|dxdy$, כאשר D עיגול בעל הרדיוס a, שמרכזו בראשית.

14) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, כאשר D מקבילית בעלת הצלעות $y=x,\ y=x+a,\ y=a, y=3a$ $(a>0)$.

15) $\iint_D \frac{\cos y}{y^2+\pi^2}dA$, כאשר D התחום הכלוא בין $x=-1, y=0, y=\pi, y=\pi\sqrt{x}$.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{40}$

3) $\frac{a^3}{3}\pi$

4) $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$

5) $\int_0^2 dx\int_{x/2}^1 f(x,y)dy+\int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$

7) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy=\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

8) $\int_{-1/2}^{1/2} dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$

9) $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

10) $$\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx+$$
$$+\int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

11) $\frac{32}{21}$

12) $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$

13) $\frac{a^4}{2}$

14) $14a^4$

15) 0

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות **1-6**:

1) $\int_{0}^{2}\int_{x}^{2x} f(x,y)dydx$

2) $\int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dydx$

3) $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$

4) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx$

5) $\int_{1}^{2}\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

6) $\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x} f(x,y)dydx$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז: שנו את סדר האינטגרציה):

7) $\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}dxdy$

8) $\int_{0}^{3}\int_{1}^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$

9) $\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2}ydxdy \quad (x,y\geq 0)$

10) $\int_{0}^{4}\int_{x}^{4}\sin(y^2)dydx$

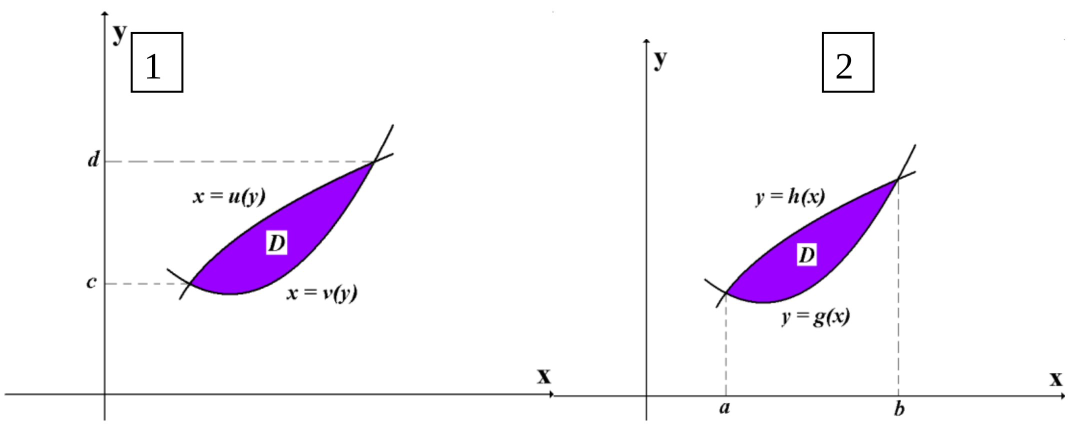
הערות סימון

$\boxed{1}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dydx=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

$\boxed{2}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$



שימו לב, ישנם מוסדות שבהם לא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$ כך: $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dxdy$. רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר הרישומים $dxdy$ ו- $dydx$ זהים.

תשובות סופיות

1) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

3) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

4) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$

5) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

7) $\frac{1}{3}\left(e^8-1\right)$

8) $\frac{241}{60}$

9) $\frac{1}{4}(e-2)$

10) $\frac{1}{2}(1-\cos 16)$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 45 - שימושי האינטגרל הכפול

תוכן העניינים

שימושי האינטגרל הכפול

שאלות

בשאלות **1-4** חשבון את **שטחי התחומים** החסומים ע"י העקומים:

1) $x+y=2,\quad x^2-4y=4$

2) $(a>0)\quad xy=a^2,\quad x+y=\frac{5}{2}a$

3) $y^2=9-x,\quad y^2=9-9x$

4) $x+y=3,\quad y^2=4x$

בשאלות **5-10** חשבון את **נפחי הגופים** החסומים ע"י המשטחים:

5) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

6) $z=0\,,\ z=x^2+y^2\,,\ y=1,\ y=x^2$

7) $(x>0)\ z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\frac{2}{x}$

8) $z=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

9) $(z\ge 0)\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y$

10) $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

11) ללוח דק בצורת משולש, שקדקודיו הם $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$,
יש פונקציית צפיפות $\delta(x,y)=xy$.
א. חשבו את מסת הלוח.
ב. חשבו את מרכז הכובד של הלוח.

12) ללוח דק בצורת מלבן $R=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2},\quad -\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\right\}$,
יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני).
חשבו את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר ה- z.
בטאו את התשובה באמצעות המסה של הלוח, M.

13) מצאו את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2+z^2=4$, הנמצא מעל למלבן
$R=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 4\}$, שבמישור xy.

תשובות סופיות

1) $\frac{64}{3}$

2) $a^2\left(\frac{15}{8}-2\ln 2\right)$

3) 32

4) $\frac{64}{3}$

5) $\frac{5}{6}$

6) $\frac{88}{105}$

7) $\frac{17}{6}$

8) $16\frac{1}{5}$

9) $\frac{8}{3}$

10) 36

11) א. $\frac{1}{24}$ ב. $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$

12) $\frac{M\left(a^2+b^2\right)}{12}$

13) $\frac{1}{6}\pi\left(5\sqrt{5}-1\right)$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 46 - משפט סטוקס (גרין במרחב)

תוכן העניינים

משפט סטוקס

שאלות

בשאלות **1-3** בדקו שמשפט סטוקס אכן מתקיים.
כלומר, חשבו את האינטגרל $\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}ds$, ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$,
והראו שהם שווים זה לזה (ראו הערת סימון בעמוד הבא).

1) $\mathbf{F}=2z\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+5y\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\ge 0$.

2) $\mathbf{F}=\left(x^2+y-4\right)\mathbf{i}+\left(-3xy\right)\mathbf{j}+\left(2xz+z^2\right)\mathbf{k}$; S הוא שפת חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy.

3) $\mathbf{F}=(y+z)\mathbf{i}-xz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$; S הוא משטח התחום בשמינית הראשונה, החסום על ידי המישורים $2x+z=6,\ y=2$, ושאינו כלול

א. במישור xy.

ב. במישור $y=2$.

ג. במישור $2x+z=6$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint_C x^2dx+4xy^3dy+y^2xdz$, כאשר C עקומה בצורת מלבן מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,3,3)$, משם ל- $(1,3,3)$ ומשם ל- $(1,0,0)$.

5) חשבו את האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, כאשר $\mathbf{F}=\left(x+y^2\right)\mathbf{i}+\left(y+z^2\right)\mathbf{j}+\left(z+x^2\right)\mathbf{k}$;
ו- C היא שפת המשולש, שקדקודיו הם $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$,
וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה, מהכיוון החיובי של ציר ה- z).

6) חשבו את $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$, כאשר $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$; ו- S הוא החלק של הכדור $x^2+y^2+z^2=4$, הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$, ומעל למישור xy.

7) חשבו את $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$, כאשר $\mathbf{F} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$;
ו- S הוא משטח החרוט $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, מעל למישור- xy.

הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$,
מתקיים: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$.

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{Rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$
$$\oint_C fdx + gdy + hdz = \iint_S \left((h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k}\right) \cdot \mathbf{n} dS$$

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא 12π.
2) הערך המשותף הוא -16π.
3) הערך המשותף הוא: א. -6 ב. -9 ג. -18
4) -90
5) -1
6) 0
7) 12π

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 47 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

הצגה פרמטרית של עקום

שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \geq 0,\ \ x = t^2 + 1,\ \ y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi,\ \ x = \sin t,\ \ y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi,\ \ x = \cos t,\ \ y = 4\sin t$

2) עברו מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א. $1 \leq x \leq 4,\ \ y = x^4 + 1$

ב. $-2 \leq x \leq 2,\ \ y = -\sqrt{4 - x^2}$

ג. $-2 \leq x \leq 2,\ \ y = +\sqrt{4 - x^2}$

3) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t, מצאו משוואה מתאימה,
שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4,\ \ y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t,\ \ y = 1 + 2\sin t$

ג. $x = 4 + \cos^3 t,\ \ y = 4\sin^3 t$

ד. $x = t(t+1) + 1,\ \ y = t(0.5t + 1) + 1$

ה. $x = \dfrac{20t}{4+t^2},\ \ y = \dfrac{20t - 5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t},\ \ y = ke^t - ke^{-t}$ (k קבוע).

תשובות סופיות

1) א. $y=x-1,\ x\geq 1$ ב. $y=1-x^2,\ -1\leq x\leq 1$

ג. $x^2+\frac{y^2}{16}=1,\ -1\leq x\leq 1,\ y\leq 0$

2) א. $x=t,\ \ y=t^4+1,\ \ 1\leq t\leq 4$ ב. $x=2\cos t\ ,\ y=2\sin t\ ,\ \pi\leq t\leq 2\pi$

ג. $x=2\cos t\ ,\ y=2\sin t\ ,\ 0\leq t\leq \pi$

3) א. $y=(x+4)^2$ ב. $(x+4)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2=1$ ג. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2-4xy+4y^2=2y-1$ ה. $x^2+y^2=25$ ו. $x^2-y^2=4k^2$

הנגזרת ושימושיה

שאלות

1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t\cos t \end{cases}$, הנתונה בצורה פרמטרית.

2) נתון העקום $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$.

א. שרטטו את העקום.

ב. חשבו את $y'(x)$ בשלוש דרכים שונות.

ג. מצאו את משוואת המשיק לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

ד. מצאו את משוואת הנורמל לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

3) נתון העקום $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases}$.

א. שרטטו את העקום.

ב. מצאו את משוואת המשיק לעקום בנקודה $(0,0)$.

ג. מצאו את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי,
ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של t העקום קמור/קעור?

תשובות סופיות

1) $y' = \dfrac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}$, $y'' = \dfrac{(-t\cos t - 2\sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t\sin t)}{(1 - \cos t)^3}$

2) א. ראו בסרטון. ב. $y' = \dfrac{-2}{2t+1}$ ג. $y = 2x + 3$ ד. $y = -0.5x + 3$

3) א. ראו בסרטון. ב. $y = \pm\sqrt{3}x$ ג. אופקי- $(0,-9)$ אנכי $(-2,-6),(2,-6)$

ד. $-1 < t < 1$ קמור. $t > 1$ או $t < -1$ קעור.

שימושי האינטגרל המסוים

1) חשבון את השטח הכלוא בעקום $C: \begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin 4t \end{cases}$.

2) חשבון את השטח הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, כאשר $a,b>0$.
* שימו לב שאם $a=b=r$, נקבל שטח הכלוא בתוך מעגל עם רדיוס r.

3) חשבון את השטח הכלוא בין העקום $y=t+\sin t, \quad x=\cos t, \quad 0\le t\le \pi$
לבין ציר ה- x.

4) חשבון את השטח הכלוא בין העקום $y=\sin^2 t, \quad x=4\cos t, \quad 0\le t\le 2\pi$
לבין ציר ה- x.

5) חשבון את אורך העקום $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

6) חשבון את אורך העקום $\begin{cases} x=\cos t \\ y=t+\sin t \end{cases}$, מהנקודה $(1,0)$ לנקודה $(-1,\pi)$.

7) חלקיק נע לאורך מסלול, המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית
$\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin 2t \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$
מצאו את המרחק שהחלקיק עבר והשוו אותו לאורך העקום עצמו.

8) חלק העקום $\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases}$, שבין $t=0$ לבין $t=\pi$, מסתובב סביב ציר ה- x.
מהו שטח המעטפת הנוצרת?

9) חלק העקום $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$, שבין $t=0$ לבין $t=\frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y.
מהו שטח המעטפת הנוצרת?

10) חשבון את אורך העקום $-\pi\le t\le 2\pi$ $\begin{cases} x=4\sin t \\ y=10t \\ z=4\cos t \end{cases}$.

11) חשבו את אורך העקום $\mathbf{r}(t)=\left(e^t\cos t\right)\mathbf{i}+\left(e^t\sin t\right)\mathbf{j}+\left(e^t\right)\mathbf{k}$, $1\le t\le 3$.

תשובות סופיות

1) $8/3$

2) πab

3) 1.5π

4) $16/3$

5) 8

6) 4

7) אורך העקום הוא 2π. המרחק שעבר החלקיק הוא 4π.

8) $4\pi r^2$

9) $6\pi/5$

10) $6\pi\sqrt{29}$

11) $\sqrt{3}e\left(e^2-1\right)$

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 48 - נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה

תוכן העניינים

קואורדינטות קוטביות

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1,-1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10,-\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0,-4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2,2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $4x-x^2=1+xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r=-4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $x^2+y^2=4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x=10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y=4$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $r=4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המירו את המשוואה $\theta=\pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשוואה $r=2\cos\theta+4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המירו את המשוואה $6r^3\sin\theta=4-\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

תשובות סופיות

1) א. $(x,y)=\left(2,2\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$

2) א. $(x,y)=\left(5,-5\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$ ג. $(r,\theta)=\left(\sqrt{8},\frac{3\pi}{4}\right)$

3) א. $4r\cos\theta-r^2\cos^2\theta=1+r\cos\theta\cdot r\sin\theta$ ב. $(x+2)^2+y^2=2^2$

4) א. $r=4\sin\theta$ ב. $r\cos\theta=10$ ג. $r\sin\theta=4$

5) א. $x^2+y^2=4^2$ ב. $y=x$ ג. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

ד. $6\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\cdot y=4\sqrt{x^2+y^2}-x$

הנגזרת ושימושיה

שאלות

1) מצאו את משוואת המשיק לעקום $r = 3 + 8\sin\theta$ בנקודה $\theta = \frac{\pi}{6}$.

2) מצאו את משוואת המשיק לעקום $r = 1 - 2\sin\theta$ בראשית הצירים.

תשובות סופיות

1) $y = \frac{11\sqrt{3}}{5}x - \frac{98}{5}$

2) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

שימושי האינטגרל המסוים

שאלות

1) חשבו את השטח של הלולאה הפנימית של $r = 2(1+2\cos\theta)$.

2) חשבו את השטח הכלוא בתוך $r = 6+4\cos\theta$ ומשמאל לציר ה- y.

3) חשבו את השטח הכלוא בתוך $r = 3+2\sin\theta$.

4) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r = 3+2\sin\theta$ ומחוץ ל- $r = 2$.

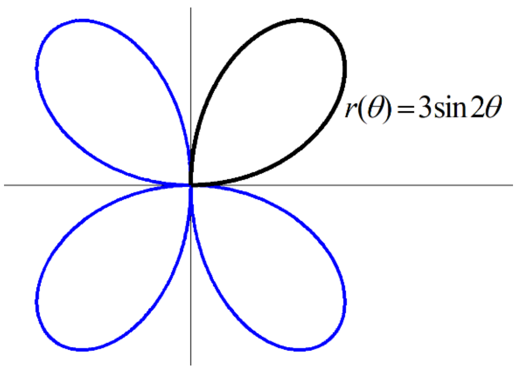
5) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r = 2$ ומחוץ ל- $r = 3+2\sin\theta$.

6) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r = 2$ ובתוך $r = 3+2\sin\theta$.

7) חשבו את השטח הכלוא בתוך המעגל $r = 2\sin\theta$ ומחוץ למעגל $r = 1$.

8) מצאו את אורך הקרדיואידה $r = 1+\cos\theta$.

9) מצאו את האורך של עלה אחד של הוורד $r = 3\sin 2\theta$.
אין צורך לחשב את האינטגרל!



10) מצאו את אורך העקום $r = \theta$, כאשר $0 \le \theta \le 1$.

11) העקום $r = \cos\theta$, כאשר $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- x.
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

12) העקום $r=4+4\sin\theta$, כאשר $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y.
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

תשובות סופיות

1) $S=4\pi-6\sqrt{3}=2.174$

2) $S=22\pi-48$

3) $S=11\pi$

4) $S=\frac{11\sqrt{3}}{2}+\frac{14\pi}{3}=24.187$

5) $S=\frac{11\sqrt{3}}{2}-\frac{7\pi}{3}=2.196$

6) 10.37

7) $S=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

8) 8

9) $\ell=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos^2 2\theta}\,d\theta$

10) $\ell=\frac{\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$

11) $S_x=\pi$

12) $S_y=102.4\pi$

נספח - גרפים נפוצים בקואורדינטות פולריות

קווים

1) $r\cos\theta = a$ - הישר $x=a$.
2) $r\sin\theta = b$ - הישר $y=b$.
3) $\theta=\beta$ - הישר העובר דרך הראשית $y=(\tan\beta)x$.

מעגלים

1. $r=a$ - מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו a.
2. $r=2a\cos\theta$ - מעגל שמרכזו בנקודה $(a,0)$ ורדיוסו $|a|$.
3. $r=2b\sin\theta$ - מעגל שמרכזו בנקודה $(0,b)$ ורדיוסו $|b|$.
4. $r=2a\cos\theta+2b\sin\theta$ - מעגל שמרכזו בנק' (a,b) ורדיוסו $\sqrt{a^2+b^2}$.

קרדיודות ולמניסקטות

1) קרדיודות $r=a\pm a\cos\theta,\ r=a\pm a\sin\theta$:
גרף בצורת לב שמכיל את הראשית.

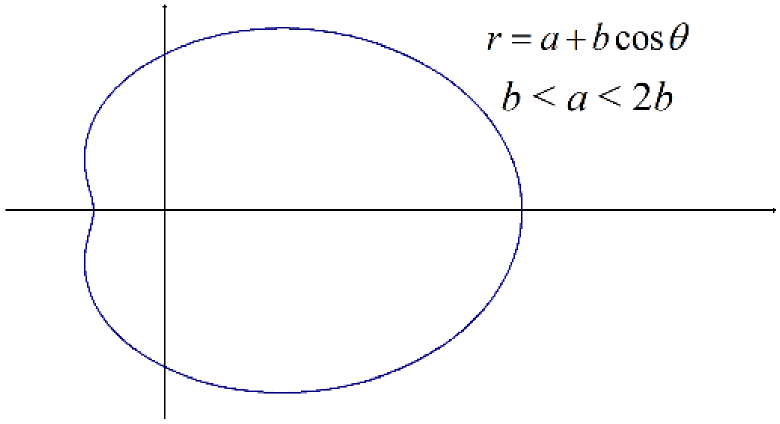
2) למניסקטות עם לולאה פנימית $r=a\pm b\cos\theta,\ r=a\pm b\sin\theta$ $(a<b)$:
גרף שיכיל לולאה פנימית ושתמיד יכיל את הראשית.

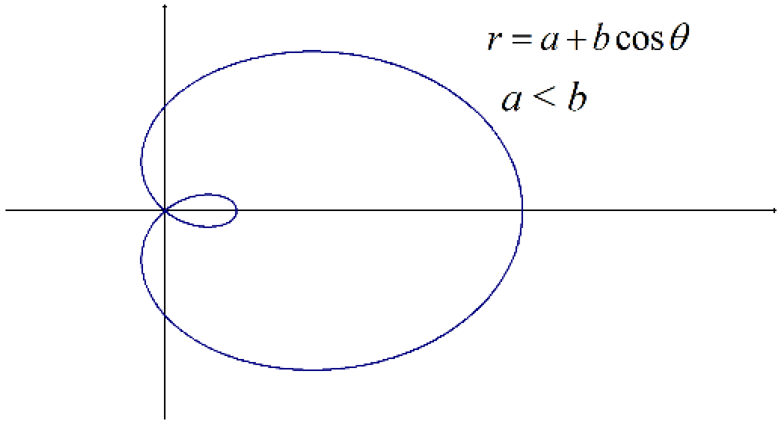
3) למניסקטות ללא לולאה פנימית $r=a\pm b\cos\theta,\ r=a\pm b\sin\theta$ $(a>b)$:
גרף ללא לולאה פנימית שאינו מכיל את הראשית.

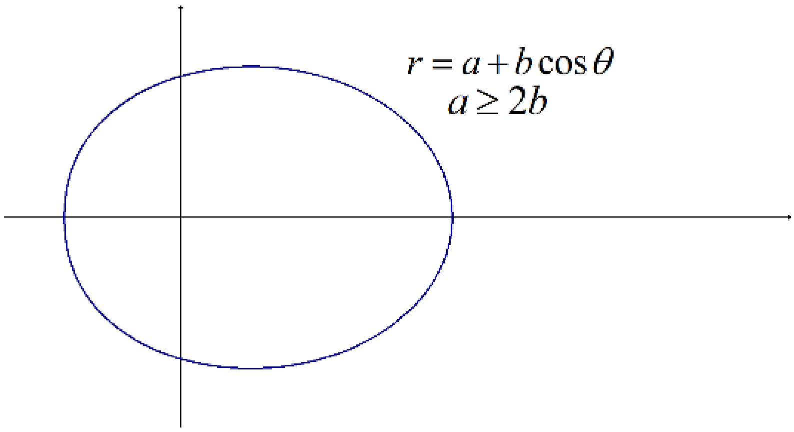
* נשרטט בדרך כלל עבור מחזור שלם $0\le\theta\le 2\pi$.

למינסקטות ביתר פירוט

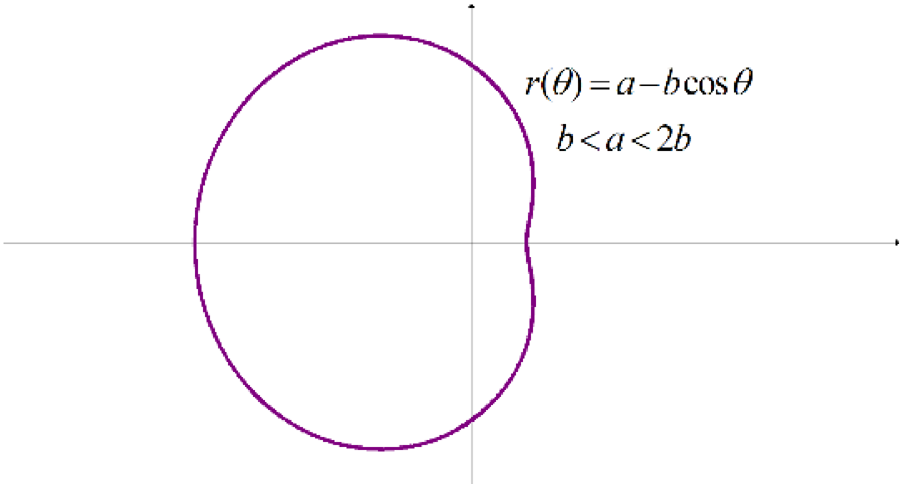
הגרף של $r = a + b\cos\theta$:

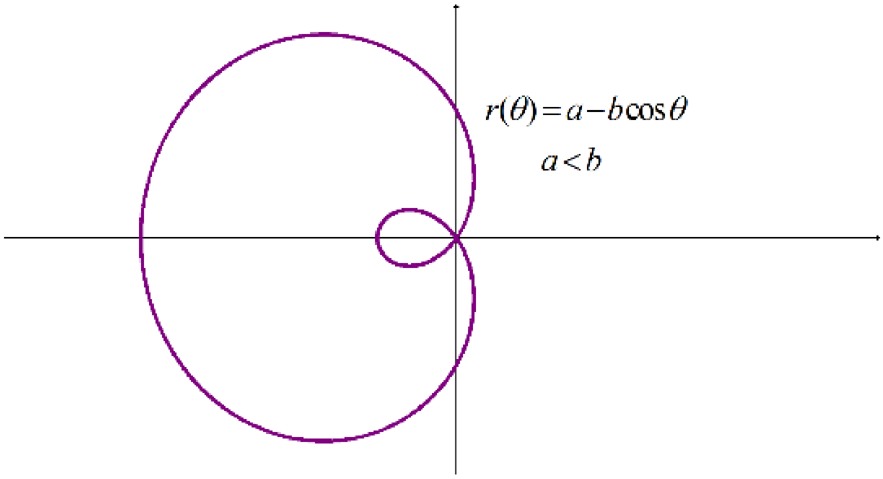


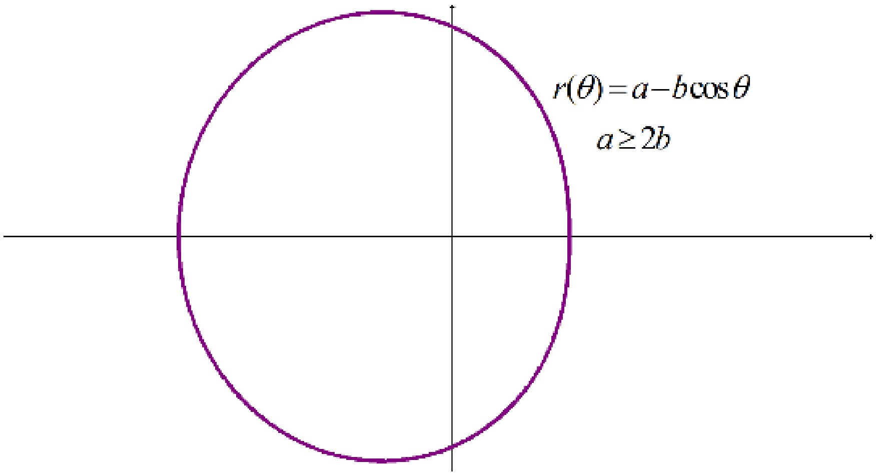




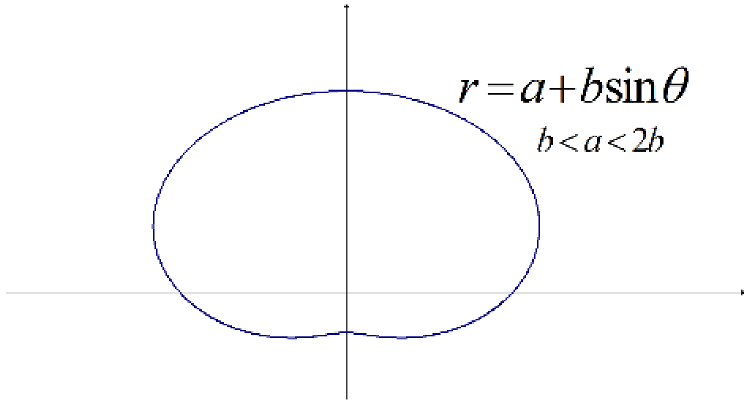
הגרף של $r = a - b\cos\theta$

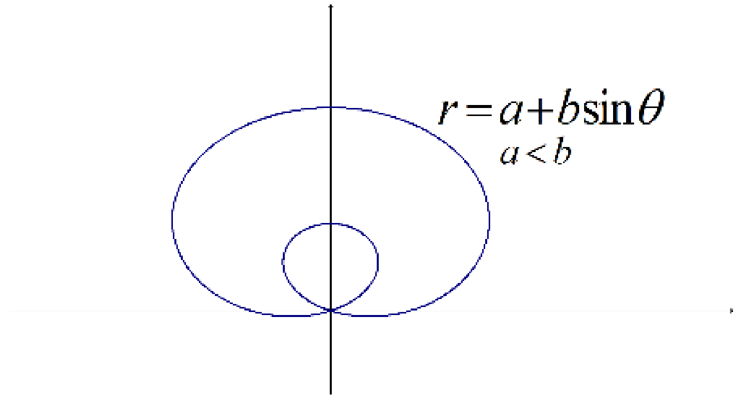


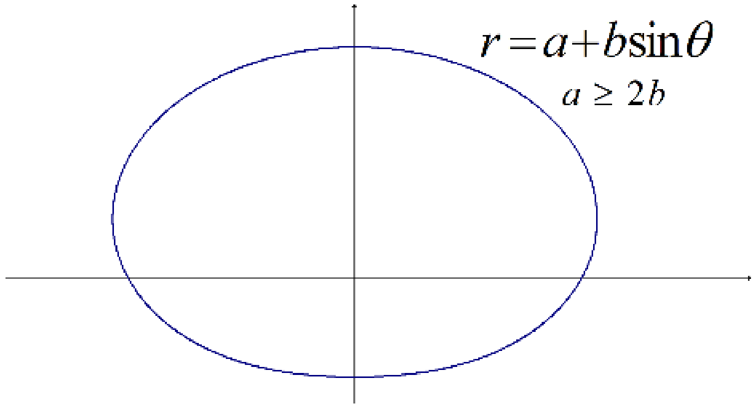




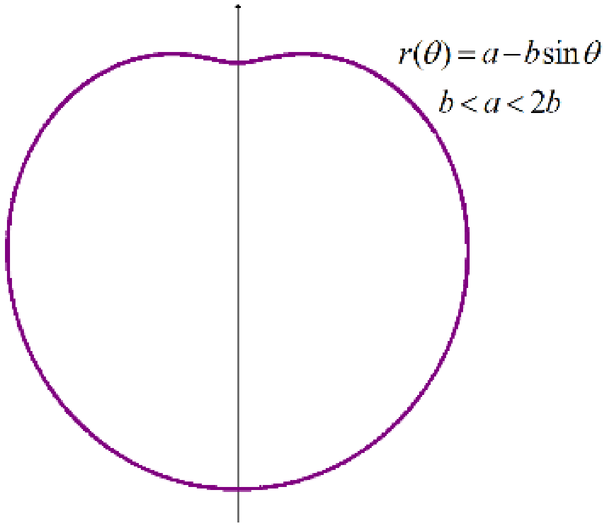
הגרף של $r=a+b\sin\theta$

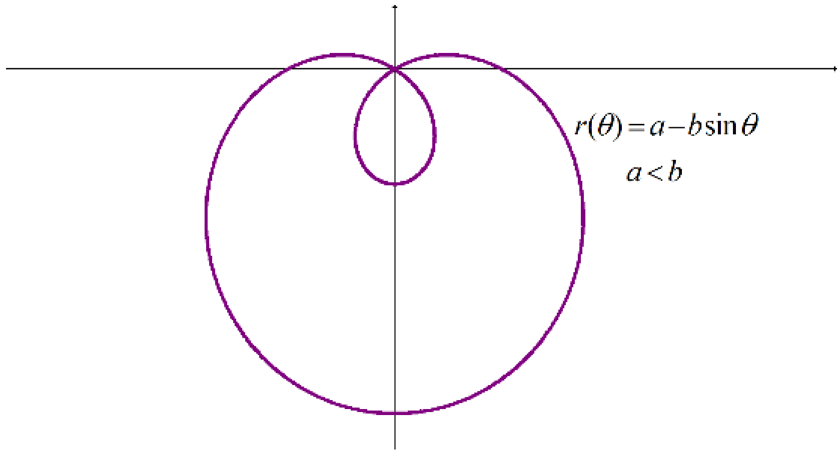


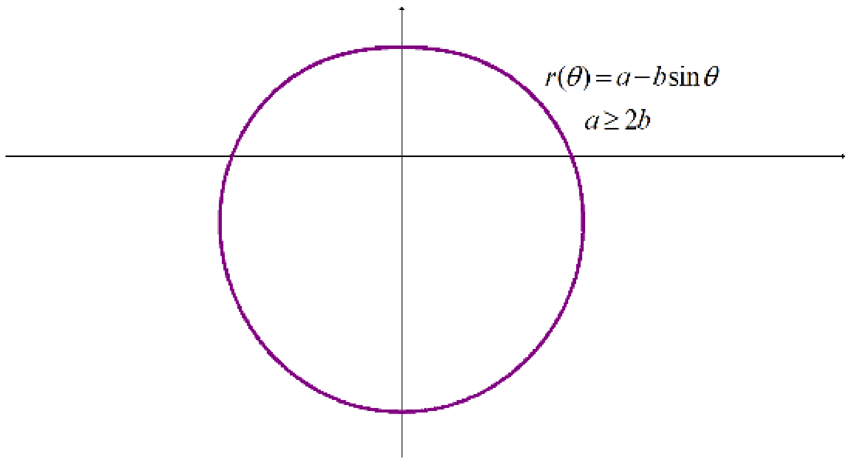




הגרף של $r = a - b\sin\theta$







גרפים נפוצים נוספים