מבוא לתאוריה למדעי המחשב

GOOL

בשביל התירגול

תוכן העניינים

תוכן העניינים

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 1 - הבינום של ניוטון

תוכן העניינים

הבינום של ניוטון

שאלות

1) הוכיחו אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=3^n$.

2) הוכיחו לכל $n\geq 0$ את הזהות $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{2n-k}=6^n$.

3) הוכיחו את השוויון

$$2^n=3^n-n3^{n-1}+\binom{n}{2}3^{n-2}-\ldots+(-1)^k\binom{n}{k}3^{n-k}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}3^0$$

4) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=2^{2n}$.

5) הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\binom{m+n}{2}=\binom{n}{2}+\binom{m}{2}+mn$.

6) הוכיחו כי $\binom{2n}{n}$ זוגי לכל $n\in\mathbb{N}$.

7) הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}2^{k-1}=\frac{n}{3}\cdot 3^n$.

8) הוכיחו כי $\binom{x+y}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$, $\forall x,y,n\in\mathbb{N}^+$.

9) הוכיחו את השוויון $\sum_{k,j=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{j}\binom{n}{k+j}=\binom{3n}{n}$.

10) הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את הזהות $\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$.

11) הוכיחו שלכל $n \ge 0$ ולכל $0 \le k \le n$ מתקיים $\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k+2} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

12) הוכיחו אלגברית וקומבינטורית את הזהות

$$(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1 = \frac{\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2}}{n!}$$

13) הוכיחו את הזהות $6n^2\binom{5n-2}{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k(n-k)\binom{2n}{k}\binom{3n}{n-k}$.

14) הוכיחו את השוויון $\binom{k+N}{N} = \sum_{n=0}^{N}\binom{k-1+n}{n}$.

15) הוכיחו כי אם $n > 0$ זוגי, אז $2^n > \binom{n}{\frac{n}{2}}$.

16) כמה מבין המספרים בפיתוח הבינום $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{7}\right)^{80}$ שלמים?

17) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $n^n - (n-1)^n = \sum \binom{n}{i}(n-1)^{n-i}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 2 - תורת הגרפים

תוכן העניינים

מבוא לתורת הגרפים

שאלות

הערה: חלק קטן משאלות פרק זה מסתמכות על מושג העץ.
רצוי ללמוד את הפרק עצים שהוא פרק חשוב ביותר.

1) ענו על הסעיפים הבאים:
א. יהי $G=(V,E)$ גרף על 43 צמתים: 10 צמתים מדרגה 7, 17 צמתים מדרגה 6, 12 צמתים מדרגה 4 והיתר מדרגה 1.
כמה קשתות יש ב- G?
ב. הוכיחו כי בכל גרף מספר הצמתים מדרגה אי-זוגית הוא זוגי.

2) עבור $n\in\mathbb{N}$ נגדיר גרף פשוט G_n, כך שצמתיו הם 2^n הסדרות הבינאריות באורך n, ושני קודקודים מחוברים ביניהם בקשת אם ורק אם הם נבדלים בקואורדינטה אחת.
מה מספר הקשתות של G_5 ושל G_n? (גרף כזה נקרא גרף הקובייה)

3) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\}\,\|A|=3\}$
$E=\{\{A,B\}\,\|A\cap B|=1\}$, למשל $\{\{2,4,7\},\{1,4,6\}\}\in E$, כי בחיתוך יש איבר אחד.
א. מהו מספר הצמתים? מה דרגת כל קודקוד? מה מספר הקשתות?
ב. האם G דו"צ?

4) חזרו על שאלה קודמת עבור הגרף $G=(V,E)$ באופן הבא:
V כמו קודם ו- $E=\{\{A,B\}|A\cap B=\varnothing\}$.

5) יהי $G=(V,E)$ על 7 צמתים: 4 מהצמתים הם מדרגה 5 וכל יתר הדרגות קטנות מ-3.
מהן האפשרויות הנכונות?
א. יש גרף פשוט כזה, שהוא קשיר.
ב. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
ג. יש גרף כזה, אבל הוא לא פשוט ולא קשיר.
ד. יש גרף כזה, והוא לא פשוט וקשיר.

6) נתונים שני גרפים G_2 , G_1 על 5 קודקודים. סדרת דרגותיו של G_1 היא 2,2,3,4,5,5,6 וסדרת דרגותיו של G_2 היא 1,2,3,4,4.
לגבי כל אחד משני הגרפים קבעו איזו מן הטענות הבאות נכונה:
א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.
ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא פשוט.
ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
ה. לא קיים גרף כזה.

7) ענו על הסעיפים הבאים:
א. יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים.
הוכיחו כי אם לכל שני קודקודים $x,y\in V$ מתקיים $d(x)+d(y)\geq n-1$, אז G קשיר.
ב. הוכיחו באינדוקציה כי גרף על n קודקודים ופחות מ-$n-1$ קשתות אינו קשיר.

8) יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים.
הוכיחו כי אם: $|E|>\binom{n-1}{2}$ $(*)$ אז G קשיר, כאשר $|E|$ מספר הקשתות.
הראו גם כי חסם זה הדוק. כלומר, הראו גרף פשוט G, עבורו $|E|=\binom{n-1}{2}$,
כך ש-G אינו קשיר. זה מראה שלא ניתן לשפר את אי השוויון $(*)$.

9) יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט ויהיו $x,y\in V$ שני קודקודים לא שכנים.
הוכיחו כי אם $d(x)+d(y)\geq n$, אז יש ל-x ול-y לפחות שני שכנים משותפים.

10) יהי G גרף פשוט על $n\geq 2$ צמתים, ויהיו $u,v\in V$ קודקודים שאינם שכנים.
הוכיחו כי אם: $d(u),d(v)\geq \frac{n+1}{2}$ אז יש ל-u,v לפחות שלושה שכנים משותפים.

11) יהי $G=(V,E)$ גרף, כך ש-$(n\geq 2)$, $V=P_2(\{1,2,..,n\})$, $e\in E \iff A\cap B=\phi$,
כאשר $A,B\in V$.
א. חשבו את $|V|$.
ב. מהי דרגת כל צומת?
ג. הוכיחו כי אם $n\geq 5$ אזי G קשיר (רמז: דרך השלילה).

12) יהי G גרף פשוט על 10 קודקודים שיש בו 41 קשתות.
הוכיחו:
א. יש לפחות שני קודקודים ב-G שדרגתם היא 9.
ב. G קשיר.

13) יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט.
הוכיחו כי אם $|V|=|E|$, אז ב- G יש מעגל, ואם G קשיר, אז המעגל יחיד.

14) יהי G גרף פשוט קשיר בן 7 קודקודים, שסדרת דרגותיו היא 3,2,2,2,1,1,1.
כמה מעגלים פשוטים יש בגרף?

15) יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים.
הוכיחו כי אם לכל קודקוד $x\in V$ מתקיים $d(x)\geq \frac{n}{2}$, אז ב- G מעגל באורך 4.

16) הוכיחו כי בכל גרף פשוט על 100 קודקודים, שבו כל הדרגות הן לפחות 10, יש מעגל באורך ≥ 4.

17) יהי G גרף פשוט.
הוכיחו כי לפחות אחד מבין הגרפים $G,\bar{G}$ קשיר.
בניסוח שקול: הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_n בשני צבעים לפחות, אחד הגרפים החד צבעיים הוא קשיר.

18) הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_6 בשני צבעים, יש משולש מונוכרומטי (משולש חד צבעי).

19) הוכיחו כי בכל קבוצה של 9 אנשים יש בהכרח לפחות 4 המכירים זה את זה או לפחות 3 שאף שניים מהם אינם מכירים זה את זה.

20) יהי G גרף שקודקודיו הם תתי קבוצות בנות 4 אברים של הקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$, (כאשר n גדול מ-6). שני קודקודים מחוברים בקשת בגרף אם בחיתוך שלהם יש שני אברים <u>בדיוק</u>. לדוגמה, הקודקוד $\{1,2,3,4\}$ שכן של $\{1,2,7,8\}$, אך לא של $\{1,2,3,7\}$.
כמה קודקודים בגרף הם שכנים של $\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,3,4\}$ או $\{1,2,4,5\}$?

21) הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_{17} ב-8 צבעים יש מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבע אחד (מעגל מונוכרומטי).

22) כמה מעגלים פשוטים באורך $3 \le k \le n$ יש בגרף השלם K_n על קבוצת הקודקודים $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$?
שני מעגלים המתקבלים אחד מהשני על ידי סיבוב נחשבים זהים.
למשל, עבור $n=5$, שני המעגלים $1,2,3,4,5,1$ ו-$3,4,5,1,2,3$ נחשבים זהים, ואילו המעגלים $1,2,3,1$ ו-$1,3,2,1$ אינם זהים.

23) נצבע ב-$n \ge 2$ צבעים את קשתות הגרף השלם K_n, כך שכל צבע מופיע לפחות פעם אחת.
הוכיחו כי קיים מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבעים שונים.

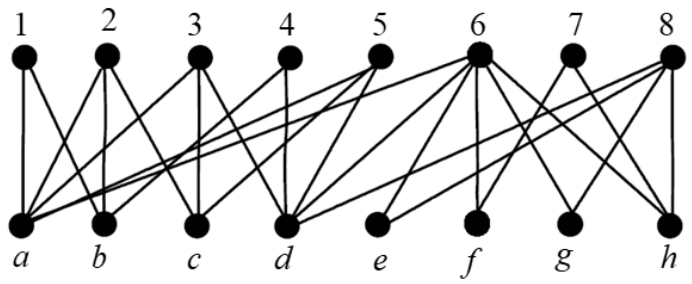
24) יהי G גרף קשיר על 13 קודקודים, שניתן לצבוע בשלושה צבעים (כלומר, אפשר לצבוע את הקודקודים בשלושה צבעים, כך שאין שני קודקודים מאותו צבע שמחוברים בקשת).
הוכיחו שיש בגרף אנטי קליקה בגודל 5 (כלומר, 5 קודקודים שאף אחד מהם לא מחובר לאף אחד אחר).

25) נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ ו-$G_3=(V,E_3)$. נגדיר $G=(V,E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ כאיחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל קודקוד ב-V דרגתו ב-G היא לפחות 6.
הוכיחו כי לפחות אחד מהגרפים G_1, G_2 ו-G_3 <u>אינו</u> חסר-מעגלים.
שאלה זו מופיעה גם בפרק עצים.

26) יהי G_n גרף פשוט שקודקודיו הם כל תתי-הקבוצות של $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$, למעט $\varnothing$ ו-$\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ עצמה. שני קודקודים הם שכנים אם ורק אם אף אחד אינו מוכל במשנהו.
א. הוכיחו כי לכל $n \ge 2$, G_n קשיר.
ב. הוכיחו כי אם v תת קבוצה בת k איברים של $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$: אז דרגתה כקודקוד ב-G_n היא: $2^n - 2^{n-k} - 2^k + 1$.
ג. הוכיחו כי לכל $n \ge 3$ קיים מעגל המילטון ב-G_n. מותר להסתמך על סעיפים קודמים ועל העובדה ש-$2^{n-k} + 2^k \le 2^{n-1} + 2$.

27) כמה זיווגים מושלמים יש,
(שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי)
א. בגרף המלא K_5 ?
ב. בגרף המלא K_6 ?
ג. בגרף הדו״צ המלא $K_{5,5}$?
(הגדרת גרף דו״צ בפרק גרף דו צדדי)
ד. בגרף הדו״צ המלא $K_{5,5}$, כאשר מחקנו שלוש קשתות שיש להן צומת משותף?

28) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו כי בגרף הבא אין זווג מושלם.
ב. מצאו זווג מקסימום.
ג. מהו המספר המינימלי של קשתות שיש להוסיף לגרף כך שיהיה זווג?



29) יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט, ונגדיר גרף חדש $H=(V,E')$ באופן הבא:
$E'=\{\{x,y\}|x,y\in V\wedge\exists z\in V:\{\{x,z\},\{y,z\}\}\subseteq E\}$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם G קשיר, אז H קשיר.
ב. אם G קשיר, אז H לא קשיר.
ג. אם H קשיר, אז G קשיר.
ד. אם H קשיר, אז G לא קשיר.

30) נתון גרף G.
הוכיחו כי אם $\bar{G}$ לא קשיר, אז לכל שני קודקודים x,y ב- G מתקיים $d(x,y)\le 2$ (כאשר $d(x,y)$ הוא המרחק בין x ל- y).

31) נתונה קבוצה בת 5 קודקודים $V=\{v,u,t,s,r\}$.
כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים V מקיימים שדרגת כל קודקוד קטנה ממש מ-4?

32) יהי G גרף חסר מעגלים כעל 20 קודקודים ו-15 קשתות.
כמה רכיבי קשירות בגרף?

33) הוכיחו כי בכל צביעה של קשתות K_{2t+1} ב-t צבעים, נקבל מעגל חד צבעי.

גרף דו צדדי

שאלות

1) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\} \| |A|=3\}$
$E=\{\{A,B\} \| |A\cap B|=1\}$.

א. האם G דו צדדי?
ב. האם G דו קשיר?

2) יהי $G=(V,E)$ גרף, כאשר כל צומת של G היא סדרה בינארית באורך 6.
למשל, 000000 צומת של G. שני צמתים הם מחוברים אם הם נבדלים זה מזה בשני מקומות בדיוק. למשל, 010111 מחובר ל-011101, כי הם נבדלים במקומות השלישי והחמישי.

א. כמה קשתות יש ל-G?
ב. האם G קשיר? כמה רכיבי קשירות יש ל-G?
ג. האם G דו״צ?
ד. (למי שלמדו גרפים מישוריים, האם G מישורי?)

3) מחקו $n-1$ קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם $K_{2,n}$ (כאשר $n\ge 1$) והתקבל גרף G שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר, אין בו קודקודים שדרגתם אפס).
הוכיחו ש-G הוא עץ (שאלה זו מופיעה גם בפרק עצים).

4) מה הגרף המשלים של הגרפים הדו״צ $K_{4,4}, K_{5,5}$, ובאופן כללי $K_{n,n}$?

5) יהיו $G_1=(V_1,E_1)$ ו-$G_2=(V_2,E_2)$ שני גרפים, כאשר האיחוד שלהם מוגדר להיות $G_1\cup G_2=(V,E)$ כש-$V=V_1\cup V_2, E=E_1\cup E_2$.
הוכיחו או הפריכו:

א. איחוד של שני גרפים דו״צ הוא גרף דו״צ.
ב. איחוד של שני גרפים דו״צ על קבוצות צמתים זרות הוא גרף דו״צ.
ג. איחוד של n גרפים דו״צ על קבוצות צמתים זרות הוא גרף דו״צ.
ד. איחוד של n גרפים דו״צ על קבוצות צמתים זרות בזוגות הוא גרף דו״צ.

6) הציגו את K_{16} כאיחוד של 4 גרפים דו״צ.

7) הוכיחו או הפריכו:
אם $G=(V,E)$ גרף דו"צ k רגולרי שצדדיו הם A,B, אז $|A|=|B|$.

8) יהיו $G_1,G_2,G_3,\cdots,G_7$ שבעה גרפים דו"צ שונים על אותה קבוצת צמתים V.
לכל גרף צדדים A_i,B_i, כאשר $i=1,2,3,4,5,6,7$. כמובן שבסימונים אלה
מתקיים $A_i\cap B_i=\varnothing$, $A_i\cup B_i=V$ לכל $1\le i\le 7$.
יהי G איחוד כל הגרפים האלה, כאשר אם יש קשר המופיע בכמה גרפים ניקח
רק קשת אחת, כך שאין קשתות מרובות והגרף שהגדרנו הוא גרף פשוט.
לכל צומת ב- G נתאים סדרה בת שבע אותיות לפי הצדדים אליה הוא שייך
בגרפים $G_1,G_2,G_3,\cdots,G_7$, בהתאמה.
למשל, אם v שייך לקבוצות $A_1,A_2,B_3,B_4,B_5,A_6,A_7$, כלומר בשני הגרפים
הראשונים הוא בצד A, בשלושת הגרפים הבאים בצד B, ובשני הגרפים
האחרונים בצד A, אז נשמיט את האינדקסים ונתאים לו את המילה $AABBBAA$.
כלומר, ל- v שלנו תתאים המילה $AABBBAA$, ובאופן דומה, לכל צומת תתאים
מילה בת 7 אותיות.
הוכיחו כי אם לשני צמתים u,v מתאימה אותה מילה אז אין צומת ב- G בין u
לבין v.

9) יהי G גרף דו צדדי $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\varnothing$, ונתון כי G הוא d רגולרי, $d\ge 1$.
הוכיחו כי $|V_1|=|V_2|$.

10) הוכיחו או הפריכו:
א. אם לגרף יש שני רכיבי קשירות בדיוק, אז הגרף המשלים הוא דו צדדי.
ב. אם לגרף יש שני רכיבי קשירות בדיוק, אז הגרף המשלים אינו דו צדדי.

11) כמה זיווגים מושלמים יש,
(שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי)
א. בגרף המלא K_5?
ב. בגרף המלא K_6?
ג. בגרף הדו"צ המלא $K_{5,5}$?
(הגדרת גרף דו"צ בפרק גרף דו צדדי)
ד. בגרף הדו"צ המלא $K_{5,5}$ כאשר מחקנו שלוש קשתות שיש להן צומת משותף?

12) יהי $G=(V,E)$ גרף דו-צדדי פשוט., וכן $|V|=n$.
הוכיחו כי $|E|\le\frac{n^2}{4}$.

13) נגדיר גרף שצמתיו הם $P\left(\{1,2,3,\cdots n\}\right)$ (יש 2^n צמתים), ושני צמתים מחוברים, אם אחד מהם מכיל את השני והם נבדלים באיבר אחד.
(למשל, $\{1,5,7\},\{1,2,5,7\}$ מחוברים)

א. הוכיחו כי G קשיר.
ב. הוכיחו כי G רגולרי.
ג. הוכיחו כי G הוא גרף דו״צ.

14) הוכיחו או הפריכו: אם $G=(V,E)$ אוילרי דו צדדי, אז: $|V|\in\mathbb{N}_{even}$.
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

עצים

שאלות

1) יהי T עץ שעל $n\geq 2$ קודקודים שלו בדיוק שני עלים.
מהן דרגות קודקודי T? רשמו אותן לכל $n\geq 2$, בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות) והוכיחו נכונות תשובתכם.

2) יהי $T=(V,E)$ עץ.
הוכיחו שאם כל דרגותיו אי-זוגיות, אזי גם $|E|$ הוא מספר אי-זוגי.

3) יהי T עץ על $n\geq 4$ קודקודים. אורך המסלול הפשוט הארוך ביותר ב-T הוא $n-2$ (יש מסלול פשוט באורך $n-2$ ואין מסלול ארוך יותר).
מהן דרגות קודקודי T? רשמו אותן בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות).

4) יהי T עץ. נוסיף ל-T קודקוד שנקרא לו v, וקשתות מ-v לחלק מקודקודי T.
מה צריכה להיות דרגת v כדי שבגרף המתקבל יהיה בדיוק מעגל פשוט אחד?
הוכיחו שאם דרגת v תהיה גדולה יותר, בגרף יהיה יותר ממעגל פשוט אחד.

5) G גרף עם 20 קודקודים ו-15 קשתות ללא מעגלים.
כמה רכיבי קשירות בגרף?

6) נתונה קבוצה של 10 קודקודים, ואוסף שקפים שעליהם מצוירים <u>עצים</u> על אותם עשרה קודקודים. גיורא מניח מספר כלשהו של שקפים זה על זה ומקפיד שאף קשת משקף אחד לא תכסה על אותה קשת בשקף אחר (כלומר, אין אף קשת משותפת לשני עצים שונים).
הוכיחו שהגרף שגיורא מקבל מאיחוד העצים שמצוירים על השקפים לא יכול להיות גרף שכל דרגותיו שוות ל-5.
רמז: חשבו את מספר הקשתות בגרף.

7) יהיו $T_1=(V,E_1)$, $T_2=(V,E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת קודקודים,
ונגדיר גרף G על אותה קבוצת קודקודים, שקשתותיו $E=E_1\cup E_2$.
הוכיחו כי קיים $x\in V$, כך ש-$d(x)\leq 3$ (דרגתו של x ב-G).

8) יהיו $T_1=\langle V_1,E_1\rangle$, $T_2=\langle V_2,E_2\rangle$ עצים, ונגדיר גרף G כך: $G=\langle V_1\cup V_2,E_1\cup E_2\rangle$.

א. נתון כי $V_1\cap V_2=\{v\}$.

האם G בהכרח עץ? נמקו.

ב. נתון כי $E_1\cap E_2=\{e\}$.

האם G בהכרח עץ? נמקו.

9) יהי T עץ על $n\geq 3$ קודקודים ויהי v קדקוד ב- T מדרגה 2.
יהי k מספר רכיבי הקשירות של $T-v$ (שהוא תת הגרף של T המתקבל ממחיקת v, והקשתות ש- v קצה שלהן).
מה הם הערכים האפשריים עבור k? הוכיחו.

10) יהי T עץ בעל n קודקודים, ונתון שדרגותיו הן 1,3,5 בלבד. יש 7 קודקודים מדרגה 3 ו-10 מדרגה 5.
כמה עלים יש בעץ?

11) יהי $T=(V,E)$ עץ, שבו $|V|=n$. דרגות צמתי T הן 1,3,5 בלבד. מספר הצמתים שלהם מדרגה 3 הוא 10 ומספר הצמתים שלהם מדרגה 5 הוא 12.
כמה עלים (צמתים מדרגה 1) יש לעץ?

12) הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_n בשני צבעים קיים עץ פורש מונוכרומטי.
הערה: עץ פורש הוא עץ שקודקודיו הם כל קודקודי G וקשתותיו הן חלק מקשתות G.

13) יהי $G=(V,E)$, $|V|=n$, גרף פשוט וחסר מעגלים, שבו k רכיבי קשירות.
הוכיחו כי $|E|=n-k$.

14) מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, ש<u>אף</u> שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק איזומורפיזם)

15) מחקו $n-1$ קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם $K_{2,n}$ (כאשר $n\geq 1$), והתקבל גרף G שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר, אין בו קודקודים שדרגתם אפס).
הוכיחו ש- G הוא עץ (שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי).

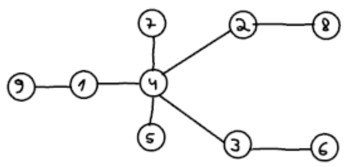
16) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ ו- $G_3=(V,E_3)$.
נגדיר $G=(V,E_1\cup E_2\cup E_3)$ כאיחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל קודקוד ב- V דרגתו ב- G היא לפחות 6.
הוכיחו כי לפחות אחד מהגרפים G_1, G_2 ו- G_3 אינו חסר-מעגלים.

ב. יהיו $G_1=(V_1,E_1),G_2=(V_2,E_2),G_3=(V_3,E_3)$ שלושה עצים על אותה קבוצת צמתים V.
לכל צומת $v\in V$ נסמן ב- $d_i(v)$ את הדרגה של v ב- G_i, אשר $i=1,2,3$.
הוכיחו כי קיים צומת $v\in V$, שעבורו $\sum_{i=1}^{3} d_i(v)\le 5$.

17) מיהו העץ הממוספר המותאם למילה $(1,1,3,4,3,6,10,1)$?

18) מהי סדרת פרופר של העץ הבא?



19) בכמה עצים שונים על קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6\}$ אין שום צומת מדרגה זוגית?

20) בכמה עצים על קבוצת הקודקודים $\{1,2,3,4,\cdots,10\}$ כל העלים הם מספרים זוגיים?

21) כמה עצים שונים יש על הקודקודים $\{1,\ldots n\}$, שלהם בדיוק שני עלים?

22) T הוא עץ בעל 60 צמתים, מתוכם בדיוק 10 צמתים מדרגה 3 ואין בצמתים מדרגה גדולה מ-3.

א. הדגימו עץ כזה.

ב. מצאו את מספר העלים ללא שימוש בקוד פרופר.

ג. מצאו את מספר העלים בעזרת קוד פרופר.

23) בכמה עצים על הקודקודים $\{1,2,3,\cdots,10\}$ יש שלושה עלים והם (ורק הם): 8,9,10?

24) יהי G גרף פשוט על n קודקודים המכיל מעגל המילטון, ונתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבל תת גרף של G שהוא עץ.
האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף G? אם כן, מהו מספר הקשתות?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים)

25) מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה זו מופיעה בפרק איזומורפיזם)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מעגלים מיוחדים

הערה: חלק קטן משאלות פרק זה מסתמכות על מושג העץ.
רצוי ללמוד את הפרק עצים שהוא פרק חשוב ביותר.

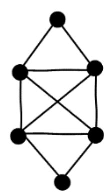
דוגמאות

1) צפו בסרטון על מעגלי המילטון והוכיחו כי:
א. תנאי אורה אינו תנאי הכרחי.
ב. החסם במשפט אורה הוא הדוק.

2) בשאלה זו נחקור את הקשר בין המושג מעגל אוילר לבין מעגל המילטון.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם G המילטוני, אז G אוילרי.
ב. אם G המילטוני, אז G לא אוילרי.
ג. אם G לא המילטוני, אז G אוילרי.
ד. אם G לא המילטוני, אז G לא אוילרי.
ה. לעניין הקשר בין המושגים, מה המסקנה המתבקשת מסעיפים א-ד?
ו. אם G הוא גם אוילרי וגם המילטוני, אז יש בו מסלול שהוא בעת ובעונה אחת גם מסלול אוילר וגם מסלול המילטון.
ז. אם G אוילרי וגם המילטוני, אז G הוא מעגל פשוט.
ח. אם יש ב- G מסלול שהוא בעת ובעונה אחת מעגל אוילר וגם מעגל המילטון, אז G הוא מעגל פשוט.

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצא מעגל אוילר, מעגל המילטון, ומסלול המילטון שאינו מעגל המילטון בגרף הבא:



ב. הוכיחו את הטענה הבאה, או תנו דוגמה נגדית והסבר שמראה שאכן מדובר בדוגמה נגדית: אם בגרף יש מעגל המילטון, אז יש בו מעגל אוילר.

2) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\left\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\}\,\middle|\,|A|=3\right\}$

$E=\left\{\{A,B\}\,\middle|\,|A\cap B|=1\right\}$. למשל, $\{\{2,4,7\},\{1,4,6\}\}\in E$.

א. מהו מספר הצמתים? מה דרגת כל קודקוד? מה מספר הקשתות?

ב. האם G דו"צ?

ג. האם G אוילרי?

ד. האם G המילטוני?

3) מהו האורך המירבי של מסלול ב- K_{2n+1} ? נמקו.

4) הוכיחו בכל גרף שכל דרגותיו 4 ניתן לצבוע את קשתותיו כך מכל קודקוד יצאו בדיוק שתי קשתות מכל צבע.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהי G גרף שקודקודיו הן תתי קבוצות בנות 4 איברים של $\{1,2,3,\cdots,8\}$, כאשר שני קודקודים מחוברים אם ורק אם בקבוצות יש 2 איברים בדיוק. האם ב- G יש מעגל המילטון?

ב. יהי $K_{m,n}$ גרף דו צדדי שלם.

הוכיחו כי $K_{m,n}$ המילטוני $\Leftrightarrow m=n$.

6) יהיו $G_2=(V_2,E_2)$, $G_1=(V_1,E_1)$, $V_2\cap V_2=\varnothing$, $E_1\cap E_1=\varnothing$ שני גרפים אוילריים פשוטים. נגדיר $G=(V,E)$ באופן הבא: $E=E_1\cup E_2$, $V=V_1\cup V_2$,

ומלכדים צומת $u_1\in V_1$ עם צומת $u_2\in V_2$. האם G אוילרי?

אם נחבר את u_1 עם u_2 במקום ללכד אותם, האם כעת G אוילרי?

7) יהי $G=(V,E)$ גרף אוילריאני בעל מספר אי זוגי של צמתים.

הוכיחו כי יש ב- G לפחות שלושה צמתים בעלי אותה דרגה.

(שובך היונים, מספר הקודקודים $2n+1$ ויש n דרגות אפשריות כי כולן זוגיות)

8) יהי G גרף בעל שני רכיבי קשירות, T_1 ו- T_2, שכל אחד מהם עץ. נוסיף שתי קשתות חדשות ל- G (קבוצת הקודקודים נשארת ללא שינוי) ויתקבל גרף חדש $\tilde{G}$.

א. הוכיחו שב- $\tilde{G}$ בהכרח יש מעגל.

ב. בנו דוגמה שבה ב- $\tilde{G}$ יש מעגל המילטון.

9) יהי G גרף פשוט על $n\geq 3$ קודקודים.
נתון:
1. n מספר זוגי.
2. כל הדרגות ב-G שוות (כלומר G גרף רגולרי).
3. גם G וגם $\bar{G}$ קשירים.

הוכיחו שלפחות באחד מבין G ו- $\bar{G}$ יש מעגל המילטון.

10) הוכיחו או הפריכו: אם G אוילרי דו"צ, אז מספר הצמתים של G הוא זוגי.

11) עבור $A=\{1,2,3\}$, נגדיר $G=(V,E)$, כאשר $V=A\times A$ (9 צמתים), ואת E קבוצת הצמתים נגדיר באופן הבא: $\{(a,b),(c,d)\}\in E$ אם ורק אם $a+b\neq c+d$.
א. הוכיחו כי G קשיר.
ב. מה דרגת הצומת $(1,1)$ ומה דרגת הצומת $(2,3)$? כמה קשתות יש ב- G?
ג. הוכיחו כי אין ב- G מסלול אוילר.

12) יהי G גרף פשוט 3-רגולארי על $n\geq 4$ קודקודים. נתון שב-G יש מעגל המילטון. הוכיחו שתת הגרף של G, המתקבל ממחיקת כל הקשתות ששייכות למעגל המילטון, הוא בעל $\frac{n}{2}$ רכיבי קשירות (בפרט, יש להוכיח ש-n זוגי).

13) יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני גרפים על אותה קבוצת קודקודים V. נגדיר את הגרף $G=(V,E_1\oplus E_2)$, כאשר $E_1\oplus E_2$ הוא ההפרש הסימטרי של שתי קבוצות הקשתות (כל הקשתות שנמצאות ב- E_1 או ב- E_2 אבל לא בשתיהן). הוכיחו כי אם ב- G_1,G_2 יש מעגל אוילר ו- G קשיר, אז גם בו יש מעגל אוילר.

14) יהי $G=(V,E)$ גרף על n צמתים.
א. הוכיחו כי אם $|E|>\binom{n-1}{2}+1$, אז G המילטוני.
ב. הוכיחו כי החסם הנ"ל הדוק. כלומר, כי הטענה:
אם $|E|\geq\binom{n-1}{2}+1$, אז G המילטוני – איננה נכונה.

15) נתון $G=(V,E)$ גרף אוילרי שיש בו שלוש קשתות $e_1,e_2,e_3\in E$, שלאחר הסרתן מהגרף, G נשאר אוילרי.
א. הדגימו גרף כזה.
ב. הוכיחו כי G לא דו"צ.

16) נתון G גרף אוילר, ונגדיר שיטה: נבחר קודקוד, נתחיל ממנו מסלול, ונמשיך אותו כרצוננו כל עוד אפשר בלי לחזור על קשת פעמיים.
א. הוכיחו כי בשיטה זו תמיד נקבל מעגל.
ב. האם בשיטה זו מתקבל תמיד מעגל אוילר?
ג. נתון כי G גם המילטוני.
האם בהכרח יש בו מסלול שהוא גם מעגל אוילר וגם מעגל המילטון?

17) יהי G גרף פשוט על n קודקודים, המכיל מעגל המילטון, ונתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבל תת גרף של G שהוא עץ.
האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף G? אם כן, מהו מספר הקשתות?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים)

18) יהי G גרף, לאו דווקא קשיר, שכל דרגותיו אי זוגיות. נבנה גרף H שקודקודיו הם קודקודי G ועוד קודקוד חדש v, שקשתותיו הם קשתות G וכל הקשתות האפשריות בין v לקודקודי G.
הוכיחו שב- H יש מעגל אוילר.

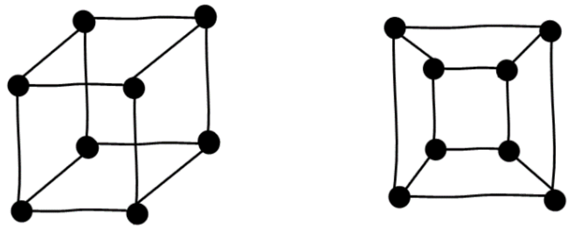
19) הוכיחו או הפריכו: אם $G=(V,E)$ אוילרי דו צדדי, אז: $|V|\in\mathbb{N}_{even}$.
(שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

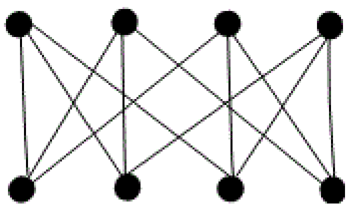
איזומורפיזם

שאלות

1) הוכיחו כי הגרפים הבאים איזומורפיים זה לזה.
זה אומר שגרף הקובייה התלת מימדי הוא מישורי (כלומר, ניתן לשכן אותו במישור [למצוא גרף איזומורפי לו] מבלי שאף צלע חותכת צלע אחרת).

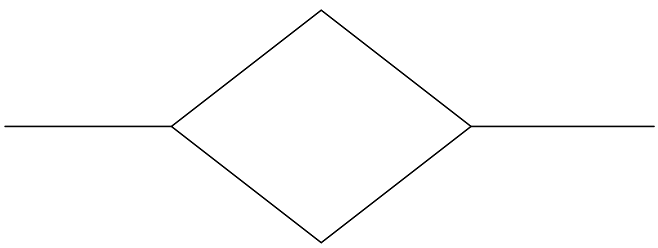


2) הוכיחו כי ניתן לשכן במישור את הגרף הבא.
כלומר, קיים גרף G איזומורפי לו, מבלי שאף צלע ב- G חותכת צלע אחרת.

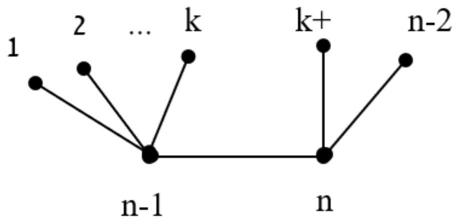


3) יהיו G_1, G_2 שני גרפים איזומורפיים.
הוכיחו כי G_1 חסר מעגלים $\Leftrightarrow$ G_2 חסר מעגלים, והסיקו כי G_1 עץ $\Leftrightarrow$ G_2 עץ.

4) כמה גרפים שונים זה מזה ואיזומורפיים לגרף שמצויר להלן אפשר לבנות על קבוצת הקודקודים $\{a, b, c, d, e, f\}$?



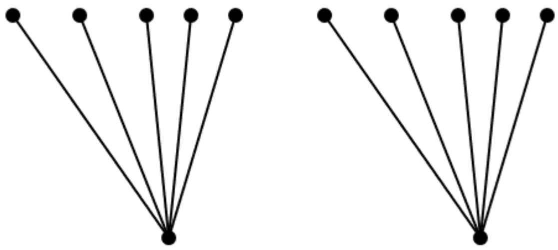
5) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,...,n\}$ איזומורפיים לגרף הבא:



תנו תשובה לכל k,n טבעיים המקיימים $2\le k\le n-3$.

הפרידו בין המקרים $n=2k+2$, $n\ne 2k+2$.

6) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים $V=\{v_1,v_2,...,v_{12}\}$ איזומורפים לגרף הבא:



7) הוכיחו או הפריכו:

אם לשני גרפים אותה רשימת דרגות (כלומר, אם נסדר את דרגות קודקודי כל אחד מהגרפים בסדר עולה, נקבל אותה סדרה), אז הגרפים איזומורפיים.

8) נגדיר C_n להיות מעגל על n קודקודים.

לאילו ערכים של n מתקיים ש- C_n איזומורפי ל- $\bar{C}_n$?

(כאשר $\bar{C}_n$ הוא הגרף המשלים)

9) יהי T עץ.

מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?

(שאלה מאתגרת)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 3 - עוצמות

תוכן העניינים

עוצמות

שאלות

1) ללא שימוש בפונקציית שקילות:

א. הוכיחו כי $\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,\ldots\}$ ו- $\mathbb{N}_{even}=\{0,2,4,\ldots\}$ שוות עוצמה.

ב. הוכיחו כי $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ ו- $\mathbb{N}_{even}=\{0,2,4,\ldots\}$ שוות עוצמה.

ג. הוכיחו כי $\mathbb{N}^2=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שקולה ל- $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

ד. הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$.

ה. הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}^+$, כאשר $\mathbb{Q}^+$ היא קבוצת הרציונליים החיוביים.

ו. הוכיחו כי $[0,3]\sim[0,1]$.

ז. הוכיחו כי $[3,4]\sim[0,1]$.

ח. הוכיחו כי $[3,5]\sim[0,1]$.

ט. הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A,B, מתקיים $A\times B\sim B\times A$.

2) הוכיחו את השקילויות הבאות באמצעות פונקציות חח"ע ועל בין הקבוצות (פונקציית שקילות):

א. $(0,2010)\sim(0,\infty)$

ב. $[1,3)\cup[4,8]\sim[0,1]$

ג. $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\sim\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$

ד. $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$

ה. $\mathbb{N}\times\{0,1\}\sim\mathbb{N}$

ו. $(-1,1)\sim\mathbb{R}$

ז. $\mathbb{N}\times[0,1)\sim[0,\infty)$

ח. $(0,1]\sim(0,1)$

ט. $[0,1)\times[0,1)\sim[0,1)$

י. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}$

יא. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

יב. $\{0,1\}^{A}\sim P(A)$

הגדרה: קבוצה A היא אינסופית אם קיימת קבוצה שחלקית לה ממש ושקולה לה.
היעזרו בהגדרה זו לפתרון שאלות **3-4**.

3) תהיינה A,B קבוצות. הוכיחו:
א. אם A אינסופית, אז $A\cup B$ אינסופית.
ב. אם A אינסופית וגם $A\subseteq B$, אז B אינסופית.

4) תהיינה A,B קבוצות, ונתון כי $A\cap B$ שקולה ל-A.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $A\cup B\neq B$, אז A אינסופית.
ב. אם $A\cup B\neq A$, אז B אינסופית.
ג. אם A סופית, אז $A\subseteq B$.

5) נגדיר יחס $\sim$ בין קבוצות באופן הבא: $(A,B)\in\sim \;\Leftrightarrow\; A,B$ שוות עוצמה.
הוכיחו כי $\sim$ הוא יחס שקילות.

6) הוכיחו:
א. $\aleph_0+n=\aleph_0$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.
ב. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$
ג. $3\cdot\aleph_0\cdot 2\cdot\aleph_0=\aleph_0$
ד. $n\cdot\aleph_0=\aleph_0$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.
ה. $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$
ו. $\aleph_0^n=\aleph_0$ (היעזרו במשפט קב"ש)
ז. אם $\aleph_0\leq\alpha$, אז $\alpha=\alpha+3$.
ח. $2^{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0}$
ט. $\aleph^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$
י. $\aleph_0^{\aleph}>2^{\aleph_0}$ (הדרכה: הסיקו מהסעיף הקודם כי $\aleph_0^{\aleph}>\aleph^{\aleph_0}$)

7) גדירות היטב של אריתמטיקה של עוצמות.

א. תהיינה k_1,k_2 עוצמות ויהיו A,B קבוצות, כך ש- $|A|=k_1, |B|=k_2$.

נגדיר פעולת הפרש בין עוצמות באופן הבא: $k_1-k_2=|A-B|$.

פעולה זו אינה מוגדרת היטב, כלומר התוצאות של ההפרש משתנות בהתאם לקבוצה ולא בהתאם למחלקה.

הציגו 2 דוגמאות לקבוצות שעוצמתן $\aleph_0$, אך עוצמת ההפרש שונה בכל אחת מהדוגמאות.

ב. הוכיחו כי אם מתקיים $A\sim B \wedge C\sim D \wedge A\cap C=\varnothing \wedge B\cap D=\varnothing$, אז $(A\cup C)\sim(B\cup D)$.

ג. הוכיחו כי אם $A\sim B \wedge C\sim D$, אז $A\times C\sim B\times D$.

8) הוכיחו כי לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים:

א. $A\times(B\times C)\sim(A\times B)\times C$

ב. אם $B\cap C=\varnothing$, אז $A^B\times A^C\sim A^{(B\cup C)}$, והראו כי $B\cap C=\varnothing$ הכרחית.

ג. $(A\times B)^C=A^C\times B^C$

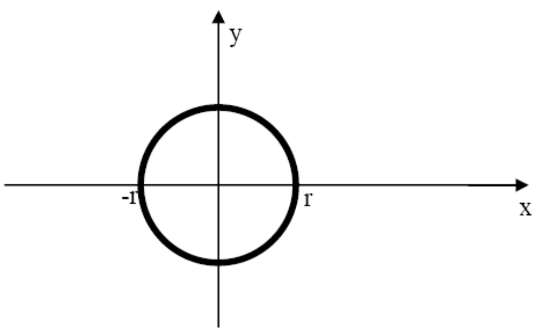
ד. $\left(A^B\right)^C\sim A^{B\times C}$

9) הוכיחו כי הקבוצה $A=\mathbb{Q}$, קבוצת המספרי הרציונליים,

ו- $B=\left\{f(x)=ax^2+bx+c : a,b,c\in\mathbb{Q}\right\}$ שוות עוצמה.

10) מעגל במישור ברדיוס r (כאשר $r>0$ ממשי), שמרכזו בראשית הצירים, הוא קבוצת כל הנקודות (x,y) במישור המקיימות את המשוואה $x^2+y^2=r^2$, כמודגם בציור שלהלן.

הוכיחו שלכל $r>0$, עוצמת מעגל ברדיוס r שמרכזו בראשית הצירים היא א.



11) הוכיחו או הפריכו:

תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן. אם $A\oplus B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ וגם $A\cap B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$, אז $A\cup B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$.

12) נגדיר $P_2(\mathbb{N})=\{A\subseteq\mathbb{N}\,\|A|=2\}$. כלומר, $P_2(\mathbb{N})$ היא קבוצת כל תתי-הקבוצות בנות שני אברים של הטבעיים.
מהי עוצמת $P_2(\mathbb{N})$? הוכיחו.

13) נסמן ע"י $\mathbb{N}$ את קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ וב- $\mathbb{R}^+$ את הממשיים החיוביים.

א. מה העוצמה של הקבוצה $A_4=\left(a\in\mathbb{R}\,\middle|\,a^4\in\mathbb{N}\right)$?
למשל, $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7}\in A_4$.

ב. מה העוצמה של $A=\left(a\in\mathbb{R}^+\,\middle|\,\exists k\in\mathbb{N},a^k\in\mathbb{N}\right)$?
למשל, $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7},\sqrt[100]{3},\sqrt[3]{4}\in A$.

ג. הראו שקבוצה של מעגלים זרים במישור ניתנת לשידוך לקבוצה חלקית של טבעיים.

14) תהי $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\forall n\in\mathbb{N}\left(x<\frac{1}{n}\right)\wedge\exists n\in\mathbb{N}\left(x>-\frac{1}{n}\right)\right\}$.
מה עוצמת A ?

15) תהי $A=\{(a,b)\,|\,a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R},a<b\}$. כלומר, A היא קבוצת כל הקטעים הפתוחים ב- $\mathbb{R}$.
מהי עוצמת A ? הוכיחו.

16) נגדיר יחס S מעל $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ באופן הבא: $(x_1x_2)S(y_1y_2)\Leftrightarrow\lfloor x_1\rfloor=\lfloor y_1\rfloor$,
כאשר S יחס שקילות (אין צורך להוכיח זאת).
הוכיחו כי קבוצת המנה $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})/S$ היא מעוצמה $\aleph_0$.

17) הוכיחו או הפריכו: לכל קבוצה A מתקיים $A\times\mathbb{N}\sim A\times(\mathbb{N}-\{1\})$.

18) הוכיחו כי עוצמת הקבוצה $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n,n+1)=(1,2)\cup(2,3)\cup(3,4)\cup\cdots$ היא $\aleph$.

19) תהי A קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ ויהי E יחס שקילות מעל A.
הוכיחו כי $|E|=\aleph_0$.

20) הוכיחו או הפריכו:

לכל זוג קבוצות A,B מתקיים $(A\times B)^C \sim (A^C\times B)\cup(A\times B^C)$.

21) פונקציית הסינוס $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור של 2π.

כלומר, $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

עבור $0\le x\le 2\pi$ מתקיים $\sin x=0 \Leftrightarrow x\in\{0,\pi,2\pi\}$.

מצאו את עוצמת הקבוצה $O_{\sin}=\{x\in\mathbb{R}|\sin x=0\}$. הוכיחו.

22) האם קיימת קבוצה A, כך ש- $|P(A)|=\aleph_0$? הוכיחו.

23) הוכיחו כי קבוצה בת-מניה של ישרים לא יכולה לכסות את המישור $\mathbb{R}^2$.

24) קבעו האם לקבוצה אחת עוצמה גדולה יותר, או שהן שוות:

א. $\{0,1\}^{P(\mathbb{R})},\ \{0,1\}^{\mathbb{R}}$

ב. $P(\mathbb{R})^{P(\mathbb{N})},\ P(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$

ג. $\mathbb{N}^{\mathbb{R}},\ \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

25) חשבו את עוצמת הקבוצות הבאות:

א. קבוצת כל הסדרות האינסופיות של הטבעיים.

ב. קבוצת כל הסדרות האינסופיות העולות ממש של הטבעיים.

ג. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות.

ד. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 10.

ה. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 00.

ו. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 10 וגם את הרצף 00.

ז. קבוצת כל היחסים מעל $\mathbb{N}$.

ח. קבוצת כל היחסים הרפלקסיביים מעל $\mathbb{N}$.

לפתרונות מלאים בסרטוני ווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 4 - אינדוקציה

תוכן העניינים

אינדוקציה

שאלות

הוכיחו באינדוקציה את הטענות הבאות:

1) $$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$$

2) $$\sum_{k=1}^{n}(4k1)=n(2n+3)$$

3) $$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

4) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$$

5) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

6) $$\sum_{k=1}^{n}2^k=2\left(2^n-1\right)$$

7) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4^{k-1}}=4-\frac{1}{4^{n-1}}$$

8) $$\sum_{k=1}^{3n}k=1\frac{1}{2}n(3n+1)$$

9) $$\sum_{k=1}^{3n}(4k-1)=3n(6n+1)$$

10) $$\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\frac{n}{2}(3n+1)$$

11) $$\sum_{k=1}^{n}3^{n+k}=\frac{3^{n+1}\left(3^n-1\right)}{2}$$

12) $13 \mid \left(4^{2n+1} + 3^{n+2}\right)$

13) $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} < \frac{2+3}{2}$

14) הוכיחו באינדוקציה על n שהנוסחה הנתונה היא אכן פתרון לנוסחה הרקורסיבית הנתונה:

לכל $n>1$, $a_n = 0 \mid 2a_{n-1} \mid a_{n-1}$, כאשר $a_0 = a_1 = 1$.

הוכיחו באינדוקציה כי: לכל $n \geq 0$, $a = (-1)^n (1-2n)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 5 - יסודות ההסתברות

תוכן העניינים

הגדרות יסודיות:

רקע:

ניסוי מקרי: תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך. למשל: תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

מרחב מדגם: כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי. לדוגמה, בהטלת קובייה: $\{1,2,3,4,5,6\}$, או: מזג האוויר בעוד שבועיים: {נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן חלקית, אביך}.

מאורע: תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות: C , B , A. בהטלת קובייה למשל, המאורע 'לקבל לפחות 5' יסומן: $A=\{5,6\}$. המאורע 'לקבל תוצאה זוגית' יסומן: $B=\{2,4,6\}$.

גודל מרחב המדגם: מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם. בהטלת קובייה למשל נקבל: $|\Omega|=6$.

גודל המאורע: מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו. למשל, בהטלת הקובייה האירועים הקודמים יסומנו: $|A|=2$, $|B|=3$.

מאורע משלים: מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים. למשל, בהטלת הקובייה: $\bar{A}=\{1,2,3,4\}$, $\bar{B}=\{1,3,5\}$.

מרחב מדגם אחיד (סימטרי): מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות , אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

הסתברות במרחב מדגם אחיד: במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5? $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{2}{6}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית? $P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{3}{6}$.

הסתברות במרחב לא אחיד: תחושב לפי השכיחות היחסית: $\frac{f}{n}$.

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון – x	מספר התלמידים – השכיחות – f
5	2
6	4
7	8
8	5
9	4
10	2

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8? $\frac{f}{n}=\frac{5}{25}=0.2$.

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל? $\frac{f}{n}=\frac{2}{25}=0.08$.

הסתברות למאורע משלים: הסתברות לקבוצת המשלים של המאורע ביחס למרחב המדגם: $P(\bar{A})=1-P(A)$. למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל: $P(A)=1-\frac{2}{25}=\frac{23}{25}$.

שאלות:

1) מהאותיות E, F ו-G יש ליצור מילה בת 2 אותיות, לא בהכרח בת משמעות.

א. הרכיבו את כל המילים האפשריות.

ב. רשמו את המקרים למאורע:

i. במילה נמצאת האות E.

ii. במילה האותיות שונות.

ג. רשמו את המקרים למאורע $\bar{A}$.

2) מטילים זוג קוביות.

א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם אחיד?

ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:

i. סכום התוצאות 7.

ii. מכפלת התוצאות 12.

ג. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיף ב'.

3) נבחר באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.

א. מה ההסברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?

ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?

ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?

4) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	22	28	18	22	10
מספר מקלטים	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה באקראי מהישוב.

א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?

ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?

ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

5) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר משפחות	20	40	100	30	10
מספר מכוניות	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.

א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?

ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?

ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

6) נטיל מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.

א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם הוא אחיד?

ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:

i. התקבל פעם אחת עץ.

ii. התקבל לפחות פלי אחד.

ג. מהו המאורע המשלים ל-D?

ד. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיפים ב-ג.

תשובות סופיות:

1) א. $\Omega=\{EE,EF,EG,FE,FF,FG,GE,GF,GG\}$.

ב. $A=\{EE,EF,EG,FE,GE\},\ B\{EF,EG,FE,FG,GE,GF\}$.

ג. $\bar{A}=\{FF,FG,GF,GG\}$.

2) א. $\Omega=\begin{Bmatrix}(1,1) & (2,1) & (3,1) & (5,1) & (4,1) & (6,1)\\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2)\\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3)\\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4)\\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5)\\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6)\end{Bmatrix}$.

ב. $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}\ ,\ C=\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}$.

ג. הסיכוי ל-A: $\frac{1}{6}$. הסיכוי ל-B: $\frac{1}{9}$.

3) א. 0.4. ב. 0.4. ג. 0.5.

4) א. 0.22. ב. 0.78. ג. 0.32.

5) א. 0.1. ב. 0.2. ג. 0.8.

6) א. $\Omega=\{PPP,PPE,PEP,EPP,PEE,EPE,EEP,EEE\}$.

ב. $A=\{PPE,PEP,EPP\}\ ,\ D=\{PPP,PPE,PEP,EPP,PEE,EPE,EEP\}$.

ג. $\bar{D}=\{EEE\}$.

ד. $\frac{1}{8}$.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

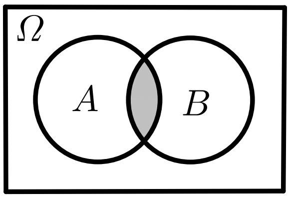
פרק 6 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) - מאורעות זרים ומכילים

תוכן העניינים

פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) – מאורעות זרים ומכילים:

רקע:

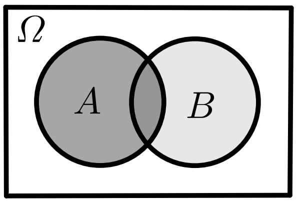
פעולת חיתוך:



נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים.
חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך: $A \cap B$.
מדובר בתוצאות שנמצאות ב-A וגם ב-B.

דוגמה:
בהטלת קובייה, למשל, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A=\{5,6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית הן: $B=\{2,4,6\}$.
החיתוך שביניהם הוא: $A \cap B=\{6\}$.

פעולת איחוד:

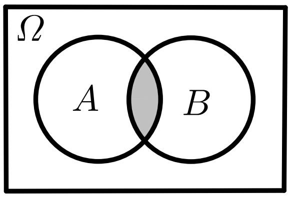


נותנת את כל האפשריות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות, ומסומנת: $A \cup B$.
הפעולה נותנת את אשר נמצא ב-A או B.
כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.

דוגמה:
בהטלת קובייה האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A=\{5,6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית: $B=\{2,4,6\}$.
האפשרויות לקבל לפחות 5 וגם תוצאה זוגית: $A \cup B=\{2,4,5,6\}$.

דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה):
סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9, ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8 וההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75.
מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?
מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?
מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות:



ההסתברות של איחוד מאורעות תחושב ע"י הקשר הבא:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$$

$$\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$$

$$P(A\bigcap B)=1-P(\overline{A}\bigcup\overline{B})$$

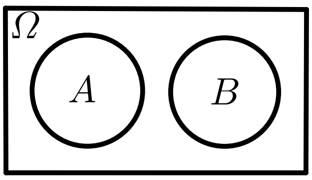
$$P(A\bigcup B)=1-P(\overline{A}\bigcap\overline{B})$$

שיטת ריבוע הקסם:

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם:

	$\overline{A}$	A	
B	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(A\cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})$	$P(A\cap\overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(\overline{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים:



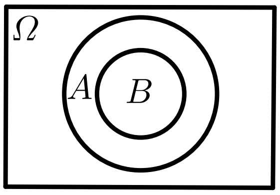
מאורעות זרים הם כאשר אין להם אף איבר משותף:
$A\cap B=\{\ \}$. כלומר, הם לא יכולים להתרחש בו זמנית.

ההסתברות של חיתוך המאורעות היא אפס: $P(A\cap B)=0$.

ההסתברות של איחוד המאורעות תחושב: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

דוגמה:
בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A=\{5,6\}$ והאפשרות לקבל 3
היא: $B=\{3\}$, ולכן החיתוך ביניהם הוא אפס, כלומר: $A\cap B=\{\ \}$.

מאורעות מוכלים:



נתונים שני מאורעות A ו-B, השונים מאפס.
נאמר שהמאורע B מוכל במאורע A אם כל איברי המאורע B כלולים במאורע A ונרשום: $B \subset A$.

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב-B מוכלות בתוך מאורע A.

קשר זה מסומן באופן הבא: $B \subset A$.

$A \cap B = B \quad P(A \cap B) = P(B)$

$A \cup B = A \quad P(A \cup B) = P(A)$

למשל: $A = \{2,4,6\}$, $B = \{2,4\}$.

שאלות:

1) מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות – לא בהכרח בת משמעות.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - במילה נמצאת האות E.
B - במילה אותיות שונות.
א. רשמו את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.
ב. רשמו את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.

2) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
B - לעבור את המבחן בכלכלה.
היעזרו בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמנו בדיאגראמת וון את השטח המתאים:
א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
ו. התלמיד נכשל בכלכלה.

3) נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים:
A , B , $\bar{B}$, $A\cap B$, $A\cup B$.
ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.

4) נסמן ב-Ω את מרחב המדגם וב-ϕ קבוצה ריקה.
נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.
להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא Ω או ϕ או A.
קבעו עבור כל מאורע מה הפתרון שלו:
$\bar{\bar{A}}$, $A\cap\phi$, $A\cup\phi$, $A\cap\Omega$, $A\cup\Omega$, $A\cap\bar{A}$, $\bar{\phi}$, $A\cup\bar{A}$.

5) הוגדרו המאורעות הבאים:

A - אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B - אדם שגובהו מתחת ל-1.8 מטר.

קבעו את גובהם של האנשים הבאים:

א. $A\cap B$.

ב. $A\cup B$.

ג. $\overline{A}\cap B$.

ד. $\overline{A}\cup\overline{B}$.

ה. $\overline{\overline{A}}$.

6) נגדיר את המאורעות הבאים:

A - אדם דובר עברית.

B - אדם דובר ערבית.

C - אדם דובר אנגלית.

השתמשו בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים:

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים שדוברים שתי שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

7) שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדרי" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08 ומפלגת "עתידי" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתידי" תעבור את אחוז החסימה?

8) במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן, 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

9) הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים.
חשבו את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים:

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

10) מטילים זוג קוביות, אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:
A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.
B - סכום התוצאות משתי הקוביות הוא 6.
C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות היא 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11) עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות: $P(A)=0.6$, $P(B)=0.3$, $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.1$.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשבו את $P(\bar{A}\cap B)$.

12) מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:
A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.
B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.
איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13) בהגרלה חולקו 100 כרטיסים. על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

14) נתון כי: $P(A)=0.3\ ,\ P(B)=0.25\ ,\ P(A\cup B)=0.49$
א. חשבו את הסיכוי ל-$P(A\cap B)$.
ב. האם A ו-B מאורעות זרים?
ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או שרק B יקרה?

15) A ו-B מאורעות זרים. נתון ש: $2\cdot P(B\cap\overline{A})=P(A\cap\overline{B})=P(\overline{A}\cap\overline{B})$.
מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B?

16) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:
א. $A\cap B=B\cap A$.
ב. $\overline{A\cup B}=A\cap B$.
ג. $A\cap B\cap C=A\cap B\cap(C\cup B)$.
ד. $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

17) נתון ש-A ו-B מאורעות במרחב מדגם. נתון ש-$P(A)=0.3\ ,\ P(B)=0.2$.
א. האם יתכן ש-$P(A\cup B)=0.4$?
ב. האם יתכן ש-$P(A\cup B)=0.6$?
ג. אם A ו-B זרים מה הסיכוי $P(A\cup B)$?
ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי $P(A\cup B)$?

18) מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל-30% חשבון בבנק הפועלים. ל-28% חשבון בבנק לאומי ול-15% חשבון בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבון בבנק לאומי ובבנק הפועלים. ל-5% חשבון בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבון בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבון בנק בשלושת הבנקים יחד.
א. מה אחוז האזרחים להם חשבון בבנק לאומי בלבד?
ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו יחזיק חשבון בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?
ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבון בפועלים או במזרחי אבל לא בבנק לאומי?
ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בנק אחד בלבד?
ה. מה אחוז האזרחים שיש להם בדיוק חשבון בשני בנקים בלבד?
ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבון בנק באף אחד מהבנקים הללו?
ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבון בנק בלפחות אחד מהבנקים הללו?

19) חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21.
הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס.
כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הכרטיסים הנ"ל.

א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיס האשראי גם יחד?
ב. מה אחוז מחזיקי ישראכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?
ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

20) הוכיחו: $P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$.

21) A ו-B מאורעות במרחב המדגם. האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיוק מאורע אחד הוא: $P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$?

תשובות סופיות:

1) א. $A\cap B=\{EG,EF,FE,GE\}$.
ב. $A\cup B=\{EG,EF,EE,FE,GE,EG,GF\}$.

2) א. $B\cap\bar{A}$. ב. $A\cap\bar{B}$. ג. $A\cap B$. ד. $A\cup B$. ה. $\bar{A}\cap\bar{B}$. ו. $\bar{B}$.

3) א. $A=0, 2, 4, 6, 8$, $B=0, 1, 2, 3, 4$, $\bar{B}=5, 6, 7, 8, 9$,
$A\cap B=0, 2, 4$, $A\cup B=0, 2, 4, 6, 8, 1, 3$.
ב. $P(A)=0.5$, $P(B)=0.5$, $P(\bar{B})=0.5$, $P(A\cap B)=0.3$, $P(A\cup B)=0.7$.

4) $\bar{\bar{A}}=A$, $A\cap\phi=\phi$, $A\cup\phi=A$, $A\cap\Omega=A$, $A\cup\Omega=\Omega$,
$A\cap\bar{A}=\phi$, $\bar{\phi}=\Omega$, $A\cup\bar{A}=\Omega$.

5) א. $A\cap B$: גובה בין 1.7 ל-1.8. ב. $A\cup B$: כל גובה אפשרי.
ג. $\bar{A}=\bar{A}\cap B$: גובה לכל היותר 1.7. ד. $\bar{A}\cup\bar{B}$: לכל היותר 1.7 או לפחות 1.8.
ה. $A=\bar{\bar{A}}$: גובה מעל 1.7.

6) א. $A\cap B\cap C$. ב. $A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$. ג. $A\cup B\cup C$.
ד. $\bar{C}$. ה. $(A\cap B\cap\bar{C})\cup(B\cap C\cap\bar{A})\cup(A\cap C\cap\bar{B})$.

7) א. $P(A\cup B)=0.24$. ב. $P(A\cap B)=0.04$. ג. $P(B\cap\bar{A})=0.16$.

8) א. $P(A\cap B)=10\%$. ב. $P(A\cup B)=50\%$. ג. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=50\%$.

9) א. $P(A\cap B)=0.2$. ב. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.3$. ג. $P(A\cup\bar{B})=0.3$.

10) א. לא. ב. כן. ג. כן. ד. לא.

11) א. כן. ב. $P(\bar{A}\cap B)=0.3$.

12) הטענה הנכונה היא ג'.

13) א. 0.05. ב. 0.95.

14) א. $P(A\cap B)=0.06$. ב. לא. ג. $P((A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A}))=0.43$.

15) $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{5}$.

16) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. נכון.

17) א. כן. ב. לא. ג. $P(A\cup B)=0.5$. ד. $P(A\cup B)=0.3$.

18) א. 19%. ב. 0.05. ג. 0.31. ד. 46%. ה. 12%. ו. 0.41.
ז. 59%.

19) א. 5%. ב. 10%. ג. 67%.

20) שאלת הוכחה.

21) נכון.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 7 - קומבינטוריקה -כלל המכפלה

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – כלל המכפלה:

רקע:

כלל המכפלה:

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודל מרחב המדגם.

אם לתהליך יש k שלבים: n_1 אפשרויות לשלב הראשון, n_2 אפשרויות לשלב השני... n_k אפשרויות לשלב k:

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 6\ ,\ n_2 = 2$$
$$n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 2 = 12$$

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלית והיתר ספרות? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 26\ ,\ n_2 = 10\ ,\ n_3 = 10\ ,\ n_4 = 10\ ,\ n_5 = 10$$
$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 260,000$$

שאלות:

1) חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים:
   א. הטלת קובייה פעמים.
   ב. מספר תלת ספרתי.
   ג. בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
   ד. חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.

2) במסעדה מציעים ארוחה עסקית.
בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה.
האופציות למנה ראשונה הן: סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום.
האופציות למנה עיקרית הן: סטייק אנטריקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן: קפה, תה ולימונדה.
   א. כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
   ב. אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות:
      i. בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
      ii. בארוחה סלט, לזניה ותה.

3) בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
   א. המספר הוא זוגי.
   ב. במספר כל הספרות שונות.
   ג. במספר כל הספרות זהות.
   ד. במספר לפחות שתי ספרות שונות.
   ה. במספר לפחות שתי ספות זהות.
   ו. המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באות הצורה).

4) חישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבניין בן 8 קומות.
חשבו את ההסתברויות הבאות:
   א. כולם ירו בקומה החמישית.
   ב. כולם ירדו באותה קומה.
   ג. כולם ירדו בקומה אחרת.
   ד. ערן ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות.

5) במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים הבאים אם:
א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

6) מטילים קובייה 4 פעמים.
א. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
ב. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה שונות?
ג. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
ד. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהיה שונות?

7) יש ליצור מילה בת חמש אותיות, לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות).
א. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות D, A ו-L?
ב. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
ג. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
ד. מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום? (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).

8) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד).
חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a).
א. בקוד אין את הספרה 5.
ב. בקוד מופיעה הספרה 3.
ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.

9) במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימן V או X.
בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס משחק המזל?

תשובות סופיות:

1) א. 36. ב. 900. ג. 70. ד. 90.

2) א. 36. ב. i. $\frac{1}{36}$. ב. ii. $\frac{1}{9}$.

3) א. 0.5. ב. 0.3024. ג. 0.0001. ד. 0.9999. ה. 0.6976. ו. 0.01.

4) א. $\frac{1}{8^5}$. ב. $\frac{1}{8^4}$. ג. 0.205. ד. $\frac{1\cdot1\cdot7^3}{8^5}$.

5) א. 3375. ב. 2730.

6) א. $\frac{1}{216}$. ב. $\frac{5}{18}$. ג. $\frac{13}{18}$. ד. $\frac{215}{216}$.

7) א. $\frac{23^5}{26^5}$. ב. $\frac{1}{26^4}$. ג. $1-\frac{1}{26^4}$. ד. $\frac{1}{26^2}$.

8) א. 0.9^a. ב. $1-0.9^a$. ג. 0.5^a.

9) 2^n.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 8 - קומבינטוריקה- תמורה - סידור עצמים בשורה

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – תמורה – סידור עצמים בשורה:

רקע:

תמורה:

מספר האפשריות לסדר n עצמים שונים בשורה: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$.

<u>הערה</u>: $0!=1$.

דוגמאות (הפתרונות בהקלטה):

- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d, כך שהאותיות: a, b יהיו ברצף?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d, כך שהאותיות: a, b יופיעו בתור הרצף ba?

שאלות:

1) חשבו : בכמה אופנים
א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?
ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?

2) סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.
א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?
ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?
ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?

3) בוחנים 5 בנים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה. נניח שאין תלמידים בעלי אותו ציון.
א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?
ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים אם מדרגים בנים ובנות בנפרד?

4) מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.
א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?

שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטטיסטיקה.
ב. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?
ג. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?
ד. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצה אחר)?

5) אדם יצר בנגן שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הריץ את הפלייליסט באקראי.
א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים כמקשה אחת?
ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?
ג. מה ההסתברות ששירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכך גם השירים בצרפתית)?

6) 4 בנים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת כיסאות 1-8 בקולנוע.
א. מה ההסתברות שיוסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?
ב. מה ההסתברות שהבנים יתיישבו במקומות האי-זוגיים?
ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?
ד. מה ההסתברות שהבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

תשובות סופיות:

1) א. 24. ב. 120.

2) א. 0.2. ב. 0.8. ג. 0.022.

3) א. 362880. ב. 2880.

4) א. 3628800. ב. 0.2. ג. 0.8. ד. $\frac{1}{45}$.

5) א. $\frac{1}{792}$. ב. $\frac{1}{99}$. ג. $\frac{1}{4620}$.

6) א. 0.75. ב. 0.014. ג. $\frac{1}{14}$. ד. $\frac{1}{35}$.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 9 - קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זהים

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – תמורה עם עצמים זהים:

רקע:

תמורה עם חזרות:

אם יש בין העצמים שיש לסדר עצמים זהים, יש לבטל את הסידור הפנימי שלהם על ידי חלוקה בסידורים הפנימיים שלהם.

מספר האופנים לסדר n עצמים בשורה, ש-n_1 מהם זהים מסוג 1, n_2 זהים מסוג 2 ו-n_r זהים מסוג r: $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!}$.

דוגמה (תשובה בהקלטה):

כמה מילים ניתן ליצור מכל האותיות הבאות: W, W, T, T, K, K?

שאלות:

1) במשחק יש לצבוע שתי משבצות מתוך המשבצות הבאות:

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הצביעה?

2) בכמה אופנים שונים אפשר לסדר בשורה את האותיות: ב, ע, ע, ב, ע, ג?

3) בבית נורות מקום ל-6 נורות. בחרו שתי נורות אדומות, שתי נורות צהובות ושתי נורות כחולות. כמה דרכים שונות יש לסדר את הנורות?

4) נרצה ליצור מספר מכל הספרות הבאות: 1, 2, 2, 2, 6.
כמה מספרים כאלה אפשר ליצור?

5) במשחק בול פגיעה יש 10 משבצות, אדם צובע 4 משבצות מתוך ה-10.
המשתתף השני צריך לנחש אילו 4 משבצות נצבעו.
מה ההסתברות שבניחוש אחד יהיה בול פגיעה?

6) כמה אותות שונים, שכל אחד מורכב מ-10 דגלים שונים, ניתן ליצור,
אם 4 דגלים הם לבנים, 3 כחולים, 2 אדומים ואחד שחור.
דגלים שווי צבע זהים זה לזה לחלוטין.

תשובות סופיות:

1) 10.
2) 60.
3) 90.
4) 20.
5) $\frac{1}{210}$.
6) 12600.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 10 - קומבינטוריקה -דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה:

רקע:

מדגם סידור בדגימה עם החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים מתוך n עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא: n^k.

דוגמה:

בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

כמה ועדים שונים ניתן להרכיב? $10^3=1,000$, $k=3$, $n=10$.

מדגם סידור ללא החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים $(n\geq k)$ כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$(n)_k=n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

דוגמה:

שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים .

תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד: $\frac{10!}{7!}=10\cdot9\cdot8=720$.

שאלות:

1) במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.

א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?

ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?

2) במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ-A-D (A עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.

א. מה ההסתברות לזכות במשחק?

ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?

ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?

3) קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?

4) שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור.
הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.

א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?

ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?

5) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה.
בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:

א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

תשובות סופיות:

1) א. 8000. ב. 6840.

2) א. 0.0001. ב. 0.6561. ג. 0.3439.

3) 0.476.

4) א. 0.04. ב. 0.48.

5) א. 40^5. ב. 78,960,960.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 11 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר וללא החזרה:

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה:

מספר האפשרויות לדגום k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים כאשר אין משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה: $\frac{(n)_k}{k!}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$.

דוגמה:

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$\binom{10}{3}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=120$.

הערות:

1) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

2) $\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}=n$.

3) $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$.

שאלות:

1) בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות, אם:
א. אין שום הגבלה לבחירה.
ב. מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
ג. לא יהיו בנים במשלחת.

2) סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה: 5 במדעי הרוח, 3 במדעי החברה, 2 במתמטיקה.
א. כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
ב. כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
ג. כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
ד. כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?

3) בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות.
יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
א. מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
ב. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
ג. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?

4) במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
א. מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
ב. מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
ג. מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
ד. מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?

5) בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו-13 בצבע שחור בצורת תלתן.
מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 2-10, שאר הקלפים הם; נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר).
שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).
א. מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
ב. מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
ג. מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
ד. מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

6) במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי.
חשבו את ההסתברויות הבאות:
א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".
ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.
ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

7) הוכיחו כי: $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$.

8) $2n$ בנים ו-$2n$ בנות מתחלקים ל-2 קבוצות.
א. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את החלוקה אם שתי הקבוצות צריכות להיות שוות בגודלן ויש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות?
ב. בכמה דרכים ניתן לבצע את החלוקה אם יש מספר שווה של בנים ובנות בכל קבוצה אבל הקבוצות לא בהכרח בגודל שווה.

תשובות סופיות:

1) א. 53130. ב. 20475. ג. 3003.

2) א. 252. ב. 100. ג. 100. ד. 60.

3) א. 0.1117. ב. 0.1445. ג. 0.9819.

4) א. 0.02. ב. 0.187. ג. 0.972. ד. 0.00246.

5) א. 0. ב. 0.1923. ג. 0.009. ד. 0.837.

6) א. $6.45\cdot10^{-5}$. ב. $2.58\cdot10^{-4}$. ג. 0.3225.

7) שאלת הוכחה.

8) א. $\binom{2n}{n}^2$. ב. $\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{i}^2$.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 12 - קומבינטוריקה - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – שאלות מסכמות:

שאלות:

1) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה.
בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
ג. אין תפקידים שונים בוועד.

2) במשרד 30 עובדים, יש לבחור ארבעה עובדים למשלחת לחו"ל.
בכמה דרכים ניתן להרכיב את המשלחת?
א. במשלחת ארבע משימות שונות שיש למלא וכל עובד יכול למלא יותר ממשימה אחת.
ב. כמו בסעיף א' רק הפעם עובד לא יכול למלא יותר ממשימה אחת.
ג. מעוניינים לבחור ארבעה עובדים שונים למשלחת שבה לכולם אותו התפקיד.

3) מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).
א. כמה קודים שונים ניתן להרכיב?
ב. כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחיל בספרה ונגמר בספרה?
ג. כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?
ד. בכמה קודים הספרות לא מופיעות ברצף?

4) בארונית 4 מגירות. ילד התבקש על ידי אמו לסדר 6 משחקים בארונית.
הילד מכניס את המשחקים באקראי למגירות השונות.
כל מגירה יכולה להכיל את כל המשחקים יחד.
א. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים למגירה העליונה?
ב. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים לאותה מגירה?
ג. מה ההסתברות ש"דומינו" יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.
ד. מה ההסתברות ש"דומינו" לא יוכנס למגירה העליונה?

5) בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות: "הירוקים", "קדימה", "העבודה" ו"הליכוד". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן בוחרים באקראי מפלגה כלשהי.
א. מה ההסתברות שכל ה-6 יבחרו באותה מפלגה?
ב. מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" לא תקבל קולות?
ג. מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל בדיוק 3 קולות וכל מפלגה אחרת תקבל קול 1 בלבד?
ד. מה ההסתברות שמפלגת "הירוקים תקבל 2 קולות, מפלגת "העבודה" תקבל 2 קולות ומפלגת "הליכוד" תקבל 2 קולות?

6) 5 חברים נפגשו ורצו לראות סרט. לרשותם ספריה המונה 8 סרטים שונים. כל אחד התבקש לבחור סרט באקראי.
א. מה ההסתברות שכולם יבחרו את אותו הסרט?
ב. מה ההסתברות שכולם יבחרו את "הנוסע השמיני"?
ג. מה ההסתברות שכל אחד יבחר סרט אחר?
ד. מה הסיכוי שלפחות שניים יבחרו את אותו הסרט?
ה. מה ההסתברות שיוסי וערן ייבחרו את "הנוסע השמיני" וכל השאר סרטים אחרים?
ו. מה ההסתברות שהנוסע השמיני לא ייבחר על ידי אף אחד מהחברים?
ז. לקחו את 8 הסרטים ויצרו מהם רשימה. נתון שברשימה 3 סרטי אימה, מה ההסתברות שברשימה שנוצרה יופיעו 3 סרטי האימה ברצף?

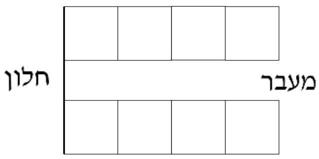
7) בקבוצה 10 אנשים. יש ליצור שתי וועדות שונות מתוך הקבוצה: אחת בת 4 אנשים והשנייה בת 3 אנשים. כל אדם יכול להיבחר רק לוועדה אחת. חשבו את מס' הדרכים השונות ליצירת הוועדות הללו כאשר:
א. אין בוועדות תפקידים.
ב. בכל וועדה יש תפקיד אחד של אחראי הוועדה.
ג. בכל וועדה כל התפקידים שונים.

8) 4 גברים ו-3 נשים מתיישבים על כסאות בשורה של כסאות תיאטרון. בכל שורה 10 כסאות. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את ההושבה:
א. ללא הגבלה.
ב. כל הגברים ישבו זה ליד זה וגם כל הנשים תשבנה זו ליד זו.
ג. שני גברים בקצה אחד ושני הגברים האחרים בקצה שני.

9) בהגרלה ישנם 10 מספרים מ-1 עד 10. נבחרו באקראי 5 מספרים. מה ההסתברות שהמספר 7 הוא השני בגודלו מבין המספרים שנבחרו?

10) 6 אנשים עלו לאוטובוס שעוצר ב-10 תחנות.
כל אדם בוחר באופן עצמאי ואקראי באיזו תחנה לרדת.
א. מה ההסתברות שכל אחד יורד בתחנה אחרת?
ב. מה ההסתברות שבדיוק 3 ירדו בתחנה החמישית?
ג. מה ההסתברות שרונית תרד בתחנה השנייה והשאר לא?
ד. מה ההסתברות שכולם ירדו בתחנות 5,6 ולפחות אחד בכל אחת מהתחנות הללו?

11) ברכבת 4 מקומות ישיבה עם כיוון הנסיעה ו4 מקומות ישיבה נגד כיוון הנסיעה.
4 זוגות התיישבו במקומות אלו באקראי.



א. בכמה דרכים שונות ניתן להתיישב?
ב. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה עם כיוון הנסיעה?
ג. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה?
ד. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו כל אחד ליד החלון? (בכל שורה יש חלון).
ה. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו כך שכל אחד בכיוון נסיעה מנוגד?
ו. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו אחד מול השני פנים מול פנים.
ז. מה ההסתברות שכל הגברים ייסעו עם כיוון הנסיעה וכל הנשים תשבנה נגד כיוון הנסיעה?
ח. מה ההסתברות שכל זוג ישב אחד מול השני?

12) סיסמא מורכבת מ-5 תווים, תווים אלו יכולים להיות ספרה (0-9) ואותיות ה-ABC (26 אותיות). כל תו יכול לחזור על עצמו יותר מפעם אחת.
א. כמה סיסמאות שונות יש?
ב. כמה סיסמאות שונות יש שבהן כל התווים שונים?
ג. כמה סיסמאות שונות יש שבהן לפחות ספרה אחת ולפחות אות אחת?

13) מתוך קבוצה בת n אנשים רוצים לבחור 3 אנשים לוועדה. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הבחירה? בטא את תשובתך באמצעות n.
א. בוועדה אין תפקידים ויש לבחור 3 אנשים שונים לוועדה.
ב. בוועדה תפקידים שונים. וכל אדם לא יכול למלא יותר מתפקיד אחת.
ג. בוועדה תפקידים שונים ואדם יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

14) שני אנשים מטילים כל אחד מטבע n פעמים. בטאו באמצעות n את הסיכוי שלכל אחד מהם אותו מספר פעמים של התוצאה "ראש".

15) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד).
חשבו את ההסתברויות הבאות (בטאו את תשובותיכם באמצעות a):
א. בקוד אין את הספרה 5.
ב. בקוד מופיעה הספרה 3.
ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.

16) זוג קוביות הוטלו מספר פעמים. כמה פעמים יש להטיל את זוג הקוביות בכדי שבהסתברות של לפחות 0.5 תתקבל לפחות הטלה אחת (של הזוג) עם סכום תוצאות 12?

17) בוחרים באופן מקרי מספר בין 6 ספרות.
א. מה הסיכוי שהספרה 5 תופיע בדיוק פעם אחת במספר?
ב. מה הסיכוי שהספרה 4 תופיע לפחות פעם אחת וגם הספרה 0 תופיע לפחות פעם אחת במספר?

18) במשרד של דנה 5 תיקיות אותן היא מסדרת באקראי בטור. 3 תיקיות הן אדומות ו-2 תיקיות הן כחולות. דנה רשמה שני פתקים ושמה כל פתק במקום אקראי בין התיקיות (לכל פתק יש 4 אפשרויות למיקום).
א. מה הסיכוי ששני הפתקים יהיו במקומות שונים?
ב. מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות אדומות ואין תיקיות כחולות?
ג. מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש בדיוק תיקיה אחת?
ד. מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות ואחת מהן כחולה?

19) לירון 6 עטים אותם הוא מכניס באקראי ל-3 קלמרים שונים.
לכל עט הוא בוחר באופן מקרי קלמר.
א. מה הסיכוי שיש בדיוק 2 קלמרים שבכל קלמר בדיוק 2 עטים?
ב. מה הסיכוי שיש בדיוק קלמר אחד שבו בדיוק 2 עטים?
ג. מה הסיכוי שיש בדיוק 3 קלמרים שבכל אחד בדיוק 2 עטים?

20) מסדרים n כדורים שונים ב n תאים שונים (תא יכול להכיל יותר מכדור אחד). מה הסיכוי שבתא i $\left(1 \le i \le n\right)$ יהיו בדיוק k כדורים?

21) בתחרות ריצה עלו לגמר 6 מתמודדים. רק בשלושת המקומות הראשונים זוכים במדליות. נניח שכל המתמודדים מסיימים את התחרות.
א. כמה אפשרויות יש לסיים את התחרות?
ב. כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה?
ג. כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה או שמתמודד מספר 2 יקבל מדליית זהב?

22) מטילים קובייה הוגנת k פעמים.

א. מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה שהתקבלה היא j ?

ב. מה הסיכוי שהתוצאה הכי קטנה שהתקבלה היא i?

ג. עבור $i \le j$, מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה היא j וגם התוצאה הכי קטנה היא i?

תשובות סופיות:

1) א. 102,400,000. ב. 78,960,960. ג. 658008.
2) א. 810,000. ב. 657,720. ג. 27,405.
3) א. 14,040,000. ב. 1,404,000 ג. 5,616,000. ד. 8,424,000.
4) א. 0.00024. ב. 0.00098. ג. 0.05933. ד. 0.75000.
5) א. 0.00098. ב. 0.17798. ג. 0.02929. ד. 0.02197.
6) א. $\frac{1}{4096}$. ב. $\frac{1}{32,768}$. ג. 0.205. ד. 0.795
ה. 0.0105. ו. 0.5129. ז. 0.1071.
7) א. 4,200. ב. 50,400. ג. 604,800.
8) א. 604,800. ב. 2,880 ג. 2,880.
9) 0.238.
10) א. 0.1512. ב. 0.014. ג. 0.059. ד. $\frac{62}{10^6}$.
11) א. 40,320. ב. 0.1071. ג. 0.2142. ד. 0.0357.
ה. 0.5714. ו.0.1429. ז. 0.0143. ח. 0.0095.
12) א. 60,466,176. ב. 45,239,040. ג. 48,484,800.
13) א. $\frac{n!}{3!(n-3)}$. ב. $n\cdot(n-1)(n-2)$. ג. n^3.
14) $\frac{1}{4^n}\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$.
15) א. 0.9^a. ב. $1-0.9^a$. ג. 0.5^a.
16) לפחות 25 פעמים.
17) א. 0.35721. ב. 0.1759.
18) א. 0.75. ב. 0.075. ג. 0.375. ד. 0.15.
19) א. 0. ב. $\frac{450}{729}$. ג. $\frac{90}{729}$.
20) $\frac{\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}}{n^n}$.
21) א. 720. ב. 360. ג. 432.

22) א. $\frac{j^k-(j-1)^k}{6^k}$.   ב. $\frac{(7-i)^k-(6-i)^k}{6^k}$.

ג. $\frac{(j-i+1)^k-2\cdot(j-i)^k+(j-i-1)^k}{6^k}$.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 13 - הסתברות מותנית-במרחב מדגם אחיד

תוכן העניינים

הסתברות מותנית – במרחב מדגם אחיד:

רקע:

לעיתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר. הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו כאשר ידוע שמאורע אחר התרחש / לא התרחש.

ההסתברות של A בהינתן ש- B כבר קרה: $P(A|B)$.

כשמרחב המדגם אחיד: $P(A|B)=\frac{|A\cap B|}{|B|}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נטיל קובייה.

נגדיר:

A - התוצאה זוגית.

B - התוצאה גדולה מ-3.

נרצה לחשב את: $P(A|B)$.

שאלות:

1) נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?

2) יוסי הטיל קובייה.
מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4, אם ידוע שהתוצאה שהתקבלה זוגית?

3) הוטלו צמד קוביות. נגדיר:
A - סכום התוצאות בשתי ההטלות הינו 7.
B - מכפלת התוצאות 12.
חשבו את $P(A|B)$.

4) מטבע הוטל פעמיים.
ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים?

5) זוג קוביות הוטלו והתקבל שהתוצאות זהות.
מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?

6) זוג קוביות הוטלו והתקבל לפחות פעם אחת 4.
מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?

7) נבחרה משפחה בת שני ילדים, שמהם אחד הוא בן.
מה ההסתברות שבמשפחה שני בנים בקרב הילדים?

8) נבחרה משפחה בת שלושה ילדים, ונתון שהילד האמצעי בן.
מה הסיכוי שיש בנות בקרב הילדים?

9) בכיתה 6 בנים ו-7 בנות. נבחרו 4 ילדים מהכיתה.
אם ידוע שנבחרו 2 בנים ו-2 בנות, מה הסיכוי שאלעד לא נבחר?

10) חמישה חברים יצאו לבית קולנוע והתיישבו זה לצד זה באקראי, בכיסאות מספר 5 עד 9. ידוע שערן ודין התיישבו זה ליד זה.
מה ההסתברות שהם יושבים בכיסאות מספר 6 ו-7?

תשובות סופיות:

1) 0.2.

2) $\frac{1}{3}$.

3) 0.5.

4) 0.

5) $\frac{1}{6}$.

6) $\frac{2}{11}$.

7) $\frac{1}{3}$.

8) $\frac{3}{4}$.

9) $\frac{2}{3}$.

10) $\frac{1}{4}$.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 14 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד

תוכן העניינים

הסתברות מותנית – מרחב לא אחיד:

רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש, בהינתן שמאורע B כבר קרה: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

במונה: הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות, זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.
במכנה: הסיכוי למאורע נתון שהתרחש.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נבחרו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן, בקרב 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

שאלות:

1) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
B - לעבור את המבחן בכלכלה.
כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים:

א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד, מה ההסתברות שהוא יעבור את שניהם?

2) במדינה שתי חברות טלפון סלולארי: "סופט" ו"בלי". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בלי", 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט" ול-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי כלל.

א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בלי"?
ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בלי", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?

3) במכללה שני חניונים: חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.

א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
ג. אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
ד. נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?

4) נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים. מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, ומתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.

א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים.

ב. נבחר אדם אקראי מה ההסתברות שהוא שכיר?

ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?

ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?

ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?

ו. אם האדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

5) חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21:
40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים ויזה וגם ישראכרט, 8% מחזיקים ישראכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 5% מחזיקים בשלושת הכרטיסים הנ"ל.

א. אם לאדם יש ויזה, מה הסיכוי שאין לו ישראכרט?

ב. אם לאדם שני כרטיסי אשראי, מה הסיכוי שאין לו ישראכרט?

ג. אם לאדם לפחות כרטיס אחד, מה הסיכוי שאין לו ישראכרט?

תשובות סופיות:

1) א. 0.833. ב. 0.9375. ג. 0.0625. ד. 0.5. ה. 0.789.

2) א. 5%. ב. 0.0833. ג. 0.786. ד. 0.6875.

3) א. 0.4. ב. $\frac{2}{3}$. ג. 0.25. ד. $\frac{6}{7}$.

4) א. להלן טבלה: ב. $\frac{2}{3}$. ג. 0.6. ד. $\frac{23}{30}$.

	אקדמאי	לא אקדמאי	סה"כ
שכיר	20	180	200
עצמאי	30	70	100
סה"כ	50	250	300

ה. 0.3. ו. 0.72.

5) א. 0.625. ב. 0.133. ג. 0.402.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 15 - דיאגרמת עצים - נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה

תוכן העניינים

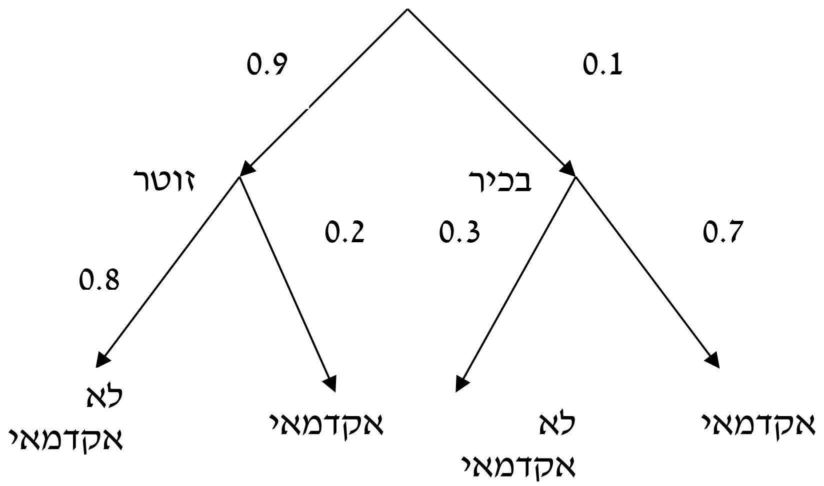
דיאגרמת עצים – נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה:

רקע:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

דוגמה:

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים. מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים. נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף.
נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

1) מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי? $0.1\cdot 0.7=0.07$.
2) מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי? $0.9\cdot 0.8=0.72$.

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף (רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות).

3) מה הסיכוי שהוא אקדמאי? $0.1\cdot 0.7+0.9\cdot 0.2=0.25$.
4) נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטר?
מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות מותנה: $0.72=\frac{0.18}{0.25}=\frac{0.9\cdot 0.2}{0.25}=P(zutar\,|\,academay)$.

נוסחת ההסתברות השלמה:

בהינתן B, מאורע כלשהו, וחלוקה של מרחב המדגם Ω ל- $\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_\mathrm{n}$ כך ש- $\Omega = \bigcup_i \mathrm{A}_i$,

אזי: $P(\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{A}_i)\cdot P\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}_i}\right)$.

נוסחת בייס:

$$P\left(\frac{\mathrm{A}_j}{\mathrm{B}}\right) = \frac{P(\mathrm{A}_j)P\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}_j}\right)}{\sum^{n} P(\mathrm{A}_i)\cdot P\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}_i}\right)}.$$

שאלות:

1) בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון. מוציאים באקראי סוכריה. אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאם סוכריה נוספת, ואם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכריה נוספת.

א. מה ההסתברות שהסוכריה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?

ב. מה ההסתברות שהסוכריה השנייה בטעם לימון?

2) באוכלוסייה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.

א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?

ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?

ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?

ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?

3) בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?

ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?

4) חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי: 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל-70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.

א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?

ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?

ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

5) כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר לאחר כישלון במבחן מסוים אין אפשרות לגשת למבחן הבא אחריו.
70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון. מתוכם, 50% עוברים את המבחן השני. מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.
א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?
ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?
ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?

6) משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:
מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.
מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.
30% מהתושבים הם ילדים ונוער. 50% הם מבוגרים. היתר קשישים.
כמו כן נתון ש68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.
א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?
ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?

7) רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A, B, C, D.
אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור. כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.
א. מה הסיכוי שהאנייה תתגלה ע"י הרדאר?
ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?
ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?

8) סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C. סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו. לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן: 8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%, ובמחלות B, C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.
א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?
ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?
ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?
ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

9) סטודנט ניגש למבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע תשובה לשאלה מסוימת הוא P, ואם הוא לא יודע את התשובה הוא מנחש. בכל מקרה הוא עונה על השאלה. נתון שלשאלה יש k תשובות אפשריות.
אם הסטודנט ענה נכון על השאלה, מה הסיכוי שהוא ידע אותה?

10) אדם משחק נגד שני מתמודדים, רונית ודולב. האדם צריך לשחק שלושה משחקים ויש לו לבחור איזה סדר משחקים עדיף לו:
- דולב, רונית, דולב.
- רונית, דולב, רונית.

בכל משחק מישהו חייב לנצח(אין תיקו). האדם ינצח בטורניר רק אם ינצח בשני משחקים ברציפות. נתון שדולב שחקן טוב יותר מאשר רונית.
איזו אפשרות עדיפה יותר על האדם כדי לנצח בטורניר?

תשובות סופיות:

1)	א. $\frac{2}{7}$.	ב. $\frac{23}{49}$.		
2)	א. 6%.	ב. 58%.	ג. 0.241.	ד. 0.2.
3)	א. 0.544.	ב. 0.5.		
4)	א. 9%.	ב. 0.09375.	ג. 0.9722.	
5)	א. 0.14.	ב. 0.3488.	ג. 0.2442.	
6)	א. 70%.	ב. 0.8125.		
7)	א. 0.57.	ב. 0.3158.	ג. 0.7543.	
8)	א. 0.0886.	ב. 0.2889.	ג. 0.3137.	ד. 0.8778.
9)	$\frac{kp}{1+p(k-1)}$.			
10)	א'.			

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 16 - תלות ואי תלות בין מאורעות

תוכן העניינים

תלות ואי תלות בין מאורעות:

רקע:

אם מתקיים ש: $P(B|A)=P(B)$, נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב-A.

הדבר גורר גם ההפך: $P(A|B)=P(A)$, כלומר, גם A אינו תלוי ב-B.

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

הוכחה לכך: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \Rightarrow P(A/B)=P(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים בתרגיל או שמההקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים :

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

באופן דומה :

$$P(\bar{A}\cap \bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=(1-0.7)(1-0.4)=0.18$$

הרחבה: אי תלות בין n מאורעות:

n מאורעות $A_1,...,A_n$ הם בלתי תלויים אם ורק אם: $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=\prod_{i=1}^{n} P(A_i)$.

שאלות:

1) נתון: $P(A)=0.2$,$P(B)=0.5$,$P(A\cup B)=0.6$.
האם המאורעות הללו בלתי תלויים?

2) תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו.
הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון הוא 0.7 והשני 0.4.
א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?
ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים?

3) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

4) מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווקו, אחרת הוא נפסל ולא יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4 הבדיקות.
א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?
ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?

5) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

6) עבור שני מאורעות A ו-B המוגדרים על אותו מרחב מדגם נתון ש:
$P(A|B)=0.6$, $P(A\cap \overline{B})=0.3$, $P(A\cup B)=0.9$.
האם A ו-B מאורעות בלתי תלויים?

7) הוכיח שאם: $P(A/B)=P(B/A)$, אז: $P(A)=P(B)$.

8) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות. נמקו!

א. אם: $P(A\cup B)=P(A)\cdot P(B)$, אזי המאורעות בלתי תלויים.

ב. מאורע A כלול במאורע B: $0<P(B)<1$, $P(A)>0$, לכן: $P(A/B)<P(A)$.

ג. A ו-B מאורעות זרים שסיכוייהם חיובים לכן הם מאורעות תלויים.

ד. A ו-B מאורעות תלויים שסיכוייהם חיובים לכן A ו-B מאורעות זרים.

ה. $P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A)-P(B)$ לכן A ו-B מאורעות זרים.

תשובות סופיות:

1) כן.

2) א. 0.28. ב. 0.18.

3) א. 0.0064. ב. 0.1536.

4) א. 0.5904. ב. 0.9984.

5) א. 0.08^5. ב. 0.3409.

6) לא, הם תלויים.

7) שאלת הוכחה.

8) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 17 - שאלות מסכמות בהסתברות

תוכן העניינים

שאלות מסכמות בהסתברות:

שאלות:

1) נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.

א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?

ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?

ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית.
מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?

ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

2) במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א', 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%.
כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.

א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?

ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג'?

ג. ברכישת חלב נמצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א'?

ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו-"יוצר במחלבה א'" בלתי תלויים?

3) רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילוים עם מספר אפשרויות בילוי:
בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג, בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה ובהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם (באולינג/קפה).

א. מה ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג?

ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" זרים?

ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" תלויים?

ד. מה ההסתברות שיום אחד הם יצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא יצאו לאף אחד מהמקומות?

4) 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.

א. מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?

ב. אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?

ג. מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?

ד. נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?

5) באוכלוסייה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.

א. מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?

ב. נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?

ג. נגדיר את המאורעות הבאים: A - נבחר אדם מובטל, B - נבחר גבר. האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?

6) בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות רגילים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדיהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטיל אותו פעמיים.
נסמן ב-A את ההטלה הראשונה ראש וב-B את ההטלה השנייה ראש.

א. חשבו את הסיכויים למאורעות A ו-B.

ב. האם המאורע A ו-B בלתי תלויים?

ג. ידוע שבהטלה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הוגן?

7) ערן מעוניין למכור את רכבו והוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון.
מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט,
50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.

א. מה אחוז האנשים, מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש, שיראו את 2 המודעות?

ב. אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?

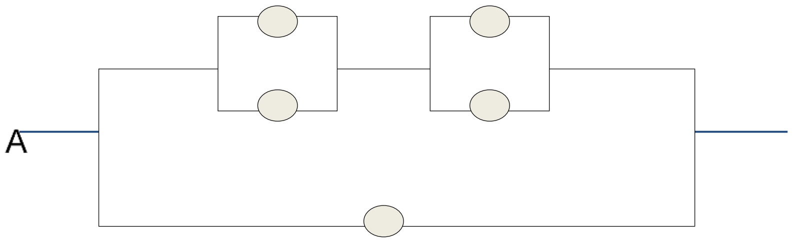
ג. האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו-"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?

ד. אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6 ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.

i. מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?

ii. אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

8) נתונה המערכת החשמלית הבאה:



כל יחידה עובדת באופן בלתי תלוי ובהסתברות p.
כדי שהמערכת תפעל צריך לעבור זרם מהנקודה A לנקודה B.
הוכיחו שהסיכוי שהמערכת תפעל הוא: $P+(1-P)\left(2P-P^2\right)^2$.

9) ליאת מעוניינת לתרגל לבחינה בהסתברות. היא מצאה באינטרנט מאגר הכולל 25 שאלות מבחינות. השאלות ממוספרות ו-6 מתוכן עוסקות במשתנה מקרי רציף. ליאת החליטה לבחור באקראי 7 שאלות מהמאגר במטרה לפתור אותן. כל שאלה שלא עוסקת במשתנה הרציף תיפתר על ידי מיכל בסיכוי של 90%, אך אם השאלה עוסקת במשתנה הרציף היא תיפתר בסיכוי של 60%.

א. מה הסיכוי שהשאלות שנבחרו הן כולן ממוספרות בסדר עוקב?
ב. מה הסיכוי ששאלה 20 היא השאלה עם המספר המקסימלי מבין השאלות שנבחרו?
ג. ידוע שליאת בחרה 2 שאלות שעוסקות במשתנה הרציף והיתר לא. מה הסיכוי שתצליח לפתור 6 מתוך השאלות שבחרה?

10) נתונים שלושה מאורעות: A, B ו-C. ידוע ש: $P(A|B)=1$, $P(A|C)=1$.
תנו דוגמא ספציפית למאורעות: A, B ו-C שבה המאורעות B ו-C תלויים.

11) הוכיחו או הפריכו (על ידי דוגמה נגדית) את הטענה הבאה:
אם A ו-B בלתי תלויים, אז A ו- $\overline{B}$ בלתי תלויים.

12) משחקים משחק מזל פעמיים, כך שבכל משחק בודד יש אפשרות לנצח או להפסיד. הסיכוי לנצח בכל משחק הוא P כאשר: $0<P<1$.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - תוצאות המשחקים שונות זו מזו.
B - המשחק הראשון היה ניצחון.
מה ערכו של P, עבורו A ו-B יהיו מאורעות בלתי תלויים?

13) טל מניח בשורה N קוביות בצבעים שונים. בין שתי קוביות אקראיות כלשהן ערן מניח מכחול. הוכיחו שהסיכוי שהקובייה הכחולה והאדומה יהיו בצדדים שונים של המכחול הוא: $\frac{N+1}{3(N-1)}$.

14) הוכיחו באמצעות אינדוקציה את אי שוויון בול: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

תשובות סופיות:

1) א. 0.25. ב. 0.75. ג. 0.6. ד. 0.5.

2) א. 0.2. ב. 0.267. ג. 0.524. ד. תלויים.

3) א. 0.2. ב. אינם זרים. ג. תלויים. ד. 0.06.

4) א. 0.94. ב. 0.255. ג. 0.03. ד. 0.168.

5) א. 15%. ב. 0.692. ג. לא זרים ותלויים.

6) א. 0.65. ב. תלויים. ג. 0.5384.

7) א. 8%. ב. 0.733. ג. תלויים.
ד. i. 0.478. ד. ii. 0.15.

8) שאלת הוכחה.

9) א. $\frac{19}{480,700}$. ב. $\frac{27,132}{480,700}$. ג. 0.4015.

10) ראו סרטון.

11) שאלת הוכחה.

12) $\frac{1}{2}$.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 18 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הבדיד – פונקציית ההסתברות:

רקע:

משתנה מקרי בדיד:

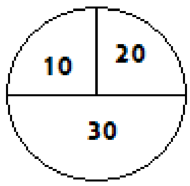
משתנה מקרי בדיד הינו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות.
מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית הסתברות.

פונקציית הסתברות:

פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה.
סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בקזינו יש רולטה כמתואר בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח.
בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

שאלות:

1) ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה היא:
50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
70 משפחות עם מכונית אחת.
60 משפחות עם 2 מכוניות.
20 משפחות עם 3 מכוניות.
בוחרים באקראי משפחה מהיישוב, נגדיר את X להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

2) מהאותיות: A, B, C יוצרים קוד דו תווי.
א. כמה קודים ניתן ליצור?
ב. רשמו את כל הקודים האפשריים.
ג. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהאות B מופיעה בקוד.
בנו את פונקציית ההסתברות של X.

3) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
יהי X מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

4) הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ-4 פעמים.
נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק.
בנו את פונקציית ההסתברות של X.

5) חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7, הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8, והסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את X להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

6) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $k=1,2...4$, $P(X=k)=\frac{k}{A}$.
מצאו את ערכו של A.

7) בגן ילדים 8 ילדים, מתוכם 5 בנים ו-3 בנות.
בוחרים באקראי 3 ילדים להשתתף בהצגה.
נגדיר את X כמספר הבנים שנבחרו להצגה.
בנו את פונקציית ההסתברות של X.

8) בסקר שנערך בדקו בקרב אנשים האם הם צופים במהדורת החדשות של ערוצים 1,2,10. להלן הנתונים :
20% צופים בערוץ 2.
8% צופים בערוץ 1.
10% צופים בערוץ 10.
כמו כן נתון ש 1% צופים בשלושת המהדורות גם יחד.
10% צופים בשתי המהדורות מתוך השלושה.
נגדיר את X להיות מספר המהדורות מבין 3 המהדורות המדוברות שאדם אקראי צופה. בנו את פונקציות ההסתברות של X.

תשובות סופיות:

1) להלן טבלה:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.25	0.35	0.3	0.1

2) להלן טבלה:

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

3) להלן טבלה:

X	0	1	2
$P(X)$	0.05	0.20	0.75

4) להלן טבלה:

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.3	0.21	0.147	0.343

5) להלן טבלה:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.006	0.092	0.398	0.504

6) 10.

7) להלן טבלה:

X	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

8) להלן טבלה:

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.74	0.15	0.1	0.01

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 19 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הבדיד – תוחלת, שונות וסטיית תקן:

רקע:

תוחלת:

ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

מגדירים תוחלת באופן הבא: $E(X)=\sum_i x_i P(x_i)=\mu$.

שונות:

תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

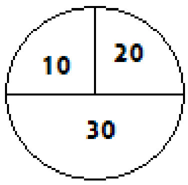
מגדירים שונות באופן הבא: $V(X)=\sum_i (x_i-\mu)^2 P(x_i)=\sum_i x_i^2 P(x_i)-\mu^2=\sigma^2$.

סטיית תקן:

שורש של השונות – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת. מסמנים: $STD=\sigma$.

דוגמה:

בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט. אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה ב-₪. הסתברות לקבלת הסכומים השונים:



X	10	20	30
$P(X)$	0.25	0.25	0.5

$$E(X)=10\cdot 0.25+20\cdot 0.25+30\cdot 0.5=22.5=\mu$$

$$V(X)=\sum_i (x_i-\mu)^2 P(x_i)=$$

$$=(10-22.5)^2\cdot 0.25+(20-22.5)^2\cdot 0.25+(30-22.5)^2\cdot 0.5=68.75=\sigma^2$$

כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות: $\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{68.75}=8.29$.

שאלות:

1) אדם משחק במשחק מזל.
נגדיר את X להיות סכום הזכייה.
להלן פונקציית ההסתברות של X :

X	-30	0	20	40
$P(X)$	0.4	0.1	0.3	0.2

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של X?

2) בישוב מסוים שני סניפי בנק : בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב, ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים, ל-40% חשבון בנק בסניף לאומי ול-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון באף אחד מהסניפים.
יהי X מסי סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש בהם חשבון.
חשבו את : $E(X)$.

3) ידוע של-20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות. נגדיר את X להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר.
א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.
ב. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X.

4) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי שלא ישתמש בו שוב.
נסמן ב-X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.
א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.
ב. חשבו את התוחלת והשונות של X.

5) נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X :

X	2	4	6	8
$E(X)$		0.3		0.2

כמו כן נתון ש : $E(X)=4.2$.

א. מצאו את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשבו את : $V(X)$.

6) משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים 0-5 ו-5.
נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10.
מצא את פונקציית ההסתברות.

7) להלן ההתפלגות של משתנה מקרי :

P	X
$\frac{1}{4}$	1
$\frac{1}{2}$	3
$\frac{1}{4}$	K

מהו הערך שייתן ערך מינימלי לשונות של X?

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 2 , שונות: 796.

2) 0.9.

3) א. ראו סרטון. ב. תוחלת: 3.36 , סטיית תקן: 1.603.

4) א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 3 , שונות: 2.

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

5) א. ראו טבלה: ב. 5.16.

X	2	4	6	8
$P(X)$	0.4	0.3	0.1	0.2

6) ראו טבלה:

X	-5	0	5
$P(X)$	0.2	0.6	0.2

7) 2.33.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 20 - המשתנה המקרי הבדיד- טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הבדיד – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

טרנספורמציה לינארית היא מצב שבו מבצעים הכפלה של קבוע ו/או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי (כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע).

בניסוח מתמטי נאמר כי אם משתנה אקראי Y מיוצג ע"י משתנה אקראי X כאשר a,b הם קבועים כלשהם: $Y=aX+b$, אזי מתקיימים:

1) $E(Y)=aE(X)+b$.
2) $V(Y)=a^2\cdot V(X)$.
3) $\sigma_Y=|a|\sigma_x$.

שלבי העבודה:

1) נזהה שמדובר בטרנספורמציה ליניארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2) נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3) נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו- b.
4) נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה – הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15₪.
מהי התוחלת והשונות של הרווח במשחק?

פתרון (בהקלטה):

חישבנו קודם ש: $V(X)=68.75=\sigma^2$, $E(X)=22.5=\mu$.

שאלות:

1) סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשבו את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.

2) תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינה 10 עם שונות 3. הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12.
מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?

3) תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן להעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?

4) X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש-$E(X)=4$ ו-$V(X)=3$.
Y הינו משתנה מקרי חדש, עבורו: $Y=7-X$. חשבו את: $E(Y)$ ו-$V(Y)$.

5) אדם החליט לבטח את רכבו; שווי הרכב 100,000 ₪. להלן התביעות האפשריות והסתברותן: בהסתברות של 0.001 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב).
בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב.
בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב.
אחרת אין תביעה בכלל. החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה.
נסמן ב-X את גובה התביעה השנתית, באלפי ₪.
א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.
ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.
ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪.
מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנ"ל?

6) יהי X מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות.
פונקציית ההסתברות של X נתונה בטבלה הבאה:

10	9	8	7	6	5	X
		0.3	0.2	0.2	0.1	$P(X)$

כמו כן, נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.
א. השלימו את פונקציית ההסתברות.
ב. חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.
ג. הציון בבחינה מחושב באופן הבא:
כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגויה, מופחתת נקודה.
מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?

7) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $k=1,2...4$, $P(X=k)=\frac{k}{A}$.

א. מצא את ערכו של A.

ב. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.

ג. חשב את: $E(X^3)$.

ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא: $\frac{X}{2}-4$.

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 14, שונות: 32.

2) תוחלת: 8, שונות: 12.

3) תוחלת: 13.2, סטיית תקן: 5.5.

4) תוחלת: 3, שונות: 3.

5) א. להלן טבלה:

X	100	50	25	0
$P(X)$	0.001	0.02	0.05	0.929

ב. תוחלת: 2350, שונות: $85,727.5^2$.

ג. תוחלת: 1650, שונות: $85,727.5^2$.

6) ב. $V(X)=1.8275$.

7) א. $A=10$. ב. $E(X)=3$, $V(X)=1$. ג. $E(X^3)=35.4$, $V(X^3)=616.84$.

ד. $E(Y)=-2.5$, $V(Y)=0.25$.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 21 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים

תוכן העניינים

תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים:

רקע:

אם: $X_1, X_2, ..., X_n$ משתנים מקרים אזי:

$E(T) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$.

אם: $X_1, X_2, ..., X_n$ משתנים מקריים <u>בלתי תלויים</u> בזוגות, אזי:

$V(T) = V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$.

דוגמה:

אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים. תוחלת סכות הזכייה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכייה של המשחק השני היא 2- עם סטיית תקן 4.
מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכייה הכולל של שני המשחקים יחד?

שאלות:

1) הרווח ממניה א' הוא עם תוחלת של 5 ושונות 10.
הרווח ממניה ב' הוא עם תוחלת של 4 ושונות.
ידוע שההשקעות של שתי המניות בלתי תלויות זו בזו.
מה התוחלת והשונות של הרווח הכולל מהשקעה בשתי המניות יחד?

2) X ו-Y הם משתנים בלתי תלויים, סטיית התקן של X היא 3.
סטיית התקן של Y היא 4. מהי סטיית התקן של X+Y?

3) אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים זה בזה:
X - סכום הזכייה במשחק הראשון.
Y - סכום הזכייה במשחק השני.
נתון:

$$E(x)=10 \quad , \quad \sigma(X)=3$$
$$E(y)=12 \quad , \quad \sigma(Y)=4$$

מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום הזכייה בשני המשחקים?

4) ברולטה הסיכוי לזכות ב- 30 ₪ הוא חצי, ב-10 ₪ רבע וכך גם ב-20 ₪.
מה היא התוחלת והשונות של סכום הזכייה הכולל לאדם המשחק ברולטה 4 פעמים?

5) נתון משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P(X=K)=\frac{A}{K-1} \quad , \quad K=2,3,4,5$$
0 אחר ת

מצאו את ערכו של A.
א. חשבו את התוחלת והשונות של X.
ב. נלקחו n משתנים מקריים בלתי תלויים מההתפלגות הנ"ל.
בטאו באמצעות n את תוחלת והשונות של סכום המשתנים.

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 9, שונות: 15.

2) 5.

3) תוחלת: 22, שונות: 5.

4) תוחלת: 90, שונות: 275.

5) א. $A=\frac{12}{25}=0.48$. ב. תוחלת: 2.92, שונות: 1.1136.

ג. תוחלת: 2.92, שונות: $1.1136n$.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 22 - התפלגויות בדידות מיוחדות -התפלגות בינומית

תוכן העניינים

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית:

רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי:
ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון".
למשל מוצר פגום או תקין, אדם עובד או מובטל, עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.
בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה.
מגדירים את X להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב- P את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד, וב- Q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.
ואז נגיד ש: $X \sim B(n,p)$.

פונקציית ההסתברות של X:

לכל $k=0,1,2,....,n$ $\quad P(X=K)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

כאשר: $0!=1$; $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot....\cdot 1$; $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

לגודל: $\binom{n}{k}$ ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

תוחלת: $E(X)=np$

שונות: $V(X)=npq$

שימו לב, כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

1) חוזרים על <u>אותו ניסוי ברנולי</u> באופן <u>בלתי תלוי</u> זה בזה.
2) חוזרים על הניסוי n פעמים.
3) X – מוגדר <u>כמספר ההצלחות המתקבלות</u> בסך הכול.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה.
נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

א. מה ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

שאלות:

1) במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה. נגדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.

א. מהי ההתפלגות של X ?

ב. מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?

ג. מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?

ד. מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?

ה. מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?

ו. מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?

2) על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארטפון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את X כמספר האנשים שנדגמו עם סמארטפון.

א. מהי ההתפלגות של X ? הסבירו.

ב. מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?

ג. מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?

ד. מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?

3) בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪. ההסתברות לזכות ב-20 ₪ בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית ההימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.

א. מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?

ב. מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?

ג. מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה-30 ₪ שהשקיע?

ד. מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?

4) במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

השכלה	נמוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30.

א. מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?

ב. מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?

5) במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת״א. מבין הסטודנטים שגרים בת״א 30% מגיעים ברכבם, ומבין הסטודנטים שלא גרים בת״א 50% מגיעים ברכבם למכללה.

א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע״י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?

ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?

6) במבחן אמריקאי 20 שאלות. סטודנט ניגש למבחן והסיכוי שהוא יודע שאלה כלשהי הוא 0.8. אם הוא לא יודע הוא מנחש את התשובה.
לכל שאלה 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה.

א. מה הסיכוי לענות על שאלה מסוימת נכון?

ב. מה הסיכוי שיענה נכונה על בדיוק 16 שאלות?

ג. על כל שאלה שענה נכון התלמיד מקבל 5 נקודות, על כל שאלה ששגה מופחתת נקודה, מה התוחלת ומהי השונות של ציון התלמיד?

7) 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.

א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?

ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?

8) מטבע הוגן מוטל 5 פעמים. נגדיר את X כמספר הפעמים שהתקבל עץ.
חשבו את: $E\left(X^2\right)$.

תשובות סופיות:

1) א. $X \sim B(n=5, p=0.1)$ ב. 0.32805 ג. 0.59049
ד. 0.0729. ה. 0.40954. ו. תוחלת: 0.5, שונות: 0.45.

2) ב. 0.2335. ג. 0.1493. ד. תוחלת: 7, סטיית תקן: 1.449.

3) א. 0.5314. ב. 0.0984. ג. 0.1143.
ד. תוחלת: 18-, סטיית תקן: 14.697.

4) א. 0.1789. ב. 2.

5) א. 0.1956. ב. 0.4253.

6) א. 0.85. ב. 0.182. ג. תוחלת: 82, שונות: 91.8.

7) א. 0.401. ב. תוחלת: 8.025, סטיית תקן: 2.193.

8) 7.5.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 23 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

תוכן העניינים

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות נורמלית:

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כגון: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:

לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה.

אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות: $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

נוסחת פונקציית הצפיפות: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלוונטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון. התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת, והיא תסומן באות Z: $Z \sim N\left(0,1^2\right)$.

תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$.

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן.
ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי, ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה:

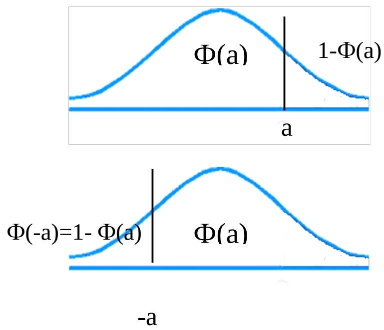
$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$

$Z \sim N\left(0,1^2\right)$

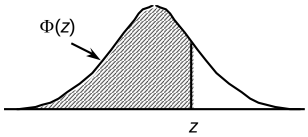
$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

בטבלה

P



טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$:



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
Φ(z)	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

1) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?
2) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?
3) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל 92 גרם?
4) מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

שאלות:

1) הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס״מ וסטית תקן של 10 ס״מ.
   א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-182.4 ס״מ?
   ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס״מ?
   ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס״מ?
   ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-170 ס״מ?
   ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס״מ?

2) נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.
   א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
   ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
   ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
   ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

3) המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק״ג וסטיית תקן של 8 ק״ג.
   א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ-55 ק״ג?
   ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק״ג?
   ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל-70 ק״ג?
   ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ-4 ק״ג?
   ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל-140 ק״ג?

4) משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטיית תקן 400 גרם.
   א. מצאו את העשירון העליון.
   ב. מצאו את האחוזון ה-95.
   ג. מצאו את העשירון התחתון.

5) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225.
א. מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטיליגנציה?
ב. מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
ג. מהו הציון ש-20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
ד. מהו האחוזון ה-20?
ה. מהו הציון ש-5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?

6) נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, ונתון ש-33% מהבקבוקים בעלי נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
א. מה ממוצע נפח משקה בבקבוק?
ב. 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?
ג. 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?

7) אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ-500 שעות, כמו כן ידוע ש-67% מהמכשירים חיים פחות מ-544 שעות.
א. מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
ב. מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?
ג. מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ-460 שעות?
ד. מהו המאיון העליון של אורח חיי מכשיר?
ה. 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

8) להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.
א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו-2 זהות?
i. בעשירון העליון.
ii. בממוצע.
iii. בשונות.
ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?
i. 1.
ii. 2.
iii. 3.
iv. אין לדעת.

9) הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?

ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?

ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ-50 דקות?

ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

10) ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל- T דולר היא 0.98976.

א. מה ערכו של T?

ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?

ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?

11) אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטיית תקן של שלושים שניות.

א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל-2.5 דקות?

ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?

ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ-3.5 דקות?

ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

תשובות סופיות:

1) א. 89.25%. ב. 2.28%. ג. 0. ד. 50%. ה. 50%.

2) א. 0%. ב. 3.76%. ג. 0%. ד. 68.26%.

3) א. 26.43%. ב. 89.44%. ג. 39.44%. ד. 0.383.
ה. 100%.

4) א. 3812.8. ב. 3958. ג. 2787.2.

5) א. 119.2. ב. 80.8. ג. 112.6. ד. 87.4.

6) א. 500. ב. 532.9. ג. 453.48.

7) א. 500. ב. 100. ג. 0.3446. ד. 733.
ה. 267.

8) א. 3. ב. בממוצע. ג. 1.

9) א. 0.1587. ב. 0.0228. ג. 0.8563. ד. 0.3975.

10) א. 1925. ב. 0.2266. ג. 0.1587.

11) א. 0.1359. ב. 0.675. ג. 100. ד. 0.25.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 24 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם: $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}$.

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.

להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2.

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ.

תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה: $E(\bar{x})=\mu_{\bar{x}}=\mu$.

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n.

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי: $V(\bar{x})=\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$.

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן: $\sigma(\bar{x})=\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטית התקן של ממוצע המדגם?

דגימה מהתפלגות נורמאלית:

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2.

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית: $Z_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $\bar{x} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק״ג?

משפט הגבול המרכזי:

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק גדול $(n \geq 30)$ ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי: $\bar{x} \mathrel{\sim\succ} N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

שאלות:

1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מיהי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו תוחלת ממוצע המדגם?

ו. מהי טעות התקן?

2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב מסוים:

מספר המשפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
סך הכול $N=10000$	

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של X.

ג. אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

3) אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

4) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.

א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?

נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.

ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?

ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?

ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?

ה. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

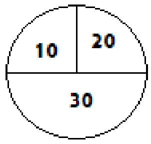
5) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?
ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?
ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתחולת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?
ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

6) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים.
לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.
א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?

7) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?
ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?
ד. בקבוקיי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?

8) משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.
א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9) בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכיה במשחק בודד.

ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?

ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?

ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪.
מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11) קובייה הוטלה 50 פעמים.
מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72?

12) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש-100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

13) נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

X	8	6	4	2
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50.
מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

14) נתון ש- $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע המדגם $\bar{X}$. לכן: $P\left(\bar{X} > \mu\right)$ יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. 0.
ב. 0.5.
ג. 1.
ד. לא ניתן לדעת.

15) נתון ש- X מתפלג כלשהו עם תוחלת: μ ושונות σ^2.
החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א. $X \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.
ב. $\mu \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.
ג. $\bar{X} \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.
ד. $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

16) נתון ש- $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$,
אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

א. μ ו- $\bar{X}$ יהיו משתנים מקריים.
ב. μ יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$ קבוע.
ג. $\bar{X}$ יהיה משתנה מקרי ו- μ קבוע.
ד. μ ו- $\bar{X}$ יהיו קבועים.

17) משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם. החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.

א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?
ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

18) משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20.
מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

19) מספר המכוניות הנכנסות לחניון "בציר" במשך היום מתפלג פואסונית עם קצב של מכונית אחת לדקה. שומר מסר נתונים על מספר המכוניות שנכנסות בכל שעה לגבי 40 שעות שאסף נתונים.
מה ההסתברות שממוצע מספר המכוניות שנכנסו לחניון לשעה בשעות אלה יהיה לפחות 63?

20) הוכיחו שאם משתנה מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונות σ^2, ומבצעים מדגם בגודל n של תצפיות בלתי תלויות מהמשתנה, אזי מתקיימות התכונות הבאות לגבי ממוצע המדגם: $E(\bar{x})=\mu$ ו- $V(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n}$.

תשובות סופיות:

1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א.
ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15.
ד. 2.
ה. 78.
ו. 10.6.

2) א. להלן טבלה:

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	0.05	0.25	0.35	0.3	0.05

ב. $\mu = 2.05$, $\sigma^2 = 0.9475$, $\sigma = 0.973$

ג. $\mu_{\bar{x}} = 2.05$, $\sigma^2_{\bar{x}} = 0.2369$, $\sigma(\overline{X}) = 0.486$

3) $\mu_{\bar{x}} = 3.5$, $\sigma(\overline{X}) = 1.21$.

4) א. 0.8413. ב. 0.0013. ג. 0. ד. 0.1974.

5) א. 0. ב. 0. ג. 0.9544. ד. 178.205.

6) א. 0.0465. ב. 27.71. ג. 0.2628. ד. התשובה הייתה קטנה.

7) א. 0. ב. 0.1587. ג. 0.1587. ד. 0.5.

8) א. 0.5468. ב. 0.6826.

9) א. להלן טבלה:

X	10	20	30
$P(X)$	0.25	0.25	0.5

ב. התוחלת: 22.5, השונות: 68.75.

ג. התוחלת: 22.5, השונות: 13.75.
ד. 0.8997.

10) 0.0475.

11) 0.1814.

12) א. 0.9772. ב. 0.0228. ג. 271.

13) 0.5.

14) ב'.

15) ד'.

16) ג'.

17) א. 2.429. ב. 0.25.

18) 0.6826.

19) 0.0071.

20) שאלת הוכחה.

התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

כעת נדון בסטטיסטי המבטא את סכום התצפיות במדגם: $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

כאשר כל התצפיות נדגמו באקראי מאותה אוכלוסייה, כלומר, היו: $X_1,...,X_n$ - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי:

התוחלת והשונות של סכום התצפיות: $E(T)=n\mu\ ,\ V(T)=n\sigma^2$.

דגימה מתוך התפלגות נורמלית:

אם: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, אזי: $Z=\frac{T-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$, $T\sim N(n\mu,n\sigma^2)$.

משפט הגבול המרכזי:

אם X מתפלג כלשהו וידוע כי: $V(X)=\sigma^2$, $E(X)=\mu,$

אזי עבור מדגם מספיק גדול (לפחות 30): $T\ \tilde{\succ}\ N(n\mu,n\sigma^2)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בעיר מסוימת המשכורת הממוצעת של עובד הינה 8000 ₪. עם סטיית תקן של 2000 ₪. נדגמו 100 עובדים מהעיר שמפקידים את משכורותיהם לסניף בנק.

1. מה התוחלת וסטיית התקן של סך המשכורות שיופקדו לסניף הבנק על ידי העובדים הללו?
2. מה ההסתברות שלסניף יופקד פחות מ-780 אלף ₪ ע"י אותם עובדים?

שאלות:

1) המשקל באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 60 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.

א. מה הסיכוי שאדם אקראי מהאוכלוסייה ישקול מתחת ל-65 ק"ג?

ב. מה הסיכוי שהמשקל הממוצע של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-65 ק"ג?

ג. מה הסיכוי שהמשקל הכולל של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-240 ק"ג?

2) נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.

א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז?

ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?

ג. אם לא היה נתון שנפח היין מתפלג נורמאלית. האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה? האם התשובה לסעיף ב' הייתה משתנה?

3) בספר כלשהו 500 עמודים. קצב הקריאה הממוצע הוא עמוד אחד ב-4 דקות עם סטיית תקן של 1 דקות.

א. מה ההסתברות לסיים את הפרק הראשון (40 עמודים) תוך שעתיים וחצי?

ב. מהו האחוזון ה-95 לזמן סיום קריאת הספר?

4) במגדל נבנו 40 יחידות דיור. כמו כן נבנו 135 מקומות חנייה לבניין. להלן פונקציית ההסתברות של מספר המכוניות ליחידת דיור:

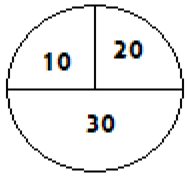
x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

נניח שמספר המכוניות ליחידת דיור בלתי תלויות זו בזו ועם אותה פונקציית הסתברות לכל יחידת דיור (אין צורך בתיקון רציפות).

א. מהי ההסתברות שיהיה מקום בחניון המגדל לכל מכוניות הבניין?

ב. בהינתן ויש מקום במגדל לכל המכוניות, מה הסיכוי שבפועל מספר המכוניות נמוך מ-130?

5) בקזינו ישנה רולטה עליה מסומנים המספרים הבאים :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום.

א. אם האדם משחק 50 פעמים, מה ההסתברות שבסך הכול יזכה בסכום של 1050 ₪ ומעלה?

ב. האדם מגיע בכל יום לקזינו ומשחק 50 פעם, עד אשר מגיע היום בו הוא יזכה ב-1050 ₪ ומעלה. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הימים שיבלה בקזינו?

תשובות סופיות:

1) א. 0.6915. ב. 0.8413. ג. 0.5 .

2) א. תוחלת 3000 מ״ל, סטיית תקן 40 מ״ל. ב. 0.0062.
ג. סעיף א׳ - לא משתנה, סעיף ב׳ - לא פתיר, התבסס על התפלגות נורמלית.

3) א. 0.0571. ב. 2036.8.

4) א. 0.883. ב. 0.7949.

5) א. 0.8997. ב. תוחלת 1.111, שונות 0.1239.

חוק המספרים הגדולים:

רקע:

חוק המספרים הגדולים מתייחס להשפעת הגדלת גודל המדגם על הסיכוי של פרופורציית המדגם (או ממוצע המדגם) להיות קרובה מהפרופורציה האמיתית (או מהממוצע האימתי).

החוק לגבי פרופורציה:

נניח שמבצעים מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה אינסופית בה פרופורציית ההצלחות היא p , ככל שהמדגם גדול יותר: כך הסיכוי שפרופורציית המדגם ($\hat{p}$) תהיה בקרבת הפרופורציה באוכלוסייה (P) גבוה יותר.
ולכן הסיכוי לקבל ערך חריג הרחוק מהפרופורציה של האוכלוסייה קטן יותר.
בכתיבה מתמטית רושמים את חוק המספרים הגדולים לגבי הפרופורציה באופן הבא: $\lim_{n\to\infty} \widehat{P}_n = P$.
בספרות המקצועית קוראים לחוק הזה החוק החזק של המספרים הגדולים.
את החוק החלש של המספרים הגדולים רושמים באופן הבא: $P\left(|\hat{P}-P|<\varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\to}1$.

הערה: ככל שהמדגם גדל הסיכוי שפרופורציית המדגם תהיה בדיוק הפרופורציה האמיתית הולך וקטן.

החוק לגבי ממוצע: נניח שמבצעים מדגם מקרי מתוך התפלגות שבה התוחלת μ והשונות סופית. ככל שהמדגם גדול יותר, כך הסיכוי שממוצע המדגם ($\bar{X}$) יהיה בקרבת הממוצע באוכלוסייה (μ) גבוה יותר. לכן, הסיכוי לקבל ערך חריג הרחוק מהממוצע של האוכלוסייה קטן יותר. בכתיבה מתמטית רושמים את חוק המספרים הגדולים לגבי הממוצע באופן הבא: $\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu$.

בספרות המקצועית קוראים לחוק הזה החוק החזק של המספרים הגדולים.
את החוק החלש של המספרים הגדולים רושמים באופן הבא: $P\left(|\bar{X}-\mu|<\varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\to}1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

באוכלוסייה מסוימת 20% מהאוכלוסייה מובטלת. איזה סיכוי יותר גבוה? במדגם בגודל 100 פרופורציית המובטלים תסטה מהפרופורציה האמיתית בלא יותר מ-4%. במדגם בגודל 200 פרופורציית המובטלים תסטה מהפרופורציה האמיתית בלא יותר מ-4%. הסבירו.

שאלות:

1) באוכלוסייה מסוימת 20% מהאוכלוסייה מובטלת. איזה סיכוי יותר גבוה?
   א. אחד מתוך מדגם של חמישה יהיה מובטל.
   ב. שניים מתוך עשרה יהיו מובטלים. הסבירו וחשבו.

2) באוכלוסייה מסוימת 20% מהאוכלוסייה מובטלת. איזה סיכוי יותר גבוה?
   א. לפחות 3 מתוך 10 יהיו מובטלים
   ב. לפחות 30 מתוך 100 יהיו מובטלים. הסבירו.

3) גובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע 170 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. דוגמים 4 אנשים באקראי.
   א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה מעל 176 ס"מ.
   ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם? נמקו.

4) ידוע שבהצעת חוק מסוימת תומכים 60% מהציבור. נדגמו באקראי 10 אנשים.
   א. מה ההסתברות שבדיוק 60% מהמדגם תומכים בהצעת החוק?
   ב. כיצד התשובה הייתה משתנה אם היו דוגמים 20 אנשים?

5) שני חוקרים ביצעו מדגם מאותה אוכלוסייה. חוקר א דגם 20 תצפיות והשני דגם 40 תצפיות וכל אחד מהם חישב את ממוצע המדגם: $\bar{X}_{20}$ ו- $\bar{X}_{40}$.
ידוע שהתפלגות היא נורמלית ושהתוחלת באוכלוסייה הינה 500.
בסעיפים הבאים נמקו אילו הסתברויות מהזוגות המוצגים גדולה יותר או שהן שוות ונמקו.
   א. $P\left(\bar{X}_{20}>500\right)$ או $P\left(\bar{X}_{40}>500\right)$.
   ב. $P\left(480<\bar{X}_{20}<520\right)$ או $P\left(480<\bar{X}_{40}<520\right)$.
   ג. $P\left(\bar{X}_{20}<490\right)$ או $P\left(\bar{X}_{40}<490\right)$.

6) נתון ש: $X\sim G\left(P=0.1\right)$. מבצעים מדגם אקראי בגודל n מההתפלגות הזו ומחשבים את ממוצע המדגם: $\bar{X}_n$.
הוכיחו: $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{X}_n=10$.

תשובות סופיות:

1) אחד מתוך מדגם של חמישה יהיה מובטל.

2) לפחות 3 מתוך 10 יהיו מובטלים.

3) א. 0.1151. ב. קטנה.

4) א. 0.2508. ב. קטן.

5) א. $P\left(\bar{X}_{40} > 500\right) = P\left(\bar{X}_{20} > 500\right)$.

ב. $P\left(480 < \bar{X}_{40} < 520\right) > P\left(480 < \bar{X}_{20} < 520\right)$.

ג. $P\left(\bar{X}_{40} < 490\right) < P\left(\bar{X}_{20} < 490\right)$.

6) שאלת הוכחה.

מבוא לתאוריה למדעי המחשב

פרק 25 - אי שוויונים בהסתברות

תוכן העניינים

אי-שוויון מרקוב:

רקע:

אי-שוויון מרקוב רלבנטי לשימוש עבור כל משתנה מקרי אי-שלילי.

הפרמטר a הינו ממשי וחיובי ואז חייב להתקיים ש: $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$,

לכן מתקיים גם ש: $P(X < a) \geq 1 - \frac{E[X]}{a}$.

דוגמה:

אורך חיים של מכשיר מתפלג עם תוחלת של 500 שעות. חשבו לפי אי-שוויון מרקוב את ההסתברות שאורך חיים של מכשיר יהיה לפחות 1500 שעות.

$X =$ אורך חיים של מכשיר (רציף).

$X \geq 0$, $E[X] = 500$

$$P(X \geq 1500) \leq \frac{E[X]}{a} = \frac{500}{1500} = \frac{1}{3}$$

לכן, $0 \leq P(X \geq 1500) \leq \frac{1}{3}$.

שאלות:

1) ידוע מניסיון העבר כי ציון במבחן הגמר של סטודנט הוא משתנה מקרי שתוחלתו 65.
מצאו חסם עליון להסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה לפחות 75.

2) התפלגות מספר הילדים למשפחה במדינה מסוימת היא עם תוחלת של 2 ילדים. נלקחו 5 משפחות אקראיות.
העריכו את הסיכוי שבסה"כ בחמשת המשפחות יש יותר מ-15 ילדים.

3) X משתנה מקרי רציף אי-שלילי, שתוחלתו 15.
האם ייתכן ש: $P(X>65)=0.3$?

4) X משתנה מקרי בדיד, המקיים: $X>-2$, ותוחלתו 6.
מצאו חסם תחתון ל- $P(X<10)$.

5) X משתנה מקרי המקיים: $P(X\ge 0)=1$ ו- $s>0$ קבוע ממשי.
הוכיחו כי: $P(X<sE(X))\ge \frac{s-1}{s}$.

6) נתון ש- $X_i \sim P(\lambda)$, $i=1,2,...,n$ הם משתנים בלתי תלויים.
מצאו חסמים להסתברות ש- $\sum_{i=1}^{n} X_i \ge 3n\lambda$.

7) הוכיחו את אי-שוויון מרקוב.
רמז: היעזרו במשתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 כאשר $X\ge a$.

8) בשכונה חדשה בונים n בתים חדשים הנבנים בחלקת אדמה עגולה. כל בית נצבע בלבן בסיכוי p ללא תלות בבתים האחרים. בניין שלא נצבע בלבן נצבע באפור. בית לבן הוא בית בודד אם הוא נמצא בין שני בתים אפורים.
נגדיר את X להיות מספר הבתים הלבנים הבודדים.

א. מצאו את התוחלת של X.

ב. כעת נניח ש-$p=\frac{1}{4}$. הראו שהסיכוי שמספר הבתים הלבנים הבודדים יהיה קטן מ-$\frac{n}{4}$ הוא לפחות $\frac{7}{16}$.

9) הוכיחו את אי-שוויון צ'בישב: אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונותו הן סופיות, אז לכל ערך k חיובי מתקיים: $P\{|X-E(X)|\geq k\}\leq\frac{Var(X)}{k^2}$.
רמז: היעזרו באי-שוויון מרקוב.

תשובות סופיות:

1) $P\left(X \geq 75\right) \leq \frac{65}{75} = \frac{13}{15}$.

2) $0 \leq P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 3n\lambda\right) \leq \frac{1}{3}$.

3) לא יתכן.

4) $\frac{1}{3}$.

5) שאלת הוכחה.

6) $0 \leq P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 3n\lambda\right) \leq \frac{1}{3}$.

7) שאלת הוכחה.

8) א. $n \cdot p\left(1-p\right)^2$. ב. שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

אי-שוויון צ'בישב:

רקע:

אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונותו הן סופיות, אז לכל ערך a חיובי מתקיים: $P\{|X-E(X)|\geq a\}\leq\frac{Var(X)}{a^2}$.

מכאן גם נובע שמתקיים: $P\{|X-E(X)|<a\}\geq 1-\frac{Var(X)}{a^2}$.

אי-שוויון צ'בישב נותן חסמים להסתברות סימטרית סביב התוחלת ללא צורך בידיעת ההתפלגות של המשתנה המקרי X.

דוגמה:

נתון משתנה מקרי עם סטיית תקן של 3. האם יתכן שההסתברות שהסטייה של המשתנה המקרי מתוחלתו תהיה קטנה מ-5 היא 0.6?

$\sigma(X)=3$

נציב, $P\{|X-E(X)|<a\}\geq 1-\frac{Var(X)}{a^2}$:

$$P\{|X-E(X)|<5\}\geq 1-\frac{3^2}{5^2}=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}=0.64$$

$P\{|X-E(X)|<5\}\neq 0.6$, לכן לא יתכן.

שאלות:

1) מצאו חסמים להסתברויות הבאות עבור משתנה מקרי רציף בעל תוחלת 8 וסטית תקן 3:

א. $p(2<x<14)$.

ב. $p(|x-8|\geq 9)$.

2) האם קיים משתנה מקרי X בעל תוחלת μ וסטית תקן σ שעבורו מתקיים $P(\mu-3\sigma\leq X\leq\mu+3\sigma)=0.7$? הסבירו.

3) מספר המטוסים המגיעים לנמל תעופה ב-20 דקות מתפלג התפלגות פואסונית עם תוחלת של 100. היעזרו באי-שוויון צ'בישב כדי למצוא גבול תחתון להסתברות שמספר המטוסים המגיעים בתקופה בת 20 דקות נתונה תהיה בין 80 ל-120.

4) מטילים מטבע 120 פעמים. מה ניתן להגיד על הסיכוי שהתוצאה עץ תתקבל בין 50 ל-70 פעמים לפי אי-שוויון צ'בישב?

5) מתוך קו יצור של רכיבים שאורכם הממוצע הנו 10 ס"מ ושונותם 3 סמ"ר יש לקחת מדגם. מהו גודל המדגם שיבטיח שבהסתברות של 0.9 לפחות ימצא ממוצע המדגם בין 9 ל-11 ס"מ?

6) אחוז התומכים במפלגה מסוימת הנו 40%. נלקח מדגם מקרי בגודל 200. תנו חסם תחתון לכך שאחוז התומכים במדגם יהיה בין 35% ל-45%.

7) בוחרים קוד n ספרתי באופן מקרי.

א. עבור $n=10$, העריכו את ההסתברות שממוצע הספרות במספר יסטה מתוחלתו בלפחות 1.

ב. מה אורך הקוד המינימלי (n) שיבטיח שבהסתברות של לפחות 95%, ממוצע הספרות יסטה מתוחלתו בפחות מ-0.75?

8) בעיר מסוימת ל-5% מהמשפחות אין מכונית, ל-20% יש מכונית אחת, ל-35% יש שתי מכוניות, ל-30% שלוש מכוניות וליתר ארבע מכוניות.
נניח שמספר המשפחות בעיר גדול מאד.
העריכו את ההסתברות שמספר המכוניות הכולל בעשר משפחות אקראיות יהיה לפחות 17 ולכל היותר ל-27.

9) $X_1, X_2 ..., X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים גיאומטרית עם פרמטר p באופן בלתי תלוי זה בזה. $0 < p < 1$. הוכיחו שמתקיים: $P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \ge \frac{2}{p}\right) \le \frac{1-p}{n}$.

10) $X_1, X_2 ..., X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים פואסונית עם פרמטר $\lambda_i = i$, באופן בלתי תלוי זה בזה. נסמן את: $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
הוכיחו שמתקיים: $P(|2T - n(n+1)| < 2n) \ge \frac{n-1}{2n}$.

תשובות סופיות:

1) א. בין $\frac{3}{4}$ ל-1. ב. בין 0 ל-$\frac{1}{9}$.

2) לא יתכן.

3) 0.75.

4) לפחות 0.7.

5) לפחות 30.

6) 0.52.

7) א. לכל היותר 0.825. ב. 294.

8) 0.7056.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.