מבוא לקוונטים

תוכן העניינים

מבוא לקוונטים

פרק 1 - תנועה הרמונית -מתוך פיזיקה 1

תוכן העניינים

תנועה הרמונית פשוטה:

רקע:

משוואת התנועה:

$$-k(x-x_0)=m\ddot{x}$$

k ו- m קבועים <u>חיוביים</u> כלשהם.

x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.

x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או כל משתנה אחר.

$\ddot{x}$ - נגזרת שניה של המשתנה.

חייב להיות מינוס לפני k.

פתרון המשוואה:

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)+x_0$$

x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה: $\Sigma\vec{F}=0$.

A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משוויי המשקל.

ω - תדירות זוויתית: $\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$.

φ - פאזה.

מציאת הקבועים בפתרון:

x_0 - אפשר למצא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{\text{של המקדם } x}{\text{של המקדם } \ddot{x}}}$$

A,φ מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$, $\dot{x}(0)$.

נוסחה למהירות המקסימאלית:

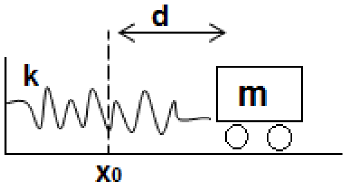
$$v_{max} = \omega A$$

אנרגיה:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}mA^2$$

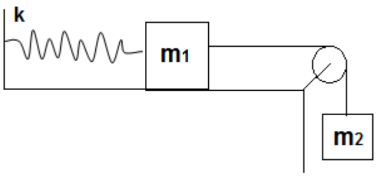
שאלות:

1) **דוגמה - מסה מתנגשת במסה**



מסה m מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחובר לקיר בעל קבוע קפיץ k.
מותחים את המסה מרחק d מהמיקום בו הקפיץ רפוי ומשחררים ממנוחה.
מצא את $x(t)$ של המסה.

2) **דוגמה - מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה**



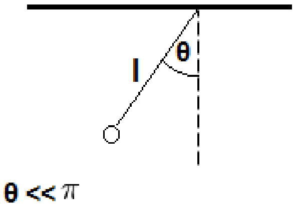
מסה m_1 מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k. מהמסה יוצא חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשור למסה נוספת התלויה באוויר M.

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבע את הראשית בנקודה שבה הקפיץ רפוי).

ב. מצא את תדירות התנודה של המערכת.

ג. מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתיחות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?

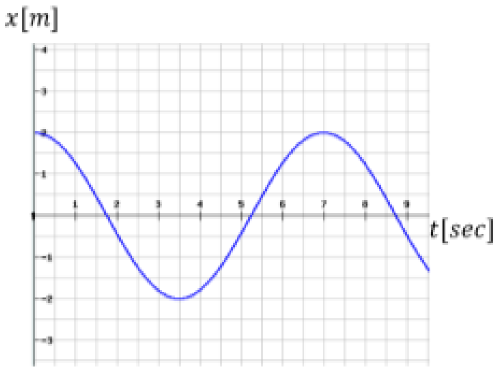
3) **דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)**



נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה.
אורך החוט של המטוטלת הוא l.
מצא את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן.
הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה θ (דרך אנרגיה).

4) גרף מיקום זמן

הגרף הבא מתאר את מיקומו כתלות בזמן של גוף הנע בתנועה הרמונית פשוטה.



א. מהי אמפליטודת התנועה?

ב. מהו זמן המחזור?

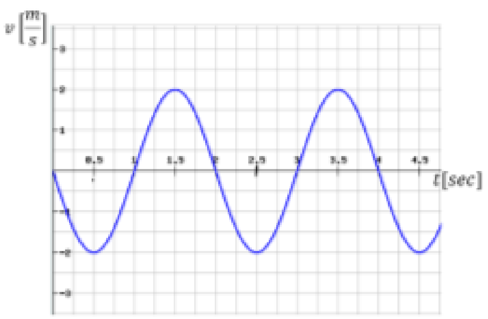
ג. מהי התדירות הזוויתית?

ד. מהי הפאזה?

ה. רשום נוסחה למהירות כתלות בזמן.

5) גרף מהירות זמן

מהירותו של גוף המתנדנד בתנועה הרמונית נתונה לפי הגרף הבא :



א. מתי מגיע הגוף לנקודת שיווי המשקל בפעם הראשונה?

ב. האם תאוצת הגוף ב- $t=1\text{sec}$ מקסימאלית?

ג. האם ב- $t=1.5\text{sec}$ האנרגיה קינטית מרבית?

ד. מהו הכוח ב- $t=2.5\text{sec}$?

ה. כמה מחזורי תנועה עשה הגוף ב-4 השניות הראשונות של התנועה?

תשובות סופיות:

1) $x(t)=-\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{2m}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t+\frac{\pi}{2}\right)+x_0$

2) א. $x=\frac{m_2 g}{k}$ ב. $\omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$ ג. $A_{max}=\frac{g}{\omega^2}$

3) $\theta(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

4) א. $A=2\text{m}$ ב. $T=7\text{sec}$ ג. $\omega\approx 0.898\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ד. $\varphi=0$

ה. $v(t)=-1.80\cdot\sin(0.898\cdot t+0)$

5) א. $t=0.5\text{sec}$ ב. כן. ג. כן. ד. 0

ה. 2

בור פוטנציאל:

רקע:

כאשר גוף נמצא בנקודת מינימום של הפוטנציאל והאנרגיה הכללית שלו גדולה רק במעט מהאנרגיה הפוטנציאלית אז הוא מבצע תנועה הרמונית בתדירות:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$$

כאשר x_0 היא נקודת המינימום ו- U'' נגזרת שניה בנקודה

שאלות:

1) פוטנציאל לנארד-ג'ונס

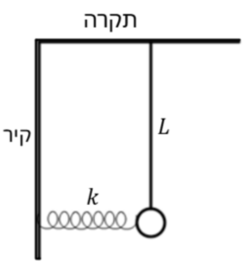
פונקציית הפוטנציאל של לנארד ג'ונס מתארת את האינטראקציה בין אטומים או מולקולות בתוך סריג והיא נתונה לפי הנוסחה: $\mathrm{U}(r)=\varepsilon\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right]$

כאשר ε ו- r_0 קבועים ו- r הוא המרחק בין המולקולות.

מצא את התדירות של תנודות קטנות סביב שיווי משקל של המערכת.

ניתן להניח שמדובר בחלקיק אחד במסה m המרגיש את הפוטנציאל מחלקיק שני במסה M הנשאר נייח $(\mathrm{m} << \mathrm{M})$.

2) מטוטלת מתמטית וקפיץ עם אנרגיות



מטוטלת עם מסה m תלויה מהתקרה באמצעות חוט באורך L.

קושרים למסה קפיץ בעל קבוע k המחובר אופקית לקיר.

הקפיץ במצב רפוי כאשר החוט מאונך לתקרה.

מזיזים את המסה זווית קטנה θ_0 ימינה ומשחררים ממנוחה.

א. מצאו את הזווית של המסה כתלות בזמן.

ב. מהי המתיחות בחוט כאשר המוט נמצא במצב אנכי תוך כדי תנועה.

3) עיפרון עם מוטות בשיווי משקל

הגוף שבאיור מורכב מעיפרון בעל מסה זניחה ואורך L.

לקצה של העיפרון מחוברים שני כדורים בעלי מסה m

באמצעות מקלות דקים חסרי מסה באורך l ובזווית α.

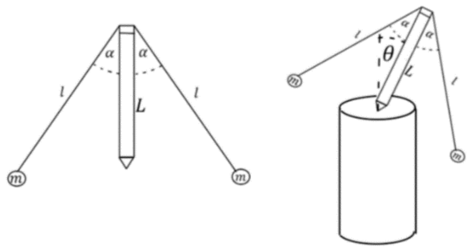
מניחים את הגוף על מעמד ומטים אותו בזווית θ במישור הדף.

א. רשמו את האנרגיה הפוטנציאלית של הגוף כתלות בזווית θ.

ב. באיזו זווית θ יהיה הגוף בשיווי משקל?

ג. מה התנאי לכך ששיווי המשקל יהיה יציב?

ד. מהו זמן המחזור של התנודות סביב נקודת שיווי המשקל?



תשובות סופיות:

1) $\omega_0 = \sqrt{\frac{72\varepsilon}{mv_0}}$

2) א. $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{mg+kL}{mL}} \cdot t\right)$ ב. $T = mg + (mg+kL)\theta_0^2$

3) א. $U = 2mg(L - l\cos\alpha)\cos\theta$ ב. $\theta = 0$ ג. $L < l\cos\alpha$

ד. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{l\cos\alpha - L}{L^2 + l^2 - 2Ll\cos\alpha}}}$

תנועה הרמונית מרוסנת:

רקע:

משוואת התנועה:

$$\ddot{z}+\Gamma\dot{z}+\omega_0^2 z=0$$

$$\Gamma=\frac{\lambda}{m}\ ,\ \omega_0^2=\frac{k}{m}$$

פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:

(I). ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2}>\omega_0$

$$z(t)=e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(Ae^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}\cdot t}+Be^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}\cdot t}\right)$$

אין תנודות.

(II). ריסון קריטי: $\frac{\Gamma}{2}=\omega_0$

$$z(t)=(A+B\cdot t)\cdot e^{-\omega_0\cdot t}$$

דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.

(III). ריסון חלש: $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$

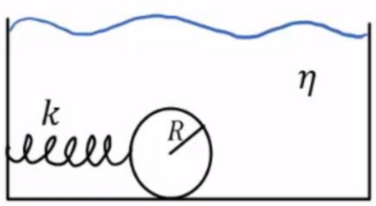
$$z(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t}\cos(\tilde{\omega}t + \varphi)$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.

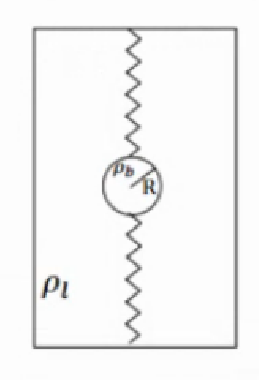
שאלות:

1) כדור במיכל מים



כדור בעל מסה m ורדיוס R נמצא בתוך מיכל מים ומחובר באמצעות קפיץ אופקי לדופן המיכל.
קבוע הקפיץ הוא k. בתנועת הגוף במים, מפעילים המים על הכדור כוח התנגדות המתכונתי והפוך למהירותו. כוח זה נקרא כוח סטוקס וגודלו הוא: $\vec{F}=-6\pi R\eta\vec{v}$. כאשר η היא צמיגות המים ו- R הוא רדיוס הכדור.
התייחס ל- m, k, η, R כנתונים ומצא את תדירות התנודות של הכדור בהנחה ש- $R<\frac{\sqrt{mk}}{3\pi\eta}$. הזנח את החיכוך בין הכדור לתחתית המיכל.

2) שני קפיצים בנוזל



כדור נמצא בתוך תיבה מלאה במים ומחובר עם קפיץ אידיאלי לקצה העליון של התיבה ועם קפיץ אידיאלי נוסף זהה לקצה התחתון של התיבה.
נתון: R - רדיוס הכדור, ρ_b - צפיפות המסה של הכדור,
ρ_l - צפיפות המסה של המים, K - קבוע שני הקפיצים
ו- η - צמיגות המים.
(תזכורת: כאשר כדור נמצא בתוך נוזל פועלים עליו כוח ציפה: $F=\rho_l Vg$ וכוח סטוקס: $F=-6\pi\eta Rv$).

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת.
ב. מה התנאי שיהיו תנודות הרמוניות?
מצא את התדירות בהנחה שתנודות אלו מתקיימות.
ג. מצא את התנאי בו יחזור הכדור הכי מהר לנקודת שיווי המשקל.

3) איבוד אנרגיה במחזור

בתנועה הרמונית מרוסנת קיים ריסון חלש כך שהאמפליטודה של התנועה יורדת ב-2.5 אחוז כל מחזור.
בכמה אחוז יורדת האנרגיה בכל מחזור?

4) משקולת במיכל מים תלויה מהתקרה

משקולת שמסתה: $M = 1\text{kg}$ נמצאת במיכל מים ומחוברת לתקרה באמצעות קפיץ בעל קבוע: $k = 20\frac{\text{N}}{\text{m}}$. כוח ההתנגדות שמפעילים המים הוא מהצורה של: $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ כאשר: $\lambda = 4\frac{\text{kg}}{\text{sec}}$ ו- $\vec{v}$ היא מהירות המסה.
הניחו שהמשקולת אינה יוצאת מהמים ואינה פוגעת ברצפה.

א. תוך כמה זמן תרד האמפליטודה לחמישית מגודלה ההתחלתי? (הניחו שהפאזה היא אפס)

ב. לאחר כמה מחזורים זה יקרה?

5) מסה באמבט מים ודבש

מסה: $m = 1\text{kg}$ נמצאת באמבט מלא מים, המסה מחוברת באמצעות שני קפיצים זהים בעלי קבוע: $k = 25\frac{\text{N}}{\text{m}}$ לשתי דפנות האמבט ונעה ללא חיכוך עם ריצפת האמבט. מזיזים את המסה 0.5m מנקודת שיווי המשקל ומשחררים ממנוחה. התנגדות המים מפעילה כוח גרר: $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ כאשר: $\lambda = 10\frac{\text{kg}}{\text{sec}}$.

א. מהו העתק המסה כתלות בזמן?

ב. מחליפים את המים בדבש מה שמגדיל את λ פי $\sqrt{2}$. מזיזים שוב את המסה 0.5m ומשחררים, מהו העתק המסה כתלות בזמן?

תשובות סופיות:

1) $\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\text{k}}{\text{m}} - \left(\frac{3\pi\text{R}\eta}{\text{m}}\right)^2}$

2) א. $y_{eq} = \frac{\text{F}_\text{b}}{2\text{K}}$ ב. $\omega^* = \sqrt{\frac{2\text{K}}{\text{m}} - \left(\frac{6\pi\eta\text{R}}{2\text{m}}\right)^2}$ ג. $\frac{2\text{K}}{\text{m}} = \frac{6\pi\eta\text{R}}{2\text{m}}^2$

3) 5%

4) א. 1.6sec ב. בערך מחזור אחד.

5) א. $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-5t}\cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$ ב. $x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}}t\right)e^{-5\cdot\sqrt{2}t}$

תנועה הרמונית מאולצת:

רקע:

כוח מאלץ:

$$\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

משוואת התנועה:

$$\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

פתרון משואת התנועה:

$$x(t) = A(\Omega)\sin(\Omega t + \phi) + x_{\text{הומוגני}}(t)$$

$x_{\text{הומוגני}}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים

במצב עמיד נזניח את הפתרון ההומוגני.

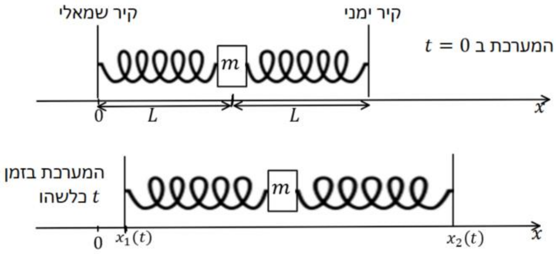
$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2\Omega^2}}$$

$$\sin(\phi) = \frac{\Gamma\,\Omega}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2\Omega^2}}$$

תדירות תהודה - התדירות של הכוח המאלץ עבורה $A(\Omega)$ מקסימאלי.

שאלות:

1) מסה בין קירות זזים



מסה m מחוברת לשני קפיצים זהים בעלי קבוע k ואורך רפוי L משני צידיה. הקפיצים מחוברים לקירות הנמצאים במרחק L מהמסה משמאלה ומימינה והמערכת כולה מונחת על שולחן חלק (כוח הכובד לתוך הדף).

על המסה פועל כוח גרר: $F=-bv$. ב- $t=0$ הקירות מתחילים לזוז .

ראשית הצירים ממוקמת במרכז התנועה של הקיר השמאלי והכיוון החיובי ימינה.

מיקום הקירות כתלות בזמן הוא: $x_1(t)=d\sin(\omega t)$, $x_2(t)=2L+2d\sin(\omega t)$.

נתונים: m , b , k , ω , L , d ו- $d<<L$.

א. מהי תדירות התנועה ומהי האמפליטודה?

ב. מה התנאי לתהודה בהנחה כי הריסון חלש מאוד?

2) מציאת תדירות ברבע אמפליטודה

מסה m מחוברת לקפיץ אופקי בעל קבוע k , המסה נעה על מישור חלק ללא חיכוך.

על המסה פועל כוח גרר: $f=-bv$ וכוח מאלץ: $F(t)=d\cdot\cos(\omega t)$.

מצא את תדירות הכוח בה אמפליטודת התנועה במצב העמיד תהיה רבע מהאמפליטודה המקסימלית.

הנח כי: d , m , k , b , ω נתונים וכי: $b<<\sqrt{mk}$.

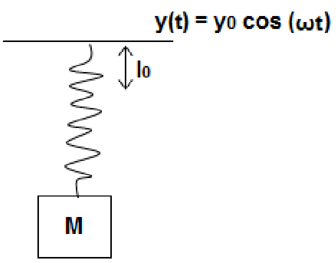
3) מסה תלויה על קרש נע

מסה M מחוברת באמצעות קפיץ אנכי לקרש אופקי הנע בציר ה- y

לפי: $y(t)=y_0\cos(\omega t)$.

קבוע הקפיץ k ואורכו הרפוי l_0 נתונים.

מצא את מיקום המסה כפונקציה של הזמן.



תשובות סופיות:

1) א. $A(\omega)=\dfrac{\frac{3kd}{m}}{\sqrt{\left(\frac{2k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{b}{m}\right)^2\omega^2}}$

ב. $\omega\sim\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

2) $\omega_{1,2}=\sqrt{\dfrac{B\pm\sqrt{B^2-4C}}{2}}$

3) $y(t)=\dfrac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m}-\omega^2}\cos\omega t+y'_0$

מבוא לקוונטים

פרק 2 - מודים עצמיים

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים – מערכת של שתי מסות

שאלות

1) מסה מחוברת למסה שמחוברת לתקרה

מסה m מחוברת לתקרה באמצעות קפיץ אנכי בעל קבוע 2k . מסה m נוספת מחוברת למסה הראשונה באמצעות קפיץ אנכי נוסף בעל קבוע k . המסות זזות רק בציר האנכי.

א. הסבירו מדוע ניתן להתעלם מכוח הכובד בבעיה זאת, כאשר אנו באים למצוא את התדירויות העצמיות ואת אופני התנודה.

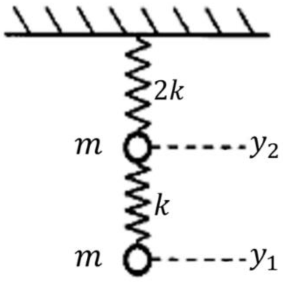
ב. כתבו את מערכת המשוואות בצורה מטריציונית ומצאו את התדירויות העצמיות.

ג. מצאו את אופני התנודה, ותארו אותם.

ד. בזמן $t=0$ נותנים מכה קטנה למסה התחתונה, כך שהיא מקבלת מהירות התחלתית v_0.

מצאו את תנועת המסות כתלות זמן.

רמז: במקרה זה יהיה יותר פשוט לפרוש את תנאֵי ההתחלה כאשר הפתרון רשום באמצעות סכום של סינוסים וקוסינוסים.



תשובות סופיות

1) א. כוח הכובד הוא כוח קבוע. כוחות קבועים מתבטלים על ידי תוספת קבועה של מתיחה לקפיץ. לכן, כוחות קבועים משנים רק את נקודת שיווי המשקל ואינם משפיעים על התדירויות או על אופני התנודה.

ב. $w_{1,2}=\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}w_0,\quad w_{3,4}=\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}w_0$

ג. $v_1=\begin{pmatrix}1\\-2.41\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}1\\0.41\end{pmatrix}$

ד.

$$\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.63\\-1.52\end{pmatrix}\cdot\frac{v_0}{w_0}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}w_0t\right)+\begin{pmatrix}0.9\\0.37\end{pmatrix}\cdot\frac{v_0}{w_0}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}t\right)$$

$$w_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

מבוא לקוונטים

פרק 3 - אנליזת פורייה

תוכן העניינים

אנליזת פורייה

טורי פורייה

רקע

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)+B_n\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right]$$

כאשר L הוא המחזור של הפונקציה (אפשרי גם שהמחזור של הפונקציה יהיה קטן מ L אבל לא גדול ממנו).

הפונקציה צריכה להיות מחזורית ובמרחב L_2.

$$A_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$$

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$$

מכפלה פנימית

$$\int_0^L f(x)g(x)dx$$

פונקציות אורתוגונליות

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx=0$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx=\frac{L}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx=\frac{L}{2}\delta_{nm}$$

אפשר לתאר באמצעות אותן נוסחאות של טור פורייה גם קטע מתוך פונקציה שאינה מחזורית או פונקציה המוגבלת לתחום מסוים. צריך לזכור שהטור מתאר רק את הקטע המסוים ובשאר המרחב הוא מתאר שכפול של הקטע ולא את הפונקציה המקורית.

טור סינוסים וקוסינוסים לתיאור פונקציה בקטע סופי

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

טור אקספוננטים:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$$

$$C_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$C_n=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}dx$$

הקשר בין המקדמים בטור אקספוננטים לטור סינוסים וקוסינוסים:

$B_n=i(C_n-C_{-n})$	$A_n=C_n+C_{-n}$
$C_{-n}=\frac{1}{2}(B_n+iA_n)$	$C_n=\frac{1}{2}(B_n-iA_n)$

$$\frac{A_0}{2}=C_0$$

תופעת גיבס:

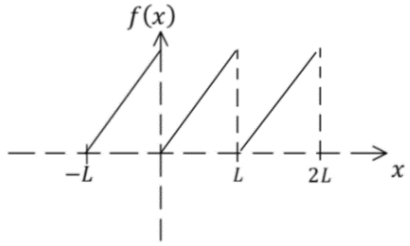
- קרוב לנקודת האי רציפות של הפונקציה המקורית. נראה תנודתיות בפונקציה המתוארת על ידי הטור. תנודתיות זו הולכת וקטנה ככל שמספר האיברים בטור גדל והיא נעלמת לגמרי עבור אינסוף איברים.
- בנקודת אי הרציפות אנחנו נראה סטייה של 0.9% מערך הקפיצה בפונקציה, סטייה זו היא קבועה ואינה קטנה ככל שמגדילים את מספר האיברים (החל ממספר איברים מסוים)

שאלות

1) דוגמה - פונקציית מסור

מצאו את טור פורייה עבור פונקציית מסור :

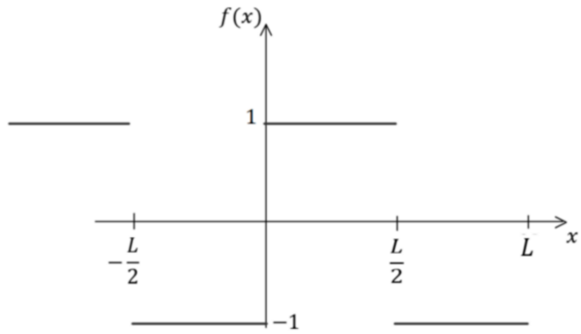
$f(x) = Ax$ כאשר $0 \leq x < L$ ובעלת מחזור L . A קבוע נתון.



2) דוגמה - פונקציית סימן

מצאו את המקדמים של טור פורייה של הפונקציה $f(x)$ השווה לפונקציית סימן $sign(x)$ בתחום, $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ ובעלת מחזור L. ציירו באמצעות מחשב את המקרה של $N = 1$, $N = 3$, $N = 10$ ו- $N = 50$ עבור $L = 1$

$$sign(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



3) תרגיל - פונקציית משולש

נתונה פונקציית משולש

$$\text{f}(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ L - x, & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq L$

א. כתבו את הפונקציה כטור פורייה של קוסינוסים וסינוסים.

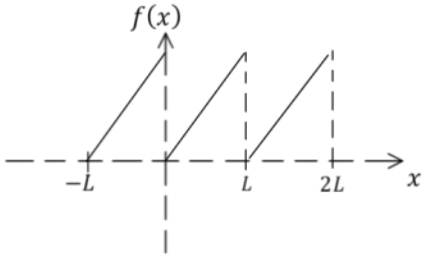
ב. כתבו את הפונקציה כטור סינוסים.

ג. כתבו את הפונקציה כטור קוסינוסים.

ד. הראו כי התוצאה של סעיף ג' מתלכדת עם התוצאה של סעיף א' והסבירו מדוע.

4) תרגיל - פונקציית מסור עם אקספוננטים

א. מצאו את טור אקספוננטים עבור פונקצית המסור מהדוגמה בתחילת הפרק: $f(x) = Ax$ כאשר $0 \le x < L$ ובעלת מחזור L. A קבוע נתון.



ב. מצאו את המקדמים של טור סינוסים וקוסינוסים באמצעות המקדמים שמצאתם בסעיף א' והראו שהתשובה זהה לתשובה שקיבלנו בדוגמה של תחילת בפרק.

5) תרגיל - פונקציה לינארית בתחומים שונים

מצאו את טור פורייה של הפונקציה $f(x) = x$ בתחומים הבאים:

א. $[0,2\pi]$

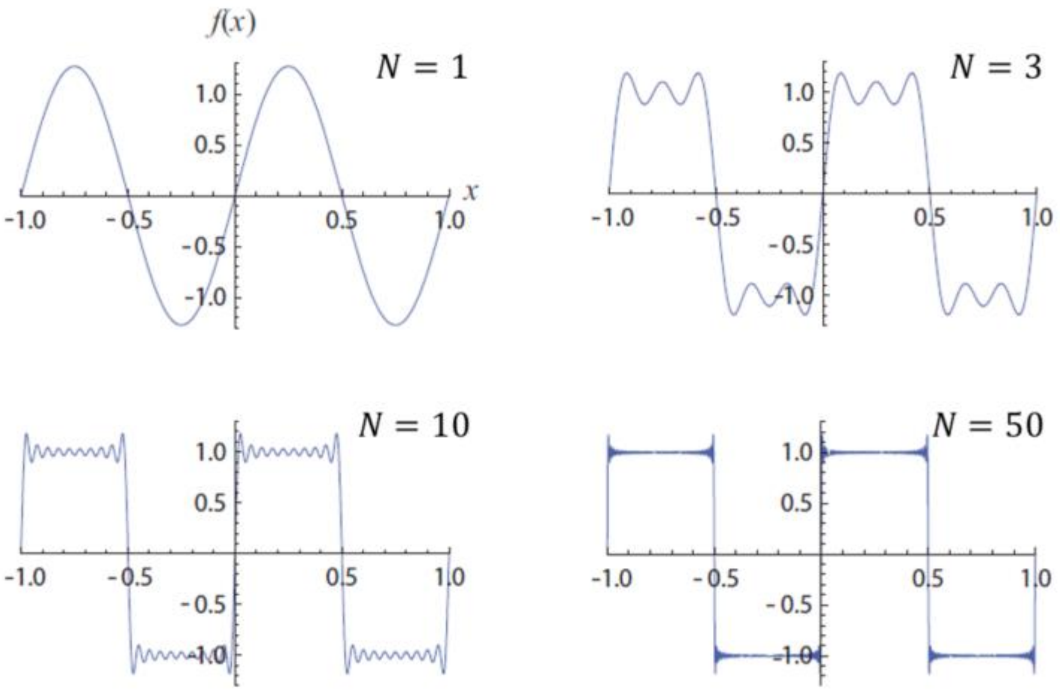
ב. $[-\pi,\pi]$

ג. $[0,4\pi]$

תשובות סופיות

1) $f(x)=\frac{AL}{2}+\sum_{n=n}^{\infty}-\frac{AL}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$

2) $A_n=0$ לכל n ; $B_n=\begin{cases}\frac{4}{\pi n} & n \text{ odd}\\ 0 & n \text{ even}\end{cases}$.



3) א. $f(x)=\frac{L}{4}-\sum_{n=1,\text{ odd}}^{\infty}\frac{2L}{\pi^2n^2}\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$

ב. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$

ג. $f(x)=\frac{L}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{\pi^2n^2}\left(2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1-(-1)^n\right)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$

ד. כי שכפול הפונקציה על מחזור L נותן פונקציה זוגית.

4) א. $f(x)=\frac{AL}{2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{iLA}{2\pi n}e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$

ב. $A_0=AL,\ A_n=0,\ B_n=-\frac{LA}{\pi n}$

5) א. $f(x)=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin(nx)$

ב. $f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

ג. $f(x)=2\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}\sin\left(\frac{n}{2}x\right)$

התמרת (טרנספורם) פורייה

<u>רקע</u>

התמרת (טרנספורם) פורייה

$$F(k) = FT[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x$$

התמרה הפוכה

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}x$$

<u>תכונות:</u>

1. ליניאריות: $FT[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha FT[f(x)] + \beta FT[g(x)]$

אם $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx \neq \infty$ אז $f(x) \in G$

- אם $f(x) \in G$ אז $F(k)$ רציפה
- אם $f(x) \in G$ אז $\lim_{k\to\pm\infty} F(k) = 0$, רימן - לבג
- אם $f(x)$ זוגית אז $F(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos(kx)\,dx$
- אם $f(x)$ אי-זוגית אז $F(k) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin(kx)\,dx$
- אם $f(x)$ ממשית אז $\overline{F(k)} = F(-k)$

<u>התמרות של פונקציות מיוחדות:</u>

גאוסיאן

$$FT\left[A\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right] = \frac{A\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{2\sqrt{\pi\alpha}}$$

אקספוננט

$$FT\left[A\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\right]=\frac{\alpha A}{\pi(\alpha^2+k^2)}$$

לורנציאן

$$FT\left[\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha|k|}$$

פונקציית דלתא

$$FT[\delta(x)]=\frac{1}{2\pi}$$

קבוע

$$FT[1]=\delta(k)$$

<u>נוסחת הכפל באקספוננט , קוסינוס או סינוס (מודולציה) :</u>

$$FT\left[f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Cx}\right]=F(k-C)$$

$$FT[f(x)\cos{(Cx)}]=\frac{F(k-C)+F(k+C)}{2}$$

$$FT[f(x)\sin{(Cx)}]=\frac{F(k-C)-F(k+C)}{2i}$$

<u>נוסחת הכיווץ והזזה :</u>

$$FT[f(ax+b)]=\frac{1}{|a|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{kb}{a}}F\left(\frac{k}{a}\right)$$

<u>נוסחת הנגזרת :</u>

אם $f(x),f'(x)\in G$ ו - $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ אז:

$$FT\left[f'(x)\right]=\mathrm{i}kF(k)$$

<u>נוסחת המומנט :</u>

אם $xf(x)\in G$ אז $F(k)$ גזירה ברציפות ו - $FT[xf(x)]=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dk}}F(k)$

שאלות

1) דוגמה - אקספוננט עם פונקציית טטה

חשבו את התמרת פורייה של הפונקציה:

$f(x) = Ae^{-ax}\theta(x)$

כאשר $\theta(x)$ היא פונקציית Heaviside המוגדרת לפי: $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

2) דוגמה - פונקציית חלון

חשבו את התמרת פורייה של פונקציית חלון המוגדרת לפי:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

3) דוגמה - חלון מורחב

חשבו את התמרת פורייה של פונקציית חלון מורחב המוגדרת לפי:

$f(x) = \begin{cases} 1, & -\mathrm{r} \leq x \leq r \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$, כאשר $r > 0$.

4) תרגיל - נגזרת של לורנציאן

השתמשו בנוסחת הנגזרת ומצאו את התמרת פוריה של הפונקציה $f(x) = \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^2}$.

5) תרגיל - חלון כפול איקס

השתמשו בנוסחת המומנט וחשבו את התמרת פורייה של הפונקציה:

$f(x) = \begin{cases} \mathrm{x}, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$.

6) תרגיל - גאוסיאן כפול איקס בריבוע

מצאו את התמרת פורייה של הפונקציה $f(x) = x^2 e^{-\alpha x^2}$.

7) תרגיל - משוואה עם נגזרת ראשונה

פתרו את המשוואה הבאה $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}q(t) + bq(t) = f_0 e^{-at}\theta(t)$.

כלומר מצאו את $q(t)$ באופן מפורש עבור $a, b > 0$.

רמז: מצאו את הפירוק לשברים חלקיים לפי הדרך הבאה

$$\frac{1}{(x+b)(x+a)} = \frac{A}{x+b} + \frac{B}{x+a}$$

תשובות סופיות

1) $\dfrac{A}{2\pi(a+ik)}$

2) $\dfrac{1}{\pi}\sin c(k)$

3) $\dfrac{\sin(rk)}{\pi k}$

4) $\dfrac{-ik}{4\alpha}e^{-\alpha(k)}$

5) $\dfrac{i}{\pi}\left(\dfrac{k\cos k-1\cdot\sin k}{k^2}\right)$

6) $\dfrac{e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{4\sqrt{\pi\alpha^3}}\left(1-\dfrac{k^2}{2\alpha}\right)$

7) $q(t)=\dfrac{1}{b-a}f_0\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)\theta(t)+Ce^{-bt}$

מבוא לקוונטים

פרק 4 - מבוא לגלים

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים – מערכת של שתי מסות

שאלות

1) מסה מחוברת למסה שמחוברת לתקרה

מסה m מחוברת לתקרה באמצעות קפיץ אנכי בעל קבוע 2k . מסה m נוספת מחוברת למסה הראשונה באמצעות קפיץ אנכי נוסף בעל קבוע k . המסות זזות רק בציר האנכי.

א. הסבירו מדוע ניתן להתעלם מכוח הכובד בבעיה זאת, כאשר אנו באים למצוא את התדירויות העצמיות ואת אופני התנודה.

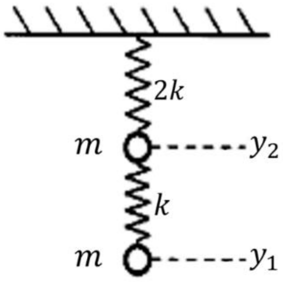
ב. כתבו את מערכת המשוואות בצורה מטריציונית ומצאו את התדירויות העצמיות.

ג. מצאו את אופני התנודה, ותארו אותם.

ד. בזמן $t=0$ נותנים מכה קטנה למסה התחתונה, כך שהיא מקבלת מהירות התחלתית v_0.

מצאו את תנועת המסות כתלות זמן.

רמז : במקרה זה יהיה יותר פשוט לפרוש את תנאֵי ההתחלה כאשר הפתרון רשום באמצעות סכום של סינוסים וקוסינוסים.



תשובות סופיות

1) א. כוח הכובד הוא כוח קבוע. כוחות קבועים מתבטלים על ידי תוספת קבועה של מתיחה לקפיץ. לכן, כוחות קבועים משנים רק את נקודת שיווי המשקל ואינם משפיעים על התדירויות או על אופני התנודה.

ב. $w_{3,4}=\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}w_0,\quad w_{1,2}=\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}w_0$ ג. $v_2=\begin{pmatrix}1\\0.41\end{pmatrix},\quad v_1=\begin{pmatrix}1\\-2.41\end{pmatrix}$

ד.
$$\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.63\\-1.52\end{pmatrix}\cdot\frac{v_0}{w_0}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}w_0t\right)+\begin{pmatrix}0.9\\0.37\end{pmatrix}\cdot\frac{v_0}{w_0}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}t\right)$$
$$w_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

מבוא לקוונטים

פרק 5 - גלים רוחביים במיתר

תוכן העניינים

גלים רוחביים במיתר

משוואת הגלים במיתר

משוואת הגלים היא $\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$, כאשר

T – המתיחות במיתר

ρ – צפיפות המסה ליחידת אורך

ψ – פונקציית הגל, מתארת את התנועה הרוחבית של כל חתיכה במיתר.

מהירות הגל היא $v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

פתרון המשוואה:

$$\psi(x,t)=A\cos(kx-\omega t)+B\sin(kx-\omega t)+C\cos(kx+\omega t)+D\sin(kx+\omega t)$$

יחס הדיספרסיה: $\omega=v\cdot k$.

אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזהויות טריגונומטריות)

$$\psi(x,t)=A_1\cos(kx-\omega t+\phi_1)+A_2\cos(kx-\omega t+\phi_2)=$$
$$B_1\cos k\,x\cos\omega\,t+B_2\cos k\,x\sin\omega\,t+B_3\sin k\,x\cos\omega\,t+B_4\sin k\,x\sin\omega\,t=$$
$$C_1\cos k\,x\cos(\omega t+\phi_1)+C_2\sin k\,x\cos(\omega t+\phi_2)$$

שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.

פתרון במספרים מרוכבים(הערה בלבד)

$$\psi(x,t)=A_1e^{i(kx+\omega t)}+A_2e^{i(kx-\omega t)}+A_3e^{-i(kx+\omega t)}+A_4e^{-i(kx-\omega t)}$$

אם הפונקציה ממשית, אז $A_3=A_1^*$ ו-$A_4=A_2^*$, והפתרון מתכנס לחלק הממשי של

$$\psi(x,t)=Ae^{i(kx-\omega t)}+Be^{-i(kx+\omega t)}$$

שאלות

1) תרגיל – סטודנטית מודדת את כוח הכובד

סטודנטית רוצה למדוד את תאוצת כוח הכבידה (g) המקומי, הסטודנטית תולה חוט אנכי ומחברת אליו משקולת בעלת מסה $M = 2\text{kg}$.
נתון שלחבל יש מסה של $m = 5\text{gr}$ (ניתן להניח התפלגות אחידה) ואורך של $l = 1.2m$. הסטודנטית שולחת מספר פולסים לאורך החבל ומודדת שהזמן הממוצע שלוקח לפולס להגיע מקצה לקצה הוא $t = 17.5\text{ms}$ (מילי שניות).
חשבו את g (ניתן להזניח את משקל החוט ולהשתמש רק במשקל המשקולת, כאשר מחשבים את המתיחות בו).

2) תרגיל - גל קוסינוס מעורר במיתר

צפיפות המסה הקווית במיתר היא $1.2 \times 10^{-4}\,\frac{\text{kg}}{m}$, במיתר מעורר גל מהצורה:
$\psi(x,t) = 0.005\,cos(3x - 90t)$.
חשבו את מהירות הגלים במיתר, את המתיחות ואת המהירות המקסימלית בכיוון רוחבי של נקודה כלשהיא במיתר. הניחו יחידות סטנדרטיות.

3) תרגיל - גל סינוס מתקדם במיתר

נתון גל סינוס המתקדם במיתר.

א. כתבו פונקציה שתתאר גל סינוס הנע על מיתר בכיוון החיובי של ציר ה-x, בעל זמן מחזור של 5 שניות, מהירות של 20 מטר לשנייה ואמפליטודה של 6 מילימטר.

ב. רשמו ביטוי לתאוצה של כל אלמנט מסה במיתר.

ג. איפה נמצאים אלמנטי המסה במיתר בעלי התאוצה הגדולה ביותר (בערך מוחלט) בזמן $t = 3sec$?

ד. עבור אילו זמנים התאוצה של אלמנט המסה בנקודה $x = 2\text{cm}$ היא הנמוכה ביותר (בערך מוחלט)?

ה. מקטינים את התדירות f של הגל, תארו כיצד ישתנו מהירות אלמנט מסה במיתר, מהירות הגל ואורך הגל?

4) תרגיל – פונקציה ריבועית

נתונה פונקציה $y(x,t) = 32x^2 + 128t^2$. הניחו יחידות סטנדרטיות.

א. הראו שפונקציה זו היא פתרון של משוואת הגלים במיתר.
הדרכה: נסו לרשום את הפונקציה כצירוף של פונקציות, אשר כל אחת מהן מתארת גל במיתר.

ב. מהי מהירות הגלים במיתר זה.

ג. נתון שצפיפות המסה ליחידת אורל של המיתר היא $0.03\,\frac{\mathrm{kg}}{m}$ חשבו את מתיחותו.

ד. האם הפונקציה $\sqrt{32x^2 + 128t^2}$ היא גם פתרון של משוואת הגלים?

5) תרגיל – מיתר בתווך צמיג *

מיתר בעל מתיחות T וצפיפות ρ נמצא בתוך תווך צמיג, כך שכוח החיכוך שפועל על אלמנט אורך dx, הוא $F = -bdx\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ כאשר b פרמטר נתון.

א. מצאו משוואה המתארת תנודות קטנות של המיתר (משוואת הגלים).

ב. מצאו את אופני התנודה של המערכת, כלומר פתרונות בהם בכל נקודה x תהיה אותה תלות זמנית. הניחו ריסון חלש.
הדרכה: הציבו פתרון מופרד משתנים $\Psi(x,t) = X(x)f(t)$ זהו כי המשוואה עבור $f(t)$ היא משוואה של מתנד הרמוני מרוסן, מהו Γ במקרה הזה?

ג. נתון שבזמן $t = 0$ צורת המיתר היא $\Psi(x, t = 0) = a\,cos(k_0 x)$ ושהמהירות ההתחלתית היא אפס. מצאו את צורת המיתר בזמן $t > 0$.

תשובות סופיות

1) $9.8\frac{m}{s}$

2) $30\frac{m}{s}; 0.102\text{N}; 0.45\frac{m}{s}$

3) א. $y(x,t) = 0.006_m \sin\left(\frac{\pi}{50}x - \frac{2\pi}{5}t\right)$ ב. $a(x,t) = 0.00096\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{50}x - \frac{2\pi}{5}t\right)$

ג. $x = 85_m + 50n$, כאשר n מספר שלם בין מינוס אינסוף לאינסוף.

ד. $t = 0.001_s - 2.5_s n$

ה. מהירות אלמנט מסה במיתר קטנה, מהירות הגל לא משתנה ואורך הגל גדל.

4) א. $y(x,t) = (4x+8t)^2 + (4x-8t)^2$ ב. $2\frac{m}{s}$ ג. $0.12N$ ד. לא.

5) א. $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{b}{T}\frac{\partial\psi}{2t} + \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$

ב. $\psi(x,t) = [A\cos(kx) + B\sin(kx)]e^{-\frac{\Gamma}{2}t}[\cos(\omega t)\,2C\sin(\omega t)]$, כאשר $\Gamma = \frac{b}{\rho}$.

ג. $\psi(x,t) = a\cos(k_0 x)\,e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[\cos(\omega t)\frac{\Gamma}{2\omega}\sin(\omega t)\right]$, כאשר $\omega = \sqrt{\frac{k_0^2 T}{\rho} - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$.

מבוא לקוונטים

פרק 6 - גלים אלקטרו-מגנטיים

תוכן העניינים

משוואת הגלים האלקטרומגנטיים

רקע:

משוואות מקסוול בהיעדר מטענים וזרמים חופשיים:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H}=-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

בחומר איזוטרופי ולינארי מתקיים:

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

משוואת הגלים עבור השדה החשמלי והמגנטי:

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

כאשר:

$$u=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

ובריק:

$$u=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c=3\cdot10^8\,{}^{m}/_{s}$$

המשוואה היא עבור כל רכיב בנפרד.
המשוואה זהה לשדה המגנטי.

אינדקס השבירה (מהירות האור בריק חלקי מהירות האור בחומר):

$$n=\frac{c}{u}=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$$

תמיד גדול מאחד (מהירות האור בחומר תמיד קטנה מהמהירות בריק):

פתרון למשוואת הגלים במימד אחד:

$$E_x(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$$

$$\mathrm{k}=\frac{2\pi}{\lambda},\ \ \omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$$

מעבר לייצוג קופלקסי: $\cos(kx-\omega t)=Re\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\right]$.

כשעובדים עם הייצוג הקומפלקסי ניתן לעבוד רק עם החלק התלוי במרחב (או השדה ב-$t=0$) ובסוף להכפיל את הפונקציה ב- $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ בשביל לקבל את התלות בזמן.

יחס הדיספרסיה - הקשר בין התדירות למספר הגל:

$$\omega = uk$$

אם היחס לא לינארי אז צריך להבדיל בין מהירות הפאזה למהירות החבורה:

$$u_{ph}=\frac{\omega}{k}\,,u_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

גל אלקטרומגנטי מישורי

רקע:

הצורה הכללית של הפתרון ההרמוני:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\cdot\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)$$

כאשר:

וקטור הגל - $\vec{k}=k_x\hat{x}+k_y\hat{y}+k_z\hat{z}$

$$\vec{k}\cdot\vec{r}=k_x x+k_y y+k_z$$

הערות – תמיד אפשר להוסיף גם פאזה.

יחס הדיספרסיה בגל: $\omega=u|k|=u\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$.

הכיוון של $\vec{k}$ הוא כיוון התקדמות הגל ובגל מישורי תמיד $\vec{E}\perp\hat{k}$.

לכיוון של $\vec{E}$ (המסומן בדר"כ ב-$\hat{n}$) קוראים כיוון הקיטוב של הגל.

השדה המגנטי בגל:
כיוון השדה המגנטי מאונך לשדה החשמלי ולכיוון התקדמות הגל.
התלות בזמן ובמרחב של השדה המגנטי זהה לזו של השדה החשמלי.
(אותו קוסינוס עם אותו ארגומנט).

$$\vec{B}=\frac{1}{u}\hat{k}\times\vec{E}=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}$$

הע**כבה** של התווך: $\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

בריק: $\eta=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=\eta_0=120\pi$

$$\vec{H}=\frac{1}{\eta}\hat{k}\times\vec{E},$$

$$\vec{E}=-\eta\hat{k}\times\vec{H}$$

וקטור פוינטינג (האנרגיה שהגל נושא) - כמות אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן.

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$$

בנוסחה מציבים את הביטוי הממשי של השדות.

הכיוון של $\vec{S}$ הוא בכיוון של $\hat{k}$ (כיוון התקדמות הגל).

הממוצע של הוקטור פוינטינג בזמן (נקרא גם ה**עוצמה** של הגל):

$$\vec{S}_{Avg}=\langle\vec{S}\rangle=\mathrm{Re}\left\{\frac{\vec{\tilde{E}}\times\vec{\tilde{H}}^*}{2}\right\}$$

$\vec{\tilde{E}}$ ו- $\vec{\tilde{H}}$ הם הייצוג הקומפלקסי של השדות.

המרה של הנגזרות בזמן ובמרחב:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rightarrow-\mathrm{i}\omega$$

$$\vec{\nabla}\rightarrow \mathrm{i}\vec{k}$$

שאלות:

1) **דוגמה - חישוב כל הגדלים הבסיסיים**

השדה החשמלי של גל א"מ המתקדם בחומר לא מגנטי נתון בביטוי הבא: $\vec{E}=4\pi\cos(10^9t-6x)\hat{y}\frac{mV}{m}$.

א. מהו התדר של הגל ומהו אורך הגל?

ב. מהו מקדם השבירה והקבוע הדיאלקטרי של החומר?

ג. מהו $\vec{H}$ ומהו וקטור פוינטינג הממוצע?

2) **דוגמה 2 - חישוב כל הגדלים 2**

השדה: $\vec{H}=H_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi x-6\pi y-10^8\pi t)}\cdot\frac{3\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{10}}$ מתפשט בתווך לא מגנטי.

מצאו את:

א. וקטור הגל ואורך הגל.

ב. תדר הגל.

ג. מהירות הגל בתווך ומקדם השבירה.

ד. המקדם הדיאלקטרי והעכבה.

ה. השדה החשמלי.

תשובות סופיות:

1) א. $f=1.59\cdot10^{8}Hz\ ,\ \lambda=\frac{\pi}{3}m$.   ב. $n=1.8\ ,\ \varepsilon_r=3.24$.

ג. $\vec{S}_{AVg}=12\pi\cdot10^{-8}\hat{x}\ ,\ \vec{H}=6\cdot10^{-5}\cos\left(6x-10^{9}t\right)z\frac{A}{m}$.

2) א. $\lambda=\frac{1}{\sqrt{10}}m\ ,\ \vec{K}=2\pi\left(1,-3,0\right)$.   ב. $f=5\cdot10^{7}Hz$.

ג. $n=18.97\ ,\ u=5\cdot\sqrt{10}\cdot10^{6}\frac{m}{\sec}$.   ד. $\eta=2\pi\cdot\sqrt{10}\ ,\ \varepsilon_r=360$.

ה. $\vec{E}\left(x,y,t\right)=-2\pi\cdot\sqrt{10}\cdot H_0e^{i\left(2\pi x-6\pi y-10^{8}\pi t\right)}\hat{z}$.

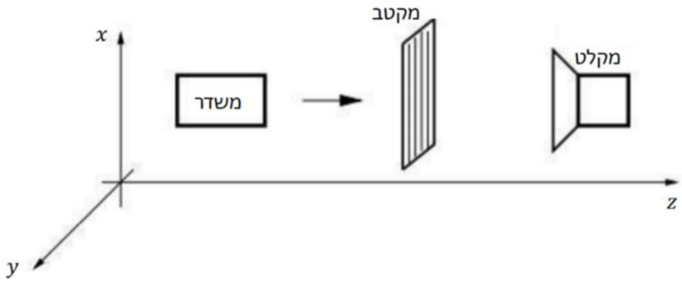
קיטוב מעגלי ואליפטי

רקע:

הקיטוב של הגל נקבע על ידי כיוון השדה החשמלי (לא לבלבל עם כיוון הגל).
מקטב - מודד את הקיטוב של הגל.
קיטוב ליניארי - כיוון השדה קבוע.
קיטוב מעגלי ימני - רכיב y מפגר אחרי רכיב x ב-$90°$.
כלומר הפאזה של רכיב y פחות הפאזה של רכיב x שווה $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
השדה מסתובב נגד השעון או בהתאם לכלל יד ימין ביחס לציר ה-z.
קיטוב מעגלי שמאלי - רכיב y מקדים את רכיב x ב-$90°$.
($\varphi = -\frac{\pi}{2}$ השדה מסתובב עם השעון או הפוך לכלל יד ימין ביחס לציר ה-z).
קיטוב אליפטי - מתקבל כאשר יש הפרש פאזה של $90°$ והאמפליטודה של הרכיבים שונה או אם הפרש הפאזה שונה מ-$90°$.

שאלות:

1) **דוגמה חשובה - שינוי עוצמה ממקטבים**
נתונה המערכת הבאה:



במערכת, המשדר יכול לייצר גל הנע בכיוון z בכל קיטוב שנרצה.
והמשדר יכול למדוד גל בכל קיטוב שמגיע אליו.
המקטב מורכב מרשת מתכתית כפי שמתואר באיור.
כיוון המקטב מוגדר לפי כיוון הרכיב של השדה שעובר, כלומר במאונך לרשת.

א. עבור המצב של המקטב בתמונה נתון כי המקלט אינו קולט סיגנל.
רשמו את פונקציית הגל שמייצר המשדר.

ב. עבור אותו גל מוסיפים לפני המקטב הקיים מקטב זהה נוסף בזווית של 30 מעלות ביחס לציר ה-x.
מה היחס בין העוצמה שימדוד הגלאי לעוצמה שיוצאת מהמשדר?

2) דוגמה - קיטוב לינארי ומעגלי
מצאו את הקיטוב של השדה במקרים הבאים.
עבור קיטוב לינארי רשמו את כיוון הקיטוב וזווית הקיטוב.

א. $\vec{E}=E_0\cos(kz-\omega t)\,\hat{x}+3E_0\cos(kz-\omega t)\,\hat{y}$.

ב. $\vec{E}=E_0\cos\left(kz-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\hat{x}+E_0\cos(kz-\omega t)\,\hat{y}$.

ג. $\vec{E}=E_0\cos(kz+\omega t)\,\hat{x}+E_0\cos\left(kz+\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\hat{y}$.

ד. $\vec{H}=H_0\cos\left(kz-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\hat{x}+H_0\cos\left(kz-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\hat{y}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{E}(z,t)=E_0\hat{x}\cos(kz-\omega t)$ ב. $\frac{3}{16}$

2) א. קיטוב ליניארי, $\theta=72°$, $\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$.

ב. קיטוב מעגלי שמאלי. ג. קיטוב מעגלי ימני.

ד. קיטוב ליניארי, $\theta=-45°$, $\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

פגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי

רקע:

כאשר גל הנע בתווך אחד פוגע בשפה של תווך אחר נקבל גל עובר וגל מוחזר תדירות כל הגלים זהה ושווה לתדירות המקוראת אמפליטודות הגל העובר והגל המוחזר נקבל מתנאי השפה.

$$B_{2\perp} = B_{1\perp} \qquad D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_{free}$$

$$H_{2||} - H_{1||} = k_{\text{free}} \qquad E_{2||} = E_{1||}$$

σ_{free} - היא צפיפות המטען המשטחית והחופשית על השפה

k_{free} - צפיפות הזרם המשטחי והחופשי על השפה

בפגיעה ישרה (או פגיעה בניצב) לשני השדות רכיב מקביל לשפה בלבד.

בתווך דיאלקטרי: $\sigma_{free} = \text{k}_{free} = 0$

הקשר בין האמפליטודות:

$$\frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

<u>השוויון השני נכון רק אם</u>: $\mu_1 = \mu_2$ (זה המצב ברוב המקרים).

לא לבלבל בין n ל-η.

מקדם העברה:

$$\tau = \frac{E_t}{E_0}$$

מקדם החזרה:

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_0}$$

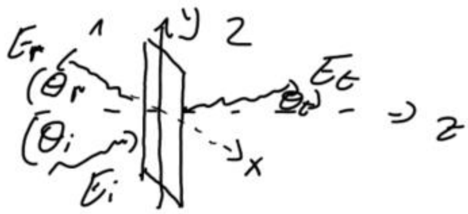
בפגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי:

$$1 + \Gamma = \tau$$

פגיעה בזווית בתווך דיאלקטרי

רקע:

מישור השפה בין החומרים (מישור xy באיור).
מישור הפגיעה הוא המישור של וקטורי הגל (מישור yz באיור).



משיקולי סימטריה k_y זהה לכל הגלים.

$$\theta_i = \theta_r$$

חוק סנל: $\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{u_\mathrm{t}}{u_\mathrm{i}} = \frac{n_\mathrm{i}}{n_\mathrm{t}}$

אם: $n_i > n_t$ אז קיימת **זווית קריטית**.
אם זווית הפגיעה גדולה מהזווית הקריטית אז לא יהיה גל עובר או תהיה החזרה מלאה:

$$\theta_c = shiftsin\left(\frac{n_\mathrm{t}}{n_\mathrm{i}}\right)$$

משוואות פרנל:
עבור פגיעה בזווית עם קיטוב אנכי (השדה החשמלי מאונך **למישור הפגיעה**):

$$\Gamma^{\perp} = \frac{E^{\perp}_{r_0}}{E^{\perp}_{i_0}} = \frac{\eta_2\cos\theta_\mathrm{i} - \eta_1\cos\theta_\mathrm{t}}{\eta_2\cos\theta_\mathrm{i} + \eta_1\cos\theta_\mathrm{t}} = \frac{n_1\cos\theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}}{n_1\cos\theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}}$$

$$\tau^{\perp} = \frac{E^{\perp}_{t_0}}{E^{\perp}_{i_0}} = \frac{2\eta_2\cos\theta_\mathrm{i}}{\eta_2\cos\theta_\mathrm{i} + \eta_1\cos\theta_\mathrm{t}} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}}$$

$$1 + \Gamma^{\perp} = \tau^{\perp}$$

עבור פגיעה בזווית עם קיטוב מקבילי (השדה החשמלי מקביל **למישור הפגיעה**):

$$\Gamma^{||} = \frac{E_{r_0}^{||}}{E_{i_0}^{||}} = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos\theta_i - n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos\theta_i + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_i}}$$

$$\tau^{||} = \frac{E_{t_0}^{||}}{E_{i_0}^{||}} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} = \frac{2n_1 n_2 \cos\theta_i}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos\theta_i + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_i}}$$

$$1 + \Gamma^{||} = \tau^{||}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

זווית ברוסטר היא הזווית שבה יש העברה מלאה (ואין החזרה).

זווית ברוסטר בקיטוב מקבילי:

$$\sin^2\theta_B{}^{||} = \frac{1 - \frac{\mu_t\varepsilon_i}{\mu_i\varepsilon_t}}{1 - \left({\varepsilon_t}/{\varepsilon_i}\right)^2}$$

אם: $\mu_1 \approx \mu_2$ אז:

$$\sin\theta_B{}^{||} = \frac{1}{1 + {\varepsilon_i}/{\varepsilon_t}}$$

$$\tan\theta_B{}^{||} = \frac{n_t}{n_i}$$

בקיטוב אנכי:

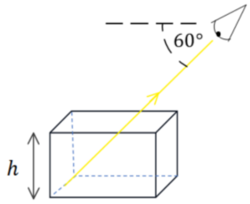
$$\sin^2\theta_B{}^{\perp} = \frac{1 - \frac{\mu_i\varepsilon_t}{\mu_t\varepsilon_i}}{1 - \left({\mu_i}/{\mu_t}\right)^2}$$

* מאוד נדיר למצוא חומרים שקיימת עבורם זווית ברוסטר בקיטוב אנכי.

שאלות:

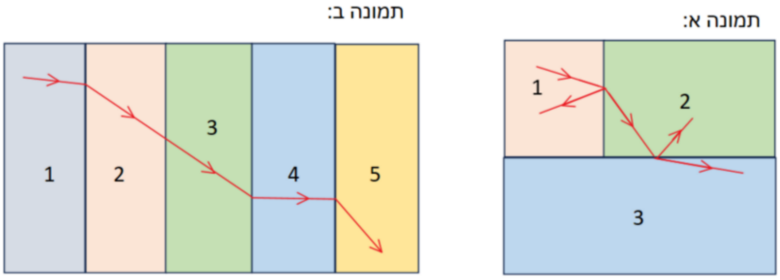
1) תרגיל - צופה מסתכל על תיבה

לתיבת זכוכית ריקה גובה של: $h = 6cm$. צופה מסתכל על התיבה, כאשר הוא מוריד את ראשו בזווית של 60 מעלות מתחת לאופק הוא רואה בדיוק את קצה הבסיס הרחוק של התיבה. ממלאים את התיבה בשמן $n = 1.54$.
איזה נקודה בבסיס התיבה יראה הצופה?
(מצאו את מרחק הנקודה מהקצה הרחוק של בסיס התיבה).



2) תרגיל - שבירה דרך מספר חומרים

בתמונות הבאות מתוארים חומרים בעלי מקדמי שבירה שונים.
גל עובר דרך השכבות כמתואר באיורים. הניחו שהתמונות מדויקות.
דרגו את מקדמי השבירה של החומרים השונים, בכל תמונה, מהקטן לגדול (אין קשר בין התמונות).



3) דוגמה - גל פוגע בזווית במים

גל אלקטרומגנטי מישורי נע באוויר (ריק) ופוגע בזווית בפני הים.
הקבוע הדיאלקטרי של מי ים הוא בערך 80. (הניחו שהמים מתנהגים כמבודד).

א. מצאו את זווית ברוסטר עבור גל בקיטוב מקבילי.

גל המקוטב אנכית פוגע בפני הים בזווית שחישבתם בסעיף א.

ב. מהי זווית ההעברה של הגל?

ג. מה הם מקדמי ההעברה וההחזרה?

4) תרגיל - שבירה במעברים עם זווית קריטית וברוסטר

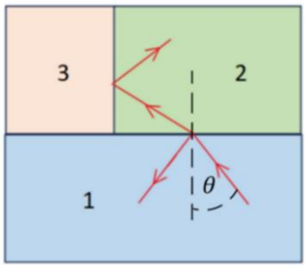
אור נכנס מחומר 1 ועובר שבירה במעבר לחומר 2 כך שחלקו מוחזר וחלקו מועבר, ראו איור. הקרן שהועברה ממשיכה עד לפגיעה בחומר 3 שם היא פוגעת בו בזווית הקריטית ומבצעת החזרה מלאה.

נתון: $n_1 = 1.5,\ \ n_2 = 1.3,\ \ n_3 = 1.1$.

א. מהי הזווית θ שבאיור?

ב. האם צריך להגדיל או להקטין את הזווית θ כך שהאור לא יבצע החזרה מלאה וייכנס לחומר 3?

ג. האם האור יעבור לחומר 3 בהינתן ש-θ היא זווית ברוסטר למעבר בין חומר 1 לחומר 2? (הניחו כי הפרמביליות זהה).



5) תרגיל - גלים בין שני מקטבים

גל בעל קיטוב בכיוון x ואמפליטודה של השדה החשמלי E_0 נע בכיוון z.
הגל עובר דרך שני מקטבים הראשון בעל קיטוב בזווית 20 מעלות עם ציר x והשני בזווית 60 מעלות עם ציר x. בכל הסעיפים ניתן להזניח החזרות מרובות.

א. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל העובר את המקטב הראשון?

ב. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל העובר את המקטב השני? רשמו ביטוי לגל זה.

ג. בהנחה שהמקטב השני הוא מקטב רשת המחזיר את הרכיב המקביל ללא איבוד אנרגיה לחום. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל המוחזר מהמקטב השני?

6) תרגיל - מקטב מערימה של משטחי זכוכית

דרך פשוטה ויעילה לבנות מקטב היא להשתמש בערימה של משטחי זכוכית מיקרוסקופים עם מרווחים ביניהם. הרעיון הוא לנצל את ההבדל בין מקדמי ההעברה של הרכיב המקביל והמאונך. בזווית ברוסטר ישנה העברה מלאה של הרכיב המקביל בעוד שרק חלק מהרכיב המאונך עובר, כלומר זהו סוג של מקטב. נניח שיש לנו חתיכה אחת של זכוכית והפגיעה בה היא בזווית ברוסטר.

א. מצאו את זווית ברוסטר עבור הפגיעה בזכוכית (מאוויר) בעלת מקדם שבירה $n = 1.46$ (מקדם השבירה תלוי באורך הגל, הניחו שזה מקדם השבירה עבור אורך הגל שבבעיה וכי הפרמביליות אחידה).

ב. מצאו את זווית ההעברה, האם היא תלויה בקיטוב?

ג. הראו כי זווית הפגיעה ביציאה מהזכוכית היא זווית ברוסטר לאותו מעבר.

ד. מצאו את מקדמי ההעברה לכל רכיב $(\tau^{\parallel}, \tau^{\perp})$ עבור היציאה מהזכוכית.

מקדמי ההחזרה וההעברה של האנרגיה עבור שני הרכיבים מוגדרים באופן הבא: $T = \frac{n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i}|\tau|^2$.

מקדם ההעברה הכולל הוא מכפלה של מקדם ההעברה בכניסה של האור לזכויות במקדם ההעברה של היציאה של האור מהזכוכית.

ניתן להזניח החזרות מרובות.

ה. מהו מקדם ההעברה הכולל של האנרגיה עבור כל רכיב.

ו. נגדיר את יעילות המקטב לפי: $e = \frac{T^{\parallel}}{T^{\perp}}$ לכמה שכבות נזדקק על מנת להגיע ליעילות של $e = 10^4$

תשובות סופיות:

1) 1.4cm.

2) תמונה א: $n_1 > n_2 > n_3$, תמונה ב: $n_5 < n_3 = n_2 < n_1 < n_4$.

3) א. $\theta_B{}'' = 84°$. ב. $\theta_t = 6.4°$.

ג. $\Gamma^{\perp} = -0.975$, $\tau^{\perp} = 0.025$.

4) א. $\theta \approx 27.5°$ ב. צריך להגדיל את טטה. ג. האור ייכנס.

5) א. $E_0\cos(20°)$ בכיוון: $\cos(20°)\hat{x} + \sin(20°)\hat{y}$.

ב. $\vec{E}(z,t) = E_0\cos(20°)\cos(40°)\left(\cos(60°)\hat{x} + \sin(60°)\hat{y}\right)\cos(kz - \omega t)$.

ג. $E_0\cos(20°)\sin(40°)$ בכיוון: $\cos(30°)\hat{x} - \sin(30°)\hat{y}$.

6) א. $\theta_B \approx 55.6°$ ב. $\theta_t \approx 34.4°$ לא תלויה בקיטוב.

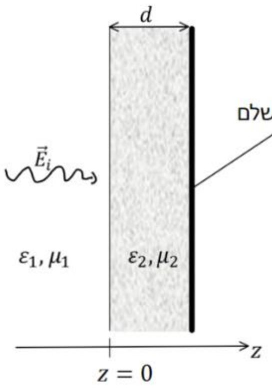
ג. $\tau^{\perp} = 1.36$ $\tau^{''} = 0.685$ ד. $\tau^{\perp} = 0.754$ $\tau^{''} = 1$ ה. 33

מעבר של יותר מתווך אחד

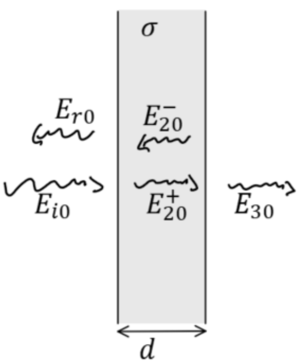
רקע:

נציב את תנאי השפה עבור כל ממעבר.

שאלות:



1) **שכבת חומר דיאלקטרי ליד מוליך מושלם**
גל הנע בתווך דיאלקטרי בעל ε_1, μ_1 פוגע בניצב לשכבה בעובי d עם ε_2, μ_2 ומוחזר ממוליך מושלם הנמצא בקצה השכבה, ראו איור. השדה החשמלי של הגל נתון לפי: $\vec{E}_i(z,t) = E_{i0}\,\hat{x}\cos\omega\left(\frac{z}{u} - t\right)$.
מצאו את:
א. $\vec{E}_r(z,t)$.
ב. $\vec{E}_1(z,t)$.
ג. $\langle s_1 \rangle$.
ד. העובי d עבורו לא ניתן יהיה לזהות את השכבה.



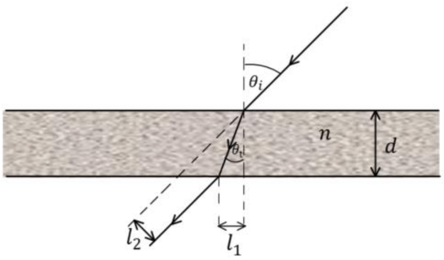
2) **גל עובר דרך פיסת נחושת**
גל אלקטרומגנטי מישורי בתדירות $10\ MHz$ עם אמפליטודה E_{i0} פוגע בניצב לפיסת נחושת $(\sigma = 5.80 \cdot 10^7\ \frac{S}{m})$ דקה מישורית בעובי d השווה לעומק החדירה.
הזניחו החזרות מסדר שני ומעלה וחשבו את:
א. האמפליטודות של כל שאר הגלים: $E_{r0}, E_{20}^+, E_{20}^-, E_{30}$ כתלות ב-E_{i0}.
ב. $\frac{\langle s_3 \rangle}{\langle s_{1i} \rangle}$.

3) **חישוב כל הגדלים**
השדה החשמלי של גל מישורי הנע בתווך הומוגני נתון לפי הביטוי: $\vec{E} = \cos(z + 2\pi \cdot 10^7 t)\hat{y}$ ביחידות של וולט למטר.
א. מהו תדר הגל (בהרץ)?
ב. מהו כיוון התקדמות הגל?
ג. מהו אורך הגל?
בהנחה כי: $\mu = \mu_0$ מצאו את המקדם הדיאלקטרי היחסי של החומר.
רשמו ביטוי ל-$\vec{H}$.
ד. רשמו ביטוי לווקטור פוינטינג הממוצע בזמן.

4) ציירו קיטוב אליפטי

ציירו את אליפסת הפולריזציה (האליפסה אותה "מצייר" קצהו של ווקטור השדה החשמלי במישור המאונך לכיוון התקדמות הגל כאשר הצופה מודד אותו לאורך זמן בנקודה קבועה) עבור הגל: $\vec{E} = (5i\hat{x} - \hat{y})e^{-i(\pi z + \omega t)}$.

5) חישוב הזזה לטרלית (חוק סנל)



קרן אור נעה באוויר ופוגעת בזווית θ_i בחומר שקוף בעובי d בעל אינדיקס שבירה n.

א. מצאו את זווית ההעברה.

ב. מצאו את המרחק של נקודת היציאה l_1.

ג. מצאו את ההזזה הלטרלית (המרחק l_2 באיור).

6) תרגיל - אלכוהול מזויף

רועי קנה בקבוק יוקרתי של משקה ג'ין ורוצה לוודא שהאלכוהול אינו מזויף. אלכוהול מזויף מכיל כמות גבוה של אתנול במקום מתנול. לרועי יש שני מצביעי לייזר באורכי גל של $532nm$ ו- $638nm$. הוא מכוון את הלייזר בזווית 30 מעלות כלפי מעלה ולמרכז הבקבוק ומודד את הגובה h ממנו יוצאת קרן האור, ראו איור. קוטר הבקבוק הוא 12cm. את מקדמי השבירה של מתנול ואתנול ניתן למצא באינטרנט והקירוב שלהם עבור תחום אורכי גל: $\lambda \in [0.4\mu m, 0.8\mu m]$ הוא:

מתנול: $n(\lambda) \approx -0.8\lambda^3 + 1.8\lambda^2 - 1.4\lambda + 1.7$

אתנול: $n(\lambda) \approx -0.1\lambda^3 + 0.3\lambda^2 - 0.3\lambda + 1.4$

בנוסחה יש להציב את אורך הגל הנמדד באוויר ב - μm.

לצורך הפשטות נניח כי הבקבוק מכיל 100% אתנול או מתנול.

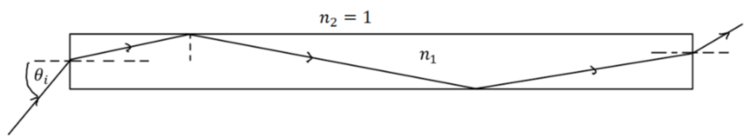
א. ציירו באמצעות מחשב גרף של $n(\lambda)$ עבור מתנול ואתנול על אותו גרף.

ב. ציירו באמצעות מחשב את זווית ההעברה כתלות ב- λ.
על איזה מהלייזרים תמליצו לרועי להשתמש?

ג. מצאו את הערך של h עבור כל אחד מסוגי החומרים.

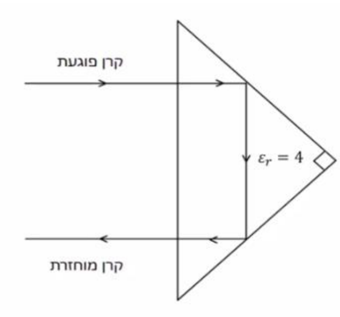
7) גל א"מ לא יוצא מסיב אופטי

סיב אופטי ישר עשוי מחומר דיאלקטרי שקוף בעל אינדקס שבירה n_1.
גל אלקטרו מגנטי נכנס בצידו האחד של הסיב בזווית θ_i ופוגע בדפנות של הסיב במהלך ההתקדמות.
מהו n_1 המינימלי כך שהגל לא יצא מהסיב עד אשר יגיע לקצה השני ללא תלות בזווית הפגיעה θ_i.



8) אור מוחזר מפריזמה משולשת

אור נכנס ומוחזר מפריזמה משולשת העשויה זכוכית.
מסלול קרן האור מתואר באיור.
מהו אחוז עוצמת האור של הקרן המוחזרת.
הניחו $\varepsilon_r = 4$ עבור זכוכית.
הפריזה היא משולש שווה שוקיים וישר זווית.

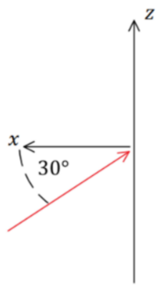


9) תרגיל - גל פוגע במראה בזווית

גל אלקטרו מגנטי מתקדם במישור xz עם זווית של 30 מעלות ביחס לציר ה-x כפי שמתואר באיור. לגל כיתוב בכיוון y. הגל פוגע במראה מישורית הנמצאת במישור zy ומוחזר ממנה.

א. כתבו את $\hat{k}$ עבור הגל הפוגע והמוחזר.

ב. מהו הכיוון של השדה החשמלי והמגנטי של הגל המוחזר?



תשובות סופיות:

1) א. $\vec{E}_r(z,t)=E_{i0}\cos(K_1z+\omega t-2\theta)\hat{x}$ כאשר $\tan\theta=\frac{\eta_2}{\eta_1}\tan(K_2d)$.

ב. $\vec{E}_1(z,t)=E_{i0}\hat{x}\left[\cos(K_1z-\omega t)+\cos(K_1z+\omega t-2\theta)\right]$. ג. $\langle S_1\rangle=0$.

ד. $d=\frac{\pi n}{\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}$.

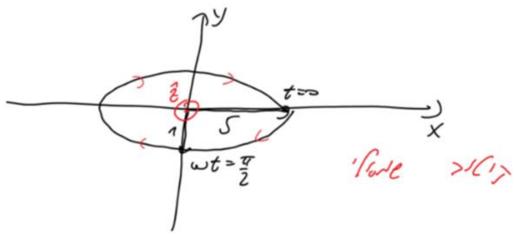
2) א. $\frac{E_{20}^{\;-}}{E_{i0}}\approx(-2.49+4.53i)\cdot10^{-6}$, $\frac{E_{20}^{\;+}}{E_{i0}}\approx(1.90+0.140i)\cdot10^{-6}$, $\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\approx-1+4.67\cdot10^{-6}i$

$\frac{E_{30}}{E_{i0}}\approx(-2.70+4.90i)\cdot10^{-6}$. ב. $\frac{\langle S_3\rangle}{\langle S_1\rangle}=3.13\cdot10^{-11}$.

3) א. $f=10^7\,Hz$. ב. בכיוון $-\hat{z}$. ג. $\lambda=2\pi m$. ד. $\varepsilon_r=22.8$.

ה. $\vec{H}(z,t)=\frac{1}{8\pi^2}\cos\left(z+2\pi\cdot10^7t\right)\hat{x}$. ו. $\vec{S}_{AVg}=-\frac{\hat{z}}{16\pi^2}$.

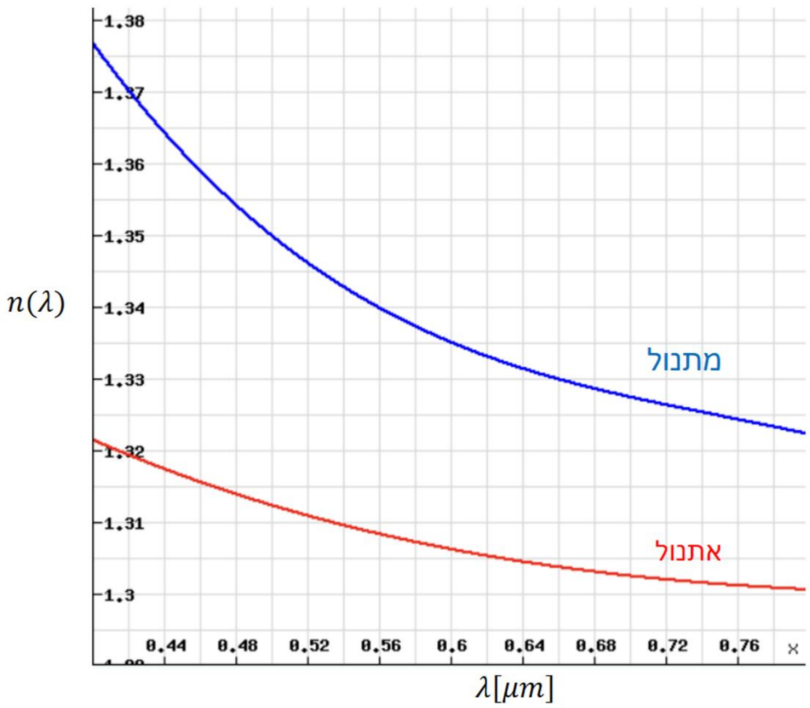
4) שרטוט:



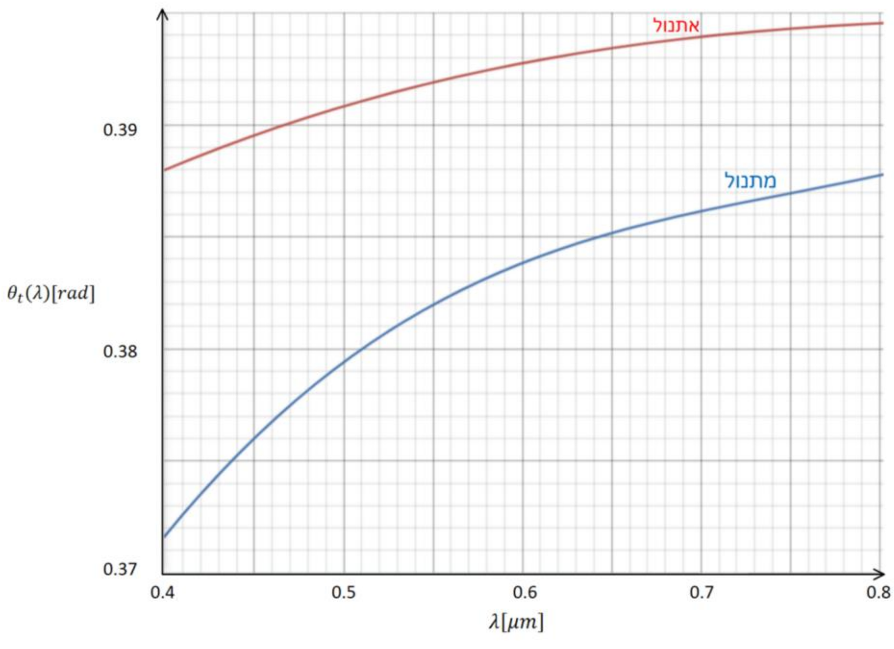
5) א. $\sin\theta_t=\frac{1}{n}\sin\theta_i$. ב. $l_1=\frac{d\sin\theta_i}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}$.

ג. $l_2=d\sin\theta_i\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}\right)$.

6) א. שרטוט:



ב. בלייזר של ה-532 ננומטר.



ג. אתנול – 4.83cm , מתנול - 4.96cm.

7) $\sqrt{2}$.

8) 79%.

9) א. $\hat{k}_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{z}$, $\hat{k}_i = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{z}$ ב. $\hat{E} = -\hat{y}$ ג. $\hat{B}_r = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z} + \frac{1}{2}\hat{x}$

מבוא לקוונטים

פרק 7 - התאבכות בגלים דו ותלת מימדיים

תוכן העניינים

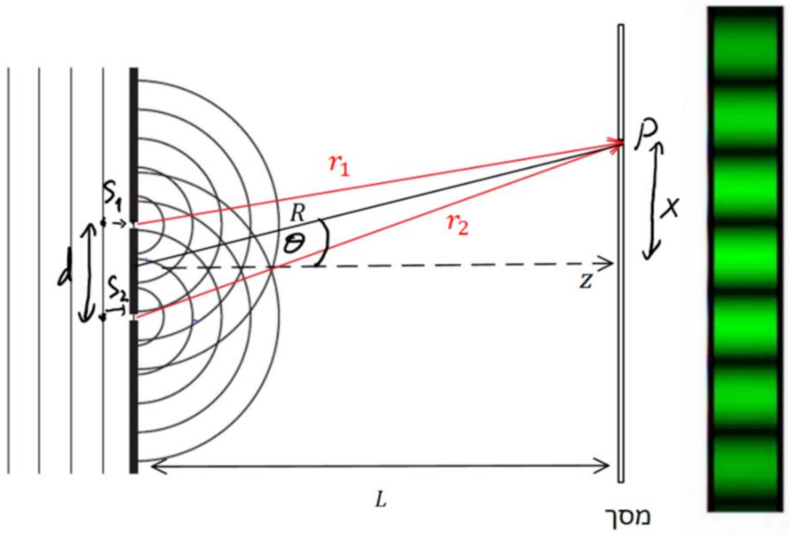
התאבכות בשני סדקים

רקע

עיקרון הוייגנס - ניתן להתייחס לכל נקודה בחזית הגל כמקור נקודתי של גל חדש.

אמפליטודה בגלים גליליים - $A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$, גלים כדוריים - $A \propto \frac{1}{r}$.

ניסוי שני הסדקים:



קירוב השדה הרחוק far field limit $L \gg d$:

1. $A_1 \approx A_2 \leftarrow \Delta r << r$

2. $\Delta r = d\sin\theta \leftarrow r_1 \parallel r_2$

העוצמה היחסית:

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \cos^2\left(\frac{k\,\mathrm{d}\sin\theta}{2}\right)$$

קירוב זוויות קטנות:

$$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \frac{x}{L}$$

בגלל התלות של האמפליטודה במרחק, צריך להכפיל את התוצאה לעוצמה בקוסינוס טטה עבור גלים גליליים ובקוסינוס בריבוע עבור גלים כדוריים.
התוספת הזו קשורה למבנה של המסך והיא לא תופיע במסך עגול.
בדר״כ מניחים קירוב זוויות קטנות ואז היא זניחה.

שאלות

1) חישוב מרחק בין כתמים ואורך גל

קרן לייזר עוברת דרך שני סדקים. מרכזו של כתם האור הראשון (לצד כתם האור המרכזי), התקבל בזווית של 8 מעלות.

א. באיזו זווית יופיע כתם האור השני?

ב. מהו אורך הגל של הלייזר אם המרחק בין הסדרים הוא: $d = 2.4\mu m$?

2) תחנת רדיו

תחנת שידור משדרת אותות רדיו בתדר $1200Hz$ באמצעות שתי אנטנות הנמצאות במרחק של $300m$ זו מזו. אם נמקם מקלט במרחק רב משתי האנטנות, באילו כיוונים תתקבל העוצמה הגבוהה ביותר ובאילו הנמוכה ביותר? רשמו את הכיוונים ביחס **לישר המחבר בין שתי האנטנות.**

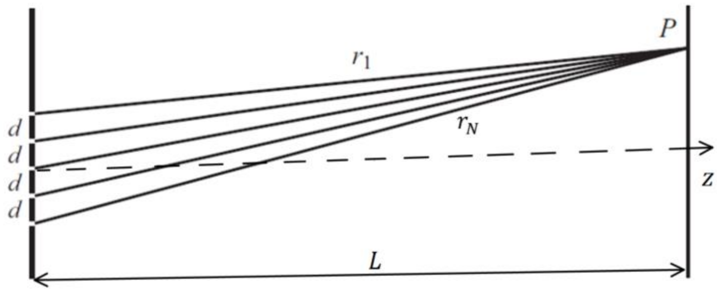
תשובות סופיות

1) א. $16°$ ב. $0.33\mu m$

2) $\cos\alpha_{\max n} = 9.5\cdot 10^{-4} n$, $\cos\alpha_{\min n} = 9.5\cdot 10^{-4}\left(n+\frac{1}{2}\right)$

התאבכות ב N סדקים

רקע



קירוב השדה הרחוק:

$A_1 \approx A_2 \approx A_3 \approx A_4 \leftarrow \Delta r << r$

$\Delta r = d\sin\theta \leftarrow r_1 \| r_2 \| r_3 \| r_4$

$$\frac{I_{tot}(\alpha)}{I_{tot}(0)} \approx \left(\frac{\sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2$$

$\alpha = kd\sin\theta$

פיק גדול - כשהמכנה מתאפס:

$$\alpha_n = 2\pi n$$

נקודות התאפסות - כשהמונה מתאפס והמכנה לא.

$\alpha_n = \frac{2\pi n}{N}$ ו- $n \neq mN$.

פיק קטן - נגזרת שווה לאפס ומכנה לא מתאפס. עבור $N \gg 1$:

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

מספר הפיקים באחד הצדדים (ללא הפיק המרכזי) הוא: $\frac{kd}{2\pi}$ (לעגל למטה).

מספר הפיקים (הגדולים) הכולל שווה למספר הפיקים באחד הצדדים כפול 2 ועוד 1.

שאלות

1) פריזמה מתקליטור

בתמונה רואים תקליטור העשוי מחריצים מעגליים בגודל של מיקרון בערך.
האור שפוגע בתקליטור מוחזר למצלמה ומקבלים פריזמה של צבעים.
הסבירו את התופעה (ללא חישוב) וציינו אלו פרמטרים משפעים עליה.

2) סטייה בזווית פגיעה

הראו שבמקרה שהקרן הפוגעת היא בזווית θ_0 ביחס לאנך עם קיר הסדקים אז תתקבל אותה תבנית התאבכות מוזזת בזווית θ_0. הניחו קירוב זוויות קטנות.

3) 3 מינימות ראשונות

אור מונוכרומטי מלייזר ארגון בעל אורך גל של: $\lambda = 488nm$ עובר דרך סריג בעל 6,000 חריצים בצפיפות של 40,000 חריצים לס"מ ופוגע במסך.
מהן הזוויות של שלושת נקודות המינימום הראשונות (בכיוון החיובי).
הניחו שהחריצים נקודתיים.

4) מרחק בין צבעים

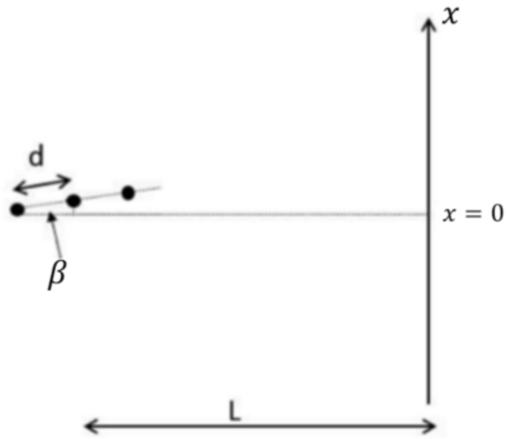
מקרינים אור לבן על סריג בעל 5,000 סדקים לס"מ.

א. תארו מה נראה על המסך מול הסריג.

ב. חשבו את המרחק בין כתם האור האדום השני לכתם האור הכחול השני אם המסך נמצא במרחק 1.5 מטר מהסריג ואורכי הגל של האור האדום והכחול הם $632nm$ ו-$420nm$ בהתאמה.

5) שלושה מקורות קוהרנטיים באוריינטציה שונה

המערכת המתוארת בסרטוט מכילה שלושה מקורות קוהרנטיים במרחק d אחד מהשני הנמצאים בזווית β ביחס לאנך למסך. המרחק למסך הוא L.



מצאו את העוצמה היחסית כתלות ב- x בהנחה כי β זווית קטנה וכי $\beta > \theta$.

תשובות סופיות

1) החריצים בתקליטור יוצרים תבנית התאבכות התלויה באורך הגל, זווית הפגיעה של המקור, בזווית התקליטור ובמיקום הצופה. בכל אזור בתקליטור נוצרת התאבכות בונה עבור אורך גל אחר ולכן רואים את הצבעים השונים בכל אזור. שינוי של הפרמטרים הנ"ל יביא לשינוי התבנית.

2) ראו סרטון.

3)
$\theta_1 \approx 0.0186°$

$\theta_2 \approx 0.0373°$

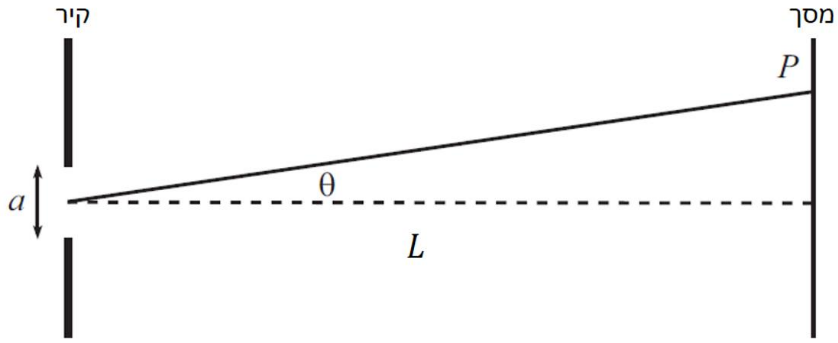
$\theta_3 \approx 0.0560°$

4) א. נקבל תבנית התאבכות של N סדקים שכתם האור המרכזי שלה לבן ובמקום כל כתם אחר נקבל קשת של צבעים כי מיקום הפיק הגדול שאינו במרכז גדל עם אורך הגל.
ב. 70 ס"מ.

5)
$$\alpha = kd\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}\left[1+\beta\frac{x}{L}\right] \quad , \quad \frac{I(\alpha)}{I(0)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\alpha\right)}{3\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2$$

עקיפה

רקע



קירוב השדה הרחוק $L \gg a$:

$$\frac{I(\beta)}{I(0)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{\frac{1}{2}\beta} \right)^2$$

$$\beta = ka\sin\theta$$

נק' התאפסות : $\beta_n = 2\pi n$

- אם $\lambda > a$ אז רוחב הפיק המרכזי גדול מאינסוף ולא יהיו נק' התאפסות וזה אומר שהסדק מתנהג כמו מקור אור נקודתי.
- אם $a \gg \lambda$ אז מקבלים עוצמה קבועה ברוחב הסדק, מתאים למקרה הקלאסי בו מניחים שהאור נע בקווים ישרים.

מקסימום מקומי - נגזרת מתאפסת :

$$\beta_n \approx 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

הקשר לפורייה

רקע

האמפליטודה הכוללת על המסך כתלות בזווית:

$$A_{tot}(\theta) = 2\pi FT[B(x)](k')$$

$$k' = k \sin\theta$$

כאשר $B(x)$ היא האמפליטודה ליחידת אורך בסדק.

שאלות

1) לאן נעלם שימור האנרגיה?

א. הראו כי בסדק רחב: $I(0) \propto a^2$ כאשר a הוא רוחב הסדק.
רמז: שימו לב שהאמפליטודה בחלק מהנוסחאות תלויה ברוחב הסדק.

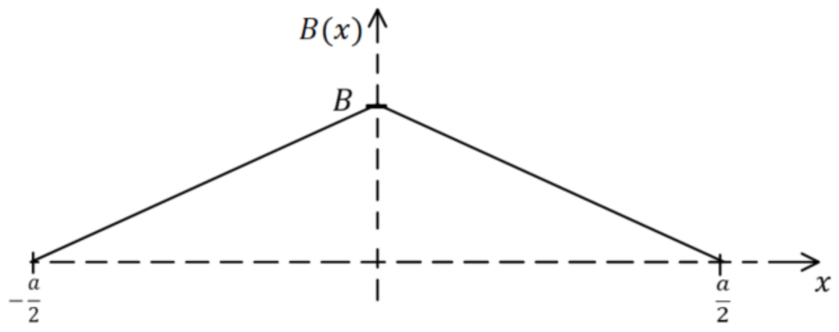
ב. העוצמה היא אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן. אם נרחיב את רוחב הסדק פי 2 אז $I(0)$ תגדל פי 4. הרחבת הפתח פי 2 מכניסה פי 2 אור ופי 2 אנרגיה איך יתכן שהעוצמה על המסך גדלה פי 4?
לאן נעלם שימור האנרגיה?

2) שינוי בעוצמה כתלות בשינוי הפתח

נניח שיש לנו סדק ברוחב a ואנחנו מסתכלים על העוצמה הממוצעת בנקודה הנמצאת במרחק כלשהו, לא קטן, מהפיק המרכזי אבל עדיין בתחום הזוויות הקטנות.
מה יקרה לעוצמה הממוצעת (ממוצעת בתחום קטן) אם נגדיל את רוחב הפתח?
שימו לב שמצד אחד כשמגדילים את רוחב הפתח אז יותר אור נכנס והעוצמה גדלה אבל מצד שני העקומה מתכווצת והעוצמה בנקודה מסויימת קטנה.
השאלה היא איזה אפקט יותר חזק?

3) אמפליטודה בצורת משולש

נתון סדק ברוחב a דרכו עובר גל בעל חזית (פאזה) אחידה אך בעל אמפליטודה לא אחידה. האמפליטודה ליחידת אורך כתלות ב- x כאשר: $x=0$ זה מרכז הסדק היא:



מצאו את תבנית ההתאבכות $\left(\frac{I(\theta)}{I(0)}\right)$ המתקבלת על מסך הנמצא במרחק רב מהסדק.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה בסרטון.
ב. אם מגדילים את רוחב הסדק אז העוצמה באפס גדלה אבל התבנית מתכווצת והעוצמה קטנה בזוויות אחרות. האנרגיה שווה לאינטגרל על העוצמה לאורך כל המסך והערך של האנרגיה הכוללת יגדל רק פי 2 ולא פי 4.

2) העוצמה לא תשתנה.

3) $\frac{I(\theta)}{I_{\max}}=\sin c^4\left(\frac{1}{4}ka\sin\theta\right)$

התאבכות ועקיפה ביחד

רקע

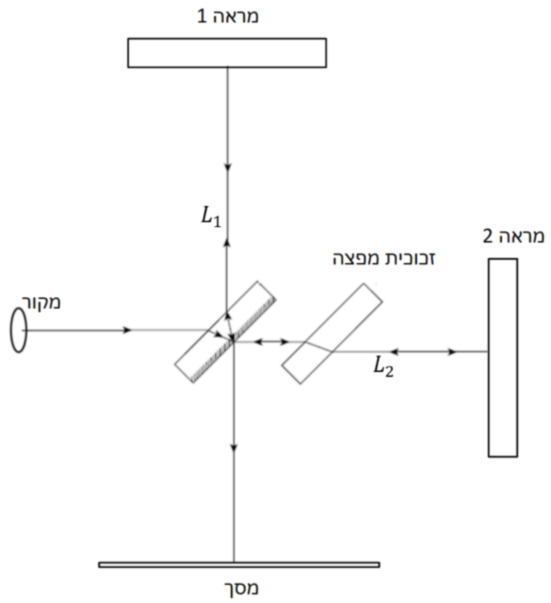
$$\frac{I(\theta)}{I(0)}=\left(\sin c\left(\frac{ka\sin\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{Nkd\sin\theta}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)}\right)^2$$

כאשר a הוא רוחב כל סדק, d המרחק בין שני סדקים ו- N מספר הסדקים.

אינטרפרומטריה

רקע

האינטרפרומטר של מייקלסון:



$$\delta = 2(L_2 - L_1)$$

$$\Delta\varphi = k\delta + \pi$$

התאבכות בונה:

$$\delta = \lambda\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

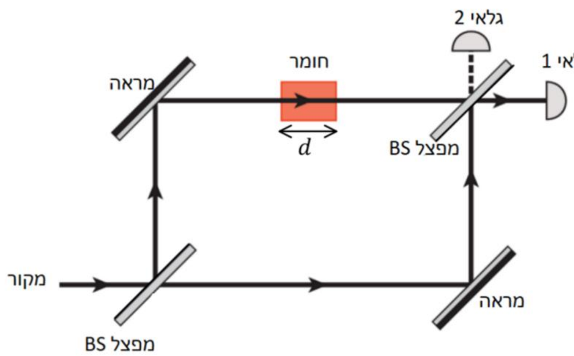
התאבכות הורסת:

$$\delta = \lambda m$$

עוצמה:

$$\frac{I}{I_{max}} = \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right)$$

אינטרפרומטר מאך-זנדר:



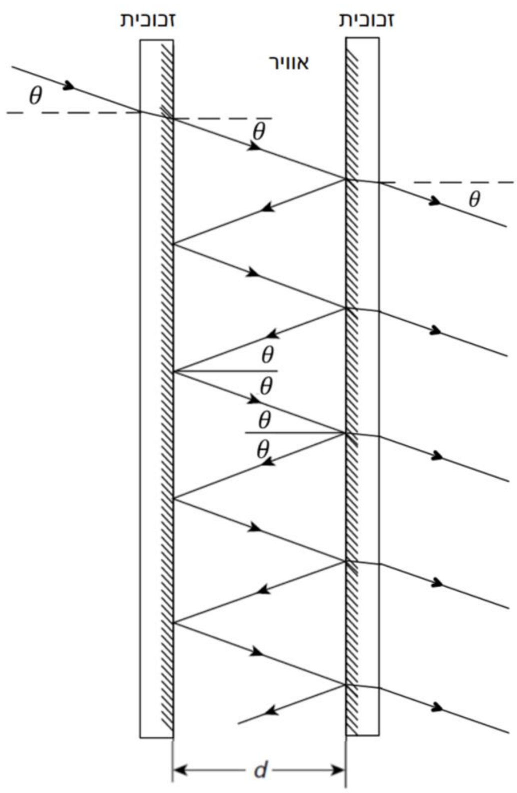
$$\delta = d(n-1)$$

גלאי 1: $\Delta\varphi = k\delta$

גלאי 2: $\Delta\varphi = k\delta + \pi$

עוצמה: $\frac{I}{I_{max}} = \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$

אינטרפרומטר פברי-פרו:



$$\frac{I}{I_{max}} = \frac{1}{1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

$$\Delta\varphi = k\delta = k2d\cos\theta$$

$$R = r^2 = \left(\frac{A_r}{A_i}\right)^2$$

$$\Delta\varphi_{\frac{1}{2}} \approx \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

שאלות

1) ללא פלטה מפצה

נתון אינטרפרומטר מייקלסון עם מפצל (50:50) העשוי מזכוכית בעובי t ומקדם שבירה n_2. זווית המפצל היא 45 מעלות, ציפוי הכסף נמצא בדופן האחורית של הזכוכית (כמו במקרה הרגיל) ובמערכת **אין פלטה מפצה**.

א. מהו הפרש הדרכים האופטיות בין הקרניים?
ומהו הפרש הפאזה עבור אורך גל נתון?
ניתן להניח ששינוי הזווית עקב מעברי התווך במפצל זניח מבחינת אורך הדרך וכי L_1, L_2 גם נתונים.

ב. הניחו שניתן למדוד את העוצמה על המסך.
הראו כי:

$$\lambda = \frac{2\pi\left(L_2 - L_1 - \sqrt{2}t(1-n_2)\right)}{\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{I}{I_{max}}}\right)}$$

ג. כעת הניחו שהופכים את המפצל כך שציפוי הכסף (ופיצול הקרניים) יהיה בדופן הקדמית של הזכוכית.
מה יהיה כעת הפרש הפאזה?

2) גלאי 2

נתון אינטרפרומטר של מאך-זנדר כפי שנראה בסרטון ההסבר.

א. חשבו את הדרך האופטית והפאזה של כל קרן המגיעה לגלאי 2.

ב. חשבו את העוצמה בגלאי 2 והראו כי מתייקם שימור אנרגיה (ביחיד עם העוצמה בגלאי 1).

3) מפצל לא סימטרי

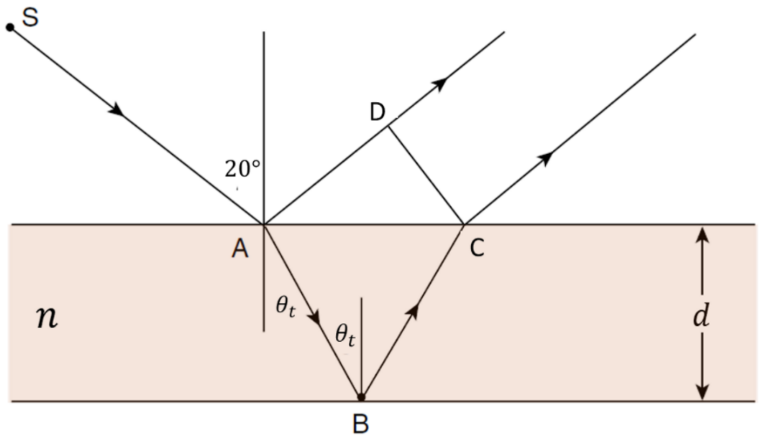
נניח כי המפצל באינטרפרומטר מאך זנדר הוא מפצל לא סימטרי כך שמקדם ההעברה שלו ($\left|\frac{A_t}{A_{in}}\right|$) הוא t ומקדם ההחזרה ($\left|\frac{A_r}{A_{in}}\right|$) הוא r.

א. רשמו את האמפליטודות של כל אחד מהמסלולים האפשריים ביחס לאמפליטודת הכניסה.

ב. * רשמו מטריצה כללית המתארת את המפצל. כולל תוספת הפאזה אך ללא התוספת של הדרכים האופטיות.

4) חישוב עובי קרום דק

גל מישורי לבן פוגע בקרום דק בזווית 20 מעלות. בצפייה של הגל המוחזר רואים אור אדום ($\lambda = 640nm$). מקדם השבירה של הקרום הוא $n = 1.3$.
מהו עובי הקרום? הניחו התאבכות בסדר ראשון.



5) טווחים של מספר גל

נתון אינטרפרומטר של פברי-פרו שבו $R = 0.95$ ו- $d = 0.2mm$ וזווית הפגיעה קטנה מאוד.

א. מה הם אורכי הגל λ_m בהם מתקבלים הפיקים?
מהם הערכים k_m המתאימים?
מה המרחק בין הפיקים במונחי k, כלומר מהו Δk בין שני פיקים?

ב. מהו רוחב הפונקציה (FWHM) כתלות ב- k?
ומהו הרוחב כתלות בתדר?

ג. נתונה דוגמית שערך הרזוננס שלה הוא בטווח של:
$k_r \in \left[10^3 cm^{-1}, 1.15 \cdot 10^3 cm^{-1}\right]$.
מהו N עבורו ערך הרזוננס נמצא בטווח של: $k_r \in [k_N, k_{N+1}]$?

ד. בשביל לסרוק את k אנחנו צריכים לשנות את d.
בכמה צריך לשנות את d בשביל לסרוק את הטווח של: $k_r \in [k_N, k_{N+1}]$?

תשובות סופיות

1) א. $\delta=2\left(L_2-L_1-\sqrt{2}t\left(1-n_2\right)\right)$ ב. הוכחה. ג. $\Delta\varphi=2k\left(L_2-L_1\right)$

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\delta+\pi$$

2) א. מסלול 3: החזרה במפצל 1 והחזרה במפצל 2 (כניסה לגלאי 2).

דרך אופטית - $L_1+d\left(n-1\right)+2c$

$$\varphi_3=k\left(L_1+d\left(n-1\right)+2c\right)+\pi$$

כאשר c הוא הדרך האופטית במפצל.

מסלול 4: העברה במפצל 1 והעברה במפצל 2 (כניסה לגלאי 2).

דרך אופטית - L_2+2c

$$\varphi_4=k\left(L_2+2c\right)$$

ב. $\frac{I}{I_{\max}}=\sin^2\left(\frac{k\delta}{2}\right)$

$$\delta=L_1-L_2+d\left(n-1\right)$$

3) א. $|A_1|=trE_0,|A_2|=rtE_0,|A_3|=r^2E_0,|A_4|=t^2E_0,$ ב. $\begin{pmatrix} t & -r \\ r & t \end{pmatrix}$

4) $128mm$

5) א. $\lambda_m=\frac{2d}{m}$, $k_m=\frac{\pi m}{d}$, $\Delta k=\frac{\pi}{d}$

ב. $\mathrm{FWHM}_{[F]}=2.44\cdot 10^{10HZ}$, $\mathrm{FWHM}_{[K]}=512\cdot\frac{1}{m}$

ג. $N=6$

ד. $\Delta d=28\mu m$

תרגילים נוספים

שאלות

1) שני סדקים ברוחב לא זניח

נתונים שני סדקים בעלי רוחב a (שאינו זניח) במרחק d אחד מהשני ובמרחק L מהמסך. הניחו קירוב שדה רחוק וזוויות קטנות.

א. כתבו את הנוסחה המתארת את העוצמה כתלות במרחק ממרכז המסך ביחס לעוצמה המקסימלית. ציינו איזה חלק מהעוצמה הוא פונקציית המעטפת וממה הוא נובע, ואיזה חלק הוא הפונקציה הפנימית (פונקציית המודולציה) וממה הוא נובע.

ב. מהו רוחב פונקציית המעטפת (FWHM) אם נתון שרוחב פונקציית $\sin c^2(\mathrm{x})$ הוא $2.8rad$?

ג. כמה מחזורים של הפונקציה הפנימית נכנסים ברוחב פונקציית המעטפת?

ד. על מנת שנוכל להבחין בהתאבכות של שני הסדקים צריך שיהיו לפחות שני פיקים של הפונקציה הפנימית בתוך הרוחב של פונקציית המעטפת, אחרת נראה רק את פונקציית המעטפת.
מה התנאי על a ו- d כך שנוכל להבחין בהתאבכות הסדקים.

2) שני סדקים עם קיטובים שונים

בניסוי שני הסדקים מסוים הקיטוב של השדה היוצא מכל סדק שונה ונתון לפי: $\vec{E}_1 = E_0\hat{x}$ ו- $\vec{E}_2 = E_0(\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y})$.
הניחו שהמרחק בין הסדקים הוא d והמרחק למסך הוא L וש- $L \gg d$.

א. מה תהיה האמפליטודה של כל אחד מן השדות בפגיעה במרכז המסך? הניחו שהגלים גליליים.

ב. מצאו את השדה השקול והעוצמה במרכז המסך כתלות ב φ.
הסבירו את התוצאות המתקבלות עבור: $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ו- $\varphi = \pi$.

תשובות סופיות

1) א. $\frac{I(x)}{I(0)} = \sin c^2\left(\frac{kax}{2L}\right)\cos^2\left(\frac{kd}{2L}x\right)$

פונקציית המעטפת היא ה- $\sin c$ בריבוע והיא נובעת מרוחב הסדקים.
הפונקציה הפנימית היא הקוסינוס בריבוע והיא נובעת מההתאבכות בין הסדקים.

ב. $5.6\frac{L}{ka}$ ג. $0.89\frac{d}{a}$ ד. $d \approx 2.24a$

2) א. $A_1 = A_2 = \frac{E_0}{\sqrt{L}}$

ב. $E_{tot} = \left((1+\cos\varphi)\hat{x} + \sin\varphi\hat{y}\right)$, $I\alpha\frac{E_0^{\ 2}}{L}4\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

ב- $\varphi = 0$ התאבכות מלאה כי השדות באותו קיטוב

ב- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ השדות מאונכים אין התאבכות, העוצמה הכוללת היא סכום העוצמות.

ב- $\varphi = \pi$ השדות בפאזה הפוכה, התאבכות הורסת, עוצמה אפס.

מבוא לקוונטים

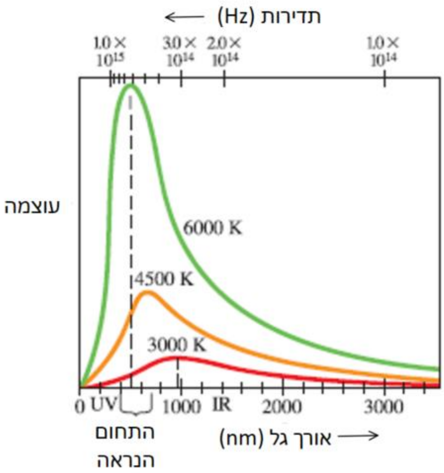
פרק 8 - תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום

תוכן העניינים

תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום:

סיכום כללי:

ההנחה הקוונטית של פלאנק וקרינת גוף שחור.

גרף של קרינת גוף שחור כתלות באורך הגל ובטמפרטורות שונות		
חוק ווין - Wien law	$\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} m \cdot K$	λ_p - אורך הגל בשיא T - הטמפרטורה בקלווין
נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור	$I(\lambda, T) = \dfrac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$	קבוע בולצמן $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$ קבוע פלאנק $h = 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$
אנרגיה מינימלית של מטען בתנועה הרמונית באטום	$E_{min} = hf$	<u>ההנחה הקוונטית של פלאנק</u>
אנרגיית המטען חייבת להיות כפולה שלמה של הערך המינימלי	$E = nhf$	**המספר הקוונטי** $n = 1,2,3,\ldots$

שאלות:

1) דוגמה - טמפרטורת השמש

הראו באמצעות חוק ווין כי הטמפרטורה על פני השמש היא באמת 6,000K אם ידוע שאורך הגל של האור הנראה הוא בערך 500nm.

2) דוגמה - טמפרטורת כוכב

טלסקופ גדול בחלל מזהה כוכב חדש. הקרינה שפולט הכוכב נקלטת בטלסקופ כאשר השיא של הקרינה הוא באורך גל של 90nm.
מהי הטמפרטורה על פני הכוכב?

3) טמפרטורה של מתכת

מה הטמפרטורה של מתכת בשלב הריתוך אם שיא פליטת האור שלה באורך גל של 460nm.

4) הפרש אנרגיות של מולקולה רוטטת

מולקולת HCl רוטטת בתדירות של: $8.1 \cdot 10^{13}\text{Hz}$.
חשבו את ההפרש בין שני ערכים צמודים של האנרגיות האפשריות לפי ההנחה הקוונטית של פלאנק לערכי האנרגיה באוסילציות.
תנו תשובה בג׳אול ובאלקטרון וולט.

5) חוק ווין וקבוע פלאנק מנוסחת הקרינה

נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור היא: $I(\lambda,\mathrm{T})=\frac{2\pi\mathrm{h}c^2\lambda^{-5}}{\mathrm{e}^{\mathrm{h}c/\lambda kT}-1}$.

א. * הראו, ללא שימוש בחוק ווין, כי קבוע $\lambda_{\mathrm{p}}\mathrm{T}=$, לעזרתכם פתרון המשוואה: $5\mathrm{e}^{-x}=5-x$ הוא: $x=4.966$.

ב. השתמשו בחוק ווין וחשבו את קבוע פלאנק.

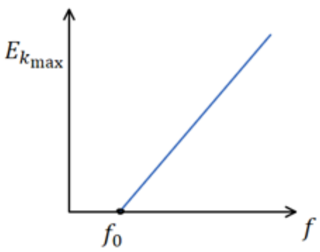
ג. ** הראו כי הקרינה הנפלטת מגוף שחור פרופורציונית לטמפרטורה ברביעית - חוק סטפן - בולצמן.
הדרכה: בשביל לחשב את הקרינה הכוללת הנפלטת יש לעשות אינטגרציה על כל אורכי הגל, אין צורך לפתור את האינטגרל עד הסוף.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) $32,000K$.
3) $6,300K$.
4) $5.4\cdot10^{-20}J\ ,\ 0.34eU$.
5) הוכחה.

התיאוריה הפוטנית של האור והאפקט הפוטואלקטרי:

סיכום כללי:

אנרגיה של פוטון יחיד	$E = hf$	f- תדירות האור
<u>הניסוי הפוטואלקטרי</u>		
תדירות סף	$hf_0 = W_0$	W_0 - פונקציית העבודה של המתכת
אנרגיה קינטית מקסימאלית של האלקטרונים	$E_k = hf - W_0$	
מתח עצירה	$eV_0 = E_k$	
השוואה לתורה הגלית	<u>לפי התורה הפוטונית</u> 1.עוצמת האור קשורה למספר הפוטונים ולא לאנרגיה של כל אחד מהם. הגדלת העוצמה תגדיל את מספר האלק' הנפלטים אבל לא את האנרגיה הקינטית שלהם. 2. האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות. 3. רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.	<u>לפי התורה הגלית- אלקטרומגנטית</u> 1. עוצמת האור קשורה לגודל השדה הגדלת העוצמה תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים. 2. התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

שאלות:

1) דוגמה - חישוב אנרגית פוטון באור כחול

חשבו את האנרגיה של פוטון באור כחול: $\lambda = 450\text{nm}$ באוויר (או וואקום).

2) דוגמה - הערכה של מספר פוטונים מנורה

נסו להעריך כמה פוטונים פולטת נורה בהספק 100W כל שניה.
הניחו שהנצילות של הנורה היא בערך 3% (כלומר רק 3% מהאנרגיה המושקעת בנורה כל שניה מנוצלת להפקה של אור). האור שיוצא מנורה לבנה הוא בכל אורכי הגל, ניתן לקחת לצורך ההערכה את אורך הגל באמצע הספקטרום של האור הנראה: $\lambda \approx 500\ nm$.

3) דוגמה - חישוב אנרגיה של אלקטרונים נפלטים

מהי האנרגיה הקינטית המקסימאלית ומהי המהירות המקסימאלית של אלקטרונים הנפלטים מחומר שפונקציית העבודה שלו היא: $W_0 = 2.8\text{eV}$ אם אורך הגל של האור הפוגע במשטח הוא:

א. $\lambda = 400\text{nm}$.

ב. $\lambda = 600\text{nm}$.

4) עקיפה של קרינת גמא

לפוטון בקרינת גמא יש אנרגיה של 380 keV.

א. מהו אורך הגל של הקרינה?

ב. האם לדעתך הקרינה עושה עקיפה דרך פתחים טיפוסיים שאנחנו נתקלים ביום יום כמו פתח של דלת?

5) איזו מתכת לא תפלוט אלקטרונים

פונקציות העבודה של סודיום, צסיום, נחושת וברזל הן: 2.3, 2.1, 4.7 ו-4.5 אלקטרון וולט בהתאמה. אלו מהמתכות לא תפלוט אלקטרונים כאשר פוגע בה אור מהתחום הנראה?

6) פונקציית עבודה ומתח עצירה

בניסוי של האפקט הפוטואלקטרי נצפה כי לא זורם זרם כאשר אורך גל של האור הוא מעל ל-540nm.

א. מהי פונקציית העבודה של המתכת?

ב. מהו מתח העצירה הדרושה אם מקרינים באור באורך גל של 450nm?

7) ניסוי פוטואלקטרי

בניסוי פוטואלקטרי הקרינו אור בתדירויות שונות ומדדו את מתח העצירה.
התוצאות של הניסוי מוצגות בטבלה הבאה:

$f(10^{14}\mathrm{Hz})$	$\mathrm{V(V)}$
6.50	0.6
7.25	0.91
8.00	1.23
8.75	1.54
9.50	1.85

א. מצאו את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים בפליטה ושרטטו גרף של אנרגיה זו כתלות בתדירות. השתמשו בנייר משבצות ורשמו נתונים בצורה מדויקת.

ב. חשבו מתוך הגרף את קבוע פלאנק.

ג. חשבו את פונקציית העבודה ותדירות הסף של המתכת.

תשובות סופיות:

1) 2.8eV .

2) $8\cdot10^{18}$ פוטונים.

3) א. $3.2\cdot10^{2}\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. ב. לא תהיה פליטה של אלקטרונים.

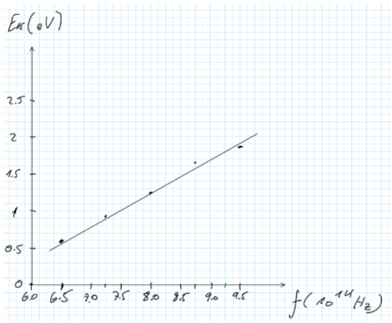
4) א. $3.3\cdot10^{-3}\text{nm}$. ב. לא.

5) נחושת וברזל.

6) א. 2.3eV . ב. 0.46V .

7) א. ב. הוכחה.

$E_k = \text{eV}$
0.6eV
0.91eV
1.23eV
1.54eV
1.85eV



ג. $f = 5.84\cdot10^{14}\text{Hz}$, $W_0 = 2.42\text{eV}$.

אנרגיה מסה ותנע של פוטון:

סיכום כללי:

אנרגיה של פוטון יחיד	$E = \mathrm{h}f$	f-תדירות האור
תנע של פוטון	$p = \frac{E}{c} = \mathrm{h}\frac{f}{c} = \frac{\mathrm{h}}{\lambda}$	
מסת מנוחה של פוטון	$m = 0$	

שאלות:

1) דוגמה - כוח שמפעילה נורה על נייר שחור

בדוגמה "הערכה של מספר הפוטונים מנורה" חישבנו את מספר הפוטונים שיוצאים מנורה של 100W כל שניה (בערך 10^{19}). נניח כי כל הפוטונים האלו פוגעים בנייר שחור (ולא מוחזרים) חשבו את:

א. התנע של פוטון יחיד.

ב. הכוח שמפועל על הנייר.

2) דוגמה - יעילות של תהליך פוטוסינטזי

בתהליך פוטוסינטזי פיגמנטים בצמח כמו כלורופיל סופגים אור שמש ובאמצעותו הופכים פחמן דו חמצני (CO_2) לפחמימות (וחמצן שנפלט).

בשביל להפוך מולקולה אחת של CO_2 לפחממה הצמח משתמש ב-9 פוטונים. כלורופיל סופג אור בעיקר באורך גל של 670nm. אם ידוע שהאנרגיה המשתחררת בפירוק פחממה היא: $4.9\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{molecule}}$, מה היעילות (או נצילות) של התהליך הפוטוסינטזי?

תשובות סופיות:

1) א. $1.3\cdot10^{-27}\frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{sec}}$. ב. $10^{-8}\mathrm{N}$.

2) 29%.

אפקט קומפטון:

סיכום כללי:

הסחת קומפטון	$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)$	λ - אורך הגל של הקרן הפוגעת λ' - אורך הגל של הקרן המפוזרת θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת $\frac{h}{m_e c}$ - אורך גל של האלקטרון החופשי

שאלות:

1) **דוגמה - פיזור בכמה זוויות**

קרני X באורך גל 0.162nm מפוזרות מסרט פחמן דק.
מה יהיו אורכי הגל של הקרניים המפוזרות בזוויות?

א. 0°.

ב. 90°.

ג. 180°.

2) **הסחה יחסית מקסימאלית**

בפיזור קומפטון, מצאו את זווית הפיזור עבורה ההסחה (שינוי באורך הגל) היא מקסימאלית. מהי ההסחה היחסית המקסימאלית $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ עבור פוטון באורך גל: $\lambda = 500\text{nm}$ מהתחום הנראה ועבור פוטון באורך גל: $\lambda = 0.1\text{nm}$ מתחום קרינת X.

3) **פיזור רב פעמי**

קרני גמא שנוצרות קרוב למרכז השמש עוברות הרבה פיזורים בזוויות קטנות עד שהן מאבדות מספיק אנרגיה והופכות לקרניים בתחום הנראה.
הניחו שלפוטון בקרן גמא יש אנרגיה של 1.0MeV והפוטון עובר סדרה של התנגשויות בזוויות של 0.5° בכל התנגשות. כמה התנגשויות צריך הפוטון לעבור בשביל שאורך הגל שלו ישתנה ל- 555nm.

תשובות סופיות:

1) א. 0.162nm. ב. 0.164nm. ג. 0.167.

2) א. $\theta=\pi$. ב. 0.00097%. ג. 4.9%.

3) $6\cdot 10^9$ התנגשויות.

אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות:

סיכום כללי:

תנאים ביצירת זוגות:

1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען
2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגית הזוג, יש להוסיף אנרגית מנוחה יחסותית לכל חלקיק mc^2.
3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף (בד"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.
4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.

שאלות:

1) דוגמה - אנרגיה מינימלית ליצירת זוגות

מצאו מהי האנרגיה המינימלית (ב-eV) ליצירת זוג אלקטרון פוזיטרון?
מה אורך הגל של הפוטון במקרה זה?

2) חישוב אנרגיה קינטית ביצירת זוג

חשבו כמה אנרגיה קינטית כוללת תהיה ביצירת זוג של אלקטרון פוזיטרון מתוך פוטון בעל אנרגיה של: 2.8MeV.

3) אורך גל מקסימאלי ליצירת זוג

מהו אורך הגל המקסימאלי של פוטון היכול לייצר זוג של פרוטון ואנטי פרוטון (כל אחד במסה של: $1.67 \cdot 10^{-27}\text{kg}$).

4) אלקטרון ופוזיטרון מייצרים שני פוטונים

אלקטרון ופוזיטרון נעים אחד כלפי השני במהירות: $10^5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ כל אחד.
הם מתנגשים, נעלמים ויוצרים שני פוטונים שנעים בכיוונים מנוגדים.
מהן האנרגיה והתנע של כל פוטון?

תשובות סופיות:

1) 1.02MeV ו- 1.2pm.
2) 1.78MeV.
3) $6.63\cdot10^{-16}\text{m}$.
4) $E=0.51\text{MeV}$, $p=0.51\dfrac{\text{MeV}}{c}$.

דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר:

סיכום כללי:

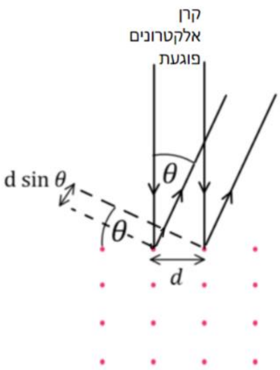
אורך גל דה ברולי של חלקיק	$\lambda = \frac{h}{p}$	לא יחסותי $p = mv$ או יחסותי $p = mv\gamma$

שאלות:

1) **דוגמה - אורך גל של כדורסל**
חשבן את אורך גל דה ברולי של כדורסל השוקל חצי קילוגרם ונזרק במהירות של 10 מטר לשנייה.

2) **דוגמה - אורך גל של אלקטרון ב-100 וולט**
חשבן את אורך הגל של אלקטרון המואץ תחת הפרש פוטנציאלים של 100V.

3) **דוגמה - עקיפה של אלקטרונים**
מקרינים קרן אלקטרונים בניצב למשטח של חומר מוצק.
האטומים בחומר מסודרים בצורת סריג ריבועי כאשר המרווח בין האטומים לא ידוע ומסומן ב-d, ראו איור.
מצאו את המרחק d אם האנרגיה הקינטית של האלקטרונים היא: $E_k = 80\text{eV}$ והזווית בה מתרחשת התאבכות בונה בפעם הראשונה היא $22°$.
הניחו שהאנרגיה של האלקטרונים נמוכה וכי האלקטרונים עושים אינטראקציה רק עם השכבה החיצונית של החומר.



4) **כמה מתח לאורך גל**
באיזה מתח צריך להאיץ אלקטרון כך שהוא יגיע לאורך גל של 0.6nm.

5) **אנרגיה ותנע מאורך גל**
לאלקטרון אורך גל דה ברולי של: $\lambda = 3.2 \cdot 10^{-10}\text{m}$.
א. מהו התנע שלו?
ב. מהי מהירותו? האם היא יחסותית? רמת דיוק של 1% בגאמה.
ג. איזה מתח נדרש כדי להאיץ אותו למהירות כזו?

6) רזולוציה של מיקרוסקופ אלקטרוני

מהו הגבול התיאורטי של הרזולוציה של מיקרוסקופ אלקטרונים שבו האלקטרונים מואצים במתח של 80kV. יש להשתמש בנוסחאות יחסותיות.

7) אנרגיה יחסותית

אלקטרון בשפופרת טלוויזיה (של פעם) מואץ במתח של 33keV.

א. האם האנרגיה של האלקטרון יחסותית? לפי רמת דיוק של אחוז אחד בגמא.

ב. חשבו את אורך הגל של האלקטרון. האם צריך לדאוג מתופעות עקיפה? גודל פתח השפופרת הוא 5cm.

תשובות סופיות:

1) $1.3\cdot 10^{-34}\,\text{m}$.

2) $1.2\cdot 10^{-10}\,\text{m}$.

3) 3A.

4) 4.17V.

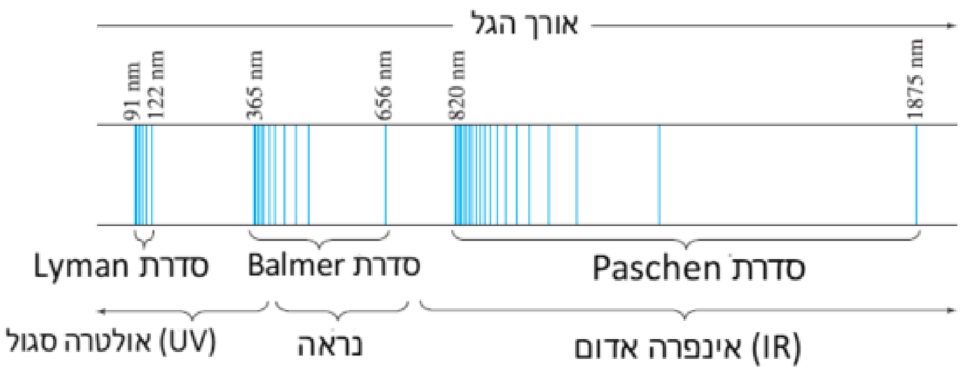
5) א. $2.1\cdot 10^{-24}\,\text{kg}\cdot\text{sec}$. ב. $2.3\cdot 10^{6}\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, לא יחסותי. ג. 15V.

6) $4.2\cdot 10^{-12}\,\text{m}$.

7) א. כן. ב. $6.6\cdot 10^{-12}\,\text{m}$, אין צורך.

מודלים מוקדמים של האטום:

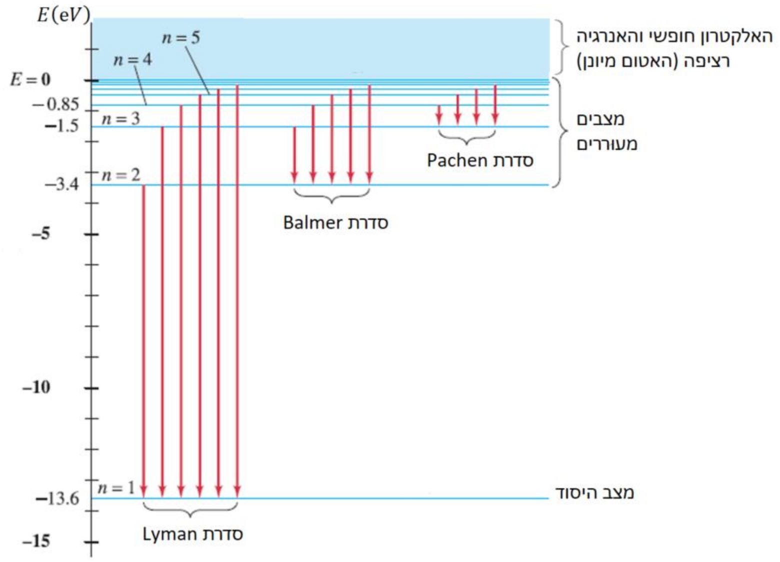
סיכום כללי:

נוסחה לאורכי הגל הנפלטים מאטום המימן	$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)$	קבוע Rydberg $\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)$
		
בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד	1.מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד. 2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.	

מודל האטום של בוהר:

סיכום כללי:

הנחות המודל	1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים / רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים **אורביטלים.** 2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד אנרגיה במצבים אלו הם נקראים **מצבים יציבים stationary states**	
אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים	$hf = E_U - E_L$	
הנחה על התנע הזוויתי	$L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$	n=1,2,3…
הרדיוסים האפשריים	$r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$	Z - מספר הפוטונים $r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$
האנרגיה של האלקטרון הנמצא במסלול ה-n	$E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6eV}{n^2}$	
טבלה של רמות האנרגיה באטום המימן		



שאלות:

1) דוגמה - אורך הגל של הקו הראשון של Paschen

השתמשו בטבלה שהוצגה בסרטון "קווי הספקטרום ממודל בוהר" ומצאו את אורך הגל של קו הספקטרום הראשון בסדרת Paschen.
באיזה תחום של אורכי גל נמצא קו זה? (UV, IR או אור נראה).

2) דוגמה - אורך גל מקסימלי בבליעה

גז מימן נמצא בשפופרת בלחץ נמוך ובטמפרטורת החדר (האלקטרונים במצב היסוד). מקרינים את הגז בקרינה עם ספקטרום רציף של אורכי גל.
מהו אורך הגל הכי גבוה בספקטרום הבליעה ומהו אורך הגל אחריו?
השתמשו בטבלה של רמות האנרגיה באטום המימן.

3) דוגמה - אנרגיית ינון של יון הליום

He^+ הוא יון של הליום המכיל שני פרוטונים ואלקטרון אחד. השתמשו במודל בוהר וחשבו את אנרגיית היינון של He^+, כלומר, כמה אנרגיה דרושה בשביל לנתק גם את האלקטרון היחיד שנשאר.
מהו אורך הגל המקסימאלי של פוטון הגורם ליינון?
הניחו שהאלקטרון במצב היסוד.

4) דוגמה - אנרגיה של אטומים בטמפרטורת חדר

לפי התיאוריה הקינטית (תיאוריה בתרמודינמיקה), האנרגיה הקינטית הממוצעת של אטום בגז (אידיאלי) היא: $\bar{E}_k = \frac{3}{2}\mathrm{kT}$ כאשר $k = 1.38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$.
הוא קבוע בולצמן ו-T היא הטמפרטורה בקלווין. הסבירו מדוע בטמפרטורת החדר כמעט כל האטומים צריכים להיות במצב היסוד. (טמפרטורת החדר היא בערך 20 מעלות צלזיוס והטמפרטורה בקלווין שווה לטמפרטורה בצלזיוס פלוס 273).

5) השוואה בין מעברים

נתונים שלושה מעברים בין רמות אנרגיה של אטום המימן לפי מודל בוהר כאשר n הוא המצב ההתחלתי ו-n' הוא המצב הסופי.

I. $n = 1\ n' = 3$.
II. $n = 6\ n' = 2$.
III. $n = 4\ n' = 5$.

א. קבעו אילו מן המעברים הם בליעה ואילו פליטה.
ב. באיזה מעבר מעורב הפוטון הכי אנרגטי?

6) **יינון אטום מעורר**
כמה אנרגיה דרושה על מנת לייך אטום מימן מעורר הנמצא במצב אנרגיה החמישי?

7) **אורך גל של הקו השני**
מצאו את אורך הגל של הקו השני בסדרת בלמר.

8) **מימן בולע פוטון של הליום מיונן**
בשמש ישנם יונים של הליום - He^+. יון של ההליום פולט פוטון במעבר מרמה 5 לרמה 2. האם אטום מימן הנמצא בשמש יוכל לבלוע את הפוטון בלי לבצע יינון? אם כן בין איזה רמות אנרגיה תתבצע הבליעה?

9) **אנרגיית יינון של ליתיום פלוס שתיים**
חשבו את אנרגיית היינון (ממצב הייסוד) של אטום ליתיום החסר שני אלקטרונים Li^{2+} בעל $Z = 3$ לפי מודל בוהר.

10) **אנרגיה קינטית של אלקטרון במצב יסוד**
מהי האנרגיה הפוטנציאלית והקינטית של אלקטרון במצב היסוד של אטום המימן?

11) **האם אטום המימן יחסותי**
השתמשו בתוצאה של התרגיל הקודם "אנרגיה קינטית של אלקטרון במצב ייסוד" ובדקו האם יש צורך להשתמש בנוסחאות יחסותיות במודל בוהר.

12) **רדיוס אטום מעורר**
אטום מימן מעורר יכול להיות תיאורטית בקוטר של 0.10mm.
באיזה רמת אנרגיה נמצא אטום זה? ומהי האנרגיה של מצב זה?

13) **אנרגיה ותנז**
מצאו את התנע הזוויתי של אלקטרון באטום המימן אם האנרגיה שלו היא -1.5eV.

14) **אלקטרונים פוגעים בגז מימן**
קרן אלקטרונים בעלי אנרגיה של 12.1eV פוגעת בגז מימן הנמצא בטמפרטורת החדר (רוב האטומים במצב היסוד).
מהו ספקטרום הפליטה שנצפה לראות מן הגז בעקבות פגיעת הקרן?

תשובות סופיות:

1) 300nm בתחום העל סגול (UV).

2) $\lambda_2 = 103\text{nm}$, $\lambda_{max} = 122\text{nm}$.

3) 22.8nm .

4) ראה סרטון.

5) א. בליעה : I , פליטה : II , בליעה : III. ב. מעבר I.

6) 0.544eV .

7) 490nm .

8) לא יוכל לקלוט.

9) 122.4eV.

10) $K = 13.6\text{eV}, U = -27.2\text{eV}$.

11) אין צורך.

12) ברמה ה-972 , האנרגיה היא : $-1.4 \cdot 10^{-J}\text{eV}$.

13) $3.17 \cdot 10^{-34}\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$.

14) אורכי הגל הנצפים הם : 122nm , 656nm , 103nm.

שאלות ותרגילים נוספים:

שאלות:

1) **טמפרטורה של כוכב**
איזה כוכב נמצא בטמפרטורה גבוהה יותר, כוכב הנראה כחול, אדום או צהוב?

2) **גופים שחורים בחושך**
אם קרינה נפלטת מכל גוף, למה אנחנו לא רואים אותם בחושך?

3) **צבע אור של נורה**
האם האור של נורה בטמפרטורה של 3000K יראה לבן כמו האור של השמש הנמצאת ב-6000K?

4) **חדר חושך**
למה בחדרי חושך מאירים בנורה אדומה כשמפתחים תמונה של שחור לבן?
האם ניתן להשתמש באור אדום גם בפיתוח של תמונה בצבע?

5) **תדירות סף מעדיפה תיאוריה פוטונית**
הסבירו למה העובדה שיש תדירות סף באפקט הפוטואלקטרי מסתדרת עם התורה הפוטונית ולא עם התורה הגלית של האור?

6) **אנרגיה של אינפרה אדום לעומת על סגול**
א. האם לפוטון יחיד של קרן בתחום העל סגול יש תמיד יותר אנרגיה מפוטון יחיד של קרן בתחום האינפרה אדום?
ב. האם לקרן בתחום העל סגול יש תמיד יותר אנרגיה מקרן בתחום האינפרה אדום?

7) **האם נפלטים יותר אלקטרונים באורך גל נמוך**
מקרינים מתכת באמצעות אור באורך גל מסוים ומודדים את האנרגיה של האלקטרונים הנפלטים. מחליפים את הקרן האור לקרן אחרת, באותה העוצמה אך עם אורך גל גדול יותר. בהנחה שבשני המקרים נפלטים אלקטרונים מן המתכת:
א. האם מספר האלקטרונים הנפלט גדל / קטן או נשאר ללא שינוי?
ב. האם האנרגיה של האלקטרונים גדלה / קטנה או נשארת ללא שינוי?

8) אורך גל של פוטון בפיזור

האם אורך הגל של פוטון בקרינת X המפוזר מאלקטרון גדל / קטן או לא משתנה?

9) הבדל בין הפוטואלקטרי לקומפטון

באפקט קומפטון הפגיעה של הפוטון יכולה לגרום ליציאה של אלקטרון מהמתכת, במקרה כזה מה ההבדל בינו לאפקט הפוטואלקטרי?

10) איך העוצמה יורדת עם המרחק לפי כל מודל

נניח כי ישנו מקור אור נקודתי, כיצד צריכה לרדת העוצמה של האור כתלות במרחק מהמקור לפי המודל הפוטוני וכיצד לפי המודל הגלי.

האם ניתן להבחין בין המודלים בדרך זו?

11) מהם ההבדלים בין פוטון לאלקטרון

ציינו את כל ההבדלים בין פוטון לאלקטרון.

12) האם יש חמצן על כוכב

כיצד ניתן לדעת האם יש חמצן על פני השמש או על כוכבים בכלל?

13) נכונות הנוסחה של אנרגיית הפוטון

השתמשו בשימור תנע והראו כי לפוטון הנפלט מאטום המימן יש קצת פחות אנרגיה מאשר החישוב שבנוסחה: $hf = E_U - E_L$.

14) ספקטרום בליעה ופליטה בטמפרטורות שונות

נניח שניקח את ספקטרום הפליטה של גז מימן הנמצא בטמפרטורה מאוד גבוהה כך שחלק מהאטומים נמצאים במצב מעורר ונעביר אותו דרך גז מימן הנמצא בטמפרטורה החדר (האטומים לא מעוררים) כך שתתבצע בליעה.

האם קווי הבליעה יהיו זהים לקווי הפליטה?

15) אנרגיה מקסימלית להתנגשות אלסטית

מהי האנרגיה המקסימאלית עבורה יתנגשו שני אטומי מימן הנמצאים במצב היסוד התנגשות אלסטית?

16) כמה פוטונים נכנסים לעין מנורה

נורה של 40W פולטת בערך 3% מהאנרגיה המושקעת בה כאור נראה באורך גל ממוצע של 550nm. האור נפלט בצורה אחידה לכל הכיוונים.

העריכו כמה פוטונים פוגעים בעין של אדם הנמצא במרחק 10m מהנורה בכל שניה. קוטר האישון הוא 4.0mm.

17) כמה פוטונים מגיעים מהשמש

עוצמת האור המגיע מן השמש היא: $I = 1350\ \frac{W}{m^2}$.

חשבו כמה פוטונים למטר מרובע לשנייה יש פוגעים בפני כדור הארץ מן השמש?

קחו אורך גל ממוצע של 550nm.

18) כוח של קרן לייזר

קרן לייזר באורך גל של: $\lambda = 633\text{nm}$ פוגעת בחיישן כוח. החיישן מודד כוח של: $F = 3.0\text{nN}$. כמה פוטונים פוגעים בחיישן כל שניה אם נניח שהפוטונים אינם מוחזרים?

19) חלקיקי אלפא מתקרבים לגרעין

בחלק מהניסויים של רתפורד הוא השתמש בחלקיקי אלפא בעלי מטען $+2e$ עם אנרגיה של 3.6MeV. כמה קרוב יכלו החלקיקים להגיע למרכז גרעין של כסף המכיל מטען של $+47e$. התעלמו מהרתע של הגרעין.

20) פוטנציאל עצירה בניסוי פוטואלקטרי

בניסוי פוטואלקטרי מקרינים מתכת באור באורך גל 440nm ומודדים כי פוטנציאל העצירה הוא 1.2V. מה יהיה פוטנציאל העצירה אם יחליפו את האור לאורך גל של 550nm.

21) שינוי תדירות בפוטואלקטרי

בניסוי פוטואלקטרי פוטונים באנרגיה של 9.0eV פוגעים במתכת ומתח העצירה הנמדד הוא 5.0V.

א. מה תהיה האנרגיה המקסימאלית של האלקטרונים הנפלטים אם תדירות הפוטונים תקטן לחצי מהתדירות המקורית?

ב. חזרו על סעיף א אם התדירות תקטן לשליש מהתדירות המקורית.

22) מודל בוהר לשמש וכדור הארץ

נסו ליישם את המודל של בוהר לכדור הארץ והשמש.

א. מהם הרדיוסים ורמות האנרגיה? יש להשתמש ב:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{sec}^2\mathrm{kg}} \text{ , } M_E = 5.97 \cdot 10^{24}\mathrm{kg} \text{ , } Ms = 2 \cdot 10^{30}\mathrm{kg}$$

ב. חשבו את רמת האנרגיה שבה נמצא כדור הארץ אם המרחק מהשמש הוא: $r = 1.50 \cdot 10^{11}\mathrm{m}$.

ג. * הראו כי ההבדל בין רמות האנרגיה זניח עבור מודל זה וניתן להתייחס לאנרגיה כרציפה.

23) כוח על פנס

פנס קטן עובד בהספק של 5W כאשר כ-3% מנוצל לאור נראה.
העריכו את הכוח המופעל על הפנס אם האור יוצא בכיוון אחד.

24) זמן ואורך פלאנק

נסתכל על שלושה קבועים בסיסיים בטבע קבוע הגרביטציה:
$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg \cdot sec}^2}$, קבוע פלאנק: $\mathrm{h} = 6.63 \cdot 10^{-34} \frac{\mathrm{kg \cdot m}^2}{\mathrm{sec}}$
ומהירות האור: $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$.

א. מצאו קומבינציה מתמטית של הקבועים האלו שתהיה ביחידות של זמן.
זמן זה נקרא זמן פלאנק t_p והוא נחשב לזמן המוקדם ביותר מרגע תחילת הייקום שבו ניתן להפעיל את חוקי הפיזיקה כפי שאנחנו מבינים כיום.
חשבו את זמן זה.

ב. מצאו קומבינציה מתמטית של הקבועים האלו שתהיה ביחידות של אורך.
אורך זה נקרא אורך פלאנק λ_p והוא נחשב לאורך הקטן ביותר שבו ניתן להפעיל את חוקי הפיזיקה כפי שאנחנו מבינים כיום. חשבו את אורך זה.

תשובות סופיות:

1) כחול.
2) כי הקרינה הנפלטת היא לא בתחום הנראה.
3) לא, הוא יראה יותר צהוב אדום.
4) כי סרט שחור לבן לא מגיב לאור אדום, לא ניתן להשתמש באור אדום לפיתוח תמונה צבעונית.
5) לפי התורה הגלית האנרגיה של האור קשורה לעוצמת האור ולפי התורה הפוטונית לתדירות.
6) א. כן. ב. לא.
7) א. ללא שינוי. ב. קטנה.
8) גדל.
9) באפקט קומפטון הפוטון מפוזר באנרגיה יותר נמוכה לעומת הפוטואלקטרי שם תמיד כל הפוטון נבלע וכל האנרגיה שלו הולכת לאלקטרון.
10) לפי אחד חלקי המרחק בריבוע בשניהם ואי אפשר להבחין ביניהם.
11) משותף: תנע - לשניהם יש, דואליות גל חלקיק לשניהם (לשניהם יש אורך גל). שונה: פוטון נע רק במהירות האור, לפוטון אין מסת מנוחה, לפוטון אין מטען חשמלי.
12) לפי ספקטרום הפליטה.
13) ראה סרטון.
14) לא.
15) 10.2eV.
16) 10^{10}.
17) $3.7\cdot10^{21}$ פוטונים.
18) $2.9\cdot10^{8}$ פוטונים לשנייה.
19) $3.76\cdot10^{-14}\text{m}$.
20) 0.64V.
21) א. 0.5eV. ב. לא תהיה פליטת אלקטרונים.
22) א. $r_n = 2.34\cdot10^{-138}_{\text{m}}\cdot n^2$, $E_n = -1.68\cdot10^{182}_{\text{J}}\cdot\frac{1}{n^2}$. ב. $n = 2.53\cdot10^{74}$.
ג.ראה סרטון.
23) $5\cdot10^{-10}\text{N}$.
24) א. $t_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 1.35\cdot10^{-43}\sec$. ב. $\lambda_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 4.05\cdot10^{-35}\text{m}$.

בעיית שני הגופים ומסה מצומצמת

רקע

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}_{rel} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_{c.m} = \frac{m_1 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

שאלות

1) **אטום פוזיטרוניום**

אטום פוזיטרוניום הוא אטום המורכב מאלקטרון וגרעין שבו יש פוזיטרון.
פוזיטרון הוא אנטי חלקיק של האלקטרון, כלומר מסתו זהה למסת האלקטרון ומטענו $+e$.
מהי האנרגיה של פוטון הנפלט במעבר מרמה $n=3$ לרמה $n=1$?

תשובות סופיות

1) $6\,\mathrm{eV}$

מבוא לקוונטים

פרק 9 - תורת הקוונטים

תוכן העניינים

פונקציית הגל של החומר:

סיכום כללי:

- $\left|\psi\left(x\right)\right|$ היא פונקציית הגל של החומר.
- $\left|\psi\left(x\right)\right|^2$ היא צפיפות ההסתברות למצא חלקיק בנקודה מסוימת.
- ההסתברות שחלקיק נמצא בין x_1 ל-x_2 היא: $\int_{x_1}^{x_2}\left|\psi\left(x\right)\right|^2 dx$.
- נרמול: $\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi\left(x\right)\right|^2 dx=1$.
- כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.
- מיקום ממוצע: $\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x|\psi(x)|^2\,\mathrm{dx}$
- המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצא אותו על ידי נגזרת).
- שונות: $\sigma^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2$ כאשר $\langle x^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x^2|\psi(x)|^2\,\mathrm{dx}$

שאלות:

1) **דוגמה – חישוב הסתברות לדעיכה אקספוננציאלית**

פונקציית הגל של חלקיק היא $4e^{-8x}$ עבור $x>0$ ואפס עבור $x<0$.
מה הסיכוי למצא את החלקיק ב-$x>0.03$.

2) **דוגמה – מצאו את המקדם**

נתונה פונקציית הגל הבאה של חלקיק: $\psi\left(x\right)=\begin{cases}0 & x<0\\ \mathrm{A}\sin\left(20\pi x\right) & 0\le x\le 0.05\\ 0 & x>0.05\end{cases}$.

מצאו את הקבוע A.

3) דוגמה – מצאו משתנים

נתונה פונקציית גל מנורמלת לחלקיק בעל מסה M : $\psi(x) = Ae^{-\alpha(x-x_0)^2}$.

מצאו את :

א. A.

ב. $\langle x \rangle$.

ג. המיקום המסתבר ביותר.

ד. $\langle x^2 \rangle$.

ה. Δx.

לעזרתכם : $\int_0^\infty e^{-bx^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{4b}}$; $\int_0^\infty x^2 e^{-bx^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{16b^3}}$.

תשובות סופיות:

1) 38%.

2) $A = 2\sqrt{10}$.

3) א. $A = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$. ב. x_0 . ג. x_0 .

ד. $\left(\frac{\pi}{8192\alpha^3}\right)^{\frac{1}{4}} + x_0^2$. ה. $\left(\frac{\pi}{8192\alpha^3}\right)^{\frac{1}{8}}$

עקרון אי הוודאות של הייזנברג:

סיכום כללי:

		הערות
אי ודאות מיקום תנע	$\Delta x\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ $\hbar = \frac{\text{h}}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} J \cdot S$	1. אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בו זמנית. 2. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד. 3. אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב-X והמיקום ב-Y בו זמנית.
אי ודאות זמן אנרגיה	$\Delta E\Delta \text{t} \geq \frac{\hbar}{2}$	1. ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן. 2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.
אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי	$\Delta L_z \Delta\theta \geq \frac{\hbar}{2}$	

שאלות:

1) **דוגמה – מדידת מיקום**

אלקטרון נע במהירות: $2.10 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ שנמדדה בדיוק של 0.12%.
מה הדיוק המקסימאלי שניתן להשיג במדידה סימולטנית של המיקום?

2) **דוגמה – אי וודאות של טניס**

מה היא אי הוודאות במדידת המיקום של כדור טניס בעל מסה של 150 גרם הנזרק במהירות: $35 \pm 2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$?

3) **אי ודאות במיקום נויטרון שנע**

נויטרון נע במהירות: $(6.650 \pm 0.023) \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.
באיזו רמת דיוק ניתן לדעת את המיקום שלו? $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\text{kg}$.

4) **אנרגיה במצב מעורר**

אלקטרון נשאר במצב מעורר באטום בערך 10^{-8}sec.
מה אי הוודאות באנרגיה של המצב באלקטרון וולט?

5) אי ודאות יחסית בפליטת פוטון

זמן החיים של אטום במצב מעורר הוא בערך 10^{-9}sec. האטום יורד מהמצב המעורר ופולט פוטון באורך גל של 400nm, מצאו את אי הודאות היחסית באנרגית הפוטון $\frac{\Delta E}{E}$ ובאורך הגל $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$.

6) אי ודאות בשל קליע באקדח

קליע בעל מסה של 5gr נורה מאקדח במהירות אופקית של $180\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

א. מהו אורך הגל של הקליע?
ב. מהי אי הודאות המינימלית במדידת המיקום של הקליע?
ג. מהי אי הודאות המינימלית בתנע בכיוון האנכי של הקליע אם רדיוס הקנה הוא 0.60cm?

7) אי ודאות במסת נויטרון

לנויטרון חופשי: $m = 1.67\cdot 10^{-27}\text{kg}$ יש זמן חיים של 886sec.
מה אי הודאות במדידת המסה של הנויטרון (בק״ג)?

8) אלקטרון יורד מצב באטום המימן

אלקטרון נמצא במצב המעורר הראשון $(=2n)$ של אטום המימן בממוצע 10^{-8}sec לפני שהוא יורד למצב הייסוד $(=1n)$.

א. העריכו את אי הודאות באנרגיית האלקטרון במצב $=2n$.
ב. מהי אי הודאות היחסית באנרגיית הפוטון הנפלט?
ג. מהו אורך הגל ורוחב הפס של קו הספקטרום הנצפה מתהליך זה?

תשובות סופיות:

1) $\Delta X\min = 2.3\cdot 10^{-6}\text{m}$.
2) $1.8\cdot 10^{-34}\text{m}$.
3) $1.37\cdot 10^{-11}\text{m}$.
4) $3\cdot 10^{-8}\text{eV}$.
5) $\left|\frac{\Delta x}{\lambda}\right| = 4\cdot 10^{-5}\%$, $\frac{\Delta E}{E} = 4\cdot 10^{-5}\%$.
6) א. $7.4\cdot 10^{-34}\text{m}$. ב. 10^{-32}m. ג. $10^{-32}\text{kg}\cdot\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.
7) 10^{-51}kg.
8) א. $3\cdot 10^{-8}\text{eV}$. ב. $3\cdot 10^{-9}$. ג. $\lambda = 122\text{nm}$, $|\Delta\lambda| \approx 4\cdot 10^{-7}\text{nm}$.

משוואת שרדינגר:

סיכום כללי:

משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}+U(x,t)\Psi(x,t)$$

תנאים נוספים :

1. פסי מנורמלת.
2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת.
3. פסי רציפה.
4. הנגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

בתלת מימד :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,y,z,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(x,y,z,t)+U(x,t)\Psi(x,y,z,t)$$

משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U(x)\psi=E\psi$$

כאשר : $\Psi(x,t)=\psi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

- התרגילים של נושא זה מופעים בנושאים הבאים.

חלקיק חופשי ובור פוטנציאל:

סיכום כללי:

חלקיק חופשי – חלקיק שנע ללא השפעת כוחות: $U(x) = 0$.

פונקציית הגל של חלקיק חופשי: $\psi(x) = A\sin(kx)$.

חבילת גלים: $\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$.

בור פוטנציאל אינסופי:

פונקציית הגל של המצב ה-n: $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$.

האנרגיה של המצב ה-n: $E_n = \frac{h^2}{8ml^2}n^2$, $n = 1, 2, 3....$

- לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה הפוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית. באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית.

עקרונות לציור פונקציית גל:

1. ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.
2. עבור המצב ה-n ציירו גל עם $n-1$ נקודות צומת (לא כולל הקצוות).
3. ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולהיפך).
4. פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.
5. פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שההפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

מיקום ממוצע: $\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi(x)|^2\,dx$.

המיקום בעל ההסתברות הגבוהה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצא אותו על ידי נגזרת).

שאלות:

1) דוגמה – אלקטרון חופשי עם אנרגיה ידועה

אלקטרון עם אנרגיה $E = 3.7\mathrm{eV}$ נע באופן חופשי במרחב.

א. מהו אורך הגל של האלקטרון?

ב. רשמו את פונקציית הגל של האלקטרון.
אין צורך לנרמל את הפונקציה והניחו כי הפאזה היא אפס.

2) דוגמה – אלקטרון באמצע הקופסה

אלקטרון נמצא במצב היסוד בתוך קופסה קשיחה באורך l.
מצאו את ההסתברות שהאלקטרון נמצא במרחק $\frac{l}{8}$ ממרכז הקופסה (מימין או משמאל למרכז).

3) דוגמה – מיקום ממוצע ומסתבר במצב המעורער הראשון

מצאו את המיקום הממוצע והמיקום המסתבר ביותר עבור חלקיק הנמצא במצב המעורער הראשון בתוך קופסה קשיחה באורך: $2.00 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}$.

4) דוגמה – חיידק בקופסה

חיידק קטן בעל מסה של $10^{-13}\mathrm{kg}$ מוגבל לזוז בין שני קירות קשיחים במרחק $0.1\mathrm{mm}$ אחד מן השני.

א. האריכו את המהירות המינימאלית של החיידק.

ב. אם מהירות החיידק היא בערך $10^{-6}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$, מהו המספר הקוונטי של המצב בו נמצא החיידק?

5) דוגמה – חלקיק בבור סופי

חלקיק בעל מסה M נמצא בבור פוטנציאל הנתון לפי הפונקציה הבאה:

$$U(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq L \\ U_0 & L < x \end{cases}$$

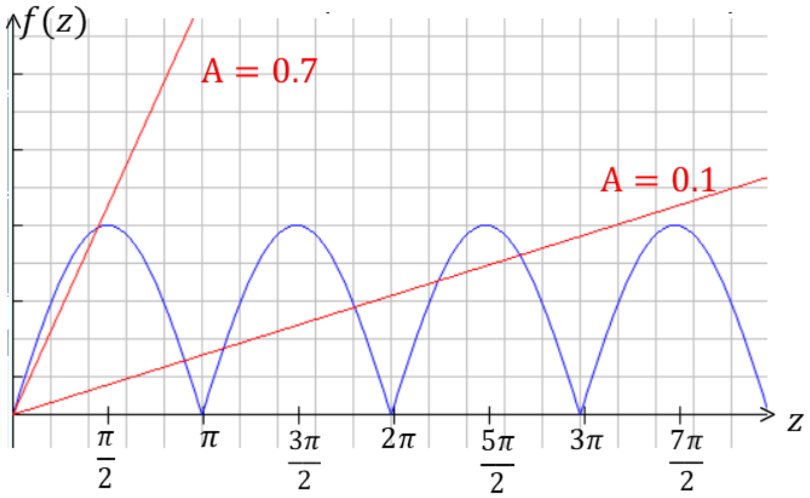
אנרגיית החלקיק E נתונה וקטנה מ-U_0.

א. מצאו את פונקציית הגל בכל המרחב ללא מציאת המקדמים הקבועים של הפונקציה בכל תחום.

ב. השתמשו בתנאי השפה (פונקציית הגל רציפה והנגזרת רציפה) בשביל למצא משוואה ממנה ניתן לחשב את הערכים האפשריים של האנרגיה.
הראו כי מתקיים הקשר:
$\tan(kL) = -\frac{k}{\alpha}$ כאשר $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ ו-$\alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}$.

ג. מצאו מהו תחום הערכים האפשריים של kL והראו כי:
$\frac{\hbar k}{\sqrt{2mU_0}} = |\sin(kL)|$.

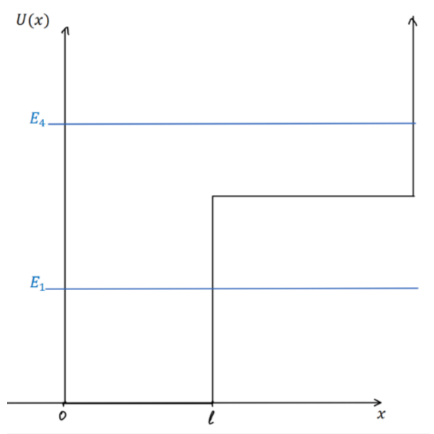
ד. כתבו את המשוואה של סעיף ג' באמצעות המשתנים: $z = kL$
ו- $A = \frac{\hbar}{L\sqrt{2mU_0}}$ כעת ניתן לפתור את הבעיה באמצעות פתרון גרפי.
הפתרונות הן נקודות החיתוך של הפונקציות משני צידי המשוואה.
סמנו את נקודות הפתרון בגרף הבא עבור: $A = 0.1$ ו- $A = 0.7$.
הקפידו על תחום ההגדרה של סעיף ג'.



ה. מהו התנאי על A עבורו אין פתרון למשוואה?
מה המשמעות הפיזיקאלית של מצב זה?

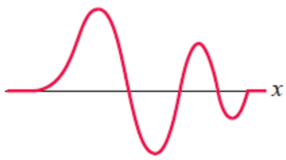
6) דוגמה – בור אינסופי עם מדרגה

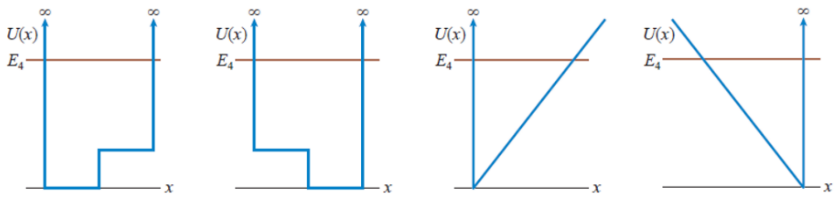
באיור נתונה פונקציית פוטנציאל של בור פוטנציאל אינסופי עם מדרגת פוטנציאל. ציירו את פונקציית הגל עבור האנרגיות E_1 ו-E_4 באיור.



7) דוגמה – התאימו פוטנציאל לפונקציית הגל

איזה מהגרפים הבאים מתאר את הפוטנציאל של פונקציית הגל הבאה:





(1) (2) (3) (4)

תשובות סופיות:

1) א. $6.38\cdot10^{-10}\text{m}$. ב. $\psi(x)=A\sin\left(9.84\cdot10^{-9}\text{m}^{-1}\cdot x\right)$.

2) 47.5%.

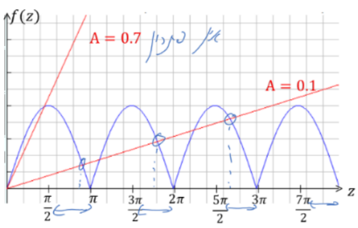
3) ממוצע: $\langle x\rangle=\frac{l}{2}$, מסתבר: $\frac{3l}{4}$, $\frac{l}{4}$.

4) א. $3\cdot10^{-17}\frac{\text{m}}{\text{sec}}$. ב. $3\cdot10^{-10}$.

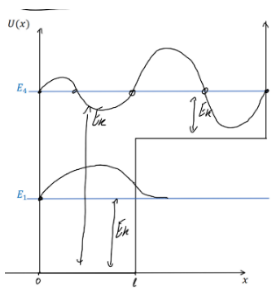
5) א. $\psi(x)=\begin{cases}Ae^{ikx}+Be^{-ikx} & x<0\\ Ce^{-\alpha x} & 0<x<L\end{cases}$ כאשר: $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ ו- $\alpha=\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$.

ב. הוכחה. ג. $n=0,1,2,\ldots$ $\frac{\pi}{2}+\pi n<KL<\pi+\pi n$.

ד. $|\sin(z)|=Az$. ה.



6)



7) 4.

מנהור (tunneling):

סיכום כללי:

מקדם ההעברה	$$T \approx 16\frac{E}{U_0}\left(1-\frac{E}{U_0}\right)e^{-2\alpha l}$$ $$\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$$	ההסתברות שהחלקיק יעבור את המחסום. l- אורך המחסום רק עבור $T << 1$
מקדם החזרה	$R = 1 - T$	

שאלות:

1) **דוגמה – אלקטרון חודר מחסום**

אלקטרון חופשי בעל אנרגיה של 40eV נע במרחב ונתקל במחסום פוטנציאל בעל אנרגיה של 60eV. מה ההסתברות שהאלקטרון יעבור את המחסום אם עובי המחסום הוא:

א. 1.0nm.

ב. 0.1nm.

2) **נתונים של אלקטרון חופשי**

פונקציית הגל של אלקטרון חופשי היא: $\psi(x) = A\sin\left(\pi \cdot 10^{10}x\right)$ כאשר x במטרים. מצאו את:

א. אורך הגל והתנע של האלקטרון.

ב. מהירות האלקטרון.

ג. אנרגיית האלקטרון.

3) **מהירות מינימלית בבור אינסופי**

מהי המהירות המינימלית של אלקטרון הנמצא בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב 0.30nm?

4) **אי ודאות במצב היסוד***

חלקיק נמצא במצב היסוד בתוך בור פוטנציאל אינסופי.
הראו כי יחס אי הודאות מתקיימים עבור מצב זה. עבור Δx ניתן לקחת את רוחב הבור (או יותר מדויק רוחב הבור חלקי 4π). התנע של החלקיק אמנם ידוע מתוך האנרגיה אבל הכיוון שלו אינו ידוע , התנע יכול להיות חיובי או שלישי ולכן אי הודאות בתנע היא $2p$.

5) **הסתברות למצא אלקטרון בבור**

אלקטרון נמצא בקופסה סגורה וקשיחה ברוחב 1.00nm.
מה ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק 0.10nm ממרכז הקופסה, מכל צד, עבור המצב:

א. $n = 1$.
ב. $n = 4$.
ג. $n = 20$.
ד. השוו למקרה הקלאסי.

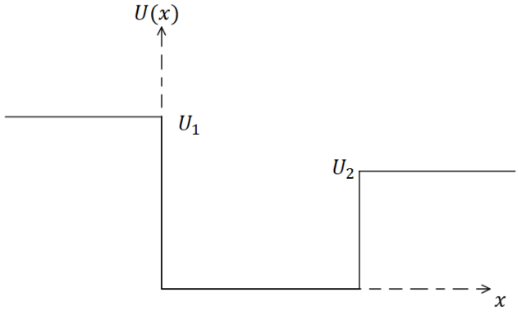
6) **בור אינסופי מוזז**

מצאו את פונקציות הגל עבור בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l הנמצא מ- $x = -\frac{l}{2}$ ועד $x = \frac{l}{2}$ (במקום מ-0 עד l). האם רמות האנרגיה משתנות?

7) **בור סופי עם קירות שונים**

חלקיק נמצא תחת הפוטנציאל הנתון באיור.
שרטטו את פונקציית הגל עבור שלושת המצבים הבאים :

א. החלקיק במצב המעורר הראשון ו- $E < U_2$.
ב. $U_2 < E < U_1$.
ג. $U_1 < E$.



8) זרם פרוטונים עובר מחסום

זרם של 1.2mA המכיל פרוטונים באנרגיה 1.8MeV נתקל במחסום פוטנציאל בגובה 2.0MeV וברוחב $5.0 \cdot 10^{-14}\mathrm{m}$. מהו הזרם המועבר?

תשובות סופיות:

1) א. $4.86 \cdot 10^{-18}\%$. ב. 3.67%.

2) א. $\lambda = 2 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$, $p = 3.3 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$. ג. $3.64 \cdot 10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$. ד. $38\mathrm{eV}$.

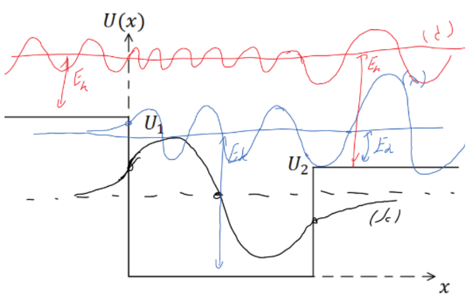
3) $1.2 \cdot 10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$.

4) הוכחה.

5) א. 0.387. ב. 0.153. ג. 0.2. ד. 0.2.

6) $\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n x}{l} + \frac{\pi n}{2}\right)$, לא משתנות.

7)



8) $96nA$.

אוסילטור הרמוני:

סיכום כללי:

פונקציות הגל:

$$\psi_1(x)=\left(\pi b^2\right)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_2(x)=\left(\pi b^2\right)^{-\frac{1}{4}}\frac{x}{b}e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_3(x)=8\sqrt{3}\left(\pi b^2\right)^{-\frac{1}{4}}\left(1-\frac{2x^2}{b^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$b=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

רמות האנרגיה: $E_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ כאשר $\cancel{n=1,2,3,...}$

(או $E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ כאשר $n=0,1,2...$)

פתרון כללי ל

שאלות:

1) דוגמה – אלקטרון בתנודה הרמונית פולט פוטון

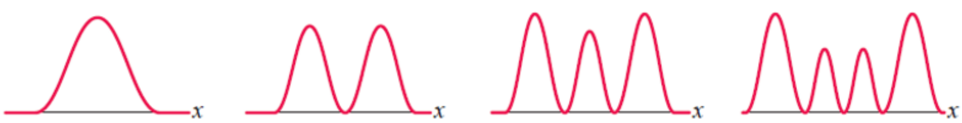
אלקטרון הנמצא באוסילטור הרמוני קוונטי פולט פוטון באורך גל של 400nm כאשר הוא יורד רמת אנרגיה אחת.

א. האם ניתן לדעת באיזה רמת אנרגיה היה האלקטרון?

ב. מהו "קבוע הקפיץ"?

2) דוגמה – איזה פונקציית הסתברות מתאימה

איזו פונקציית הסתברות מתאימה לחלקיק הנמצא תחת פוטנציאל של אוסילטור קוונטי עם אנרגיה: $E=\frac{7}{2}\hbar\omega$?



(1) (2) (3) (4)

תשובות סופיות:

1) א. לא. ב. $0.02\frac{N}{m}$.

2) .4

תרגילים נוספים:

שאלות:

1) **פונקציית חומר מול פונקציות גל אחרות**
השווה בין פונקציית הגל של החומר ψ לבין:
א. פונקציית הגל של מיתר.
ב. פונקציית גל של גל אלקטרומגנטי.

2) **מודל בוהר וקוונטים**
מה ההבדל בין המודל האטומי של בוהר למכניקת הקוונטים?
רמז: עיקרון אי הוודאות.

3) **האם אפשר לאזן מחט**
האם אפשר לאזן מחט כך שהיא תעמוד על החוד שלה באופן מוחלט?

4) **ניוטון וקוונטים**
באיזה אופן התורה של ניוטון שונה מתורת הקוונטים?

5) **מיקום מדויק**
האם עקרון אי הודאות מגביל את הדיוק שבו ניתן למדוד את המיקום של גוף?

6) **למי יש יותר סיכוי לעבור מחסום**
אטום מימן ואטום הליום בעלי אנרגיה זהה מתקרבים למחסום פוטנציאל ברוחב סופי עם אנרגיה פוטנציאלית גבוהה מהאנרגיה שלהם.
למי סיכוי גדול יותר לעבור את המחסום?

7) **חיים של בוזון Z^0**
בוזונים הם שם לקבוצת חלקיקים נשאי כוח (עם ספין שלם). הבוזון Z^0 קשור ל"כוח החלש" (כוח שפועל בתוך הגרעין) ודועך מאוד מהר. האנרגיה הממוצעת שלו היא 91.9GeV והרוחב במדידת האנרגיה הוא 2.5GeV.
מהו זמן החיים המוערך של הבוזון Z^0?

8) כדור מקפץ

כדור קטן במסה 10^{-6}kg משוחרר ממנוחה בגובה 2m מעל הרצפה. הכדור פוגע ברצפה וקופץ חזרה. לאחר כל פגיעה ברצפה הכדור מגיע חזרה ל-60% מהגובה הקודם בגלל איבוד אנרגיה בהתנגשות עם הרצפה. כמה פעמים צריך הכדור לפגוע ברצפה עד שאי הודאות במהירות שלו תהיה משמעותית (כלומר בסדר גודל של המהירות עצמה). הניחו שאי הודאות במדידת המיקום היא בסדר גודל של הגובה הנמדד.

9) פונקציית גל נתונה

נתונה פונקציית הגל הבאה: $\psi(x) = b^{-\frac{1}{2}}\left|\frac{x}{b}\right|^{\frac{1}{2}} e^{-\left(x/b\right)^2/2}$, כאשר $b = 0.5$nm.

א. בדקו כי פונקציית הגל מנורמלת.

ב. מהו המיקום המסתבר ביותר בו נמצא החלקיק בתחום $x > 0$?

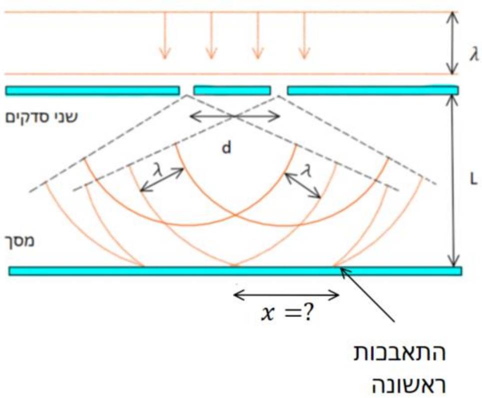
ג. מה ההסתברות למצא את החלקיק בין $x = 0$ ל-$x = 0.50$nm?

10) נויטרונים בניסוי שני סדקים

עורכים את ניסוי שני הסדקים עם נויטרונים בעלי אנרגיה של: 0.0040eV.

המרחק בין הסדקים הוא: $d = 0.70$mm והמרחק למסך הוא: $L = 1.0$m.

מהו המרחק מהמרכז בו תופיע ההתאבכות הראשונה? $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$kg.



תשובות סופיות:

1) א. חומר: פונקציה סקלרית, מתארת הסתברות וללא תווך.
מיתר: פונקציה סקלרית, מתארת תנודה, דרוש תווך.
ב. א"מ: פונקציה וקטורית, מתארת הסתברות ואת האמפליטודה של השדה החשמלי והמגנטי, ללא תווך.
2) ראו סרטון.
3) לא.
4) בתורה של ניוטון ניתן לחשב את המיקום והתנע באופן מדויק בו זמנית, כתוצאה מכך ניתן תיאורטית לצפות בדיוק את ההתנהגות של מערכת בעתיד. לפי תורת הקוונטים יש אי ודואות במדידות ולכן ניתן לצפות רק הסתברויות להתנהגות המערכת בעתיד.
5) לא.
6) מימן.
7) $1.3\cdot 10^{-25}\,\text{sec}$.
8) 70.
9) א. הוכחה. ב. 0.35nm. ג. 63%.
10) $6.5\cdot 10^{-7}\,\text{m}$.

מבוא לקוונטים

פרק 10 - תורת הקוונטים חלק 2

תוכן העניינים

מהירות הפאזה, יחס דיספרסיה ומהירות החבורה

סיכום כללי

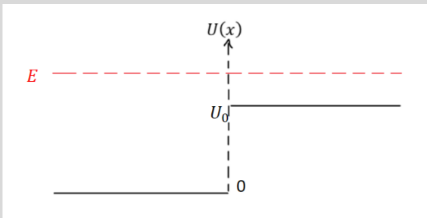
שם	נוסחה	הערות
מהירות הפאזה	$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$	המהירות של אורך גל מסוים
מהירות החבורה	$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$	מהירות של כל הפונקציה או סכום כל הגלים (חבילת הגלים)
יחס הדיספרסיה	הקשר בין ω ל-k	

פיזור

סיכום כללי

<table>
<tr><th>שם</th><th>נוסחה</th><th>הערות</th></tr>
<tr><td>מקדם ההעברה</td><td>$T=\frac{|C|^2}{|A|^2}$</td><td>ההסתברות שהחלקיק יעבור את המחסום

במקרה שבו k_2 בתחום אליו החלקיק עובר שונה מ-k_1 בתחום ממנו החלקיק הגיע

$T=\frac{|C|^2}{|A|^2}\frac{k_2}{k_1}$</td></tr>
<tr><td>מקדם החזרה</td><td>$R=\frac{|B|^2}{|A|^2}$</td><td>ההסתברות שהחלקיק יוחזר מהמחסום</td></tr>
<tr><td>עבור מדרגת פוטנציאל וכאשר
$E>U_0$
</td><td colspan="2">$T=\frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}\ ;\ R=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2$</td></tr>
</table>

- כאשר $E<U(\pm\infty)$ נקבל מצבים קשורים, החלקיק "כלוא" ורמות האנרגיה בדידות.
- כאשר $E>U(\pm\infty)$ נקבל פיזור, החלקיק יגיע לאינסוף ורמות האנרגיה רציפות.

שאלות

1) פיזור מפוטנציאל מלבני

חלקיק חופשי בעל מסה m נע משמאל לימין ונתקל בפוטנציאל מלבני בגובה U_0 וברוחב L המתחיל ב-$x = 0$. אנרגית החלקיק היא E וקטנה מ-U_0.

א. הראו כי הפתרון הכללי לפונקציית הגל הוא מצורה:

$$\psi(x) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{ikx} + B\mathrm{e}^{-ikx} & x < 0 \\ C\mathrm{e}^{\alpha x} + D\mathrm{e}^{-\alpha x} & 0 < x < L \\ F\mathrm{e}^{ikx} & L < x \end{cases}$$

כאשר: $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ ו- $\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$.

ב. רשמו את תנאי השפה והראו כי הקשר בין הקבועים נתון לפי המשוואות:

$$A + B = C + D$$
$$ik(A - B) = \alpha(C - d)$$
$$Ce^{\alpha L} + De^{-\alpha L} = Fe^{ikL}$$
$$\alpha\left(Ce^{\alpha L} - De^{-\alpha L}\right) = ikFe^{ikL}$$

ג. פתרו את המשוואות (רצוי באמצעות מחשב) והראו כי:

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{1}{\cosh^2(\alpha L) + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \sinh^2(\alpha L)}$$

כאשר: $\gamma = \frac{\alpha}{k} - \frac{k}{\alpha}$.

ד. הראו כי במקרה של $\mathrm{e}^{-\alpha L} \ll 1$ מקדם ההעברה הוא בקירוב:

$$T \approx 16\frac{E}{U_0}\left(1 - \frac{E}{U_0}\right)\mathrm{e}^{-2\alpha l}$$

ה. כעת הניחו ש-$E > U_0$, מצאו את מקדם ההעברה במקרה זה.
הדרכה: חזרו על השלבים שבסעיפים א - ג עבור מקרה זה.
רמז: $\cosh(ik) = \cos(k)$ ו- $\sinh(ik) = i\sin(k)$.

2) חלקיק עובר מעל בור פוטנציאל סופי

חלקיק בעל מסה m נע משמאל בהשפעת הפוטנציאל:
$$U(x) = \begin{cases} U_0 & x < 0 \\ 0 & 0 < x < L \\ U_0 & L < x \end{cases}$$

כאשר אנרגיית החלקיק E נתונה וגדולה מ- U_0.

א. מצאו את מקדם ההעברה.

ב. עבור אילו מצבים הבור "שקוף" לתנועת החלקיק?
האם המצבים מוכרים לכם?

3) מקדם החזרה בפגיעת אלקטרון בשפת מתכת

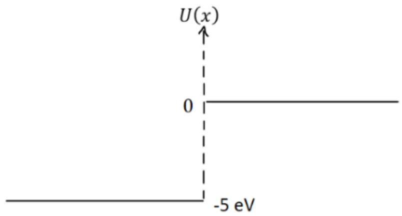
במקרה של פליטת אלקטרונים ממתכת, חלק מהאלקטרונים עם אנרגיה מספיקה ליציאה מהמתכת עדיין יכולים להיות מוחזרים משפת המתכת.

במודל חד מימדי נניח כי פוטנציאל האלקטרון בתוך המתכת $(x<0)$ שווה ל- $-5\,eV$ והפוטנציאל הוא אפס מחוץ למתכת $(x>0)$.

מהו מקדם ההחזרה של האלקטרון משפת המתכת אם אנרגיית האלקטרון היא

א. $90\,eV$

ב. $0.4\,eV$



תשובות סופיות

1) א-ד. שאלות הוכחה.
ה. $T=\left|\frac{F}{A}\right|^2=\frac{1}{\cos^2(k_2L)+\left(\frac{\tilde{\gamma}}{2}\right)^2\sin^2(k_2L)}$

כאשר: $\tilde{\gamma}=\frac{k_z}{k}+\frac{k}{k_2}$ ו- $k_2=\frac{\sqrt{2m(E-v_0)}}{\hbar}$.

2) א. $T=\frac{1}{\cos^2(k_2L)+\left(\frac{\tilde{\gamma}}{2}\right)^2\sin^2(k_2L)}$ כאשר: $\tilde{\gamma}=\frac{k_1}{k_2}+\frac{k_2}{k_1}$ ו- $k_2=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

ב. $n=1,2,3,\ldots$, $E_n=\frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2mL^2}$, כן.

3) א. $1.83\cdot10^{-4}$ ב. 0.328

פונקציית דלתא של דיראק

סיכום כללי

הגדרת הפונקציה:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

או

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

או

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/a^2}$$

כאשר a הולך לאפס.

תכונה:

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a)$$

פיזור מפונקציית דלתא:

עבור:

$$V(x) = -a\delta(x)$$

כאשר $E < 0$:

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{am}}{\hbar} \mathrm{e}^{-\frac{am}{\hbar^2}|x|}$$

$$\mathrm{E} = -\frac{a^2 m}{2\hbar^2}$$

מקבלים מצב אחד בלבד, לא משנה מה הערך של a (גודל הבור).

כאשר $E > 0$ וחלקיק שמגיע משמאל:

$$\psi(x)=\begin{cases}Ae^{ikx}+Be^{-ikx} & x<0\\ Ce^{ikx} & x>0\end{cases}$$

$$k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$R=\left|\frac{B}{A}\right|^2=\frac{\beta^2}{1+\beta^2}$$

$$T=\left|\frac{C}{A}\right|^2=\frac{1}{1+\beta^2} \qquad \beta=\frac{am}{\hbar^2 k}$$

עבור:

$$V(x)=+a\delta(x)$$

E חייב להיות גדול מאפס והפתרון זהה לפתרון במקרה של הפוטנציאל השלילי כאשר $E>0$.

שאלות

1) פוטנציאל דלתא בתוך בור אינסופי**

אלקטרון נמצא בבור פוטנציאל ברמה השנייה. הבור הוא אינסופי אך במרכזו יש פוטנציאל דלתא, כלומר:

$$V(x)=\infty,|x|>\frac{l}{2}$$
$$V(x)=a\delta(x),\ |x|<l/2$$

א. מצאו את הפתרונות עבור משוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן. הפרידו בין הפתרונות הסימטריים לאנטי סימטריים ומצאו את האנרגיות המתאימות לכל פתרון. עבור הפתרונות הסימטריים הראו רק כי המשוואה ממנה ניתן לקבל את רמות האנרגיה היא מהצורה: $\tan\left(k\frac{l}{2}\right)=-\frac{\hbar^2 k}{am}$ וציירו פתרון גרפי כללי למשוואה. בשני המקרים אין צורך לנרמל את הפתרונות.

ב. דונו במקרה ש- $a\ll\frac{\hbar^2}{ml}$ ובמקרה ש- $a\gg\frac{\hbar^2}{ml}$.

ג. האלקטרון יורד לרמת היסוד ופולט פוטון, מהי האנרגיה של הפוטון הנפלט ב-eV אם: $a=2\cdot 10^{-27}j\cdot m$ ו- $l=2.7nm$.

2) קרן אלקטרונים עוברת שתי דלתות

קרן אלקטרונים מפוזרת על ידי מחסום פוטנציאל המורכב שתי פונקציות דלתא זהות במרחק l. כלומר: $V(x) = a\delta(x) + a\delta(x-l)$.

חשבו בקירוב את האנרגיה הכי נמוכה של אלקטרון עבורה אין החזרה של הקרן (כל האלקטרונים עוברים דרך המחסום).

$a = 1.9 \cdot 10^{-27} j \cdot m, l = 4.2nm$

3) קרן עוברת דרך שתי דלתות ומדרגה

קרן אלקטרונים מגיעה משמאל לפוטנציאל הבא:

$$V(x) = U(x) + a\delta(x) + a\delta(x-l)$$

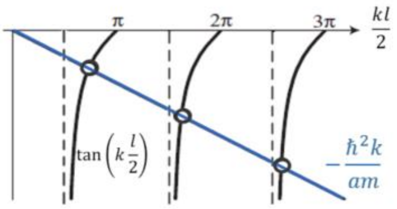
$$U(x) = \begin{cases} U_0 & 0 < x < l \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצאו את רמת האנרגיה הרביעית עבורה אין החזרה של הקרן, יש להשתמש בפתרון גרפי ולבטא ב-eV.

נתון: $a = 0.63 \cdot 10^{-28} j \cdot m\ ,\ U_0 = 4.7eV,\ l = 0.2nm$

תשובות סופיות

1) א. פתרון גרפי למצבים הסימטריים:



האנרגיות של המצבים האנטי סימטריים: $n = 2, 4, 6, \ldots$ $\quad E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$.

ב. האנרגיות של הפונקציות האנטי סימטריות לא מושפעות מ-a עבור $a \ll \frac{\hbar^2}{ml}$ האנרגיות של הפונקציות הסימטריות שואפות לאנרגיות שלהם בבור אינסופי (ללא דלתא). עבור $a \gg \frac{\hbar^2}{ml}$ האנרגיות של הפונקציות הסימטריות שואפות לאנרגיות של בור אינסופי **ברוחב** $\frac{l}{2}$.

ג. $0.3eV$

2) $0.02eV$

3) $125eV$

פוטנציאלים תלת מימדים

סיכום כללי

פונקציית הגל והאנרגיות של תיבה תלת מימדית:

$$\psi(x,y,z)=\sqrt{\frac{8}{abc}}\sin\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n_z\pi}{c}z\right)$$

$$E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}+\frac{n_z^2}{c^2}\right)$$

אוסילטור הרמוני תלת מימדי:

$$v(x,y,z)=\frac{1}{2}k_yx^2+\frac{1}{2}k_yy^2+\frac{1}{2}k_zz^2$$

האנרגיה של אוסילטור תלת מימדי:

$$E=\left(n_x-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_x+\left(n_y-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_y+\left(n_z-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_z$$

ניוון - כאשר לכמה מצבים (פונקציות גל) שונים יש את אותה האנרגיה. אי אפשר לדעת את המצב של החלקיק מהאנרגיה בלבד.

ניוון היא תופעה שלא מתרחשת במימד אחד

דרגת הניוון מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש לאנרגיה.

שאלות

1) אוסילטור ב-Z בור ב-X ו-Y

חלקיק בעל מסה m נמצא תחת הפוטנציאל הבא:

$$V(x,y,z)=V_1(x)+V_2(y)+V_3(z)$$

כאשר:

$$V_1(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \ , + V_2(y)=\begin{cases}0, & 0<y<a\\ \infty, & otherwise\end{cases} \ , V_3(Z)=\begin{cases}0, & 0<z<b\\ \infty, & otherwise\end{cases}$$

כמו כן נתון כי:

$$\hbar\omega=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

$$b=2a$$

א. מהי האנרגיה של הרמה המעוררת החמישית?
ב. מהי דרגת הניוון של רמה זו?
ג. מהי פונקציית הגל של חלקיק שנמצא ברמת אנרגיה זו?

תשובות סופיות

1) א. $E=2.75\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ רמה 5. ב. 2

ג. $\psi(x,y,z)=\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)e^{-\frac{z^2\pi^2\hbar}{4L^2}}\left[\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2L}y\right)\left(1-\left(\frac{\pi z}{L}\right)^2\right)+\beta\sin\left(\frac{3\pi}{2L}y\right)\right]$

פונקציית הגל כתלות בזמן

סיכום כללי

ניתן לקבל את פונקציית הגל הכללית, הפותרת את משוואת שרדינגר התלויה בזמן על ידי קומבינציה לינארית של פונקציות הגל המתקבלות במצבים עמידים (מתוך פתרון משוואת שרדינגר הבלתי תלוי בזמן).

$$\Psi(x,t)=\sum_n \alpha_n \psi_n(x) \mathrm{e}^{-\frac{iE_n}{\hbar}t}$$

כאשר - הן פתרונות המצבים העמידים ו - היא האנרגיה של כל מצב.

את המקדמים ניתן למצוא לפי (בהנחה שהפונקציות שמתקבלות מהמצב העמיד הן אורתונורמליות).

$$\alpha_n=\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\Psi(x,0)\,\mathrm{d}x$$

ו - $|\alpha_n|^2$ הן ההסתברות להיות במצב מסוים.

יוצא גם שאם $\Psi(x,0)$ מנורמלת אז $\Psi(x,t)$ מנורמלת לכל t.

שאלות

1) רשמו פונקציית גל

חלקיק בעל מסה m נמצא תחת פוטנציאל מהצורה $\frac{1}{2}kx^2$.

ב- $t=0$ לחלקיק הסתברות של 75% להיות במצב יסוד ו- 25% להיות במצב המעורר הראשון. רשמו את פונקציית הגל של החלקיק כתלות בזמן.

פונקציות הגל של מצב היסוד והמצב המעורר הראשון הן:

$$\psi_1(x)=\left(\pi b^2\right)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_2(x)=\left(\pi b^2\right)^{-\frac{1}{4}}\frac{x}{b}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

כאשר $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, $b=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

והאנרגיות הן:

$$E_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n=1,2,3\ldots$$

2) מסת חלקיק מפונקציית הגל

נתונה פונקציית גל (חד מימדית) של חלקיק חופשי

$$\Psi(x,t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{x}{L}-\frac{t}{\tau}\right)}$$

כאשר A L , ,τ קבועים חיוביים נתונים.

מהי מסת החלקיק?

תשובות סופיות

1) $$\psi(x,t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\psi_1(x)e^{-i\frac{1}{2}\omega t}+\frac{1}{2}\psi_2(x)e^{-i\frac{3}{2}\omega t}$$

2) $$m=\frac{\hbar\tau}{2L^2}$$

אופרטורים

סיכום כללי

אופרטור - לכל גודל פיזיקאלי ניתן לשייך אופרטור.
כאשר שמים את האופרטור בין Ψ ל-Ψ^* ועושים אינטגרל על כל המרחב (סנוויץ) הוא נותן את ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי אליו הוא שייך.

$$\langle Q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{Q} \Psi \, \mathrm{d}x$$

אופרטור המיקום: $\hat{\mathrm{x}} = x$

אופרטור התנע במימד אחד: $\hat{p} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x}$

כל אופרטור אחר יהיה פונקציה של אופרטור המיקום והתנע:

$$Q(x,p,t) \to \hat{Q}\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} t\right)$$

כאשר מכפילים אופרטור בפונקציה אומרים שהאופרטור "פועל" על הפונקציה.
אם $\hat{Q}\psi = \lambda\psi$, אז ψ היא פונקציה עצמית של האופרטור ו-λ הוא ערך עצמי (ע"ע) של האופרטור.
הפונקציות העצמיות של אופרטור התנע הן: $\psi(x) = Ae^{ikx}$ והערכים העצמיים הם: $\hbar k$.

הפונקציות העצמיות של אופרטור המיקום הן: $\delta(x-a)$
והערכים העצמיים הם a (המיקום עצמו).

אופרטור ההמילטוניאן (מודד את האנרגיה):

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

אפשר לכתוב את משוואת שרידנגר הבלתי תלויה בזמן באמצעות ההמילטוניאן.
הפונקציות העצמיות של ההמלטוניאן הן הפתרונות של משוואת שרדינגר <u>הבלתי תלויה בזמן</u> והאנרגיות הן הערכים העצמיים של ההמילטוניאן.

שאלות

1) המילטוניאן ומדידת אנרגיה בבור פוטנציאל

חלקיק בעל מסה m נמצא בבור פוטנציאל ברוחב $0 < x < l$.

א. מצאו את המצבים העצמיים ואת הערכים העצמיים של ההמלטוניאן.

כעת נניח כי פונקציית הגל של החלקיק ברגע מסוים היא:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_2(x)$$

כאשר $\psi_1(x)$ ו-$\psi_2(x)$ הן פונקציות הגל של האנרגיות E_1 ו-E_2 בבור בהתאמה.

ב. האם פונקציה זו היא פונקציה עצמית של ההמילטוניאן?

ג. מהי האנרגיה הממוצעת של החלקיק במצב הנ"ל?
האם ניתן למצא את החלקיק באנרגיה זו?

2) חלקיק בצד ימין של בור פוטנציאל

חלקיק בעל מסה m נמצא בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב l.

נתון כי בזמן $t = 0$ לחלקיק הסתברות שווה להיות בחצי הימני של הבור.

א. מהי פונקציית הגל של החלקיק ב-$t = 0$?

ב. מצאו את פונקציית הגל של החלקיק כתלות בזמן.
שערו ללא חישוב האם החלקיק יישאר בחצי הימני של הבור?

ג. מהי ההסתברות שהחלקיק יהיה במצב היסוד ב-$t = 2sec$?

ד. ב- $t = 3\ sec$ נעשתה מדידה והתגלה שהחלקיק אכן במצב היסוד.
מהי פונקציית הגל של החלקיק מרגע זה והילך, ניתן לקבוע רגע זה כ-$t = 0$ חדש.

ה. מהו ערך התוחלת של התנע של החלקיק מסעיף ד'?

3) מוסיפים פאזות למקדמים

חלקיק נמצא בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב l.

א. מצאו את ההסתברות כתלות בזמן של החלקיק להיות בחצי השמאלי של הבור אם ידוע שהוא נמצא במצב עמיד כלשהו (או מצב עצמי של ההמילטוניאן).

כעת נתון שפונקציית הגל של החלקיק היא:

$$\Psi(x,t) = c_1\psi_1(x)e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} + c_2\psi_2(x)e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}$$

כאשר $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ψ_1 ו-ψ_2 הן פונקציות הגל של מצב היסוד והמצב המעורר הראשון בבור, E_1 ו-E_2 הן האנרגיות של אותם מצבים.

ב. הראו כי $\Psi(x,t)$ מנורמלת.

ג. מהי ההסתברות למצא את החלקיק בחצי השמאלי של הבור כתלות בזמן?

ד. חזרו על סעיף ג כאשר $c_1 = \frac{e^{i\varphi_1}}{\sqrt{2}}$, $c_2 = \frac{e^{i\varphi_2}}{\sqrt{2}}$.

4) אופרטור האנרגיה הקינטית

אופרטור האנרגיה הקינטית הוא:

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

הראו כי הפונקציות העצמיות של אופרטור התנע $\phi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ikx}$ הן גם פונקציות עצמיות של אופרטור האנרגיה הקינטית ומצאו את הערכים העצמיים של אופרטור זה.

תשובות סופיות

1) א. $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$, $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$ ב. לא. ג. לא, $\langle E\rangle = \frac{\pi^2\hbar^2}{ml^2}$

2) א. $\psi(x,t=0) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < \frac{l}{2} \\ \sqrt{\frac{2}{l}} & \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$ ב. $\psi(x,t) = \sum \alpha_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$

$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$

$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$

$\alpha_n = \frac{2}{\pi n}\left[\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - (-1)^n\right]$, לא יישאר.

ג. $\left(\frac{2}{\pi}\right)^2$ ד. $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}$, $\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$. ה. אפס.

3) א. 0.5 ב. הוכחה. ג. $\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right)\frac{4}{3\pi}$

ד. $P\left(0 \le x \le \frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi}\cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t - \Delta\varphi\right)$, $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

4) $\lambda = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

אופרטורים הרמיטיים

סיכום כללי

גודל פיזיקאלי מדיד חייב להיות מספר ממשי .
כל הגדלים הפיזיקאלי מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים.

הגדרה :

$$\left(\hat{A}\Psi\right)^{*}=\Psi^{*}\hat{A}$$

לכל הפונקציות במרחב.

או :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1^{*}\hat{A}\Psi_2\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\hat{A}\Psi_1\right)^{*}\Psi_2\,\mathrm{d}x$$

תכונות של אופרטור הרמיטי :

1. ערך התוחלת של אופרטור הרמטי תמיד ממשי.
2. הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.
3. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמטי הן אורתוגונליות.
4. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.*

* אם ניתן לתאר את <u>כל</u> הפונקציות במרחב באמצעות קומבינציה לינארית של סט מסוים של פונקציות אז אותו סט נקרא סט שלם.

הפירוש הסטטיסטי המוכלל והסבר מסכם על צורת העבודה בתורת הקוונטים

סיכום כללי

הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם של פונקציות (או בסיס).
אפשר לכתוב כל פונקציית גל כקומבינציה לינארית של הבסיס העצמי של כל אופרטור.

כלומר, אם ϕ_n ו- λ_n הן הפונקציות העצמיות והערכים העצמיים של האופרטור $\hat{A}$

אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה: $\omega(x,t)=\sum\alpha_n\phi_n$.

$|\alpha_n|^2$ זה ההסתברות להיות במצב ϕ_n או ההסתברות למדוד את הערך λ_n.

הערכים המדידים היחידים של גודל מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו גודל.

בשביל למצא את α_n:

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^* \Psi(x,t)\,\mathrm{d}x$$

במקרה הרציף:

$$\lambda_n = \lambda(k)$$
$$\phi_n \to \phi(k)$$

$$\sum \alpha_n\phi_n \to \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\,(k,\mathrm{t})\phi(k)\,\mathrm{d}k$$

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\,(k,\mathrm{t})\phi(k)\,\mathrm{d}k$$

$$|\alpha_n|^2 \to\ |\alpha(k,t)|^2\,\mathrm{d}k$$

שאלות

1) פונקציה משולשת

נתון חלקיק בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב L. כזכור, המצבים העצמיים עבור בור שכזה נתונים ע"י הפונקציות: $\phi_n=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ והאנרגיות העצמיות הן: $E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2$. נתון שפונקציית הגל ההתחלתית בה הוכנה המערכת היא פונקציה משולשת מהצורה:

$$\psi(x,0)=\begin{cases}\frac{A}{L}x & \text{for} \quad 0<x<\frac{L}{2}\\ A(1-\frac{x}{L}) & \text{for} \quad \frac{L}{2}<x<L\end{cases}$$

א. מצאו\י את A.

ב. מהי ההסתברות שבמדידת אנרגיית החלקיק ימדדו הערכים: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5?

ג. חשבו\י את ערך התוחלת של אנרגיית החלקיק $\langle E\rangle$.

ייתכן ותזדקקו\י לטור הבא: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

2) פונקציית גאוסייאן ומעבר לתדר

פונקציית הגל (מנורמלת) של חלקיק חופשי ב-$t=0$ נתונה לפי:

$$\Psi(x,t=0)=\left(2\pi a^2\right)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2}}$$

א. מצאו את פונקציית הגל של החלקיק במרחב התדר: $\Psi(k,t=0)$.

ב. מצאו את אי הודאות של מספר הגל של החלקיק Δk.

השתמשו ב:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2-bx-c}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx=0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$$

תשובות סופיות

1) א. $A=\sqrt{\frac{12}{11L}}$

ב. $P(E_1)=0.09$, $P(E_3)=1.1\cdot10^{-3}$, $P(E_5)=1.4\cdot10^{-4}$, $P(E_2)=P(E_4)=0$

ג. $\langle E\rangle=\frac{6\hbar^2}{11mL^2}$

2) א. $\sqrt{2}\left(2\pi\varphi^2\right)^{\frac{1}{4}}e^{-ikx_0}e^{-a^2k^2}$ ב. $\sqrt{\frac{\pi}{2a^2}}$

יחס החילוף

סיכום כללי

יחס החילוף (או הקומוטטור) מוגדר להיות:

$$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$$

יחס החילוף הוא אופרטור בפני עצמו.
אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס החילוף שלהם שווה לאפס ואם הסדר כן משנה אז הפעלה של יחס החילוף תיתן ערך מורכב כלשהו
לאופרטורים שיחס החילוף שלהם מתאפס אנחנו קוראים חילופיים.
יחס החילוף של המיקום עם התנע:

$$\langle[\hat{x},\hat{p}_x]\rangle=i\hbar$$

אם האופרטורים $\hat{A}$ ו-$\hat{B}$ מתחלפים אז קיים סט של פונקציות עצמיות משותפות לשניהם ולהפך (אם הם לא מתחלפים אז לא ניתן למצא סט של פונקציות עצמיות משותפות).
אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם בו זמנית בדיוק אינסופי.
אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות
ביניהם לפי:

$$\Delta A\Delta B\geq\frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|$$

שאלות

1) פירוק יחס חילוף מורכב

א. הראו כי: $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$

ב. הראו כי: $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}$

ג. מצאו את $[\hat{x},\hat{p}^2]$ ובדקו האם אופרטור המיקום מתחלף עם ההמילטוניאן של חלקיק חופשי במימד אחד.

2) הוכחת זהות

הוכיחו כי: $[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}]=[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{B},\hat{C}]$.

תשובות סופיות

1) א-ב. הוכחה. ג. $2i\hbar\hat{P}$, לא מתחלף.

2) הוכחה.

משפט ארנפס

סיכום כללי

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Q\rangle=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{Q}]\rangle+\left\langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\right\rangle$$

אם אופרטור מתחלף עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי קבוע בזמן.

שאלות

1) הקשרים הקלאסיים

א. הראו באמצעות משפט ארנפסט כי: $\langle p\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle$.

ב. הראו כי: $[\hat{p},U(\hat{x})]=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial U}{\partial x}$.

ג. הראו באמצעות משפט ארנפסט כי: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p\rangle=-\left\langle\frac{\partial U}{\partial x}\right\rangle$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.

תרגילים נוספים

שאלות

1) התפתחות בזמן בבור אינסופי

נתון חלקיק בעל מסה m אשר כלוא בבור פוטנציאל אינסופי חד-מימדי בעל אורך L אשר מרכזו ב-$x=\frac{L}{2}$. פונקציית הגל של החלקיק ברגע $t=0$ הינה סופרפוזיציה של שני מצבים עצמיים של בור פוטנציאל אינסופי:

$\psi(x,t=0)=A[\phi_1(x)+\phi_2(x)]$.

כאשר ϕ_1 הוא מצב היסוד (בעל אנרגיה E_1) ו-ϕ_2 הוא המצב המעורר הראשון (בעל אנרגיה E_2).

שני המצבים בעלי הסתברות זהה.

א. מצאו את הנרמול של פונקציית הגל.

ב. מצאו את $\psi(x,t)$. ודאו כי $\psi(x,t)$ מקיימת את משוואת שרדינגר.

ג. מצאו את $|\psi(x,t)|^2$, בטאו את פונקציית צפיפות ההסתברות כפונקציה סינוסיאדלית בזמן.

ד. חשבו את ערך התצפית של המקום. שימו לב כי ערך התצפית עושה אוסילציות בזמן. מהי תדירות האוסילציות?

ה. חשבו את ערך התצפית של התנע לפי הגדרה. הראו כי מתקיים:

$\left(\langle p\rangle=m\frac{d}{dt}(\langle x\rangle)\right)$.

ו. חשבו את ערך התצפית של האנרגיה של החלקיק לפי הגדרה. הסבירו את תשובתכם.

ז. הניחו כי אי הוודאות באנרגיה היא: $\Delta E=(E_2-E_1)$ והשתמשו בעיקרון אי הוודאות של הייזנברג על מנת למצוא את Δt.
השוו לזמן המחזור של האוסילציות שמצאתם בסעיף ד' והסבירו.

תשובות סופיות

1) א. $A=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ב. $\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}+\phi_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\right)$

ג. $|\psi(x,t)|^2=\frac{1}{2}\left(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2+2\phi_1+\phi_2\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right)\right)$

ד. $\langle x\rangle: \frac{L}{2}-\frac{16}{9}\frac{L}{\pi^2}\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right)$

$\omega=\frac{E_2-E_1}{\hbar}=2\pi F$

ה. $\langle P\rangle=\frac{8\hbar}{3L}\sin\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right)$

ו. $\langle E\rangle=\frac{1}{2}E_1+\frac{1}{2}E_2$, חישוב התוחלת של האנרגיה הוא ההסתברות להיות בכל מצב עצמי של האנרגיה כפול האנרגיה של המצב.

ז. $\Delta t\simeq\frac{\hbar}{2(E_2-E_1)}$

זרם ההסתברות:

$$\vec{\jmath} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$$

- מתאפס כשפונקציות גל ממשית
- קבוע עבור מצבים יציבים

מבוא לקוונטים

פרק 11 - המודל הקוונטי לאטום המימן ספין והטבלה המחזורית

תוכן העניינים

פתרון עבור אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי:

סיכום כללי:

משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב-r:

משוואה ל-$\theta(\theta)$:

$$\frac{1}{\theta(\theta)}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\theta(\theta)}{\partial\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=m^2$$

משוואה ל-$\phi(\varphi)$:

$$\frac{\partial^2\phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=-m^2\phi(\varphi)$$

פתרון לחלק הזוויתי:

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=\theta(\theta)\phi(\varphi)=\varepsilon\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

$$\varepsilon=\begin{cases}(-1)^m & m>0\\ 1 & m\geq 0\end{cases}$$

$l\geq 0$ ו- $|m|\leq l$ שלם.

$$P_l^m(x)\equiv(1-x^2)^{|m|/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|}P_l(x)$$

$$P_l(x)\equiv\frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l(x^2-1)^l$$

$$Y_0^0=\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\qquad Y_2^{\pm2}=\left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}sin^2\theta\, e^{\pm2i\phi}$$

$$Y_1^0=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta\qquad Y_3^0=\left(\frac{7}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(5\,cos^3\theta-3\,cos\,\theta)$$

$$Y_1^{\pm1}=\mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta e^{\pm i\phi}\qquad Y_3^{\pm1}$$

$$=\mp\left(\frac{21}{64\pi}\right)^{\frac{1}{2}}sin\,\theta\,(5\,cos^2\theta-1)e^{\pm i\phi}$$

$$Y_2^0=\left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(3\cos^2\theta-1)\qquad Y_3^{\pm2}=\left(\frac{105}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}sin^2\theta\,cos\,\theta\,e^{\pm2i\phi}$$

$$Y_2^{\pm 1} = \mp\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \cos\theta \, e^{\pm i\phi} \qquad Y_3^{\pm 3} = \mp\left(\frac{35}{64\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^3\theta \, e^{\pm 3i\phi}$$

$$P_1^1 = \sin\theta \qquad P_3^3 = 15\sin\theta\,(1-\cos^2\theta)$$

$$P_1^0 = \cos\theta \qquad P_3^2 = 15\sin^2\theta\cos\theta$$

$$P_2^2 = 3\sin^2\theta \qquad P_3^1 = \frac{3}{2}\sin\theta\,(5\cos^2\theta - 1)$$

$$P_2^1 = 3\sin\theta\cos\theta \qquad P_3^0 = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$P_2^0 = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

אורתוגונליות:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [Y_l^m(\theta,\varphi)]^* \left[Y_{l'}^{m'}(\theta,\varphi)\right] \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

המשוואה לחלק הרדיאלי:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}(V(r)-E) = l(l+1)$$

$$R(r) = \frac{u(r)}{r}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u(r) = Eu(r)$$

פתרון עבור אטום המימן:

מתוך פתרון המשוואה תנאי שמקוונטט את האנרגיה:

$$E_n = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}$$

$$E_1 = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} = -13.6 \text{ eV}$$

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

הפתרון לפונקציה תלוי בקבועים n ו-l:

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n-l)!]^3}}\, e^{-\frac{r}{na}}\left(\frac{2r}{na}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right)$$

רדיוס בוהר:

$$a=\frac{\hbar^2}{kme^2}=0.529\cdot 10^{-10}m$$

$$L_{q-p}^{p}(x)\equiv(-1)^p\left(\frac{d}{dx}\right)^p L_q(x)$$
$$L_q(x)\equiv e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^q(e^{-x}x^q)$$

$$R_{10}=2a^{-\frac{3}{2}}exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$
$$R_{20}=\frac{1}{\sqrt{2}}a^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$
$$R_{21}=\frac{1}{\sqrt{24}}a^{-\frac{3}{2}}\frac{r}{a}exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$
$$R_{30}=\frac{2}{\sqrt{27}}a^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{2}{3}\frac{r}{a}+\frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$
$$R_{31}=\frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$
$$R_{32}=\frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{r}{a}\right)exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$
$$R_{40}=\frac{1}{4}a^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{3}{4}\frac{r}{a}+\frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2-\frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$
$$R_{41}=\frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{4}\frac{r}{a}+\frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\frac{r}{a}exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$
$$R_{42}=\frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2 exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$
$$R_{43}=\frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{r}{a}\right)^3 exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

פתרון כללי:

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)=R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$
$$n=1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

l שלם ומקיים: $0\le l\le n-1$

m שלם ומקיים: $-l\le m\le l$

אורתוגונליות:

$$\int \psi^*_{nlm}\psi_{n'l'm'}\, r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\phi = \delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק r מהגרעין):

$$P_{nl}(r) = |R_{nl}|^2 r^2$$

תנע זוויתי:

התנע הזוויתי הוא: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \left(L_x, L_y, L_z\right)$

נגדיר אופרטורים: $\widehat{L^2}, \widehat{L_z}, \widehat{L_x}, \widehat{L_y}$

$$\widehat{L^2}Y_l^m = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m$$

$$|L| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

גודל התנ"ז יכול להיות גם אפס וזה בניגוד למודל של בוהר.

את הכיוון נתאר באמצעות הגודל של L_z, משם אפשר למצא את $\cos\theta = \frac{L_z}{|L|}$

$$\hat{L}_z Y_l^m = m\hbar Y_l^m$$

גם הכיוון של וקטור התנע הזוויתי מקוונטט!

רמות אנרגיה ניוון וספקטרום הפליטה:

צפיפות המצבים: $g(n) = 2n^2$ (ה-2 מגיע מהספין).

כללי מעבר (Selection Rules):

1. $n_i > n_f$
2. $\Delta l = l_f - l_i = \pm 1$
3. $\Delta m = m_f - m_i = 0, \pm 1$

שאלות:

1) הסתברות להיות רחוק מרדיוס בוהר

א. חשבו את ההסתברות של אלקטרון במצב היסוד באטום מימן, להימצא במרחק שגדול מרדיוס בוהר מהגרעין.

ב. מצאו את הרדיוס הממוצע בו נמצא האלקטרון במצב היסוד.

2) כוח ממוצע

פונקציית הגל של המצב: $n=2\,,l=1\,,m=0$ היא: $\psi_{210}=\frac{\mathrm{r}\cdot cos\theta}{\sqrt{32\pi a^5}}\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a}}$.

מצאו את גודל הכוח החשמלי הממוצע שפועל על האלקטרון.

נוסחאות עזר:

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\,dx=\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

$$\int_0^\pi \boldsymbol{cos}^2\theta\,\boldsymbol{sin}\,\theta\,d\theta=\frac{2}{3}$$

$$\int_0^\pi sin^5\quad\theta d\theta=\frac{16}{15}$$

3) הראו כי התנ"ז לא בכיוון Z

הראו שהתנע הזוויתי המסלולי של האלקטרון באטום המימן לא יכול להיות מקביל לציר Z.

4) גז מעורר

נתון גז של אטומי מימן שבכל אחד מהם האלקטרון נמצא ברמה התחלתית $(n=4,l=3)$.

נתון שאין אינטראקציה בין האטומים, טמפרטורת הגז נשארת קבועה כל הזמן ולא קיים שדה מגנטי חיצוני.

כמה קווי פליטה שונים (אורכי גל שונים) נראה בספקטרום הפליטה של הגז (ספקטרום הפליטה מתקבל כאשר האלקטרונים יורדים לרמות נמוכות יותר)?

רשמו את מצבי האנרגיה הנמוכים ביותר שבהם יכולים להימצא האלקטרונים לאחר זמן רב (השתמשו במספרים הקוונטים (n,l) כדי לאפיין את מצבי האנרגיה).

5) צבר אטומי מימן במצב 2 בשטרן גרלך

צבר אטומי מימן נמצא במצב $n=2$ (ועם תנע זוויתי כלשהו).

בכל סעיפי השאלה יש להתחשב גם בספין.

א. כמה כתמים יהיו על המסך עבור הצבר בניסוי שטרן גרלך?

ב. ציינו איזה מצב קוונטי גרם לכל כתם על המסך.

אורך המגנט בניסוי הוא L והמרחק מסוף המגנט ועד המסך הוא $10L$.
השדה המגנטי הוא $B(z) = B_0\frac{z}{L}$ ומהירות האטומים היא v.

ג. מה יהיה המרחק בין שני הכתמים הנוצרים מהמצבים בהם האלקטרון נמצא ברמה $2s$?

ד. כמה רמות אנרגיה שונות קיימות לצבר (תחת שדה מגנטי)? כמה אורכי גל שונים יכולים להיפלט מהצבר?

תשובות סופיות:

1) א. 0.677   ב. $1.5a$

2) $\frac{ke^2}{12a^3}$

3) הוכחה.

4) 5 קווים, $1s$ ו-$2s$.

5) א. ישנם 5 אופציות שונות למומנט המגנטי ולכן נקבל 5 כתמים.
ב. הכתם הכי נמוך שייך ל-$m+2ms=2$- וככל שהערך יורד הכתם יהיה יותר גבוה.
ג. $21\frac{\mu_B B_0 L}{mv^2}$
ד. לצבר 5 רמות אנרגיה שונות עבור הערכים השונים של המומנט המגנטי.
7 אורכי גל שונים.

מומנט מגנטי מסילתי ואפקט זימן הנורמאלי:

סיכום כללי:

מומנט כוח על דיפול מגנטי:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

אנרגיה פוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

כוח על דיפול מגנטי בשדה מגנטי לא אחיד:

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

מומנט דיפול מגנטי כתוצאה מתנועת האלקטרון סביב הגרעין:

$$\vec{\mu} = \frac{-\mu_B}{\hbar}\vec{L}$$

גודל קבוע שנקרא המגנטון של בוהר:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788 \cdot 10^{-5}\, {}^{eV}\!/_{T}$$

האנרגיה הפוטנציאל כתוצאה האינטראקציה של המומנט המגנטי המסילתי עם שדה מגנטי חיצוני:

$$U = \frac{\mu_B}{\hbar}\vec{L} \cdot \vec{B} = \mu_B B m$$

כאשר m הוא המספר הקוונטי של Lz.

תוספת לשינוי באנרגיה כתוצאה ממעבר בין הרמות בעקבות אפקט זימן:

$$\Delta E_z = \mu_B B \Delta m$$
$$\Delta m = \pm 1,0$$

התוספת בעקבות אפקט זימן גורמת לכל קו ספקטרלי להתפצל לשלושה קווים.

שאלות:

1) פוטון נפלט מאטום מימן בשדה מגנטי

אלקטרון נמצא ברמת האנרגיה $3p$ של אטום מימן. האטום נמצא באזור בו יש שדה מגנטי אחיד $B = 4 \cdot 10^3 [T]$. מצאו את אורך הגל הקצר ביותר שיכול

להתקבל ממעבר של האלקטרון לרמה כלשהיא (הניחו שהאלקטרון אינו עולה רמות לפני הפליטה).

2) פליטה מאטום בורון ורוחב פס

גז של אטומי בורון נמצא באזור בו קיים שדה מגנטי חיצוני אחיד B.

בכל אחד מהאטומים מעוררים את האלקטרון שנמצא ברמה $2p$ לרמה $3s$ ומודדים את ספקטרום הקרינה האלקטרומגנטית שמתקבל בחזרה של האלקטרון לרמה המקורית.

א. כמה קווים יתקבלו בספקטרום? הניחו שרמת האנרגיה זהות לאלו של אטום המימן.

ב. מצאו את הערך של B עבורו נוכל להבחין כי הפיצול אכן נבע מהשדה המגנטי החיצוני אם נתון שזמן החיים של הרמה המעוררת הוא 2ns.

תשובות סופיות:

1) 100nm.

2) א. 3 קווים. ב. $B > 9mT$

ספין ניסוי ושטרן גרלך:

סיכום כללי:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$\vec{L}$ תנ"ז מסילתי, נובע מהתנועה הסיבובית של החלקיק.

$\vec{S}$ תנ"ז כתוצאה מהספין.

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$$

S גדולה - גודל התנ"ז מהספין.

s קטנה - הספין של החלקיק, עבור אלקטרון $s = \frac{1}{2}$.

עבור חלקיקים אחרים ערכי הספין הן כפולות שלמות של חצי $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$

חלקיקים שהספין שלהם חצי שלם $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ וכו' נקראים **פרמיונים** וחלקיקים שהספין שלהם שלם 0,1,2, נקראים **בוזונים.**

$$S_z = m_s\hbar$$

$-s < m_s < s$ בקפיצות של 1

עבור אלקטרון $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

מומנט מגנטי מהספין $\vec{\mu}_s = -g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{s}$

פקטור g או gyromagnetic ratio

עבור אלקטרון $g = 2.0023 \ldots \approx 2$

שאלות:

1) תוחלת של S

נתונה פונקציית הגל הבאה:

$$\frac{1}{\sqrt{4}}\Psi_{2,1,-1,\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\Psi_{2,1,1,\frac{1}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{2,1,1,-\frac{1}{2}}$$

א. הראו שהפונקציה מנורמלת (בהנחה ש- $\Psi_{\mathrm{n,l,m},m_s}$ הן אורטונורמליות).

ב. מצאו את $\langle\hat{L}_z\rangle$.

ג. מצאו את $\langle\hat{S}_z\rangle$.

ד. מצאו את ΔS_z.

2) שטרן גרלך עם תנז מסילתי

מה היה קורה בניסוי שטרן-גרלך אם לאלקטרון בקרן שפוגעת היה $l=1$?

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. $\frac{\hbar}{2}$ ג. 0 ד. $\frac{\hbar}{2}$

2) הקרן תתפצל לחמש קרניים ונראה חמש נקודות על המסך.

אטומים מורכבים והטבלה המחזורית:

סיכום כללי:

כל אלקטרון מאכלס מצב מסוים המאופיין על ידי המספרים הקוונטים: $n,\ l,\ m_l,\ m_s$.

בגלל האינטראקציה של האלקטרונים עם עצמם האנרגיות תלויות ב-n וגם ב-l.

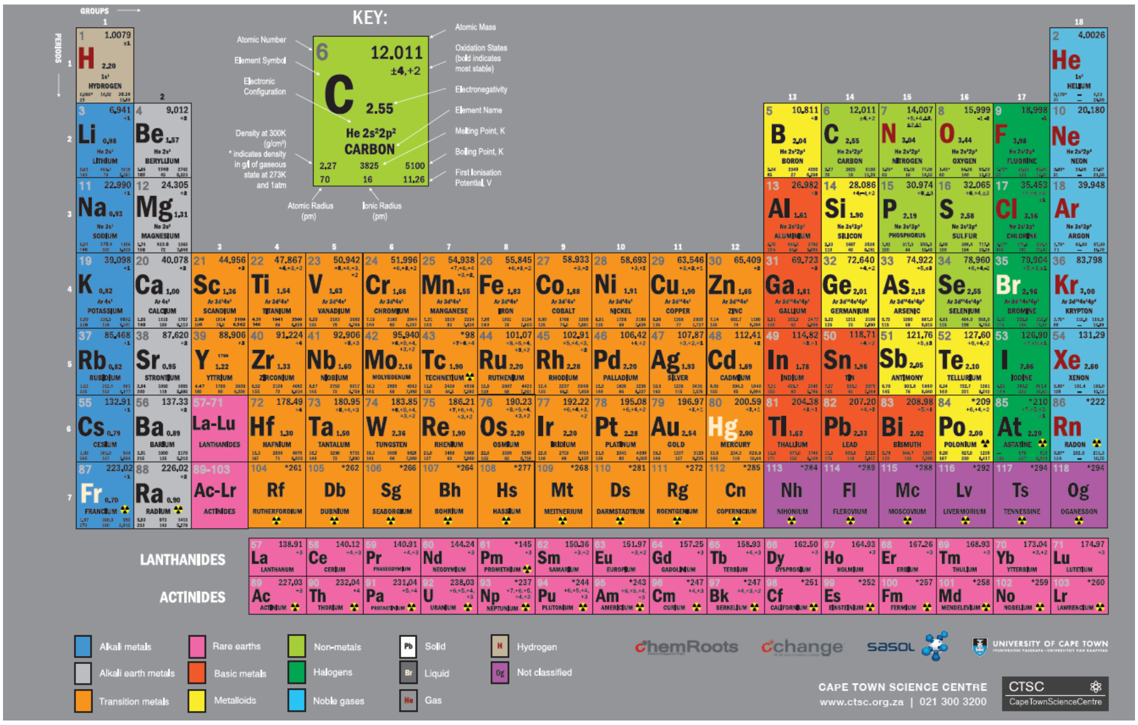
עיקרון האיסור של פאולי Wolfgang Pauli (1900-1958):

שני אלקטרונים באטום לא יכולים לאכלס את אותו המצב הקוונטי.

כלומר לא יכולים להיות שני אלקטרונים שיש להם בדיוק אותם מספרים קוונטים: $n,\ l,\ m_l,\ m_s$.

ככל ש-l גדל (יש יותר תנ״ז מסילתי) האנרגיה גדלה.

הטבלה המחזורית:



שאלות:

1) טיטניום

כמה אלקטרונים יש ליסוד טיטניום: $Ti\ (Z = 22)$ ברמה הרביעית?
הניחו שהוא במצב היסוד.

2) אטום ראשון ברמה החמישית

מהו המספר האטומי של האטום "הראשון" ברמה החמישית?

3) קונפיגורציה של ברזל

רשמו את קונפיגורציית האלקטרונים של אטום הברזל: Fe Z=26
במצב היסוד. רשמו את הכתיב המלא והמקוצר.

4) קונפיגורציות הגיוניות

אלו מהקוניפגורציות הבאות הן הגיוניות ואלו לא? (עבור אטומים ברמת היסוד)

א. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^3$

ב. $1s^2 2s^2 2p^6 2d^2$

ג. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5 4s^2$

ד. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^2$

תשובות סופיות:

1) שני אלקטרונים.

2) 37.

3) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$, $3d^2 4s^2$.

4) א. לא. ב. לא. ג. לא. ד. כן.

מבוא לקוונטים

פרק 15 - פורמליזים אלגברי לתורת הקוונטים

תוכן העניינים

ייצוג באמצעות אלגברה לינארית:

סיכום כללי:

פונקציות הגל מקיימות את התנאים של מרחב וקטורי.

הכללות:

1. נעבוד עם וקטורים ביותר משלושה מימדים.
2. נעבוד עם סקלרים שיכולים להיות גם מספרים מורכבים.

כתיב דיראק:

ket:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

bra:

$$\langle\psi| = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, ..)$$

מכפלה פנימית - הכללה של מכפלה סקלרית ליותר מ-3 מימדים.

תכונות המכפלה הפנימית:

תכונה 1: $\langle v|u\rangle = \langle u|v\rangle^* =$ סקלר

תכונה 2: $\langle v|v\rangle \geq 0$ ממשי, אם $\langle v|v\rangle = 0$ אז $|v\rangle = |0\rangle$

תכונה 3: $< v|(\alpha|u > +\beta|k >) = \alpha\langle v|u\rangle + \beta\langle v|k\rangle$

הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*\psi_2 \, dx$$

נורמה – הכללה של גודל של וקטור ליותר מ-3 מימדים.

$$\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$$

אם המכפלה הפנימית של שני וקטורים מתאפסת אז אומרים שהוקטורים **אורתוגונליים**.

מרחב L_2 (או L^2) – מכיל את כל הפונקציות שהאינטגרל על גודל הפונקציה בריבוע אינו מתבדר: $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2 dx<\infty$.

בפיזיקה, מרחב פונקציות הגל שנעבוד איתו נקרא מרחב הילברט ובפועל הוא יהיה המרחב L_2.

* הפונקציות העצמיות של התנע והמיקום אינם ב- L_2 אבל עדיין עובדים איתם.

ייצוג באמצעות בסיס:

בסיס – סט של וקטורים (בלתי תלויים) שבאמצעותם ניתן לבטא כל וקטור אחר במרחב.

בסיס אורתוגונאלי – בסיס שבו כל הוקטורים אורתוגונליים.

בסיס אורתונורמאלי – בסיס אורתוגונאלי שבו הנורמה של כל וקטור היא 1.

הבסיס הסטנדרטי – בסיס שמורכב מוקטורי יחידה.

סט הפונקציות העצמיות (או הו"ע) של כל אופרטור מהוות בסיס*

* יש יוצאי דופן, לדוגמה במקרים שהבסיס אינסופי.

$$\psi(x)=\sum\alpha_n\phi_n(x)$$

או

$$|\psi\rangle=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ .\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

כאשר

$$\alpha_n=\langle\phi_n|\psi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n{}^*(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

המכפלה הפנימית בהצגה באמצעות בסיס אורתונורמאלי:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle=\left(\alpha_1^*,\alpha_2^*,\alpha_3^*,..\right)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ ...\end{pmatrix}=\sum\alpha_i^*\beta_i$$

שאלות:

1) ייצוג בבסיס לז'נדר

נתונה הפונקציה: $x\in[-1,1]$, $f(x)=|x|$.

בתרגיל זה נתרגל פריסה (או ייצוג) באמצעות בסיס פולינומי לז'נדר המנורמל לקטע: $x\in[-1,1]$:

$$L_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ L_1(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}x\ ,\ L_2(x)=\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\ ,\ L_3(x)=\sqrt{\frac{7}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)\ ,\ \ldots$$

א. הראו כי ארבעת איברי הבסיס הנ"ל הם אכן אורתונורמאלים, כלומר: $\delta_{nm}=\langle L_n|L_m\rangle$.

ב. מצאו את ארבעת המקדמים ("המשקלים") הראשונים בייצוג של $f(x)$ בבסיס לז'נדר. (רמז: $\alpha_n=\langle L_n|f\rangle$).

ג. רשמו את הפונקציה לפי ארבעת האיברים הראשונים ושרטטו אותה (באמצעות מחשב) על גבי הפונקציה המקורית.

2) חישוב אי ודאות בתנע ומיקום

א. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב: $|\psi\rangle=|x_1\rangle$.
הנחייה: בשביל לחשב את ערכי התצפית של התנע השתמשו בקשר: $\langle p|x\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$ (או בטרנספורם פורייה) על מנת למצא את פונקציית הגל בבסיס התנע.

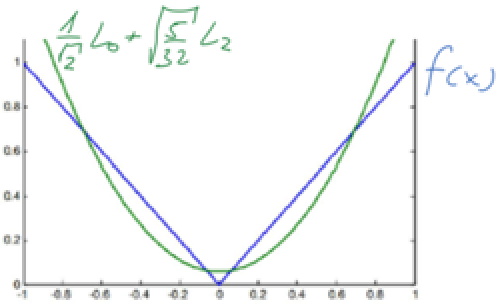
ב. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב: $|\psi\rangle=\alpha|x_1\rangle+\beta|x_2\rangle$.
(α , β ממשיים).
מהו החסם על אי הודאות בתנע?
(את אי הוודאות בתנע ניתן להשאיר כאינטגרל).

ג. מה יקרה לפונקציית הגל אם נערוך מדידה ונקבל שהחלקיק נמצא ב-x_1?

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. $\alpha_1=\alpha_3=0\ ,\ \alpha_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \alpha_2=\sqrt{\frac{5}{32}}$

ג. $f(x)\approx\frac{1}{\sqrt{2}}L_0+\sqrt{\frac{5}{32}}L_2$



2) א. $\Delta x=0\ ,\ \Delta p=\infty$

ב.

$$\Delta x=\alpha\beta|x_1-x_2|\ ,\ \langle p\rangle=0\ ,\ \langle p^2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}p\left[1+2\alpha\beta\cos\left(\frac{p(x_1-x_2)}{\hbar}\right)\right]dp=\infty$$

ג. פונקציית הגל תקרוס ונחזור למצב של סעיף א'.

אי שוויון שוורץ:

$$|\langle a|b\rangle|^2\le\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle$$

זווית מוכללת בין וקטורים:

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{\langle a|b\rangle\langle b|a\rangle}{\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle}}$$

אי שוויון המשולש:

$$|(|a\rangle+|b\rangle)|\le|a|+|b|$$

שאלות:

1) **אי שוויון שוורץ**

הוכיחו את אי שוויון שוורץ: $|\langle a|b\rangle|^2 \leq \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle$.

השתמשו ב- $|c\rangle = |a\rangle - \frac{\langle b|a\rangle}{\langle b|b\rangle}|b\rangle$ ובעובדה שהנורמה של וקטור תמיד גדולה או שווה לאפס $\langle c|c\rangle \geq 0$.

2) **אי שוויון המשולש**

הוכיחו את אי שוויון המשולש: $|(|a\rangle + |b\rangle)| \leq |a| + |b|$.

רמז: השתמשו גם באי שוויון שוורץ.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

מבוא לקוונטים

פרק 16 - אופרטורים בייצוג האלגברי

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

סיכום כללי:

-אופרטורים מיוצגים באמצעות מטריצות:

$$\hat{Q}=\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix}$$

האיבר Q_{ij} מעביר את הוקטור e_j לוקטור e_i : $Q_{ij}=\left\langle e_i \,|\, \hat{Q} \,|\, e_j \right\rangle$ (כפול סקלר כלשהו).
i שורה, j עמודה.

אם הבסיס הוא בסיס עצמי של אופרטור כלשהו אז המטריצה של האופרטור תהיה אלכסונית והערכים על האלכסון הם הערכים העצמיים של האופרטור.

$$\langle\psi_1|\hat{Q}|\psi_2\rangle=\langle\psi_1|\hat{Q}\psi_2\rangle$$

כתיב נוסף:

$$\langle\hat{Q}\psi\,| = \left(\hat{Q}|\psi\rangle\right)^{\dagger} = \langle\psi\,|\hat{Q}^{\dagger}$$

חזרה על אלגברה לינארית

- מציאת ערכים עצמיים (ע"ע): $\det(Q-\lambda I)=0$
- מציאת וקטורים עצמיים (ו"ע) בסרטון:

מטריצה משוחלפת:

$$A^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

צמד הרמיטי:

$$A^\dagger = (A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \dots & A_{n1}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \dots & A_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n}^* & A_{2n}^* & \dots & A_{nn}^* \end{pmatrix}$$

מטריצת יחידה:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \sum |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$$

כפל מטריצות: $C = A \cdot B \Rightarrow C_{mn} = \sum A_{mi} B_{in}$

כפל מטריצות הוא לא חילופי: $AB \neq BA$

יחס חילוף בין מטריצות: $[A,B] = AB - BA$

מטריצת ההופכית: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

מטריצה אוניטרית: $U^\dagger = U^{-1}$

- זהויות:

$$\left(\langle\psi_1|\hat{A}^\dagger|\psi_2\rangle\right)^* = \langle\psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle$$

$$\langle\psi_1|\hat{A}\psi_2\rangle = \langle\hat{A}^\dagger\psi_1|\psi_2\rangle$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

הגודל של ערך עצמי של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1.
אופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים נורמליים, כלומר: $[A, A^\dagger] = 0$.

שאלות:

1) בניית אופרטורים ופעולות על פונקציות שונות

נתון כי: $\{|v_1>, |v_2>\}$ מהווים בסיס אורתונורמאלי במרחב וקטורי דו מימדי.
מגדירים את המצבים הבאים:

$$|\psi_1>= \alpha_1|v_1> +\alpha_2|v_2>$$
$$|\psi_2>= \beta_1|v_1> +\beta_2|v_2>$$

כאשר: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ הם סקלרים מורכבים.

א. רשמו את $<\psi_2|$ בכתיב דיראק בבסיס הנ"ל.

ב. חשבו את המכפלה הפנימית $\langle\psi_2|\psi_1\rangle$.
האם היא שווה למכפלה הפנימית $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$?

ג. רשמו את $|\psi_2>$ ואת $<\psi_2|$ כוקטורים בכתיב מטריצי.

ד. מצאו את הנורמה של המצב $|\psi_2>$.

ה. נגדיר אופרטור $\hat{Q} = c|v_1><v_2|$ כאשר c הוא סקלר מורכב שונה מאפס.
חשבו את פעולת האופרטור על איברי הבסיס וכתבו את הייצוג המטריצי של האופרטור בבסיס הנתון. האם האופרטור הרמיטי?

ו. חשבו את הפעולה של $\hat{Q}$ על המצב $|\psi_2>$ פעם אחת דרך הייצוג המטריצי ופעם שניה דרך כתיב דיראק.

ז. נגדיר אופרטור חדש $\hat{G} = c|\psi_1><\psi_2|$ מצאו את $\hat{G}$ בייצוג המטריצי.

ח. נתון כי האופרטור $\hat{S}$ מבצע את הפעולה הבאה:

$$\hat{S}|v_1>=|v_2>$$
$$\hat{S}|v_2>=|v_1>$$

מצאו את הייצוג המטריצי של $\hat{S}$ וחשבו את הפעולה שלו על המצבים $|\psi_1>,|\psi_2>$.

2) מציאת עע ווע

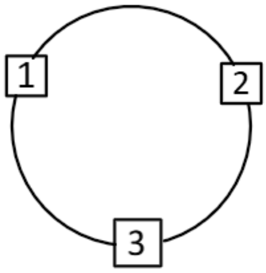
נתונה המטריצה הבאה: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

א. האם המטריצה הרמיטית?

ב. מצאו את הע"ע וו"ע של A.

3) 3 אתרים על טבעת

נתונה מערכת ובה שלושה אתרים על <u>טבעת</u>:



נסמן את המצבים בהם נמצא החלקיק בכל אחד מהאתרים בצורה הבאה:

$$|1\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ |2\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ |3\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

הדינמיקה של המערכת מתוארת ע״י ההמילטוניאן: $H=\varepsilon\hat{D}+\varepsilon\hat{D}^{\dagger}$
כך שאופרטורי ההזזות מוגדרים:

$$\hat{D}|i\rangle=|i-1\rangle,\ \hat{D}|1\rangle=|3\rangle,\ \hat{D}^{\dagger}|i\rangle=|i+1\rangle,\ \hat{D}^{\dagger}|3\rangle=|1\rangle.$$

אופרטור המיקום מוגדר כ- $\hat{x}|i\rangle=i|i\rangle$.

א. ייצגו את אופרטורי ההזזה ע״י מטריצה והראו כי אחד הוא צמוד הרמיטי של השני.

ב. ייצגו את אופרטור המיקום ע״י מטריצה. מהם הוקטורים והערכים העצמיים.

ג. מהם הוקטורים והערכים העצמיים של ההמילטוניאן?
שימו לב כי הו״ע אינם אורתוגונליים ויש לבצע תהליך גרהם שמידט.
פתרון המשוואה: $0=-\lambda^3+3\varepsilon^2\lambda+2\varepsilon^3$ הוא: $\lambda_{1,2}=-\varepsilon\,,\lambda_3=2\varepsilon$.

ד. מכינים את החלקיק בזמן 0 במצב $|2\rangle$, מהו מצב המערכת בזמן כלשהו?

ה. מה הסיכוי למצוא את החלקיק באתר 3 אחרי זמן כלשהו?

ו. מהו יחס החילוף $[D,x]$?

ז. **מצאו את המצבים העצמים עבור מערכת עם אינסוף אתרים (גבול הרצף) עבור $\hat{D}^{\dagger}$, $\hat{D}$ ועבור H.
הדרכה: כתבו את משוואת המצבים העצמיים בכתיב דיראק ונסו לחלץ סדרה הנדסית עבור המקדמים. מתוך התנאי על האיבר האחרון מצאו את הערכים העצמיים והפונקציות העצמיות.

4) הוכחת זהויות 1

א. הוכיחו כי: $\langle i|\hat{A}|j\rangle = \left(\langle j|\hat{A}^{\dagger}|i\rangle\right)^{*}$ כאשר: $|i>, |j>$ הן פונקציות בסיס אורתונורמאלי.

ב. הוכיחו כי: $\langle \psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle = \left(\langle \psi_1|\hat{A}^{\dagger}|\psi_2\rangle\right)^{*}$ כאשר ψ_1, ψ_2 הן פונקציות כלשהן.

ג. הוכיחו כי: $\langle \psi_1|\hat{A}\psi_2\rangle = \langle \hat{A}^{\dagger}\psi_1|\psi_2\rangle$.

5) הוכחת זהויות 2

הוכיחו את הטענות הבאות עבור אופרטורים כלשהם A ו-B:

א. $\left(A^{\dagger}\right)^{\dagger} = A$.

רמז: השתמשו בתכונות ההצמדה של מכפלה פנימית והראו

כי: $\left\langle \psi_1 \middle| \left(A^{\dagger}\right)^{\dagger} \middle| \psi_2 \right\rangle = \langle \psi_1|A|\psi_2\rangle$.

ב. $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$.

ג. $A + A^{\dagger}$, $i\left(A - A^{\dagger}\right)$, $AA^{\dagger}$ הם כולם אופרטורים הרמיטים.

6) הוכחת זהויות 3

נניח כי לאופרטור Q ישנם וקטורים עצמיים $|\phi_i>$ עם ערכים עצמיים λ_i בהתאמה. הראו כי אם אין ניוון אז: $\left(\Pi_i(\hat{Q} - \lambda_i)\right)|\psi>= 0$

כאשר: $\Pi_i(x_i) = x_1x_2x_3 \cdots x_n$.

רמז: השתמשו בתכונת מטריצת היחידה: $I = \sum_i |\phi_i >< \phi_i|$.

7) הוכחת זהויות 4

הראו כי הגודל של ערך עצמי של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1.

הנחייה: הניחו מצב עצמי של אופרטור אוניטרי שעבורו מתקיים: $U|\phi >= \lambda|\phi >$.

8) הוכחת זהויות 5

הוכיחו שאופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים נורמליים, כלומר שהם מקיים את התנאי: $\left[A, A^{\dagger}\right] = 0$.

9) הוכחת זהויות 6

הראו כי אופרטור אוניטרי הפועל על פונקציית גל אינו משנה את הנורמה של הפונקציה.

10) אופרטור סיבוב

נתון האופרטור הבא:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

א. הראו שהאופרטור אוניטרי.

ב. מצאו את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים.

ג. הראו שהוקטורים העצמיים אורתונורמאלים.

ד. הראו שהמטריצה $U^{\dagger}AU$ היא מטריצה אלכסונית כאשר U מורכבת מהוקטורים העצמיים של A בעמודות.

11) חישוב אי ודאות בתנע ומיקום

א. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב: $|\psi\rangle = |x_1\rangle$.
הנחייה: בשביל לחשב את ערכי התצפית של התנע השתמשו בקשר: $\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$ (או בטרנספורם פורייה) על מנת למצא את פונקציית הגל בבסיס התנע.

ב. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב: $|\psi\rangle = \alpha|x_1\rangle + \beta|x_2\rangle$.
(α , β ממשיים).
מהו החסם על אי הודאות בתנע?
(את אי הוודאות בתנע ניתן להשאיר כאינטגרל).

ג. מה יקרה לפונקציית הגל אם נערוך מדידה ונקבל שהחלקיק נמצא ב-x_1?

תשובות סופיות:

1) א. $\beta_1^* < v_1 | + \beta_2^* < v_2 |$

ב. $| \beta_1^* \alpha_1 + \beta_2^* \alpha_2$, לא שווה.

ג. $L\psi_2 | = \left(\beta_1^*, \beta_2^*\right), \; |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

ד. $\sqrt{|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2}$

ה. $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לא הרמיטי.

ו. $\begin{pmatrix} c\beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ או $c\beta_2 |v_1\rangle$

ז. $c\begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1^* & \alpha_1\beta_2^* \\ \alpha_2\beta_1^* & \alpha_2\beta_2^* \end{pmatrix}$

ח. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\hat{S}|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$

$\hat{S}|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$

2) א. כן.

ב. $\lambda_1 = 0 \, , \, \lambda_2 = -1 \, , \, \lambda_3 = 1$: $|\lambda_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \; |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \; |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) א. $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \; D^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ב. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1 \, , \, \lambda_2 = 2 \, , \, \lambda_3 = 3$
$|1\rangle \; , \; |2\rangle \; , \; |3\rangle$

ג. $\lambda_1 = -\varepsilon \; , \; |\lambda_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$

$\lambda_2 = -\varepsilon \; , \; |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$

$\lambda_3 = -2\varepsilon \; , \; |\lambda_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

ד. $|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} e^{+i\frac{\varepsilon}{\hbar}t} |\lambda_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\varepsilon}{\hbar}t} |\lambda_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{2\varepsilon}{\hbar}t} |\lambda_3\rangle$

ה. $\left(-\frac{5}{6}\cos(\omega t) + \frac{1}{3}\cos(2\omega t)\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(2\omega t)\right)^2$

ו. $\left[\hat{D}, \hat{X}\right] = \hat{D}$

ז. הפונקציות העצמיות של שלושת האופרטורים הן:

$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{N}}e^{-ikx}$ או $|\phi_i\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\varepsilon e^{-i\frac{2\pi j}{N}n}|n\rangle$ כאשר j מספר שלם בין $-\infty$

ל- ∞ ו- j $k=\frac{2\pi}{N}$.

הע"ע של D^+ הן $\lambda_j^+=e^{i\frac{2\pi j}{N}}$, של D הן $\lambda_j=e^{-i\frac{2\pi j}{N}}$ ושל H הן $E_j=2\varepsilon\omega\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)$.

4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.

10) א. הוכחה.

ב.
$$\lambda_1=e^{i\theta}\qquad |\lambda_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i)$$
$$\lambda_2=e^{-i\theta}\qquad |\lambda_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i)$$

ג. הוכחה.

ד. הוכחה.

11) א. $\Delta x=0$, $\Delta p=\infty$

ב.
$$\triangle x=\alpha\beta|x_1-x_2|\ ,\ \langle p\rangle=0\ ,\ \langle p^2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}p\left[1+2\alpha\beta\cos\left(\frac{p(x_1-x_2)}{\hbar}\right)\right]dp=\infty$$

ג. פונקציית הגל תקרוס ונחזור למצב של סעיף א'.

פונקציות של אופרטורים ופרופוגטור ההתפתחות בזמן:

רקע:

פונקציות של אופרטורים:

אם $f(x) = \sum_n \alpha_n x^n$ אז ניתן להגדיר $f(\hat{A}) = \sum_n \alpha_n \hat{A}^n$

אם ורק אם $\hat{A}$ אלכסונית ו a_i הם הע"ע שלה

כלומר אם $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$ אז $\hat{B} = f(\hat{A}) = \begin{pmatrix} f(a_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(a_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$

זהויות:

אם $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ אז $[\hat{A}, f(\hat{B})] = 0$

אם $[\hat{A}, \hat{B}] = cI$ כאשר I היא מטריצת יחידה ו- c קבוע. אז $[\hat{A}, f(\hat{B})] = cf'(\hat{B})$

אם $f(x)$ ממשית (ואנליטית, כלומר ניתן לפתח אותה לטור) אז $f^\dagger(\hat{A}) = f(\hat{A}^\dagger)$

הפרופוגטור:

$$|\Psi(t) >= \hat{U}(t)|\Psi(0) >$$

$$\hat{U}(t) = \Sigma e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}|E_n >< E_n| = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}$$

הפרופוגטור הוא אופרטור אוניטרי ולכן הנורמה של פונקציית הגל נשמרת במהלך ההתפתחות בזמן.

שאלות:

1) **הוכחה - אם אופרטורים חילופיים אז גם הפונקציות שלהם חילופיות**
הראו כי אם $[\hat{A},\hat{B}]=0$ אז $[\hat{A},f(\hat{B})]=0$

2) **הוכחה - יחס חילוף שווה קבוע**
הראו כי אם $[\hat{A},\hat{B}]=cI$ כאשר I היא מטריצת יחידה ו- c קבוע. אז
$[\hat{A},f(\hat{B})]=\mathrm{c}f'(\hat{B})$

3) **הוכחה - דגר של הפונקציה שווה לפונקציה של הדגר**
הראו כי אם $f(x)$ ממשית (ואנליטית, כלומר ניתן לפתח אותה לטור) אז
$f^{\dagger}(\hat{A})=f(\hat{A}^{\dagger})$

4) **הוכחה - שהפרופוגטור אוניטרי**
הראו כי הפרופוגטור הוא אופרטור אוניטרי וכי הנורמה של פונקציית הגל לא משתנה בזמן.

תשובות סופיות:

1) הוכחה בסרטון.
2) הוכחה בסרטון.
3) הוכחה בסרטון.
4) הוכחה בסרטון.

מבוא לקוונטים

פרק 17 - אופרטור העלאה והורדה (סולם) באוסילטור הרמוני

תוכן העניינים

אופרטור העלאה והורדה באוסילטור הרמוני:

סיכום כללי:

אופרטור ההורדה (או השמדה):

$$\hat{a}=\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{x}+\frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

אופרטור ההעלאה (או יצירה):

$$\hat{a}\dagger=\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{x}-\frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

$$\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}\dagger-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left[\hat{a},\hat{a}\dagger\right]=1$$

$$\hat{a}\left|\psi_n\right\rangle=\sqrt{n}\left|\psi_{n-1}\right\rangle$$

$$\hat{a}\dagger\left|\psi_n\right\rangle=\sqrt{n+1}\left|\psi_{n+1}\right\rangle$$

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$\psi_0(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_n=\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}\dagger\right)^n\psi_0$$

$$\psi_n(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}H_n\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}x\right]$$

$$H_0(y)=1$$
$$H_1(y)=2y$$
$$H_2(y)=-2\left(1-2y^2\right)$$
$$H_3(y)=-12\left(y-\frac{2}{3}y^3\right)$$

שאלות:

1) יחס החילוף של a עם H

מצאו את:

א. $\left[\hat{a},\hat{H}\right]$

ב. $\left[\hat{a}\dagger,\hat{H}\right]$

2) חישוב עם האופרטורים

נתון אוסילטור הרמוני עם תדירות ω.

א. הראו באופן מפורש את פעולת האופרטור $\hat{a}$ על המצבים ϕ_0 ו-ϕ_1 (כאשר ϕ_n הם המצבים העצמיים של ההמילטוניאן).

מכינים חלקיק במצב: $|\psi\rangle = A\left[|\phi_1\rangle+\sqrt{2}|\phi_2\rangle+|\phi_3\rangle\right]$

ב. מצאו את הקבוע A.

ג. מהי התוחלת והשונות של האנרגיה ב-$t=0$?

ד. מהי פונקציית הגל כתלות בזמן?

ה. מהו ערך התוחלת של המיקום כתלות בזמן?

תשובות סופיות:

1) א. $\hbar\omega\hat{a}$ ב. $-\hbar\omega\hat{a}^{\dagger}$

2) א. הוכחה. ב. $\frac{1}{2}$ ג. $\Delta E=\frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\omega$ $\langle E\rangle=\frac{5}{2}\hbar\omega$

ד. $|\psi(t)\rangle=\frac{1}{2}\left[e^{-i\frac{3}{2}\omega t}|\phi_1\rangle+\sqrt{2}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}|\phi_2\rangle+e^{-i\frac{7}{2}\omega t}|\phi_3\rangle\right]$

ה. $\langle x(t)\rangle=\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\left[2+\sqrt{6}\right]\cos\left(\frac{1}{2}\omega t\right)$

מבוא לקוונטים

פרק 18 - הרחבה על תנז מסילתי ספין ותנז כולל

תוכן העניינים

תנ"ז מסילתי והספין:

סיכום כללי:

יחסי החילוף של התנ״ז המסילתי:

$$\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right]=i\hbar\hat{L}_z$$

$$\left[\hat{L}_y,\hat{L}_z\right]=i\hbar\hat{L}_x$$

$$\left[\hat{L}_z,\hat{L}_x\right]=i\hbar\hat{L}_y$$

$$\left[\hat{L}^2,\hat{L}_z\right]=\left[\hat{L}^2,\hat{L}_y\right]=\left[\hat{L}^2,\hat{L}_x\right]=0$$

התנ״ז בקואורדינטות כדוריות:

$$\hat{L}_z=\left(-i\hbar\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\hat{L}_x=-i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cos\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_y=-i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\sin\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}^2=-\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

הפונקציות העצמיות של $\hat{L}_z$ ו- $\hat{L}^2$ הן הספריות ההרמוניות: $Y_l^m\left(\theta,\varphi\right)$.

$$Y_l^m\left(\theta,\varphi\right)=\theta\left(\theta\right)\phi\left(\varphi\right)=\varepsilon\sqrt{\frac{\left(2l+1\right)\left(l-|m|\right)!}{4\pi\left(l+|m|\right)!}}P_l^m\left(\cos\theta\right)e^{im\varphi}$$

$$\varepsilon=\begin{cases}\left(-1\right)^m & m>0\\ 1 & m\geq 0\end{cases}\qquad -l\leq m\leq l$$

m,l שלמים

$$\hat{L}_z Y_l^m = \hbar m Y_l^m$$
$$\hat{L}^2 Y_l^m = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m$$
$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$$
$$\hat{L}_+\hat{L}_- = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hbar\hat{L}_z$$
$$\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - \hbar\hat{L}_z$$
$$\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] = 2\hbar\hat{L}_z$$
$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$$
$$\left[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm\right] = 0$$

מטריצות התנ"ז עבור $l=1$:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{L}^2 = \hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ספין :

התנ"ז של הספין מקיים את אותם יחסי חילוף כמו התנ"ז המסילתי :

$$\left[\hat{S}_x, \hat{S}_y\right] = i\hbar\hat{S}_z$$
$$\left[\hat{S}_y, \hat{S}_z\right] = i\hbar\hat{S}_x$$
$$\left[\hat{S}_z, \hat{S}_x\right] = i\hbar\hat{S}_y$$

$$\hat{S}_z f = \hbar m_s f$$
$$\hat{S}^2 f = \hbar^2 S(S+1) f$$
$$-S \le m_s \le S$$

קפיצות של 1

S, m_s יכולים להיות חצי שלמים.
S תלוי רק בסוג החלקיק.
פרמיונים – ספין חצי שלם.
בוזונים – ספין שלם.

ספין חצי:
מצבים אורתונורמאלים:

$$S=\frac{1}{2} \qquad m_s=\pm\frac{1}{2}$$

$$|x_+\rangle=\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\equiv|\uparrow\rangle$$

$$|x_-\rangle=\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\equiv|\downarrow\rangle$$

$$\hat{S}_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_x=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}^2=\frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_\pm=\hat{S}_x\pm i\hat{S}_y$$

$$\hat{S}_\pm|s,m_s\rangle=\hbar\sqrt{s(s+1)-m_s(m_s\pm1)}\,|s,m_s\pm1\rangle$$

פונקציית מצב כללית של הספין:

$$|x\rangle=\alpha|x_+\rangle+\beta|x_-\rangle$$

שאלות:

1) אלקטרון במצב אפ נמדד באיקס

מודדים את ערך הספין בכיוון z של אלקטרון ומקבלים כי האלקטרון במצב up.
מייד לאחר מכן מודדים את הספין שלו בכיוון x.

א. מצאו את הע"ע והו"ע של $\hat{S}_x$.

ב. מהי ההסתברות לקבל $\frac{\hbar}{2}$ ומהי ההסתברות לקבל $-\frac{\hbar}{2}$ במדידת $\hat{S}_x$?

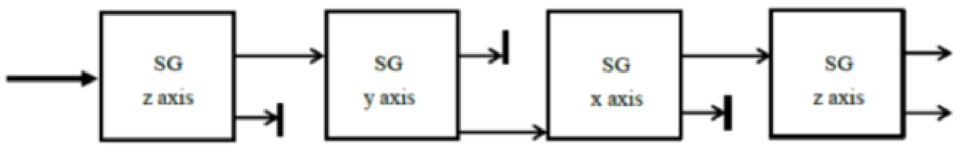
ג. חשבו את התוחלת במדידת $\hat{S}_x$.

במדידת $\hat{S}_x$ התקבלה התוצאה $\frac{\hbar}{2}$. מיד לאחר מכן מדדו שוב את $\hat{S}_z$.

ד. מה ההסתברות למדידת $-\frac{\hbar}{2}$ במדידת ה- $\hat{S}_z$?

2) קרן אלק דרך מכונות שטרן-גרלך

מעבירים קרן של אלקטרונים דרך הסדרה הבאה של מכונות (ניסויי)
שטרן-גרלך (הקרן נעה משמאל לימין).



נתון שבכל מכונות (ניסויי) שטרן-גרלך האלקטרונים עם היטל הספין החיובי על הציר שמצוין על המכונה נמצאים בקרן העליונה שיוצאת מהמכונה והאלקטרונים עם היטל הספין השלילי על הציר שמצוין על המכונה נמצאים בקרן התחתונה שיוצאת מהמכונה.

בהינתן שמצב האלקטרונים בקרן המקורית הוא: $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\downarrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\uparrow\rangle$

בבסיס $\hat{S}_z$.

מצאו את אחוז האלקטרונים מהקרן המקורית שנמצאים בקרן התחתונה שיוצאת ממכונת שטרן-גרלך האחרונה (הימנית ביותר) בסדרה.

תשובות סופיות:

1) א. $\lambda_1=\frac{\hbar}{2} \quad v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$\lambda_2=-\frac{\hbar}{2} \quad v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

ב. $p\left(\frac{\hbar}{2}\right)=p\left(-\frac{\hbar}{2}\right)=\frac{1}{2}$

ג. 0

ד. $\frac{1}{2}$

2) א. $\frac{1}{12}$

המילטוניאן פריק:

סיכום כללי:

המילטוניאן פריק הוא המילטוניאן מהצורה הבאה:

$$\hat{H}\left(\hat{X},\hat{P},\hat{S}\right)=\hat{H}_0\left(\hat{X},\hat{P}\right)+\hat{H}_S\left(\hat{S}\right)$$

במקרה של המילטוניאן פריק ניתן לפתור את משוואת שרידינגר לספין ולמרחב בנפרד.

נקיפת לרמור:

סיכום כללי:

ערך התוחלת של S עבור ספין חצי בשדה מגנטי עושה נקיפה (פרסציה) מסביב לשדה בתדירות: $\omega=\gamma B_0$ ובזווית α ביחס לשדה כאשר: $\gamma=g\frac{-e}{2m_e}$.

g הוא היחס הג'ירו מגנטי.
α נקבעת מתנאי התחלה.
פונקציית הגל תהיה:

$$x(t)=\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{\frac{\gamma B_0}{2}t},\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{-\frac{\gamma B_0}{2}t}\right)$$

חיבור תנ"ז:

סיכום כללי:

חיבור שני ספינים:

$$\left|S_1 - S_2\right| \le S < S_1 + S_2$$

S הוא של כל המערכת והוא לא קבוע בניגוד לחלקיק בודד:

$$-S \le m_S \le S$$

עבור שני חלקיקים עם ספין חצי:

טריפלט -

$$\left|S, m_S\right\rangle$$

$$\left|1,1\right\rangle \to \left|\uparrow\uparrow\right\rangle$$

$$\left|1,0\right\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right)$$

$$\left|1,-1\right\rangle \to \left|\downarrow\downarrow\right\rangle$$

סינגלט -

$$\left|0,0\right\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right)$$

תנ״ז כולל:

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$$

אותם יחסי חילוף כמו של התנ״ז המסילתי והספין:

$$\hat{J}_z f = \hbar m_j f$$

$$\hat{J}^2 f = \hbar^2 j\left(j+1\right) f$$

$$m_j = m_l + m_s$$

$$\left|l - S\right| \le j \le l + S$$

שאלות:

1) חישוב מפורש של S

חשבו מפורשות את S עבור מצבי הטריפלט ומצב הסינגלט.

רמז: $\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 = \hat{S}_{1x} \cdot \hat{S}_{2x} + \hat{S}_{1y} \cdot \hat{S}_{2y} + \hat{S}_{1z} \cdot \hat{S}_{2z}$ והשתמשו במטריצות של $\hat{S}_i$ כדי לחשב את הפעולות על המצבים העצמיים של $\hat{S}_z$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

אינטראקציית ספין מסלול:

סיכום כללי:

$$U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}=\frac{e^2\cdot\vec{S}\cdot\vec{L}}{8\pi\varepsilon_0 m_e^2c^2r^3}$$

$$\vec{B}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e}{m_ec^2r^3}\vec{L}$$

ע״ע של $\hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{L}}$:

$$\frac{1}{2}\hbar^2\left(j\left(j+1\right)-S\left(S+1\right)-l\left(l+1\right)\right)$$

מבוא לקוונטים

פרק 19 - חלקיקים זהים

תוכן העניינים

חלקיקים זהים

פונקציית הגל של חלקיקים זהים

רקע תיאורטי

פונקציית גל של שני חלקיקים

$$P\left(a\le x_1\le b,c\le x_2\le d\right)=\int_c^d\int_a^b\left|\Psi\left(x_1,x_2,t\right)\right|^2 dx_1dx_2$$

ההמילטוניאן שח המערכת צריך להיות

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+V\left(x_1,x_2,t\right)$$

אם הפוטנציאל לא תלוי בזמן אז

$$\Psi\left(x_1,x_2,t\right)=\psi\left(x_1,x_2\right)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

עבור שני חלקיקים הנמצאים במצבים $\psi_a\left(x\right)$ ו-$\psi_b\left(x\right)$ אורתונורמליים, פונקציית הגל היא:

אם החלקים שונים, אז $\psi\left(x_1,x_2\right)=\psi_a\left(x_1\right)\psi_b\left(x_2\right)$

אם החלקיקים הם בוזונים / פרמיונים זהים אז פונקציית הגל צריכה להיות סימטרית / אנטי-סימטרית **להחלפה של החלקיקים** בהתאמה.

המבנה של פונקציית גל מרחבית סימטרית (סימן פלוס) / אנטי סימטרית (סימן מינוס):

$$\Psi_\pm\left(x_1,x_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_a\left(x_1\right)\psi_b\left(x_2\right)\pm\psi_a\left(x_2\right)\psi_b\left(x_1\right)\right]$$

שימו לב שפונקציית הגל הכללית צריכה לקיים את תנאי הסימטריה ובאופן כללי צריך להתחשב גם בספין.

שאלות

1) פונקציית הגל של בוזונים ופרמיונים והסבר לעיקרון האיסור של פאולי

הוכיחו את הטענה כי אם $\left|\Psi(x_1,x_2)\right|^2=\left|\Psi(x_2,x_1)\right|^2$,

אז $\Psi(x_1,x_2)=\pm\Psi(x_2,x_1)$.

הדרכה: הניחו מקרה כללי שבו $\Psi(x_1,x_2)=\alpha\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)+\beta\psi_a(x_2)\psi_b(x_1)$

ו- $\Psi(x_1,x_2)=\gamma\Psi(x_2,x_1)$, כאשר $|\gamma|=1$.

2) קבוע הנרמול

א. נניח כי $\psi_a(x)$ ו- $\psi_b(x)$ הן פונקציות אורתונורמליות שהמכפלה הפנימית שלהם מתאפסת.
מצאו את קבוע הנרמול A של פונקציית הגל הכללית.

ב. חזרו על סעיף א' עבור המקרה שבו $\psi_a(x)=\psi_b(x)$ (כמובן שמקרה זה תקף רק לבוזונים).

3) פונקציית גל של 3 חלקיקים

הניחו שישנם שלושה חלקיקים: אחד במצב $\psi_a(x)$, השני במצב $\psi_b(x)$, והשלישי במצב $\psi_c(x)$. הניחו גם שכל הפונקציות אורתונורמליות.

מצאו פונקציית גל המתארת את מערכת שלושת החלקיקים עבור המקרים הבאים:

א. החלקיקים שונים.

ב. החלקיקים הם בוזונים זהים.

ג. החלקיקים הם פרמיונים זהים (רמז: השתמש בדטרמיננטת סלייטר).

4) שני חלקיקים בבור פוטנציאל

שני חלקיקים בעלי מסה m נמצאים בבור פוטנציאל ברוחב l. הניחו כי אין אינטראקציה בין החלקיקים.

מצאו את פונקציית הגל והאנרגיות של מצב היסוד והמצב המעורר הראשון, וציינו אם יש ניוון באנרגיה עבור כל אחד מהמצבים הבאים:

א. החלקיקים שונים.

ב. החלקיקים הם בוזונים זהים.

ג. החלקיקים הם פרמיונים זהים .

ד. רשמו את ההמילטוניאן של המערכת והראו כי פונקציות הגל של סעיף ג' הן אכן פונקציות עצמיות עם הערכים העצמיים המתאימים.

פונקציית הגל של חלקיק יחיד בבור פוטנציאל היא $\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$

והאנרגיה היא $E_n=\alpha n^2$, כאשר $\alpha=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2}$.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) א. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ב. $\frac{1}{2}$

3) א. $\psi(x_1,x_2,x_3)=\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3)$

ב. $$\psi(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3)+\psi_a(x_1)\psi_b(x_3)\psi_c(x_2)+\\ \psi_a(x_2)\psi_b(x_1)\psi_c(x_3)+\psi_a(x_3)\psi_b(x_1)\psi_c(x_2)+\\ \psi_a(x_3)\psi_b(x_2)\psi_c(x_1)+\psi_a(x_2)\psi_b(x_3)\psi_c(x_1)\end{bmatrix}$$

ג. $$\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3)+\psi_b(x_1)\psi_c(x_2)\psi_1(x_3)+\psi_a(x_1)\psi_c(x_2)\psi_b(x_3)+$$
$$\psi_b(x_1)\psi_a(x_2)\psi_c(x_3)+\psi_c(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3)$$

4) א. מצב יסוד: $E=2\alpha$; אין ניוון. $\psi(x_1,x_2)=\frac{2}{l}\sin\left(\frac{\pi}{l}x_1\right)\sin\left(\frac{\pi}{l}x_2\right)$

מצב מעורר ראשון: $E=5\alpha$; ניוון 2.
$$\psi_{12}(x_1,x_2)=\frac{2}{l}\sin\left(\frac{\pi}{l}x_1\right)\sin\left(\frac{2\pi}{l}x_2\right)$$
$$\psi_{21}(x_1,x_2)=\frac{2}{l}\sin\left(\frac{2\pi}{l}x_1\right)\sin\left(\frac{\pi}{l}x_2\right)$$

ב. מצב יסוד: זהה לסעיף א'.

מצב מעורר ראשון: $E=5\alpha$; אין ניוון.
$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{l}\sin\left(\frac{\pi}{l}x_1\right)\sin\left(\frac{2\pi}{l}x_2\right)+\frac{2}{l}\sin\left(\frac{\pi}{l}x_2\right)\sin\left(\frac{2\pi}{l}x_1\right)\right]$$

ג. מצב יסוד: $E=5\alpha$; אין ניוון.
$$\psi(x_1,x_2)=\frac{2}{l}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{l}x_1\right)\sin\left(\frac{2\pi}{l}x_2\right)-\sin\left(\frac{\pi}{l}x_2\right)\sin\left(\frac{2\pi}{l}x_1\right)\right]$$

מצב מעורר ראשון: $E=10\alpha$; אין ניוון.
$$\psi(x_1,x_2)=\frac{2}{l}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{l}x_1\right)\sin\left(\frac{3\pi}{l}x_2\right)-\sin\left(\frac{\pi}{l}x_2\right)\sin\left(\frac{3\pi}{l}x_1\right)\right]$$

ד. $$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+V(x_1,x_2)$$
$$V(x_1,x_2)=\begin{cases}0 & 0\le x_1 l \text{ and } 0\le x_2\le l\\ \infty & \text{else}\end{cases}$$

כוח ההחלפה – Exchange Forces

רקע תיאורטי

ריבוע המרחק הממוצע של שני חלקיקים שונים

$$\left\langle \Delta x^2 \right\rangle = \left\langle \left(x_1 - x_2\right)^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle_a - 2\left\langle x \right\rangle_a \left\langle x \right\rangle_b$$

$$\left\langle x \right\rangle_a = \int x \left|\psi_a\left(x\right)\right|^2 dx$$

ריבוע המרחק הממוצע של חלקיקים עם פונקציה מרחבית סימטרית / אנטי סימטרית

$$\left\langle \Delta x^2 \right\rangle_{\pm} = \left\langle \Delta x^2 \right\rangle_d \mp 2\left|\left\langle x \right\rangle_{ab}\right|^2$$

$$\left\langle x \right\rangle_{ab} = \int \psi_a\left(x\right)\psi_b\left(x\right)dx$$

קשר קוולנטי

קשר קוולנטי נוצר כאשר יש אלקטרונים במצב ספין אנטי-סימטרי (עבור שני אלקטרונים זהו מצב הסינגלט). מצב הספין האנטי-סימטרי מאלץ את פונקציית הגל המרחבית של האלקטרונים להיות סימטרית ולקרב בין האלקטרונים. המטען העודף של האלקטרונים כשהם מתקרבים מושך את הגרעינים של האטומים ויוצר את הקשר.