# מבוא לסטטיסטיקה



# תוכן העניינים

1. סטטיסטיקה תיאורית- סיווג משתנים וסולמות מדידה ..... 1
2. סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים ..... 5
3. סטטיסטיקה תיאורית-גבולות מדומים ואמיתיים ..... 16
4. סטטיסטיקה תיאורית- סכימה ..... 18
5. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי ..... 22
6. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן ..... 31
7. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני ..... 34
8. סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן ..... 36
9. סטטיסטיקה תיאורית-מדדי מיקום יחסי-אחוזונים במחלקות ..... 38
10. סטטיסטיקה תיאורית-אחוזונים בטבלה בדידה ..... 41
11. סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית ..... 43
12. סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות ..... 46
13. סטטיסטיקה תיאורית שאלות אמריקאיות ..... 53
14. מדד הקשר של ספירמן ..... (ללא ספר)
15. מקדם המתאם ( מדד קשר ) הלינארי ומובהקותו ..... 60
16. רגרסיה ..... 76
17. מדדי קשר-רגרסיה -שונות מוסברת ושונות לא מוסברת ..... 79
18. הסקה סטטיסטית - הקדמה ..... 82
19. התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי ..... 85
20. מושגי יסוד באמידה ..... 91
21. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ..... 96
22. רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים ..... 106
23. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים ..... 108

# תוכן העניינים

24. מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים ..... 110
25. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) ..... 116
26. בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים ..... 145
27. בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים ..... 156
28. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות ..... 166
29. שאלות מסכמות בבדיקת השערות ..... 169

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית- סיווג משתנים וסולמות מדידה

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

# סטטיסטיקה תיאורית – סיווג משתנים וסולמות מדידה:

## רקע:

סטטיסטיקה תיאורית הוא ענף בו לומדים כיצד לאסוף נתונים, להציג אותם ולנתח אותם. בסטטיסטיקה תיאורית אנו פונים לקבוצה מסוימת, ובאותה קבוצה אנו אוספים נתונים על הישויות באותה קבוצה.
משתנה – תכונה שיכולה לקבל מספר ערכים: דעה פוליטית, מקום מגורים, גובה של אדם וכדומה. חלוקה אחת של המשתנים הנמדדים היא לפי סולמות מדידה:

**מיון משתנים לפי סולמות המדידה:**

1. סולם שמי (נומינאלי) – משתנה שלערכיו יש משמעות רק מבחינת הזהות ואין עניין של יותר או פחות.
   לדוגמה: מצב משפחתי (רווק/נשוי/אלמן/גרוש), אזור מגורים.
   משתנה דיכוטומי (הינו מסולם שמי) אותם משתנים שיש להם רק שני ערכים אפשריות זכר/נקבה. מעשן/לא מעשן.
2. סולם סדר (אורדינאלי) – כאשר לערכים של המשתנה בנוסף לשם ישנה גם משמעות לסדר אבל אין משמעות לגודל ההפרש. למשל,דרגה בצבא.
3. סולם רווחים (אינטרוולי) – משתנה שלערכים שלו בנוסף לשם ולסדר בניהם יש משמעות לרווחים בין הערכים אבל אין משמעות ליחס בין הערכים.
   למשל, קומה בבניין. סולם לא כל כך פופולרי.

**סולם מנה/יחס:**

משתנה שלערכיו בנוסף לשם, לסדר ולרווח יש משמעות גם ליחס בין הערכים.
למשל, מספר מכוניות למשפחה, משקל אדם בק״ג.
הדרך הקלה ביותר כדי לזהות עם הסולם הוא סולם מנה היא על ידי מבחן האפס.
בסולם מנה האפס הוא מוחלט, אבסולוטי, ומייצג אין.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**סוגי משתנים:**

נבצע סיווג של המשתנים:

**משתנה איכותי**

משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות, אין עניין כמותי לערכים המתקבלים. כמו: מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד..), מין האדם (זכר, נקבה), מצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן).

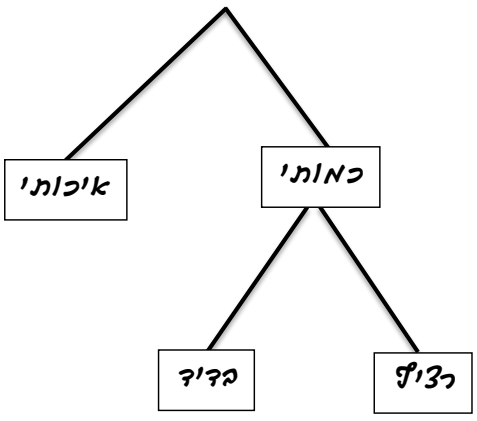
**משתנה כמותי**

משתנה שערכיו הם מספרים להם יש משמעות כמותית כמו: גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה. את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים:

משתנה בדיד: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו: מספר ילדים למשפחה (1,2,3..), ציון בבחינה (מ-0 ועד 100 בקפיצות של 1).

משתנה רציף: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים, הערכים מתקבלים ברצף – ללא קפיצות של ערכים.

דוגמאות: גובה בס"מ – אם הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ס"מ ועד 190 ס"מ – הגבהים בקבוצה הם ברצף. גם בין 160 ל-161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים (כמו 160.233 ס"מ, למשל).





© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** באיזה סולם מדידה המשתנים הבאים נחקרים (שמי/סדר/רווחים/מנה):

א. גובה (בס"מ).

ב. מספר ילדים למשפחה.

ג. מידת החרדה לפני מבחן.

ד. שביעות רצון משירות לקוחות בסקלה מ-1 עד 7 (1 - כלל לא מרוצה עד 7 - מרוצה מאד)

ה. השכלה.

ו. מספר אוטובוס.

ז. מקום מגורים.

ח. מין (1=גבר ; 2=אישה).

ט. מידת נעליים.

**2)** להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר":

| מספר האיחורים | מספר העובדים |
|---|---|
| 0 | 17 |
| 1 | 23 |
| 2 | 85 |
| 3 | 50 |
| 4 | 25 |

בחברה 200 עובדים.

א. מהו המשתנה הנחקר כאן?

ב. האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי?
אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?
באיזה סולם מדידה המשתנה?

**3)** להלן רשימה של משתנים כמותיים. ציינו האם הוא משתנה רציף/בדיד:

א. שכר ב-₪.

ב. ציון בחינת בגרות.

ג. תוצאה של הטלת קובייה.

ד. מהירות ריצה בתחרות.

ה. שיעור התמיכה בממשלה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. מנה. ב. מנה. ג. סדר.
ד. סדר. ה. מנה/ סדר. ו. שמי.
ז. שמי. ח. שמי. ט. סדר.

**2)** א. מספר האיחורים. ב. כמותי בדיד בסולם מנה.

**3)** א. רציף. ב. בדיד. ג. בדיד.
ד. רציף. ה. רציף.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 5

# סטטיסטיקה תיאורית – הצגה של נתונים:

## רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו:

### רשימה של תצפיות:

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים. למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות: 4, 5, 3, 4, 3.

### טבלת שכיחויות בדידה:

| שם המשתנה- $X$ | שכיחות – $f(x)$ | שכיחות יחסית באחוזים |
|---|---|---|
| $X_1$ | $f_1$ | $\frac{f_1}{N}\cdot 100$ |
| $X_2$ | $f_2$ | $\frac{f_2}{N}\cdot 100$ |
| $X_3$ | $f_3$ | $\frac{f_3}{N}\cdot 100$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $X_k$ | $f_k$ | $\frac{f_x}{N}\cdot 100$ |
| **סה"כ** | $N=\sum_{i=1}^{k} f_i$ | 100% |

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה:**

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

| הציון- $X$ | מספר התלמידים – השכיחות - $f$ | $F_i$ | $\frac{f_i}{n}$ |
|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 2 | 0.08=2/25 |
| 6 | 4 | 6 | 0.16=4/25 |
| 7 | 8 | 14 | 0.32=8/25 |
| 8 | 5 | 19 | 0.2=5/25 |
| 9 | 4 | 23 | 0.16=4/25 |
| 10 | 2 | 25 | 0.08=2/25 |

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחויות.

השכיחויות $F_i$ – השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שוות לערך.

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי:

$\frac{f_i}{n}$ – איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שוות לערך.

**טבלת שכיחויות במחלקות:**

משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד וטבלת שכיחויות תהיה ארוכה מידי.

**דוגמה:**

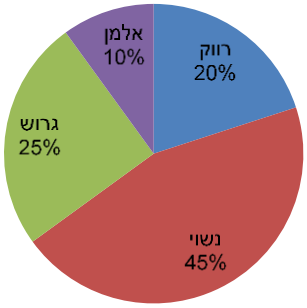
נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה, בדקו את התפלגות זמן הביצוע, בדקות.
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

| זמן בדקות | מספר הילדים |
|---|---|
| 0.5-3.5 | 20 |
| 3.5-9.5 | 18 |
| 9.5-19.5 | 14 |
| 19.5-29.5 | 8 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

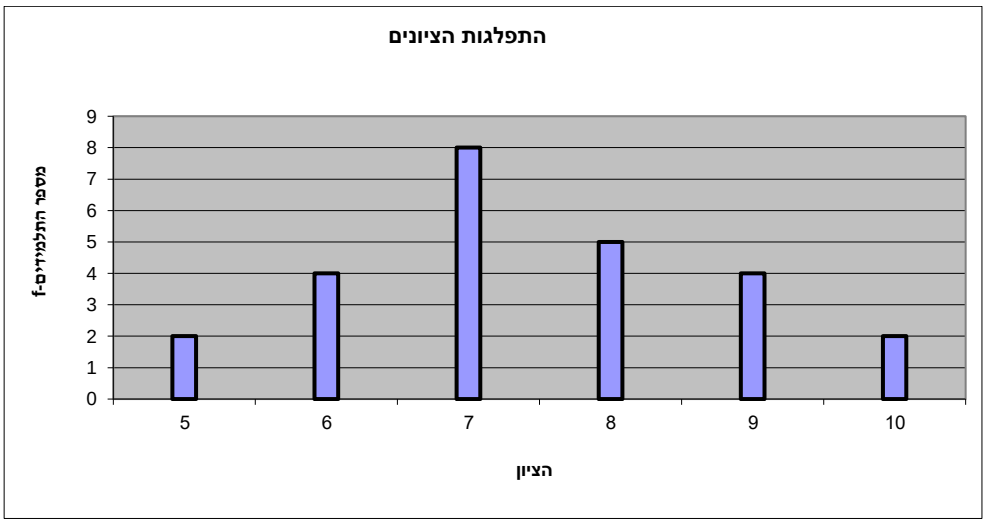
**דיאגרמת עוגה:**

זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגראמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח", שהוא פרופורציונלי לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.




**דיאגרמת מקלות:**

הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי של השכיחות, כך שהגובה של המקל מעיד על השכיחות. רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף, וכן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.



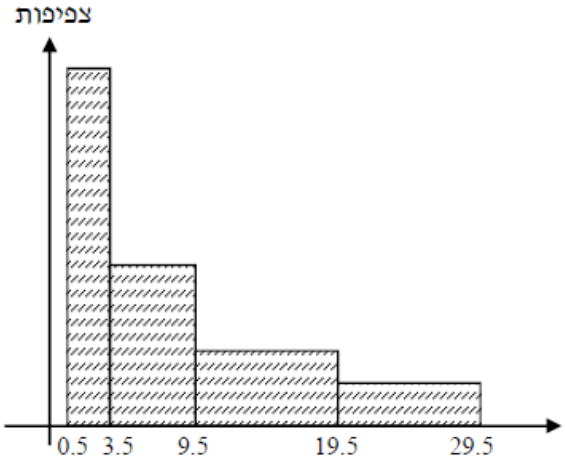


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**היסטוגרמה:**

היסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות, והיא רלוונטית למשתנה כמותי רציף.
בהיסטוגרמה הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי הוא הציר של הצפיפות.
הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה, והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחדה. אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

| $X$ | רוחב | אמצע | שכיחות | מצטברת | צפיפות |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 - 3.5 | 3 | 2 | 20 | 20 | 6.6667 |
| 3.5 - 9.5 | 6 | 6.5 | 18 | 38 | 3 |
| 9.5 - 19.5 | 10 | 14.5 | 14 | 52 | 1.4 |
| 19.5 - 29.5 | 10 | 24.5 | 8 | 60 | 0.8 |




**פוליגון – מצולעון:**

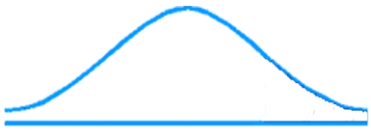
אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים.
נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**צורות התפלגות נפוצות:**

**התפלגות סימטרית פעמונית**

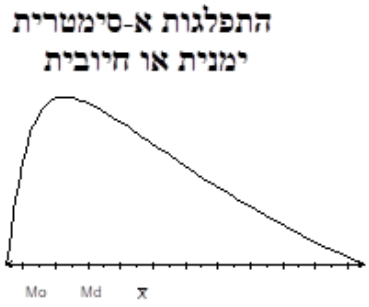
רוב התצפיות במרכז, וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. לדוגמה, ציוני IQ.



ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות, כגון:

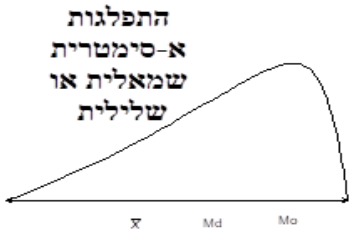
**התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית)**

רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. לדוגמה, שכר במשק.




**התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית)**

רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. לדוגמה, אורך חיים.





© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות: 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו-25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.

א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.

ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

**2)** להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

| מספר התלמידים | המקצוע |
|---|---|
| 44 | מתמטיקה |
| 20 | תנ"ך |
| 12 | אנגלית |
| 26 | היסטוריה |

א. מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?

**3)** להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

| מספר העובדים | השכלה |
|---|---|
| 60 | נמוכה |
| 120 | תיכונית |
| 20 | אקדמאית |

א. מהו המשתנה הנחקר?
מאיזה סולם הוא?

ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

**4)** להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.

א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?

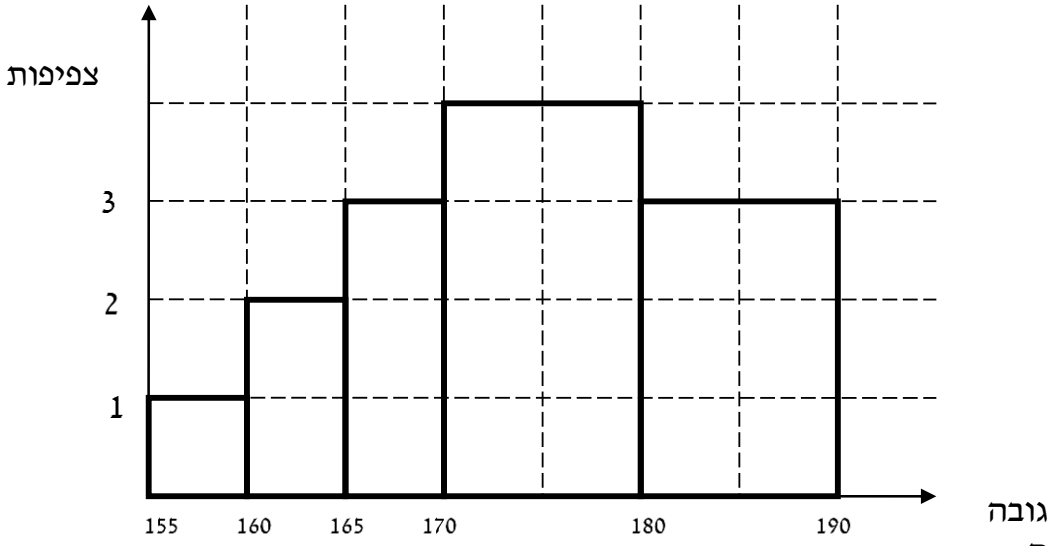
ב. תארו את הרשימה בטבלת שכיחויות.

ג. הוסיפו שכיחויות יחסיות לטבלה.

ד. תארו את הנתונים באופן גרפי.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס״מ של קבוצה מסוימת:




א. מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
ב. תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
ג. הוסיפו שכיחות יחסית לטבלה.
ד. הוסיפו את הצפיפות של כל מחלקה לטבלה.
ה. מהי צורת ההתפלגות של הגבהים?

**6)** להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק״ג:

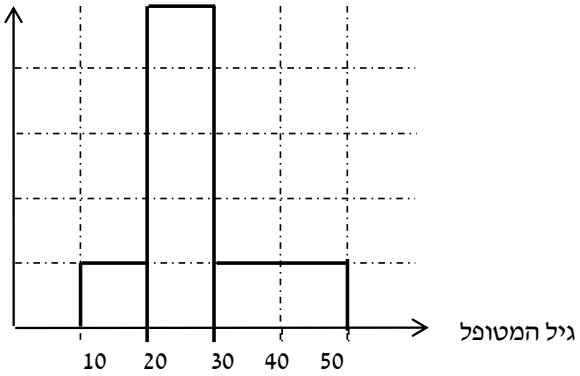
| משקל | מספר מקרים |
|---|---|
| 40-45 | 10 |
| 45-50 | 20 |
| 50-60 | 30 |
| 60-65 | 20 |
| 65-70 | 10 |

א. תארו את ההתפלגות באופן גרפי.
ב. מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**7)** להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים:
קנה מידה:




א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
ב. מהי הקבוצה הנחקרת?
ג. תרגמו את ההסיטוגרמה לטבלת שכיחות.
ד. מהי הפרופורציה של המטופלים של ד"ר שוורץ בגילאים 20-30?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. להלן טבלה:

| $x$ | $f(x)$ | $\frac{f(x)}{n}$ | % |
|---|---|---|---|
| **ערוץ 1** | 25 | $\frac{25}{200}$ | 12.5% |
| **ערוץ 10** | 25 | $\frac{25}{200}$ | 12.5% |
| **ערוץ 2** | 75 | $\frac{75}{200}$ | 37.5% |
| **כבלים** | 50 | $\frac{50}{200}$ | 25% |
| **לא צפו** | 25 | $\frac{25}{200}$ | 12.5% |
| **סה"כ** | 200 | 1 | 100% |

ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

**2)** א. מקצוע מועדף.

ב. 19.6%.

**3)** א. משתנה נחקר: השכלה, סוג: סדר.

ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** א. המשתנה: ציון, משתנה בדיד.
ד. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

ב+ג. להלן טבלה:

| $x$ | $f(x)$ | $\frac{f(x)}{n}$ | % |
|---|---|---|---|
| **4** | 1 | $\frac{1}{20}$ | 5% |
| **5** | 2 | $\frac{2}{20}$ | 10% |
| **6** | 6 | $\frac{6}{20}$ | 30% |
| **7** | 4 | $\frac{4}{20}$ | 20% |
| **8** | 4 | $\frac{4}{20}$ | 20% |
| **9** | 2 | $\frac{2}{20}$ | 10% |
| **10** | 1 | $\frac{1}{20}$ | 5% |
| **סה"כ** | 20 | 20 | 100% |

**5)** א. גובה בס"מ, רציף.

ב+ג+ד. להלן טבלה:

ה. אסימטרית.

| $x$ | $f(x)$ | $\frac{f(x)}{n}$ | % | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| **155-160** | 5 | $\frac{5}{100}$ | 5% | 1 |
| **160-165** | 10 | $\frac{10}{100}$ | 10% | 2 |
| **165-170** | 15 | $\frac{15}{100}$ | 15% | 3 |
| **170-180** | 40 | $\frac{40}{100}$ | 40% | 4 |
| **180-190** | 30 | $\frac{30}{100}$ | 30% | 3 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** א. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.
ב. סימטרית.

**7)** א. המשתנה: גיל בשנים, משתנה רציף.
ב. המטופלים של ד"ר שוורץ.
ד. להלן טבלה:
ה. 62.5%.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| **10-20** | 8 |
| **20-30** | 40 |
| **30-50** | 16 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית-גבולות מדומים ואמיתיים

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 16

# סטטיסטיקה תיאורית – גבולות מדומים וגבולות אמיתיים:

## רקע:

עבור משתנה רציף נהוג לתאר את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
הנתונים שנאספים הם ברמת דיוק מסוימת.
לדוגמה: משקל של בני אדם ומשקל של יהלומים ישקלו ברמת דיוק שונה.

**גבולות מדומים:**

כאשר גבול עליון של מחלקה אחת שונה מגבול תחתון של המחלקה הבאה אז הגבולות הם גבולות מדומים. כשהגבולות מדומים, ההפרש בין גבול תחתון של מחלקה לבין גבול עליון של המחלקה הקודמת יהיה רמת הדיוק.

**רמת הדיוק חייבת להיות קבועה -** אין אפשרות שחלק מהאנשים נדייק ברמה אחת ואת השאר ברמה אחרת. בגלל שהמשתנה הוא משתנה רציף, כשננתח את הנתונים נעבור מגבולות מדומים לגבולות אמתיים. אם הנתונים יינתנו בגבולות מדומים נהפוך אותם תמיד לגבולות אמיתיים.

כיצד עוברים מגבולות מדומים לגבולות אמיתיים?

לוקחים את רמת הדיוק ומחלקים אותה ב-2, ואת התוצאה המתקבלת מוסיפים לגבולות העליונים ומפחיתים מהגבולות התחתונים. אם יתנו נתונים בגבולות מדומים אנחנו מוכרחים לעבור לגבולות אמיתיים על מנת להמשיך ולנתח, אך אם הנתונים כבר יינתנו בגבולות אמיתיים נשאיר אותם כמו שהם.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

להלן התפלגות הגבהים בס״מ של תלמידי כיתה ח׳:
יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים.

| $f(x)$ | $X$ |
|---|---|
| 20 | 130-139 |
| 25 | 140-149 |
| 30 | 150-159 |
| 20 | 160-169 |
| 10 | 170-189 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** להלן התפלגות של משתנה בהצגה של מחלקות.
יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים:

| $f(x)$ | $X$ |
|---|---|
| 542 | 500-590 |
| 32 | 600-690 |
| 154 | 700-790 |
| 254 | 800-890 |

**2)** להלן התפלגות המשקלים בק"ג של קבוצת אנשים מסוימת.
יש לרשום את הנתונים בגבולות אמיתיים:

| משקל בק"ג | מספר אנשים |
|---|---|
| 60-64 | 18 |
| 65-69 | 24 |
| 70-79 | 52 |
| 80-89 | 19 |

## תשובות סופיות:

**1)** להלן טבלה:

| $f(x)$ | $x$ |
|---|---|
| 542 | 495-595 |
| 32 | 595-695 |
| 154 | 695-795 |
| 254 | 795-895 |

**2)** להלן טבלה:

| $f(x)$ | $x$ |
|---|---|
| 18 | 59.5-64.5 |
| 24 | 64.5-69.5 |
| 52 | 69.5-79.5 |
| 19 | 79.5-89.5 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית- סכימה

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 18

# סטטיסטיקה תיאורית – סכימה:

## רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת לסכום של תצפיות: $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

| $i$ | $X_i$ |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |
| 4 | 3 |
| 5 | 2 |

(הסבר מלא מופיע בסרטונים באתר).


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** בבניין 5 דירות. לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה $(X)$,
ומספר הנפשות החיות בדירה $(Y)$. חשבו:

| מספר דירה | $X$ | $Y$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 2 |
| 4 | 4 | 3 |
| 5 | 3 | 2 |

א. $\sum_{i=1}^{3} X_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{5} Y_i$.

ג. $\sum_{i=1}^{4} X_i$.

ד. $\left(\sum_{i=1}^{4} X_i\right)^2$.

ה. $\sum X_i$.

ו. $\sum X_i Y_i$.

ז. $\sum(X_i)\sum(Y_i)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**2)** נתון לוח ערכי המשתנים $X_i$ ו- $Y_i$, כאשר: $i=1,2,...,6$, ונתונים הקבועים: $a=2$, $b=5$. חשבו את הנוסחאות הבאות:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | 3 | 2 | 4 | -2 | 1 | 4 |
| $Y_i$ | 2 | 0 | 0 | 1 | -5 | 2 |

א. $\sum_{i=1}^{4} y_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{6} a$.

ג. $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i$.

ד. $\sum_{i=1}^{6} (x_i + y_i)$.

ה. $\sum_{i=1}^{6} x_i + a$.

**3)** קבעו לכל זהות האם היא נכונה:

א. $\sum_{i=1}^{n} bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{n} a = a \cdot n$.

ג. $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

**4)** נתון: $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 1640$ , $\sum_{i=1}^{10} X_i = 80$.

חשבו: $\sum_{i=1}^{10} (X_i - 4)^2$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. 7. ב. 9. ג. 11. ד. 121.
ה. 14. ו. 27. ז. 126.

**2)** א. 3. ב. 12. ג. 7.
ד. 12. ה. 14.

**3)** א. נכונה. ב. נכונה. ג. לא נכונה.

**4)** 1160.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 22

# סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום מרכזי:

## רקע:

המטרה במדדי המיקום המרכזי היא למדוד את מרכז ההתפלגות של התצפיות.

### השכיח – Mode:

השכיח הוא הערך הנפוץ ביותר בהתפלגות.

### ברשימה

הערך החוזר על עצמו הכי הרבה פעמים: 6, 10, 4, 8, 4, 9, 7.

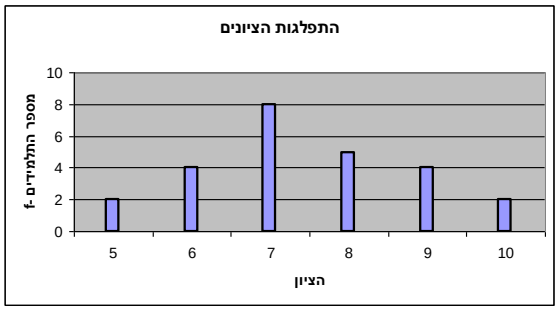
### בטבלת שכיחויות בדידה

הערך שהשכיחות שלו היא הגבוהה ביותר.

| # תוכניות החיסכון | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 1 | 75 |
| 2 | 25 |
| 3 | 25 |
| 4 | 25 |

### בדיאגרמת מקלות

שיעור ה- $X$ של המקל הגבוה ביותר.

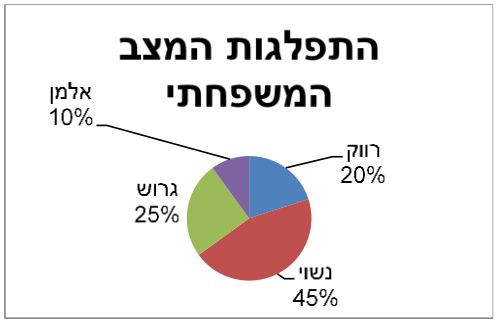




© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**בעוגה**

הערך של הפלח הגדול ביותר.




**בטבלת שכיחויות במחלקות**

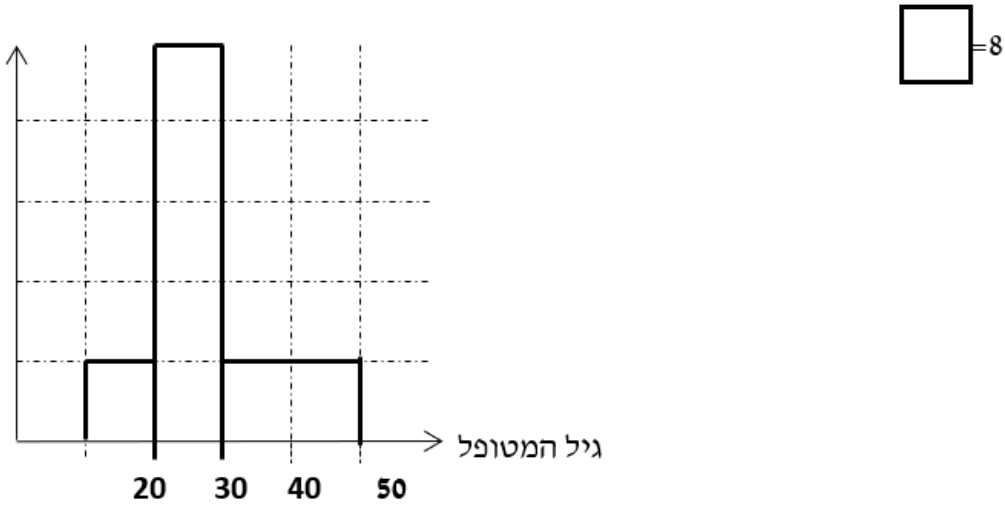
אמצע המחלקה עם הצפיפות הגבוהה ביותר.
לדוגמה, התפלגות הציונים בכיתה:

| $f(x)$ | $X$ |
|---|---|
| 20 | 0-60 |
| 10 | 60-70 |
| 18 | 70-80 |
| 15 | 80-90 |
| 15 | 90-100 |

**בהיסטוגרמה**

שיעור ה- $X$ של אמצע המחלקה הגבוהה ביותר.

לדוגמה, גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים:





© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**כללי**

יתכן שלהתפלגות יותר משכיח אחד.

השכיח הוא מדד הרלבנטי לכל סוגי המשתנים.

**אמצע תחום (טווח) – Midrange:**

הממוצע בין התצפית הגבוהה ביותר לתצפית הנמוכה ביותר:

$$MR = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}.$$

**החציון – Median:**

החציון הוא ערך שמחצית מהתצפיות קטנות או שוות לו ומחצית מהתצפיות גדולות או שוות לו.

**ברשימה**

נסדר את התצפיות בסדר עולה.

אם יש מספר אי זוגי של איברים, מקומו של החציון יהיה התצפית שמיקומה: $\frac{n+1}{2}$.

אם יש מספר זוגי של איברים – החציון הוא ממוצע של האיבר ה- $\frac{n}{2}$,

והאיבר ה-$\frac{n}{2}+1$, כלומר שיש מספר אי-זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = X_{\frac{n+1}{2}}$,

וכשיש מספר זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$.

**בטבלת שכיחויות בדידה**

נעשה תהליך דומה אך נעזר בשכיחות המצטברת.

**דיאגרמת מקלות**

נמיר לטבלת שכיחויות בדידה במטרה למצוא את החציון.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**בטבלת שכיחויות במחלקות**

שלב א: נמצא את המחלקה החציונית שמיקומה יהיה $\frac{n}{2}$.

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה: $Md = L_0 + \frac{\frac{n}{2} - F\left(x_{m-1}\right)}{f\left(x_m\right)} \cdot \left(L_1 - L_0\right)$.

$F\left(x_{m-1}\right)$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה החציונית.

$f\left(x_m\right)$ - השכיחות של המחלקה החציונית.

$L_0$ - גבול התחתון של המחלקה.

$L_1$ - גבול העליון של המחלקה.

**היסטוגרמה**

החציון הוא הערך על ציר ה- $X$ שמחלק את ההיסטוגרמה לשני חלקים שווים בשטח.

**כללי**

החציון אינו רלבנטי למשתנה מסולם שמי ולא רלבנטי למשתנה איכותי.

**הממוצע – Average:**

הממוצע הוא מרכז הכובד של ההתפלגות.

**ברשימה**

$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

**בטבלת שכיחויות**

$\overline{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**במחלקות**

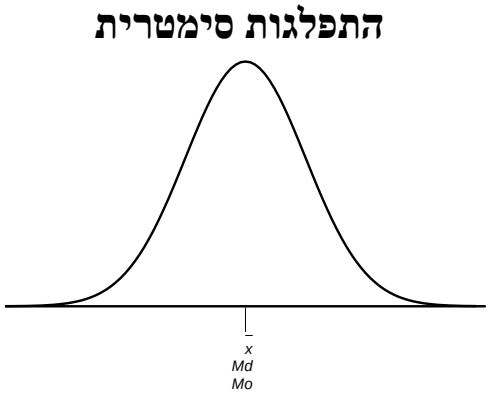
נשתמש באותה נוסחה רק נתייחס לאמצע המחלקה בתור ה- $X$ .
הממוצע הזה יהיה ממוצע מקורב.

**כללי**

הממוצע רלבנטי רק למשתנה כמותי.

**מדדי המיקום המרכזי בהתפלגויות המיוחדות:**

בהתפלגות סימטרית פעמונית כל מדדי המרכז שווים זה לזה:

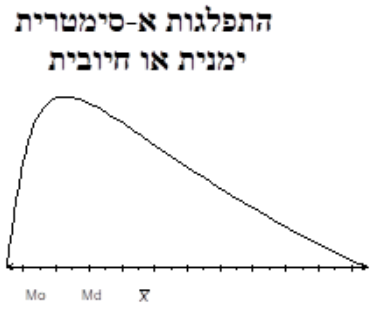



בהתפלגות סימטרית השכיח לא חייב להיות במרכז:











© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
חשבו את החציון, השכיח, והממוצע של הציונים.

**2)** בדקו את מספר החדרים לדירה בבניין בן 5 דירות והתקבל ממוצע 3.8.
לגבי 4 דירות נמצא מספר חדרים: 5, 4, 3, 4.

א. כמה חדרים יש בדירה החמישית?

ב. מהו השכיח ומהו החציון?

**3)** להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

| מספר משפחות | מספר מקלטים |
|---|---|
| 22 | 0 |
| 28 | 1 |
| 18 | 2 |
| 22 | 3 |
| 10 | 4 |

א. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של ההתפלגות.

ב. הסבירו ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת בסעיף א' היה משתנה אם חלק מהמשפחות (לא כולן) שלא היה להם עד היום טלוויזיה היו רוכשים מקלט אחד.

**4)** להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

| **מספר מכוניות למשפחה** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **שכיחות** | 65 | 150 | 220 | 140 | 55 |

א. כמה משפחות יש בישוב?

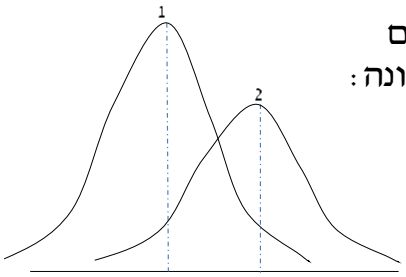
ב. מה אחוז המשפחות בישוב עם לכל היותר 2 מכוניות?

ג. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** מורה לימד 2 כיתות, הוא תיאר באותה מערכת צירים את התפלגות הציונים בכל כיתה. בחרו בתשובה הנכונה:




א. בכיתה 1 השכיח גבוה יותר מכיתה 2.

ב. בכיתה 2 השכיח גבוה יותר מכיתה 1.

ג. בשתי הכיתות אותו שכיח.

ד. לא ניתן לדעת באיזו כיתה השכיח גדול יותר.

**6)** ביישוב מסוים בדקו לכל משפחה את מספר הטלוויזיות שיש לה בבית. ביישוב גרות 200 משפחות. בממוצע יש למשפחה 1.5 טלוויזיות.

| מספר טלוויזיות | מספר משפחות |
|---|---|
| 0 | 28 |
| 1 | 62 |
| 2 | |
| 3 | |

א. השלימו את הטבלה.

ב. מהו השכיח, אמצע טווח והחציון.

ג. חלק מהמשפחות להן הייתה טלוויזיה אחת בדיוק הוציאו את הטלוויזיה מביתם. כיצד כל מדד ישתנה (יגדל, יקטן או לא ישתנה). הסבירו ללא חישוב.

**7)** להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג.
מה הממוצע והחציון של ההתפלגות?

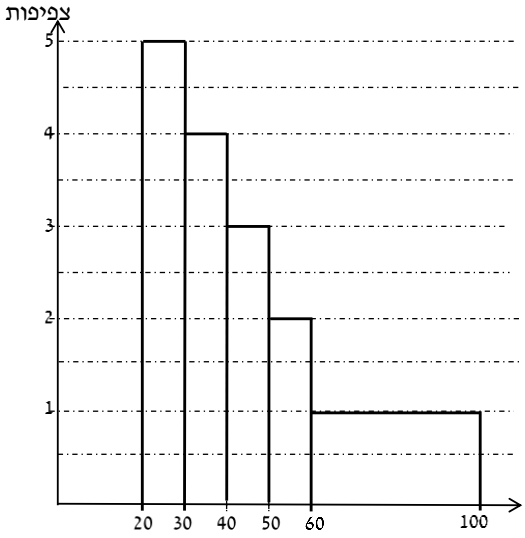
| משקל | מספר מקרים |
|---|---|
| 40-45 | 10 |
| 45-50 | 20 |
| 50-60 | 30 |
| 60-65 | 20 |
| 65-70 | 10 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**8)** להלן התפלגות הגבהים בס"מ בקבוצה מסוימת.
חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של הגבהים בקבוצה זו.

| גובה בס"מ | שכיחות |
|---|---|
| 150-160 | 30 |
| 160-170 | 40 |
| 170-175 | 60 |
| 175-180 | 70 |
| 180-190 | 40 |

**9)** בפקולטה מסוימת בדקו לסטודנטים העובדים בה את השכר לשעת עבודה.
להלן התוצאות:




א. מצאו את השכיח בהתפלגות.

ב. מצאו את החציון בהתפלגות.

ג. הסבירו ללא חישוב האם הממוצע גדול/קטן/שווה לחציון.

ד. הסתבר שיש להוציא מספר תלמידים במחלקה בין 20-30 שקלים.
כיצד הדבר ישפיע על הממוצע, החיצון והשכיח? הסבירו ללא חישוב.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** חציון: 7, שכיח: 6, ממוצע: 6.9.

**2)** א. 3. ב. שכיח: 3.4, חציון: 4.

**3)** א. ממוצע: 1.7, חציון: 1.5, שכיח: 1.
ב. הממוצע יגדל ויתר המדדים לא ישתנו.

**4)** א. 630. ב. 34.13%. ג. שכיח וחציון: 3, ממוצע: 2.952.

**5)** ב'.

**6)** א. להלן טבלה: ב. חציון: 2, שכיח: 2, אמצע טווח: 1.5.

| מספר טלוויזיות | מספר משפחות |
|---|---|
| 0 | 28 |
| 1 | 62 |
| 2 | 92 |
| 3 | 18 |

ג. שכיח: לא ישתנה, אמצע הטווח: לא ישתנה, חציון: לא ישתנה, ממוצע: יקטן.

**7)** חציון וממוצע: 55.

**8)** ממוצע: 172.6, חציון: 174.17, שכיח: 177.5.

**9)** א. 25. ב. 40. ג. גדול מהחציון.
ד. שכיח: לא ישתנה, חציון: יגדל, ממוצע: יגדל.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן

תוכן העניינים

1. כללי ..... 31

# סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – הטווח, השונות וסטיית התקן:

## רקע:

**המטרה:** למדוד את הפיזור של הנתונים, כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

**הטווח / תחום (RANGE):**
ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר: $R = X_{\max} - X_{\min}$.

**שונות וסטיית תקן:**

שונות היא ממוצע ריבועי של הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

עבור סדרת נתונים: $S_x^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$.

**דוגמאות:**

**1)** נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה: 9, 4, 5.

עבור טבלת שכיחויות: $S_x^{\,2} = \frac{\sum(x-\bar{x})^2 f}{n} = \frac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2$.

**2)** להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44.

| הציון $X$ | השכיחות $F$ | $x^2 \cdot F$ |
|---|---|---|
| 5 | 2 | 50 |
| 6 | 4 | 144 |
| 7 | 8 | 392 |
| 8 | 5 | 320 |
| 9 | 4 | 324 |
| 10 | 2 | 200 |
| **סה"כ** | | **1430** |

$$S_x^{\,2} = \frac{\sum_x x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$S = \sqrt{S_x^{\,2}} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

**2)** להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

| מספר מכוניות למשפחה | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| שכיחות | 65 | 150 | 220 | 140 | 55 |

א. חשבו סטיית התקן.

ב. חשבו את הטווח של הנתונים.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם.

**3)** בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.

א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?

ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?

**4)** נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע: 2, 3, 2, -1. חשבו את השונות של חמש התצפיות.

**5)** בשכונה בדקו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

| מספר חדרים | פרופורציה |
|---|---|
| 1 | 0.1 |
| 2 | 0.2 |
| 3 | 0.4 |
| 4 | 0.15 |
| 5 | |

א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?

ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.

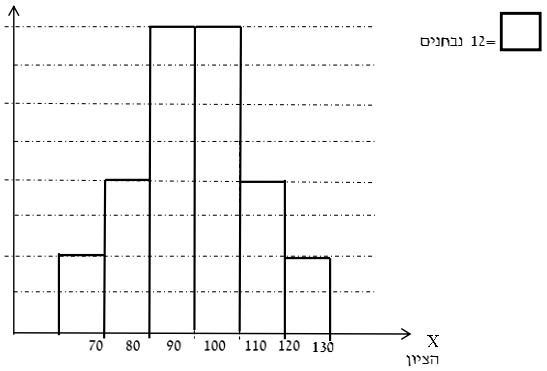
ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע (יקטין, יגדל, לא ישנה) על כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:
מהי סטיית התקן של התפלגות המשקל?

| משקל | מספר מקרים |
|---|---|
| 40-45 | 10 |
| 45-50 | 20 |
| 50-60 | 30 |
| 60-65 | 20 |
| 65-70 | 10 |

**7)** להלן התפלגות הציונים במבחן אינטליגנציה:




א. מה הממוצע ומה החציון של ההתפלגות?

ב. חשבו את סטיית התקן של הציונים.

ג. מסתבר שיש להוסיף 20 תצפיות לכל אחת משתי המחלקות 90-100 ו- 100-110. כיצד הדבר ישתנה את כל אחד מהמדדים של הסעיפים הקודמים?

## תשובות סופיות:

**1)** שונות: 2.19, סטיית תקן: 1.48, טווח: 6.

**2)** א. סטיית תקן: 1.106. ב. טווח: 4.

**3)** א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.

ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.

**4)** 10.8.

**5)** א. 3.05. ב. 1.16. ג. ממוצע: יקטן, סטיית התקן: תגדל.

**6)** 7.73.

**7)** א. 100. ב. 12.96. ג. ממוצע: לא ישתנה, סטיית תקן: תקטן.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 34

# סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – טווח בין רבעוני:

## רקע:

הטווח הבין-רבעוני נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות.

**שלבים במציאת טווח בין-רבעוני במחלקות:**

| מספר שנות ותק | רוחב $L_1-L_0$ | $f$ מספר עובדים (שכיחות) | $F$ |
|---|---|---|---|
| $0.5-4.5$ | 4 | 56 | 56 |
| $4.5-9.5$ | 5 | 50 | 106 |
| $9.5-11.5$ | 2 | 48 | 154 |
| $11.5-14.5$ | 3 | 36 | 190 |
| $14.5-19.5$ | 5 | 10 | 200 |

שלב א:

נמצא את הרבעון התחתון (אחוזון 25) והרבעון העליון (האחוזון ה-75).

מיקום הרבעון התחתון יהיה: $\frac{n}{4}$. מיקום הרבעון העליון יהיה: $\frac{3n}{4}$.

נוסחאות הרבעונים יהיו:

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{n}{4} - F\left(x_{m-1}\right)}{f\left(x_m\right)} \cdot \left(L_1 - L_0\right)$$

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3n}{4} - F\left(x_{m-1}\right)}{f\left(x_m\right)} \cdot \left(L_1 - L_0\right)$$

נציב:

$$Q_1 = 0.5 + \frac{\frac{200}{4} - 0}{56} \cdot 4 = 4.07 \text{ שניות}$$

$$Q_3 = 9.5 + \frac{\frac{3 \cdot 200}{4} - 106}{48} \cdot 2 = 11.33 \text{ שניות}$$

שלב ב:

נחסר את הרבעונים: $IQR = Q_3 - Q_1 = 11.33 - 4.07 = 7.26$ שניות


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

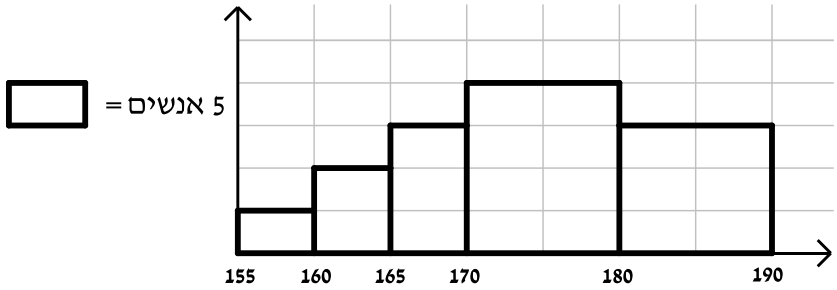
## שאלות:

**1)** להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

| משקל | מספר מקרים |
|---|---|
| 40-45 | 10 |
| 45-50 | 20 |
| 50-60 | 30 |
| 60-65 | 20 |
| 65-70 | 10 |

מצאו את הטווח הבין-רבעוני.

**2)** להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:




מצאו את הטווח הבין-רבעוני.

## תשובות סופיות:

**1)** 13.75 ק"ג.

**2)** 13.33 ק"ג.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 36

# סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – ציון תקן:

## רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמת ביחס לשאר התצפיות בהתפלגות.

### ציון תקן:

הנוסחה לציון תקן של תצפית היא: $Z = \frac{X - \overline{X}}{S}$.

ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע. כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע:

- ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.
- ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.
- ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

במקום עבודה מסוים, ממוצע המשכורות הוא 8 אלף ₪, עם סטית תקן של אלפיים ₪.
באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים, עם סטית תקן של 1.5 שנים. ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים.
מה ערן יותר, באופן יחסי, משכיל או משתכר?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

| המקצוע | ממוצע | סטיית תקן |
|---|---|---|
| לשון | 74 | 12 |
| מתמטיקה | 80 | 16 |

עודד קיבל: 68 בלשון ו-70 במתמטיקה.

א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?

ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

**2)** במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.
להלן טבלה המסכמת את המידע שנאסף על שני המשתנים:

| | תפוקה | מספר פועלים |
|---|---|---|
| **ממוצע** | 48 | 15 |
| **סטיית תקן** | 10 | 2 |

באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.
מה יותר חריג באותו היום, יחסית לשאר הימים שנבדקו: נתוני התפוקה או כמות הפועלים?

א. התפוקה.

ב. כמות הפועלים.

ג. חריגים באותה מידה.

ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

**3)** הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן של 10 סנטימטר. המשקל הממוצע הוא 66 ק"ג עם סטיית תקן של 8 ק"ג.
ערן התגייס כשגובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.

א. במה ערן חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים, גובהו או משקלו?

ב. כמה ערן אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

## תשובות סופיות:

**1)** א. לשון. ב. 72.

**2)** ב'.

**3)** א. משקל. ב. 70.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית-מדדי מיקום יחסי-אחוזונים במחלקות

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 38

# סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – אחוזונים במחלקות:

## רקע:

האחוזון (המאון) ה- $p$ הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת שעד אליו יש $p$ % מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- $p$ ב- $X_p$.
למשל, המאון ה-25 הוא האחוזון ה-25 או הרבעון התחתון:
ערך שרבע מהתצפיות קטנות ממנו והשאר גבוהות ממנו. מסומן: $X_{0.25}$.

**מציאת מאון במחלקות:**

שלב א: נמצא את המחלקה הרלבנטית שמיקומה יהיה: $\frac{np}{100}$.

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה: $x_p = L_0 + \frac{\frac{n\cdot p}{100} - F\left(x_{m-1}\right)}{f\left(x_m\right)} \cdot \left(L_1 - L_0\right)$, את המשתנים:

$F\left(x_{m-1}\right)$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה הרלבנטית.

$f\left(x_m\right)$ - השכיחות של המחלקה הרלבנטית.

$L_0$ - גבול התחתון של המחלקה.

$L_1$ - גבול העליון של המחלקה.

אם נרצה לחלץ את אחוז התצפיות שמתחת לערך מסוים נשתמש בנוסחה הבאה: $P_x = \left[\frac{\left(x - L_0\right)}{\left(L_1 - L_0\right)} \cdot f\left(x_m\right) + F\left(x_{m-1}\right)\right] \cdot \frac{100}{n}$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

להלן התפלגות השכר של עובדים בחברה מסוימת:

| שכר ב-₪ | |
|---|---|
| 4000-6000 | 140 |
| 6000-10000 | 128 |
| 10000-15000 | 60 |
| 15000-20000 | 54 |
| 20000-40000 | 18 |

א. מצאו את המאון ה-40.

ב. מהו אחוז העובדים שמשתכרים מתחת ל-5,000 ₪?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** להלן התפלגות השכר (באלפי שקלים) בחברה:

| שכר - $X$ | שכיחות מצטברת |
|---|---|
| 6-10 | 48 |
| 10-15 | 100 |
| 15-20 | 120 |
| 20-30 | 132 |
| 30-60 | 136 |

א. חשבו את המאון ה-60.

ב. מהו העשירון העליון?

ג. 20% מהמשכורות הגבוהות ביותר הן משכורות של הבכירים, מהי המשכורת המינימאלית לבכיר?

ד. מה אחוז האנשים שמשתכרים מתחת ל-7,000 ₪?

ה. איזה אחוז מהעובדים משתכרים מעל ל-25,000 ₪?

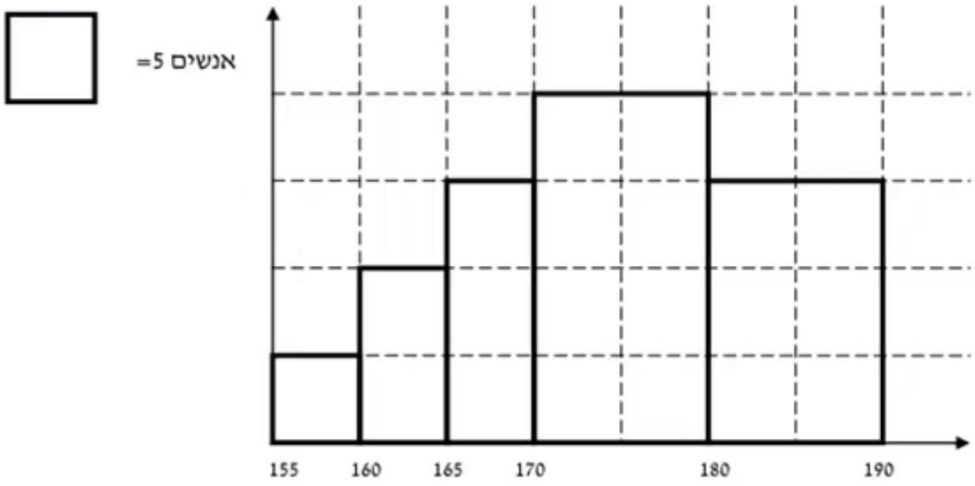
ו. איזה אחוז מהעובדים משתכרים בין 7,000 ₪ ל-25,000 ₪?

**2)** למבחן ניגשו 400 נבחנים. נתון שהעשירון התחתון הוא הציון 60. הרבעון העליון הוא הציון 80. כמו כן ההתפלגות של הציונים היא סימטרית. מלאו את השכיחויות החסרות.

| ציון- $X$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 50-60 | |
| 60-70 | |
| 70-80 | |
| 80-90 | |
| 90-100 | |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**3)** להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס״מ של קבוצה מסוימת:




חשבו:

א. העשירון התחתון.

ב. האחוזון ה-30.

ג. הגובה ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.

ד. את אחוז התצפיות מתחת לגובה 158 ס״מ.

ה. את אחוז התצפיות מעל לגובה 185 ס״מ.

ו. את אחוז התצפיות בין גובה 170 ס״מ ל-185 ס״מ.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 13.23. ב. 22. ג. 17.2. ד. 8.82%. ה. 7.36%.
ו. 83.82%.

**2)** להלן טבלה:

| ציון- $X$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 50-60 | 40 |
| 60-70 | 60 |
| 70-80 | 200 |
| 80-90 | 60 |
| 90-100 | 40 |

**3)** א. 162.5. ב. 170. ג. 183.33. ד. 3%. ה. 15%.
ו. 55%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 10 - סטטיסטיקה תיאורית-אחזונים בטבלה בדידה

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 41

# סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – אחוזונים בטבלה בדידה:

## רקע:

האחוזון (המאון) ה- $p$ הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת, שעד אליו (כולל) יש $p$ % מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- $p$ ב- $X_p$ .

**חישוב האחוזון מתוך נתונים בטבלת שכיחויות בדידה:**

האחוזון הוא הערך שבו בפעם הראשונה השכיחות היחסית המצטברת (באחוזים) גדולה או שווה ל- $p$ % .

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תוכניות החיסכון שלו:

| # תוכניות החיסכון | $F(x)$ | שכיחות מצטברת | שכיחות יחסית מצטברת |
|---|---|---|---|
| 0 | 100 | | |
| 1 | 75 | | |
| 2 | 25 | | |
| 3 | 25 | | |
| 4 | 25 | | |

א. מצאו את האחוזון ה-25.

ב. מצאו את הערך ש-20% מהמקרים מעליו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** להלן התפלגות של משתנה כלשהו:

| $X$ | $F(x)$ |
|---|---|
| 0 | 10 |
| 1 | 40 |
| 2 | 30 |
| 3 | 15 |
| 4 | 5 |

מצאו להתפלגות את:

א. האחוזון ה-60.

ב. המאון ה-40.

ג. העשירון העליון.

ד. הטווח בין הרבעונים.

**2)** להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

| **מספר מכוניות למשפחה** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **שכיחות** | 65 | 150 | 220 | 140 | 55 |

חשבו את:

א. העשירון התחתון.

ב. האחוזון ה-30.

ג. הערך ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.

ד. רבעון עליון.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 2 ב. 1. ג.3. ד. 1.

**2)** א. 1. ב. 2. ג. 4. ד. 4.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

1. כללי ..... 43

# סטטיסטיקה תיאורית – טרנספורמציה לינארית:

## רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה (או החסרה) של קבוע, והכפלה (או חילוק) של קבוע, לכל התצפיות: $y = a \cdot x + b$. כך יושפעו המדדים השונים:

**מדדי המרכז:**

$$MR_y = a \cdot MR + b$$
$$MO_y = a \cdot MO + b$$
$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$$
$$Md_y = a \cdot \leq Md_x + b$$

**מדדי הפיזור:**

$$R_y = |a| R_x$$
$$S_y = |a| S_x$$
$$S_y^{\,2} = a^2 S_x^{\,2}$$

**מדדי המיקום היחסי:**

$$Y_p = a \cdot X_p + b$$
$$Z_Y = \frac{a}{|a|} Z_x$$

**שלבי העבודה:**

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי $a$ ו-$b$.
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

השכר הממוצע של עובדים הינו 9000 ₪ וטווח 6000 ₪. חשבו את המדדים הללו לאחר שהעלו את כל המשכורות ב-10% ואחר כך קנסו אותם ב-100 ₪.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** עבור סדרת נתונים התקבל: $\bar{x}=80, S=15, MO=70$.
הוחלט להכפיל את כל התצפיות ב-4 ולהחסיר מהתוצאה 5.
חשבו את המדדים הללו לאחר השינוי.

**2)** בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ₪ לשעה עם סטיית תקן של 5 ₪ לשעה.
הוחלט להעלות את כל המשכורות ב-10%, אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ₪ לשעה.
מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.

**3)** במבחן מסוים הציון החציוני היה 73, טווח הציונים היה 40 נקודות והעשירון העליון היה הציון 87. כיוון שהציונים בבחינה היו נמוכים, המורה החליט לתת פקטור של 4 נק' לכל התלמידים.
חשבו את המדדים לאחר הפקטור.

**4)** דגמו מקו ייצור 50 קופסאות של גפרורים. בדקו בכל קופסא בה יש 40 גפרורים את כמות הגפרורים הפגומים. התקבל שבממוצע יש 3 גפרורים פגומים בקופסא, עם סטיית תקן של 1.5 גפרורים.
מה יהיה הממוצע ומה תהיה סטיית התקן של מספר התקינים בקופסא?

**5)** חברת בזק הציעה את ההצעה הבאה: שלושים שקלים דמי מנוי חודשיים קבועים וכן 10 אגורות לכל דקה של שיחה יוצאת. אדם בדק במשך שנה את דקות השיחות היוצאות שלו, וקיבל שבממוצע חודשי יש לו 600 דקות שיחות יוצאות עם שונות של 2500 דקות רבועות, כמו כן בחודש ינואר ציון התקן היה 2.
חשבו את המדדים הללו עבור חשבון הטלפון החודשי של אותו אדם בשקלים אם היה משתמש בחבילה המוצעת לו על ידי בזק.

**6)** הוכיחו שאם כל התצפיות בהתפלגות עברו טרנספורמציה לינארית: $Y_i = a \cdot X_i + b$,
אזי הממוצע והשונות של כלל התצפיות לאחר הטרנספורמציה יהיו בהתאמה:
$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b, S_y^2 = a^2 S_x^2$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

1) ממוצע: 315, סטיית תקן: 60, שכיח: 275.
2) ממוצע: 46, שונות: 30.25.
3) טווח: 40, חציון: 77, עשירון עליון: 91.
4) ממוצע: 37, סטיית תקן: 1.5.
5) ממוצע: 90, שונות: 25, ציון תקן: 2.
6) $a^2 \cdot S_x^2$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 46

# סטטיסטיקה תיאורית – שאלות מסכמות:

## שאלות:

**1)** בדקו עבור 5 תלמידים את המשקל שלהם:

| מספר תלמיד | משקל בק"ג |
|---|---|
| 1 | 58 |
| 2 | 62 |
| 3 | 48 |
| 4 | 34 |
| 5 | 58 |

א. מהו המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?

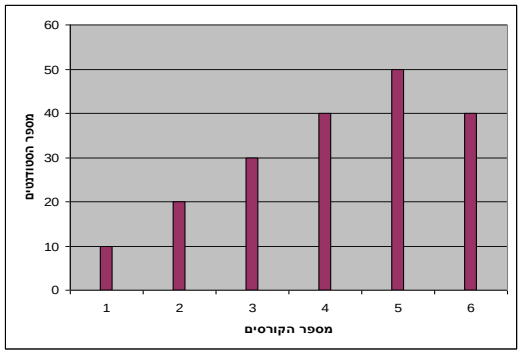
ב. מה המשקל החציוני, הממוצע והשכיח?

ג. מה הטווח וסטיית התקן של המשקל?

ד. לאותם תלמידים חישבו גם את הגובה בס"מ וקיבלו גובה ממוצע של 168 וסטיית תקן 6. במה תלמיד מספר 3, שגובהו 162, יותר חריג – במשקל או בגובה?

ה. הוסיפו עוד תלמיד השוקל 52 ק"ג בדיוק. הסבירו ללא חישוב כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן (יגדיל, יקטין או לא ישנה).

**2)** בפקולטה להנדסה אספה המזכירות נתונים לגבי מס' הקורסים שכל סטודנט סיים בשנה הראשונה ללימודיו בשנת 2008. להלן התוצאות שהתקבלו:




א. מה המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?

ב. מהי צורת ההתפלגות?

ג. תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות.

ד. חשבו את השכיח, החציון והטווח.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**3)** להלן התפלגות הציונים בבחינה בלשון שנעשתה עבור תלמידי כיתות ד'.
במחקר השתתפו 150 תלמידים. ממוצע הציונים שהתקבל: $\overline{X} = 7\frac{1}{15}$.

| ציון | מספר התלמידים |
|---|---|
| 4 | 12 |
| 5 | 16 |
| 6 | |
| 7 | 38 |
| 8 | |
| 9 | 14 |
| 10 | 10 |

א. השלימו את השכיחויות החסרות בטבלה.
ב. חשבו את הציון החציוני, השכיח.
ג. חשב שונות וסטיית תקן להתפלגות הציונים.

**4)** חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדקה מידת שביעות הרצון של הלקוח מהחברה (1 - שביעות רצון נמוכה ו-5 - שביעות רצון גבוהה).
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

| שביעות רצון | מספר האנשים |
|---|---|
| 1 | 40 |
| 2 | 60 |
| 3 | 50 |
| 4 | 30 |
| 5 | 20 |

א. מה אחוז האנשים עם רמת שביעות רצון נמוכה?
ב. מה המשתנה הנחקר ומאיזה סוג הוא?
ג. מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר לתיאור הנתונים?
   i. היסטוגרמה.
   ii. דיאגרמת מקלות.
   iii. דיאגרמת עוגה.
ד. חשבו את המדדים הבאים:
   i. טווח.
   ii. שכיח.
   iii. חציון.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** להלן התפלגות מספר שעות העבודה לשבוע של העובדים (כ-200) בחברת "סטאר":

| מספר שעות עבודה | שכיחות יחסית (פרופורציה) | שכיחות |
|---|---|---|
| 10-20 | 15% | |
| 20-30 | 20% | |
| 30-40 | 30% | |
| 40-50 | 20% | |
| 50-60 | | |

א. השלימו את הטבלה.

ב. חשבו את החציון, השכיח והממוצע של התפלגות מס' שעות העבודה בחברה.

ג. מה סטיית התקן של מספר שעות העבודה?

ד. מה העשירון העליון של ההתפלגות?

ה. איזה אחוז מהעובדים עובדים מעל 45 שעות בשבוע?

ו. מה ציון התקן של רינה, שעובדת 30 שעות בשבוע?

ז. כיצד ישתנה החציון, הממוצע וסטיית התקן אם מספר שעות העבודה המינימאלי אינו 10 אלא 15? הסבירו.

**6)** חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדק מס' המסרונים ששלח במשך חודש. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

| מספר המסרונים | מספר האנשים |
|---|---|
| 0-50 | 40 |
| 50-100 | 60 |
| 100-150 | 50 |
| 150-250 | 30 |
| 250-ומעלה | 20 |

א. מה אחוז האנשים ששלחו פחות מ-80 מסרונים בחודש?

ב. מה אחוז האנשים ששלחו בין 50 ל-120 מסרונים?

ג. הוחלט להעניק מתנה עבור $\frac{1}{4}$ מהלקוחות שמשתמשים במספר הרב ביותר של מסרונים בחודש. החל מאיזה כמות של מסרונים תחולק המתנה?

ד. ציינו איזה מדד ניתן לחשב ואיזה לא ניתן. אם ניתן, חשבו:

i. ממוצע.

ii. שכיח.

iii. חציון.

iv. שונות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**7)** נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

| זמן בדקות | מספר הילדים |
|---|---|
| 0.5-3.5 | 20 |
| 3.5-9.5 | 18 |
| 9.5-19.5 | 14 |
| 19.5-29.5 | 8 |

א. שרטטו היסטוגרמה לתיאור התפלגות זמן ביצוע המשימה.

ב. מתוך ההיסטוגרמה שבנית בסעיף א', מהי צורת ההתפלגות?

ג. חשבו את השכיח והחציון של ההתפלגות.

ד. הסבירו, ללא חישוב, האם הזמן הממוצע לביצוע המשימה, קטן או גדול או שווה ביחס לשכיח ולחציון.

**8)** התפלגות ציוני מבחן אינטליגנציה היא סימטרית. נתון שהעשירון העליון הוא 130, הרבעון התחתון הוא 90, ושלמבחן נגשו 500 מועמדים.

| הציון | מספר הנבחנים |
|---|---|
| 50-70 | |
| 70-90 | |
| 90-100 | |
| 100-110 | |
| 110-130 | |
| 130-150 | |

א. השלימו את הטבלה.

ב. מהו הממוצע והחציון של ההתפלגות?

ג. מהו הציון ש-40% מהתלמידים קיבלו מעליו? באיזה אחוזון מדובר?

ד. הוחלט להעלות את כל הציונים ב-10 נקודות.
כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן של הציונים?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**9)** להלן מספר טענות, עבור כל טענה ציינו אם היא נכונה או לא נכונה ונמקו.

א. בסדרה שבה כל התצפיות שוות זו לזו השונות הינה 0.

ב. ציון התקן של החציון תמיד יהיה 0.

ג. ציון התקן של האחוזון ה-70 בהתפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) תמיד יהיה חיובי.

ד. אם נוסיף תצפיות לסדרה של תצפיות, הדבר בהכרח יגדיל את הממוצע של הסדרה.

ה. בסדרה החציון הינו 80. הוספו שתי תצפיות אחת 79 ואחת 100 לכן החציון יגדל.

ו. אם נוסיף את הערך 4 לכל התצפיות אז סטיית התקן לא תשתנה.

ז. אם נחלק את כל התצפיות בהתפלגות ב-2 אז השונות תקטן פי 2.

ח. אם נגדיל את ממוצע המשכורות של עובדים בחברה אז גם השונות תגדל.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. המשתנה הנחקר: משקל תלמיד בק"ג, משתנה כמותי רציף.

ב. $\bar{X}=52$ , $Md=X_{\frac{n+1}{2}}=X_3=58$ , שכיח: 58.

ג. $S=10.12$ , $R=28$.

ד. הוא חריג יותר בגובה כי שם ציון התקן בערך מוחלט יותר גבוה.

ה. הממוצע לא ישתנה אך סטיית התקן תקטן.

**2)** א. מספר הקורסים, בדיד. ב. התפלגות אסימטרית שמאלית.

ג. להלן טבלה: ד. שכיח: 5, טווח: 5.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 10 |
| 2 | 20 |
| 3 | 30 |
| 4 | 40 |
| 5 | 50 |
| 6 | 40 |
| **סה"כ** | **190** |

**3)** א. 20 תלמידים קיבלו ציון 6 ו-40 תלמידים קיבלו ציון 8.

ב. חציון: 7, שכיח: 8. ג. שונות: 2.533 , סטיית תקן: 1.592.

**4)** א. 20%.

ב. שביעות רצון (סדר).

ג. ii.

ד. טווח: 4, שכיח: 2, חציון: 2.

**5)** א. להלן טבלה:

ב. חציון: 35, שכיח: 35, ממוצע: 35.

| מספר שעות עבודה | שכיחות יחסית (פרופורציה) | שכיחות |
|---|---|---|
| 10-20 | 15% | 30 |
| 20-30 | 20% | 40 |
| 30-40 | 30% | 60 |
| 40-50 | 20% | 40 |
| 50-60 | 15% | 30 |

ג. סטיית תקן: 12.65.

ד. 53.333.

ה. 25%.

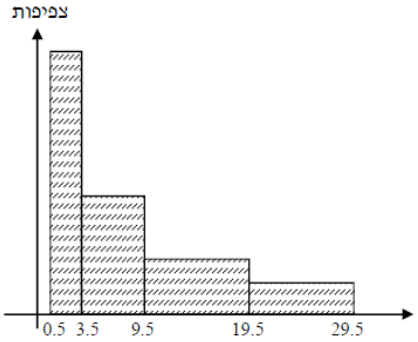
ו. -0.395.

ז. חציון לא ישתנה, ממוצע יגדל, סטיית תקן תקטן.

**6)** א. 38% ב. 40% ג. 150 ד. חציון: 100.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**7)** א. שרטוט: ב. ההתפלגות היא א-סימטרית ימנית.




ג. שכיח: 2, חציון: 6.83.

ד. בהתפלגות א-סימטרית ימנית מתקיים: $Mo < Md < \bar{X} < MR$.

**8)** א. ראו טבלה:

| ציון | מספר הנבחנים |
|---|---|
| 50-70 | 50 |
| 70-90 | 75 |
| 90-100 | 125 |
| 100-110 | 125 |
| 110-130 | 75 |
| 130-150 | 50 |

ב. 100. ג. 104.

ד. הממוצע יעלה ב-10 נקודות, אך סטיית התקן לא תשתנה.

**9)** א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.
ו. נכון. ז. לא נכון. ח. לא נכון.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 13 - סטטיסטיקה תיאורית שאלות אמריקאיות

תוכן העניינים

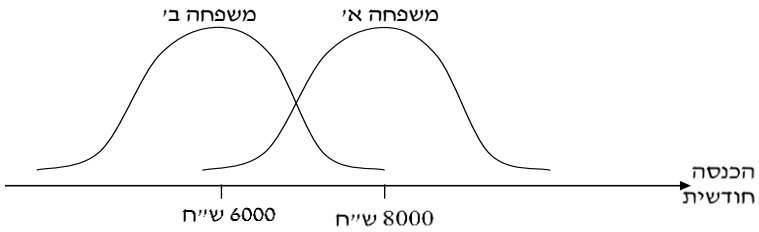
1. כללי ..... 53

# סטטיסטיקה תיאורית – שאלות אמריקאיות:

## שאלות:

**שאלות 1-3 מתייחסות לקטע הבא:**

להלן שתי עקומות המתארות את התפלגות ההכנסות החודשיות של שתי משפחות שנבחרו באקראי:




**1)** לאיזו משפחה הכנסה שכיחה גבוהה יותר?
א. משפחה א'.
ב. משפחה ב'.
ג. לשתיהן אותה הכנסה שכיחה.
ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.

**2)** באיזו משפחה ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת?
א. משפחה א'.
ב. משפחה ב'.
ג. בשתיהן ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת.
ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.

**3)** באיזו משפחה סטית התקן של ההכנסה החודשית גבוהה יותר?
א. משפחה א'.
ב. משפחה ב'.
ג. לשתיהן אותה סטית תקן.
ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 4-6:**

להלן נתונים חלקיים של טבלת שכיחויות:
כמו כן, נתון כי הממוצע הוא 1.66.

| $x$ | $F(x)$ |
|---|---|
| 0 | ? |
| 1 | 10 |
| 2 | 6 |
| 3 | 15 |
| 4 | ? |
| **סה"כ** | **50** |

**4)** השכיח של הנתונים הוא:
א. 0.
ב. 15.
ג. ישנם שני שכיחים: 0 ו-3.
ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של השכיח.

**5)** חציון הנתונים הוא:
א. 2.
ב. 1.5.
ג. 25.5.
ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

**6)** הטווח של הנתונים:
א. 11.
ב. 3.
ג. 4.
ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

**7)** בהתפלגות אסימטרית ימנית של משתנה כמותי רציף, הערך המתאים למאון ה-30, ציון התקן שלו הוא בהכרח:
א. שלילי.
ב. חיובי.
ג. אפס.
ד. לא ניתן לדעת ללא הנתונים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**8)** סדרת נתונים סטטיסטיים מונה 10 תצפיות. נתון כי סדרת הנתונים סימטרית סביב הממוצע. ממוצע הסדרה-40 ושונות הסדרה-100. בשלב מאוחר יותר נוספו שתי תצפיות נוספות לסדרה: 50 ו-30. השונות של 12 התצפיות:

א. תקטן.
ב. תגדל.
ג. לא תשתנה.
ד. לא ניתן לחשב את השונות ללא ידיעת התצפיות.

**הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 9-10:**

בחברת "טיק" המשכורת הממוצעת היא 4,600 ₪ וסטיית התקן של משכורת זו הינה 200 ₪. לאחר מו"מ עם ועד עובדי ההנהלה סוכם כי המשכורת תוכפל פי 1.5.

**9)** מהי המשכורת הממוצעת החדשה (ב-₪)?

א. 2,300.
ב. 6,900.
ג. 4,650.
ד. 4,600.
ה. חסרים נתונים כדי לדעת.

**10)** מהי סטיית התקן של המשכורת לאחר יישום המו"מ לגבי השכר (ב-₪)?

א. 200.
ב. 300.
ג. 675.
ד. לא ניתן לדעת.

**11)** הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים:

א. תגדיל את סטיית התקן.
ב. תקטין את סטיית התקן.
ג. לא תשנה את סטיית התקן.
ד. לא ניתן לדעת.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 12-13:**

להלן נתונים על ציוני תלמידים שנבחנו במועדים שונים בסטטיסטיקה:

| שם התלמיד | ציון | ממוצע הציונים במועד בו נבחן | סטיית התקן של הציונים במועד בו נבחן |
|---|---|---|---|
| צבי | 50 | 50 | 12 |
| סטף | 82 | 80 | 5 |
| שרית | 65 | 60 | 15 |
| לובה | 60 | 63 | 1.5 |
| מיטב | 70 | 70 | 10 |

**12)** התלמיד הטוב ביותר ביחס לנבחנים באותו מועד בו נבחן הוא:

א. מיטב.
ב. צבי.
ג. לובה.
ד. שרית.
ה. סטף.

**13)** פנינה נבחנה עם סטף וציון התקן שלה שווה לציון התקן של שרית לכן ציונה הוא:

א. 80.55.
ב. 65.
ג. 80.
ד. 81.66.

**הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 14-17:**

בבדיקת פתע של משרד הבריאות במפעל שוקולד, נמצא ש:

| שוקולד פגום | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| מס' קופסאות | 35 | 63 | 48 | 12 | 13 | 11 | 10 | 8 |

**14)** מהו החציון של מספר הפגומים בקופסא:

א. 1.
ב. 2.
ג. 4.
ד. לא ניתן לדעת.

**15)** מהו הרבעון התחתון של מספר הפגומים בקופסא?

א. 1.
ב. 2.
ג. 3.
ד. 4.
ה. לא ניתן לדעת.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**16)** מספר הפגומים בקופסא הוא משתנה:
א. סדר.
ב. שמי.
ג. כמותי בדיד.
ד. כמותי רציף.

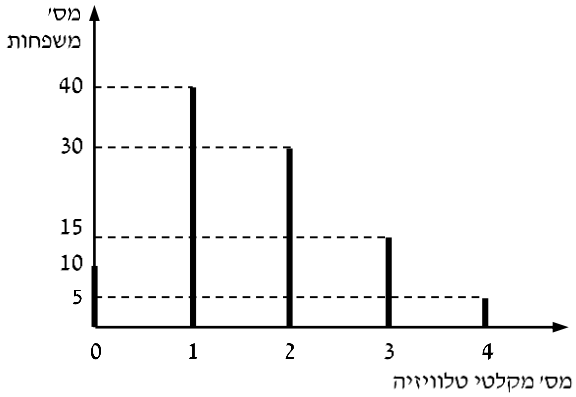
**17)** השכיח של מספר הפגומים בקופסא:
א. 63.
ב. 1.
ג. 200.
ד. לא ניתן לדעת.

**18)** ביחס לציר המספרים, רוב הערכים בהתפלגות א-סימטרית ימנית נמצאים:
א. בערכים הגבוהים.
ב. בחלוקה זהה בין הערכים הגבוהים והנמוכים.
ג. בערכים הנמוכים.
ד. לא ניתן לדעת.
ה. אף לא תשובה מהנ"ל נכונה.

**19)** בוצע מחקר על מספר העובדים בחברות מזון לעומת חברות תקשורת.
החציון והממוצע בשתיהן שווה 8.
איזה מהטענות הבאות היא הנכונה והמלאה ביותר:
א. השכיחות ב-2 החברות זהה אך שונה מ-8.
ב. השכיח ב-2 החברות זהה אך לא ניתן לדעת מהו.
ג. השכיח בשתי חברות הינו בהכרח 8.
ד. שכיח בחברה אחת שונה מ-8 ובשנייה הוא 8.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

**הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 20 עד 24:**

נערך סקר על מספר מקלטי הטלוויזיה הנמצאים בבית.
תוצאות הסקר נתונות בדיאגרמת מקלות הבאה:





© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**20)** המשתנה הנחקר כאן הוא:

א. משתנה שמי.

ב. משתנה מסולם סדר.

ג. משתנה כמותי בדיד.

ד. משתנה כמותי רציף.

**21)** הטווח של ההתפלגות הוא:

א. 35.

ב. 4.

ג. 3.

ד. 2.

**22)** ממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה הוא:

א. 1.65.

ב. 1.5.

ג. 1.

ד. 2.

**23)** השכיח של התפלגות זו היא:

א. 40.

ב. 1.5.

ג. 1.

ד. 2.

**24)** מסתבר שיש בין 2 ל-5 משפחות נוספות שאין להם מקלטי טלוויזיה ויש לצרף את המשפחות הללו להתפלגות. כיצד הנתון זה ישפיע על סטיית התקן?

א. יקטין אותו.

ב. יגדיל אותו.

ג. לא ישנה אותו.

ד. אין לדעת.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) א' | 2) ג' | 3) ג' | 4) ג' | 5) ב' |
| 6) ג' | 7) א' | 8) ג' | 9) ב' | 10) ב' |
| 11) ג' | 12) ה | 13) ד' | 14) ב' | 15) א' |
| 16) ג' | 17) ב' | 18) ג' | 19) ה | 20) ג' |
| 21) ב' | 22) א' | 23) ג' | 24) ב' | |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 14 - מדד הקשר של ספירמן

### תוכן העניינים

1. הקדמה ..... (ללא ספר)
2. חישוב מדד הקשר של ספירמן ..... (ללא ספר)

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 15 - מקדם המתאם ( מדד קשר ) הלינארי ומובהקותו

### תוכן העניינים

1. מקדם המתאם הלנארי ( פירסון) ..... 60
2. חישוב מקדם המתאם הלנארי (פירסון) ..... 71
3. חישוב מדד פירסון (לינארי) לפי הנוסחה הכללית ..... (ללא ספר)

# מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

## מדד הקשר הלינארי (פירסון) – מבוא

מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר מסוג קשר לינארי (קו ישר) בין שני משתנים.
שני המשתנים שאנו בודקים לגביהם קשר צריכים להיות משתנים כמותיים.
מבחינת סולמות מדידה כל משתנה נחקר צריך להיות מסולם רווחים או מנה.
בדרך כלל המשתנה המוצג כ- $Y$ הוא המשתנה התלוי והמשתנה המוצג ב- $X$ הוא המשתנה הבלתי תלוי.
תיאור גרפי לנתונים נעשה על ידי דיאגרמת פיזור. בדיאגרמת פיזור אנחנו מסמנים כל תצפית בנקודה לפי שיעור ה- $X$ ושיעור ה- $Y$ שלה.
דיאגרמת הפיזור נותנת אינדיקציה גרפית על הקשר בין שני המשתנים.

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

בבניין 8 דירות בדקו לכל דירה את מספר החדרים שלה וכמו כן את מספר הנפשות הגרות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו :

| מספר חדרים בדירה | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| מספר הנפשות בדירה | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 |

**1)** כמה תצפיות ישנן בדוגמה?

**2)** כמה משתנים ישנם בדוגמה, מי הם?

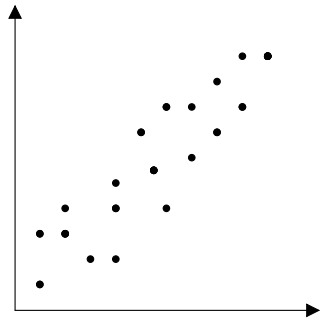
**3)** שרטטו לנתונים דיאגרמת פיזור.

**4)** מי המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי?

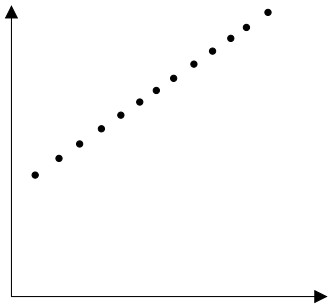

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## דיאגרמות פיזור לקשר בין משתנים וניתוחם

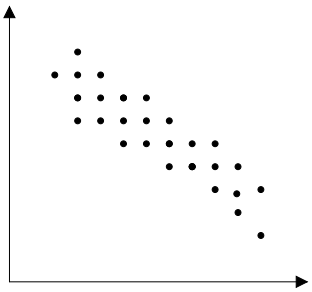
**קשר לנארי חיובי חלקי**



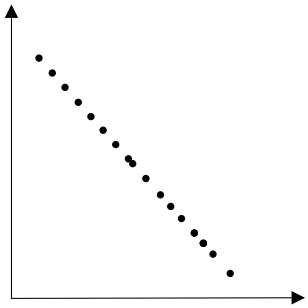
**קשר לנארי חיובי מלא**



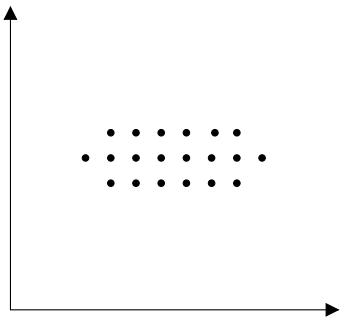
**קשר לינארי שלילי חלקי**



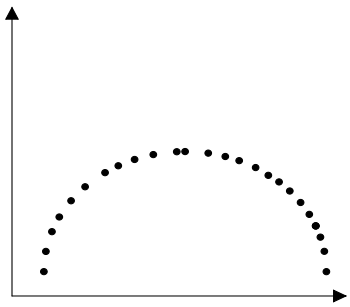
**קשר לינארי שלילי מלא**



**אין קשר**



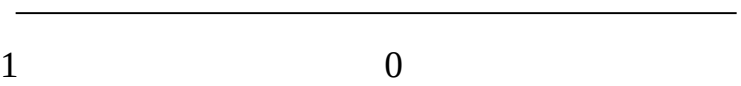
**אין קשר לינארי**



**משמעות מקדם המתאם:**

כדי לבדוק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים ישנו מדד קשר שנקרא גם מקדם המתאם הלינארי הידוע גם בשם מקדם המתאם של פירסון.

מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1.





© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מקדם מתאם 1-או 1 אומר שקיים קשר לינארי מלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי נוסחה של קו ישר: $y = ax + b$.

**מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):**

קיים קשר לנארי מלא בו השיפוע $a$ יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי (מקדם מתאם-1) מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע $a$ שלילי.

**מתאם חיובי חלקי:**

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את $X$ ל- $Y$ באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את $X$ ל- $Y$ באופן מוחלט. ככל שמקדם המתאם קרוב לאפס עוצמת הקשר יותר חלשה וככל שהמדד רחוק יותר מהאפס העוצמה יותר חזקה. לסיכום, מקדם המתאם בודק את עוצמת הקשר הלנארי, ואת כיוון הקשר.

מקדם המתאם הלינארי אינו מושפע מיחידות המדידה. כל שינוי ביחידות המדידה של המשתנים, לא ישנה את מקדם המתאם.

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: $\rho$ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר:

$r$ - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומד לפרמטר $\rho$.

קיומו של מתאם בין שני משתנים אינו מצביע על סיבתיות בהכרח. למשל, אם נמצא מתאם חיובי בין כמות הסוכרזית שאדם אוכל לבין במשקל שלו אין זה אומר שהסיבה להשמנה היא הסוכרזית. מדד הקשר של פירסון הוא מדד קשר סימטרי, כלומר אם נחליף את $X$ ב- $Y$ התוצאה תהיה זהה.

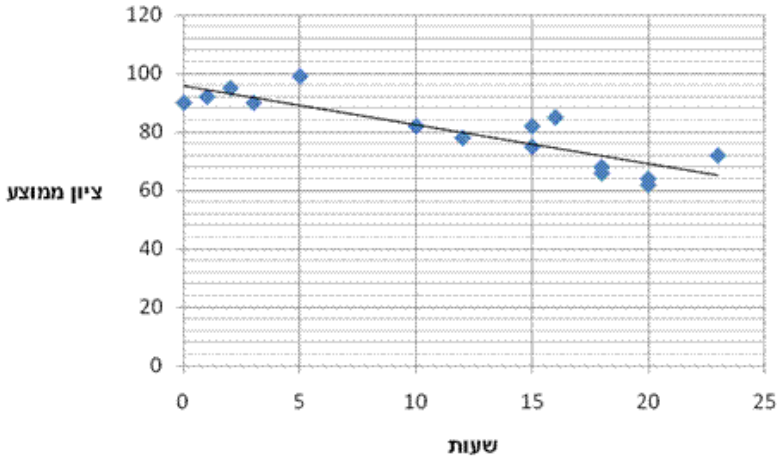
**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

- מה ניתן להגיד על מקדם המתאם של שני המשתנים על סמך דיאגרמת הפיזור ששרטטנו?
- אם היינו משנים את השרטוט כך שבציר האנכי היה המשתנה "מספר החדרים" ובציר האופקי היה "מספר הנפשות", האם הדבר היה משפיע על מדד הקשר של פירסון?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור:




א. מיהו המשתנה הבלתי תלוי?

ב. מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר? מה ניתן להגיד על עוצמת הקשר?

**2)** להלן טבלה המסכמת את מקדמי המתאם הלינארי בין ציוני מבחנים שונים שהתקבלו עבור תלמידים בכיתה מסוימת:

| | ספורט | לשון | מתמטיקה |
|---|---|---|---|
| ספורט | ? | -0.7 | ? |
| לשון | ? | ? | 0.6 |
| מתמטיקה | -0.1 | ? | ? |

א. השלימו את מקדמי המתאם שמסומנים בסימן שאלה בטבלה.

ב. בין אילו שני ציוני מקצועות שונים קיים מתאם בעל העוצמה החזקה ביותר?

**3)** במחקר נתבקשו לבדוק את הקשר בין מספר שעות התרגול של קורס לבין הציון הסופי שלו. להלן תוצאות מדגם שהתקבל:

| שעות תרגול | ציון סופי |
|---|---|
| 20 | 90 |
| 25 | 90 |
| 30 | 95 |
| 15 | 60 |
| 30 | 90 |
| 20 | 85 |
| 10 | 50 |

א. מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי בדוגמה זו?

ב. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים.

ג. מה ניתן לומר על הקשר בין המשתנים במדגם?

ד. מסתבר שבסופו של דבר נתנו פקטור של 5 נקודות לציון הסופי. כיצד הדבר היה משנה את מקדם המתאם של המדגם?

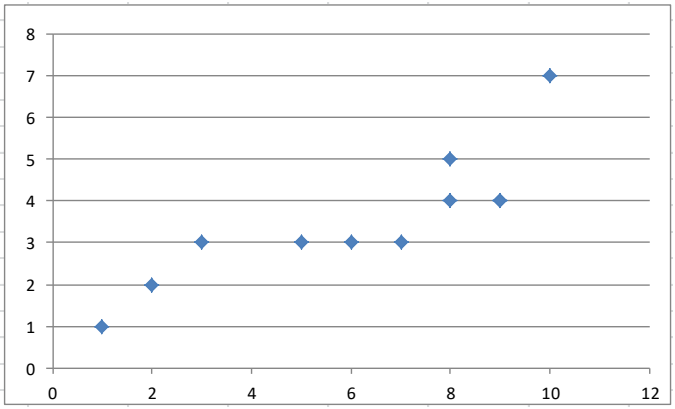

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ״מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8.

א. השלימו את המשפט:
בחודש ינואר ככל שהטמפרטורה היומית נוטה לרדת, כך כמות המשקעים נוטה _____.

ב. הוחלט להעביר את הטמפרטורה למעלות פרנהייט על מנת שיוכלו להשוות אותה לנתונים מארה״ב. נוסחת המעבר היא $F^0 = 32 + \frac{9}{5}C^0$.
כיצד הדבר ישפיע על מקדם המתאם בין הטמפרטורה במעלות פרנייט לכמות המשקעים במ״מ?

**5)** להלן דיאגרמת פיזור המראה קשר בין שני משנים:




א. השלימו: ניתן לראות שהקשר הוא לינארי _____ (מלא\ חלקי) כיוון הקשר הוא (חיובי \שלילי).

ב. השלימו: אם היינו מוסיפים תצפית שערך ה- $X$ שלה הוא 4 וערך ה- $Y$ שלה הוא 7, מקדם המתאם של פירסון היה _____ (גדל\ קטן\ לא משתנה).

**שאלות רב ברירה (יש לבחור את התשובה הנכונה):**

**6)** חוקר אקלים דגם כמה ימים בשנה ומדד את הטמפרטורה בטורונטו שבקנדה ואת הטמפרטורה בסידני שבאוסטרליה באותו היום. הוא חישב ומצא מקדם מתאם שלילי בין הטמפרטורה היומית בטורונטו לבין הטמפרטורה היומית בסידני. משמעות מקדם המתאם השלילי במדגם:

א. אין קשר בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה בסידני בימים שנדגמו.

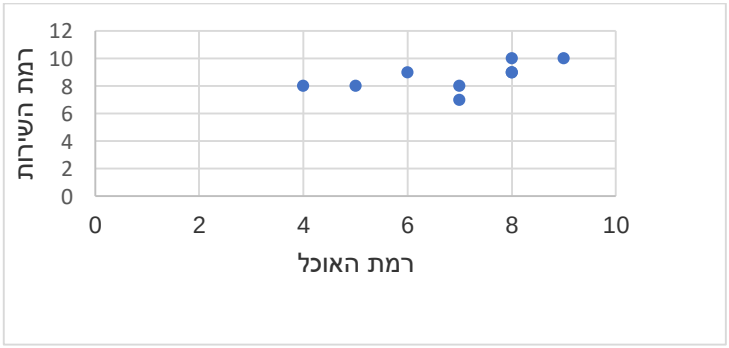
ב. במדגם, רוב הטמפרטורות בטורונטו היו שליליות.

ג. ההפרש בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה באוסטרליה, במדגם זה, הוא שלילי.

ד. במדגם יש נטייה שהטמפרטורה יורדת בטורונטו לטמפרטורה לעלות בסידני.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

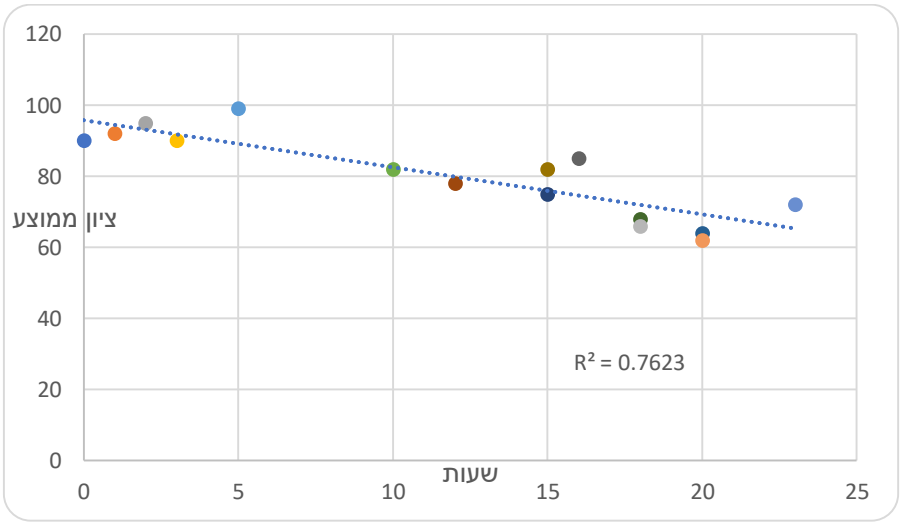
**7)** בסקר שביעות רצון שנערך בבית הקפה "פת לחם" התבקשו הלקוחות לדרג את מידת שביעות הרצון שלהם (בסולם 1-10) בשני נושאים: רמת האוכל ורמת השירות.




מה יהיה ערכו של מקדם המתאם ($r$)?

א. $r=-0.3$
ב. $r=0$
ג. $r=1.125$
ד. $r=0.593$

**8)** חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור.

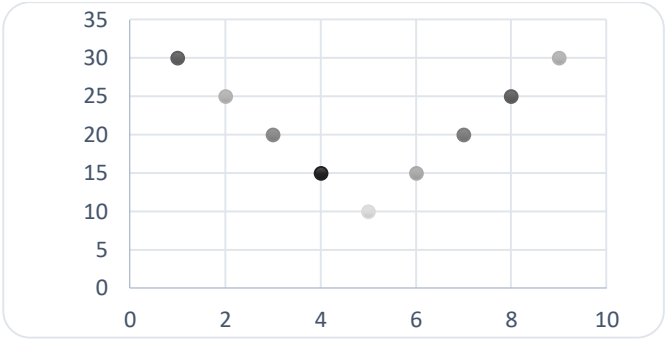



מה ניתן לומר על כיוון הקשר במדגם בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?

א. ככל שמבלים יותר הציון נוטה לרדת.
ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
ג. ככל שמבלים פחות הציון נוטה לרדת.
ד. ככל שהציון נוטה לרדת הסטודנט מבלה פחות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**9)** התרשים הבא מתאר קשר בין שני משתנים, איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?



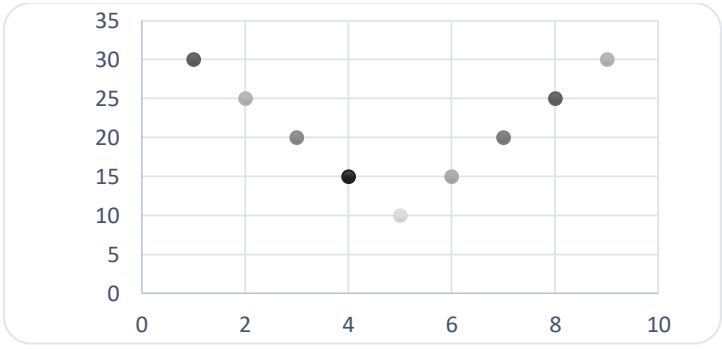

א. $r = 1$ היות ושני המשתנים יוצרים קוים ישרים.

ב. $r = 2$ היות ויש שני קוים בעלי קשר מושלם.

ג. $r = 0$ היות והקו יורד ואחר כך עולה באותו האופן.

ד. $r = \pm 1$ היות ויש קו עולה וגם קו יורד.

**10)** התרשים הבא מתאר דיאגרמת פיזור.




איזו טענה נכונה?

א. בתרשים מוצג הקשר בין שני משתנים.

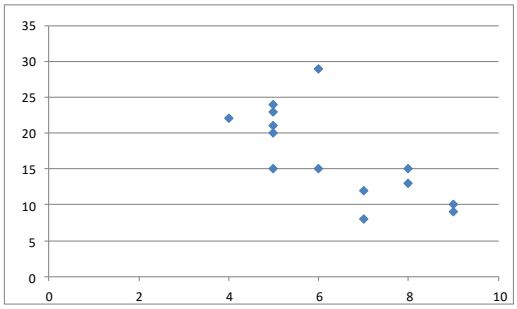
ב. בתרשים מוצג הקשר בין 9 משתנים.

ג. בתרשים מוצג הקשר בין 10 משתנים.

ד. אין לדעת כמה משתנים מוצגים בתרשים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים:




$X$ - (משתנה בלתי תלוי בציר האופקי)
ו- $Y$ (משתנה תלוי).
במדגם התקבל $r^2 = 0.52$.

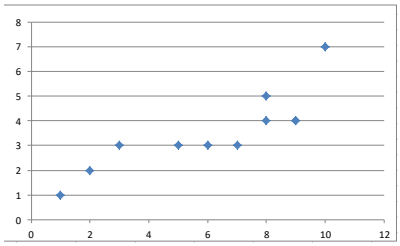
**11)** לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה, איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של $r$?

א. -0.52
ב. 0.72
ג. -0.72
ד. 0.52

**12)** אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא 1, אזי:

א. הערכים של המשתנים הם חיוביים.
ב. עבור כל תצפית ערך של משתנה אחד שווה לערך של המשתנה השני.
ג. הקשר הלינארי הוא בעוצמה חזקה.
ד. אף אחת מהתשובות לא בהכרח נכונה.

**13)** להלן דיאגרמת פיזור:




מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

א. 1
ב. 0.85
ג. 0.15
ד. 0

**14)** בבדיקת קשר בין שני משתנים התקבל: $r = -1$.

א. קיימת נוסחה לינארית הקושרת בין כל התצפיות.
ב. לא קיים קשר בין שני המשתנים.
ג. ככל שמשתנה אחד נוטה לרדת גם לשני יש נטייה לרדת.
ד. קיים קשר בין שני המשתנים, אך לא ניתן לדעת מאיזה סוג.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**15)** לפי הפתגם "רחוק מהעין, רחוק מהלב", יש קשר ____ בין קרבה פיזית לקרבה נפשית.

א. חיובי

ב. שלילי

ג. אפסי

ד. לא ניתן לדעת.

**16)** מבחן אמי"ר הינו מבחן מיון באנגלית של המרכז הארצי לבחינות והערכה. הציון המינימלי בבחינה הינו 150 והמקסימלי הינו 250. בקורס הכנה למבחן השתתפו 19 תלמידים. להלן הציונים שלהם על פי פלט שהתקבל:

| | | |
|---|---|---|
| | | 159 |
| | | 170 |
| | | 180 |
| | | 185 |
| | | 204 |
| | | 224 |
| | | 236 |
| | | 212 |
| | | 168 |
| | | 189 |
| | | 195 |
| | | 163 |
| | | 187 |
| | | 206 |
| | | 201 |
| | | 223 |
| | | 242 |
| | | 203 |
| | | 205 |
| 197.47 | AVERAGE | |
| 536.25 | VARPA | |

יש להוסיף עמודה נוספת לצד עמודת הציונים שתראה לכל תלמיד כמה נקודות חסרות לו כדי להשלים לציון המקסימלי בבחינה.

מה יהיה מקדם המתאם בין שתי העמודות (כלומר, מקדם המתאם בין הציון לבין הנקודות החסרות)?

א. -1

ב. 1

ג. -0.5

ד. 0.5

**17)** מקדם המתאם בין שטחי דירה למחיר שלהם חושב ונמצא 1.2. מה נובע מכך?

א. ככל שהדירה גדולה יותר בשטחה כך היא יקרה יותר.

ב. ככל שהדירה קטנה יותר בשטחה כך היא זולה יותר.

ג. לא קיים קשר בין שטח הדירה למחיר הדירה.

ד. מצב כזה שמתואר הנתונים לא אפשרי.

**18)** אם ניקח 10 אנשים ונרשום לכל אדם את הגובה במטר וכמו כן את הגובה בס"מ. מה יהיה מקדם המתאם בין גובה האדם במטר לגובה האדם בס"מ?

א. 1

ב. 0

ג. -1

ד. לא ניתן לדעת.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**19)** נמצא מתאם חיובי בעוצמה גבוהה בין $X$ – ציון בבגרות בלשון ל $Y$ – ציון בבגרות במתמטיקה. אילו מהמשפטים הבאים נכון?

א. ניתן לומר שאחת מהסיבות להבדלים שיש לסטודנטים במתמטיקה נובעים מההבדלים שיש להם בלשון.

ב. קיימת נוסחה של קו ישר שקושרת בין ציון בבגרות במתמטיקה לציון בבגרות בלשון.

ג. ללא יוצא מן הכלל, ניתן להגיד שכל תלמיד שמצליח יותר מתלמיד אחר בלשון גם יצליח יותר מאותו תלמיד במתמטיקה.

ד. אף אחד מהטענות שהוצגו אינה בהכרח נכונה.

**20)** עבור סדרה של תצפיות מדדו את $X$ ואת $Y$. נמצא שעבור כל התצפיות שהערך של $Y$ ירד הערך של $X$ בהכרח ירד ללא יוצא מן הכלל. מקדם המתאם של פירסון יהיה בהכרח:

א. 1

ב. -1

ג. 0

ד. אף אחת מהתשובות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

**1)** א. שעות בילוי.
ב. הקשר חלקי, כיוון הקשר שלילי .

**2)** א. להלן טבלה:

| | ספורט | לשון | מתמטיקה |
|---|---|---|---|
| ספורט | 1 | -0.7 | 0.1 |
| לשון | -0.7 | 1 | 0.6 |
| מתמטיקה | -0.1 | 0.6 | 1 |

ב. ספורט ולשון.

**3)** א. ב"ת- מס' שעות התרגול, תלוי- ציון.
ב. ראה גרף בפתרון וידאו.
ג. קשר לינארי חיובי חלקי.
ד. מקדם המתאם לא היה משתנה.

**4)** א. לעלות.
ב. לא ישפיע על מקדם המתאם.

**5)** א. חלקי, חיובי.
ב. קטן.

**6)** ד'. **7)** ד'. **8)** א'. **9)** ג'. **10)** א'.

**11)** ג'. **12)** ד'. **13)** ב'. **14)** א'. **15)** א'.

**16)** א'. **17)** ד'. **18)** א'. **19)** ד'. **20)** ד'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון) – רקע

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים. מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה.
בדרך כלל, $X$ הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- $Y$ הוא המשתנה המוסבר (התלוי).

**דוגמה:**

נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד – $X$ מסבירה את ההכנסה שלו $Y$. במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.

**שלב ראשון:** נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

**דוגמה:**

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:
$X$ -מס' חדרים בדירה. $Y$-מס' נפשות הגרות בדירה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

| מס' דירה | $X$ | $Y$ |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 3 |
| 5 | 5 | 4 |

נשרטט מנתונים אלה דיאגרמת פיזור (הדיאגרמה המלאה בסרטון). נתבונן בכמה מקרים של דיאגרמות פיזור וננתח אותן (הדיאגרמות המלאות בסרטון).

**שלב שני:** מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים. המדד (ניקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.
המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל-1.
מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.

**מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):**

קיים קשר לנארי מלא בו השיפוע $b$ יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע $b$ שלילי (מקדם מתאם 1-).


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

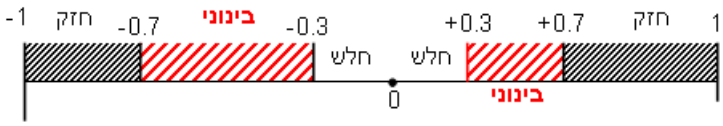
**מתאם חיובי חלקי:**

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את $X$ ל- $Y$ באופן מוחלט.

**מתאם שלילי חלקי:**

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את $X$ ל- $Y$ באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר:




מקדם המתאם יסומן באות $r$.

כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

שונות משותפת: $COV(x,y)=\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}=\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\cdot\bar{y}$

שונות של המשתנה $X$: $s_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\bar{x}^2$

שונות המשתנה $Y$: $S_Y^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{n}-\bar{y}^2$

מקדם המתאם הלינארי: $r_{xy}=\frac{COV(x,y)}{S_x\cdot S_y}$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן. בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

| מספר חיסורים | 2 | 1 | 0 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ציון | 80 | 90 | 90 | 70 | 70 | 50 |

א. שרטטו דיאגראמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר ביו מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?

ב. חשבו את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?

ג. הסבירו, ללא חישוב, כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

**2)** במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון $X$ בדם החולה לרמת ההורמון $Y$ שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים ההלו עבור חמישה חולים. להלן התוצאות שהתקבלו:

| $X$ | $Y$ |
|---|---|
| 10 | 12 |
| 14 | 15 |
| 15 | 15 |
| 18 | 17 |
| 20 | 21 |

א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?

ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים? ומה משמעות התוצאה?

**3)** נסמן ב- $X$ את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- $Y$ את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200$$

$$\sum_{i-1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76 \qquad \sum_{i-1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 60.8$$

א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין $X$ ל- $Y$. מיהו המשתנה התלוי?

ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** נסמן ב- $X$ את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- $Y$ את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200$$

$$\sum_{i-1}^{20} X_i^2 = 2960 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464$$

חשבו את מדד הקשר הלינארי בין $X$ ל- $Y$.

**5)** במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב-3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

**6)** להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו.

א. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

ב. לסדרה של נתונים התקבל $\bar{X} = \bar{Y} = 6$ , $S_x = S_y = 1$.
לכן, מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

ג. אם השונות המשותפת של $X$ ושל $Y$ הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

**שאלות רב-ברירה:**

**7)** נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:

א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.

ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

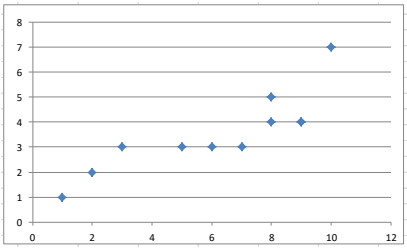
ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**8)** נלקחו 20 מוצרים ונבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה-4.2₪).
מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר בש"ח?

א. 1
ב. 0
ג. 4.2
ד. לא ניתן לדעת.

**9)** להלן דיאגראמת פיזור:
מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?




א. 1
ב. 0.85
ג. 0.15
ד. 0

## תשובות סופיות

**1)** א. משתנה תלוי: ציון, משתנה ב"ת: מס' חיסורים. ראה דיאגרמה בוידאו. ניתן להסיק שקיים קשר לינארי שלילי וחלקי בין מספר החיסורים לציון התלמיד.
ב. 0.9325-. ג. הקשר יישאר לינארי שלילי חלקי אך עוצמתו תחלש.

**2)** א. $\bar{y}=16$ , $\bar{x}=15.4$ ב. $r_{xy}=0.96$.

**3)** א. 0.8.

**4)** 0.8.

**5)** 1.

**6)** א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון.

**7)** ג'.

**8)** א'.

**9)** ב'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 16 - רגרסיה

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 76

# מדדי קשר – רגרסיה ליניארית:

## רקע:

במידה וקיים קשר חזק בין שני המשתנים הכמותיים נהוג לבצע ניבוי. לבנות קו ניבויים הנקרא גם קו רגרסיה המנבא משתנה אחד על סמך האחר. מדובר בקו שמנבא את $Y$ על סמך $X$.
השיטה למציאת הקו הנ"ל נקראת שיטת הריבועים הפחותים והקו המתקבל נקרא קו הרגרסיה או קו הניבויים או קו הריבועים הפחותים.

$a$ - נותן את ערך $Y$ כאשר $X$ הנו אפס על גבי קו הניבויים. הוא נקרא החותך של הקו.

$b$ - הוא שיפוע הקו נותן בכמה בעצם $Y$ משתנה כאשר $X$ גדל ביחידה אחת על גבי קו הניבויים.

להלן המשוואות למציאת הפרמטרים של קו הרגרסיה: $b = r\frac{S_r}{S_x}$ , $Y = bX + a$.

לצורך בניית קו ניבויים לניבוי $X$ על סמך $Y$ נצטרך לעדכן את הנוסחאות בהתאם.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** נסמן ב- $X$ את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- $Y$ את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \ , \ \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} \left( X_i - \overline{X} \right)^2 = 76 \ , \ \sum_{i=1}^{20} \left( Y_i - \overline{Y} \right) = 76 \ .$$

$$\sum_{i=1}^{20} \left( X_i - \overline{X} \right)\left( Y_i - \overline{Y} \right) = 60.8$$

א. חשבו את מדד הקשר הלינארי בין $X$ ל- $Y$. מיהו המשתנה התלוי?
ב. מצאו את קו הרגרסיה לניבוי ההוצאה של משפחה על סמך הכנסה שלה. הסבירו את משמעות הפרמטרים של קו הרגרסיה.
ג. משפחת כהן הכניסה 15,000₪. מה ההוצאה הצפויה שלה?

**2)** נסמן ב- $X$ את ההשכלה של אדם בשנות לימוד.
נסמן ב- $Y$ את הכנסתו באלפי ₪. במחקר התקבלו התוצאות הבאות:

$$\mathrm{COV}\left(X,Y\right) = 7.5 \ , \ \overline{Y} = 8 \ , \ \overline{X} = 14 \ , \ S_Y = 5 \ , \ S_X = 2 \ .$$

א. חשבו את מדד הקשר של פירסון בין ההשכלה להכנסה.
ב. מה ההכנסה הצפויה לאדם שהשכלתו 12 שנים?
ג. מה ההשכלה הצפויה לאדם שהכנסתו 10,000₪?

**3)** חוקר רצה לחקור את הקשר הקווי שבין הציון המבחן בסטטיסטיקה לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן. במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות: הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27. מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18. מקדם המתאם בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.

א. על פי משוואת הרגרסיה, שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן ב-?
ב. על פי משוואת הרגרסיה, תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כלל יקבל ציון?
ג. מהו קו הרגרסיה לניבוי הציון לפי שעות ההכנה?

**4)** נתונים 2 משתנים $X$ ו- $Y$. כמו כן נתון: $\overline{X} = 1.5$ , $S_x = S_y = 4$ ,
וכן שקו הרגרסיה של $Y$ על בסיס $X$ הינו: $Y = -0.2X + 0.5$ .
חשבו מהו מקדם המתאם בין $X$ ל- $Y$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. 0.8. ב. $Y=0.8X+0.4$. ג. 12.4 אלפי ₪.

**2)** א. 0.75. ב. 4.25 אלפי ₪. ג. 14.6 שנים.

**3)** א. 1.2. ב. 29. ג. $Y=1.2X+29$.

**4)** -0.2.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 17 - מדדי קשר-רגרסיה -שונות מוסברת ושונות לא מוסברת

תוכן העניינים

1. כללי ..... 79

# מדדי קשר – רגרסיה – שונות מוסברת ושונות לא מוסברת:

## רקע:

המטרה ברגרסיה היא להסביר את השונות של המשתנה התלוי.
למשל, להסביר את השונות של המשכורת באמצעות הוותק או להסביר את השוני בציונים באמצעות כמות החיסורים.

$r^2$ - החלק מהשונות של המשתנה התלוי מוסבר. השונות המוסברת נקראת גם שונות נבויים. השונות הלא מוסברת נקראת גם שונות טעויות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** נמצא קשר חיובי בעוצמה של 0.7 בין שטח דירה למחירה. כמו כן, נתון שסטיית התקן של מחירי הדירות הינה 200.

א. איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות מוסבר על ידי שטח הדירה?

ב. איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות לא מוסבר על ידי שטח הדירה?

ג. מהי השונות המוסברות ומהי השונות הלא מוסברת של מחירי הדירות?

**2)** להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו!

א. אם שונות הטעויות שווה ל-0 (השונות הלא מוסברת) אז מקדם המתאם של פירסון יהיה 1.

ב. אם מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים הוא 1 אזי שונות הטעויות (השונות הלא מוסברת) תהיה 0.

ג. אם השונות המשותפת של $X$ ושל $Y$ היא 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

## שאלות רב-ברירה:

**3)** בקשר בין שני משתנים התקבל: $r^2 = 0.64$, לכן:

א. ללא יוצא מן הכלל ככל שערכי משתנה אחד עולה השני יעלה.

ב. 64% מהשונות של משתנה אחד מוסבר על ידי המשתנה השני.

ג. הקשר בין שני המשתנים הוא בעוצמה של 0.64.

ד. כל התשובות נכונות.

**4)** אם מגדילים את $r^2$, ניתן לומר כי:

א. אחוז השונות המוסברת יקטן.

ב. אחוז השונות המוסברת יגדל.

ג. אחוז השונות המוסברת יישאר ללא שינוי.

ד. סטיית התקן משתנה.

ה. לא ניתן לדעת.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** בקורס מבוא לכלכלה ניתנו במשך השנה שני מבחנים: מבחן בסוף סמסטר א' $X$ ומבחן בסוף סמסטר ב' $Y$. כאשר בנו את קו הרגרסיה של הציון במבחן סוף סמסטר ב' לפי הציון במבחן סוף סמסטר א התקבלה שונות טעויות של 80, ושונות ניבויים של 20.
לפי נתונים אלו, מקדם המתאם בין הציון במבחן סוף סמסטר א' לבין הציון במבחן סוף סמסטר ב' הוא:

א. 0.44.

ב. 0.44 -.

ג. עוצמת ההקשר הלינארי היא 0.44, אך אין אפשרות לדעת את סימנה.

ד. אין אפשרות לחשב את מקדם המתאם.

ה. 0.35.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 49%. ב. 51%.
ג. שונות מוסברת: 19,600, שונות לא מוסברת: 20,400.

**2)** א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון.

**3)** ב'.

**4)** ב'.

**5)** ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

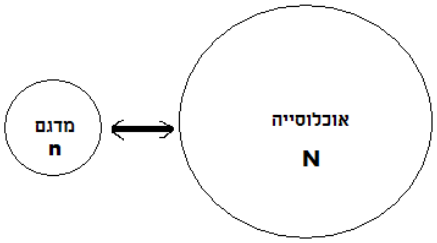
## פרק 18 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 82

# הסקה סטטיסטית – הקדמה:

## רקע:




**אוכלוסייה:**
קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית.
למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.

**מדגם:**

חלק מתוך האוכלוסייה.
למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה.
הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

**סטטיסטי:**

גודל המחושב על המדגם.

**פרמטר:**

גודל המתאר את האוכלוסייה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:**

| | סטטיסטי (מדגם) | פרמטר (אוכלוסייה) |
|---|---|---|
| **ממוצע** | $\overline{X}$ | $\mu$ |
| **פרופורציה (שכיחות יחסית)** | $\hat{p}$ | $P$ |

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים.
הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

**2)** להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב "העוגן".
נגדיר את $X$ להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.

א. מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?

ב. מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

| מספר המשפחות | מספר מקלטים |
|---|---|
| 50 | 0 |
| 250 | 1 |
| 350 | 2 |
| 300 | 3 |
| 50 | 4 |
| סך הכול $N=1000$ | |

**3)** נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.

א. מהי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה באוכלוסייה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו הסטטיסטי?

## תשובות סופיות:

**1)** א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.

**2)** א. האוכלוסייה: 1000 משפחות בישוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים.
ב. $\bar{X}$ = ממוצע מדגם.

**3)** א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי.
ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 19 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

### תוכן העניינים

1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי ..... 85

# התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

## רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם: $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}$.
מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.
גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.
להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:
ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- $\mu$ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- $\sigma^2$.

סטיית תקן של אוכלוסייה: $\sigma$.

### תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה: $E(\bar{x})=\mu_{\bar{x}}=\mu$.

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- $n$.

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי: $V(\bar{x})=\sigma^2_{\bar{x}}=\frac{\sigma^2}{n}$.
יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.
אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן: $\sigma(\bar{x})=\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטית התקן של ממוצע המדגם?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דגימה מהתפלגות נורמאלית:**

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע $\mu$ ושונות $\sigma^2$.

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית: $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ , $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

**משפט הגבול המרכזי:**

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע $\mu$ ושונות $\sigma^2$ אזי עבור מדגם מספיק גדול $(n \geq 30)$ ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי: $\bar{x} \overset{\cdot}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מיהי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו תוחלת ממוצע המדגם?

ו. מהי טעות התקן?

**2)** משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.

א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?

נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.

ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?

ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?

ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?

ה. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

**3)** הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.

א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?

ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?

ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתחולת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?

ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים.
לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.

א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?

ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?

ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?

ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?

**5)** נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ״ק וסטיית תקן של 10 סמ״ק.

א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ״ק?

ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ״ק?

ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ״ק?

ד. בקבוקיי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?

**6)** משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.

א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?

ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?

הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

**7)** לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪.
מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**8)** אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס״מ וסטיית תקן של 10 ס״מ.

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס״מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס״מ. מה ההסתברות ש 100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס״מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

**9)** נתון ש-$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע המדגם $\bar{X}$. לכן: $P\left(\bar{X}>\mu\right)$ יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. 0.

ב. 0.5.

ג. 1.

ד. לא ניתן לדעת.

**10)** נתון ש- $X$ מתפלג כלשהו עם תוחלת $\mu$ ושונות $\sigma^2$.
החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א. $X \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.

ב. $\mu \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.

ג. $\bar{X} \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

ד. $\bar{X} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.

**11)** נתון ש-$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. אם נדגום $n$ תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר: $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$,
אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

א. $\mu$ ו- $\bar{X}$ יהיו משתנים מקריים.

ב. $\mu$ יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$ קבוע.

ג. $\bar{X}$ יהיה משתנה מקרי ו- $\mu$ קבוע.

ד. $\mu$ ו- $\bar{X}$ יהיו קבועים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
ה. 78. ו. 10.6.

**2)** א. 0.8413 ב. 0.0013 ג. 0. ד. 0.1974.

**3)** א. 0 ב. 0 ג. 0.9544 ד. 178.205

**4)** א. 0.0465 ב. 27.71 ג. 0.2628 ד. התשובה הייתה קטנה.

**5)** א. 0 ב. 0.1587 ג. 0.1587 ד. 0.5

**6)** א. 0.5468 ב. 0.6826

**7)** 0.0475

**8)** א. 0.9772 ב. 0.0228 ג. 271

**9)** ב'.

**10)** ד'.

**11)** ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 20 - מושגי יסוד באמידה

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 91

# מושגי יסוד באמידה:

## רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל - $\mu$.
כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה - $p$.
בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות $\theta$ ואומד ב-$\hat{\theta}$. $\hat{\theta}$ הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את $\theta$.
- שגיאת אמידה: $\left|\hat{\theta}-\theta\right|$ - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

א. מה הפרמטר בדוגמה זו?

ב. מהי טעות האמידה של ערוץ 10?

- $\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל-$\theta$ אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל-$\theta$: $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$.
- טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר: $\sigma\left(\hat{\theta}\right)=S.E$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:**

**ממוצע האוכלוסייה $\mu$:**

האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם: $\bar{x}=\frac{\sum x}{n}$.

$E(\bar{x})=\mu$ לכן $\bar{x}$ הינו אומר חסר הטיה ל- $\mu$. כמו כן, טעות תקן: $\sigma(\bar{x})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=SE$.

**פרופורציה באוכלוסייה $p$:**

האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם: $\hat{p}=\frac{y}{n}$.

$E(\hat{p})=p$, לכן $\hat{p}$ הינו אומר חסר הטיה ל- $p$. כמו כן טעות התקן: $\sigma(\hat{P})=\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$.

**שונות האוכלוסייה $\sigma^2$:**

האומד הנקודתי שלו יהיה: $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$.

$E(S^2)=\sigma^2$ ולכן $S^2$ הינו אומד חסר הטיה ל- $\sigma^2$: $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}$.

**הערה:** אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.
להלן התוצאות שהתקבלו: 3, 1, 2, 5, 4, 1, 2, 3, 1, 2.
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.

א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?

ב. מהי טעות התקן של האומד כשהמדגם בגודל 500?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

**2)** לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה .
במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.

א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?

ב. מהי טעות התקן של האומד?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

**3)** נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.

א. מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.

ב. מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.

ג. מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.

**4)** נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$ , $\sum_{i=1}^{20} X^2_i = 1502.2$.

א. אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.

ב. אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.

**5)** במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?

א. סטיית התקן של האוכלוסייה.

ב. סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.

ג. סטיית התקן של המדגם.

ד. סטיית התקן של ממוצע המדגם.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25 .
אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

א. 3.
ב. 2.5.
ג. 1.581.
ד. אין מספיק נתונים לדעת.

**7)** במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, מחולק ב-$n-1$?

א. כאשר $n$ קטן.
ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

**8)** $X_1, X_2, ..., X_{16}$ מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע $\mu$ לא ידוע ושונות: $\sigma^2 = 64$. טעות התקן של האומד ל-$\mu$ היא:

א. 16.
ב. 8.
ג. 4.
ד. 2.

**9)** מהו אומד חסר הטיה?

א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

1) א. 0.25 ב. 0.019 ג. 0.24 ד. 0.01
2) א. אוכלוסייה: מקררים של יצרן, תוחלת: 2400, סטיית תקן: 500.
ב. 100 ג. 2342 ד. 58
3) א. 177.9 ב. 64.1 ג. 0.4
4) א. 8.1 ב. 3.16
5) ד'.
6) ג'.
7) ד'.
8) ד'.
9) ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 21 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע)

### תוכן העניינים

1. רווח סמך כששונות האוכלוסיה ידועה ..... 96
2. קביעת גודל מדגם ..... 101
3. רווח סמך כששונות האוכלוסיה לא ידועה ..... 103

# רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה:

## רקע:

ממוצע המדגם הוא אומד לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמתי הוא אפסי.
מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רווח סמך.
נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר $\mu$ ייכלל בתוכו הוא: $1-\alpha$.
$1-\alpha$: נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש: $P(A\le\mu\le B)=1-\alpha$.
$A$ - גבול התחתון של רווח הסמך.
$B$ - הגבול העליון של רווח הסמך.
$L=B-A$ - אורך רווח הסמך.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590.
רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?
2. מה המשתנה באוכלוסייה?
3. מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?
4. מהו רווח הסמך?
5. מה אורך רווח הסמך?
6. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת ($\mu$) במקרה ש-$\sigma^2$ (שונות האוכלוסייה) ידועה.

פרמטר אותו נרצה לאמוד: $\mu$.

אומד נקודתי: $\bar{x}$.

תנאים לבניית רווח הסמך: $X \sim N$ או $n \geq 30$.

$\sigma^2$ (שונות האוכלוסייה) ידועה.

נוסחה לרווח הסמך: $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית: $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$\varepsilon$ - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

- אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית: $L = 2\varepsilon$.
- ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך: $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$.
- ככל שמספר התצפיות ($n$) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון ($1-\alpha$) גבוהה יותר, כך: $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800 ₪.

א. מי האוכלוסייה במחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?

ד. מה רווח הסמך לפרמטר?

ה. מהי רמת הסמך לפרמטר?

ו. מה אורך רווח הסמך?

ז. מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?

**2)** מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנו את רווח הסמך.

**3)** מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.

ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.

ג. הסבירו כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.

**4)** דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.

ב. מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?

ג. מה היה צריך להיות גודל המדגם אם היינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?

ד. אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שחזרו את:

א. ממוצע המדגם.

ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.

ג. רמת הסמך.

**6)** זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.

א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.

ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.

ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.

**7)** חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא: $82 < \mu < 92$.
נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.

א. מהו ממוצע המדגם?

ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?

ג. מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5?

**8)** חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.

א. אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.

ב. גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.

ג. המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.

ד. רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**9)** חוקר בנה רווח סמך ל- $\mu$ וקיבל: $48 < \mu < 54$. מה נכון בהכרח:

א. $\mu = 51$.

ב. $\overline{X} = 6$.

ג. $\overline{X} = 51$.

ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

**10)** איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת הביטחון.

ב. סטיית התקן באוכלוסייה.

ג. מספר המשתתפים.

ד. סטיית התקן במדגם.

## תשובות סופיות:

**1)** א. העובדים במשק. ב. שכר ב-₪. ג. $\mu$. ד. $9200 < \mu < 9800$.
ה. 0.95. ו. 600. ז. 0.05.

**2)** $4920.6 < \mu < 4979.4$.

**3)** א. $223.42 < \mu < 236.58$. ב. $222.16 < \mu < 237.84$.
ג. ראה סרטון.

**4)** א. $9284 < \mu > 10,116$. ב. הסטיה המירבית בין $\bar{x}$ ל- $\mu$ היא 416 ₪ בבטחון של 95%.
ג. 800. ד. לא.

**5)** א. 102. ב. 3. ג. 0.9544.

**6)** א. $83.5 < \mu < 4.42$. ב. יקטן פי 2. ג. גדל.

**7)** א. 87. ב. 5. ג. 0.9544.

**8)** ב'.

**9)** ג'.

**10)** ד'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# קביעת גודל מדגם:

## רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה: $\sigma$ ברמת סמך של $1-\alpha$ ושגיאת אמידה שלא תעלה על $\varepsilon$ מסוים, נציב בנוסחה הבאה: $n \geq \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$.

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12.
מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?

**2)** מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא.
מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5.
נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.

א. כמה מתגייסים יש לדגום?

ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?

**3)** יהי $X$ משתנה מקרי עם ממוצע $\mu$ וסטיית תקן $\sigma$. חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- $\mu$ ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרווח יהיה $0.5\sigma$.
מהו גודל המדגם הנדרש?

## תשובות סופיות:

**1)** 780.

**2)** א. 139. ב. הדבר יקטין את $\varepsilon$ פי 2.

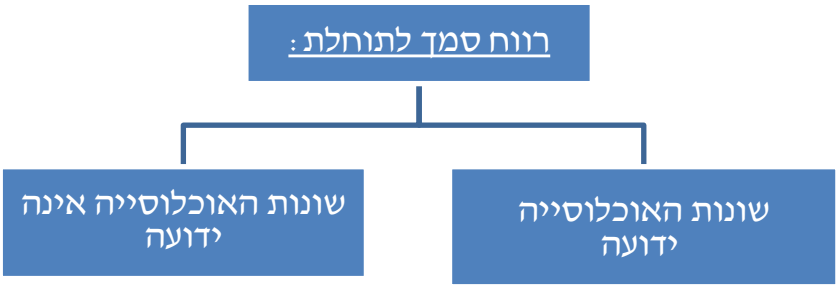
**3)** $n=62$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# רווח סמך כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

## רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:

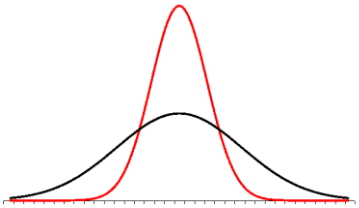



בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה $\left(\sigma^2\right)$ אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטי.

**התנאי:** $X \sim N$ או שהמדגם גדול.

**רווח סמך:** $\bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ .



**האומד לשונות:** $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X^2{}_i - n\bar{X}^2}{n-1}$ .

**התפלגות T:**

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.

התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן: $df = n-1$ .

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.
במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות שהתקבלו בדקות: 5.3, 4.6, 5.2, 4.7.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב.
ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89.
הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.

ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?

ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?

**2)** במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן: $S=13$ ס"מ.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?

**3)** אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 30, 40, 32, 34, 27.

א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?

**4)** ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.

א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.

ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.

ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.

**5)** נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$ , $\sum_{i=1}^{60} X^2_i = 643.19$.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו: $S=2$ , $\bar{x}=13.8$.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.

**7)** שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר $\mu$.
לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10.
שניהם קבעו אותה רמת סמך.
סטטיסטיקאי א: הניח $\sigma=20$ 2.
סטטיסטיקאי ב: חישב לפי המדגם וקיבל $S=20$.
למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר?

א. סטטיסטיקאי א.

ב. סטטיסטיקאי ב.

ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.

ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.

**8)** נתון ש: $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10.
אורך רווח הסמך שהתקבל הוא: 8.765. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

## תשובות סופיות:

**1)** א. $79.88 < \mu < 89.72$ ב. כן. ג. הוא היה גדל.

**2)** ראה בסרטון.

**3)** א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית. ב. לא ניתן לדעת.

**4)** א. $96.63 < \mu < 107.37$. ב. $96.90< \mu <107.10$. ג. ראה בסרטון.

**5)** $3.149< \mu < 3.351$.

**6)** $13.42< \mu < 14.18$.

**7)** ב'.

**8)** 90%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 22 - רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים

### תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסיה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות..... 106

# כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות:

## רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

**האומד נקודתי:** $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

**התנאים לבניית רווח הסמך:**

1. $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$.
2. $X_1, X_2 \sim N$.
3. מדגמים בלתי תלויים.

**השונות המשוקללת:** כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונויות שוות אנו אומדים את השונות הזו על ידי שקלול שתי השונויות של שני המדגמים על ידי הנוסחה הבאה: $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

דרגות החופש: $d.f = n_1 + n_2 - 2$.

רווח סמך: $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t^{n_1+n_2-2}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2_p}{n_1} + \frac{S^2_p}{n_2}}$.

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים.להלן תוצאות המדגם שנעשה:

| | תל אביב | באר שבע |
|---|---|---|
| **מספר האקדמאים** | 20 | 10 |
| **ממוצע הכנסות של אקדמאים** | 11,000 | 9500 |
| **סטיית התקן של הכנסות אקדמאים** | 200 | 250 |

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים.
הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ.
להלן תוצאות המדגם:

| המדינה | ישראל | ארה"ב |
|---|---|---|
| גודל המדגם | 15 | 15 |
| סכום הציונים | 1560 | 1470 |
| סכום ריבועי הציונים | 165,390 | 147,560 |

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

**2)** להלן 4 תצפיות על משתנה $X$ שמתפלג: $N\left(\mu_x,\sigma^2\right)$, ומשתנה $Y$ שמתפלג: $N\left(\mu_y,\sigma^2\right)$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | 22 | 20 | 21 | 25 |
| Y | 18 | 25 | 17 | 12 |

חשבו רווח סמך ל- $\mu_y-\mu_x$ ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

## תשובות סופיות:

**1)** הנחות:
1. השונות שווה.
2. שהציונים מתפלגים נורמלית.
3. המדגמים אינם תלויים זה בזה.

$-5.52<\mu_1-\mu_2<17.52$.

**2)** $-9.6<\mu_y-\mu_x<1.6$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 23 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים

### תוכן העניינים

1. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים ..... 108

# רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים:

## רקע:

**מדגם מזווג:** מדגם אחד שבו יש $n$ צמדים. כל תצפית במדגם תנפק זוג ערכים: $X$ ו- $Y$.
ניצור משתנה חדש: $D = x - y$.

הפרמטר שנרצה לאמוד: $\mu_D$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. $x, y \sim N$.
2. המדגם מזווג.

נוסחת רווח הסמך: $\bar{D} \pm t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$.

כאשר דרגות החופש: $df = n-1$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בין מהירות הריצות של שתי תוכנות מחשב.
לקחו 5 קבצים אקראיים והריצו אותם בשתי התוכנות:

| הקובץ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| הזמן בתוכנה הראשונה | 25 | 48 | 49 | 46 | 38 |
| הזמן בתוכנה השנייה | 27 | 46 | 42 | 40 | 48 |

הניחו כי זמני הריצות מתפלגים נורמלית.
מִצאו רווח סמך של 95% להפרש תוחלת הזמן בין שתי התוכנות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'.
להלן הציונים בסמסטר א' ו-ב':

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **סמסטר א'** | 74 | 68 | 90 | 75 | 82 |
| **סמסטר ב'** | 80 | 84 | 87 | 76 | 100 |

נניח שהציונים מתפלגים נורמאלית.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.

ב. האם על סמך רווח הסמך קיים הבדל בין הסמסטרים מבחינת תוחלת הציונים?

ג. מה צריך לשנות בנתונים כדי שהמדגמים יהיו בלתי תלויים?

**2)** במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה.
להלן התוצאות:

| **חברה/ מדינה** | **ארה"ב** | **קנדה** | **הולנד** | **פולין** | **מצרים** | **סין** | **יפן** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **בזק -** $X$ | 1.5 | 2.1 | 2.2 | 3 | 3.5 | 3.2 | 4.2 |
| **קווי זהב -** $Y$ | 1.4 | 2 | 1.9 | 3.1 | 3.3 | 3.2 | 4.2 |

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית עבור כל חברה,
בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת הפרש המחירים של שתי החברות.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $-19 < \mu_0 < 38$. ב. בביטחון של 95% לא קיים הבדל.
ג. ראה הסבר בסרטון.

**2)** $-0.013 < \mu < 0.185$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 24 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

### תוכן העניינים

1. הקדמה ..... 110
2. סוגי טעויות ..... 114

# הקדמה:

## רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה.
בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

**שלב א:** נזהה את הפרמטר הנחקר.

**שלב ב:** נרשום את השערות המחקר.
השערת האפס המסומנות ב- $H_0$.
בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.
השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- $H_1$.
ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

**שלב ג:** נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

**שלב ד:** נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. **אזור דחייה:**
   דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. **אזור קבלה:**
   קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחיה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- $\alpha$.

**שלב ה:** בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

**שלב ו:** להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם.
משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון.
להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$n=20$ , $\overline{X}=3120$ , $S=280$.

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:**

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?

**1)** ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות.
מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים.
משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים.
ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.

**2)** לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.

**3)** במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%.
השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22.
מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.

**4)** בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. נבחנים בבגרות באנגלית.
ב. ציון.
ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.
ד. $\begin{matrix} H_0:\mu=72 \\ H_1:\mu>72 \end{matrix}$.

**2)** א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.
ב. נפח משקה בסמ"ק.
ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.
ד. $\begin{matrix} H_0:\mu=500 \\ H_1:\mu<500 \end{matrix}$.

**3)** א. מועמדים לפקולטה למשפטים.
ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).
ג. אחוז הקבלה.
ד. $\begin{matrix} H_0:p=0.25 \\ H_1:p<0.25 \end{matrix}$.

**4)** א. אזרחים בוגרים במשק.
ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).
ג. אחוז האבטלה כיום.
ד. $\begin{matrix} H_0:p=0.08 \\ H_1:p\neq 0.08 \end{matrix}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# סוגי טעויות:

## רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.
הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי .
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.
לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

| | | **הכרעה** | |
|---|---|---|---|
| | | $H_0$ | $H_1$ |
| **מציאות** | $H_0$ | אין טעות | טעות מסוג 1 |
| | $H_1$ | טעות מסוג 2 | אין טעות |

### הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את $H_0$ למרות שבמציאות $H_0$ נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את $H_0$ למרות שבמציאות $H_1$ נכונה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.
אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה מסקנת המחקר?

ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?

**2)** במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.

א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?

ב. מה סוג הטעות האפשרית?

**3)** לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מה השערות המחקר?

ה. מה מסקנת המחקר?

ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\begin{matrix} H_0:\mu=500 \\ H_1:\mu<500 \end{matrix}$. ב. לא דחינו את $H_0$. ג. טעות מסוג שני.

**2)** א. לא ניתן לדעת. ב. טעות מסוג ראשון.

**3)** א. משפחות כיום. ב. מס' הילדים.

ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום. ד. $\begin{matrix} H_0:\mu=2.3 \\ H_1:\mu<2.3 \end{matrix}$.

ה. לא לדחות את $H_0$. ו. טעות מסוג שני.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

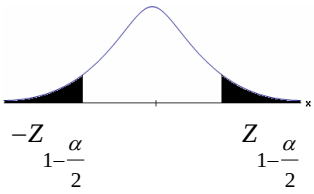
## פרק 25 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

### תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה ..... 116
2. סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסיה ידועה) ..... 120
3. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה) ..... 126
4. בדיקת השערות על תוחלת ( ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה ..... 131
5. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה לא ידועה) ..... 135
6. ניתוח פלטים ..... 138
7. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) ..... 143

# בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

## רקע:

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבה: | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu\neq\mu_0$ | $H_0:\mu\geq\mu_0$<br>$H_1:\mu<\mu_0$ | $H_0:\mu\leq\mu_0$<br>$H_1:\mu>\mu_0$ |
|---|---|---|---|
| תנאים: | 1. $\sigma$ ידועה<br>2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול | | |
| כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$: | $Z_{\bar{x}}<-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}}>Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br><br>$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>דוחים את $H_0$ | $Z_{\bar{x}}<-Z_{1-\alpha}$<br><br>$-Z_{1-\alpha}$<br>דוחים את $H_0$ | $Z_{\bar{x}}>Z_{1-\alpha}$<br><br>$Z_{1-\alpha}$<br>דוחים את $H_0$ |

**סטטיסטי המבחן:** $Z_{\bar{x}}=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

**חלופה אחרת לכלל הכרעה:**

| נדחה $H_0$ אם מתקיים: | $\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ |
|---|---|---|---|


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה:**

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

**פיתרון:**

<u>אוכלוסייה</u>: עגבניות.

<u>המשתנה</u>: $X$ = יבול העגבניות בטון לעונה.

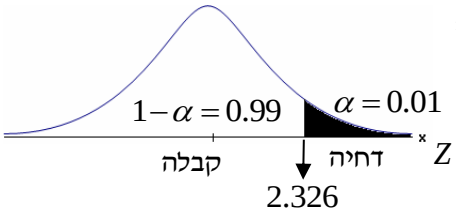
<u>הפרמטר</u>: $\mu$ = תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

<u>השערות</u>: $H_0 : \mu = 10$
$H_1 : \mu > 10$

<u>תנאים</u>:

1. $X \sim N$.
2. $\sigma = 2.5$.

<u>כלל הכרעה</u>:




נדחה את $H_0$ אם $Z_{\bar{x}} > 2.326$

<u>תוצאות</u>: $n = 4$ , $\bar{x} = 12.5$

<u>סטטיסטי המבחן</u>: $Z_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

<u>נציב</u>: $Z_{\bar{X}} = \dfrac{1.25 - 10}{\dfrac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

<u>מסקנה</u>:

לא נדחה $H_0$ (נקבל $H_0$).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות.
מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים.
ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

**2)** לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.

א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?

**3)** מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכוילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ.
מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

**4)** המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג.
יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.

**5)** לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ.
במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ.
קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט.
הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.

**6)** במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון?
בחרו בתשובה הנכונה.

א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.

ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.

ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**7)** חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של $\alpha$ והחליט לדחות את השערת האפס.
אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:

א. השערת האפס הייתה נדחית.

ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.

ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

**8)** שני סטטיסטיקאים בדקו השערות: $H_0:\mu=\mu_0$ כנגד $H_1:\mu>\mu_0$,
עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.
שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

א. אם חוקר א' החליט לדחות את $H_0$, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את $H_0$, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

## תשובות סופיות:

**1)** נקבל $H_0$, ברי"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.

**2)** א. נדחה $H_0$, ברי"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.

ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של $H_0$ והמסקנה לא תשתנה.

**3)** נדחה $H_0$, ברי"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.

**4)** נדחה $H_0$, ברי"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.

**5)** נקבל $H_0$, ברי"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.

**6)** א'.

**7)** ג'.

**8)** א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסייה ידועה):

## רקע:

| | | הכרעה | |
|---|---|---|---|
| | | $H_0$ | $H_1$ |
| **מציאות** | $H_0$ | אין טעות | טעות מסוג 1 |
| | $H_1$ | טעות מסוג 2 | אין טעות |

**הגדרת הסתברויות:**

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

(לדחות $H_0$) $= P_{H_0}$ (נכונה $H_0$ | לדחות את $H_0$) $= \alpha$.

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

(לקבל $H_0$) $= P_{H_1}$ (נכונה $H_1$ | לקבל את $H_0$) $= \beta$.

רמת בטחון:

(לקבל $H_0$) $= P_{H_0}$ (נכונה $H_0$ | לקבל את $H_0$) $= (\alpha - 1)$.

עוצמה:

(לדחות $H_0$) $= P_{H_1}$ (נכונה $H_1$ | לדחות את $H_0$) $= \pi = (\beta - 1)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבה: | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu\neq\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu<\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu>\mu_0$ |
|---|---|---|---|
| תנאים: | 1. $\sigma$ ידועה<br>2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול | | |
| כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$: | $\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$<br>או<br>$\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ |
| חישוב $\beta$: | $P_{\mu_1}\left(\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\bar{X}<\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ | $P_{\mu_1}\left(\bar{X}>\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ | $P_{\mu_1}\left(\bar{X}<\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ |

**התפלגות ממוצע המדגם:** $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$.

**התקנון:** $Z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

**דוגמה:**

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200₪ עם סטיית תקן של 80 ₪ לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ₪ בממוצע לחודש.

א. רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.

ב. מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

ג. נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ₪. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ד. אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**פתרון:**

א. אוכלוסייה: משלמי חשבון טלפון סלולאר כיום.

המשתנה: $X$ = חשבון הטלפון החודשי בשקלים.

הפרמטר: $\mu$.

השערות: $\begin{matrix} H_0: \mu = 200 \\ H_1: \mu < 200 \end{matrix}$.

תנאים:

1. $\mu = 200$.

2. $n = 36$.

$K = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\alpha = 0.05$$
$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

נציב: שקלים $K = 200 - 1.645 \cdot \frac{80}{\sqrt{36}} = 178.07$.

כלל ההכרעה: דחה את $H_0$ אם שקלים $\bar{X} < 178.07$.

ב. ברמת מובהקות של 5% נכריע שאכן ממוצע חשבון הטלפון הסלולרי פחת מתחילת השנה.

ג. השערות: $\begin{matrix} H_0: \mu_0 = 200 \\ H_1: \mu < 200 \end{matrix}$.

כלל ההכרעה: נדחה את $H_0$ אם $\bar{X} < 178.07$.

$H_1: \bar{X} \sim N\left(160, \frac{80^2}{36}\right)$.

$$Z = \frac{178.07 - 160}{\frac{80}{\sqrt{36}}} = 1.36$$

$$\beta = P_{H_1}\left(\begin{matrix}\text{לקבל את} \\ H_0\end{matrix}\right) = P_{H_1}\left(\bar{X} > 178.07\right) = 1 - \phi(136) = 1 - 0.9131 = 0.0869$$

ד. הקטנת $\alpha$ מגדילה את $\beta$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** נתון ש: $X \sim N\left(\mu, \sigma^2 = 1\right)$.

להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר $\mu$: $H_1: \mu = 7$ , $H_0: \mu = 5$.

מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.

א. עבור אילו ערכים של $X$ שידגם נדחית השערת $H_0$?

ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ג. אם במדגם התקבל ש-$X = 6.9$ מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?

**2)** לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות.
במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.

א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי ברמת מובהקות של 5%.

ב. בהמשך לסעיף א' מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א'?

**3)** להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת:

$n = 225$ , $\sigma = 30$ , $H_1: \mu \neq 200$ , $H_0: \mu = 200$.

א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.

ב. בהמשך לסעיף א', מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?

ג. הסבירו, ללא חישוב, איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

**4)** מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומודדים את קוטרם, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.

א. רשמו את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.

ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?

ג. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.

ד. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** להלן השערות של מחקר: $H_1:\mu=58$ , $H_0:\mu=50$.
מעוניינים לדגום 100 תצפיות. ידוע שסטיית התקן של ההתפלגות הינה 20.

א. בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%.
מהי רמת המובהקות?

ב. כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?

i. סטיית התקן הייתה יותר גדולה.

ii. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

**השאלות שלהלן הן שאלות רב-ברירה, בחרו בתשובה הנכונה ביותר:**

**6)** אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:

א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.

ב. העוצמה של המבחן גדלה.

ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.

ד. תשובות א' ו-ב' נכונות.

**7)** חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.

**8)** מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

| | $\alpha$ | $1-\beta$ |
|---|---|---|
| א. | גדולה | גדולה |
| ב. | גדולה | קטנה |
| ג. | קטנה | גדולה |
| ד. | קטנה | קטנה |

**9)** נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית $H_0$ קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:

א. הן $\alpha$, והן $1-\beta$, יקטנו.

ב. $\alpha$ יישאר ללא שינוי ואילו $1-\beta$ יגדל.

ג. $\alpha$ יגדל ואילו $1-\beta$ יקטן.

ד. הן $\alpha$ והן $1-\beta$ יגדלו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**10)** ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר.
מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

א. טעות מסוג ראשון.

ב. טעות מסוג שני.

ג. טעות מסוג שלישי.

ד. אין טעות במסקנתו.

## תשובות סופיות:

**1)** א. מעל 6.645. ב. 0.3594.

ג. דחינו את $H_0$, תתכן טעות מסוג ראשון.

**2)** א. נדחה $H_0$ אם $\bar{X} < 2.24$. ב. נדחה $H_0$. ג. 1.

**3)** א. נדחה $H_0$ אם $\bar{X} > 203.29$ או $\bar{X} < 196.71$. ב. 0.8051. ג. תקטן.

**4)** א. נדחה $H_0$ אם $\bar{X} < 48.9$. ב. 0.0885. ג. תקטן. ד. תקטן.

**5)** א. 0.0033. ב. i. רמת המובהקות הייתה קטנה.

ב. ii. רמת המובהקות הייתה גדלה.

**6)** ד'.

**7)** ג'.

**8)** ג'.

**9)** א'.

**10)** ב'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

## רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- $p_v$.

את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \le \alpha$, דוחים את $H_0$.

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

| **השערת האפס:**<br>**השערה אלטרנטיבה:** | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu\neq\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu<\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu>\mu_0$ |
|---|---|---|---|
| **תנאים:** | 1. $\sigma$ ידועה<br>2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול | | |
| **p-value** | אם $\bar{x}>\mu_0 \Rightarrow 2\cdot P_{H_0}\left(\bar{X}\ge\bar{x}\right)$<br>אם $\bar{x}<\mu_0 \Rightarrow 2\cdot P_{H_0}\left(\bar{X}\le\bar{x}\right)$ | $P_{H_0}(\bar{X}\le\bar{x})$ | $P_{H_0}(\bar{X}\ge\bar{x})$ |

**כאשר בהנחת השערת האפס:** $\bar{X}\sim N\left(\mu_0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ , $Z_{\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה:**

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

**פתרון:**

א. <u>אוכלוסייה</u>: המתגייסים לצבא כיום.

<u>משתנה</u>: $X$ = משקל בק"ג.

<u>פרמטר</u>: $\mu$.

<u>השערות</u>: $\begin{matrix} H_0:\mu=65 \\ H_1:\mu>65 \end{matrix}$.

<u>תנאים</u>:

1. $X\sim N$.
2. $\sigma=12$.

<u>תוצאות מדגם</u>:

$n=16$

$\bar{X}=71$

$$P_V=P_{H_0}\left(\begin{matrix}\text{לתוצאות}\\ \text{המדגם}\\ \text{וקיצוני}\end{matrix}\right)=P_{H_0}\left(\bar{X}\geq 71\right)=1-\phi\left(2\right)=1-0.9772=0.0228$$

$$Z_{\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{71-65}{\frac{12}{\sqrt{16}}}=2$$

$\alpha_{\min}=0.0228$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** להלן השערות של מחקר: $H_0:\mu=70$ , $H_1:\mu>70$.
המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20.
במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות: $\bar{x}=74$ , $n=100$.
מהי מובהקות התוצאה?

**2)** השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?

**3)** אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם.
חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה.
לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?

ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?

ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**4)** מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמאלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?

ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?

ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.

**5)** אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** בבדיקת השערות התקבל שה- $p-value=0.02$ .
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?
בחרו בתשובה הנכונה.

א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.

ב. ידחה את השערת האפס מקרה.

ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.

ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

**7)** מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.

ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.

ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.

ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

**8)** בבדיקת השערות מסוימת התקבל: $p\ value=0.0254$ לכן (בחרו בתשובה הנכונה):

א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את $H_0$ .

ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את $H_0$ .

ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את $H_0$ .

ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את $H_0$ .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** 0.0228.

**2)** עבור כל רמת מובהקות סבירה.

**3)** א. $\begin{matrix} H_0:\mu=100 \\ H_1:\mu<100 \end{matrix}$. ב. 0.1056. ג. 0.1056.

ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.

**4)** א. 0.0006. ב. יקטן. ג. נכריע שאין כיול.

**5)** נכון.

**6)** א'.

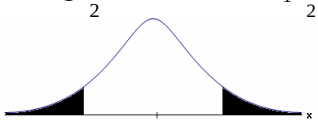
**7)** א'.

**8)** ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

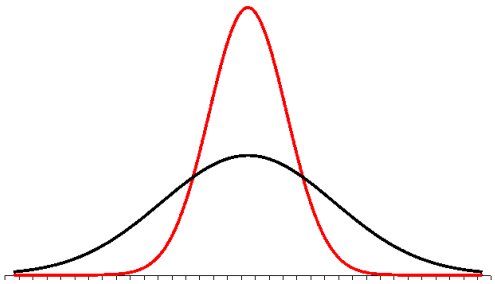
## רקע:

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבה: | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu\neq\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu<\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu>\mu_0$ |
|---|---|---|---|
| תנאים: | 1. $\sigma$ אינה ידועה<br>2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול | | |
| כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$: | $t_{\bar{x}}<-t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}}>t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$<br><br>$-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$<br>■ - דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}}<-t_{1-\alpha}^{(n-1)}$<br><br>$-t_{1-\alpha,n-1}$<br>■ - דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}}>t_{1-\alpha}^{(n-1)}$<br><br>$t_{1-\alpha,n-1}$<br>■ - דוחים את $H_0$ |
| חלופה לכלל הכרעה: נדחה $H_0$ אם מתקיים: | $\bar{X}>\mu_0+t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$<br>או<br>$\bar{X}<\mu_0-t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}<\mu_0-t_{1-\alpha}^{n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}>\mu_0+t_{1-\alpha}^{n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ |

סטטיסטי המבחן: $t_{\bar{x}}=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$.

$S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X^2{}_i-n\bar{X}^2}{n-1}$.

**התפלגות T:**



הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן: $df = n-1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס״מ.

כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס״מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 125, 80, 100, 95, 90 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.
מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

**2)** משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע.
במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון.
להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$
$$\bar{x} = 3120$$
$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

**3)** ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

**4)** באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$
$$\sum_{i=1}^{10} \left( X_i - \bar{X} \right)^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.
בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80 .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה.
כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.
ליאור השתמש בטבלה של התפלגות $Z$.
רוני השתמשה בטבלה של התפלגות $t$.
מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.

א. אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.

ב. אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.

ג. שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.

ד. לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

**6)** נתון ש: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $\begin{matrix} H_0:\mu=\mu_0 \\ H_1:\mu<\mu_0 \end{matrix}$.
חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.
$\sigma^2$ לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.
בחר בתשובה הנכונה:

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.

ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.

ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

## תשובות סופיות:

**1)** נדחה $H_0$.

**2)** נדחה $H_0$.

**3)** נקבל $H_0$.

**4)** נקבל $H_0$.

**5)** ב'.

**6)** ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה לא ידועה):

## רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תיקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \le \alpha$ דוחים את $H_0$.

מובהקות התוצאה היא הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבה: | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu \ne \mu_0$ | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu < \mu_0$ | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu > \mu_0$ |
|---|---|---|---|
| תנאים: | 1. $\sigma$ אינה ידועה<br>או<br>2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$ | | |
| p-value | אם $\bar{x} > \mu_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$<br>אם $\bar{x} < \mu_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$ | $P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$ | $P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$ |

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X^2{}_i - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n-1$$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה:**

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם: 27, 32, 30, 40, 34.
הניחו שזמן הנסיעה מתפלג נורמלית.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מצאו חסמים למובהקות התוצאה.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**פתרון:**

<u>אוכלוסייה</u>: כלל הנסיעות לעבודה בדרך החלופית.

<u>משתנה</u>: $X$ = זמן נסיעה בדקות.

<u>תנאים</u>: $X \sim N$.

<u>פרמטר</u>: $\mu$.

א. <u>השערות</u>:
$$\begin{matrix} H_0: \mu = 40 \\ H_1: \mu < 40 \end{matrix}.$$

ב. <u>תוצאות המדגם</u>:

$$n=5\ ,\ \bar{X}\ \frac{\sum X_i}{n} = \frac{34+40+...}{5} = 32.6$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^{\,2} - n\cdot \bar{X}^2}{n-1} = \frac{34^2+40^2-...-5\cdot 32.6^2}{5-1} = 23.4$$

$$S = \sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{32.6-40}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}} = -3.39$$

$$P_V = P_{H_0} = \left(\bar{X} \le 32.6\right) = P\left(t \le -3.39\right)$$

$$d.f = 5-1 = 4$$

$$1\% < P_V < 2.5\%$$

$P_V < \alpha = 0.05$, לכן דוחים את $H_0$.

<u>מסקנה</u>: ברי"מ של 5% נכריע שהדרך החלופית מהירה יותר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים:
997, 996, 1005, 1008, 1024.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**2)** חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות.
מהי ה- $\alpha$ המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?

**3)** הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:
$\sum(x_i-\bar{x})^2=2832$ , $\bar{x}=176.2$.
מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק.
מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

## תשובות סופיות:

**1)** א. $H_0:\mu=1000$ , $H_1:\mu\neq1000$. ב. $20\%\le P_v\le 50\%$.

ג. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.

**2)** 10%.

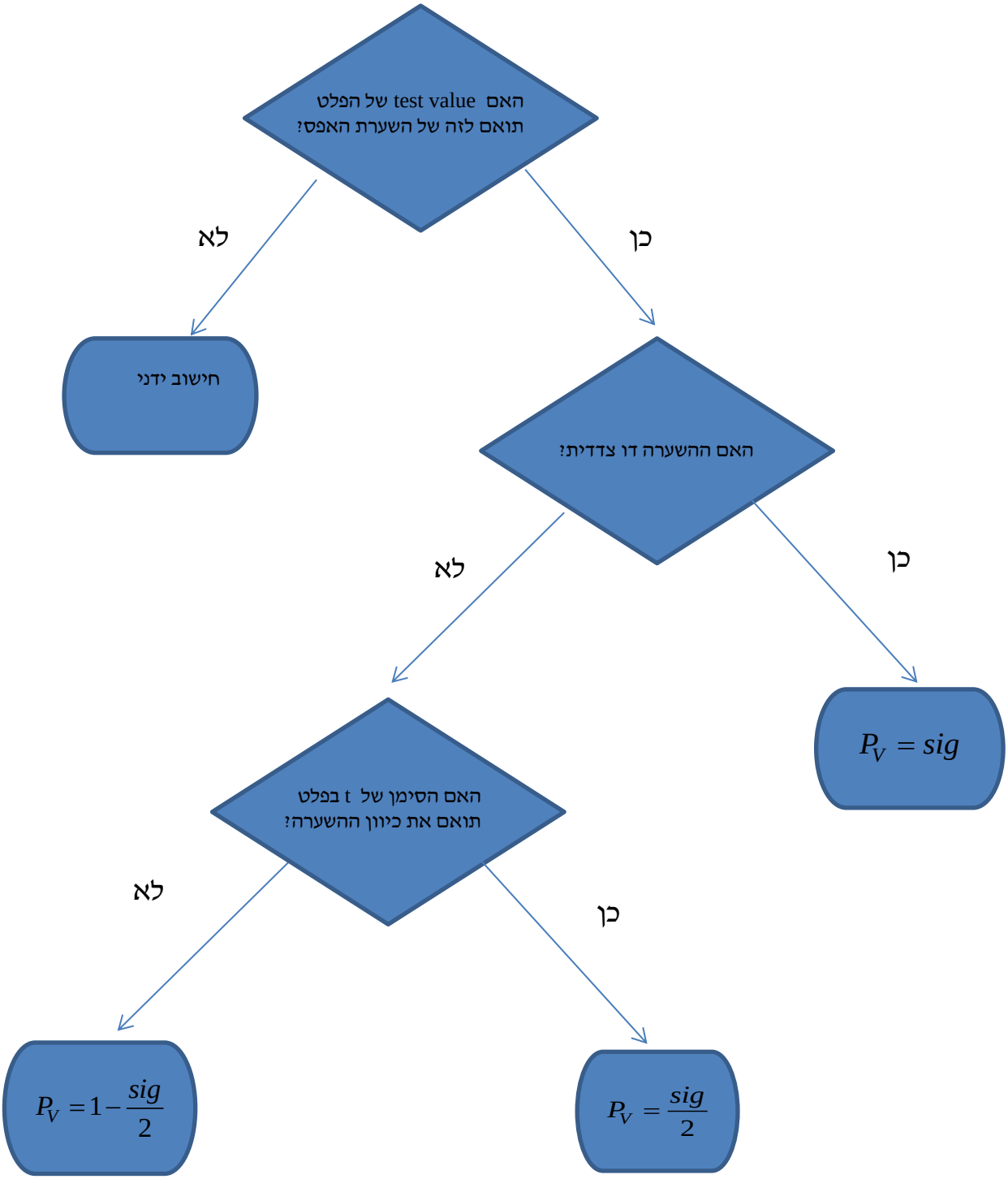
**3)** 1.01, נקבל את $H_0$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ניתוח פלטים:

## רקע:

חישוב מובהקות התוצאה באמצעות פלט תוכנת SPSS:





© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

**One-Sample Statistics**

| | N | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | 25 | 87.6400 | 64.90434 | 12.98087 |

**One-Sample Test**

| | Test Value = 60 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | t | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | 95% Confidence Interval of the Difference | |
| | | | | | Lower | Upper |
| X | 2.129 | 24 | .044 | 27.64000 | .8488 | 54.4312 |

ממוצע הציונים במבחן המיצב בחשבון הוא 60. הוחלט לדגום כיתה אקראית של 25 תלמידים וללמד אותם בשיטת לימוד חדשה.

א. מהו רווח הסמך לממוצע הציונים בחשבון אם יוחלט ליישם את שיטת הלימוד החדשה?

ב. מהו $P_V$ לבדיקת יעילותה של שיטת הלימוד החדשה?

ג. מה יוכרע ברמת מובהקות של 5% לגבי יעילותה של שיטת הלימוד החדשה?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** באוניברסיטה גדולה גיל הסטודנטים לתואר ראשון מתפלג נורמאלית. בעבר פורסם שהגיל הממוצע של הסטודנטים הינו 23. להלן פלט תוכנת SPSS על מדגם של 16 סטודנטים אקראיים מתואר ראשון:

**One-Sample Statistics**

| | N | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|---|---|---|---|---|
| age | 16 | 23.4375 | 2.50250 | .62562 |

**One-Sample Test**

| | Test Value = 23 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 95% Confidence Interval of the Difference | |
| | t | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Lower | Upper |
| age | .699 | 15 | .495 | .43750 | -.8960 | 1.7710 |

א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?

ב. מה ערכו של הפרמטר לפי השערת האפס?

ג. רשום רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת גיל הסטודנטים באוניברסיטה לתואר ראשון.

ד. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם הגיל הממוצע כיום שונה מבעבר?

**2)** קבוצת ילדים בגיל 6 קיבלה משימה לביצוע. עבור כל ילד בדקו כמה זמן לקח לו לסיים את המשימה בדקות. להלן תוצאות הניתוח הסטטיסטי:

**One-Sample Test**

| | Test Value = 4.5 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 95% Confidence Interval of the Difference | |
| | t | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Lower | Upper |
| time | -1.853 | 24 | .076 | -.09200 | -.1944 | .0104 |

א. כמה ילדים השתתפו במחקר?

ב. מצא רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת זמן ביצוע המשימה עבור ילדים בני 6.

ג. מה יש להניח כדי שרווח הסמך מסעיף א' יהיה תקף?

ד. בדוק ברמת מובהקות של 5% שזמן ביצוע המשימה הממוצע נמוך מ-4.5 דקות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**3)** להלן פלט מחשב עבור ניתוח סטטיסטי שנעשה בתוכנת SPSS.
הניתוח הוא עבור מדגם אקראי של קבוצת נבחנים בבגרות באנגלית.

**One-Sample Statistics**

| | N | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|---|---|---|---|---|
| grade | ??? | ??? | 19.62787 | 2.95901 |

**One-Sample Test**

| | Test Value = 75 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | t | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | 95% Confidence Interval of the Difference | |
| | | | | | Lower | Upper |
| grade | ??? | 43 | .017 | -7.34091 | -13.3083 | ???? |

א. השלימו את הגדלים החסרים המסומנים בסמני שאלה בפלט.
ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים שונה מ-75?
ג. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים קטנה מ-75?
ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים גדולה מ-75?

**4)** יצרן סיגריות מפרסם כי תוחלת הניקוטין בסיגריות שהוא מיצר קטנה מ-27 מ״ג. בבדיקה מקרית של 5 סיגריות מתוצרתו נמצאו כמויות הניקוטין הבאות: 21, 21, 20, 24, 22 מ״ג.
הניחו כי כמות הניקוטין בסיגריות מפולג נורמאלי.

**One-Sample Statistics**

| | N | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|---|---|---|---|---|
| nicotine | 5 | 21.6000 | 1.51658 | .67823 |

**One-Sample Test**

| | Test Value = 27 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | t | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | 95% Confidence Interval of the Difference | |
| | | | | | Lower | Upper |
| nicotine | -7.962 | 4 | .001 | -5.40000 | -7.2831 | -3.5169 |

א. האם ברמת מובהקות של 5% ניתן להסיק שיש אמת בפרסום?
ב. אם היינו מוסיפים עוד תצפית שערכה 20. כיצד הדבר היה משפיע על הערך Sig ועל המסקנה?
ג. בדקו האם ניתן להגיד שתוחלת רמת הניקוטין שונה מ-26 ברמת מובהקות של 5%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. הסקה של תוחלת אחת. ב. 23. ג. (22.104, 24.771).

ד. נקבל $H_0$.

**2)** א. 25. ב. (4.3056, 4.5104). ג. המשתנה מתפלג נורמלית.

ד. נדחה $H_0$.

**3)** א. $n=44$, $\bar{X}=67.66$, $t=-2.48$, $upper=-1.3735$.

ב. 0.017. ג. 0.0085. ד. 0.9915.

**4)** א. נכריע שיש אמת בפרסום. ב. המסקנה לא תשתנה.

ג. נכריע שהתוחלת שונה מ-26.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע):

## רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות $\alpha$ על $\mu$ :

$H_0:\mu=\mu_0$ , $H_1:\mu\neq\mu_0$ .

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1-\alpha$ ל- $\mu$ :

אם $\mu_0$ נופל ברווח ← נקבל את $H_0$ .

אם $\mu_0$ לא נופל ברווח ← נדחה את $H_0$ .

**דוגמה:**

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו:

$H_0:\mu=80$ , $H_1:\mu\neq80$ , $\alpha=5\%$ .

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל: $79<\mu<84$ .

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

**פתרון (פתרון מלא בהקלטה):**

רווח הסמך ברמת סמך של 90% מכיל "80".

ברמת סמך של 95% רווח הסמך יגדל ויכיל "80".

לכן, ברמת מובהקות של 5% נקבל $H_0$ .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות: $H_1:\mu\neq 90$ , $H_0:\mu=90$.
החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא: $(87,97)$.
אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.

**2)** חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.

א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.

ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 90 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבירו.

**3)** יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצלין היא 200 מ"ג לקפסולה.משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצילין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצלין בקפסולה מתפלגת נורמלית.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצלין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

## תשובות סופיות:

**1)** נקבל השערת.

**2)** א. $112.87\le\mu\le 118.13$.

ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.

**3)** א. $191.8\le\mu\le 200.2$. ב. נכריע שיש אמת בפרסום.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

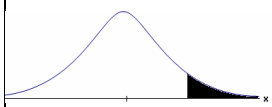
## פרק 26 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

### תוכן העניינים

1. כששוניויות האוכלוסיה לא ידועות ומניחים שהן שוות ..... 145
2. ניתוח פלטים ..... 149

# בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

## כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות – רקע

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: | $H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$<br>$H_1 \quad \mu_1-\mu_2\neq c$ | $H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$<br>$H_1 \quad \mu_1-\mu_2<c$ | $H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$<br>$H_1 \quad \mu_1-\mu_2>c$ |
|---|---|---|---|
| **תנאים:** | 1. מדגמים בלתי תלויים<br>2. $\sigma_1, \sigma_2$ לא ידועות אך שוות<br>3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית | | |
| **אזור הדחייה של $H_0$:** | $t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ או $t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$<br><br>$-t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$<br>$H_0$ דוחים את | $t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$<br><br>$-t_{1-\alpha,n_1+n_2-2}$<br>$H_0$ דוחים את | $t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$<br><br>$t_{1-\alpha,n_1+n_2-2}$<br>$H_0$ דוחים את |

**סטטיסטי המבחן:**

$$t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-c}{\sqrt{\frac{{S_p}^2}{n_1}+\frac{{S_p}^2}{n_2}}}$$

**השונות המשוקללת:**

$${S_p}^2=\frac{(n_1-1){S_1}^2+(n_2-1){S_2}^2}{n_1+n_2-2}$$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**חלופה אחרת לכלל הכרעה:**

| נדחה $H_0$ אם מתקיים: | |
|---|---|
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ **או** $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ | $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ |
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ | |

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשתמשים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 200$.

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 260$.

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר):

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2012** | 120 | 95 | 130 | 90 | 94 | 120 | |
| **2013** | 100 | 82 | 91 | 105 | 74 | 69 | |

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.
הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

**2)** נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

| המדינה | ישראל | ארה"ב |
|---|---|---|
| גודל המדגם | 15 | 15 |
| סכום הציונים | 1560 | 1470 |
| סכום ריבועי הציונים | 165,390 | 147,560 |

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל.
רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

**3)** להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

| הקבוצה | 60W | 100W |
|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 1007 | 956 |
| $S$ | 80 | 72 |
| $n$ | 13 | 15 |

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.

ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W 60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?

ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W 60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

**1)** נדחה את $H_0$.

**2)** הנחות:

1. סטיות התקן שוות.
2. המשתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את $H_0$.

**3)** א. נדחה את $H_0$. ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.

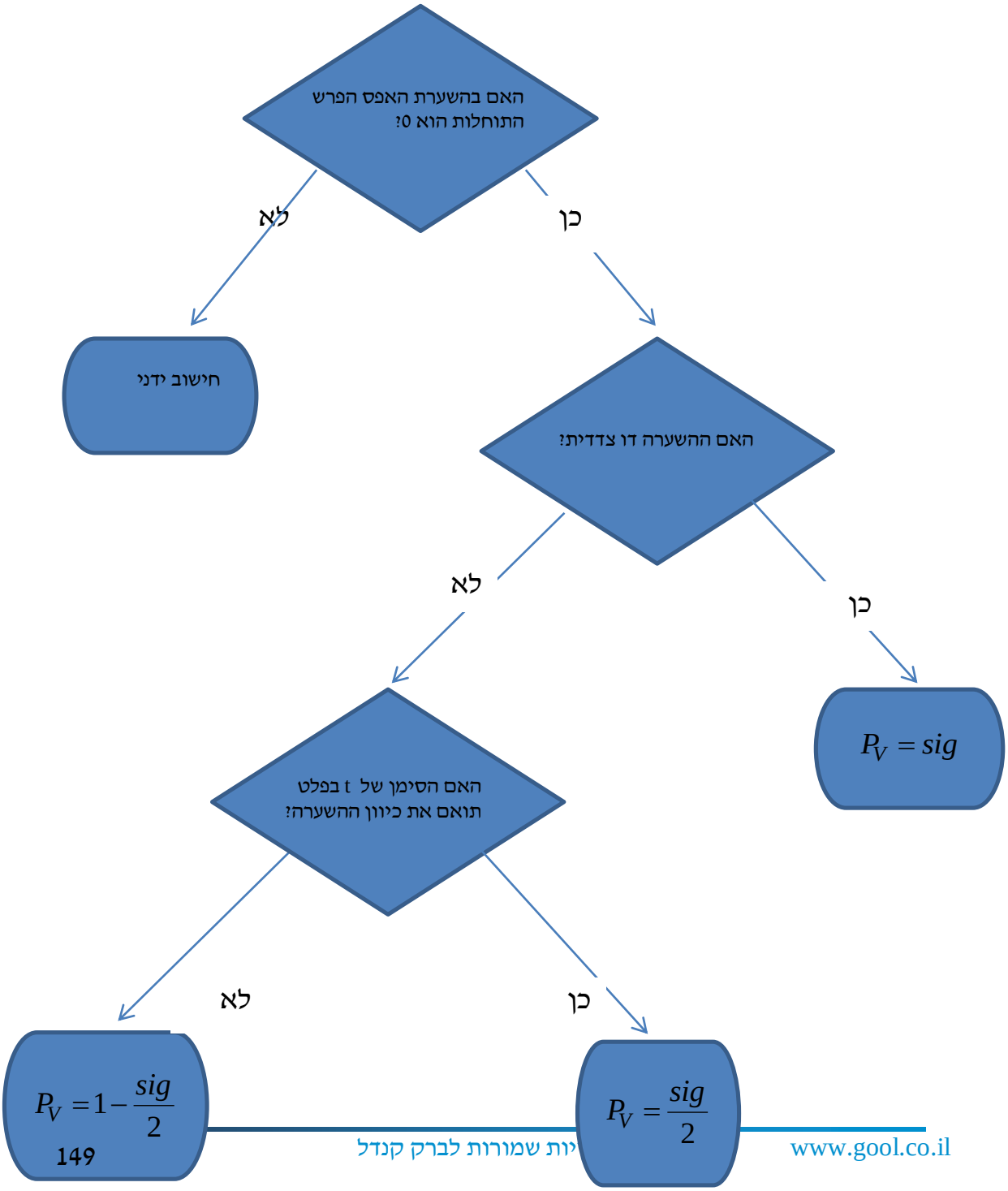
ג. לא נדחה את $H_0$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

## ניתוח פלטים – רקע

מובהקות התוצאה על סמך הפלט:



**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

בסקר שנערך בארה"ב בשנת 1993 נשאלו נסקרים משני אזורים שונים במדינה על מס' האחים והאחיות שלהם. להלן הפלט שהתקבל:

**Group Statistics**

| | Region of the United States | N | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|---|---|---|---|---|---|
| Number of Brothers and Sisters | North East | 676 | 3.76 | 2.939 | .113 |
| | South East | 410 | 4.05 | 2.993 | .148 |

**Independent Samples Test**

| | | Levene's Test for Equality of Variances | | t-test for Equality of Means | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 95% Confidence Interval of the Difference | |
| | | F | Sig. | t | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | Lower | Upper |
| Number of Brothers and Sisters | Equal variances assumed | .173 | .677 | -1.583 | 1084 | .114 | -.293 | .185 | -.657 | .070 |
| | Equal variances not assumed | | | -1.576 | 850.945 | .115 | -.293 | .186 | -.658 | .072 |

א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?

ב. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם קיים שוויון שונויות בין שני האזורים?

ג. בדוק האם קיים הבדל בין-"South East" ל-"North East" ברמת מובהקות של 5% מבחינת מספר האחים והאחיות הממוצע.

ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שההפרש הממוצע בין-" South East" לבין-"North East" חיובי?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** להלן פלט מתוכנת SPSS מתוך מחקר שבחן את רמת האופטימיות של גברים ונשים. רמת האופטימיות נמדדה בסולם ציונים של 1 עד 5.

**Group Statistics**

| | GENDER | N | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|---|---|---|---|---|---|
| optimizm | MALE | 633 | 2.6053 | .49781 | .01979 |
| | FEMALE | 568 | 2.5503 | .48483 | .02034 |

**Independent Samples Test**

| | | Levene's Test for Equality of Variances | | t-test for Equality of Means | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 95% Confidence Interval of the Difference | |
| | | F | Sig. | t | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | Lower | Upper |
| optimizm | Equal variances assumed | .383 | .536 | 1.935 | 1199 | .053 | .05500 | .02842 | -.00076 | ? |
| | Equal variances not assumed | | | 1.938 | 1190.977 | .053 | .05500 | .02838 | -.00068 | .11067 |

א. האם ניתן להניח ששונות האופטימיות של נשים וגברים שווה ברמת מובהקות של 5%?

ב. ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הנשים לגברים ברמת האופטימיות הממוצעת שלהם?

ג. מצא את הגבול העליון של רווח הסמך המסומן בסימן שאלה בפלט. דייק עד 5 ספרות אחרי הנקודה.

ד. בנה רווח סמך לתוחלת רמת האופטימיות של הגברים ברמת סמך של 95%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**2)** פסיכולוגים טוענים שאנשים שניגשים למבחן אינטליגנציה יותר מפעם אחת נוטים לקבל ציונים גבוהים יותר. להלן הפלט שהתקבל:

**Group Statistics**

| | | N | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|---|---|---|---|---|---|
| grade | A | 9 | 96.8889 | 9.40006 | 3.13335 |
| | B | 11 | 108.4545 | 11.46616 | 3.45718 |

**Independent Samples Test**

| | | Levene's Test for Equality of Variances | | t-test for Equality of Means | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 95% Confidence Interval of the Difference | |
| | | F | Sig. | t | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | Lower | Upper |
| grade | Equal variances assumed | .206 | .656 | -2.428 | 18 | .026 | -11.56566 | 4.76333 | -21.57304 | -1.55828 |
| | Equal variances not assumed | | | -2.479 | 17.997 | .023 | -11.56566 | 4.66583 | -21.36832 | -1.76299 |

T-Test

מקרא:

A = נגשו פעם אחת.

B = נגשו יותר מפעם אחת.

א. רשמו את השערות המחקר והסבירו מהו המבחן המתאים כאן.

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם היה מדובר על אותם אנשים שציונם נבדק פעם אחרי המבחן הראשון שעשו ופעם אחרי המבחן השני?

ג. האם ניתן לומר כי מידת הפיזור של ציוני אנשים הנבחנים בפעם הראשונה שונה ממידת הפיזור של ציוני האנשים אשר נבחנים בפעם השנייה. בדוק ברמת מובהקות של $\alpha = 0.05$.

ד. האם נכונה טענת הפסיכולוגים ברמת מובהקות של $\alpha = 0.01$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**3)** כחלק ממחקר בנושא הנישואין בישראל, אחד החוקרים העלה השערה שיש הבדל בממוצע גיל הנישואין (הראשונים), בין נשים הגרות בערים מרכזיות לבין נשים הגרות בערים מרוחקות מהמרכז.
לשם כך נדגמו 50 כלות מכל אחת משתי ערים עיר א'-מרכזית ועיר ב'-מרוחקת ונרשם גילן. תוצאות עיבוד הנתונים מופיעות בטבלאות שלהלן:

**T-Test**

**Group Statistics**

| | מקום המגורים | N | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|---|---|---|---|---|---|
| גיל הנישואין | עיר א | 50 | 24.8072 | 1.38978 | .19654 |
| | עיר ב | 50 | 23.0131 | 1.62070 | .22920 |

**Independent Samples Test**

| | | Levene's Test for Equality of Variances | | t-test for Equality of Means | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | F | Sig. | t | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | 95% Confidence Interval of the Difference | |
| | | | | | | | | | Lower | Upper |
| גיל הנישואין | Equal variances assumed | .330 | .567 | 5.942 | 98 | .000 | 1.79415 | .30193 | 1.19497 | 2.39332 |
| | Equal variances not assumed | | | 5.942 | 95.772 | .000 | 1.79415 | .30193 | 1.19480 | 2.39350 |

א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?

ב. מצא רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין עיר א לעיר ב מבחינת גיל הנשים הממוצע בנישואין הראשונים.

ג. האם ניתן לומר ברמת מובהקות של 1% שנשים בערים מרכזיות מתחתנות בגיל מאוחר יותר מאשר נשים הגרות בערים מרוחקות?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** להלן פלט של תוכנת SPSS:

**T-Test**

| | N | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|---|---|---|---|---|
| X | 26 | 36.3077 | 13.23259 | 2.59513 |
| Y | 24 | 46.4583 | 20.96369 | 4.27920 |

**Independent Samples Test**

| | Levene's Test for Equality of Variances | | t-test for Equality of Means | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | 95% Confidence Interval of the Difference | |
| | F | Sig. | t | df | Sig. (2-ailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | Lower | Upper |
| Equal variances assumed | 4.446 | .040 | -2.164 | ??? | .044 | -10.15064 | ??? | -20.03781 | -.26347 |
| Equal variances not assumed | | | -2.038 | 38.267 | .048 | ??? | 5.00462 | -20.27964 | -.02164 |

א. השלימו את סימני השאלה בטבלה.

ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שקיים הבדל בין השונות של $X$ לזה של $Y$?

ג. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהתוחלת של $X$ גדולה מהתוחלת של $Y$?

ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהתוחלת של $X$ קטנה מהתוחלת של $Y$?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

**1)** א. נקבל את $H_0$ ונכריע שיש שוויון שוניות.

ב. נקבע שלא קיים הבדל בין נשים לגברים מבחינת האופטימיות הממוצעת.

ג. 0.11076 ד. $2.5665 \le \mu \le 2.6441$ .

**2)** א. מבחן T להפרש ממוצעים במדגמים בלתי תלויים.

ב. מבחן T למדגמים מזווגים.

ג. נקבל את $H_0$ , נקבע לקיום שוויון שוניות.

ד. נקבל את $H_0$ , לא נקבל את טענת הפסיכולוגים.

**3)** א. מבחן T להשוואת תוחלת במדגמים בלתי תלויים.

ב. $1.19497 \le \mu_1 - \mu_2 \le 2.39332$ ג. כן.

**4)** א. 10.15, 4.69,-48 ב. 0.04

ג. 0.978 ד. 0.022.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

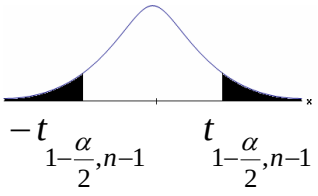
## פרק 27 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים

### תוכן העניינים

1. בדיקת השערות למדגמים מזווגים ..... 156
2. ניתוח פלטים ..... 160

# בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

## בדיקת השערות למדגמים מזווגים – רקע

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: | $H_0: \mu_D = C$<br>$H_1: \mu_D \neq C$ | $H_0: \mu_D = C$<br>$H_1: \mu_D < C$ | $H_0: \mu_D = C$<br>$H_1: \mu_D > C$ |
|---|---|---|---|
| **תנאים:** | 1. $\sigma_D$ אינה ידועה<br>2. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול | | |
| **כלל ההכרעה:** אזור הדחייה של $H_0$: | $t_{\bar{D}} > t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{D}} < -t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br><br><br>■ - דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{D}} < -t^{(n-1)}_{1-\alpha}$<br><br><br>■ - דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{D}} > t^{(n-1)}_{1-\alpha}$<br><br><br>■ - דוחים את $H_0$ |
| **חלופה לכלל הכרעה:** נדחה $H_0$ אם מתקיים: | $\bar{D} > C + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$<br>או<br>$\bar{D} < C - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ | $\bar{D} < C - t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ | $\bar{D} > C + t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ |

**סטטיסטי המבחן:** $t_{\bar{D}} = \dfrac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$ , $S_D^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחיריה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל".
לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות.
להלן המחירים:

| המוצר / רשת | מגה בעיר | שופרסל |
|---|---|---|
| שמפו | 17 | 18 |
| ג'ל כביסה | 48 | 57 |
| עוגת גבינה | 35 | 35 |
| לחם | 12 | 10 |
| קפה נמס | 49 | 47 |
| בקבוק יין | 113 | 142 |
| גבינה בולגרית | 20 | 26 |

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית, בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת $X$ לחברת $Y$ מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

| חברה/ מדינה | ארה"ב | קנדה | הולנד | פולין | מצרים | סין | יפן |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 1.5 | 2.1 | 2.2 | 3 | 3.5 | 3.2 | 4.2 |
| $Y$ | 1.4 | 2 | 1.9 | 3.1 | 3.2 | 3.2 | 4.2 |

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים בממוצע?

**2)** מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| לפני | 506 | 470 | 420 | 640 | 670 | 390 | 500 | 590 |
| אחרי | 570 | 540 | 430 | 610 | 680 | 510 | 520 | 580 |

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית.

**3)** נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| סטטיסטיקה א' | 74 | 68 | 90 | 75 | 82 |
| סטטיסטיקה ב' | 80 | 84 | 87 | 76 | 100 |

פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.

א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ 5 נקודות?

ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ- 5 נקודות?

ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

**4)** לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן $Z$ למדגם יחיד.

ב. מבחן $T$ למדגם יחיד.

ג. מבחן $T$ למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן $T$ למדגמים מזווגים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| משקל במכשיר 1 | 4.5 | 9.6 | 0.7 | 2.5 |
| משקל במכשיר 2 | 3.5 | 6.9 | 1.7 | 0.5 |

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

**6)** כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

## תשובות סופיות

**1)** לא נדחה $H_0$.

**2)** לא נדחה $H_0$.

**3)** א. $0.25 \le pv \le 0.5$ ב. 0.5 ג. לא נדחה $H_0$.

**4)** ד'.

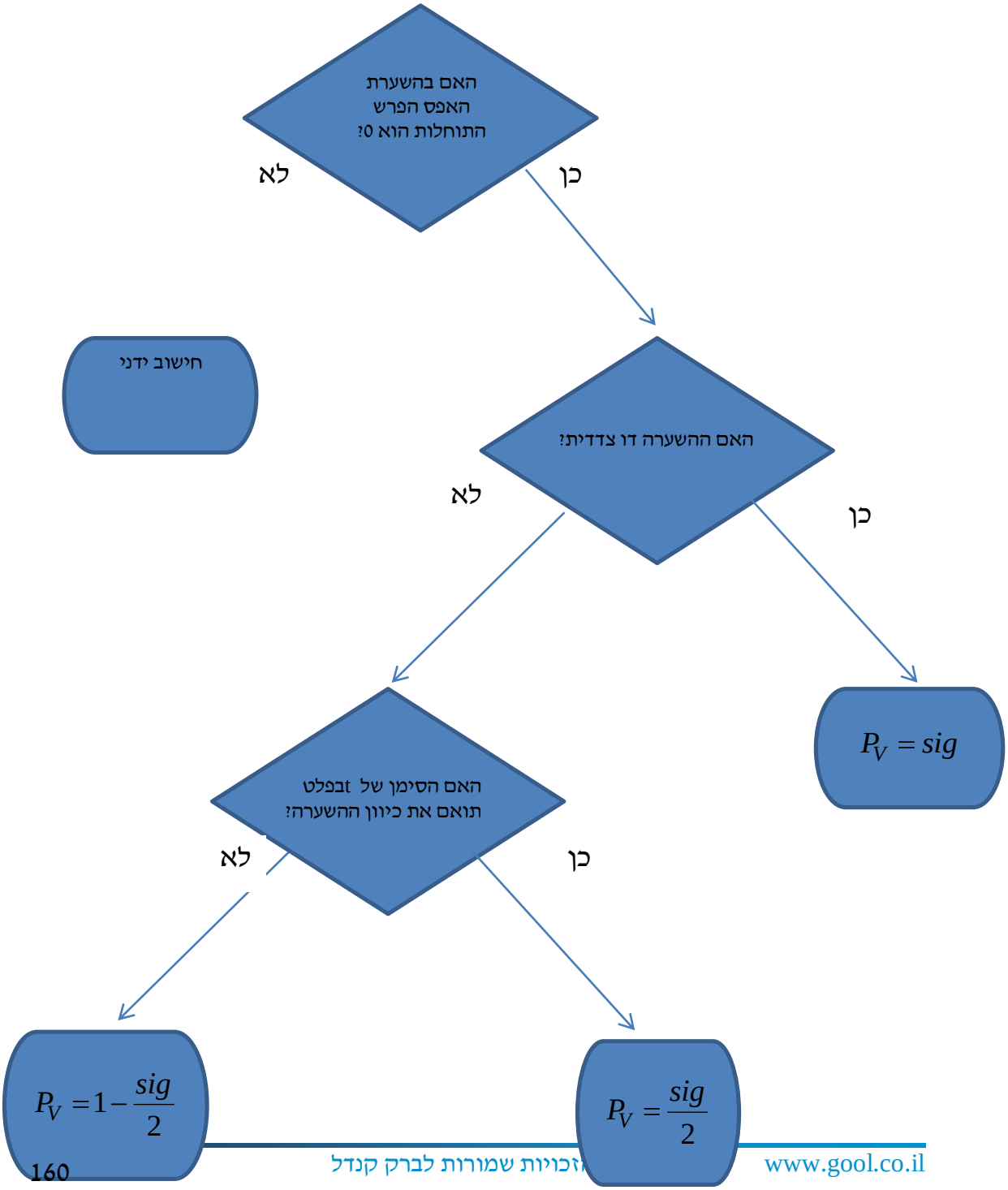
**5)** ד'.

**6)** ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

## מדגמים מזווגים – ניתוח פלטים – רקע





כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

כדי לבדוק את ההשפעה של קורס לגמילה מעישון נלקח מדגם מקרי של 5 נבדקים. עבור כל אחד מהם נמדדה צריכת הסיגריות היומית לפני הקורס וחודשיים אחריו. הניחו שצריכת הסיגריות מתפלגת נורמלית. להלן התוצאות:

| נבדק | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| לפני | 40 | 22 | 25 | 28 | 30 |
| אחרי | 30 | 24 | 13 | 10 | 12 |

**Paired Samples Statistics**

| | | Mean | N | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|---|---|---|---|---|---|
| Pair 1 | BEFORE | 29.0000 | 5 | 6.85565 | 3.06594 |
| | AFTER | 17.8000 | 5 | 8.72926 | 3.90384 |

**Paired Samples Test**

| | | Paired Differences | | | | | t | df | Sig. (2-tailed) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean | 90% Confidence Interval of the Difference Lower | Upper | | | |
| Pair 1 | BEFORE - AFTER | 11.20000 | 8.19756 | 3.66606 | 3.38452 | 19.01548 | 3.055 | 4 | .038 |

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הקורס יעיל.

## שאלות

**1)** בסקר שנערך בארה"ב בשנת 1993 נשאלו נסקרים על השכלת הוריהם, להלן הפלט שהתקבל:

**Paired Samples Test**

| | | Paired Differences | | | | | t | df | Sig. (2-tailed) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean | 95% Confidence Interval of the Difference Lower | Upper | | | |
| Pair 1 | Highest Year School Completed, Father - Highest Year School Completed, Mother | -.007 | 3.115 | .100 | -.203 | .189 | -.072 | 973 | .943 |

א. תנו אומדן להפרש הממוצעים.

ב. תנו אומדן לטעות התקן של הפרש הממוצעים.

ג. האם קיים הבדל מובהק בין השכלת האבות להשכלת האימהות ברמת מובהקות של 5%?

**2)** בתחרות קפיצה למים שופטים באופן קבוע שופט איטלקי ושופט דרום קוריאני. להלן פלט המנתח את הציונים ששופטים אלה נתנו בתחרויות השונות:

**Paired Samples Statistics**

| | | Mean | N | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|---|---|---|---|---|---|
| Pair 1 | Italy | ??? | 300 | .86742 | .05008 |
| | South Korea | 8.9183 | ??? | .81992 | .04734 |

**Paired Samples Test**

| | | Paired Differences | | | | | t | df | Sig. (2-tailed) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean | 95% Confidence Interval of the Difference Lower | Upper | | | |
| Pair 1 | Italy - South Korea | -.42233 | .36153 | .02087 | -.46341 | -.38126 | -20.234 | ??? | ??? |

א. השלימו את החלקים החסרים בפלט (מסומנים בסימני שאלה).

ב. בדקו את הטענה שהשופט הדרום קוריאני נותן בממוצע 0.2 נקודות יותר מאשר השופט האיטלקי ברמת מובהקות של 5%.

ג. מהו רווח הסמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין השופטים?

ד. בנו את הרווח כעת ברמת סמך של 98% לתוחלת פער בציונים בין השופטים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**3)** בדקו את ציוניהם של 44 נבדקים אקראיים במבחן הפסיכומטרי. פעם אחת לפני הכנה (Before) ופעם אחת אחרי הכנה (After).

**Paired Samples Test**

| | | Paired Differences | | | | | t | df | Sig. (2-tailed) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean | 95% Confidence Interval of the Difference Lower | Upper | | | |
| Pair 1 | Before - After | -7.45455 | 19.28303 | 2.90703 | -13.31712 | -1.59197 | -2.564 | 43 | .014 |

א. רשמו מהו המבחן הסטטיסטי ונסח את ההשערות אליהם מתייחס הפלט.

ב. בדקו את ההשערה שממוצע ציונים משתפרים לאחר ההכנה ברמת מובהקות של 5%.

ג. בדקו את ההשערה שממוצע ציונים משתפרים לאחר ההכנה ביותר מ-5 נקודות ברמת מובהקות של 5%.

ד. מצאו רווח סמך לתוחלת שיפור ממוצע הציונים לאחר ההכנה ברמת ביטחון של 95%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** להלן פלט של תכנת SPSS:

**T-Test**

**Paired Samples Statistics**

| | | Mean | N | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|---|---|---|---|---|---|
| Pair 1 | x | 54.0000 | 6 | 5.86515 | 2.39444 |
| | y | 46.5000 | 6 | 10.72847 | 4.37988 |

**Paired Samples Test**

| | | Paired Differences | | | | | t | df | Sig. (2-tailed) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean | 95% Confidence Interval of the Difference | | | | |
| | | | | | Lower | Upper | | | |
| Pair 1 | x - y | 7.50000 | ?? | 4.72405 | -4.64356 | 19.64356 | ?? | 5 | .173 |

א. מלא את החלקים החסרים בטבלה.

ב. מהי רמת המובהקות המינימלית לקבלת הטענה שיש הבדל בין $X$ ל- $Y$ בממוצע?

ג. האם התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה, ואם כן גדלה או קטנה,
אם הינו מוסיפים עוד תצפית שההפרש בין $X$ ל- $Y$ הוא 0.

ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה ש $X$ גדול מ- $Y$ בממוצע?

ה. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה ש $X$ קטן מ- $Y$ בממוצע?

ו. בנו רווח סמך לתוחלת של $X$ ברמת סמך של 90%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

1) א. -0.007 ב. 0.1 ג. אין הבדל מובהק.

2) א. $d.f = 299$, $n = 300$, $\bar{X} = 8.496$, $\text{Sig} = 0$. ב. נדחה את $H_0$. ג. $(0.46341, 0.38126)$ ד. $(0.4708, 0.3738)$.

3) א. ראה וידאו. ב. נדחה את $H_0$. ג. לא נדחה את $H_0$. ד. (1.592,13.317).

4) א. 1.5876, 11.5715 ב. 0.173 ג. יגדל. ד. 0.0865 ה. 0.9135 ו. $49.18 < \mu < 58.82$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 28 - הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות

### תוכן העניינים

1. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות ..... 166

# הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על הפרש תוחלות

## רקע

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות $\alpha$ על $\mu_1-\mu_2$ :

$H_0:\mu_1-\mu_2=C,\qquad H_1:\mu_1-\mu_2\neq C$ .

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1-\alpha$ ל- $\mu_1-\mu_2$ :

אם $C$ נופל ברווח ← נקבל את $H_0$ .

אם $C$ לא נופל ברווח ← נדחה את $H_0$ .

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגם מזווג.

להלן השערותיו : $\alpha=5\%$ $H_1:\mu_D\neq 80,\qquad H_0:\mu_D=80,$ .

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90%, $78<\mu_D<83$ .

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'.
להלן ציוניהם בסמסטר א' ו- ב':

| סמסטר א | סמסטר ב |
|---|---|
| 74 | 80 |
| 68 | 84 |
| 90 | 87 |
| 75 | 76 |
| 82 | 100 |

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.

ב. פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נק' לעומת סמסטר א'. האם יש אמת בפרסום?

**2)** הוחלט להשוות הציונים אצל מרצה $X$ ואצל מרצה $Y$. נבחרו באקראי 6 סטודנטים, 3 סטודנטים של מרצה $X$ ו-3 סטודנטים של מרצה $Y$, עבורם התקבלו הציונים הבאים:

| | | | |
|---|---|---|---|
| מרצה $X$ | 82 | 90 | 68 |
| מרצה $Y$ | 68 | 81 | 64 |

א. חשבו רווח סמך ברמת סמך 90% להפרש בין התוחלות של הציונים אצל שני המרצים.

ב. האם ברמת מובהקות של 10% נכריע שיש הבדל בין תוחלות הציונים אצל שני המרצים?

**שאלות רב-ברירה:**

**3)** סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים.
הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$.
אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות:
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ ; $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ברמת מובהקות 0.05, מסקנתו תהיה:

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05 .

ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו : $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$ , רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.
לכן מסקנת המחקר היא :

א. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.

ב. ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.

ג. לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של $D$.

## תשובות סופיות

**1)** א. $-3.8 \le \mu_D \le 19$ ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

**2)** א. $-8.5 \le \mu_X - \mu_Y \le 26.5$ ב. נכריע שאין הבדל.

**3)** ג.

**4)** א.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מבוא לסטטיסטיקה

## פרק 29 - שאלות מסכמות בבדיקת השערות

### תוכן העניינים

1. שאלות פתוחות מסכמות ..... 169
2. שאלות רב ברירה ( אמריקאיות) ..... 171

# שאלות מסכמות בבדיקת השערות על פרמטרים

## שאלות

**1)** שני חוקרים נתבקשו לבדוק את ההשערות הבאות: $H_1:\mu>520$, $H_0:\mu=520$.
כל חוקר בדק מדגם של 225 נחקרים. ידוע ש- $\sigma=20$.
חוקר א' קבע את כלל ההכרעה לפי $\alpha=0.05$.
חוקר ב' מחליט לדחות $H_0$ אם $\bar{X}>522$.

א. למי מהחוקרים הסתברות לטעות מסוג ראשון קטנה יותר?

ב. מהי ההסתברות לטעות מסוג שני של חוקר ב' עבור $\mu_1=525$.

ג. הסבר ללא חישוב נוסף, האם ההסתברות לטעות מסוג שני עבור $\mu_1=525$, של חוקר א' שווה/קטנה/גדולה לזו של חוקר ב'.

ד. חוקר א' קיבל במדגם שלו $\bar{X}=523$. מהי מסקנתו?

**2)** ידוע כי תוחלת מספר הלייקים היומי של דנה היא 12 עם סטיית תקן 5.
דני טוען שהוא יותר פופולארי מדנה בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום. על-מנת לבדוק זאת ספר דני כמה לייקים הוא קיבל בכל יום במהלך 7 שבועות (כלומר, ב $-$ 49 ימים) וקיבל סך-הכול 637 לייקים. נניח כי סטיית התקן של מספר הלייקים שדני מקבל ביום זהה לסטיית התקן של דנה.

א. מהי רמת המובהקות שכדאי לדני לדרוש, כדי שדנה תשתכנע בצדקת טענתו (שדני פופולרי יותר בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום).

ב. אם דני משער שתוחלת מספר ה"לייק"ים שהוא מקבל ביום היא 14 וקובע רמת מובהקות 2.5%, מהי עוצמת המבחן של דני?

**3)** ברצוננו להשוות בין רשתות A לבין B. לשם כך בחרנו 4 מוצרים, ובדקנו את מחיריהם בשתי הרשתות. להלן התוצאות:

| מוצר / רשת | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 |
| 2 | 4 | 5 |
| 3 | 5 | 3 |
| 4 | 7 | 4 |

הניחו כי המחירים מתפלגים נורמלית.
אם יש הנחות נוספות כדי לבצע את המבחן הפרמטרי רשמו אותן.

א. בדקו האם קיים הבדל בין הרשתות מבחינת תוחלת המחירים. רמת מובהקות של 5%.

ב. חזרו על הסעיף הקודם בהנחה ונבחרו בכל רשת מוצרים באקראי ולא בהכרח אותם מוצרים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** במטרה לבדוק האם סטודנטים הלומדים במכללות משקיעים יותר זמן ללימודים מאשר סטודנטים באוניברסיטאות נדגמו 12 סטודנטים ובדקו לכל סטודנט את הזמן שהוא משקיע ביום ללימודים. הזמנים נמדדו בדקות:

| סטודנטים באוניברסיטאות | 176 | 156 | 189 | 171 | 140 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| סטודנטים במכללות | 180 | 190 | 191 | 186 | 204 | 150 |

א. נסחו את ההשערות ובדוק אותן ברמת מובהקות של 5%. רשום את כלל ההכרעה ואת ההנחות הדרושות לביצוע המבחן הפרמטרי.

ב. חשבו את p-value.

ג. ישנה טענה שממוצע זמן ההשקעה בלימודים במכללות הוא 3.5 שעות ביום. בדוק את הטענה כאשר רמת המובהקות הינה 5%.

**5)** נתון כי: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 10^2)$.

מעוניינים לבדוק את ההשערות: $H_1: \mu > 40, \quad H_0: \mu = 40$.

דגמו 25 תצפיות מהאוכלוסייה והתקבל $\bar{X} = 45$.

א. חשבו את p-value (מובהקות התוצאה).

ב. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu < 40$

ג. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu \neq 40$

## תשובות סופיות

**1)** א. חוקר א' ב. 0.0122 ג. גדלה. ד. נדחה $H_0$.

**2)** א. לפחות 0.0808 ב. 0.7995.

**3)** א. לא נדחה $H_0$. ב. לא נדחה $H_0$.

**4)** א. לא נדחה $H_0$. ב. בין 5% ל-10%. ג. נדחה $H_0$.

**5)** א. 0.0062 ב. 0.9938 ג. 0.0124.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות סיכום – שאלות רב ברירה על בדיקת השערות

**1)** בבדיקת השערה חד-צדדית ימנית ברמת מובהקות $\alpha = 0.01$, נדחתה השערת האפס. מה הייתה המסקנה לו נבדקה אותה ההשערה באמצעות אותם נתונים ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$?

א. השערת האפס הייתה נדחית.

ב. השערת האפס לא הייתה נדחית.

ג. ההשערה המחקרית הייתה נדחית.

ד. בהעדר נתונים נוספים, לא ניתן לדעת.

**2)** לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמיתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

**3)** כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| לפני הנישואין- $X$ | 69 | 93 | 82 | 68 |
| לאחר הנישואין- $Y$ | 80 | 88 | 84 | 71 |

מהן ההשערות הנבדקות?(ההפרש חושב $X-Y$)

א. $H_1: \mu_d < 0, \quad H_0: \mu_d = 0$

ב. $H_1: \mu_X - \mu_Y < 0, \quad H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$

ג. $H_1: \mu_X - \mu_Y < 0, \quad H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$

ד. $H_1: \mu_d > 0, \quad H_0: \mu_d = 0$

**4)** חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** ידוע כי ילד בגיל שנתיים ישן בממוצע 9 שעות בלילה. במדגם של 20 תינוקות בני שנתיים המתגוררים בצפון נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 10 עם סטיית תקן של 1.1 במדגם של 10 תינוקות בדרום נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 7.9 עם סטיית תקן של 1.1. על מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהצפון לבין זה של כלל הילדים יש לערוך _____, ועל מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהדרום לזה של ילדים המתגוררים בצפון יש לערוך _____.
יש להניח שההנחות הדרושות מתקיימות.

א. מבחן Z למדגם יחיד ; מבחן T למדגם יחיד.
ב. מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים תלויים.
ג. מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
ד. מבחן T למדגמים בלתי תלויים ; מבחן T לממוצע יחיד.

**6)** מובהקות התוצאה (PV) היא גם :

א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

**7)** כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| לפני הנישואין | 69 | 93 | 82 | 68 |
| לאחר הנישואין | 80 | 88 | 84 | 71 |

באיזה התפלגות משתמשים לבדיקת ההשערות, ובכמה דרגות חופש :

א. ההתפלגות Z ללא דרגות חופש.
ב. ההתפלגות T ו-3 דרגות חופש.
ג. ההתפלגות T ו-6 דרגות חופש.
ד. ההתפלגות $\chi^2$ ו-3 דרגות חופש.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**8)** שני סטטיסטיקאים בודקים השערות ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$ על סמך אותו מדגם. סטטיסטיקאי א' בודק את ההשערה: $H_0 : \mu = 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1 : \mu \neq 20$ ומחליט לא לדחות את השערת האפס.

סטטיסטיקאי ב' בודק את ההשערה $H_0 : \mu \leq 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1 : \mu > 20$ מה יחליט סטטיסטיקאי ב'?

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. ללא נתונים נוספים אי אפשר לדעת מה יחליט.

**9)** חוקר בדק השערה מסוימת והחליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות 5%. מה נכון לומר?

א. הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.

ב. הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.

ג. הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% וברמת מובהקות 2%.

ד. הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.

**10)** רמת הכולסטרול בדמם של אנשים מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 180 מ"ג (ל 100 סמ"ק דם). וסטיית תקן של 10 מ"ג. מעוניינים לבדוק את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר.
נניח שסטיית התקן אצל צמחונים זהה לסטיית התקן של כלל האנשים.
במדגם של 20 צמחונים התקבל ממוצע רמת כולסטרול 174.5 מ"ג.
אם הוחלט לקבל את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

א. טעות מסוג ראשון.

ב. טעות מסוג שני.

ג. טעות מסוג שלישי.

ד. לא ניתן לדעת כיוון שאנו לא יודעים מה התוחלת האמתית אצל הצמחוניים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**11)** שני חוקרים העוסקים בתחום מחקרי משותף החליטו להסתמך על נתונים של מדגם שפורסם על ידי הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה.
חוקר א' ניסח השערה דו צדדית ואילו חוקר ב' ניסח השערה חד צדדית.
מסקנתו של איזה מבין המשפטים הבאים הוא הנכון בנוגע למסקנות החוקרים?

א. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס לא ניתן לדעת מה יחליט חוקר ב' באותה רמת מובהקות.

ב. אם חוקר א' יקבל את השערת האפס גם חוקר ב' יקבל את השערת האפס באותה רמת מובהקות.

ג. אם חוקר ב' ידחה את השערת האפס גם חוקר א' ידחה את השערת האפס באותה רמת מובהקות.

ד. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס גם חוקר ב' ידחה את השערת האפס בתנאי שרמת המובהקות כפולה בגודלה.

**12)** ידוע מנתוני העבר כי תוחלת הציונים בבחינה בפסיכולוגיה היא 79. הועלתה השערה כי תוחלת הציונים בקרב העולים החדשים נמוכה יותר. לצורך בדיקת הטענה נלקח מדגם מקרי של 47 סטודנטים עולים ונמצא ממוצע של 75.
מה משמעות הפרמטר בניסוח ההשערות?

א. תוחלת ציוני העולים באוכלוסייה.

ב. ממוצע ציוני העולים במדגם.

ג. תוחלת ציוני האוכלוסייה מנתוני העבר.

ד. ממוצע ציוני שאר האוכלוסייה במדגם.

**13)** חוקר ביצע מחקר וידוע כי עשה טעות מסוג 1. מה מהבאים נכון?

א. החוקר דחה את השערת $H_0$ כאשר היא הייתה נכונה.

ב. החוקר דחה את השערת $H_1$ כאשר היא הייתה נכונה.

ג. החוקר לא דחה את השערת $H_0$ כאשר היא הייתה לא נכונה.

ד. המדגם של החוקר שייך בפועל להתפלגות הדגימה של $H_1$.

**14)** חוקר ביקש לבחון האם תאומים זהים אשר הופרדו בילדותם שונים מתאומים זהים אשר גדלו יחדיו מבחינת מידת הפער בין התאומים בלחץ הדם. הוא דגם 20 זוגות תאומים מכל אוכלוסייה ומדד את הפרש בין לחץ הדם בכל זוג תאומים. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

א. מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 38 דרגות חופש.

ב. מבחן T למדגמים מזווגים, עם 39 דרגות חופש.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 39 דרגות חופש.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים עם 38 דרגות חופש.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**15)** שלושה חוקרים רצו לבדוק את השפעתו של שידור פרסומות נגד תאונות דרכים על מהירות הנהיגה של נהגים בישראל (השונות של מהירות הנהיגה בישראל אינה ידועה). עידו השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים אחת, חודש לפני שידור הפרסומות וחודש לאחר שידור הפרסומות.
רון השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שראו את הפרסומות, למהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שלא ראו את הפרסומות.
יואב השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים בחודש בו שודרו הפרסומות, למהירות הנהיגה הממוצעת בישראל על פי נתוני משרד התחבורה.
המבחנים בהם צריכים החוקרים להשתמש הם:

א. שלושתם במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
ב. עידו במבחן T למדגמים מזווגים, ורון ויואב במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
ג. עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון במבחן T למדגמים בלתי תלויים ויואב במבחן T למדגם יחיד.
ד. עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון ויואב במבחן T למדגם יחיד.

**16)** במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5%.
מה תמיד נכון?

א. הגדלת רמת המובהקות לא תשתנה את מסקנת המחקר.
ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

**17)** חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של $\alpha$ והחליט לדחות את השערת האפס. אם החוקר היה עורך מבחן חד צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:

א. השערת האפס הייתה נדחית.
ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

**18)** ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.
ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z.
רוני השתמשה בטבלה של התפלגות T.
מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם?

א. אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
ב. אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
ג. שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
ד. לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**19)** נתון ש $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_1: \mu < \mu_0$, $H_0: \mu = \mu_0$.
חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות. $\sigma^2$ לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.

ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.

ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

**20)** אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:

א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.

ב. העוצמה של המבחן גדלה.

ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.

ד. תשובות א ו-ב נכונות.

**21)** חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.

**22)** מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

| | $\alpha$ | $1-\beta$ |
|---|---|---|
| א. | גדולה | גדולה |
| ב. | גדולה | קטנה |
| ג. | קטנה | גדולה |
| ד. | קטנה | קטנה |

**23)** נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית $H_0$ קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:

א. הן $\alpha$, והן $(1-\beta)$, יקטנו.

ב. $\alpha$ יישאר ללא שינוי ואילו $(1-\beta)$ יגדל.

ג. $\alpha$ יגדל ואילו $(1-\beta)$ יקטן.

ד. הן $\alpha$ והן $(1-\beta)$ יגדלו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**24)** ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

א. טעות מסוג ראשון.
ב. טעות מסוג שני.
ג. טעות מסוג שלישי.
ד. אין טעות במסקנתו.

**25)** בבדיקת השערות התקבל שה- $p-value=0.02$ .
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?
בחר בתשובה הנכונה:

א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

**26)** מובהקות התוצאה (PV) היא גם:

א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

**27)** בבדיקת השערות מסוימת התקבל $p\ value=0.0254$, לכן:

א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את $H_0$ .
ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את $H_0$ .
ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את $H_0$ .
ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את $H_0$ .

**28)** רמת המובהקות במחקר הייתה 2% לכן.

א. בסיכוי של 2% נדחה את השערת האפס.
ב. בסיכוי של 2% לא נדחה את השערת האפס.
ג. בסיכוי של 2% השערת האפס לא נכונה.
ד. אף תשובה לא נכונה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**29)** נתון ש: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_1: \mu < \mu_0, \quad H_0: \mu = \mu_0$.
חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.
$\sigma^2$ לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5%. אם הוא היה מגדיל את רמת המובהקות ל-10% אזי:

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.

ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.

ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

**30)** לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית. מספר דרגות החופש במבחן הוא:

א. 9

ב. 19

ג. 18

ד. 8

**31)** בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| משקל במכשיר 1 | 4.5 | 9.6 | 0.7 | 2.5 |
| משקל במכשיר 2 | 3.5 | 6.9 | 1.7 | 0.5 |

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית.
המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

**32)** כדי להשוות בין שני אצים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים.
המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**33)** סטטיסטיקאי ערך מבחן סטטיסטי. הוא חישב את עוצמת המבחן וקיבל 0. המשמעות של תוצאה זו היא:

א. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

ב. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.

ג. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.

ד. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

**34)** סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים. הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$. אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ ; $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$, ברמת מובהקות 0.05 מסקנתו תהיה:

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.

ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

**35)** במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו: $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$ רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%. לכן מסקנת המחקר היא:

א. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.

ב. ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.

ג. לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של $D$.

**36)** אם רמת מובהקות של מבחן סטטיסטי הינה 0, הכוונה היא:

א. תמיד נדחה $H_0$ כאשר היא נכונה, אך לא תמיד נדחה אותה כאשר היא לא נכונה.

ב. לא נדחה את $H_0$ אף פעם.

ג. לא נדחה את $H_0$ כאשר היא נכונה אך יתכן ונדחה אותה כאשר היא לא נכונה.

ד. כל התשובות לא נכונות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**37)** חוקר ביצע ניסוי. הוא ניסח את ההשערות הבאות: $H_1:\mu\neq 10,\quad H_0:\mu=10$.
לצורך בדיקה הוא לקח מדגם מקרי בגודל 5 מתוך אוכלוסייה המתפלגת נורמאלית עם שונות לא ידועה. על סמך תוצאות המדגם הוא חישב וקיבל: $t_{\bar{x}}=-2.63$. לכן המסקנה היא:

א. הוא ידחה $H_0$ ברמת מובהקות 0.1 אך לא כן ברמת מובהקות 0.05.

ב. הוא ידחה $H_0$ ברמת מובהקות 0.05 אך לא כן ברמת מובהקות 0.025.

ג. הוא ידחה $H_0$ ברמת מובהקות 0.025 אך לא כן ברמת מובהקות 0.01

ד. הוא לא ידחה $H_0$ ברמת מובהקות 0.1.

**38)** האיגוד האמריקני לרפואת ילדים מפרסם הנחיות חדשות הקובעות כי יש ליטול תוספת יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מחסור במינרל זה עלול לגרום לפגיעה מוחית אצל העובר והתינוק. החלטה זו נקבעה על סמך מחקר בו השתתפו 1050 נשים שנטלו יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה.
מתוך הנשים שהשתתפו במחקר, רק ל-21 נמצאו ילדים בעלי פגיעה מוחית לעומת 3% באוכלוסייה הכללית. בנוסף, פורסם שהאיגוד האמריקאי מגיע למסקנותיו על סמך רמת מובהקות של 0.5%. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג ראשון במחקר?

א. 0.005

ב. 0.03

ג. 0.0287

ד. 0.05

**39)** חוקרת שיערה, כי משקלן של נשים כשנה לאחר החתונה גבוה ממשקלן בעת החתונה. החוקרת דגמה 15 נשים, ובדקה את משקלן בשתי נקודות הזמן (בעת החתונה, ושנה לאחריה), אך לא מצאה הבדל מובהק ברמת מובהקות 0.01. בהנחה, כי **<u>במציאות</u>** השערתה של החוקרת נכונה, <u>סביר</u> כי אם היא תגדיל את גודל המדגם, אזי:

א. יקטן הסיכוי לטעות מסוג שני ($\beta$).

ב. תגדל רמת הביטחון ($1-\alpha$).

ג. אף תשובה לא נכונה.

ד. כל התשובות נכונות.

**40)** איזה מהמשפטים הבאים נכון תמיד?

א. $\text{POWER}+\alpha+\beta=1$

ב. $\text{POWER}=0.5-\beta$

ג. $\text{POWER}+\alpha=1$

ד. $\beta+\alpha=1$

ה. הכול לא נכון.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**41)** מה נכון לומר לגבי הנחת שיוויון השונויות במבחן T למדגמים בלתי תלויים?

א. היא אומרת שהשונויות המדגמיות שוות.

ב. בלעדיה אין שום דרך לבדוק השערה על הפרש בין תוחלות.

ג. היא חשובה הן עבור מדגמים מזווגים והן עבור מדגמים בלתי תלויים.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

**42)** חוקר החליט לא לדחות השערה ברמת מובהקות של $\alpha$. במידה וחוקר זה היה בודק השערה זו ברמת מובהקות של $2\alpha$ על סמך אותם נתונים, האם ההשערה תדחה?

א. ההשערה תדחה.

ב. ההשערה לא תדחה.

ג. התשובה תלויה בעוצמת המבחן.

ד. לא ניתן לדעת בוודאות אם ההשערה תדחה או לא.

**43)** חוקרת שיערה, כי בגילאי הגן בנות יותר תקשורתיות מבנים. אם החוקרת תדגום אקראית 30 בנים ו-30 בנות, ובמדגם יתקבל אותו ממוצע של ציון תקשורת. סטטיסטי המבחן יהיה:

א. אפס

ב. חיובי

ג. שלילי

ד. לא ניתן לדעת

**44)** עוצמה שווה ל-1 פרושה:

א. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.

ב. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.

ג. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

**45)** מה מהבאים **<u>נכון</u>** לגבי מבחן T מדגמים מזווגים?

א. כל התצפיות במחקר אינן תלויות זו בזו.

ב. כל התצפיות במחקר תלויות זו בזו.

ג. כל הצמדים של תצפיות במחקר אינם תלויים זה בזה.

ד. התצפיות בתוך כל צמד אינן תלויות זו בזו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**46)** לבדיקת ההשערה החד צדדית על התוחלת של התפלגות נורמלית $H_0:\mu\geq 10$, $H_1:\mu<10$. נלקח מדגם והתקבלה רמת מובהקות מינימאלית לדחיית השערת האפס $0.058$. לו רצינו לבדוק את ההשערה הדו צדדית $H_0:\mu=10,\ H_1:\mu\neq 10$, אז על סמך תוצאת אותו המדגם ברמת מובהקות $0.05$:

א. ניתן להכריע בין ההשערות רק אם שונות האוכלוסייה נתונה.

ב. מקבלים את השערת האפס.

ג. דוחים את השערת האפס.

ד. לא ניתן להכריע בין ההשערות שכן חסרים נתונים.

**47)** לבדיקת ההשערה החד צדדית ימנית $H_0:\mu=55,\quad H_1:\mu=65$, נלקח מדגם מקרי בגודל $n$ מאוכלוסייה בעלת התפלגות נורמלית ושונות $\sigma^2$. רמת המובהקות היא 5%. נמצא שהעוצמה היא 0.9. להלן 3 טענות:

- עבור מדגם בגודל $n$ וברמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות: $H_0:\mu=55,\quad H_1:\mu=60$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל $2n$ ורמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות: $H_0:\mu=55,\quad H_1:\mu=65$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל $n$ ורמת מובהקות 10% לבדיקת ההשערות: $H_0:\mu=55,\quad H_1:\mu=65$ העוצמה תהיה קטנה מ-0.9.

א. שלושת הטענות אינן נכונות.

ב. טענות 2 ו-3 אינן נכונות וטענה 1 נכונה.

ג. טענות 1 ו-2 נכונות וטענה 3 אינה נכונה.

ד. טענות 1 ו-3 אינן נכונות וטענה 2 נכונה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

| שאלה | תשובה | | שאלה | תשובה |
|---|---|---|---|---|
| 1 | א | | 25 | א |
| 2 | ד | | 26 | א |
| 3 | א | | 27 | ג |
| 4 | ג | | 28 | ד |
| 5 | ג | | 29 | א |
| 6 | א | | 30 | א |
| 7 | ב | | 31 | ד |
| 8 | ג | | 32 | ג |
| 9 | א | | 33 | א |
| 10 | א | | 34 | ג |
| 11 | א | | 35 | א |
| 12 | א | | 36 | ג |
| 13 | א | | 37 | א |
| 14 | א | | 38 | א |
| 15 | ג | | 39 | א |
| 16 | א | | 40 | ה |
| 17 | ג | | 41 | ד |
| 18 | ב | | 42 | ד |
| 19 | ג | | 43 | א |
| 20 | ד | | 44 | ד |
| 21 | ג | | 45 | ג |
| 22 | ג | | 46 | ב |
| 23 | א | | 47 | ד |
| 24 | ב | | | |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל